FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Existencia de solución de Ecuacións Diferenciais Ordinarias por medio de series de potencias.

Paula Martínez Rodríguez

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Existencia de solución de Ecuacións Diferenciais Ordinarias por medio de series de potencial

Paula Martínez Rodríguez

Febreiro 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática.
Título: Existencia de solución de Ecuacións Diferenciais Ordinarias por medio de series de potencias.
Breve descrición do contido
Neste traballo estudarase o método da resolución de Ecuacións Diferencias Ordinarias por medio de series de potencias, probándose a validez do método xeral para ecuacións con coeficientes polinomiais e considerándose tanto puntos regulares como regulares-singulares. Farase un estudo dalgunhas ecuacións relevantes da física matemática, obténdose a solución xeral das ecuacións consideradas e véndose a relación das solucións obtidas con bases de Hilbert ortonormais dos correspondentes espazos L^2.
Recomendacións
Ter cursadas as materias de Introdución ás Ecuacións Diferenciais Ordinarias e Ecuacións Diferenciais Ordinarias.
Outras observacións

Índice xeral

Resumo

Este traballo está principalmente baseado na busca de solucións para as ecuacións diferencias ordinarias empregando series de potencias. Ao empregar dito método sobre uns cantos exemplos clásicos da física-matemática vamos a chegar a sua solución xeral. Tamén veremos a relación de ditas solucións coas calculadas empregando bases de Hilbert ortonormais sobre os respectivos espazos L^2.

O primeiro capítulo divídese en tres partes. A primeira parte fundamentase principalmente nun conxunto de definicións básicas que nos van permitir comprender con maior facilidade os contidos do traballo. Nos outros dous apartados do capítulo trabállase con puntos regulares e regulares-singulares. Definirase o método que nos permite calcular a solución xeral das ecuacións diferenciais ordinarias mediante series de potencias e consideraranse dous casos importantes como son a función Hiperxeométrica de Gauss e as funcións de Bessel.

O segundo capítulo divídese en catro partes. A primeira ten como base a exposición dunha serie de definicións e propiedades dos espazos de Hilbert. Isto empregarémolo nas últimas tres seccións para obter usando bases de Hilbert ortonormais sobre os seus espazos L^2. Esta última parte está formada por tres exemplos particulares de ecuacións importantes da física-matemática nas cales obteremos ditas solucións onde, para certos valores dos parámetros que xorden en cada unha das ecuacións, nos permite construír solucións obtidas mediante bases de Hilbert ortonormais dos respectivos espazos L^2.

Resumen

Este trabajo está principalmente basado en la busca de soluciones para las ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando series de potencias. Al usar dicho método sobre unos cuantos ejemplos clásicos de la física-matemática vamos a llegar a su solución general. También veremos la relación de dichas soluciones con las calculadas usando bases de Hilbert

ortonormales sobre los respectivos espacios L^2.

El primer capítulo se divide en tres partes. La primera parte se fundamenta principalmente en un conjunto de definiciones básicas que nos van a permitir comprender con mayor facilidad los contenidos del trabajo. En los otros dos apartados del capítulo se trabaja con puntos regulares y regulares-singulares. Se definirá el método que nos permite calcular la solución general de las ecuaciones diferenciales ordinarias mediante series de potencias y se considerarán dos casos importantes como son la función Hipergeométrica de Gauss y las funciones de Bessel.

El segundo capítulo se divide en cuatro partes. La primera tiene como base la exposición de una serie de definiciones y propiedades de los espacios de Hilbert. Esto lo utilizaremos en las últimas tres secciones para obtener usando bases de Hilbert ortonormales sobre sus espacios L^2. Esta última parte está formada por tres ejemplos particulares de ecuaciones importantes de la física-matemática en las cuales obtendremos dichas soluciones donde, para ciertos valores de los parámetros que surgen en cada una de las ecuaciones, nos permite contruír soluciones obtenias mediante bases de Hilbert ortonormales de los respectivos espacios L^2.

Abstract

This project addresses the search of solutions for ordinary differential equations applying power series. Using this method in several classic examples of physics-mathematics we will approach to it's general solution. We will also see the connection between those solutions and the ones calculated applying orthonormal Hilbert bases over the respective spaces L^2.

The first chapter is divided in three parts. The first part is supported especially in a set of basic definitions that will allow us to understand more easily the content of the project. In the other two parts of the chapter we work with regular and regular-singular points. The method that allow us to calculate the general solution of the ordinary differential equations will be defined by power series. Two important cases will be considered, such as the Hypergeometric Gauss function and the Bessel functions.

The second chapter is divided in four parts. The first part is supported by the exposition of several definitions and properties of the Hilbert spaces. We will use them in the last three sections to calculate the solutions using orthonormal Hilbert bases over it's spaces L^2. This last part is made up by three particular examples of important equations of the

physics-mathematics in which we will obtain those solutions. In them, certain values of the parameters that are created in each one of the equations allow us to build solutions obtained by orthonormal Hilbert bases of the respective spaces L^2.

Introdución

Na primeira parte deste traballo vaise a facer unha breve introdución a modo de repaso sobre as series de potencias e logo expoñerase o método que nos vai permitir calcular as solucións das ecuacións diferencias ordinarias. Tamén se fará unha breve introdución aos puntos ordinarios e singulares-regulares que nos serán de gran axuda na hora de buscar a existencia das solucións das distintas ecuacións diferencias ordinarias. Na parte final mostraranse algúns exemplos fundamentais da física-matemática como é o caso da ecuación hiperxeométrica de Gauss ou a ecuación de Bessel entre outros.

Hai antecedentes moi antigos do uso dalgunhas series numéricas. O seu uso era sen unha definición exacta, pero non foi ata o século XVII cando tivo a maior relevancia. A nivel histórico o desenvolvemento das series está moi relacionado co desenrolo do Cálculo Infinitesimal. Nesa época usaban a división longa para obter desenvolvementos en series. Non había coñecementos suficientes e daba lugar a resultados absurdos en moitos casos. Newton enunciou o teorema binomial entorno aos anos 1664-1665 aínda que non foi anunciado ata o ano 1667 nunha carta que tiña como destinatario a Leibniz. Logo, nunha segunda carta nese mesmo ano Newton detallou como chegou ao descubrimento da serie binomial. Partindo da obra de Wallis sobre o cálculo de áreas (dende $x = 0$ ata x pechadas por curvas cuxas ordenadas eran da forma $(1 - x^2)^n$). Chegou usando interpolación a :

$$(1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \dots .$$

É moi probable que este enfoque indirecto de Newton fose unha sorte para os seus futuros traballos xa que a partir disto viuse claro que se podía operar con series infinitas máis ou menos do mesmo modo que con expresións polinómicas finitas. A xeneralización deste método tivo lugar cando obtivo a mesma serie infinita extraendo a raíz cadrada de $(1-x^2)$ por medio de un proceso alxébraico xeral. Para comprobalo multiplicou a serie por si mesma e obtivo o radicando de partida $1 - x^2$. Analogamente Newton descubriu que o resultado obtido para $(1 - x^2)^{-1}$ polo teorema binomial para $n = -1$ coincidía co obtido por medio da división longa. Así Newton chegou a conclusión de que as series infinitas non debían ser consideradas recursos aproximativos senon que eran formas alternativas de expresar as funcións que representaban.

O segundo e último capítulo está dividido en catro seccións. A primeira delas está baseada principalmente na introdución de definicións e propiedades relativas aos espazos e bases de Hilbert e as últimas tres seccións correspóndense con tres casos particulares nos cales calcularemos tanto as solucións mediante series de potencias como tamén o faremos empregando bases de Hilbert en L^2. Quizás a definición máis relevante que se nos vai a presentar en este capítulo é a de base de Hilbert que será a que nos permita obter as solucións.

David Hilbert (1862-1943) foi un matemático alemán que fixo grandes avances na análise matemática. A súa teoría pode considerarse unha continuación natural da teoría dos espazos euclidianos. Foi un dos grandes impulsores da análise funcional moderna. Estudou os espazos de infinitas dimensións que máis tarde levarían o seu nome, isto é, espazos de Hilbert.

Ao final deste capítulo, nas últimas tres seccións, preséntanse tres ecuacións moi relevantes na física-matemática: a ecuación de Legendre, a ecuación de Hermite e a de Laguerre. En estas seccións o que se vai facer en primeiro lugar é calcular a solución de cada unha destas ecuacións usando series de potencias mediante o método empregado no capítulo anterior e logo facendo os respectivos cambios de variable calcularemos as correspondentes solucións das ecuacións,isto é, as funcións de Legendre, Hermite e Laguerre. Logo, construiremos unha base ortonormal dos correspondentes espazos L^2, por medio da construción dos polinomios de Legendre, Hermite e Laguerre, que se corresponden con valores particulares dos parámetros que xorden en cada ecuación.

A nivel histórico os polinomios ortogonais remóntanse ao século XVIII e están relacionados coa resolución de problemas que teñen unha inmediata aplicación práctica. Un dos problemas destacados durante esos anos foi o da atracción de un corpo por unha esfera. O matemático que se centrou principalmente na súa resolución foi Adrien M. Legendre (1752-1833). Escribiu en 1782 un artigo no cal probou un teorema moi relevante que di que se coñeces o valor da forza de atracción dun corpo de revolución nun punto exterior situado nun eixo, entón coñecerase en todo punto exterior. Así o problema redúcese a o estudo da compoñente radial:

$$P(r,\theta,\phi) = \int\int\int \frac{(r-r')\cos\gamma}{(r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2)^{3/2}} r'^2 \operatorname{sen}\theta' d\theta' d\phi' dr',$$

onde $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\phi'$.

Legendre tamén probou que o integrando da compoñente radial se pode expresar empregando unha serie de potencias $\frac{r'}{r}$ do seguinte xeito:

$$\frac{1}{r^2}\left\{1+3P_2(\cos\gamma)\frac{r'^2}{r^2}+5P_4(\cos\gamma)\frac{r'^4}{r^4}+...\right\}.$$

As funcións $P_2, P_4, ...$ son o que hoxe coñecemos como polinomios de Legendre.

No ano 1784, Legendre deduciu o carácter ortogonal das funcións $P_{2n}(x)$ e así foi como se descubriu a primeira familia de polinomios ortogonais da historia. Nun artigo posterior introduciu os polinomios de Legendre de grao impar e tamén os que hoxe se coñecen como polinomios asociados de Legendre: $P_n^m(x)$ que se expresan en función dos polinomios de Legendre P_n.

A seguinte familia de polinomios ortogonais que se descubriu foi a dos polinomios de Hermite, H_n, que reciben este nome na honra do seu descubridor Charles Hermite (1822-1901) e logo a seguinte familia en ser descuberta foi a dos polinomios de Laguerre, L_n^α, que foron descubertos por Edmond Nicolás Laguerre (1834-1886).

Os datos históricos que aparecen nesta introdución son sacados de [4] e [12].

Capítulo 1

Solucións das ecuacións diferencias ordinarias usando series de potencias.

Ao longo deste capítulo vanse a introducir unha serie de definicións básicas sobre as series de potencias que nos axudaran a comprender mellor o resto do traballo. Logo explicarase o método de resolución das ecuacións diferencias ordinarias mediante series de potencias e expoñeranse algúns exemplos relevantes a nivel físico-matemático. A sección 1.1. está principalmente baseada no capítulo 8 de [2] e a parte teórica das seccións 1.2. e 1.3. están fundamentadas no capítulo 6 de [6].

1.1. Introdución ás series de potencias.

Nesta sección vamos a facer unha breve introdución ás series de potencias e tratar de explicar algunhas propiedades sobre elas. Tamén engadiremos algunhas definicións e explicacións que nos servirán como base ao longo do traballo.

Sexa $\{a_n\}$ unha sucesión de números reais, a partir desta vamos a formar unha nova sucesión $\{s_n\}$ que definimos como:

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Definición 1.1. O par ordenado $(\{a_n\}, \{s_n\})$ chámase **serie infinita**. O número $\{s_n\}$ recibe o nome de **suma parcial n-ésima** da serie. O carácter converxente ou diverxente da serie deberase a se o fai a serie $\{s_n\}$.

Teorema 1.2 (Criterio do cociente.). *Dada unha serie de número reais non nulos, $\sum a_n$, dise:*

- *Se* $\limsup_{n\longrightarrow\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ *a serie é absolutamente converxente.*
- *Se* $\liminf_{n\longrightarrow\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ *a serie é diverxente.*
- *Cando* $\liminf_{n\longrightarrow\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq 1 \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ *o criterio non decide.*

Teorema 1.3 (Criterio da raíz.). *Dada unha serie de números reais non nulos,* $\sum a_n$*, dise:*

- *Se* $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *a serie é absolutamente converxente.*
- *Se* $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ *a serie é diverxente.*
- *Cando* $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ *o criterio non decide.*

Definición 1.4. Sexan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dúas series de potencias, ao multiplicalas obteremos o **producto de Cauchy**, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, con:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{sendo} \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Definición 1.5. Unha **serie de potencias** de centro $x_0 \in \mathbb{R}$ é unha serie infinita da forma:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Escríbese de forma máis abreviada como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1.1}$$

onde os x, x_0 e a_n, con $n = 0, 1, 2, \dots$, son números complexos.

A toda serie de potencias asóciaselle un círculo de converxencia de raio R tal que a serie é absolutamente converxente en todo x do interior do círculo de converxencia e diverxente para todo x do exterior do círculo. O centro do círculo é x_0. Para calcular o valor de R, en primeiro lugar debemos considerar:

$$\lambda = \limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e de aí deducimos que:

$$R = \frac{1}{\lambda}.$$

Teorema 1.6. *Dada unha serie de potencias (1.1) de centro x_0 e sendo R o seu raio de converxencia. A serie converxe absolutamente se $|x - x_0| < R$ e diverxe se $|x - x_0| > R$. Tamén debemos ter en conta que a serie converxe uniformemente en todo subconxunto compacto interior ao círculo de converxencia.*

Demostración. Para demostrar o teorema anterior vamos a utilizar o criterio da raíz. Tense:

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \frac{|x - x_0|}{R},$$

entón a serie converxe absolutamente se $|x - x_0| < R$ e diverxe se $|x - x_0| > R$.

Para probar a segunda parte basta con considerar que T é un subconxunto compacto do círculo de converxencia. Entón existe un punto $p \in T$ tal que:

$$|x - x_0| \leq |p - x_0|, \forall x \in T,$$

así, tense:

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n(p - x_0)^n|, \forall n > 0, \forall x \in T.$$

Do anterior deducimos que $|a_n(p - x_0)^n|$ é unha maiorante numérica en T e polo tanto aplícase o criterio da Maiorante de Weierstrass [1] e xa queda garantida a converxencia uniforme.

□

Definición 1.7. Sexa f unha función de clase C^∞ nunha veciñanza do punto x_0. A seguinte serie denomínase **serie de Taylor xerada por f nunha veciñanza de x_0**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Cando $x_0 = 0$ a serie recibe o nome de **serie de MCLaurin**.

Definición 1.8. Toda función que admite o seu desenrolo en serie de potencias do seguinte xeito:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{1.2}$$

nalgunha veciñanza de x_0, dise que é **analítica** en x_0. Entón os a_n veñen dados por:

[1] Podemos ver o enunciado e demostración do Teorema da Maiorante de Weierstrass en ([2], sección 9.6., páx 271)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

e (1.2) recibe o nome de serie de Taylor de f no punto x_0.

1.2. Puntos ordinarios.

Ao longo desta sección vamos a traballar coa ecuación linear xeral homoxénea de segunda orde:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{1.3}$$

O que imos facer e estudar as solucións de (1.3) nun intervalo que contén ao punto x_0. Para poder facelo debemos estudar o comportamento de P e Q en dito punto.

Para comezar vamos a supor que P e Q son analíticas en x_0.

Temos a seguinte definición:

Definición 1.9. Dise que o punto x_0 na ecuación (1.3) é un **punto ordinario** se ambas funcións P e Q son analíticas no punto x_0.

Así chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 1.10. *Sexa x_0 un punto ordinario da ecuación (1.3) e sexan as constantes arbitrarias a_0 e a_1. Entón existe unha única función y, analítica no punto x_0, que é solución da ecuación (1.3) e que satisfai as condicións iniciais $y(x_0) = a_0$ e $y'(x_0) = a_1$. Logo, se os desenvolvementos en series de potencias de P e Q son válidos nun intervalo $|x - x_0| < R$, con R positivo, entón o desenvolvemento en series de potencias da única solución y é válido en dito intervalo.*

Demostración. Vamos a considerar, sen perda de xeneralidade, o caso $x_0 = 0$ xa que é máis sinxelo traballar con el.

Grazas a hipótese do teorema garántese o carácter analítico na orixe de P e Q e, polo tanto, ambas se poden expresar en series de potencias:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + ...$$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + ...$$

Son converxentes nun intervalo $|x| < R$ con $R > 0$.

Partindo das condicións iniciais temos que calcular unha solución para (1.3) en forma de serie de potencias:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \tag{1.4}$$

cun raio de converxencia non menor que R.

Derivamos (1.4):

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ...$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n = 2a_2 + 6a_3 x + ...$$

Aplicando a regra do produto nas series de potencias (produto de Cauchy):

$$P(x)y'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(k+1)a_{k+1}\right] x^n$$
$$Q(x)y(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k\right] x^n.$$

Entón, substituímos o calculado anteriormente en (1.3) e temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right] x^n = 0.$$

Así, chegamos á seguinte fórmula de recorrencia:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n}((k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k), n \geq 0. \tag{1.5}$$

Entón, tomando $n = 0, 1, 2, ...$ tense:

$$\begin{aligned}
2a_2 &= -(p_0 a_1 + q_0 a_0) \\
2 \cdot 3a_3 &= -(p_1 a_1 + q_1 a_0 + 2p_0 a_2 + q_0 a_1) \\
3 \cdot 4a_4 &= -(p_2 a_1 + q_2 a_0 + 2p_1 a_2 + q_1 a_1 + 3p_0 a_3 + q_0 a_3) \\
&\;...
\end{aligned}$$

Así obtemos os termos a_n, con $n \geq 2$, en función de a_0 e a_1. Polo tanto, a serie (1.4) satisfai (1.3) xunto coas condicións iniciais, e queda determinada univocamente para cada a_0 e a_1.

Agora temos que probar que a función definida en (1.4), cos coeficientes definidos en (1.5), converxe para $|x| < R$. Por hipótese xa sabemos que P e Q son converxentes para $|x| < R$ con $R > 0$, e agora temos que ver que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converxe polo menos sobre o mesmo intervalo, tomando a_0 e a_1 arbitrarios e a_{n+2} definido correntemente para $n \geqslant 0$ por (1.5).

Sexa r un número positivo tal que $r < R$. Como $P(x)$ e $Q(x)$ son converxentes para $x = r$ e os termos de toda serie converxente tenden a cero, temos que son limitados, co cal existe unha constante $M > 0$ tal que:

$$|p_n| r^n < M \qquad \text{e} \qquad |q_n| r^n < M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicamos ditas desigualdades en (1.5):

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leq \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|\right] r^k \\
&\leq \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|\right] r^k + M|a_{n+1}|r.
\end{aligned}$$

O termo $M|a_{n+1}|r$ foi engadido porque servirá de axuda a continuación.

Agora consideramos $b_0 = |a_0|$, $b_1 = |a_1|$ e definimos b_{n+2} para $n \geq 0$, do seguinte xeito:

$$(n+1)(n+2)b_{n+2} = \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)b_{k+1} + b_k\right] r^k + M b_{n+1} r, \tag{1.6}$$

con $0 \leq |a_n| \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Vexamos os valores de x nos que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converxe. Queremos aplicar o criterio do cociente, entón substituímos n en (1.6) por $n-1$ en primeiro lugar e logo por $n-2$:

$$\begin{aligned}
n(n+1)b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)b_{k+1} + b_k\right] r^k + M b_n r, \\
(n-1)n b_n &= \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1)b_{k+1} + b_k\right] r^k + M b_{n-1} r.
\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
rn(n+1)b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1)b_{k+1} + b_k\right] r^k + rM(nb_n + b_{n-1}) + M b_n r^2 \\
&= (n-1)n b_n - M b_{n-1} r + rM(nb_n + b_{n-1}) + M b_n r^2 \\
&= [(n-1)n + rMn + Mr^2] b_n.
\end{aligned}$$

Agora, aplicamos o criterio do cociente:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-1)n + rMn + Mr^2}{rn(n+1)},$$

tomamos os respectivos valores absolutos:

$$\left| \frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n} \right| = \frac{b_{n+1}}{b_n}|x|$$

e finalmente aplicamos o límite cando n tende a infinito e obtemos $\frac{|x|}{r}$.

Entón, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converxe para $|x| < r$. Pola desigualdade $|a_n| \leqslant b_n$ e o criterio de comparación, temos que a serie descrita en (1.4) tamén converxe para $|x| < r$. Como $r < R$ con $r > 0$, tense que (1.4) converxe para $|x| < R$ polo que quedaría demostrado.

$\square$

1.3. Puntos singulares-regulares.

Nesta sección vamos a facer unha breve introdución aos puntos singulares e singulares-regulares e tamén se vai a explicar o método que nos permitirá obter as solucións das ecuacións diferenciais ordinarias mediante series de potencias nestes casos. Ao final do capítulo realizaranse un par de exemplos nos cales se empregará dito método.

Definición 1.11. Un punto x_0 diremos que é un **punto singular** da ecuación (1.3) se unha ou ambas funcións de coeficientes, P ou Q, non son analíticas en x_0.

Definición 1.12. Un punto singular x_0 da ecuación (1.3) dise que é un **punto singular-regular** se ambas funcións $(x - x_0)P(x)$ e $(x - x_0)^2 Q(x)$ son analíticas en x_0. Diremos que x_0 é un **punto irregular** no caso de que algunha delas ou ambas non sexan analíticas.

Agora vamos a ver de modo teórico como resolver a ecuación linear de segunda orde (1.3) entorno ao punto singular regular $x_0 = 0$.

Buscaremos unha solución na forma da serie de Frobenius:

$$y(x) = x^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \tag{1.7}$$

con $a_0 \neq 0$ e m un número real que está por determinar.

Traballaremos con $x > 0$, xa que o comportamento das solucións en $x < 0$ poderiamos estudalo, analogamente, facendo o cambio de variable $t = -x$ e resolver a ecuación en $t > 0$.

Partimos da hipótese de que $xP(x)$ e $x^2Q(x)$ son analíticas en $x_0 = 0$, polo tanto poden expresarse como series de potencias:

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad \text{e} \qquad x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \tag{1.8}$$

válidos en $|x| < R$ para $R > 0$.

Hai que calcular os posibles valores de m en (1.7) e para cada m calcular os coeficientes, a_n, con $n \geq 0$, correspondentes.

Escribimos (1.7) como:

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}$$

e calculamos as derivadas primeira e segunda:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n-1)(m+n) a_n x^{m+n-2} = x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n)(m+n-1) x^{m+n}. \end{aligned}$$

Así temos:

$$\begin{aligned} P(x)y'(x) &= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1} \right] = x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^n \right] \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} a_k (m+k) \right] x^n = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k} a_k (m+k) + p_0 a_n (m+n) \right] x^n, \\ Q(x)y(x) &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(a_n x^{m+n} \right) = x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k \right) x^n = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} a_k + q_0 a_n \right) x^n. \end{aligned}$$

Entón substituímos en (1.3) as expresións anteriores e sacamos factor común a x^{m-2}:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n [(m+n)(m+n-1) + p_0 (m+n) + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^n = 0.$$

Agora igualamos a cero os coeficientes de x^n e chegamos á seguinte fórmula de recorrencia para o cálculo dos a_n:

$$a_n[(m+n)(m+n-1)+p_0(m+n)+q_0]+\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k}+q_{n-k}]=0. \tag{1.9}$$

Entón para os distintos valores de n danse ás seguintes igualdades:

$$a_0[m(m-1)+mp_0+q_0]=0$$
$$a_1[(m+1)m+p_0(m+1)+q_0]+a_0(mp_1+q_1)=0$$
$$a_2[(m+2)(m+1)+p_0(m+2)+q_0]a_0(mp_2+q_2)+a_1[(m+1)p_1+q_1]=0$$
$$...$$
$$a_n[(m+n)(m+n-1)+p_0(m+n)+q_0]+a_0(mp_n+q_n)+\cdots+a_{n-1}[(m+n-1)p_1+q_1]=0$$
$$...$$

Definindo $f(m)=m(m-1)+mp_0+q_0$, podemos reescribir as ecuacións do seguinte xeito:

$$a_0 f(m)=0$$
$$a_1 f(m+1)+a_0(mp_1+q_1)=0$$
$$a_2 f(m+2)+a_0(mp_2+q_2)+a_1[(m+1)p_1+q_1]=0$$
$$...$$
$$a_n f(m+n)+a_0(mp_n+q_n)+\cdots+a_{n-1}[(m+n-1)p_1+q_1]=0 \tag{1.10}$$
$$...$$

Xa que a_0 é sempre non nulo temos que $f(m)=0$, é dicir,

$$m(m-1)+mp_0+q_0=0. \tag{1.11}$$

A ecuación (1.11) será ao que chamaremos **ecuación indicial**.

Denotamos por m_1 e m_2 as raíces da ecuación (1.11). Reciben o nome de **expoñentes** da ecuación (1.3) no punto regular $x_0=0$.

Da ecuación (1.10) deducimos que os a_n están determinados en función de a_0 para calquera que sexa o valor de m, excepto cando $f(m+n)=0$ para algún n enteiro, no cal o proceso de recorrencia falla. Ademais se $m_1 = m_2 + n$, para algún $n \geq 1$, tomando $m = m_1$ obtemos unha solución formal, pero se tomamos $m = m_2$ obtemos un fallo na recorrencia e polo tanto non estariamos ante unha solución formal. Tamén sería unha solución formal se $m_1 = m_2$. Pode ser posible que os m_1 e m_2 sexan números complexos conxugados pero en principio en estes casos non vamos a traballar xa que teriamos que introducirnos na análise complexa e elevariamos a dificultade de dita explicación.

Para ver o anterior e ter un método para estudar segundas solucións probaremos o seguinte teorema:

Teorema 1.13. *Sexa $x_0 = 0$ un punto singular da ecuación diferencial*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1.12}$$

e supoñemos válidos no intervalo $|x| < R$ con $R > 0$ os seus desenvolvementos en series de potencias $xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e $x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$.

Consideramos as raíces da ecuación indicial, (1.11), m_1 e m_2 con $m_2 \leq m_1$. Entón a ecuación (1.12) podemos atoparlle polo menos unha solución:

$$y_1(x) = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{1.13}$$

no intervalo $|x| < R$. Cos a_n determinados en termos de a_0 pola función de recorrencia:

$$a_n[(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \tag{1.14}$$

onde m_1 substitúe a m.

A serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converxe para $|x| < R$.

Ademais, se $m_1 - m_2$ non é un enteiro positivo ou cero a ecuación (1.12) ten outra solución independente:

$$y_2(x) = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0)$$

sobre o mesmo intervalo. Neste caso os a_n tamén quedan determinados por a_0 grazas a fórmula (1.14) substituíndo m por m_2 e de novo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e converxente en $|x| < R$.

Demostración. Consideremos as series de potencias:

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{e} \quad x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{1.15}$$

que converxen para $|x| < R$ con $R > 0$ e a ecuación indicial:

$$f(m) = m(m-1) + mp_0 + q_0 = 0, \tag{1.16}$$

e consideramos o caso na cal (1.16) ten so dúas raíces reais cumprindo que $m_2 \leqslant m_1$.

Agora analicemos a converxencia de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.17}$$

sendo a_0 unha constante arbitraria non nula, e os a_n defínense a partir de a_0 mediante a seguinte función de recorrencia:

$$f(m+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k[(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}]. \tag{1.18}$$

Vamos a ver que (1.17) é converxente para $|x| < R$ se $m = m_1$ e tamén se $m = m_2$ e $m_1 - m_2$ non é un enteiro positivo.

Podemos escribir (1.16) como:

$$f(m) = (m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 - m_2)m + m_1 m_2,$$

e así chegamos a:

$$f(m_1 + n) = n(n + m_1 - m_2) \quad \text{e} \quad f(m_2 + n) = n(n + m_2 - m_1).$$

Entón tense:

$$|f(m_1 + n)| \geq n(n - |m_1 - m_2|) \tag{1.19}$$

e

$$|f(m_2 + n)| \geq n(n - |m_2 - m_1|). \tag{1.20}$$

Sexa r un enteiro positivo tal que $r < R$. Como as series das expresións en (1.15) converxen para $x = r$, existe unha constante $M > 0$ tal que:

$$|p_n| r^n \leq M \quad \text{e} \quad |q_n| r^n \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.21}$$

Tomando $m = m_1$ en (1.18) e usando (1.19), obtemos:

$$n(n-|m_1-m_2|)|a_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{r^{n-k}}(|m_1|+k+1).$$

Definamos agora a sucesión b_n con $b_n = |a_n|$ para $0 \leq n \leq |m_1-m_2|$ e teremos:

$$n(n-|m_1-m_2|)b_n = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{r^{n-k}}(|m_1|+k+1) \tag{1.22}$$

para $n > |m_1-m_2|$. Claramente $0 \leq |a_n| \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vexamos que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ é converxente para $|x| < r$. Substituímos n por $n+1$ en (1.22) e multiplicamos por r:

$$r(n+1)(n+1-|m_1-m_2|)b_{n+1} = n(n-|m_1-m_2|)b_n + Mb_n(|m_1|+k+1),$$

así temos:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(n-|m_1-m_2|)+M(|m_1|+n+1)}{r(n+1)(n+1-|m_1-m_2|)}.$$

Entón aplicamos o criterio do cociente:

$$\left|\frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n}\right| = \frac{b_{n+1}}{b_n}|x|$$

e tomando o límite cando n tende a infinito temos $\frac{|x|}{r}$.

En consecuencia a serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converse para $|x| < r$. Polo tanto, (1.17) tamén converxe para $|x| < r$ e como r é un número positivo arbitrario menor que R, dedúcese que (1.17) converxe para $|x| < R$.

Analogamente, substituíndo m_1 por m_2 e usando (1.20) próbase que (1.17) é converxente tamén para $|x| < R$. Supoñendo que $m_1 - m_2$ non é un enteiro positivo para que a serie (1.17) este ben definida.

□

Agora vexamos un exemplo que exemplifica todo o visto ata este momento:

Exemplo 1.14. Consideramos a seguinte ecuación:

$$2x^2y'' + x(2x+1)y' - y = 0 \tag{1.23}$$

e vamos aplicarlle o método de Frobenius, isto é, vamos a buscar unha solución da seguinte forma:

$$y(x) = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \cdots. \tag{1.24}$$

Para que sexa máis cómodo traballar coa ecuación (1.23) podemos reescribila do seguinte modo:

$$y'' + \frac{\frac{1}{2} + x}{x}y' + \frac{\frac{-1}{2}}{x^2}y = 0.$$

Tense que:

$$xP(x) = \frac{1}{2} + x \quad \text{e} \quad x^2Q(x) = \frac{-1}{2}.$$

Entón $x_0 = 0$ é un punto singular-regular. Derivando (1.24) temos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= ma_0x^{m-1} + a_1(m+1)x^m + \cdots \\ y''(x) &= a_0m(m-1)x^{m-2} + a_1(m+1)mx^{m-1} + \cdots \end{aligned}$$

Agora, substituímos as expresións anteriores en (1.23) e sacamos factor común x^{m-2}, chegando a:

$$\begin{aligned} &a_0m(m-1) + a_1(m+1)mx + a_2(m+2)(m+1)x^2 + \cdots \\ &\left(\frac{1}{2} + x\right)\left[a_0m + a_1(m+1)x + a_2(m+2)x^2 + \cdots\right] \\ &-\frac{1}{2}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) = 0. \end{aligned}$$

Entón combinando as respectivas potencias de x e igualando a cero teriamos o seguinte:

$$\begin{aligned} a_0\left[m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\right] &= 0 \\ a_2\left[(m+2)(m+1) + \frac{1}{2}(m+2) - \frac{1}{2}\right] + a_1(m+1) &= 0 \\ \cdots \end{aligned} \tag{1.25}$$

De (1.25) dedúcese que:

$$m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0,$$

xa que sabemos que o valor de a_0 é non nulo.

Dita ecuación é a ecuación indicial de (1.23) e a súas raíces son:

$$m_1 = 1 \quad \text{e} \quad m_2 = -\frac{1}{2}$$

que serán os únicos valores posibles para m en (1.24).

Entón para $m_1 = 1$ vamos a calcular os coeficientes da solución en función de a_0:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{-a_0}{2+1-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{5}a_0 \\
a_2 &= \frac{-2a_1}{6+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{7}a_1 = \frac{-4}{35}a_0 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Como consecuencia, temos as seguintes solucións en series de Frobenius, sendo $a_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 + \cdots\right) \\
y_2(x) &= x^{\frac{-1}{2}}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Ditas soluciόns son independentes para calquera valor de x positivo, así temos que a solución xeral de (1.23) no intervalo ven dada pola expresión:

$$y(x) = c_1 x\left(1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{35}x^2 + \cdots\right) + c_2 x^{\frac{-1}{2}}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right).$$

Observación 1.15. Nun problema específico para calcular os coeficientes é máis sinxelo substituír a serie de Frobenius na ecuación diferencial que na función de recorrencia (1.14).

O **Teorema 1.13.** non nos resolve a pregunta de como atopar unha segunda solución cando $m_1 - m_2$ é igual a cero ou un enteiro positivo. Atopamos os seguintes tres casos:

Caso A: Se $m_1 = m_2$ non pode existir unha segunda solución de Frobenius posto que sería a mesma, xa que ambos valores do parámetro m son iguais, e por conseguinte o valor dos coeficientes tamén o é. Polo tanto as solucións non serían independentes e non podería existir unha segunda solución deste xeito.

Os outros dous casos, cando $m_1 - m_2$ é un número enteiro positivo, serán máis sinxelos de abordar se tomamos $m = m_2$ na fórmula de recorrencia (1.9) e a reescribimos do seguinte xeito:

$$a_n f(m_2 + n) = -a_0(m_2 p_n + q_n) - \cdots - a_{n-1}[(m_2 + n - 1)p_1 + q_1]. \tag{1.26}$$

Agora si, vexamos o seguinte par de casos que se basean nos posibles problemas que produce $f(m_2+n)=0$ no cálculo dos a_n:

Caso B: Se a parte dereita da igualdade en (1.26) non é cero cando $f(m_2+n)=0$, entón non hai ningún modo de calcular os valores dos coeficientes xa que non poderiamos resolver a ecuación.

Caso C: Se a parte dereita da igualdade en (1.26) vale cero cando $f(m_2+n)=0$, entón a_n pode alcanzar calquera valor sen ningún tipo de restrición. Polo tanto bastaría con tomar por exemplo $a_n=0$ e xa teriamos unha segunda solución de Frobenius.

Agora vexamos a forma que acada a segunda solución cando m_1-m_2 é un número enteiro positivo ou cero. Sexa $k=m_1-m_2+1$ un enteiro positivo. A ecuación indicial (1.11) pódese escribir como:

$$(m-m_1)(m-m_2)=m^2-(m_1+m_2)m+m_1m_2=0,$$

así observamos que $p_0-1=-(m_1+m_2)$ o que implica que $m_2=-m_1-p_0+1$ e por tanto $k=2m_1+p_0$.

Para calcular unha segunda solución vamos a empregar o seguinte método, o cal consiste en calcular unha nova solución a partir da que xa temos.

Para comenzar partimos da ecuación (1.12), vamos a buscarlle dúas solucións linearmente independentes, y_1 e y_2. Para poder empregar o método supoñamos que $y_1(x)$ é solución non nula de (1.12) e polo tanto $c\,y_1(x)$, sendo c unha constante arbitraria, tamén o é.

O método fundaméntase principalmente en substituír a constante arbitraria c por unha función descoñecida $\nu(x)$ e intentar calcular esta función de modo que $y_2(x)=\nu(x)y_1(x)$ sexa unha solución de (1.12).

Vamos a partir da hipótese de que $y_2(x)=\nu(x)y_1(x)$ é solución de (1.12), teriamos:

$$y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2=0. \tag{1.27}$$

A nosa incógnita será agora $\nu(x)$.

Derivando $y_2(x)=\nu(x)y_1(x)$ tense:

$$y_2'(x)=\nu'(x)y_1(x)+\nu(x)y_1'(x) \quad \text{e} \quad y_2''(x)=\nu(x)y_1''(x)+2\nu'(x)y_1'(x)+\nu''(x)y_1(x).$$

Substituímos isto en (1.27) obtemos:

$$\nu(x)(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y(x)) + \nu'(x)(2y_1'(x) + P(x)y_1(x)) + \nu''(x)y_1(x) = 0.$$

Como $y_1(x)$ é solución de (1.12), reducimos o anterior a:

$$\nu''(x)y_1(x) + \nu'(x)(2y_1'(x) + P(x)y_1(x)) = 0$$

e reescribímolo como:

$$\frac{\nu''(x)}{\nu'(x)} = -2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - P(x).$$

Integramos o anterior:

$$\log \nu'(x) = -2 \log y_1(x) - \int P(x)dx$$

que agora o podemos escribir como:

$$\nu'(x) = \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx}$$

e por tanto:

$$\nu(x) = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx}.$$

Así, con ver a independencia linear de $y_1(x)$ e $y_2(x) = \nu(x)y_1(x)$ teriamos a segunda solución.

Entón, apliquemos o método que acabamos de explicar ao noso caso particular. Partimos da solución $y_1(x) = \nu(x)y_1(x)$ e calculamos a función $\nu(x)$:

$$\begin{aligned} \nu'(x) &= \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx} = \frac{1}{x^{2m_1}(a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{-\int (\frac{p_0}{x} + p_1 + \dots)dx} \\ &= \frac{1}{x^{2m_1}(a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{(-p_0 \log x - p_1 x - \dots)} = \frac{1}{x^k(a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{(-p_1 x - \dots)} \\ &= \frac{1}{x^k} g(x). \end{aligned}$$

A función $g(x)$ é analítica en $x_0 = 0$. Nalgún intervalo aberto que contén á orixe tense:

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots, \quad b_0 \neq 0. \tag{1.28}$$

Dedúcese do anterior que:

$$\nu'(x) = b_0x^{-k} + b_1x^{-k+1} + \dots + b_{k-1}x^{-1} + b_k + \dots,$$

e integrando temos:

$$\nu(x) = \frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{b_1 x^{-k+2}}{-k+2} + \cdots + b_{k-1}\log x + b_k x + ...$$

A solución nova será:

$$\begin{aligned} y_2(x) = y_1(x)\nu(x) = y_1(x)\left(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + \cdots + b_{k-1}\log x + b_k x + ...\right) \\ = b_{k-1} y_1(x) \log x + x^{m_1}(a_0 + a_1 x + ...)\left(\frac{b_0 x^{-k+1}}{-k+1} + ...\right). \end{aligned}$$

Agora basta con que saquemos x^{-k+1} fora da serie, tomemos $m_1 - k + 1 = m_2^2$ e multipliquemos ambas series. Así obtemos a segunda solución:

$$y_2(x) = b_{k-1} y_1(x) \log x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{1.29}$$

Agora, se analizamos (1.29) teriamos:

- Se $m_1 = m_2$, entón $k = 1$ e $b_{k-1} = b_0 \neq 0$. Este sería o Caso A anterior e o termo que contén o logaritmo estaría presente en (1.29).
- Se $m_1 - m_2 = k-1$ é un enteiro positivo, podemos atopar dous casos, cando $b_{k-1} \neq 0$ e cando $b_{k-1} = 0$. No primeiro os logaritmos estarán presentes e sería o Caso B anterior e no segundo os logaritmos non estarían presentes e sería o Caso C.

Os coeficientes de (1.28) non se poden calcular de forma directa a nivel práctico. Ademais, como xa sabemos que nos Casos A e B o método de Frobenius non é totalmente eficaz vamos a obter unha segunda solución coa seguinte estrutura:

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

sendo c_n constantes descoñecidas.

1.3.1. Ecuación Hiperxeométrica de Gauss.

Posto que nos vindeiros capítulos a vamos a necesitar para traballar con outras ecuacións, en esta sección introducirase a ecuación Hiperxeométrica de Gauss.

A ecuación Hiperxeométrica de Gauss defínese como a seguinte ecuación diferencial:

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{1.30}$$

sendo a, b e c constantes reais.

Podemos reescribila como:

$$y'' + \frac{[c-(a+b+1)x]}{x(1-x)}y' - \frac{ab}{x(1-x)}y = 0.$$

Sexan:

$$P(x) = \frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \quad \text{e} \quad Q(x) = \frac{-ab}{x(1-x)},$$

os únicos puntos singulares son $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$.

Tense:

$$\begin{aligned} xP(x) &= \frac{c-(a+b+1)x}{1-x} = [c-(a+b+1)x](1+x+x^2+\cdots) \\ &= c + [c-(a+b+1)]x + ..., \\ x^2Q(x) &= \frac{-abx}{1-x} = -abx(1+x+x^2+\cdots) = -abx - abx^2 - ... \end{aligned}$$

polo que $x_0 = 0$ é un punto singular-regular.

Os coeficientes da ecuación indicial son $p_0 = c$ e $q_0 = 0$, polo que a ecuación terá a seguinte forma:

$$m(m-1) + mc = 0$$

e as súas raíces son $m_1 = 0$ e $m_2 = 1 - c$.

Sexa cal sexa c, polo **Teorema 1.13.** temos garantido que a ecuación (1.30) ten unha solución da seguinte forma:

$$y(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ..., \tag{1.31}$$

derivando temos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Reescribimos:

$$\begin{aligned}
xy''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n,\\
-x^2y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} -n(n-1)a_nx^n,\\
cy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c(n+1)a_{n+1}x^n,\\
-(a+b+1)xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -(a+b+1)(n+1)a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -(a+b+1)na_nx^n,\\
-aby(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -aba_nx^n,
\end{aligned}$$

e substituíndo en (1.30), igualando o coeficiente de x^n a cero tense:

$$a_{n+1} = \frac{n(n-1)+(a+b+1)n+ab}{n(n+1)+c(n+1)}a_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}a_n.$$

Tómase $a_0 = 1$ e calcularemos os demais coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{ab}{1\cdot c}\\
a_2 &= \frac{(a+1)(b+1)}{2\cdot(c+1)}a_1 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}\\
a_3 &= \frac{(a+2)(b+2)}{3\cdot(c+2)}a_2 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}
\end{aligned}$$

$$\ldots$$

Entón, substituímos os coeficientes calculados en (1.31) e tense:

$$\begin{aligned}
y(x) &= 1 + \frac{ab}{1\cdot c}x + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2 + \ldots\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

A serie anterior, (1.32), coñécese como serie hiperxeométrica e denótase por $F(a,b,c,x)$. O nome procede de igualar $a = 1$ e $b = c$ obtendo:

$$F(1,b,b,x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Se a ou b son enteiros ou valen cero a serie (1.32) pasa a ser un polinomio. En caso contrario basta con aplicar o criterio do cociente e teremos demostrado que converxe cando $|x| < 1$.

Cando c non é un enteiro negativo ou cero, $F(a, b, c, x)$ é unha función analítica en $(-1, 1)$, é a función hiperxeométrica.

No caso de que $1-c$ non sexa un enteiro negativo ou cero, polo **Teorema 1.13.**, queda garantido que a ecuación (1.30) ten unha segunda solución independente entorno a $x = 0$ con expoñente $m_2 = 1 - c$. Dita solución ten a seguinte forma:

$$y(x) = x^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{1-c}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots).$$

Neste caso teriamos que facer o mesmo que no caso anterior, substituír en (1.30) e calcular os coeficientes. Para facilitar o cálculo bastaría con modificar a variable dependente de (1.30) por $y = x^{1-c}z$. Así a ecuación (1.30) escríbese como:

$$\begin{aligned} &x(1-x)z'' + [(2-c) - ([a-c+1] + [b-c+1] + 1)x]z' \\ &- (a-c+1)(b-c+1)z = 0, \end{aligned} \tag{1.33}$$

que é a ecuación hiperxeométrica modificando as constantes a, b e c por $a-c+1$, $b-c+1$ e $2-c$.

De partida xa sabemos que a ecuación (1.33) admite a seguinte solución en serie de potencias:

$$z = F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

nas proximidades da orixe. A segunda solución será da forma:

$$y(x) = x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x).$$

Cando c non é un enteiro temos como solución xeral preto do punto $x_0 = 0$ a:

$$y(x) = c_1 F(a, b, c, x) + c_2 F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x). \tag{1.34}$$

En caso de querer resolver a ecuación (1.30) entorno á orixe teriamos que introducir unha nova variable independente $t = 1 - x$. Así a ecuación (1.30) transfórmase en:

$$t(1-t)y''(t) + [(a+b-c+1) - (a+b+1)t]y'(t) - aby(t) = 0.$$

Como é unha ecuación hiperxeométrica a solución xeral entorno a $t = 0$ dedúcese de (1.34) substituíndo x por t e c por $a + b - c + 1$. Se substituímos t por $1 - x$ obtemos a solución xeral de (1.30) entorno a $x_0 = 1$:

$$y(x) = c_1 F(a, b, a + b - c + 1, 1 - x) + c_2(1 - x)^{c-a-b} F(c - b, c - a, c - a - b + 1, 1 - x) \tag{1.35}$$

sempre que $c - a - b$ non sexa un enteiro en (1.35).

As ecuacións (1.34) e (1.35) permítennos ver as solucións xerais da ecuación (1.30) preto dos seus puntos singulares en termos dunha única función F.

Todo o anterior provén dunha propiedade da ecuación hiperxeométrica que se basa en que os coeficientes y'', y' e y son polinomios de grao dous, un e cero respectivamente e y'' ten ceros reais distintos. Polo que calquera ecuación que satisfai esta propiedade pódese transformar en unha ecuación hiperxeométrica facendo un simple cambio de variable. Vamos a ilustrar isto considerando a ecuación xeral seguinte:

$$(x - A)(x - B)y'' + (C + Dx)y' + Ey = 0, \tag{1.36}$$

con $A \neq B$.

Basta con facer o seguinte cambio de variable:

$$t = \frac{x - A}{B - A},$$

co cal se $x = A$ tense que $t = 0$ e se $x = B$ obtemos $t = 1$. Entón a ecuación (1.36) pode reescribirse como:

$$t(1 - t)y'' + (F + Gt)y' + Hy = 0, \tag{1.37}$$

con F, G e H combinacións das constantes da ecuación (1.36), isto é:

$$F = C,\ G = -(A + B + 1) \text{ e } H = -AB.$$

A ecuación (1.37) pode ser resolta entorno a $t = 0$ e $t = 1$ en termos da función hiperxeométrica e, por tanto, desfacendo o cambio de variable (1.36) pode ser resolta en termos da mesma función entorno a $x = A$ e $x = B$.

1.3.2. Ecuación de Bessel.

En este apartado vamos a resolver a ecuación de Bessel usando o método explicado anteriormente que nos permite obter solucións mediante series de potencias. Para realizar esta parte axudeime de [6] e [13].

Sexa a ecuación de Bessel:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{1.38}$$

sendo p unha constante real non negativa.

En primeiro lugar vamos a reescribila como:

$$y'' + \frac{x}{x^2}y' + \frac{(x^2 - p^2)}{x^2}y = 0,$$

aplicando o método de Frobenius:

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad Q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2},$$

así temos que $xP(x) = 1$ e $x^2Q(x) = x^2 - p^2$ e deducimos que a orixe é un punto singular regular.

A ecuación indicial será:

$$m(m-1) + m - p^2 = m^2 - p^2 = 0$$

e os seus expoñentes serán $m_1 = p$ e $m_2 = -p$.

Entón (1.38) admite unha solución de Frobenius:

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}$$

sendo $a_0 \neq 0$ e a serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converxente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Derivamos a posible función solución:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)a_n x^{n+p-1} \\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)(n+p-1)a_n x^{n+p-2}
\end{aligned}$$

e sexa:

$$x^2y''(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+p)(n+p-1)a_nx^{n+p-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)(n+p-1)a_nx^{n+p}$$
$$xy'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+p)a_nx^{n+p-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)a_nx^{n+p}$$
$$x^2y(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty}a_{n-2}x^{n+p}$$
$$-p^2y(x) = -p^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty}-p^2a_nx^{n+p}$$

.

Así quédanos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+p)(n+p-1)+(n+p)-p^2]a_nx^{n+p}+a_{n-2}x^{n+p}=0$$

e igualando x^{n+p} a cero tense:

$$n(n+2p)a_n + a_{n-2} = 0. \tag{1.39}$$

Despexando a_n chegamos á seguinte fórmula de recorrencia:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}. \tag{1.40}$$

Como xa sabemos $a_0 \neq 0$. Deducimos que se $a_1 = 0$ entón teriamos que $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Vanse a calcular os coeficientes a_n a partir da fórmula de recorrencia, (1.40), e dos coeficientes a_0 e a_1:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{2^2(1+p)},$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2p)} = \frac{a_0}{2^4 2!(1+p)(2+p)},$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{6(6+2p)} = -\frac{a_0}{2^6 3!(1+p)(2+p)(3+p)}$$

...

Entón reescribimos a solución $y(x)$ como:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 x^p \left[1 - \frac{1}{2^2(p+1)}x^2 + \frac{1}{2^4 2!(p+1)(p+2)}x^4 - \frac{1}{2^6 3!(p+1)(p+2)} + ...\right] \\ &= a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!(p+1)\dots(p+n)}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

A función de Bessel de primeira clase de orden p, $J_p(x)$, obtense ao darlle como valor $a_0 = \dfrac{1}{2^p p!}$ en (1.41), dito valor escóllese para logo ser máis sinxelo ver a ortonormalidade. Sexa:

$$J_p(x) = \frac{1}{2^p p!} x^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!(p+1)\dots(p+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}. \tag{1.42}$$

.

Temos xa calculada unha solución de (1.38) para $m_1 = p$, $J_p(x)$. Agora falta calcular a solución xeral e para elo vamos a obter unha solución independente que recibe o nome de función de Bessel de segunda clase. Para conseguir esta segunda solución temos que tomar $m_2 = -p$. Pode causarnos certos problemas en algúns casos, cando $m_1 - m_2 = 2p$ sea cero ou un enteiro positivo, é dicir, cando p sexa unha constante non negativa enteira.

Supoñamos que p é non enteiro, entón substituímos p por $-p$ no feito ata agora e vemos que (1.39) sofre a seguinte modificación:

$$n(-p+n)a_n + a_{n-2} = 0.$$

Do anterior deducimos que no caso no cal $p = 1/2$ e $n = 1$ o coeficiente a_1 non ten porque tomar o valor nulo. Como o que nos interesa é unha solución particular podemos seguir considerando $a_1 = 0$. Cada vez que se produza dito problema consideramos que $a_1 = a_3 = \dots = 0$. Tense:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(-2p+n)}$$

e seguindo a recorrencia:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2(-2p+2)} = -\frac{a_0}{2^2(-p+1)}, \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4(-2p+4)} = \frac{a_0}{2^4 2!(-p+1)(-p+2)}, \\ a_6 &= -\frac{a_4}{6(-2p+6)} = -\frac{a_0}{2^6 3!(-p+1)(-p+2)(-p+3)}, \end{aligned}$$

...

entón temos:

$$y(x) = a_0 x^{-p}\left[1 - \frac{1}{2^2(-p+1)}x^2 + \frac{1}{2^4 2!(-p+1)(-p+2)}x^4 - \frac{1}{2^6 3!(-p+1)(-p+2)(-p+3)}x^6 + ...\right]$$
$$= a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!(-p+1)\dots(-p+n)}$$

que ao substituír $a_0 = \dfrac{1}{2^{-p}p!}$ resulta ser:

$$\begin{aligned} J_{-p}(x) &= \frac{1}{2^{-p}p!}x^{-p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}n!(-p+1)\dots(-p+n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!(-p+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} \end{aligned} \tag{1.43}$$

.

Se calculamos o primeiro termo de (1.43) temos que é $\dfrac{1}{(-p)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-p}$ o que nos demostra que a función $J_p(x)$ non é limitada preto do punto $x = 0$. Isto sérvenos para ver que $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ son independentes xa que unha está limitada preto do cero e a outra non. Entón a solución xeral del (1.38) é:

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \tag{1.44}$$

con p non enteiro.

Cando p é un enteiro $m \geq 0$, a solución de (1.43) é da forma:

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!(-m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m} = \sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!(-m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m},$$

comenzamos a suma en $n = m$ porque cando $n = 0, \dots, m-1$ os factores de $\dfrac{1}{(-m+n)!}$ non están definidos.

Se modificamos n por $n+m$ temos:

$$
\begin{aligned}
J_{-m}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+m}\frac{1}{(n+m)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+m)-m} \\
&= (-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} = (-1)^m J_m(x).
\end{aligned}
$$

Así demostramos que en este caso non son independentes e polo tanto $y = c_1 J_m(x) + c_2 J_{-m}(x)$ non é a solución xeral de (1.38).

Entón vamos a buscar a solución. Cando p non é un enteiro, calquera función do tipo (1.44) con $c_2 \neq 0$ é unha función de Bessel de segunda clase, incluída a $J_{-p}(x)$. A función de Bessel de segunda clase defínese como:

$$
Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi}. \tag{1.45}
$$

Vamos a xustificar a elección de dita ecuación, basta con considerar o cambio $u(x) = \sqrt{x}y(x)$. Así transformamos (1.38) en:

$$
u'' + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right)u = 0. \tag{1.46}
$$

Cando (1.46) ten valores de x moi grandes a ecuación aproximase a $u'' + u = 0$ a cal ten solucións independentes $u_1(x) = \cos x$ e $u_2 = \operatorname{sen} x$. Entón se os valores de x son grandes calquera función de Bessel $y(x)$ se comporta como combinación linear de $\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x$ e $\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen} x$.

A xustificación disto débese a que:

$$
J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_1(x)}{x}^{3/2}
$$

e

$$
Y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) + \frac{r_2(x)}{x^{3/2}},
$$

onde $r_1(x)$ e $r_2(x)$ son limitadas cando x tende a infinito [2].

Cando p é un enteiro m, a función Y_p dada en (1.45) non está ben definida. Sen embargo pode verificarse que existe:

$$
Y_m(x) = \lim_{p\longrightarrow m} Y_p(x). \tag{1.47}
$$

[2] A xustificación desto podemos vela en [5]

Entón así xa queda definido $Y_m(x)$ en (1.47).

Polo tanto existe unha función de Bessel de segunda clase, e

$$y(x) = c_1 J_m(x) + c_2 Y_m(x) \tag{1.48}$$

é a solución xeral da ecuación de Bessel en calquera caso, isto é, para p enteiro ou non.

Capítulo 2

Bases de Hilbert.

Este capítulo dedicarase por completo á definición dos espazos de Hilbert e a establecer as súas propiedades. A finalidade disto é comparar os resultados obtidos usando o método do capítulo anterior cos que obteremos en bases de Hilbert ortonormais dos correspondentes espazos de L^2. Verémolo en tres casos particulares: ecuación de Legendre, ecuación de Hermite e na ecuación de Laguerre. Para elaborar estos casos tiven como referencia:[1], [3] [6], [8], [9], [10] e [11].

2.1. Introdución aos espazos e bases de Hilbert.

Ao longo desta sección vamos a expoñer unha serie de definicións e propiedades fundamentais sobre os espazos e bases de Hilbert. Esta teoría está fundamentada principalmente nos capítulos 4 e 5 de [1] e en ([7], Sección 4.2., páx.:20-21).

Definición 2.1. Sexa L un espazo linear sobre Λ (sendo Λ o campo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Defínese o **produto escalar (ou interno)** sobre o espazo L como unha aplicación:

$$(\cdot,\cdot) : L \times L \longrightarrow \Lambda$$

que a cada par de puntos $(x, y) \in L \times L$ asóciaselle un valor en Λ, que será o produto escalar de u e v, que cumpre:

1. $(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in L$

   $(u, u) = 0$ *se e so se* $u = 0$

2. $(u, v + w) = (u, v) + (u, w) \quad \forall u, v, w \in L$

3. $(u, \lambda v) = \lambda(u, v) \quad \forall u, v \in L,\ \alpha \in \Lambda$

4. $(u, v) = \overline{(v, u)}$

Definición 2.2. Ao par $(L, (\cdot, \cdot))$ chámaselle **espazo con producto ou espazo pre-Hilbert**.

Definición 2.3. Un **espazo de Hilbert** é un espazo pre-Hilbert completo.

Algúns exemplos de espazos de Hilbert son: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $L^2(\mathbb{R})$ ou l^2.

Definición 2.4. Dados $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Definimos $L^2(a, b)$ como o espazo de todas as funcións, $f : (a, b) \longrightarrow \Lambda$, medibles tales que:

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx < \infty.$$

Definición 2.5. Sexa $(L, (\cdot, \cdot))$ un espazo pre-Hilbert:

1. Dous vectores $u, v \in L$ dise que son **ortogonais** se $(u, v) = 0$. Denotámolo por $u \perp v$.

2. Sexa M un subconxunto calquera dun espazo de Hilbert L, $M \subset L$. Diremos que o vector u é ortogonal ao conxunto M se $u \perp v$ para todo $v \in M$, isto denotarase por $u \perp M$.

   Chamaremos ortogonal a M, con M distinto do baleiro, ao conxunto:

$$M^{\perp} := \{u \in M : u \perp v \ \ \forall v \in M\}.$$

Definición 2.6. Nun espazo pre-Hilbert a norma pode calcularse a partir do produto escalar, isto é, $\|v\| = \sqrt{(v, v)} = (v, v)^{\frac{1}{2}}$.

Definición 2.7. Sexa $(L, (\cdot, \cdot))$ un espazo pre-Hilbert e sexa $\|\cdot\|$ unha norma en L. Defínese a **Lei do Paralelogramo** como:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \ \ \forall u, v \in L$$

Proposición 2.8. *A condición necesaria para que $(L, (\cdot, \cdot))$ admita un producto escalar tal que $\|x\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}$, $\forall v \in L$ é que cumpra a Lei do Paralelogramo.*

Teorema 2.9 (de proxección ortogonal). *Sexa L un espazo de Hilbert e sexa $M \subset L$ un subespazo pechado. Entón $\forall u \in M$ verificase:*

$$u = u_1 + u_2, \text{ con } u_1 \in M, \ u_2 \in M^{\perp},$$

e a descomposición é única.

Demostración. En primeiro lugar demostraremos a existencia e unicidade de v_1 que é un vector de M que ten o seu extremo á mínima distancia do extremo de v. Sexa:

$$d \equiv \inf_{w \in M} \|v - w\|,$$

a distancia de v ao subespazo M. Por ser ínfimo, existe algunha sucesión $\{w_n\}_1^\infty \subset M$ tal que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|v - w_n\| = d$.

Para ver que $\{w_n\}_1^\infty$ é de Cauchy empregamos a lei do Paralelogramo:

$$\|w_n - w_m\|^2 + \|2v - (w_n + w_m)\|^2 = 2\|v - w_n\|^2 + 2\|v - w_m\|^2,$$

como $\|2v - (w_n + w_m)\|^2 = 4\|v - \dfrac{w_n + w_m}{2}\|^2 \geq 4d^2$, pois $\dfrac{w_n + w_m}{2} \in M$, tense:

$$\|w_n - w_m\|^2 \leqslant 2[\|v - w_n\|^2 + \|v - w_m\|^2 - 2d^2] \tag{2.1}$$

que cando n, m tenden a infinito converxe a cero.

Como M é pechado entón existe $\lim_{n \to \infty} w_n \equiv v_1 \in M$ e claramente $d = \|v - v_1\|$.

Para a unicidade basta con ver o que acontecería no caso de existir $v_1, v_1' \in M$ cumprindo que $\|v - v_1\| = \|v - v_1'\| = d$. A desigualdade (2.1) segue sendo válida, só hai que cambiar w_n e w_m por v_1 e v_1' e así chegamos a que $\|v_1 - v_1'\|^2 \leqslant 0$ e polo tanto $v_1 = v_1'$.

Agora vamos a demostrar que $v - v_1 \in M^\perp$. Sabemos que $\|v - v_1\| = d$ e que $\forall \lambda \in \Lambda$ e $\forall w \in M$ se ten:

$$d^2 \leq \|v - (v_1 + \lambda w)\|^2 = \|v - v_1 - \lambda w\|^2 = \|(v - v_1) - \lambda w\|^2,$$

entón aplicando a desigualdade triangular e as propiedades anteriores temos:

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|v - (v_1 + \lambda w)\|^2 = \|v - v_1\|^2 + \|\lambda w\|^2 - 2Re[\lambda(v - v_1), w] \\ &= d^2 + |\lambda|^2 \|w\|^2 - 2Re[\lambda(v - v_1, w)], \end{aligned}$$

de onde deducimos que:

$$|\lambda|^2 \|w\|^2 \geq 2Re[\lambda(v - v_1, w)], \forall \lambda \in \Lambda.$$

Se tomamos $\lambda = \dfrac{(w, v - v_1)}{\|w\|^2}$ cando $(v - v_1, w) \neq 0$, para algún $w \in M$, chegariamos a un absurdo.

$\square$

Dado un conxunto de vectores linearmente independentes en L, existe un modo sinxelo de conseguir un conxunto equivalente de vectores ortonormais, é o que se coñece como:

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt: Este proceso consiste en ir modificando os vectores dados para que cada un sexa ortonormal aos anteriores. Sexa $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, supoñamos os $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sexan coñecidos e linearmente independentes. Entón definimos a seguinte fórmula:

$$v_n = w_n - \sum_{i=1}^{n-1}(w_n, u_i)u_i, \qquad u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|},$$

que nos vai a proporcionar un conxunto de vectores ortonormais.

Demostración. Vamos a demostrar isto empregando o método de indución sobre n. Queremos demostrar que $(u_n, u_m) = 0$ para $n \neq m$.

Para $n = 2$:

$$v_2 = w_2 - (w_2, u_1)u_1, \quad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

e polo tanto $\|u_2\| = 1$.

Vamos a comprobar que $(u_1, u_2) = 0$, isto é:

$$\begin{aligned}(u_1, u_2) &= \left(u_1, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right) = \left(u_1, \frac{w_2 - (w_2, u_1)u_1}{\|v_2\|}\right) \\ &= \left(u_1, \frac{w_2}{\|v_2\|}\right) - \left(u_1, \frac{(w_2, u_1)u_1}{\|v_2\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|v_2\|}(u_1, w_2) - \frac{1}{\|v_2\|}(w_2, u_1) = 0.\end{aligned}$$

Así, xa temos demostrado que se cumpre para $n = 2$.

Supoñámolo certo para $n - 1$ e vexamos que acontece para n. Sexa:

$$v_n = w_n - \sum_{i=1}^{n-1}(w_n, u_i)u_i, \quad u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

e vese claramente que $\|u_n\| = 1$.

Para $i < n$ teriamos:

$$(u_n, u_i) = \left(\frac{v_n}{\|v_n\|}, u_i\right) = \left(\frac{w_n - \sum_{i=1}^{n-1}(w_n, u_i)u_i}{\|v_n\|}, u_i\right)$$

$$= \left(\frac{w_n}{\|v_n\|}, u_i\right) - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(w_n, u_i)u_i}{\|v_n\|}, u_i\right)$$

e como sabemos que se cumpre para $n-1$ entón :

$$\begin{aligned}(u_n, u_{n-1}) &= \left(\frac{w_n}{\|v_n\|}, u_{n-1}\right) - \left(\frac{(w_n, u_{n-1})u_{n-1}}{\|v_n\|}, u_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{\|v_n\|}(w_n, u_{n-1}) - \frac{1}{\|v_n\|}(w_n, u_{n-1}) = 0.\end{aligned}$$

Polo tanto xa temos o conxunto ortonormal buscado.

□

Definición 2.10. Un conxunto de vectores ortonormais $S = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ nun espazo de Hilbert L dise que é unha **base ortonormal** de L se é maximal, isto é, se non é subconxunto propio de ningún outro conxunto ortonormal de L. O cal é equivalente ao feito de que se o produto $(v_\alpha, u) = 0$, $\forall \alpha \in \Lambda$ entón $u = 0$.

Definición 2.11. Sexa $(L, (\cdot, \cdot))$ un espazo de Hilbert e $\{u_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ un conxunto ortonormal maximal en L, entón diremos que $\{u_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ é unha **base de Hilbert** do espazo de Hilbert L.

Proposición 2.12. *Todo espazo de Hilbert $L \neq \{0\}$ ten algunha base ortonormal.*

Demostración. Se unha familia de subconxuntos ortonormais está totalmente ordenada admite unha cota superior, a unión de todos eles, que é ao mesmo tempo outro conxunto ortonormal. Entón basta con aplicar o lema de Zorn para garantir a existencia de conxuntos ortonormais maximais baixo as relacións de orde. □

En xeral ó carácter ortogonal dos polinomios pode desenvolverse para medidas μ en $\mathbb{R}$ moi en xeral. Nalgúns casos podemos restrinxirnos a unhas medidas absolutamente continuas, isto é, cando existe unha función w non negativa tal que:

$$d\mu(x) = w(x)dx.$$

Definición 2.13. Sexa $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e sexa $w > 0$ en case todo punto. Defínese $L^2_w(a,b)$ como o espazo de todas as funcións medibles tales que:

$$\int_a^b [f(x)]^2 w(x)dx < \infty.$$

Proposición 2.14. *Sexa $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e sexa $w > 0$ en case todo punto. Defínese o* ***produto escalar (ou interior)*** *en $L^2_w(a,b)$ como:*

$$(f,g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \quad para \quad f,g \in L^2_w(a,b).$$

Demostración. Vexamos que se cumpren as propiedades do produto interior enunciadas na **Definición 2.1.**:

1. $(f,f)_w = \displaystyle\int_a^b f(x)f(x)w(x)dx \geq 0$, isto cúmprese porque a función $w(x)$ como sabemos por definición é estritamente positiva.

   $(f,f)_w = 0$ se e so se $f = 0$. Análogo ao caso anterior, se se fai a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)f(x)w(x)dx$ obviamente o resultado vai ser nulo.

2. $(f, g+h)_w = (f,g)_w + (f,h)_w$ para $f,g,h \in L^2_w(a,b)$ Vexamos que se cumpre:

$$\begin{aligned}(f,g+h)_w &= \int_a^b f(x)(g+h)(x)w(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)w(x) + f(x)h(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx + \int_a^b f(x)h(x)w(x)dx = (f,g)_w + (f,h)_w.\end{aligned}$$

3. $(f,\lambda g)_w = \lambda(f,g)_w \;\; \forall f,g \in L^2_w(a,b), \alpha \in \mathit{\Lambda}$. Vamos a comprobar que se cumpre:

$$(f,\lambda g)_w = \int_a^b f(x)\lambda g(x)w(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = \lambda(f,g)_w.$$

4. $(f,g)_w = (g,f)_w$. Comprobase facilmente así:

$$(f,g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)w(x)dx = (g,f)_w.$$

Polo tanto xa queda demostrado que satisfai as propiedades do produto interior.

□

Definición 2.15. Defínese a **norma** en $L^2_w(a,b)$ como:

$$\|f\|_w = \sqrt{(f,f)_w} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx}.$$

Teorema 2.16 (de aproximación de Weierstrass). *Sexa $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función continua no intervalo $[a, b]$. Entón f pode ser aproximada uniformemente por polinomios en $[a, b]$.*

Demostración. O que se quere probar é que, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio p (que só depende de ϵ), tal que:

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Vamos a considerar o caso no cal $[a, b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Agora estendamos a función f a F en $[-\pi, \pi]$ tal que $F(x) = f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $F(-\pi) = F(\pi) = 0$. Entón pode estenderse F a unha funciñon 2π-periódica en todo $\mathbb{R}$.

Dado $\epsilon > 0$, polo teorema de Fejér podemos encontrar un polinomio trigonométrico

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]$$

de modo que:

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|F(x) - T(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

A serie de Taylor para cosenos e senos converxe uniformemente en todo intervalo compacto. Entón, pódese atopar un polinomio p tal que:

$$\max_{|x|\leq\pi/2}|T(x) - p(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entón dedúcese do anterior que:

$$\max_{|x|\leq\pi/2}|f(x) - p(x)| = \max_{|x|\leq\pi/2}|F(x) - p(x)| < \epsilon.$$

□

Lema 2.17 (Criterio bases ortonormais de polinomios asociados a unha función peso). *Sexa $0 \neq \rho \in L^1(\mathbb{R})$, non negativa, e tal que existe $\alpha > 0$ para o cal:*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|t|}\rho(t)dt < \infty.$$

Se $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ son os polinomios ortonormais respecto ao produto escalar $(f, g)_\rho = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}g\rho dt$ obtidos de $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$ por Gram-Schmidt, entón a sucesión $\{p_n(t)\rho^{1/2}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ é unha base ortonormal para $L^2(sop\rho)$.

Observación 2.18. O método de Gram-Schmidt está xustificado porque o produto escalar introducido define unha estrutura de espazo de Hilbert para o conxunto de funcións f tales que $(f, f)_\rho < \infty$.

2.2. Bases de Legendre.

Nesta sección vamos a resolver a ecuación de Legendre. Atoparemos a solución empregando o método explicado no capítulo anterior e logo atoparemos unha familia de solucións que son unha base de Hilbert.

Sexa ecuación de Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \tag{2.2}$$

sendo p unha constante real.

En primeiro lugar vamos a reescribila como:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0.$$

Claramente as funcións de coeficientes:

$$P(x) = \frac{-2x}{1-x^2} \quad \text{e} \quad Q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2},$$

son analíticas en $x_0 = 0$, polo que a orixe é un punto ordinario e segundo vimos no primeiro capítulo atoparase unha solución da forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Derivamos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \end{aligned}$$

Agora substituímos en (2.2) ditas derivadas:

$$\begin{aligned} -x^2y''(x) &= -x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -n(n-1)a_n x^n \\ -2xy'(x) &= -2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2na_n x^n \\ p(p+1)y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n. \end{aligned}$$

Así temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - (n-1)na_nx^n - 2na_nx^n + p(p+1)a_nx^n = 0,$$

polo tanto, o coeficiente de x^n debe valer cero para calquera que sexa o valor de n:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (-(n-1)n - 2n + p(p+1))a_n = 0.$$

Despexamos a_{n+2}:

$$a_{n+2} = -\frac{-(n-1)n - 2n + p(p+1)}{(n+2)(n+1)}a_n = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n. \tag{2.3}$$

A partir de (2.3) obteremos os coeficientes a_n en función de a_0 e a_1:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}a_0 = -\frac{p(p+1)}{2!}a_0 \\
a_3 &= -\frac{(p-1)(p+2)}{2\cdot 3}a_1 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1 \\
a_4 &= -\frac{(p-2)(p+3)}{3\cdot 4}a_2 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0 \\
a_5 &= -\frac{(p-3)(p+4)}{4\cdot 5}a_3 = \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}a_1 \\
a_6 &= -\frac{(p-4)(p+5)}{5\cdot 6}a_4 = -\frac{p(p-4)(p-2)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0
\end{aligned}$$

$$\cdots$$

Se substituímos ditos coeficientes na nosa suposta solución obtemos a solución formal de (2.2) :

$$\begin{aligned}
y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n &= a_0\left[1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \cdots\right] \\
&+ a_1\left[x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \cdots\right].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Cando p non é un enteiro cada unha das series entre corchetes ten raio de converxencia $R = 1$. Para comprobar isto basta con considerar a fórmula de recorrencia (2.3). Na primeira serie, a dos elementos pares, bastaría con facer o troco de n por $2n$ e aplicando o criterio do cociente teriamos:

$$\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \left|-\frac{(p-2n)(p+2n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\right| |x|^2.$$

Tomamos o límite de n cando tende a infinito e obtemos que vale $|x|^2$ o cal será sempre menor que un no intervalo $(-1,1)$. Resolveríase de modo análogo para a serie impar. Como as series teñen raio de converxencia positivo xa queda demostrado que (2.4) é unha solución válida para (2.2) para calquera que sexan os valores de a_0 e a_1. Entón, cada unha das series é solución e como as funcións que definen son linearmente independentes queda garantido que (2.4) é a solución xeral de (2.2) sempre que $|x| < 1$.

Cando p sexa un enteiro non negativo unha das series é finita, é dicir, é un polinomio de grao p e a outra será unha serie infinita. No caso de p ser un enteiro negativo unha das series é finita, isto é, é un polinomio de grao $-p-1$ e a outra será unha serie infinita.

As funcións dadas por (2.4) reciben o nome de **polinomios de Legendre**, para p un enteiro non negativo.

Reescribimos a ecuación (2.2) como:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{2.5}$$

sendo n un enteiro non negativo.

Recordemos que as solucións de (2.5) son todas analíticas en $(-1,1)$.

As solucións máis interesantes son as próximas a $x = \pm 1$ xa que son os puntos singulares-regulares. Vamos a traballar con $x = 1$, polo que debemos facer o seguinte cambio de variable.

Modificamos a variable x por $t = \dfrac{(1-x)}{2}$, así cando $x = 1$ teriamos que $t = 0$ e (2.5) convértese en:

$$t(1-t)y''(t) + (1-2t)y'(t) + n(n+1)y(t) = 0. \tag{2.6}$$

É unha ecuación hiperxeométrica que tomas os valores: $a = -n$, $b = n+1$ e $c = 1$. Así entorno a $t = 0$ teriamos:

$$y_1(t) = F(-n, n+1, 1, t) \tag{2.7}$$

con F definida en (1.32).

Como os expoñentes de (2.6) valen ambos cero, para atopar unha nova solución debemos aplicar o método xa desenrolado na Sección 1.3. do primeiro capítulo. A solución será da forma $y_2 = \nu y_1$, derivando:

$$\nu'(t) = \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int \frac{(1-2t)}{t(1-t)} dt} = \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\ln(-t^2+t)} = \frac{1}{(-t^2+t)y_1^2(t)} = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{(1-t)y_1^2(t)}\right].$$

Como y_1^2 é un polinomio que ten como termo independente o 1, a función entre corchetes é analítica entorno a $t_0 = 0$ e ten a seguinte forma $1 + a_1 + a_2 t^2 + ...$, así temos:

$$\nu'(t) = \frac{1}{t} + a_1 + a_2 t + ...,$$

integramos e deducimos que:

$$\nu(t) = \log t + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2} ...$$

e así a nosa segunda solución será da forma:

$$y_2(t) = y_1(t)(\log t + a_1 + a_2 t + ...).$$

Así pois, a solución xeral de (2.6) será:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \tag{2.8}$$

Debemos observar que por culpa da existencia do termo $\log t$ a solución (2.8) é limitada entorno a $t = 0$ só cando $c_2 = 0$. Se substituímos t por $\frac{(1-x)}{2}$ deducimos que as solucións de (2.5) limitadas entorno a $x = 1$ son precisamente os múltiplos constantes de $F\left(-n, n+1, 1, \frac{(1-x)}{2}\right)$.

Así, defínese o n-ésimo polinomio de Legendre como:

$$\begin{aligned}
P_n(x) =& F\left(-n, n+1, 1, \frac{(1-x)}{2}\right) = 1 + \frac{(-n)(n+1)}{(1!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right) \\
&+ \frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \cdots \\
&+ \frac{(-n)(-n+1)\cdots[-n+(n-1)](n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(n!)}(\frac{1-x}{2})^2 \\
=& 1 + \frac{n(n+1)}{(1!)^2 2}(x-1) + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(2!)^2 2^2}(x-1)^2 + \cdots \\
&+ \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}(x-1)^n.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Sabemos que $P_n(x)$ ten grao n e que só ten potencias pares ou impares de x en función de se n é par ou impar. Entón, dependendo do carácter par ou impar escríbese:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \cdots, \tag{2.10}$$

onde a suma remata con a_0 no caso par e en $a_1 x$ no caso impar.

Agora queremos calcular en (2.9) os coeficientes a_n por recorrencia a partir de:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}.$$

Se substituímos na fórmula (2.3) p por n e n por $k-2$, obtemos:

$$a_k = -\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{(k-1)k} a_{k-2},$$

isto é,

$$a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n+k-1)} a_k.$$

Entón, para $k = n, n-2, ...$ tense:

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n \\ a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} a_n \\ &\quad ... \end{aligned}$$

Así, o n-ésimo polinomio de Legendre en (2.10) pasa a ser:

$$\begin{aligned} P_n(x) =& \frac{(2n!)}{(n!)^2 2^n} [x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a_n + ... \\ &+ (-1)^k \frac{n(n-1) \cdots (n-2k+1)}{2^k k!(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2k+1)} x^{n-2k} + ...]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dado que:

$$n(n-1) \cdots (n-2k+1) = \frac{n!}{(n-2k)!}$$

e

$$\begin{aligned} &(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2k+3)(2n-2k+1) \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots (2n-2k+3)(2n-2k+2)(2n-2k+1)}{(2n-2k+2) \cdots (2n-2)2n} \\ &= \frac{(2n!)}{(2n-2k)!} \frac{(2n!)(n-k)!}{(2n-2k)!2^k n!}, \end{aligned}$$

o coeficiente x^{n-2k} no polinomio (2.11) é:

$$(-1)^k \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} \frac{(2n-2k)!2^k n!}{(2n)!(n-k)!} = (-1)^k \frac{(n!)^2 (2n-2k)!}{k!(2n)!(n-k)!(n-2k)!}.$$

Entón, sexa $n - 2k = 0$:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^2)^{n-k} (-1)^k
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

onde $\left[\frac{n}{2}\right]$ emprégase para denotar o maior enteiro menor ou igual que $\frac{n}{2}$.

Se se alonga o percorrido da suma deixando que k varíe dende o 0 ata n non hai ningún cambio porque os novos termos teñen grado menor que n e a súas derivadas n-ésimas son cero. Vexamos que se anulan:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2)^{n-k} = (2n-2k)(2n-2k-1)\dots(2n-2k-n+1)x^{n-2k},$$

para calquera $k > \frac{n}{2}$ anúlase a derivada anterior. Así tense:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{n-k} (-1)^k$$

e aplicando o binomio de Newton temos:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \tag{2.13}$$

A expresión anterior chámase **fórmula de Rodrigues** e permite calcular dunha forma máis sinxela os polinomios de Legendre.

Os primeiros polinomios de Legendre son:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Así temos definida a sucesión de polinomios de Legendre:

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$$

Na Figura 2.1 podemos ver unha representación gráficas dos primeiros polinomios de Legendre.

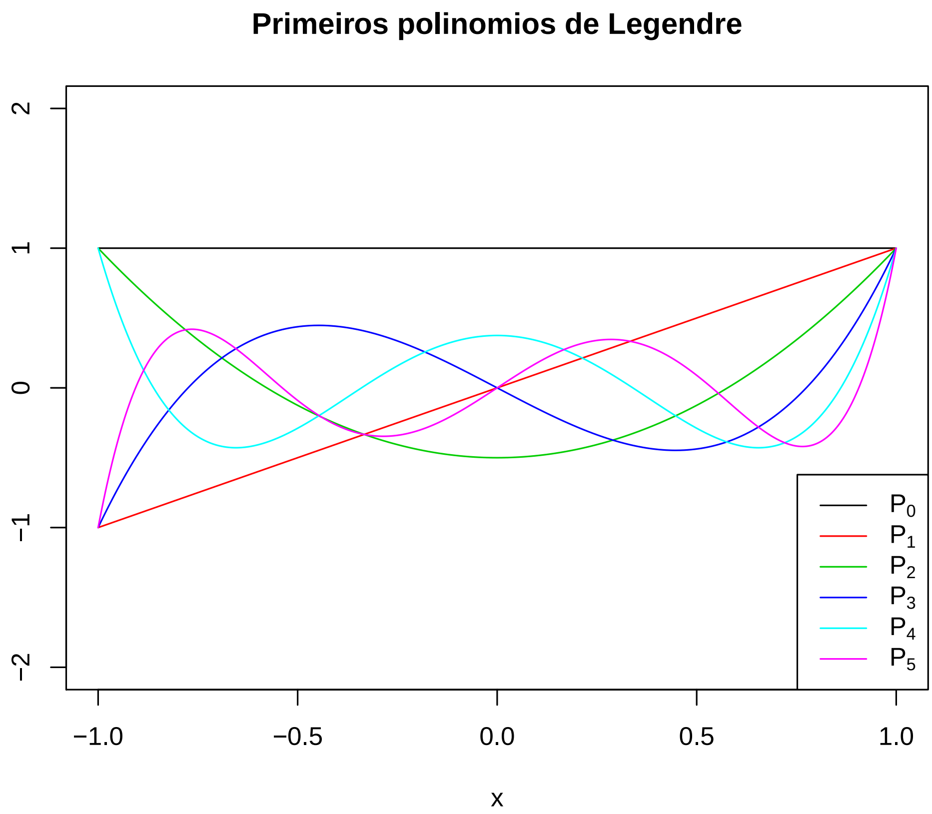

Figura 2.1: Representación gráfica dos primeiros polinomios de Legendre.

Sexa $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a familia formada por todos os polinomios de Legendre (2.13). Queremos ver o seu carácter ortogonal no intervalo $[-1,1]$.

Para isto temos que verificar que o produto escalar $(P_n, P_m) = 0$ para todo $m \neq n$ e que $\|P_n\|^2 = (P_n, P_n) = \dfrac{2}{2n+1}$ para $m = n$, isto é:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases} . \tag{2.14}$$

En primeiro lugar vexamos que o produto escalar $(P_n, P_m) = 0$ para todo $m \neq n$. Partindo de (2.13), supoñamos que $m < n$. Por como está definido sabemos que $\frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^n = 0$ para todo $k < n$ e con $x = \pm 1$. Entón comecemos co cálculo da integral:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx &= \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx \\ &= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m dx = \cdots \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m dx.\end{aligned}$$

Como $(x^2 - 1)^m$ é de grao $2m$ entón temos que $m < n$ e polo tanto xa temos garantido o carácter ortogonal, isto é, $(P_n, P_m) = 0$.

Agora que xa sabemos o carácter ortogonal da familia de polinomios de Legendre, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, en $[-1, 1]$ debemos calcular a súa norma. Queremos demostrar que:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Sexa f unha función calquera con derivadas n-ésimas continuas no intervalo $[-1, 1]$ e definimos a seguinte integral:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

Aplicando a fórmula de Rodrígues, (2.13), tense:

$$I = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx,$$

integrando por partes temos:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx \\ &= -\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx.\end{aligned}$$

Volvemos a integrar por partes:

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx.$$

Sexa $f(x) = P_n(x)$. Por definicón $f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. Temos:

$$I = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{0}^{1} (1-x^2)^n dx. \tag{2.15}$$

Agora facemos o cambio de variable $x = sen\theta$, a nosa integral pasa a ser:

$$\int \cos^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2n+1} cos^{2n}\theta \operatorname{sen}\theta + \frac{2n}{2n+1} \int cos^{2n-1}\theta d\theta, \tag{2.16}$$

entón a integral definida de (2.15) transformase en:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta d\theta &= \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta d\theta \\
&= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\
&= \frac{2^n n!}{1 \cdot 2 \ldots (2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Entón finalmente a integral (2.15) ten como resultado:

$$I = \frac{2}{(2n+1)}$$

e polo tanto a segunda parte de (2.14) queda demostrada.

Polo que finalmente temos garantida a ortogonalidade dos polinomios de Legendre.

Agora para ver que é unha base de Hilbert en $L^2[-1,1]$ só nos queda por ver que é máximal.

Para estudar o carácter maximal en primeiro lugar temos que ver que existen os desenrolos en series dos polinomios de Legendre. Dos polinomios de Legendre, (2.13) dedúcese:

$$\begin{aligned}
1 &= P_0(x), \\
x &= P_1(x), \\
x^2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x) = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x), \\
x^3 &= \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}P_3(x) = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x),
\end{aligned}$$

de aquí obtense que todo polinomio de terceiro grao pode escribirse como:

$$\begin{aligned}
p(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \\
&= b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + b_2 \left[\frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x)\right] + b_3 \left[\frac{3}{5} P_1(x) + \frac{2}{5} P_3(x)\right] \\
&= \left(b_0 + \frac{b_2}{3}\right) P_0(x) + \left(b_1 + \frac{3b_3}{5}\right) P_1(x) + \frac{2b_2}{3} P_2(x) + \frac{2b_3}{5} P_3(x) \\
&= \sum_{n=0}^{3} a_n P_n(x).
\end{aligned}$$

Como $P_n(x)$ é un polinomio de grao n, para todo enteiro positivo n pode estenderse este procedemento posto que x^n pode expresarse como combinación lineal dos polinomios de Legendre, (2.13). Polo tanto calquera polinomio $p(x)$ de grao k pode escribirse como:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n P_n(x).$$

Agora o que nos interesa é ver se é posible desenrolar unha función $f \in L^2[-1,1]$ en serie de Legendre, isto é, da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \tag{2.17}$$

Se multiplicamos (2.17) a ambos lados por $P_m(x)$ e integramos termo a termo de -1 a 1, tense:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx.$$

Aplicando a ortonormalidade dos polinomios de Legendre chegamos a:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx = a_m \int_{-1}^{1} P_m^2(x) dx,$$

e polo tanto:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx = a_n \frac{2}{2n+1}.$$

Así dedúcese que:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entón gracias a existencia das series de Legendre temos garantido o seu carácter maximal. Vese claramente que para $f \in L^2[-1,1]$ se cumpre que $\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ se esó se $f(x) = 0$.

Así temos demostrado que $\left\{ \sqrt{n+\frac{1}{2}} P_n(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$ é unha base de Hilbert ortonormal en $L^2[-1,1]$ co produto escalar $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

2.3. Bases de Hermite.

Ao longo desta sección vamos a resolver a ecuación de Hermite. Buscarémoslle solución empregando o método explicado no capítulo anterior no cal obteremos a solución mediante series de potencias e logo atoparemos unha familia de solucións que forman unha base de Hilbert.

Vamos a buscar a solución xeral da ecuación de Hermite:

$$y'' - 2xy' + 2py = 0, \tag{2.18}$$

sendo p unha constante real.

As funcións coeficiente son:

$$P(x) = -2x \quad \text{e} \quad Q(x) = 2p,$$

ambas son analíticas en $x_0 = 0$ e polo tanto a orixe é un punto ordinario. Entón, empregando o método de Frobenius vamos atopar unha solución da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Como no caso anterior, derivamos dita solución e substituíndo en (2.18), chegamos a:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n \\ -2xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -2(n+1)a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -2na_n x^n \\ 2py(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2pa_n x^n. \end{aligned}$$

Así temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2na_nx^n + 2pa_nx^n = 0,$$

polo tanto o valor do coeficiente de x^n debe valer cero para calquera que sexa o valor de n.

Temos:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (-2n+2p)a_n = 0.$$

Despexamos:

$$a_{n+2} = \frac{2n-2p}{(n+1)(n+2)}a_n = -\frac{2(p-n)}{(n+1)(n+2)}a_n. \tag{2.19}$$

A partir de (2.19) obtemos os coeficientes a_n en función de a_0 e a_1:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{2p}{1\cdot 2}a_0 = -\frac{2p}{2!}a_0 \\
a_3 &= -\frac{-2+2p}{2\cdot 3}a_1 = -\frac{2(p-1)}{3!}a_1 \\
a_4 &= -\frac{-4+2p}{3\cdot 4}a_2 = \frac{2^2p(p-2)}{4!}a_0 \\
a_5 &= -\frac{-6+2p}{4\cdot 5}a_3 = \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}a_1 \\
a_6 &= -\frac{-8+2p}{5\cdot 6}a_4 = -\frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}a_0 \\
a_7 &= -\frac{-10+2p}{6\cdot 7}a_5 = -\frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}a_1
\end{aligned}$$

...

Ao substituír ditos coeficientes na nosa suposta solución obteremos a solución formal de (2.18):

$$\begin{aligned}
y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0\left[1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2p(p-2)}{4!}x^4 + \frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + ...\right] \\
&+ a_1\left[x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + ...\right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Para que nos sexa máis sinxelo máis adiante referirnos ás series anteriores vamos a nomear a dos termos pares como $y_1(x)$ e a dos impares como $y_2(x)$.

Cando p non é un enteiro cada unha das series entre corchetes ten raio de converxencia $R = +\infty$, isto é, a serie converxe para todo x. Para velo consideramos (2.19), modificamos n por $2n$ e aplicamos o criterio do cociente:

$$\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \left|\frac{2(-2n+p)}{(2n+2)(2n+1)}\right| |x|^2,$$

tomamos o límite cando n tende a infinito e vemos que vale 0, polo tanto, por dito criterio é converxente. Analogamente acontece coa serie impar.

Sempre que p sexa un enteiro non negativo, unha das series é finita e redúcese a un polinomio e a outra continua sendo unha serie infinita. Cando p é par a primeira serie redúcese a un polinomio e en caso de ser impar redúcese a segunda.

Para construír os polinomios de Hermite, basta con escoller os a_0 e a_1 de modo que, partindo dos polinomios que calculamos na solución ao darlle valores a p, obtemos múltiplos destes cuxo termo dominante é da forma $2^n x^n$. Estes polinomios denótanse por $H_n(x)$.

Vamos a introducir a **fórmula de Rodrigues** dos polinomios de Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{2.21}$$

Antes de empregar (2.21) vamos a demostrala. A demostración farase por indución sobre n.

Para $n = 0$:

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} e^{-x^2} = 1.$$

Para $n = 1$:

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = -e^{x^2}(e^{-x^2}(-2x)) = 2x.$$

Para $n = 2$:

$$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{x^2} \frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = e^{x^2}(-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}) = 4x^2 - 2.$$

Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} H_3(x) &= (-1)^3 e^{x^2} \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = -e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2}(-2xe^{-x^2}) = -e^{x^2} \frac{d}{dx}(-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}) \\ &= -e^{x^2}(12xe^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2}) = -(12x - 8x^3) = 8x^3 - 12x. \end{aligned}$$

De forma análoga isto satisfaise para o resto de valores de n.

Agora vexamos que estos polinomios que obtivemos por indución a partir da fórmula de Rodrigues (2.21), son os mesmos que vamos obter ao substituír $n = 0, 1, 2, ...$ en (2.20).

Para $n = 0$:

$$y_0(x) = a_0 = 2^0 \cdot 1 = 1.$$

Para $n = 1$:

$$y_1(x) = a_1 x = 2^1 \cdot x = 2x$$

Para $n = 2$:

$$y_2(x) = a_0(1 - \frac{2 \cdot 2}{2!}x^2) = a_0(1 - 2x^2) = 4x^2 - 2,$$

sendo $2a_0 = -2^2$ entón $a_0 = -2$.

Para $n = 3$:

$$y_3(x) = a_1(x - \frac{2(3-1)}{3!}x^3) = a_1(x - \frac{2}{3}x^3) = 8x^3 - 12x,$$

sendo $\frac{2}{3}a_1 = -2^3$ e polo tanto $a_1 = -12$.

Analogamente para os resto $n \in \mathbb{N}$.

Entón, os $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son os polinomios de grao n e dan lugar aos polinomios de Hermite:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1,\\
H_1(x) &= 2x,\\
H_2(x) &= 4x^2 - 2,\\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x,\\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12,\\
H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x,
\end{aligned}$$

$$...$$

Vemos unha representación dos primeiros polinomios de Hermite na Figura 2.2.

Vamos a ver que os polinomios de Hermite, $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$, son ortogonais en $\mathbb{R}$ con respecto a función peso $e^{-x^2/2}$, isto é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad \text{para} \quad n \neq m. \tag{2.22}$$

Para verificalo, en primeiro lugar facemos o seguinte cambio de variable:

$$y(x) = e^{x^2/2} w(x),$$

sendo y unha solución da ecuación (2.18) con $p = n$.

Derivamos:

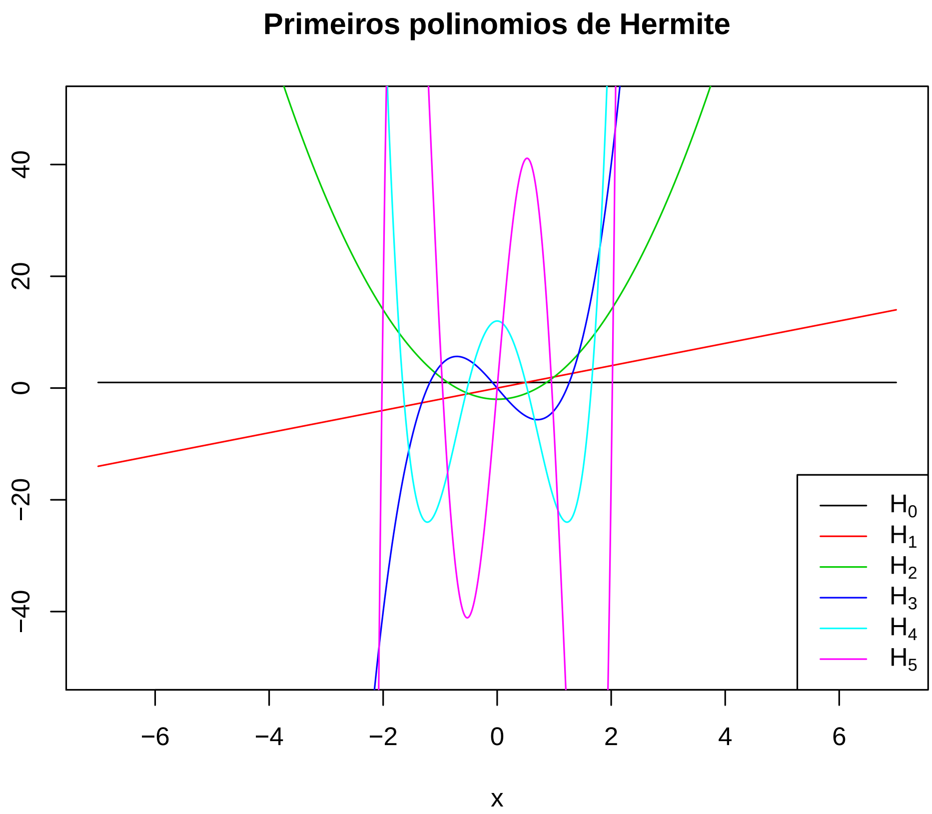

Figura 2.2: Representación gráfica dos primeiros polinomios de Hermite.

$$y' = e^{x^2/2}xw + e^{x^2/2}w' \quad \text{e} \quad y'' = x^2we^{x^2/2} + e^{x^2/2}xw' + e^{x^2/2}w + xw'e^{x^2/2} + e^{x^2/2}w''.$$

Substituíndo en (2.18) quedaría:

$$x^2we^{x^2/2} + e^{x^2/2}2xw' + xw'e^{x^2/2} + e^{x^2/2}w'' - 2x(e^{x^2/2}xw + e^{x^2/2}w') + 2ne^{x^2/2}w = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{x^2/2}(x^2w + w + 2xw' + w'' - 2x^2w - 2xw' + 2nw) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow w'' + (2n + 1 - x^2)w = 0.$$

Así chegamos a que w satisfai a seguinte ecuación:

$$w'' + (2n + 1 - x^2)w = 0. \tag{2.23}$$

Por construción dos polinomios de Hermite temos que $w_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$ é solución de (2.23) para cada n dado.

Tomando w_m e w_n as correspondentes solucións de (2.23) con n e m respectivamente. Logo de multiplicar e restar chégase a:

$$\begin{aligned}&w_m w_n'' + (2n+1-x^2)w_n w_m - w_n w_m'' - (2n+1-x^2)w_m w_n = 0 \Rightarrow\\&\Rightarrow (w_m w_n'' - w_n w_m'') + (2n-2m)w_n w_m = 0.\end{aligned}$$

Entón cúmprese:

$$\frac{d}{dx}(w_m w_n' - w_n w_m') + 2(n-m)w_n w_m = 0 \tag{2.24}$$

e integrando en $\mathbb{R}$ dedúcese que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}(w_m w_n' - w_n w_m') + 2(n-m)w_n w_m\right)dx = 0,$$

o que implica:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}(w_m w_n' - w_n w_m')dx + 2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} w_n w_m dx = 0.$$

Dado que w_n e w_m se anulan en $\pm\infty$ chegamos a:

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = 0.$$

Desto último deducimos que se $n \neq m$ se ten (2.22) que é o resultado que estamos a buscar.

Polo tanto queda demostrado o carácter ortogonal dos polinomios de Hermite $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ en $L^2(\mathbb{R})$ co produto escalar $(f,g)_{e^{-x^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)dx$.

Agora vexamos que acontece cando $n = m$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x)]^2 dx. \tag{2.25}$$

Para resolvela necesitamos empregar a fórmula de Rodrígues, (2.21), relativa aos polinomios de Hermite.

Sexa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x)]^2 dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}dx,$$

vamos integralo empregando o método de integración por partes, sexan:

$$u = H_n(x), \qquad du = H_n'(x)dx,$$
$$dv = \frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}dx, \qquad v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}.$$

Quedaría:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_n(x)]^2dx &= (-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}dx \\
&= (-1)^{n+2}\int_{-\infty}^{\infty} H_n''(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}e^{-x^2}dx \\
&= \cdots = (-1)^{2n}\int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}e^{-x^2}dx
\end{aligned}$$

.

Como o termo que ten a maior potencia de x en $H_n(x)$ é 2^nx^n temos que $H_n^{(n)}(x) = 2^nn!$ e así a última integral quedaría como:

$$2^nn!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = (2^nn!)2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 2^nn!\sqrt{\pi}.$$

Polo tanto as funcións de Hermite son ortonormais en $\mathbb{R}$ co produto escalar $(\cdot,\cdot)_{e^{-x^2}}$ e teñen como norma $\|H_n(x)\| = 2^nn!\sqrt{\pi}$.

Entón tense que $\left\{\dfrac{H_n(x)}{\sqrt{2^nn!\sqrt{\pi}}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ é ortonormal co produto escalar $(\cdot,\cdot)_{e^{-x^2/2}}$.
Claramente, tomando o conxunto:

$$h_n(x) = H_n(x)\sqrt{\frac{e^{-x^2}}{2^nn!\sqrt{\pi}}} = H_n(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^nn!\sqrt{\pi}}}$$

é ortonormal co produto escalar $(f,g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$.

Vexamos que os polinomios de Hermite satisfán o **Lema 2.17.**. En primeiro lugar vamos a calcular os catro primeiros polinomios de Hermite aplicando o método de Gram-Schmidt.

Para $n = 0$:

$$v_0 = 1, \qquad u_0 = \frac{1}{\|1\|_{e^{-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}.$$

Para $n = 1$:

$$\begin{aligned} v_1 &= x - \left(x, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\right)_{e^{-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} = x, \\ u_1 &= \frac{x}{\|x\|_{e^{-x^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} x. \end{aligned}$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} v_2 &= x^2 - \left(x^2, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\right)_{e^{-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} - \left(x^2, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} x\right)_{e^{-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} x = x^2 - \frac{1}{2}, \\ u_2 &= \frac{x^2 - 1/2}{\|x^2 - 1/2\|_{e^{-x^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} v_3 &= x^3 - \left(x^3, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\right)_{e^{-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} - \left(x^3, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} x\right)_{e^{-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} x \\ &\quad - \left(x^3, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}(x^2 - 1/2)\right)_{e^{-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}(x^2 - 1/2) = x^3 - \frac{3}{2}x, \\ u_3 &= \frac{x^3 - 3/2x}{\|x^3 - 3/2x\|_{e^{-x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{\pi}}} \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right). \end{aligned}$$

Entón vemos que nos da os polinomios de Hermite como en (2.21) pero varían nunha constante.

Dado que o **Lema 2.17** é válido para $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que o conxunto $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é maximal en $L^2(\mathbb{R})$ co produto escalar $(\cdot, \cdot)_{e^{-x^2/2}}$. Pero, iso é obviamente equivalente a que o sexa $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, isto é:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} f(x) H_n(x) dx = a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} f(x) u_n(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entón tense que $f(x) = 0$.

Finalmente, vamos a obter os valores dos coeficientes de unha función f en series de Hermite:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x). \tag{2.26}$$

Actuando formalmente, se multiplicamos (2.26) a ambos lados por $e^{-x^2} H_m(x)$ e integramos termo a termo dende $-\infty$ a ∞, tense:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx.$$

Aplicando a ortonormalidade dos polinomios de Hermite chegamos a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) f(x) dx = a_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m^2(x) dx,$$

e polo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx = a_n 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Así dedúcese que:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) f(x) dx.$$

Así temos demostrado que $\{e^{-x^2/2} H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é unha base de Hilbert en $L^2(\mathbb{R})$ co produto escalar $(f, g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$.

2.4. Bases de Laguerre.

Nesta sección vamos a resolver a ecuación de Laguerre. Buscaremos a solución empregando o método explicado no capítulo anterior no cal se obtén a solución por medio de series de potencias. Logo atoparemos unha familia de solucións que son unha base de Hilbert.

Sexa a ecuación de Laguerre:

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + py(x) = 0, \tag{2.27}$$

sendo p unha constante real.

En primeiro lugar vamos a reescribila como:

$$y''(x) + \frac{1 - x}{x} y'(x) + \frac{p}{x} y(x) = 0.$$

Claramente as funcións de coeficientes:

$$P(x) = \frac{1 - x}{x} \quad \text{e} \quad Q(x) = \frac{p}{x}$$

presentan unha singularidade en $x_0 = 0$. Dado que $xP(x) = 1 - x$ e $x^2 Q(x) = px$, deducimos que $x_0 = 0$ é un punto singular-regular.

A ecuación indicial será:

$$m(m-1)+m=m^2=0$$

e os seus expoñentes serán $m_1=0$ e $m_2=0$.

Entón (2.27) admite unha solución de Frobenius:

$$y(x)=x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

sendo $a_0\neq 0$ e a serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ será converxente para todo $x\in\mathbb{R}$

Derivamos a posible función solución:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$
$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

e sexa:

$$xy''(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n,$$
$$(1-x)y'(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n,$$
$$py(x)=p\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}pa_nx^n.$$

Así quedaría:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n+1)+(n+1)]a_{n+1}x^n+[-n+p]a_nx^n=0$$

e igualando os coeficientes de x^n a cero tense:

$$(n(n+1)+(n+1))a_{n+1}+(-n+p)a_n=0.$$

Despexamos a_{n+1} e chegamos á seguinte fórmula de recorrencia:

$$a_{n+1}=\frac{n-p}{(n+1)^2}a_n. \tag{2.28}$$

Como xa sabemos que $a_0\neq 0$, a partir de (2.28) calculamos os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -pa_0,\\
a_2 &= \frac{1-p}{2^2} = \frac{p(p-1)}{2^2}a_0,\\
a_3 &= \frac{2-p}{3^2}a_2 = -\frac{p(p-1)(p-2)}{2^2\cdot 3^2}a_0,\\
a_4 &= \frac{3-p}{4^2}a_3 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}a_0,\\
&\qquad\qquad ...
\end{aligned}$$

entón temos:

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0\left[1 - px + \frac{p(p-1)}{2^2}x^2 - \frac{p(p-1)(p-2)}{2^2\cdot 3^2}x^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}x^4 - ...\right]\\
&= a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n)}{[(n+1)!]^2}x^n.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Cando p non é un enteiro a serie ten raio de converxencia $R = +\infty$, isto é, a serie converxe para todo x. Para velo consideramos (2.28) e aplicamos o criterio do cociente:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{n-p}{(n+1)^2}\right||x|,$$

tomando o límite cando n tende a infinito vemos que vale 0 e polo tanto o criterio garántenos que é converxente.

Sempre que p sexa un enteiro positivo anúlase o coeficiente de toda potencia maior ou distinta de p, isto é, a solución convértese nun polinomio de grao p. Entón en este caso as funcións dadas por (2.29) reciben o nome de **polinomios de Laguerre**.

A partir da **fórmula de Rodrigues** podemos reescribir os polinomios de Laguerre como segue:

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \tag{2.30}$$

Antes de empregala vamos a demostrala. Aplicamos indución sobre n.

Para $n = 0$:

$$L_0(x) = e^x(x^0 e^{-x}) = 1.$$

Para $n = 1$:

$$L_1(x) = e^x\frac{d}{dx}(xe^{-x}) = e^x(e^{-x} - xe^{-x}) = 1 - x.$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= e^x \frac{d^2}{dx^2}(x^2 e^{-x}) = e^x \frac{d}{dx}(2xe^{-x} - x^2 e^{-x}) \\ &= e^x(2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2 e^{-x}) = x^2 - 4x + 2. \end{aligned}$$

Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} L_3(x) &= e^x \frac{d^3}{dx^3}(x^3 e^{-x}) = e^x \frac{d^2}{dx^2}(3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) \\ &= e^x \frac{d}{dx}(6xe^{-x} - 6x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x}) = e^x(6e^{-x} - 18xe^{-x} + 9x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}) \\ &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6. \end{aligned}$$

De forma análoga isto satisfaise para o resto de valores de n.

Agora vexamos que os polinomios que obtemos a partir da fórmula de Rodrigues (2.30) coinciden cos que se obteñen ao substituír $n = 0, 1, 2, ...$ en (2.29).

Para $n = 0$:

$$y_0(x) = a_0 = 1.$$

Para $n = 1$:

$$y_1(x) = a_0(1 - 1 \cdot x) = a_0(1 - x) = 1 - x$$

con $a_0 = 1$.

Para $n = 2$:

$$y_2(x) = a_0 \left(1 - 2 \cdot x + \frac{2(2-1)}{2^2} x^2\right) = a_0 \left(1 - 2x + \frac{1}{2} x^2\right) = x^2 - 4x + 2$$

con $a_0 = 2$.

Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} y_3(x) &= a_0 \left(1 - 3 \cdot x + \frac{3(3-1)}{2^2} x^2 - \frac{3(3-1)(3-2)}{2^2 \cdot 3^2} x^3\right) \\ &= a_0 \left(1 - 3x + \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3\right) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \end{aligned}$$

con $a_0 = 6$.

Polo tanto se seguimos facendo o proceso para o resto de $n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = n!$, obteremos os polinomios de Laguerre como os que obtivemos pola fórmula de Rodrigues.

Entón, os $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son os polinomios de grao n e dan lugar aos polinomios de Laguerre:

$$
\begin{aligned}
&L_0(x) = 1\\
&L_1(x) = 1 - x\\
&L_2(x) = x^2 - 4x + 2\\
&L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6\\
&L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24\\
&L_5(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120
\end{aligned}
$$

$$\ldots$$

Podemos ver unha representación gráfica dos primeiros polinomios de Laguerre na Figura 2.3

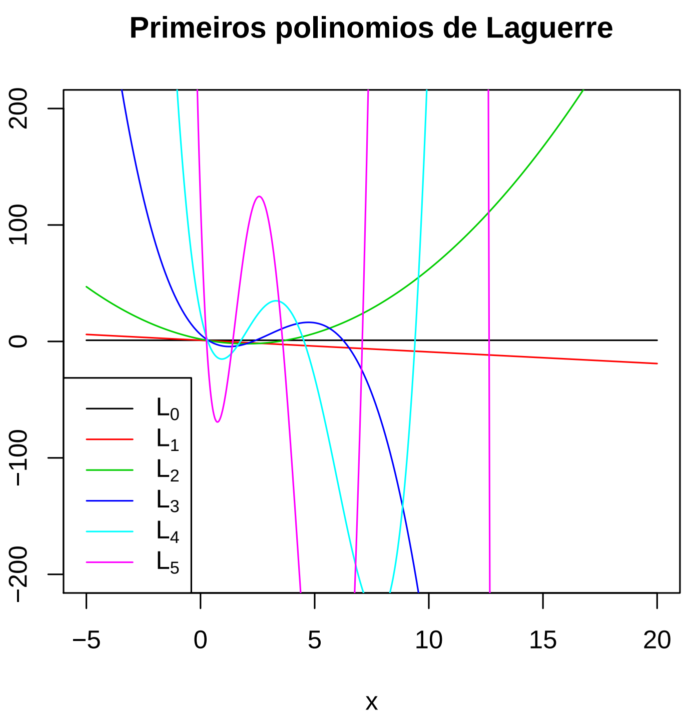

Figura 2.3: Representación gráfica dos primeiros polinomios de Laguerre.

Vamos a ver que os polinomios de Laguerre,(2.30) son ortogonais con respecto á función peso e^{-x} no intervalo $[0,\infty)$, isto é:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0 \quad \text{para} \quad n \neq m. \tag{2.31}$$

A xustificación que vamos a facer a continuación de (2.31) está baseada en ([9], Sección 13.5, páx 127).

Tomemos:

$$I = \int_0^\infty x^m L_n(x) e^{-x} dx$$

con $m < n$.

Para $m > 0$ tense:

$$I = \int_0^\infty x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) dx.$$

Integrando por partes:

$$u = x^m \qquad du = m x^{m-1}$$
$$dv = \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \qquad v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})$$

obtemos:

$$I = \left[x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x}) \right]_0^\infty - m \int_0^\infty x^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x}) dx.$$

Se repetimos a integración por partes n veces chegamos a:

$$I = (-1)^n m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^n e^{-x}) dx.$$

Dado que $m < n$:

$$I = (-1)^n m! \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^n e^{-x}) \right]_0^\infty = 0,$$

entón satisfaise (2.31) sempre que $m < n$. Dado que L_n é ortogonal a todo monomio x^m con $m < n$, tamén o será de L_m con $m < n$. Para $m > n$, só temos que intercambiar os polinomios.

Polo tanto queda demostrado o carácter ortogonal dos polinomios de Laguerre en $L^2[0,\infty)$ co produto escalar $(f,g)_{e^{-x}} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x) dx$.

Agora vexamos que acontece cando $n = m$:

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2 dx. \tag{2.32}$$

Para resolvela necesitamos empregar a fórmula de Rodrigues, (2.30), relativa aos polinomios de Laguerre.

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2 dx = (-1)^n(-1)^n n! \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (n!)^2$$

Polo tanto as funcións de Laguerre son ortogonais no intervalo $[0,\infty)$ co produto escalar $(\cdot,\cdot)_{e^{-x}}$ e ten como norma $\|L_n(x)\| = (n!)^2$.

Entón tense que $\left\{\frac{L_n(x)}{(n!)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ é un conxunto ortonormal co produto escalar $(f,g)_{e^{-x}} = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx$.

Claramente, tomando:

$$l_n(x) = L_n(x)\sqrt{\frac{e^{-x}}{(n!)^2}} = L_n(x)\frac{e^{-x/2}}{n!}$$

será ortonormal en $L^2[0,\infty)$ co produto escalar $(f,g) = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$.

Agora vexamos que se satisfai o **Lema 2.17.**. En primeiro lugar calculamos os catro primeiros polinomios de Laguerre polo método de Gram-Schmidt.

Para $n = 0$:

$$u_0 = 1.$$

Para $n = 1$:

$$v_1 = x - (x,1)_{e^{-x}} \cdot 1 = x - 1, \qquad u_1 = \frac{x-1}{\|x-1\|_{e^{-x}}} = x - 1.$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} v_2 &= x^2 - (x^2,1)_{e^{-x}} \cdot 1 - (x^2, x-1)_{e^{-x}} \cdot (x-1) = x^2 - 4x + 2, \\ u_2 &= \frac{x^2 - 4x + 2}{\|x^2 - 4x + 2\|_{e^{-x}}} = \frac{x^2}{2} - 2x + 1. \end{aligned}$$

Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} v_3 &= x^3 - (x^3,1)_{e^{-x}} \cdot 1 - (x^3, x-1)_{e^{-x}} \cdot (x-1) \\ &\quad - \left(x^3, \frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)_{e^{-x}} \cdot \frac{x^2}{2} - 2x + 1 = x^3 - 9x^2 + 18x - 6, \\ u_3 &= \frac{x^3 - 9x^2 + 18x + 6}{\|x^3 - 9x^2 + 18x - 6\|_{e^{-x}}} = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1. \end{aligned}$$

Como podemos observar son os polinomios de Laguerre (2.30) multiplicados por unha constante.

Dado que o **Lema 2.17** é válido para $0 < \alpha < 1$, temos que o conxunto $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é maximal en $L^2[0,\infty)$ co produto escalar $(\cdot,\cdot)_{e^{-x}}$. Pero, iso é obviamente equivalente a que o sexa $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, isto é:

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x) dx = a_n \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) u_n(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e polo tanto $f(x) = 0$.

Finalmente, vamos a obter os valores dos coeficientes de unha función f en series de Laguerre:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x). \tag{2.33}$$

Actuando formalmente, se multiplicamos (2.33) a ambos lados por $e^{-x}L_m(x)$ e integramos termo a termo dende 0 ata ∞, tense:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx.$$

Aplicando a ortonormalidade dos polinomios de Laguerre chegamos a:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) f(x) dx = a_m \int_0^{\infty} e^{-x} L_m^2(x) dx,$$

e polo tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) f(x) dx = a_n (n!)^2.$$

Así dedúcese que:

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) f(x) dx.$$

Así temos demostrado que $\left\{e^{-x/2} L_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ é unha base de Hilbert ortonormal en $L^2[0,\infty)$ co produto escalar $(f,g) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x) g(x) dx$.

Bibliografía

[1] ABELLANAS, Lorenzo, GALINDO, Alberto, *Espacios de Hilbert: geometría, operadores y espectros.*, 2nd ed., Eudema, 1991, 75-115.

[2] APOSTOL, Tom M., *Análisis matemático.*, 2nd ed., Reverté, 1996, 235-294.

[3] AYANT, Y.,BORG, M., *Funciones especiales.*, 1st ed., Alhambra, 1974,118-155.

[4] BOYER, C.B., *Historia de la matemática.*, 1st ed., Alianza, 1986, 496-539.

[5] HILBERT, D., COURANT, ByR, *Methods of mathematical physics. Volumen I*, 1st ed., Wiley Classics, 1989, 331-334.

[6] SIMMONS, George F., *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Con aplicaciones y notas históricas.*, 2nd ed., McGraw-Hill, Madrid, 1993, 171-252 e 349-397.

[7] Jerónimo Basa, *El teorema de Weierstrass y la teoría de aproximación*, `http://casanchi.com/mat/weierstrass01.pdf`. Accedido en novembro 2018.

[8] José Rogan C.,*Polinomios Hermite*, `https://macul.ciencias.uchile.cl/~jrogan/cursos/mfm2p00/cap12.pdf` . Accedido en abril 2018.

[9] José Rogan C.,*Polinomios Laguerre*, `https://macul.ciencias.uchile.cl/~jrogan/cursos/mfm2p00/cap13.pdf`. Accedido en abril 2018.

[10] José Rogan C.,*Polinomios Legendre*, `https://macul.ciencias.uchile.cl/~jrogan/cursos/mfm2p00/cap16.pdf`. Accedido en abril 2018.

[11] Juan Luis Sánchez Salas (2013), *Polinomios ortogonales*, `https://www.um.es/documents/118351/1884002/TFG_SANCHEZ+SALAS.pdf/0a3a3e79-5717-4aea-91ff-a3881edb4bbe`. Accedido en setembro 2018.

[12] Renato Álvarez Nodarse, *Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones*, `https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/41709/Polinomios%`

20ortogonales%20historia%20y%20aplicaciones.pdf?sequence=1,20-23.Accedido en xaneiro 2019.

[13] Universidad La Laguna, *Tema III:Funciones de Bessel*, http://amatema.webs.ull.es/anamat_p0304/Matematicas/Funciones%20Especiales/RFESPT3.PDF. Accedido en xaneiro de 2018.