APROXIMACION DIDACTICA A TOPOLOXIA

Mª Jesús Salinas Portugal

La realización deste traballo pretendemos dar a coñecer unha experiéncia realizada cos alunos de primeiro curso de Maxistério do ano académico 1982-1983.

O motivo principal foi darlles uns mínimos coñecimentos a estes para iniciá-los na topoloxia, xa que certos aspectos topolóxicos son hoxe parte dos programas nos primeiros ciclos de E.X.B.

Pero antes de ver esta experiéncia imos facer algunhas consideracións mínimas que se deberán ter en conta con relación a este tema. O certo é que moitas persoas perguntan-se hoxe en dia acerca do que é a topoloxia e con frecuéncia como única resposta obteñen a de que é unha parte das matemáticas.

Historicamente naceu a mediados do século XIX nun dos momentos en que se encontraba en auxe a Matemática, pero o seu estudo estivo acotado case exclusivamente as Facultades de Matemáticas e debido a isto non tivo tempo de popularizar-se como outras partes das Matemáticas, entre elas a xeometria.

Non obstante, nestes últimos anos esta parte das Matemáticas vái sendo reconsiderada cada vez máis, principalmente, por os profesores de E.X.B., pois desde o ano 1980 apareceu por primeira vez nos "programas renovados" un bloco temático intitulado "topoloxia e xeometria", para dar en preescolar, ciclo inicial e ciclo médio.

Todo isto leva-nos a un grande problema, pois a maioria dos mestres en activo nunca tiveron a oportunidade de teren nos seus programas temas de topoloxia, e como consecuéncia ven-se na necesidade de seguir as suxeréncias que os libros de texto lles indican, que desafortunadamente non sempre son fiabeis. Pero o problema ainda se agrava máis, pois mesmo nas Escolas de Maxistério o profesorado non sabe ben como introducir os temas de topoloxia, xa que por unha banda, unha grande maioria de alunos que recebe chega sen estudos matemáticos desde 2º de B.U.P., e por outra banda ¿cómo recurrir entón á recta ou ao plano para extraer exemplos que podan explicitar os conceptos topolóxicos que se lles teñen que introducir a alunos que non teñen base na Análise Matemática?. A maior dificultade está, ao noso xuício, en atopar concretizacións donde apoiar a teoria que aos coñecedores do tema lles veu dada desde unha elevada abstracción. Por outra banda, é posibel dar unha topoloxia formalizada baseando-se, exclusivamente, nos coñecimentos de "teoria de conxuntos" que estes alunos de Maxistério adquiren, pero resulta pouco motivador e tamén lles carece de interés, polo que parece antipedagóxico dar isto, sen que haxa previamente unha base intuitiva.

De todos os xeitos despois de vários intentos que tiveron como resultado outros tantos fracasos, por fin no curso 82-83 presentamos-lles aos alunos de primeiro un tema que titulamos "Iniciación intuitiva á topoloxia". O esquema foi o seguinte:

1. Introdución

1.1.- Presentación dalguns exemplos interesantes: esfera, cilindro, toro, banda de Möebius, botella de Klein,...

1.2.- Plantexamento dalguns problemas: campo de vectores sobre unha esfera e sobre un toro. Coloración de mapas. Pontes de Könisgberg, ...

2. Nocións intuitivas de:

2.1.- Transformación bicontínua. Propiedades topolóxicas. Equivalencia topolóxica.

2.2.- Liñas e superficies. Pontos interiores, pontos exteriores, pontos fronteira. Superfícies simplemente conexas e superfícies con buratos.

2.3.- Volumes. Xénero dunha superfície.

2.4.- Grafos planários topolóxicos.

Canto ao apartado 1.- (Introdución) para os exemplos e problemas ver (1), (2) e (5).

Ademais dos aqui mencionados seria conveniente dar outros moitos exemplos que sexan o máis claros posíbeis para o aluno. Imos expor aqui un dos que nos pareceu máis claro:

1) Vexamos un globo desinflado, no que aparece debuxado un moneco, que ten, por exemplo, a sua cara redonda.

2) Agora imos inflar o globo convenientemente.

¿Que pasou co moneco se comparamos 1) con 2)?.

O moneco do 2) agora aparece-nos moito máis grande que o que tiñamos antes de inflar o globo; pero hai que dicer que se agrandou sen manter unha proporcionalidade nas suas dimensións. Todo depende da forma que vaia adquirir o globo cando se infle pois, por exemplo, este pode adquirir unha forma alargada, ovalada, redonda, etc.; por exemplo na figura 1a), vemos que o moneco ten os ollos cuadrados e a boca redonda. Comparemo-lo co da fig. 1b), onde se ve un globo alongado, e tamén co da fig. 1c), onde se ve outra forma de globo.

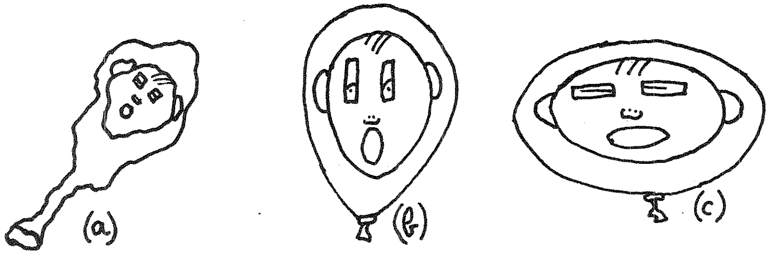


Fig. 1

Non obstante, hai cousas que permanecen pois, os ollos seguen quedando dentro do redondel que limita a cara, as orellas fora del e o redondel segue a ser fechado.

Agora volvamos desinchar o globo e veremos que volve practicamente á sua forma primitiva.

As propiedades 'dentro", "fora", "pechada", etc., que se nos conservan ao inflar e desinflar o globo son algunhas das propiedades que lle interesan á topoloxia.

Este exemplo e outros que, normalmente, se poñen tratan de concienciar ao aluno con respecto á necesidade da topoloxia para matematizar estes feitos físicos de maneira semellante ao que fai a Xeometria con respecto ás formas das figuras e aos seus desplazamentos.

Unha vez conseguido isto, pasamos á parte 2). Para esta elaboramos, seguindo a SAUVY e COURANT/ROBBINS o seguinte esquema teórico:

2.1.- **Transformación bicontínua** dunha figura A en outra A', é unha aplicación dos pontos de A nos de A' verificando que: Dados dous pontos p, q de A, os seus correspondentes en A', p' e q', serán tais que se p se aproxima a q, entón p' aproximará-se a q' e reciprocamente.

Se a unha transformación bicontínua engadimos-lle a propiedade de ser bixectiva, obtemos unha *transformación topolóxica*.

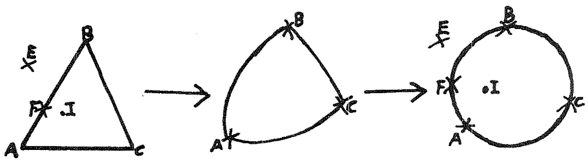
Propiedades topolóxicas (Que conservan nunha transformación topolóxica):

- Orde dos pontos da figura.
- Ser ponto interior ou exterior a figura.
- Estar sobre unha liña (pts fronteira).
- Estar próximo.
- Ter buratos.
- Ser liña pechada ou aberta, etc.

Non son propiedades topolóxicas:

- A orientación da figura nen as proporcións.
- A forma, paralelismo, rectitude das liñas.
- Medida de ángulos, áreas, volúmenes, etc.

Exemplo:



(Un triángulo pode-se converter nun círculo mediante unha transformación contínua).

Equivalencia topolóxica

Duas figuras son *topoloxicamente equivalentes* (homeomorfas) se se pode pasar dunha a outra mediante transformacións topolóxicas.

Exemplo:

2.2.- **Liñas e superficies**

a) Pontos próximos a un ponto dado:

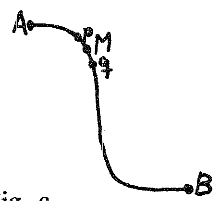


Fig. a

Dada unha liña AB (fig. a), existen pts tais como M que teñen pts da liña "próximos" (veciños), tanto se recorremos a liña de A a B (p) como si o facemos de B a A (q).

Os pts A e B non teñen veciños máis que por un lado, son pontos "extremos" (límites) da figura.

b) Liñas pechadas:

Unha liña pechada non ten pontos extremos, todos os pts teñen veciños polos dous lados (son pts do tipo M na fig. a). Non aparecen discontinuidades.

c) Liñas simples e non simples:

Diremos que unha liña é *simple* se non se corta a sí mesma, e *non simple* en caso contrário.

Exemplos:

simple pechada	simple aberta	non-simple aberta	non-simple pechada

Fronteiras e rexións, interior e exterior

Unha liña pechada simple trazada sobre o plano (fig. b) dá lugar a unha partición dos pontos do plano en tres clases:

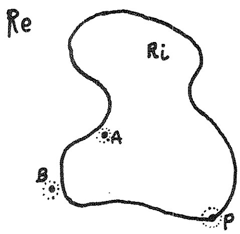


Fig. b

a) Os pts situados na rexión exterior á liña. Representaremo-los por Re.

b) Os pts que forman a liña, chamados "pontos fronteira" e que representaremos por F.

c) Os pts situados na rexión interior á liña: Ri.

Dado un ponto A en Ri sempre existen pontos próximos a A en Ri en todas as direcións. Analogamente sucede con calquer ponto B de Re.

Un pto P que pertenza á fronteira F terá sempre pts próximos en Ri e en Re.

Superficies simplemente conexas e superfícies con buratos

Consideramos unha superficie limitada por unha liña pechada simple (fig. c).

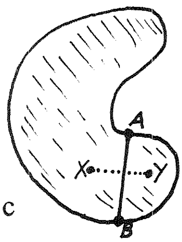


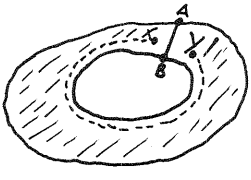
Fig. c

Dados dous pontos A e B da fronteira unimolos por unha liña contínua, como na fig. c, obtendo asi outra fronteira. A superfície considerada queda dividida en duas partes disxuntas, duas rexións. Para pasar de X a Y temos que atravesar necesariamente a nova fronteira. Unha superfície deste tipo diremos que é "simplemente conexa".

Supoñamos, agora, unha superfície limitada por duas liñas pechadas, unha interior a outra (fig. d).

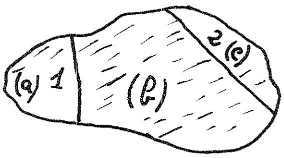
Se unimos por unha liña contínua un ponto A situado na liña exterior con outro B situado na liña interior, tal como na fig. d, obtemos unha nova fronteira AB que non divide a superfície en duas rexións xa que dous pontos X e Y que estén a ambos lados de AB poden unir-se por unha liña contínua sen ter que atravesar AB.

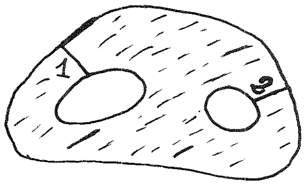
Estas superfícies nas que se poden trazar novas fronteiras sen que aumenten o número de rexións, son superfícies con buratos.



Fg. d

Exemplos:





superfície simplemente conexa
2 fronteiras interiores (1,2)
3 rexións interiores (a,b,c)

superfície con dous buratos
2 fronteiras interiores (1,2)
1 rexión interior

2.3.- **Volumes**

As propiedades das liñas e superfícies que se estudiaron no plano, poden-se xeneralizar ao espácio tridimensional.

O corpo máis sinxelo que atopamos neste espácio é a esfera. Se a deformamos con continuidade podemos obter: cilindros, cubos ou calquer outra forma como na figura 2.

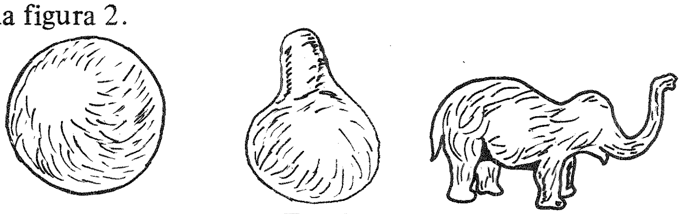


Fig. 2

Supoñamos, agora, un volume en forma de "toro" (fig. 3b) e estudiemos as diferéncias coa esfera:

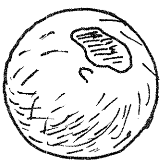
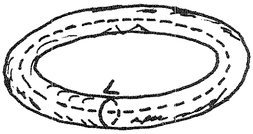


Fig. 3



Toda liña pechada simple C, trazada sobre a superfície da esfera (fig. 3a) divide-a en duas partes disxuntas, é dicer: se cortamos a superfície ao longo de C obteremos dous anacos distintos e inconexos.

No "toro" existen liñas pechadas, tais como L (fig. 3b), que non dividen a superfície toroidal en partes disxuntas. Podemos unir pontos a ambos lados de L sen atravesar L. O toro ten un burato.

A esfera e o toro son topolóxicamente distintos polo que non poden transformarse un no outro de modo contínuo.

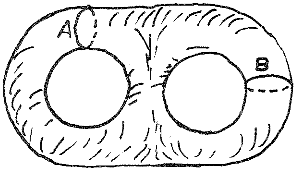


Fig. 4

Nun corpo que teña dous buratos (fig. 4), podemos trazar duas liñas pechadas, tais como A e B, sen que dividan a superfície en partes disxuntas.

Definimos *xénero dunha superfície* (nun espacio tridimensional), como o número máximo de liñas simples pechadas, non secantes entre sí, que se poden trazar sobre a superfície sen dividi-la en partes disxuntas.

2.4.- Grafos planários topolóxicos

Un grafo ou rede está formado por:

I) Un conxunto de pontos chamados "nodos" ou "vértices" (A,B,C, D,E na fig. 5).

II) Por liñas que unen os vértices e que chamaremos "aristas". Cada arista une dous vértices consecutivos.

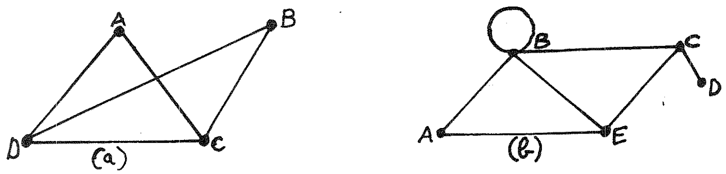


Fig. 5

Si unha arista é tal que os vértices que une coinciden, chamaremoslle "bucle" (BB na fig. 5b).

As porcións de espacio delimitadas por as liñas do grafo denominanse: "rexións", "caras" ou "campos".

Un *camiño* entre dous vértices A e B é unha sucesión de aristas que comenza en A e acaba en B tal que o final de cada arista coincide co principio da seguinte.

Diremos que un grafo é *conexo* se dous pontos calquera poden unirse por un camiño.

Un grafo conexo que admite unha representación no plano na que as liñas non se cortan, chamase *grafo planário topolóxico* (fig. 5b).

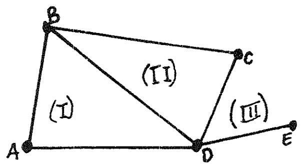
Fórmula de Euler

Consideramos un grafo planário topolóxico. Existe unha relación entre o número de vértices, número de caras e número de aristas.

Euler foi o primeiro que a probou para poliedros e é a seguinte:

$$C + V = A + 2$$

sendo: C = nº de caras, V = nº de vértices, A = nº de aristas.



C = (I,II,III)
V = 5 (A,B,C,D,E)
A = 6 (AB, BC, CD, AD, DE; BD)

Para desenrolar estes conceptos servimo-nos da bibliografia sinalada a continuación, pois pensamos que é facilmente manexábel.

Temos que sinalar que nesta experiéncia invertimos, exclusivamente, catro dias, cousa que nos deu pé para iniciar unha segunda en vista dos resultados obtidos, posto que a evaluación realizada deu un 83 % de resultados positivos. Nesta segunda engadironse-lle ao tema antes citado outros dous máis, pero desta non podemos adiantar resultados porque a estamos realizando no presente curso.

De todos xeitos, e para finalizar, podemos adiantar os esquemas que se fixeron relativos aos mesmos:

Tema II.- "Conceptos xerais sobre espacios topolóxicos e aplicacións contínuas".

1.- Espacios topolóxicos. Topoloxias sobre un conxunto. Abertos. Pechados. Exemplos.

2.- Entornos dun ponto. Bases dunha topoloxia.

3.- Subconxuntos notabeis: Interior. Exterior. Fronteira. Conxunto derivado. Clausura.

4.- Aplicacións contínuas. Homeomorfismos. Invariantes topolóxicos.

Tema III.- "Topoloxia dos espacios euclideos".

1.- Concepto de métrica nun conxunto. Espacio métrico. Base das bolas abertas.

2.- Métrica usual en R e R^2. Topoloxia de R e R^2.

3.- Descripción de interior, exterior, etc. en R e R^2.

BIBLIOGRAFIA

(1) Aleksandrov, A. D. e outros: *La matemática: su contenido, método y significado-3*, Alianza,Madrid, 1973.

(2) Courant, Richard e Robbins, Herbrt: *¿Qué es la Matemática?*, Aguilar, Madrid, 1979.

(3) Dienes, Z. P. e Golding, E. W.: *La geometría a través de las transformaciones: 1.Topología/Geometría proyectiva y afín*, Teide, Barcelona, 1976.

(4) Sauvy, Jean at Simonne: *El niño ante el espacio: iniciación a la topología intuitiva —de la rayuela a los laberintos—*, Pablo del Río, Madrid, 1980.

(5) Stewart, Ian: *Conceptos de matemática moderna*, Alianza, Madrid, 1977.