FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Matrices Cuaterniónicas

Esteban Manuel Gómez Castro

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Matrices Cuaterniónicas

Esteban Manuel Gómez Castro

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
Título: Matrices cuaterniónicas
Breve descrición do contido El álgebra lineal sobre los cuaternios presenta algunas características originales que la diferencian de los casos real y complejo. En este trabajo se abordarán algunos trabajos recientes donde se definen la matriz adjunta, la regla de Cramer, la descomposición en valores singulares o la inversa de Penrose en este contexto.
Recomendacións Referencias: Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules. I.I. Kyrchei, Linear Multilinear Algebra 59.No.4,413-431 (2011).
Outras observacións

Índice general

Resumen

El álgebra lineal sobre los cuaternios presenta algunas características originales que la diferencian de los casos real y complejo. En esta memoria se abordan algunos trabajos recientes donde se estudian el determinante de Study, el determinante de Moore, y la matriz adjunta e inversa.

Abstract

Linear algebra on quaternions has some original characteristics that differentiate it from real and complex cases. In this report some recent works are explained shown where the determinant of Study, the determinant of Moore, and the adjoint and inverse matrix are studied.

Introducción

Los cuaternios son el primer ejemplo de un cuerpo no conmutativo. Fueron introducidos por Hamilton en 1843. En la actualidad siguen siendo muy importantes sus aplicaciones en ingeniería.

El álgebra lineal sobre los cuaternios presenta algunas características originales que la diferencian de los casos real y complejo.

Se sabe que la mayor parte de los resultados usuales siguen siendo válidos cuando se pasa a espacios vectoriales sobre un cuerpo no conmutativo. Sin embargo, hay una parte de la teoría donde la conmutatividad juega un papel esencial: la teoría de los determinantes.

La cuestión de extender el determinante del espacio $\mathbb{C}^{n\times n}$ de las matrices complejas al espacio $\mathbb{H}^{n\times n}$ de las cuaterniónicas ya fue considerada por Cayley, sin éxito, en 1845. De hecho no existe ningún funcional multiplicativo $\mathbb{H}^{n\times n} \to \mathbb{H}$ que coincida con det en $\mathbb{C}^{n\times n}$. Lo que ahora se considera determinante canónico fue introducido por Study en 1920, y es un funcional multiplicativo pero con valores en $\mathbb{R}^+$, que extiende a $|\det|$ (el módulo del determinante complejo). Dieudonné demostró, en 1943, que el determinante de Study es el único, salvo un exponente, funcional real $\mathcal{F}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. Es multiplicativo, $\mathcal{F}(AB) = \mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)$
2. Una matriz A es inversible si y sólo si $\mathcal{F}(A) \neq 0$.
3. $\mathcal{F}$ no cambia si a una columna se le suma un múltiplo por la izquierda de otra columna.

La fórmula clásica para el determinante complejo, basada en sumatorios y permutaciones, no permite por tanto definir un auténtico determinante. Sin embargo, Moore demostró en 1922 que está bien definida para las matrices Hermíticas, aunque el funcional resultante no es multiplicativo. De hecho el determinante de Study de A coincide con el determinante de Moore de la matriz Hermítica asociada AA^*.

Más recientemente, en 2008, Kyrchei probó que es posible adaptar el determinante de Moore para desarrollar el determinante de Study por filas o por columnas, como en el caso clásico. Esto permite definir la matriz adjunta o de cofactores, y da un método explícito para calcular la inversa de una matriz cuaterniónica.

El contenido de este trabajo es como sigue:

En el primer capítulo aclararemos las nociones más básicas de los cuaternios, así como el producto de estos, definiremos el conjugado de un cuaternio y estudiaremos los cuaternios similares.Para acabar veremos los cuaternios en su foma compleja, así como la matriz compleja asociada, y las distintas propiedades que tiene.

En el segundo capítulo comenzamos definiendo la matriz compleja asociada a una matriz cuaterniónica . También estudiaremos distintas propiedades de esta última matriz.

Más adelante, en el tercer capítulo, estudiaremos dos importantes determinantes con valores reales. Uno de ellos es el determinante de Study. Con la ayuda de un artículo de Nir Cohen and Stefano De Leo, "The Quaternionic Determinant"[6], veremos que no hay ningún otro funcional que nos de el mismo valor. El segundo es el determinante de Moore, que cobrará importancia en el último capítulo.

Por último en el capítulo 4 estudiaremos una serie de resultados aportados por el matemático Ivan Kyrchei [2], que introducen el concepto de determinante desarrollado por una fila o una columna, con el fin de desembocar en el cálculo de la inversa de una matriz cuaterniónica

Capítulo 1

Cuaternios

De alguna manera podemos ver a $\mathbb{C}$ y a $\mathbb{R}^2$ como el mismo conjunto. Si lo tratamos como un espacio vectorial estaremos hablando de $\mathbb{R}^2$, cuyos elementos son vectores, mientras que estaremos pensando en $\mathbb{C}$ si lo vemos como un cuerpo, siendo sus elementos los números complejos. Lo mismo pasa con los cuaternios, que denotaremos por $\mathbb{H}$ y $\mathbb{R}^4$. Siendo 1, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ los elementos de la base canónica de los cuaternios, representaremos un vector del siguiente modo:

$$t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

En este primer capítulo aclarararemos las nociones más básicas de los cuaternios, así como el producto de estos, definiremos el conjugado de un cuaternio y estudiaremos los cuaternios similares.Para acabar veremos los cuaternios en su foma compleja, así como la matriz compleja asociada, y las distintas propiedades que tiene.

Si la condición que teníamos en los complejos era que $i^2 = -1$, ahora en los cuaternios tenemos la siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1 \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \mathbf{ji} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \mathbf{ik} &= -\mathbf{j} \end{aligned}$$

Los cuaterniones son un ejemplo de cuerpo no conmutativo. La multiplicación es asociativa y todo cuaternio no nulo posee un único inverso. La multiplicación de los cuaternios no es conmutativa.Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 1.1. (No conmutatividad de los cuaternios)
Sean $q = 1 + 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $q' = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

$$q'q = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{i}^2 + 4\mathbf{k} - \mathbf{k} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{i} = -6 + 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k} - 3\mathbf{j}$$

$$qq' = 2\mathbf{i} - \mathbf{k} + 6\mathbf{i}^2 + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k} - 2\mathbf{i} = -6 + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

1.1. Propiedades básicas

Definición 1.2. Sea $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ un cuaternio, entonces definimos su conjugado como

$$\bar{q} = t - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}.$$

Proposición 1.3. *Sea q un cuaternio y $\bar{q}$ su conjugado. Entonces,*

$$q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Corolario 1.4. *La anterior proposición tiene las siguientes consecuencias:*

(1) Si $q \neq 0$, entonces tiene inverso:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

(2) $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$

(3) $q + \bar{q} = 2\Re(q)$

(4) Todo cuaternio q es solución de la ecuación: $r^2 - 2Re(q) \cdot r + |q|^2 = 0$

Demostración. (1) $qq^{-1} = \frac{q\bar{q}}{|q|^2} = 1 = q^{-1}q$

(2) Sean $q_1 = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $q_2 = t' + x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$.

Sus conjugados son $\bar{q}_1 = t - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ y $\bar{q}_2 = t' - x'\mathbf{i} - y'\mathbf{j} - z'\mathbf{k}$. Entonces, tenemos,

$$\begin{aligned}\overline{q_1 q_2} = {} & t't - t'x\mathbf{i} - t'y\mathbf{j} - t'z\mathbf{k} - tx\mathbf{i} - x'x + xy\mathbf{k} - xz\mathbf{j} - ty'\mathbf{j} - y'x\mathbf{k} - y'y + \\ & y'z\mathbf{i} - tz'\mathbf{k} + z'x\mathbf{j} - z'y\mathbf{i} - z'z = (tt' - xx' - yy' - zz') - (tx' + xt + yz' - zy')\mathbf{i} - \\ & (ty' - xz' + yt' + zt')\mathbf{j} - (tz' + y'x - x'y + zt')\mathbf{k} = \\ & t't - t'x\mathbf{i} - t'y\mathbf{j} - t'z\mathbf{k} - tx\mathbf{i} - x'x + xy\mathbf{k} - xz\mathbf{j} - ty'\mathbf{j} - y'x\mathbf{k} - y'y + \\ & y'z\mathbf{i} - tz'\mathbf{k} + z'x\mathbf{j} - z'y\mathbf{i} - z'z = \\ & \bar{q}_2\bar{q}_1\end{aligned}$$

(3) TRIVIAL

(4) Sea $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Hagamos primero q^2.

$q^2 = (t+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(t+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = t^2+tx\mathbf{i}+ty\mathbf{j}+tz\mathbf{k}+tx\mathbf{i}-x^2+xy\mathbf{k}-xz\mathbf{j}+ty\mathbf{j}-xy\mathbf{k}-y^2+yz\mathbf{i}+tz\mathbf{k}+zx\mathbf{j}-zy\mathbf{i}-z^2 = (t^2-x^2-y^2-z^2)+(2tx)\mathbf{i}+(2ty)\mathbf{j}+(2tz)\mathbf{k}$

Teniendo en cuenta que $2\Re(q)\cdot q = 2t^2+2tx+2ty+2tz$ y que $|q|^2 = (t^2+x^2+y^2+z^2)$.

Entonces, finalmente,

$$q^2-2Re(q)\cdot q+|q|^2 = (t^2-x^2-y^2-z^2)+2tx\mathbf{i}+2ty\mathbf{j}+2tz\mathbf{k}-(2t^2+2tx\mathbf{i}+2ty\mathbf{j}+2tz\mathbf{k})+(t^2+x^2+y^2+z^2) = 0$$

Por tanto, podemos afirmar que q es solución de la ecuación dada.

□

Añadamos, a raíz de lo anterior, algunas propiedades aparentemente evidentes pero importantes:

Proposición 1.5. *Se cumple lo siguiente:*

- $\Re(\bar{q}) = \Re(q)$
- $|\bar{q}| = |q|$
- $\Re(q_1q_2) = \Re(q_2q_1)$
- $|q|^{-1} = |q^{-1}|$
- $|q_1q_2| = |q_1|\,|q_2|$

Demostremos la última propiedad:

$$|q_1q_2|^2 = (q_1q_2)\overline{(q_1q_2)} = (q_1q_2)(\bar{q_2}\bar{q_1}) = q_1(q_2\bar{q_2})\bar{q_1} = q_1\,|q_2|^2\,\bar{q_1} = |q_1|^2\,|q_2|^2$$

Esto pasa porque los reales conmutan con los demás cuaternios

1.2. Cuaternios Similares

Definición 1.6. Dos cuaternios q y q' son similares si existe un cuaternio $r \neq 0$ tal que $q' = rqr^{-1}$.

Ejemplo 1.7. Los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, son similares :

$$\mathbf{j} = r\mathbf{i}r^{-1}$$

Sea $r = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ vemos que se cumple $\mathbf{j}r = r\mathbf{i} \Leftrightarrow -\mathbf{k} - 1 = -1 - \mathbf{k}$

Teorema 1.8. *Dos cuaternios q y q' son similares si y solo si:*

Tienen la misma parte real y tienen el mismo módulo

Demostración. ($\Rightarrow$)Sean q y q' cuaternios similiares, con lo que $q' = xqx^{-1}$.

Entonces $|q^{'}| = |x||q||x^{-1}|$ con lo que demostramos que q y q' tienen el mismo módulo (usando el hecho de que el módulo de x^{-1} es el inverso del módulo, y que los reales conmutan con los demás cuaternios) Demostremos ahora que tienen la misma parte real. Usando el hecho de que $\Re(qq') = \Re(q'q)$ tenemos

$$2\Re(q') = 2\Re(xqx^{-1}) = 2\Re(qxx^{-1}) = 2\Re(q)$$

($\Leftarrow$) Tengo que ver que dados dos cuaternios q y q' que verifiquen las hipótesis , se cumple que $q' = xqx^{-1}$.

Dividamos la demostración en dos partes.

Sea $q_0 \in \mathbb{H}$ un cuaternio sin parte real, es decir, si $\Re(q_0) = 0$ entonces $q_0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Demostraremos que q_0 es similar a $|q_0|\mathbf{i}$, es decir, que existe un cuaternio $p \neq 0$ tal que $|q_0|\mathbf{i} = pq_0p^{-1}$. Esto es lo mismo que decir que todos los cuaternios de parte real nula y módulo 1, son similares a $\mathbf{i}$.

Encontremos un cuaternio $p \neq 0$ que cumpla $|q_0|\mathbf{i} = pq_0p^{-1}$, es decir, $|q_0|\mathbf{i}p = pq_0$.

Sea $q_0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $p = t' + x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$ y denotemos, para facilitar la lectura, $|q_0| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \in \mathbb{R}$.

Resolviendo $|q_0|\mathbf{i}p = pq_0$ llegamos al siguiente sistema de ecuaciones lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} (-a + x)x' + yy' + zz' = 0 \\ (a - x)t' - zy' + yz' = 0 \\ -yt' + zx' + (-a - x)z' = 0 \\ -zt' - yx' + (a + x)y' = 0 \end{cases}$$

Representándolo de forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a + x & y & z \\ a - x & 0 & -z & y \\ -y & z & 0 & -a - x \\ -z & -y & a + x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observando el rango de la matriz, llegamos a la conclusión de que el rango no es 3, ya que el determinante de una submatriz es igual a 0. Por tanto la matriz tiene rango 2 si

$y^2 + z^2 \neq 0$ (eligiendo convenientemente la submatriz adecuada).En este caso tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -y & z \\ -z & -y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+x)z' \\ -(a+x)y' \end{bmatrix},$$

y tomando por ejemplo $z' = y' = 1$, tenemos que,

$$t' = \frac{(a+x)(-y) + (a+x)z}{y^2 + z^2} = \frac{(a+x)(-y+z)}{y^2 + z^2}$$

$$x' = \frac{y(a+x) + z(a+x)}{y^2 + z^2} = \frac{(a+x)(y+z)}{y^2 + z^2}$$

En el caso de $y^2 + z^2 = 0$, q_0 sería complejo, concretamente $q_0 = x\mathbf{i}$.

Por tanto, si $x > 0$ entonces tendríamos que $|x|\mathbf{i}p = p|x|\mathbf{i}$, por lo que nos sirve $p = 1$.

En cambio, si $x < 0$ entonces tendríamos que $|x|\mathbf{i}p = -p|x|\mathbf{i}$, lo que querría decir que $\mathbf{i}p = -p\mathbf{i}$, por lo que nos sirve $p = \mathbf{j}$.

Veamos el caso general. Sean q y q' tal que $|q| = |q'|$ y $\Re(q) = \Re(q') = t$
Entonces $q = t + q_0$ y $q' = t + q_0'$. Por tanto $|q_0| = |q_0'|$.

Recordemos que q_0 y q_0' eran similares a $|q_0|\mathbf{i}$ y a $|q_0'|\mathbf{i}$.
Tenemos que $q' = t + p'|q_0|\mathbf{i}(p')^{-1}$ y $q = t + p|q_0|\mathbf{i}p^{-1}$

Por lo que, $q' = p'(t + |q_0|\mathbf{i})(p')^{-1}$ y $q = p(t + |q_0|\mathbf{i})p^{-1}$

Entonces, como además $t + |q_0|\mathbf{i}$ es similar a a q y $|q_0| = |q_0'|$, tenemos,

$$q' = p'p^{-1}qp(p')^{-1}$$

Y con esto, finalmente, llegamos a que,

$$q' = [p'p^{-1}]q[p(p')^{-1}]$$

$\square$

Corolario 1.9. *Todo cuaternio es similar a un número complejo.*

Demostración. Sea un cuaternio q con parte real t y módulo $r = |q|$. Vemos que $r^2 \geq t^2$ porque

$$r^2 = |q|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq t^2$$

Sea $z = t + \mathbf{i}\sqrt{(r^2 - t^2)}$ un número complejo.

Por tanto observamos que:

- $\Re(z) = t$
- $|z|^2 = t^2 + r^2 - t^2 = r^2 = |q|^2$

Y con esto concluimos la demostración de este corolario. □

Proposición 1.10. *Sea $q \in \mathbb{H}$, podemos expresarlo de forma única como $u + \mathbf{j}v$, con $u, v \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $q = t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, con $t, x, y, z \in \mathbb{R}$.
Teniendo en cuenta que $\mathbf{k} = -\mathbf{ji}$, concluimos que

$$q = (t + x\mathbf{i}) + \mathbf{j}(y - z\mathbf{i}) = u + \mathbf{j}v,$$

con $u, v \in \mathbb{C}$. □

Corolario 1.11. *Todo cuaternio se puede escribir como un par de complejos.*

Proposición 1.12. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Sea $q = u + \mathbf{j}v$ entonces $\Re(q) = \Re(u)$*
2. *Si $z \in \mathbb{C}$ entonces $\mathbf{j}z = \bar{z}\mathbf{j}$ ($\mathbf{j}z = \mathbf{j}a - b\mathbf{k} = \bar{z}\mathbf{j}$)*
3. *Sea $q \in \mathbb{H}$, entonces $|q|^2 = |u|^2 + |v|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$*

Proposición 1.13. *Dado un cuaternio $q = u + \mathbf{j}v$, su conjugado es $\bar{q} = \bar{u} - \mathbf{j}v$*

Demostración. $\bar{q} = \bar{u} + \overline{\mathbf{j}v} = \bar{u} + \bar{v}\bar{\mathbf{j}} = \bar{u} - \bar{v}\mathbf{j} = \bar{u} - \mathbf{j}v$ ($\bar{\mathbf{j}} = -\mathbf{j}$) □

Observación 1.14. En general, son más fáciles las cuentas con pares de complejos que con cuatro reales.

1.3. Matriz Asociada

Definición 1.15. Dado un cuaternio $q \in \mathbb{H}$, en la forma $q = u + \mathbf{j}v$, su matriz compleja asociada es $c(q) = \begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix}$.

Proposición 1.16. *Dados $q, q' \in \mathbb{H}$, se cumple:*

(a) $c(q + q') = c(q) + c(q')$

(b) $c(q \cdot q') = c(q) \cdot c(q')$

(*c*) $c(\bar{q}) = c(q)^*$

(*d*) $c(t \cdot q) = t \cdot c(q)$, *si* $t \in \mathbb{R}$

(*e*) $\det c(q) = |q|^2$

Demostración. (*a*) Sea $q = u + \mathbf{j}v$ y $q' = u' + \mathbf{j}v'$, entonces $q + q' = (u + u') + \mathbf{j}(v + v')$ y por tanto,

$$c(q + q') = \begin{bmatrix} u + u' & -\bar{v} - \bar{v'} \\ v + v' & \bar{u} + \bar{u'} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$c(q) + c(q') = \begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u' & -\bar{v'} \\ v' & \bar{u'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + u' & -\bar{v} - \bar{v'} \\ v + v' & \bar{u} + \bar{u'} \end{bmatrix}.$$

(*b*) En este caso

$$q \cdot q' = (u + \mathbf{j}v)(u' + \mathbf{j}v') = uu' + u\mathbf{j}v' + \mathbf{j}vu' - \bar{v}v' = (uu' - \bar{v}v') + \mathbf{j}(\bar{u}v' + vu').$$

Por lo que,

$$c(q \cdot q') = \begin{bmatrix} uu' - \bar{v}v' & -u\bar{v'} - \bar{v}\bar{u'} \\ vu' + \bar{u}v' & -v\bar{v'} + \bar{u}\bar{u'} \end{bmatrix}$$

Por otro lado,

$$c(q) \cdot c(q') = \begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u' & -\bar{v'} \\ v' & \bar{u'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uu' - \bar{v}v' & -u\bar{v'} - \bar{v}\bar{u'} \\ vu' + \bar{u}v' & -v\bar{v'} + \bar{u}\bar{u'} \end{bmatrix}$$

(*c*) Tenemos que, siendo $\bar{q} = \bar{u} - \mathbf{j}v$,

$$c(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \bar{u} & v \\ -v & u \end{bmatrix}$$

y que

$$c(q)^* = (\overline{c(q)})^t = \begin{bmatrix} \bar{u} & -v \\ v & u \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \bar{u} & v \\ -v & u \end{bmatrix}$$

(*d*) Ahora tenemos que, siendo $tq = tu + \mathbf{j}(tv)$,

$$c(tq) = \begin{bmatrix} tu & -(\overline{tv}) \\ tv & \overline{tu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tu & -t\bar{v} \\ tv & t\bar{u} \end{bmatrix}$$

y que

$$tc(q) = t \cdot \begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tu & -t\bar{v} \\ tv & t\bar{u} \end{bmatrix}$$

(*e*) Dado $q = u + v\mathbf{j}$. Tenemos que,

$$\det c(q) = u\bar{u} + \bar{v}v = |u|^2 + |v|^2 = |q|^2$$

$\square$

Capítulo 2

Matrices Cuaterniónicas

En este capítulo comenzamos definiendo la matriz compleja asociada a una matriz cuaterniónica . También estudiaremos distintas propiedades de esta última matriz.

2.1. Matriz Asociada

Definición 2.1. Definimos matriz cuaterniónica como una matriz

$$M = \begin{bmatrix} q_{11} \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ q_{n1} \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

donde cada $q_{ij} = u_{ij} + \mathbf{j}v_{ij}$, con $u, v \in \mathbb{C}$ es un cuaternio.

Entonces, $M = U + \mathbf{j}V$ con $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Observación 2.2. Denotamos $M \in \mathbb{H}^{n\times n}$

Definición 2.3. Definamos la matriz compleja asociada a la matriz cuaterniónica M:

$$c(M) = \begin{bmatrix} U & -\overline{V} \\ V & \overline{U} \end{bmatrix}$$

Notemos que $c(M) \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$

Ejemplo 2.4. Sea $M \in \mathbb{H}^{2\times 2}$,

$$M = \begin{bmatrix} 3+\mathbf{i}+\mathbf{j} & 1+3\mathbf{k} \\ 1-2\mathbf{k} & 1+\mathbf{i}+2\mathbf{j} \end{bmatrix}$$

Descomponiendo en complejos, tendríamos,

$$\begin{bmatrix} 3+\mathbf{i} & 1 \\ 1 & 1+\mathbf{i} \end{bmatrix} + \mathbf{j}\cdot \begin{bmatrix} 1 & -3\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$c(M) = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right]$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 3+\mathbf{i} & 1 \\ 1 & 1+\mathbf{i} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -3\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3-\mathbf{i} & 1 \\ 1 & 1-\mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

Proposición 2.5. *La matriz compleja asociada a una cuaterniónica posee las siguientes propiedades:*

1. $c(I_n) = I_{2n}$
2. $c(M + M') = c(M) + c(M)$
3. $c(M \cdot M') = c(M) \cdot c(M')$
4. $c(M^*) = c(M)^*$

Demostración. Se demuestra de manera análoga a los cuaternios como hicimos en la **Proposición 1.16**. □

Observación 2.6. Es necesario puntualizar lo siguiente:

- $c(M^t) \neq c(M)^t$
- $c(\overline{M}) \neq \overline{c(M)}$
- Así como se cumple que $c(tM) = tc(M)$, si $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $c(zM) \neq zc(M)$, con $z \in \mathbb{C}$

Observación 2.7. Por la visto en la Proposición 2.5, la aplicación

$$c\colon \mathbb{H}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{2n\times 2n}$$

es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Proposición 2.8. *La aplicación anterior es inyectiva.*

Demostración. $c(M) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} U & -\overline{V} \\ V & \overline{U} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow U + \mathbf{j}V = 0 \Rightarrow U = 0, V = 0 \Rightarrow M = 0.$ □

Proposición 2.9. *Sea $N \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, entonces: N pertenece a la imagen de c si y solo si $NJ = J\overline{N}$. Siendo $J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $N = C(M) = \begin{bmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{bmatrix}$, entonces

$$NJ = \begin{bmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{B} & -A \\ \overline{A} & -B \end{bmatrix}$$

$$J\overline{N} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{A} & B \\ \overline{B} & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{B} & -A \\ \overline{A} & -B \end{bmatrix}$$

($\Leftarrow$) Si $N = \left[\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline b & d \end{array}\right]$, siendo cajas $n \times n$.

Tenemos que

$$NJ = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -a \\ d & -b \end{bmatrix}$$

y

$$J\overline{N} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{b} & -\overline{d} \\ \overline{a} & \overline{c} \end{bmatrix}$$

De este modo tenemos que $d = \overline{a}$ y $c = -\overline{b}$, por lo que nuestra matriz N será de la forma

$$N = \begin{bmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{bmatrix}$$

□

Proposición 2.10. *M es inversible si y sólo si $c(M)$ es inversible*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si existe M^{-1}, entonces $MM^{-1} = I_n$. Entonces $c(M) \cdot c(M^{-1}) = c(M \cdot M^{-1}) = c(I_n) = I_{2n}$, lo cual implica que $c(M^{-1}) = c(M)^{-1}$.
Por lo tanto $c(M)$ es inversible.

($\Leftarrow$) Sea $c(M)$ inversible y sea A su inversa. Demostremos primero que existe $N \in \mathbb{H}^{n\times n}$ tal que $c(N) = A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$. Es decir, que A pertenece a la imagen de c. Esto ocurre si

$AJ = J\overline{A}$,. Como $c(M)$ está en la imagen sabemos que $c(M)J = J\overline{c(M)}$. Y sabemos $c(M)A = I = Ac(M)$. Por tanto, $J\bar{A} = J\overline{c(M)^{-1}} = c(M)^{-1}J = AJ$

Por tanto,

$c(M)$ inversible $\Rightarrow \exists A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ tal que $c(M)\cdot A = I_{2n} \Rightarrow c(M)\cdot c(N) = c(I_n) \Rightarrow c(M\cdot N) = c(I_n) \Rightarrow M\cdot N = I_n$ (porque c es inyectiva) $\Rightarrow M$ es inversible. $\square$

Capítulo 3

Determinantes

En este nuevo capítulo estudiaremos dos importantes determinantes con valores reales. Uno de ellos es el determinante de Study. Con la ayuda de un artículo de Nir Cohen and Stefano De Leo, "The Quaternionic Determinant"[6], veremos que no hay ningún otro funcional que nos de el mismo valor. El segundo es el determinante de Moore, que cobrará importancia en el último capítulo.

3.1. Determinante de Study

Definición 3.1. Llamaremos determinante de Study de $M \in \mathbb{H}^{n\times n}$, y lo denotaremos por $\mathrm{Sdet}(M)$, al determinante de la matriz compleja $c(M)$.

Ejemplo 3.2. Calculemos $\mathrm{Sdet}M$, con $M = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ \mathbf{j} & -\mathbf{k} \end{bmatrix}$. Determinemos su matriz compleja asociada. Para esto, descompongamos primero en complejos,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{j} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

. Por tanto, tenemos que,

$$C(M) = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right]$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{i} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \mathbf{i} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Y por lo tanto, obtendremos el determinante de Study haciendo el determinante usual (por adjuntos,por la segunda fila, cuyos elementos son 1 e $\mathbf{i}$) de la matriz compleja asociada, es decir, de $C(M)$

$$\mathrm{Sdet}(M) = \det(C(M)) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} & 1 \\ 1 & \mathbf{i} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -\mathbf{i} \\ 0 & -\mathbf{i} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\mathbf{i} \\ 0 & -\mathbf{i} & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 + \mathbf{i} \cdot (-2\mathbf{i}) = 4$$

Lema 3.3. *Sea $N = c(M)$. Entonces, como $J^2 = -I$ entonces $J^{-1} = -J$*

Por tanto podemos decir que $\overline{N} = -JNJ$. Recordemos que $J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$

Pongamos a continuación un resultado del matemático Leiba Rodman que nos muestra en su libro *"Topics in Quaternion"* [5], concretamente el Claim 5.6.1 (página 104).

Proposición 3.4. *Para cada matriz $B = c(M) = \begin{bmatrix} U & -\overline{V} \\ V & \overline{U} \end{bmatrix}$, donde $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, existe una matriz inversible $T = \begin{bmatrix} T_1 & -\overline{T_2} \\ T_2 & \overline{T_1} \end{bmatrix}$, con $T_1, T_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y una matriz $J_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de Jordan, cumpliendo lo siguiente:*

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J_1} \end{bmatrix} = T^{-1}BT$$

De aquí sale el siguiente Lema.

Lema 3.5. *Dada la matriz de Jordan de la matriz $C(M)$,*

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \overline{J_1} \end{bmatrix}$$

Entonces,
$\det c(M) = \det \mathcal{J} = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n \cdot \overline{\lambda_1} \cdot \cdots \cdot \overline{\lambda_n} = |\lambda_1|^2 \cdot \cdots \cdot |\lambda_n|^2 \geq 0.$

Proposición 3.6. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{Sdet}(M)$ *es un número real no negativo,* $\mathrm{Sdet}(M) = \det c(M) \geq 0$

2. $\mathrm{Sdet}(A \cdot B) = \mathrm{Sdet}(A) \cdot \mathrm{Sdet}(B)$.

3. *M es inversible* $\Leftrightarrow \operatorname{Sdet}(M) \neq 0$

4. *Si en una matriz M, a la columna M_i le sumamos un múltiplo $M_j \cdot h$ de la columna M_j, entonces* Sdet *no cambia.*

Demostración. 1. Demostrado anteriormente

2. Es inmediato porque:
$$c(A \cdot B) = c(A) \cdot c(B)$$

3. $(\Rightarrow) M$ inversible $\Rightarrow \exists M^{-1}$ tal que $MM^{-1} = I \Rightarrow c(MM^{-1}) = c(I) \Rightarrow c(M)c(M^{-1}) = I \Rightarrow c(M)$ inversible $\Rightarrow \det(c(M)) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Sdet}(M) \neq 0$.

   $(\Leftarrow) \operatorname{Sdet}(M) \neq 0 \Rightarrow \det(c(M)) \neq 0 \Rightarrow c(M)$ inversible, y en virtud de la **Proposición 2.10** M es inversible.

4. Para demostrar este apartado definamos lo siguiente:

   Sea $M_{ij}(h) = I + hE_{ij}, i < j$.

   Es necesario decir que $\{E\}_{i,j=1}^{n}$ es una matriz de ceros con un 1 en la posición ij. Si multiplicamos nuestra matriz M por $M_{ij}(h)$ le estaremos sumando a la columna M_i un múltiplo $M_j \cdot h$ de la columna M_j

   La matriz $M_{ij}(h)$ es triangular superior, por lo que el determinante de Study es el producto de los cuadrados de los módulos de los elementos de la diagonal, que en este caso son todo unos.

   Por tanto,
$$\operatorname{Sdet}(M \cdot M_{ij}(h)) = \operatorname{Sdet}(M) \cdot \operatorname{Sdet}(M_{ij}(h)) = \operatorname{Sdet}(M) \cdot 1 = \operatorname{Sdet}(M),$$
   con lo que concluimos la demostración.

□

3.2. Unicidad del determinante

Existe una serie de resultados que Nir Cohen y Stefano De Leo exponen en un artículo llamado "The Quaternionic Determinant"[6]. El siguiente corresponde al Lema 5.2 del mismo.

Lema 3.7. *Si la aplicación,*
$$\mathcal{D} \colon \mathbb{H}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
es multiplicativa no constante, entonces:

1. *$\mathcal{D}(S) = 1$ si $S^2 = I$*

2. *$\mathcal{D}(S) \cdot \mathcal{D}(S^{-1}) = 1$ y $\mathcal{D}(S^{-1}MS) = \mathcal{D}(M)$ si S es invertible*

3. *$\mathcal{D}(P) = 1$ para todas las matrices permutaciones P*

4. *$\mathcal{D}(M) = 0 \Leftrightarrow M$ es singular.*

Demostración. La multiplicatividad implica $\mathcal{D}(I) = 1$.

1. Es consecuencia de la multiplicatividad

2. Es consecuencia de la multiplicatividad

3. Toda matriz permutación es producto de matrices producto elementales P_i donde $P_i^2 = 1$. Las matrices permutación se obtienen de la matrizidentidad al intercambiar el orden de filas (o columnas).

4. ($\Leftarrow$)Si M es no singular, entonces aplicando $\mathcal{D}$ a $MM^{-1} = I$ implica que $\mathcal{D}(M) \neq 0$. Esto ocurre ya que $\mathcal{D}(M \cdot M^{-1}) = \mathcal{D}(M) \cdot \mathcal{D}(M^{-1}) = 1$.

   ($\Rightarrow$) J. L. Brenner prueba en el Teorema 1.6 [4] que si $\mathcal{D}$ es un funcional multiplicativo, entonces vale cero en cualquier matriz singular.

□

Proposición 3.8. *No hay aplicación multiplicativa*

$$\mathcal{D}\colon \mathbb{H}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{H}$$

que coincida con el determinante complejo, si la aplicamos a una matriz compleja.

Demostración. Es suficiente con obtener un contraejemplo para $n = 2$. Consideremos matrices 2×2,

$$M = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \end{bmatrix}$$

Como S es invertible, por el lema anterior, tenemos que $\mathcal{D}(S) \neq 0$. Como $SM = NS$ concluimos que $\mathcal{D}(S) \cdot \mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(N) \cdot \mathcal{D}(S)$, por lo tanto $\mathcal{D}(M)$ y $\mathcal{D}(N)$ tendrían que ser similares . Esto es una contradicción ya que $\Re(\mathcal{D}(M)) \neq \Re(\mathcal{D}(N))$. Esto es así ya que sabemos que dos cuaternios similares tienen partes reales iguales.Tenemos

$$\mathcal{D}(M) = \det(M) = (1 + \mathbf{i})\mathbf{i} = \mathbf{i} - 1$$

En cambio,

$$\mathcal{D}(N) = \det(N) = (1 + \mathbf{i})(-\mathbf{i}) = -\mathbf{i} + 1$$

□

Corolario 3.9. *Si M es una matriz triangular superior, entonces* $\mathrm{Sdet}(M) = \prod_{i=1}^{n} |m_{ii}|^2$.

Demostración. Demostremos estos con ejemplo.

Sea la matriz genérica 2×2, $M = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Determinemos su matriz compleja asociada. Para esto, descompongamos primero en complejos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{j} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Por tanto, tenemos que,

$$C(M) = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right]$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Y por lo tanto, obtendremos el determinante de Study haciendo el determinante usual (por adjuntos, por ejemplo) de la matriz compleja asociada, es decir, de $c(M)$

$$\mathrm{Sdet}(M) = \det(c(M)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1 = \prod_{i=1}^{n} |m_{ii}|^2$$

□

Corolario 3.10. *Para todas las matrices M se tiene que* $\mathrm{Sdet}(M) = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|$*, donde λ_i son los autovalores de M.*

Demostración. Por el **Lema 3.7**, es suficiente considerar la forma de Jordan de M, que es del tipo de matriz considerada en el corolario anterior. □

Corolario 3.11. *Para matrices complejas tenemos* $\mathrm{Sdet}(M) = |\det c(M)|$

Teorema 3.12. $\mathrm{Sdet}(M)$ *es la única aplicación,*

$$\mathcal{D} \colon \mathbb{H}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

que es multiplicativa, es decir, $\mathcal{D}(M \cdot N) = \mathcal{D}(N \cdot M) = \mathcal{D}(M) \cdot \mathcal{D}(N)$
y satisface la siguiente condición,

$$\mathcal{D}(qI) = |q|^n, \forall q \in \mathbb{H}$$

Demostración. Sea una aplicación $\mathcal{D}$ que satisface las hipótesis del teorema. Cojamos la base canónica usual sobre $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}^{n\times n}$, $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Sea un cuaternio distinto de cero, $q \in \mathbb{H}$. Consideremos las matrices elementales diagonales de orden n,

$$M_i(q) := I + (q-1)E_{ii}$$

y las matrices triangulares superiores de orden $\frac{n(n-1)}{2}$

$$M_{ij}(q) := I + qE_{ij}, i < j$$

Primero, mostremos que $\mathcal{D}(M_i(q)) = |q|$.
En efecto, observamos que $\mathcal{D}(M_i(q))$ es independiente de $1 \leq i \leq n$.
Así que, llamamos $f(q) := \mathcal{D}(M_i)(q) = |q|$. Tenemos $qI = \prod_{i=1}^{n} M_i(q)$, por lo tanto,

$$|q|^n = \mathcal{D}(qI) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{D}(M_i(q)) = f(q)^n$$

.

Por tanto $f(q) = |q|$, tal y como se afirma. Ahora mostremos que $\mathcal{D}(M_{ij}(q)) = 1$. En efecto, es fácil de ver que,

$$M_{ij}^{-1}(q) = M_{ij}(-q) = M_i(-1)M_{ij}(q)M_i(-1)$$

,

por tanto $\mathcal{D}(M_{ij}(q)^{-1}) = \mathcal{D}(M_{ij}(q))$. Ahora, $\mathcal{D}(M_{ij}(q)) = 1$ se demuestra por el Lema de nuevo. Entonces tenemos establecido que

$$\mathcal{D}\colon \quad \mathbb{H}^{n\times n} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}_+$$

satisface

$$\mathcal{D}(M \cdot N) = \mathcal{D}(N \cdot M) = \mathcal{D}(M) \cdot \mathcal{D}(N)$$

$$\mathcal{D}(M_{ij}(q)) = 1,$$

y la propiedad 4 del Lema 3.7 ($\mathcal{D}(M) = 0 \Leftrightarrow M$ es singular).

Por lo tanto, y de acuerdo con un resultado de Dieudonne [3], , $\mathcal{D} = \mathrm{Sdet}^r$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Debido a $\mathcal{D}(q \cdot I) = |q|^n$ y $\mathrm{Sdet}(q \cdot I) = |q|^{2n}$, se tiene que $r = 1/2$. □

3.3. Determinante de Moore

Veamos, en este apartado, que es posible definir un determinante para las matrices hermiticas. Para ello, acudiremos a un artículo de Helmer Alasken llamado "Quaternionic Determinants"[1].

Sea σ una permutación. Escribámosla como producto de ciclos. Permutemos cada ciclo cíclicamente, hasta que el número más grande del ciclo esté al frente. Luego ordenar los ciclos en orden decreciente de acuerdo con el primer número de cada ciclo. En otras palabras, escribir

$$\sigma = (n_{11} \cdots n_{1l_1})(n_{21} \cdots n_{2l_2}) \cdots (n_{r1} \cdots n_{rl_r})$$

,

donde para cada i, tenemos $n_{i1} > n_{ij}$ para todo $j > 1$, y $n_{11} > n_{21} > \cdots > n_{r1}$

Definición 3.13. Definimos el determinate de Moore como,

$$\mathrm{Mdet}(M) = \sum_{\sigma \in S} |\sigma| m_{n_{11}n_{12}} \cdots m_{n_{1l_1}} m_{n_{21}n_{22}} \cdots m_{n_r l_r n_{r1}}$$

Ejemplo 3.14. Ejemplo matriz 2×2, $M = \begin{bmatrix} a & b^* \\ b & c \end{bmatrix}$, con $a = a^*$, $c = c^*$ (es decir, a, c real.

Las dos permutaciones posibles, descompuestas en ciclos, nos dan (1)(2) y (12), es decir, siendo rigurosos con la definición que nos acerca Helmer Aslaksen, (2)(1) y (21), respectivamente. Por tanto, según la definición dada anteriormente:

$$\mathrm{Mdet}(M) = m_{22}m_{11} - m_{21}m_{12} = ac - |b|^2.$$

Definición 3.15. Una matriz es hermítica si $H = H^*$

Proposición 3.16. *Si nos restringimos a una matriz hermitiana, H, resulta que todos sus valores propios son reales y que la matriz se puede diagonalizar*

Proposición 3.17. *Si H es una matriz hermítica, entonces* $\mathrm{Mdet}(H)$ *es un número real*

Teorema 3.18. *Sea M una matriz no hermítica cuaternónica, entonces tenemos que*

$$\mathrm{Sdet}(M) = \mathrm{Mdet}(MM^*)$$

Demostración. Demostremos esto con un ejemplo: Sea la matriz $M = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ \mathbf{j} & -\mathbf{k} \end{bmatrix}$. Sabemos por el **Ejemplo 2.4** que $\mathrm{Sdet}(M) = 4$, por lo que solamente tendremos que comprobar que $\mathrm{Mdet}(M^*M) = 4$. Hagamos primero M^*:

$$M^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -\mathbf{j} \\ 1 & \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

Ahora el siguiente producto:

$$M \cdot M^* = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ \mathbf{j} & -\mathbf{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{i} & -\mathbf{j} \\ 1 & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

. Por tanto,

$$\mathrm{Mdet}(MM^*) = m_{22}m_{11} - m_{21}m_{12} = 4$$

□

Para posteriores resultados, y en especial para el próximo capítulo, es necesario definir la siguiente notación.

Definición 3.19. Sea $A \in M(n, \mathbb{H})$:

- Denotamos por $a_{.j}$ la j-ésima columna de la matriz A.
- Denotamos por $a_{i.}$ la i-ésima fila de la matriz A.
- $A_{.j}(b)$ es el resultado de reemplazar en A, la j-ésima columna por la columna b.

- $A_{i.}(b)$ es el resultado de reemplazar en A, la i-ésima fila por la fila b.
- $A_{j.}(a_{i.})$ se obtiene de A al reemplazar la j-ésima fila por la i-ésima fila
- $A_{.j}(a_{.i} \cdot b)$ se obtiene de A al reemplazar la j-ésima columna por la i-ésima columna multiplicada por $b \in \mathbb{H}$ (por la izquierda).
- A^{ij} es la submatriz resultado de eliminar de A, tanto la fila i-ésima como la columna j-ésima.
- $A^{ii}_{.j}(a.i)$ se obtiene de A reemplazando la j-ésima columna por la i-ésima columna y luego borrando la i-ésima fila y la i-ésima columna.

Teorema 3.20. *Si en la i-ésima fila de una matriz hermítica $A \in M(n, \mathbb{H})$ añadimos una combinación lineal por la izquierda de otras filas, entonces*

$$\mathrm{Mdet} A_{i.}(a_{i.} + c_1 a_{i_1.} + \cdots + c_k a_{i_k.}) = \mathrm{Mdet} A_{i.}(a_{i.} + c_1 a_{i_1.} + \cdots c_k a_{i_k.}) = \mathrm{Mdet} A$$

, donde $c_l \in \mathbb{H}, \forall l = 1, ..., k$.

Capítulo 4

Matriz Inversa

Acerquemos una serie de resultados aportados por el matemático Ivan Kyrchei [2], que introducen el concepto de determinante desarrollado por una fila o una columna, con el fin de desembocar en el cálculo de la inversa de una matriz cuaterniónica.

4.1. Determinante por filas

Definición 4.1. El determinante por la i-ésima fila de $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{H})$ se define como la suma alternada de $n!$ productos de los elementos de A, donde la permutación del índice de cada producto en cada producto la permutación de índices se escribe como el producto de ciclos disjuntos. Si la permutación es par, entonces el producto de los elementos de A tiene signo positivo. Si la permutación es impar, entonces el producto de las entradas tiene signo negativo. Así,

$$\mathrm{rdet}_i A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \cdots a_{i_{k_1+l_1} i} \cdots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}$$

Veamos con un ejemplo general como funciona el determinante por filas.

Ejemplo 4.2. Si tenemos una matriz 3×3, las permutaciones posibles son 6.

- $123 = (1)(2)(3)$
- $132 = (1)(23)$
- $213 = (12)(3)$
- $231 = (123)$
- $312 = (132)$

- $321 = (2)(13)$

Pongamos entonces un ejemplo de determinante por la segunda fila (suma alterna de $n! = 6$ productos de entradas de A). Según Kyrchei el orden del producto de ciclos es,
$\sigma = (i \ \ i_{k_1} \ \ i_{k_{1+1}} \ \ \cdots)(i_{k_2} \ \ i_{k_2} \ \ i_{k_{2+1}} \cdots) \cdots (i_{k_r} \ \ i_{k_{r+1}} \cdots)$. Teniendo en cuenta que,

$$i_{k_2} < i_{k_3} < \cdots < i_{k_r}, \quad i_{k_t} < i_{k_t+s}, \forall t = 2, ...r; s = 1, ...$$

Sea entonces una matriz 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Establezcamos un paralelismo entre los productos de ciclos y el producto de los elementos de las matrices (tal y como lo define Kyrchei en el determinante por filas), siguiendo el mismo orden:

- $(2)(1)(3) \longleftrightarrow a_{22} \cdot a_{11} \cdot a_{33}$
- $(23)(1) \longleftrightarrow a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$
- $(21)(3) \longleftrightarrow a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$
- $(231) \longleftrightarrow a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12}$
- $(213) \longleftrightarrow a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32}$
- $(2)(13) \longleftrightarrow a_{22} \cdot a_{13} \cdot a_{31}$

Podemos observar que al tratarse de un determinante desarrollado por la segunda fila, el primer elemento será siempre un 2 ya que así lo definió Kyrchei en el orden del producto de ciclos.

Por tanto tenemos que, como

$$\mathrm{rdet}_i A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \cdots a_{i_{k_1+l_1} i} \cdots a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \cdots a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}$$

entonces,

$$\mathrm{rdet}_2 A = a_{22} \cdot a_{11} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{22} \cdot a_{13} \cdot a_{31}$$

Existe una expresión más manejable de esta definición anterior. Para ello necesitaremos lo que Kyrchei llama cofactor.

Definición 4.3. Sea R_{ij} el i-ésimo cofactor por la derecha de $A \in M(n, \mathbb{H})$, la siguiente expresión,

$$R_{ij} = \begin{cases} -\mathrm{rdet}_j A^{ii}_{.j}(a_{.i}), & i \neq j, \\ \mathrm{rdet}_k A^{ii}, & i = j, \end{cases}$$

donde $A^{ii}_{.j}(a_{.i})$ se obtiene substituyendo la j- ésima columna por la i-ésima columna y luego eliminando la fila y la columna i-ésima, A^{ii} se obtiene de eliminar la fila i y la columna i, y $k = \min\{I_n \setminus \{i\}\}$

Proposición 4.4. *Utilizando la definición anterior podemos definir el determinante por filas del siguiente modo:*

$$\mathrm{rdet}_i A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} R_{ij}, \forall i = 1, ..., n$$

4.2. Determinante por columnas

Definición 4.5. El determinante por la j-ésima columna de $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{H})$ se define como la suma alternada de $n!$ productos de los elementos de A, donde la permutación del índice de cada producto en cada producto la permutación de índices se escribe como el producto de ciclos disjuntos. Si la permutación es par, entonces el producto de los elementos de A tiene el signo positivo. Si la permutación es impar, entonces el producto de las entradas tiene el signo negativo. Así,

$$\mathrm{cdet}_j A = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{n-r} a_{j_{k_r} j_{k_r+l_r}} \cdots a_{j_{k_r+1} i_{k_r}} \cdots a_{j j_{k_1+l_1}} \cdots a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} a_{j_{k_1} j},$$

Ejemplo 4.6. Si tenemos una matriz 3×3, las permutaciones posibles son 6.

- $123 = (1)(2)(3)$
- $132 = (1)(23)$
- $213 = (12)(3)$
- $231 = (123)$
- $312 = (132)$
- $321 = (2)(13)$

Pongamos entonces un ejemplo de determinante por la segunda columna (suma alterna de $n! = 6$ productos de entradas de A). Según Kyrchei el orden del producto de ciclos es,

$\sigma = (j_{kr+lr} \cdots \ j_{kr}) \cdots (j_{k_2+l_2} \cdots j_{k2})(j_{k_1+l_1} \cdots j)$

Teniendo en cuenta que,

$$j_{k_2} < j_{k_3} < \cdots < j_{k_r}, j_{k_t} < j_{k_t+s}, \forall t = 2, ..., r; s = 1, ..., l_t$$

Sea entonces una matriz 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Establezcamos un paralelismo entre los productos de ciclos y el producto de los elementos de las matrices (tal y como lo define Kyrchei en el caso del determinante por columnas), siguiendo el mismo orden:

- $(3)(1)(2) \longleftrightarrow a_{33} \cdot a_{11} \cdot a_{22}$
- $(1)(32) \longleftrightarrow a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}$
- $(3)(12) \longleftrightarrow a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$
- $(312) \longleftrightarrow a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$
- $(132) \longleftrightarrow a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21}$
- $(31)(2) \longleftrightarrow a_{31} \cdot a_{13} \cdot a_{22}$

Por tanto tenemos que, como

$$\text{cdet}_j A = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{n-r} a_{j_{k_r} j_{k_r+l_r}} \cdots a_{j_{k_r+1} i_{k_r}} \cdots a_{j j_{k_1+l_1}} \cdots a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} a_{j_{k_1} j},$$

entonces,

$$\text{cdet}_2 A = a_{33} \cdot a_{11} \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} + a_{31} \cdot a_{13} \cdot a_{22}$$

Tal y como hicimos anteriormente, demos una expresión alternativa.

Definición 4.7. Sea L_{ij} el i-ésimo cofactor por la izquierda de la matriz $A \in M(n, \mathbb{H})$, la siguiente expresión,

$$L_{ij} = \begin{cases} -\text{cdet}_i A_{i.}^{jj}(a_{j.}), & i \neq j, \\ \text{cdet}_k A^{jj}, & i = j, \end{cases}$$

donde $A_{i.}^{jj}(a_{j.})$ se obtiene substituyendo la i- ésima fila por la j-ésima fila y luego eliminando la fila y la columna j-ésima, A^{jj} es el resultado de quitarle a la matriz A la fila j y la columna j, y $k = \text{mín}\{I_n \setminus \{i\}\}$

Proposición 4.8. *Utilizando la definición anterior podemos definir el determinante por columnas del siguiente modo,*

$$\mathrm{cdet}_j A = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} a_{ij}, \forall i = 1, ..., n$$

Partiendo de las anteriores definiciones podemos, de forma sencilla, demostrar las siguientes propiedades de los determinantes por filas y columnas.

Proposición 4.9. *Si la i-ésima fila de $A \in M(n, \mathbb{H})$ es multiplicada por la izquierda por $b \in \mathbb{H}$, entonces* $\mathrm{rdet}_i A_{i.}(b \cdot a_{i.}) = b \cdot \mathrm{rdet}_i A, \forall i = 1, ..., n$

Proposición 4.10. *Si la j-ésima columna de $A \in M(n, \mathbb{H})$ es multiplicado por la derecha por $b \in \mathbb{H}$, entonces* $\mathrm{cdet}_j A_{.j}(a_{.j} \cdot b) = \mathrm{cdet}_j A \cdot b$, $\forall j = 1, ..., n$

Proposición 4.11. *Si A^* es la matriz adjunta de $A \in M(n, \mathbb{H})$, entonces* $\mathrm{rdet}_i A^* = \overline{\mathrm{cdet}_i A}, \forall i = 1, .., n$

Mostremos con un ejemplo, que se cumple la anterior proposición:

Ejemplo 4.12. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{j} & 2 \end{bmatrix}$ y $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{j} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vamos a desarrollar los determinantes por la primera fila y la primera columna, es decir, $i = 1$.

Recordemos también que para una matriz genérica 2×2 tenemos que:

$$\mathrm{rdet}_1(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathrm{cdet}_1(A) = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}$$

Por tanto,

$$\mathrm{rdet}_1 A^* = 2 + \mathbf{j} = \overline{2 - \mathbf{j}} = \overline{\mathrm{cdet}_1 A}$$

4.3. Caso de las Matrices Hermíticas

Teorema 4.13. *Si $A \in M(n, \mathbb{H})$ es una matriz hermítica, entonces*

$$\mathrm{rdet}_1 A = \cdots = \mathrm{rdet}_n A = \mathrm{cdet}_1 A = \cdots = \mathrm{cdet}_n A \in \mathbb{R}$$

.

Relacionemos lo anterior con el determinante de Moore

Observación 4.14. Tenemos que,

$$\mathrm{Mdet}(A) = -\sum_{\sigma\in S_n} a_{ij}\cdot \mathrm{rdet}_j A^{ii}_{.j}(a_{.i}) + a_{ii}\cdot \mathrm{rdet}_k A^{ii}, k = \min\{I_n \setminus \{i\}\}$$

con lo que concluimos que el determinante por filas definido por Ivan Kyrchei coincide con el determinante de Moore.

Vamos a explicar como pueden usarse los cofactores para defi9nir una matriz adjunta y una matriz inversa, análogas a las del caso complejo clásico.

Teorema 4.15. *Si $A \in M(n,\mathbb{H})$ es una matriz hermítica no singular, existe una única matriz inversa (por la derecha) $(RA)^{-1}$, y una única matriz inversa (por la izquierda) $(LA)^{-1}$, , donde*

$$(RA)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Mdet}(A)}\cdot \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{n1} \\ R_{12} & R_{22} & \cdots & R_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{1n} & R_{2n} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix}$$

,

$$(LA)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Mdet}(A)}\cdot \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & \cdots & L_{n1} \\ L_{12} & L_{22} & \cdots & L_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

Además,

$$(RA)^{-1} = (LA)^{-1} =: A^{-1}$$

Demostración. Tomando $B = A\cdot (RA)^{-1}$, obtenemos las siguientes entradas

$$b_{ii} = (\mathrm{Mdet}(A))^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}R_{ij} = (\mathrm{Mdet}(A))^{-1}\cdot \mathrm{rdet}_i(A) = \frac{\mathrm{Mdet}(A)}{\mathrm{Mdet}(A)} = 1, \forall i = 1,...,n$$

$$b_{ij} = (\mathrm{Mdet}(A))^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_{is}R_{js} = (\mathrm{Mdet}(A))^{-1}\cdot \mathrm{rdet}_j A_{j.}(a_{i.}), i \neq j$$

Kyrchei da un resultado que nos dice que como la matriz $A_{j.}(a_{i.})$ tiene dos filas iguales, porque es obtenida a partir de una matriz hermítica reemplazando la fila j por la fila i, entonces $\mathrm{rdet}_j A_{j.}(a_{i.}) = 0$, $\forall i, j = 1,...,n$ con $i \neq j$.

Trasladándolo a este teorema, tenemos que si $i \neq j$, entonces $b_{ij} = 0$. Por tanto $B = I$.

De una forma análoga, lo hacemos para $(LA)^{-1}$. □

Ahora consideramos una matriz A arbitraria, y tomemos sus hermíticas asociadas, es decir A^*A y AA^*

Definición 4.16. Supongamos que $A \in M(n, \mathbb{H})$ es una matriz arbitraria, y que

$$\text{Mdet}(A^*A) = \text{cdet}_j(A^*A) = \sum_i \mathbb{L}_{ij} \cdot a_{ij}$$

$$\text{Mdet}(AA^*) = \text{rdet}_i(AA^*) = \sum_j a_{ij} \cdot \mathbb{R}_{ij}$$

entonces $\mathbb{R}_{ij}$ y $\mathbb{L}_{ij}$ serán llamados, respectivamente, doble factor ij-ésimo por la derecha y por la izquierda.

4.4. Cálculo de la inversa de una matriz

Lema 4.17. *Una condición necesaria y suficiente para que una matriz $A \in M(n, \mathbb{H})$ sea inversible, es que* $\text{Mdet}(A^*A) \neq 0$.

Demostración. La demostración de este lema se deduce del hecho de que $\text{Mdet}(A^*A) = \text{Sdet}(A)$, habiendo demostrado anteriormente en la **Proposición 3.6** que A es inversible si y solo si $\text{Sdet}(A) \neq 0$. $\square$

Teorema 4.18. *Existe* $A^{-1} := (LA)^{-1} = (RA)^{-1}$*, donde*

$$(LA)^{-1} = (A^*A)^{-1}A^* = \frac{1}{\text{Mdet}(A^*A)} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{11} \cdots & \mathbb{L}_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbb{L}_{n1} \cdots & \mathbb{L}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(RA)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1} = \frac{1}{\text{Mdet}(AA^*)} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}_{11} \cdots & \mathbb{R}_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbb{R}_{n1} \cdots & \mathbb{R}_{nn} \end{bmatrix}$$

y,

$$\mathbb{L}_{ij} = \text{cdet}_j(A * A)_{.j}(a^*_{.i}), \qquad \mathbb{R}_{ij} = \text{rdet}_i(AA*)_{i.}(a^*_{j.})$$

Demostración. Supongamos que A^*A es inversible. Multiplicando por la derecha por A^*, obtenemos $(LA)^{-1} = (A^*A)^{-1}A^*$. Teniendo en cuenta que

$$(A^*A)^{-1} = \left(\mathbb{L}_{ij} \cdot \tfrac{1}{\text{Mdet}(A^*A)}\right)_{n \times n}$$

,

como la matriz inversa izquierda, obtenemos

$$(LA)^{-1} = (L(A^*A))^{-1}A^* = \frac{1}{\mathrm{Mdet}(A^*A)} \cdot \begin{bmatrix} \sum_k L_{k1}a_{k1}^* \cdots & \sum_k L_{k1}a_{kn}^* \\ \vdots & \vdots \\ \sum_k L_{kn}a_{k1}^* \cdots & \sum_k L_{kn}a_{kn}^* \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\mathrm{Mdet}(A^*A)} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{cdet}_1(A^*A)_{,1}(a_{,1}^*) \cdots & \mathrm{cdet}_1(A^*A)_{,1}(a_{.n}^*) \\ \vdots & \vdots \\ \mathrm{cdet}_n(A^*A)_{.n}(a_{,1}^*) \cdots & \mathrm{cdet}_n(A^*A)_{.n}(a_{.n}^*) \end{bmatrix}$$

. Del hecho de,

$$\mathrm{Mdet}(A^*A) = \mathrm{cdet}_j(A^*A) = \sum_i \mathrm{cdet}(A^*A)_{.j}(a_{.i}) \cdot a_{ij} = \sum_i \mathbb{L}_{ij} \cdot a_{ij}, \forall j = 1, ..., n$$

,

obtenemos la expresión de $(LA)^{-1}$.

De modo análogo llegamos a la expresión de $(RA)^{-1}$. La igualdad $(LA)^{-1} = (RA)^{-1}$, la obtenemos del hecho de que si existe una matriz inversa, entonces es única.

□

Observación 4.19. En el teorema anterior, la matriz inversa A^{-1} de una matriz arbitraria $A \in M(n, \mathbb{H})$ se puede representar de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A^*A)}$$

Hagamos un ejemplo que muestre como proceder para calcular la inversa de una matriz:

Ejemplo 4.20. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{j} \end{bmatrix}$. Calculando la matriz hermítica asociada, obtenemos:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\mathbf{j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{j} \\ -\mathbf{j} & 1 \end{bmatrix}$$

Sabíamos que el determinante de Moore era:

$$\mathrm{Mdet}(A^*A) = \mathrm{Mdet} \begin{bmatrix} s & b \\ b^* & t \end{bmatrix} = st - |b|^2$$

(en nuestro caso el determinante de Moore sería 1) Desarrollemos el determinante de Kyrchei por la primera y segunda fila:

<u>Desarrollo primera fila</u>:

$$\mathrm{rdet}_1(A^*A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = s \cdot (t) - b \cdot (b^*) = s \cdot R_{11} + b \cdot R_{12}$$

por tanto $R_{11} = t$, $R_{12} = -b^*$.

Desarrollo segunda fila

$$\mathrm{rdet}_2(A^*A) = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = t \cdot (s) - b^* \cdot (b) = t \cdot R_{22} + b^* \cdot R_{21}$$

por tanto $R_{22} = s$, $R_{21} = -b$

Por tanto,

$$(A^*A)^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -b^* \\ -b & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{j} \\ -\mathbf{j} & 2 \end{bmatrix}$$

Calculemos finalmente A^{-1}.

$$A^{-1} = (A^*A)^{-1} \cdot A^* = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{j} \\ -\mathbf{j} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{j} & -\mathbf{j} \end{bmatrix}$$

Otra forma de proceder para calcular la inversa de una matriz es partiendo de la matriz compleja asociada:

Ejemplo 4.21. Sea la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{j} \end{bmatrix}$ Descomponiendo en complejos obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{j} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

,

Entonces, tenemos que nuestra matriz compleja asociada es:

$$C(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de Gauss-Jordan o cualquier otro método de cálculo de inversa, llegamos a $C(M)^{-1}$

$$C(M)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, teniendo en cuenta que una matriz compleja asociada es de la forma $c(M) = \begin{bmatrix} U & -\overline{V} \\ V & \overline{U} \end{bmatrix}$, sabemos que, finalmente, $M^{-1} = U + \mathbf{j}V$, con lo cual:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{j} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{j} & -\mathbf{j} \end{bmatrix}$$

,

Bibliografía

[1] Helmer Aslaksen, Quaternionic Determinants, The Mathematical Intelligencer, June 1996.

[2] Ivan Kyrchei, Cramer's Rule for Quaternionic Systems of Linear Equations, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 155, No. 6, 2008.

[3] Jean Dieudonné, Les déterminants sur un corps non commutatif, Bulletin De La S.M.F, tomo 71 (1943), Páginas 27-45.

[4] Joel Lee Brenner, Applications of the Dieudonne Determinant, Linear Algebra and its applications 1, 511-536 (1968).

[5] Leiba Rodman, Topics in Quaternion Linear Algebra, Princeton Series in Applied Mathematics, 2014.

[6] Nir Cohen and Stefano De Leo, The Quaternionic Determinant, The Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 7, Páginas 100-111, September 2000.