



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Sucesións de solucións aproximadas para ecuacións diferenciais ordinarias

Paula Vázquez García

Xullo 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Sucesións de solucións aproximadas para ecuacións diferenciais ordinarias

Paula Vázquez García

Xullo 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento:</b> Análise Matemática.
<b>Título:</b> Sucesións de solucións aproximadas para ecuacións diferenciais ordinarias
<b>Breve descrición do contido</b>
Trátase de recompilar e estudar o comportamento de diferentes tipos de sucesións de solucións aproximadas que converxen a algunha solución dunha ecuación diferencial.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. O Teorema de Cauchy</b>	<b>1</b>
<b>2. As poligonais de Euler</b>	<b>9</b>
2.1. Sucesión de Tonelli . . . . .	14
<b>3. As iterantes de Picard</b>	<b>17</b>
<b>4. Sucesión de Walter</b>	<b>25</b>
<b>5. Series de Potencias en Matlab</b>	<b>33</b>
5.1. Método sen subdivisións do intervalo . . . . .	33
5.2. Método con subdivisións do intervalo . . . . .	38
<b>I. Código de Matlab</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>



## Resumo

O tema principal deste traballo son as sucesións funcionais que converxen a algunha solución dunha ecuación diferencial ordinaria.

Nos tres primeiros capítulos recóllense, seguindo unha orde cronolóxica, algunhas das máis relevantes na historia das matemáticas, xunto coa motivación ca que foron introducidas nun primeiro momento: a demostración da analiticidade das solucións de problemas con datos analíticos (Teorema de Cauchy e series de potencias), da existencia de solución (Teorema de Peano e poligonais de Euler) e da unicidade de solución (Teorema de Picard-Lipschitz-Lindelöf e iterantes de Picard) baixo distintas hipóteses.

No cuarto capítulo introdúcese un resultado máis recente, no que se constrúe unha sucesión de solucións de problemas perturbados (a sucesión de Walter) co obxectivo de demostrar a existencia de solución maximal para ecuacións diferenciais ordinarias baixo hipótese de continuidade.

Finalmente, no Capítulo 5 pátense do clásico método das series de potencias para deseñar dous métodos numérico-simbólicos, implementados en Matlab e SageMath, que permiten aproximar solucións de problemas de valor inicial nos que a función dato é analítica mediante o seu desenvolvemento en polinomio de Taylor, de grao tan alto como se desexe.

## Abstract

The main topic of this work are sequences of functions that converge to a solution of an ordinary differential equation.

Some of the most relevant functional sequences in the history of mathematics are presented, following a chronological order, in Chapters 1-3, along with the motivation they were first introduced with: the proof of analyticity of solutions to ODE's under hypothesis of analyticity

(Cauchy's Theorem and power series), and the proof of existence of solution (Peano's Theorem and Euler polygonals) and uniqueness of solution (Picard-Lipschitz-Lindelöf's Theorem and Picard's Iteration Sequence) under different hypotheses.

A more recent result, in which a sequence of solutions of perturbed problems (Walter's sequence) is constructed in order to prove the existence of a maximal solution to an ODE under hypothesis of continuity, is presented in Chapter 4.

Lastly, Chapter 5 deals with two numerical-symbolic methods, implemented in Matlab and SageMath, which allow to obtain the Taylor expansion of the solution to an initial-value problem, of degree as high as required, under hypothesis of analyticity.

# Introdución

Coa aparición no século XVII do Cálculo Infinitesimal, as ecuacións diferenciais convertéronse nunha das ferramentas matemáticas máis empregadas nas ciencias básicas. Actualmente, teñen moitas aplicacións en diversos campos da ciencia como a Bioloxía, a Física ou a Enxeñaría. É de entender, por tanto, o crecente interese en desenvolver métodos que proporcionen solucións a problemas de valor inicial, mais en moitas ocasións non é posible obter unha expresión explícita desta. Para solventar este problema, os métodos máis habituais son os desenvolvementos no campo da Análise Numérica, que a partir dunha *discretización* da variable independente, proporcionan aproximacións da solución do problema, mais antes de aplicalos é importante asegurar a existencia da mesma.

Ao longo da historia, distintos matemáticos demostraron a existencia e/ou unicidade de solución de ecuacións diferenciais ordinarias baixo distintas hipóteses, en moitos casos facendo uso de sucesións funcionais.

Neste traballo introdúcese, seguindo unha orde histórica, distintos exemplos de sucesións funcionais que, baixo certas hipóteses, converxen a unha (ou á única) solución dunha ecuación diferencial ordinaria.

No Capítulo 1, a sucesión de funcións que se emprega é a dos desenvolvementos en polinomio de Taylor de grao  $n$ , con  $n$  natural, da solución da ecuación. O Teorema de Cauchy, cuxa demostración foi consultada en [5], amosa que se os datos do problema son funcións analíticas, a solución tamén o será, o que garante a converxencia da sucesión de polinomios nun certo intervalo. Isto permite tamén introducir o *método das series de potencias* para a resolución de ecuacións diferenciais ordinarias.

Nos Capítulos 2 e 3 preséntanse, respectivamente, as *poligonais de Euler* e as *iterantes de Picard*. Estas sucesións funcionais son de gran interese histórico, pois foron empregadas nas demostracións clásicas de existencia e unicidade de solución de ecuacións diferenciais. Os resultados teóricos que se inclúen nestes dous capítulos consultáronse en [3] e [4].

No Capítulo 4 expónse a *sucesión de Walter*, que converge á solución maximal dun problema

de valor inicial con datos continuos. As demostracións desta sección foron consultadas en [7] e [8].

Finalmente, no Capítulo 5 retómase o método das series de potencias exposto na primeira sección, lixeiramente modificado e implementado en Matlab e SageMath cun programa que permite obter sumas parciais da serie solución mesmo en ocasións nas que non é posible calculala manualmente.

Damos a continuación unhas definicións previas necesarias para o desenvolvemento do traballo.

Consideraremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (P)$$

onde  $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é unha función continua nun dominio  $A$ , e  $(t_0, x_0)$  é un punto de  $A$ .

Diremos que unha función  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida nun intervalo  $I$  é *solución* do problema (P) se é diferenciable,  $\varphi(t_0) = x_0$  e para todo  $t \in I$  se cumpre

- (i)  $(t, \varphi(t)) \in A$
- (ii)  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ .

Do Teorema Fundamental do Cálculo despréndese directamente a *caracterización integral* das solucións, que establece que  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é solución do problema (P) se para todo  $t \in I$  se cumpre

- (i)  $(t, \varphi(t)) \in A$
- (ii)  $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ .

# Capítulo 1

## O Teorema de Cauchy

O resultado principal deste capítulo, debido a Cauchy (1789-1857), demostra a analiticidade da solución dun problema do valor inicial ( $P$ ) con  $f$  analítica. Falaremos de solución única, pois a solución atopada virá dada por unha serie de Taylor con coeficientes concretos, o cal implica a súa unicidade. Isto permitiranos, en casos concretos, obter a solución de ( $P$ ) a partir da súa serie de Taylor co método que se expón a continuación, e que se emprega na propia demostración do teorema.

*Observación 1.1.* No desenvolvemento do método suporemos que  $t_0 = 0$ . Isto non resulta restrictivo, xa que unha función  $\varphi$  definida nun intervalo  $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$  é solución de ( $P$ ) se e só se a función  $\psi$  definida en  $(-\alpha, \alpha)$  mediante  $\psi(t) = \varphi(t + t_0)$  é solución do problema

$$\begin{cases} x' = f(t + t_0, x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

En efecto,

$$\varphi(t_0) = x_0 \iff \psi(0) = \varphi(t_0 + 0) = x_0,$$

e

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \iff \psi'(t) = \varphi'(t + t_0) = f(t + t_0, \varphi(t + t_0)) = f(t + t_0, \psi(t)).$$

Trátase agora de obter a función  $x(t)$  que verifica o sistema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

como límite de polinomios de Maclaurin da mesma. Por unha banda, sabemos que

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad x'(0) = f(0, x_0),$$

o cal nos permite definir a función  $x_1$  como o polinomio de Maclaurin de grao 1 de  $x$ , é dicir

$$x_1(t) = f(0, x_0) \cdot t + x_0.$$

Por outra banda, derivando na EDO en (1.2)

$$x''(t) = \frac{df}{dt}(t, x(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) \cdot x'(t),$$

e avaliando en 0 obtemos

$$x''(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, x_0) \cdot f(0, x_0).$$

Como todos estes datos son coñecidos, podemos calcular  $x''(0)$  e definir a función  $x_2$  como o polinomio de Maclaurin de grao 2 de  $x$ .

Repetindo este proceso iterativamente, obtemos en cada etapa  $n$  o valor  $x^{(n)}(0)$  en función das derivadas de  $f$  e de  $x$  ata grao  $n - 1$  avaliadas en 0, que xa foron calculadas en etapas anteriores. Así, podemos construír o polinomio de Maclaurin de grao  $n$ ,  $x_n$ , da solución. Polo Teorema de Cauchy, que se demostra a continuación, sabemos que a solución é analítica, polo que existe un intervalo centrado en 0 no que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t),$$

para todo  $t$  no intervalo.

O seguinte exemplo ilustra a aplicación deste método nun caso sinxelo, de solución coñecida.

**Exemplo 1.2.** Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Aplicando o procedemento descrito anteriormente con  $f(t, x) = x$ , obtemos

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ x'(0) &= f(0, 1) = 1, \\ x''(0) &= \frac{\partial f}{\partial t}(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) \cdot f(0, 1) = 0 + 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

e, tendo en conta que todas as derivadas de  $f$  con respecto a  $t$  e as derivadas con respecto a  $x$  de orde maior que un son nulas, en xeral

$$x^{(n)}(0) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Así, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o polinomio de Maclaurin de grao  $n$  da solución vén dado por

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \dots + \frac{1}{n!} t^n.$$

Finalmente, tomando límites na expresión anterior, chegamos a que a solución do problema é

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k = e^t.$$

Unha vez introducido o método, e aplicado nun breve exemplo, enunciámos e demostramos o teorema que garante a converxencia das solucións en forma de serie de potencias que se obteñen co mesmo.

**Teorema 1.3** (de Cauchy). *Se  $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é analítica nunha veciñanza de  $(t_0, x_0)$ , entón o problema (P) ten unha única solución que, ademais, é analítica nunha veciñanza de  $t_0$ .*

*Demostración.* Tal e como se argumenta na Observación 1.1, podemos supoñer, sen perda de xeralidade, que  $(t_0, x_0) = (0, \mathbf{0})$ .

Probaremos que a solución vén dada por unha serie de Taylor concreta, o cal implica a súa unicidade (pois os coeficientes da serie non dependen da solución, senón da ecuación diferencial) e a súa analiticidade.

Denotemos  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , expandimos  $f_i$  en serie de Taylor centrada en  $(0, \mathbf{0})$

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{p_0, \dots, p_n=0}^{\infty} a_{p_0 \dots p_n}^{(i)} t^{p_0} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n},$$

onde os coeficientes veñen dados por

$$a_{p_0 \dots p_n}^{(i)} = \frac{1}{p_0! p_1! \dots p_n!} \frac{\partial^{p_0 + \dots + p_n} f_i}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(0, \mathbf{0}).$$

A analiticidade de  $f$  equivale á das súas compoñentes  $f_i$ , polo que estas series son converxentes nunha veciñanza de  $(0, \mathbf{0})$  da forma  $|t| \leq r$ ,  $\|x\|_{\infty} \leq s$ , para certos  $r, s \in (0, \infty)$ .

Supoñamos que  $\varphi$  é unha solución de (P). Por ser  $f$  analítica, é de clase  $C^{\infty}$ , polo que a partir da relación

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

deducimos que  $\varphi$  tamén é de clase  $C^{\infty}$ , e podemos achar o valor das súas derivadas sucesivas en  $t = 0$  como segue: denotando por  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a  $i$ -ésima compoñente de  $\varphi$  temos

$$\varphi_i(0) = 0,$$

$$\varphi_i'(0) = f_i(0, \mathbf{0}),$$

$$\varphi_i''(0) = \left. \frac{d}{dt} f_i(t, \varphi(t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial f_i}{\partial t}(0, \mathbf{0}) + \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(0, \mathbf{0}) f_k(0, \mathbf{0}),$$

$$\begin{aligned} \varphi_i'''(0) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} f_i(t, \varphi(t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}(0, \mathbf{0}) + \sum_{k=0}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_k}(0, \mathbf{0}) f_k(0, \mathbf{0}) \\ &+ \sum_{k,j=0}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(0, \mathbf{0}) f_k(0, \mathbf{0}) f_j(0, \mathbf{0}) + \sum_{k=0}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(0, \mathbf{0}) c_2^{(i)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

e así sucesivamente. De aquí deducimos que, sexa cal sexa a solución  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , a serie de Maclaurin de  $\varphi_i$  só pode ser

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(i)} x^k, \quad c_k^{(i)} = \frac{1}{k!} \varphi_i^{(k)}(0), \quad (1.4)$$

onde os valores de  $\varphi_i^{(k)}(0)$  veñen dados por (1.3) e soamente dependen dos valores de  $f_i$  e as súas derivadas avaliadas en  $(0, \mathbf{0})$ .

Observemos que se a serie (1.4) fose converxente nunha veciñanza de  $t = 0$ , entón  $\varphi$  sería analítica e para cada  $i = 1, \dots, n$  a función

$$\varphi_i'(t) - f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

sería unha función analítica tal que ela e todas as súas derivadas se anulan en  $t = 0$ , polo que se trataría da función idénticamente nula e, en consecuencia,  $\varphi$  sería solución analítica do problema  $(P)$ .

Resumindo, se a serie (1.4) é converxente nunha veciñanza de  $t = 0$ , entón dita serie define a única solución de  $(P)$  e ademais tal solución é analítica.

Procedemos, por tanto, a demostrar que a serie (1.4) ten raio de converxencia non nulo.

A tal efecto, supoñamos que existe unha función analítica e positiva  $F : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  que ten todas as derivadas positivas e verifica

$$\left| \frac{\partial^{p_0+\dots+p_n} f_i}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(0, \mathbf{0}) \right| \leq \frac{\partial^{p_0+\dots+p_n} F}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(0, \mathbf{0}) \quad (1.5)$$

para calesquera  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e para todo  $i = 1, \dots, n$ . Tal función  $F$  recibe o nome de *maiorante*.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(0) = 0, \end{cases} \quad (P_M)$$

e sexa  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  a solución do mesmo.

Supoñamos que  $\Phi$  é analítica, polo que para cada  $i = 1, \dots, n$  podemos expresar

$$\Phi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{(i)} x^k, \quad \gamma_k^{(i)} = \frac{1}{k!} \Phi_i^{(k)}(0),$$

sendo a serie converxente nun certo intervalo  $(-\rho, \rho)$ , con  $\rho > 0$ .

Facendo os mesmos cálculos para os coeficientes  $\gamma_k^{(i)}$  que fixemos para os  $c_k^{(i)}$  e tendo en conta a desigualdade (1.5), obtemos

$$\begin{aligned} |\varphi_i'(0)| &\leq \Phi_i'(0), \\ |\varphi_i''(0)| &\leq \Phi_i''(0), \end{aligned}$$

e, en xeral,

$$\left| \varphi_i^{(k)}(0) \right| \leq \Phi_i^{(k)}(0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Así, a serie en (1.4) está maiorada por unha serie converxente, e polo M-test de Weierstrass será converxente no mesmo intervalo  $(-\rho, \rho)$  que a segunda.

Agora, só falta probar que realmente existe unha función maiorante  $F$  de xeito que a solución do sistema  $(P_M)$  poida ser expandida en serie de potencias con raio de converxencia non nulo.

En primeiro lugar, a converxencia absoluta das series de Taylor das funcións  $f_i$  en  $|t| \leq r, \|x\|_{\infty} \leq s$  permite garantir a existencia dunha constante  $M > 0$  tal que para calquera colección de índices  $p_0, \dots, p_n$  se verifica

$$\left| a_{p_0 \dots p_n}^{(i)} \right| r^{p_0} s^{p_1 + \dots + p_n} \leq M,$$

de onde se segue que

$$\left| \frac{\partial^{p_0 + \dots + p_n} f_i}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(0, \mathbf{0}) \right| \leq M \frac{p_0! p_1! \dots p_n!}{r^{p_0} s^{p_1 + \dots + p_n}}. \quad (1.6)$$

Consideremos agora a función  $F$  definida en  $\hat{A} = (-r, r) \times (-s, s)^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mediante a serie xeométrica

$$F(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{t}{r}\right) \left(1 - \frac{x_1}{s}\right) \dots \left(1 - \frac{x_n}{s}\right)} = M \sum_{p_0, \dots, p_n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{p_0} \left(\frac{x_1}{s}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{x_n}{s}\right)^{p_n}.$$

Como  $F$  pode ser representada pola súa serie de Taylor no aberto  $\hat{A}$ , é analítica en dito conxunto e, ademais,

$$\frac{\partial^{p_0+\dots+p_n} F}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(0, \mathbf{0}) = M \frac{p_0! p_1! \dots p_n!}{r^{p_0} s^{p_1+\dots+p_n}}.$$

Así, tendo en conta (1.6), deducimos que  $F$  é unha maiorante das funcións  $\{f_1, \dots, f_n\}$ .

Agora, sexa  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  a solución do problema  $(P_M)$ , que resulta

$$\begin{cases} \Phi'_i = \frac{M}{\left(1 - \frac{t}{r}\right) \left(1 - \frac{\Phi_1}{s}\right) \dots \left(1 - \frac{\Phi_n}{s}\right)} & i = 1, \dots, n. \\ \Phi_i(0) = 0, \end{cases}$$

Como o termo dereito de cada ecuación non depende do índice  $i$ , e as condicións iniciais son as mesmas, deducimos que

$$\Phi_1(t) = \dots = \Phi_n(t) := \Phi(t).$$

O problema redúcese entón a resolver a ecuación diferencial ordinaria de primeira orde

$$\Phi' = \frac{M}{\left(1 - \frac{t}{r}\right) \left(1 - \frac{\Phi}{s}\right)^n}.$$

Procedendo por separación de variables e impondo a condición inicial  $\Phi(0) = 0$  obtemos a solución

$$\Phi_1(t) = \dots = \Phi_n(t) := \Phi(t) = t \left(1 - \sqrt[n+1]{1 + \frac{n+1}{s} Mr \log \left|1 - \frac{t}{r}\right|}\right),$$

ben definida para  $t < r \left(1 - e^{-\frac{s}{Mr(n+1)}}\right)$ .

Agora, a raíz pode desenvolverse en serie binomial se

$$\frac{n+1}{s} Mr \log \left|1 - \frac{t}{r}\right| < 1,$$

é dicir, se

$$\left(1 - e^{-\frac{s}{Mr(n+1)}}\right) < t < r \left(1 - e^{-\frac{s}{Mr(n+1)}}\right).$$

Por outra banda, tense que

$$\left(e^{\frac{s}{2Mr(n+1)}} - e^{-\frac{s}{2Mr(n+1)}}\right)^2 = e^{\frac{s}{Mr(n+1)}} + e^{-\frac{s}{Mr(n+1)}} - 2 > 0,$$

polo que

$$1 - e^{\frac{s}{Mr(n+1)}} < - \left( 1 - e^{-\frac{s}{Mr(n+1)}} \right),$$

e, en consecuencia, a raíz pode ser expandida en serie binomial no intervalo  $|t| < r \left( 1 - e^{-\frac{s}{Mr(n+1)}} \right)$ .

Finalmente, temos que

$$\sqrt[n+1]{1 + \frac{n+1}{s} Mr \log \left| 1 - \frac{t}{r} \right|} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/(n+1)}{k} \left( \frac{n+1}{s} Mr \right)^k \left( \log \left| 1 - \frac{t}{r} \right| \right)^k,$$

e como a función  $\log \left| 1 - \frac{t}{r} \right|$  tamén admite expansión en serie no anterior intervalo, chegamos a que as solucións do problema  $(P_M)$  son analíticas, tal e como se quería probar.  $\square$

É importante ter en conta que, en moitas ocasións, non dispoñemos dunha fórmula de recurrencia para os coeficientes da serie, polo que non se pode obter a súa expresión explícita e, en consecuencia, o método das series de potencias non é aplicable.

Non obstante, no Capítulo 5 introdúcese dous programa numérico-simbólicos en Matlab baseados neste método que permiten solventar esta dificultade e calcular o polinomio de Taylor da solución do problema de grao tan alto como se desexe.



## Capítulo 2

# As poligonais de Euler

Un segundo exemplo de sucesión de funcións que converxe a unha solución do problema  $(P)$  son as poligonais de Euler, que se constrúen para a propia demostración do Teorema de Existencia de Peano.

Neste capítulo probaremos a existencia de solución do problema  $(P)$  pasando por un punto fixado.

A proba consta de dúas fases. Primeiro, veremos que existe unha “solución aproximada” construíndoa mediante o método das *poligonais de Euler*, e seguidamente demostraremos que existe unha sucesión de tales poligonais que converxe a unha solución real do problema. A construción das poligonais pode ser tamén programada mediante métodos numéricos relativamente sinxelos.

Precisamos a continuación que entendemos por unha solución aproximada, e demostramos a súa existencia.

**Definición 2.1.** Dado  $\varepsilon > 0$ , unha solución  $\varepsilon$ -aproximada de  $(P)$  nun intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é unha función continua  $\pi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\pi(t_0) = x_0$  e

- (i)  $(t, \pi(t)) \in A \quad \forall t \in I$ ;
- (ii)  $\pi$  é de clase  $C^1$  en  $I$  salvo, quizais, nun conxunto finito de puntos  $S \subset I$  no que  $\pi$  pode ser non derivable;
- (iii)  $\|\pi'(t) - f(t, \pi(t))\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in I - S$ .

*Observación 2.2.* No caso extremo  $\varepsilon = 0$ , pódese probar facilmente que unha solución 0-aproximada é precisamente unha solución do problema.

**Teorema 2.3.** *Se  $f$  é continua en  $A$  entón existe unha solución  $\varepsilon$ -aproximada de  $(P)$  para calquera  $\varepsilon > 0$ .*

*Demostración.* Por ser  $A$  aberto e  $(t_0, x_0) \in A$  existen constantes  $a > 0$  e  $b > 0$  tales que a rexión

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$$

está contida en  $A$ .

Por ser  $f$  continua no compacto  $R$ , está limitada. Denotemos

$$M = \max_{(t,x) \in R} \|f(t, x)\| \quad \text{e} \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Podemos supoñer  $M > 0$ , pois no caso  $M = 0$  teríamos  $f = \text{cte}_0$  e a función  $\varphi = \text{cte}_{x_0}$  sería solución do problema  $(P)$ , polo que sería solución  $\varepsilon$ -aproximada para todo  $\varepsilon > 0$ .

Farase a construción dunha solución  $\varepsilon$ -aproximada no intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , sendo o procedemento análogo para  $[t_0 - \alpha, t_0]$ .

Por ser  $f$  uniformemente continua en  $R$ , para o  $\varepsilon > 0$  dado existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que para  $(t, x), (\hat{t}, \hat{x}) \in R$  cumprindo  $|t - \hat{t}| \leq \delta_\varepsilon$  e  $\|x - \hat{x}\| \leq \delta_\varepsilon$  se verifica

$$\|f(t, x) - f(\hat{t}, \hat{x})\| \leq \varepsilon.$$

Consideremos agora una partición  $S = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  do intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$  tal que

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + \alpha \quad \text{e} \quad \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}| \leq \min \left\{ \delta_\varepsilon, \frac{\delta_\varepsilon}{M} \right\}.$$

Construímos cara a dereita de  $t_0$  o segmento de recta que sae de  $(t_0, x_0)$  con pendente  $f(t_0, x_0)$  ata o punto no que interseca á recta vertical  $t = t_1$ , que denotaremos por  $(t_1, x_1)$ . Da definición de  $\alpha$  e da acotación  $\|f(t, x)\| \leq M$ , séguese que este segmento permanece en  $R$ . Para o caso  $n = 1$ , pódese ver que permanecen na rexión triangular  $T$  delimitada polas rectas que parten de  $(t_0, x_0)$  con pendente  $M$  e  $-M$ , respectivamente, e a recta vertical  $t = t_0 + \alpha$ , como se amosa na Gráfica 2.1.

En particular, como  $(t_1, x_1) \in R$ , podemos construír outro segmento de recta partindo do punto con pendente  $f(t_1, x_1)$  ata o punto no que interseca á recta vertical  $t = t_2$ , que denotaremos  $(t_2, x_2)$ . Polo mesmo argumento que empregamos no segmento anterior, este tamén permanece dentro de  $R$ .

Repetindo iterativamente o proceso ata chegar a  $t_n = t_0 + \alpha$ , obtemos unha poligonal  $\pi : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuxa expresión analítica vén dada por

$$\begin{cases} \pi(t_0) = x_0 \\ \pi(t) = \pi(t_{k-1}) + (t - t_{k-1}) \cdot f(t_{k-1}, \pi(t_{k-1})) \quad \text{se} \quad t_{k-1} < t < t_k, k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.1)$$

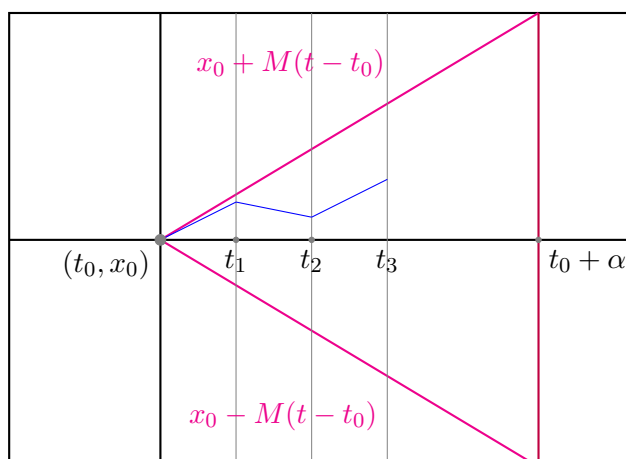


Figura 2.1: Ilustración da construción dunha poligonal ata a etapa 3.

Vexamos que esta función  $\pi$  é precisamente a solución  $\varepsilon$ -aproximada que buscamos.

En primeiro lugar, pola propia construción,  $\pi$  é continua en  $[t_0, t_0 + \alpha]$  e de clase  $C^1$  en  $[t_0, t_0 + \alpha]$  salvo, quizais, en  $S$ .

Agora, vexamos que dado  $t \in [t_0, t_0 + \alpha] - S$  se cumpre

$$\|\pi'(t) - f(t, \pi(t))\| \leq \varepsilon. \quad (2.2)$$

Como  $t \in [t_0, t_0 + \alpha] - S$ , existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $t \in (t_{k-1}, t_k)$  e, por tanto,  $|t - t_{k-1}| \leq \delta_\varepsilon$ . En consecuencia, por (2.1)

$$\|\pi(t) - \pi(t_{k-1})\| = \|f(t_{k-1}, \pi(t_{k-1}))\| |t - t_{k-1}| \leq M \frac{\delta_\varepsilon}{M} = \delta_\varepsilon.$$

Finalmente, derivando en (2.1) e empregando a continuidade uniforme de  $f$ , obtemos

$$\|\pi'(t) - f(t, \pi(t))\| = \|f(t_{k-1}, \pi(t_{k-1})) - f(t, \pi(t))\| \leq \varepsilon,$$

tal e como se quería probar.

□

O seguinte paso consiste en tomar unha sucesión de solucións  $\varepsilon$ -aproximadas, como a definida en (2.1), e probar que converxe a unha solución de  $(P)$  cando facemos tender  $\varepsilon$  a 0.

Para dita proba, empregaremos a noción de equicontinuidade e o Teorema de Ascoli-Arzelà, que recordamos a continuación e cuxa demostración se pode consultar en [3].

**Definición 2.4.** Un conxunto  $F$  de funcións reais definidas nun intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  dise equicontinuo en  $I$  se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que

$$\|f(t) - f(\hat{t})\| < \varepsilon \quad \forall f \in F, \quad \forall t, \hat{t} \in I \text{ con } |t - \hat{t}| < \delta_\varepsilon. \quad (2.3)$$

**Teorema 2.5** (de Ascoli-Arzelà). *Sexan  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado e  $F$  un conxunto infinito de funcións reais definidas en  $I$ . Se  $F$  é equicontinuo e uniformemente acotado en  $I$ , entón contén unha sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uniformemente converxente en  $I$ .*

Tendo en conta esto, xa se pode demostrar o resultado principal desta sección.

**Teorema 2.6** (de Peano). *Se  $f$  é continua en  $A$  entón existe unha solución  $\varphi$  de  $(P)$  de clase  $C^1$  nun intervalo da forma  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  para certo  $\alpha > 0$ .*

*Demostración.* Tomemos de novo unha rexión da forma

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subset A, \quad a, b > 0,$$

e denotemos

$$M = \max_{(t,x) \in R} \|f(t, x)\| \quad \text{e} \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Suporemos outra vez  $M > 0$ , pois no caso  $M = 0$  teríamos  $f = \text{cte}_0$  e a función  $\varphi = \text{cte}_{x_0}$  sería solución trivial do problema.

Sexa  $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de números positivos estrictamente decrecente e converxente a cero. Polo Teorema 2.3, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe polo menos unha solución  $\varepsilon_n$ -aproximada de  $(P)$ , que denotaremos por  $\pi_n$ , definida en  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

Da construción de  $\pi_n$  feita no Teorema 2.3, tense que para  $t, \hat{t} \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

$$\|\pi_n(t) - \pi_n(\hat{t})\| \leq M |t - \hat{t}|. \quad (2.4)$$

Aplicando (2.4) con  $\hat{t} = t_0$  obtemos, pola desigualdade triangular,

$$\|\pi_n(t)\| \leq \|\pi_n(t) - \pi_n(t_0)\| + \|\pi_n(t_0)\| \leq M |t - t_0| + \|x_0\| \leq b + \|x_0\|.$$

É dicir, a sucesión  $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está uniformemente acotada en  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ . En consecuencia, polo Teorema de Ascoli-Arzelà, existe unha subsucesión  $\{\pi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que converxe uniformemente en dito intervalo a unha función  $\varphi$ .

Vexamos que esta función  $\varphi$  é solución de  $(P)$ .

En primeiro lugar, é continua por ser límite uniforme de funcións continuas e verifica

$$\varphi(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n_k}(t_0) = x_0.$$

Para probar que cumpre a ecuación diferencial, para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} \pi_n'(t) - f(t, \pi_n(t)) & \text{se } \pi_n \text{ é derivable en } t \\ 0 & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

e, por ser  $\pi_n$  solución  $\varepsilon_n$ -aproximada de  $(P)$ , temos que

$$\|\Delta_n(t)\| \leq \varepsilon_n \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha],$$

polo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n(t)\| = 0$  uniformemente en  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

Así, podemos expresar as solucións  $\varepsilon_{n_k}$ -aproximadas en forma integral como

$$\pi_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (f(s, \pi_{n_k}(s)) + \Delta_{n_k}(s)) ds.$$

Ademais, por ser  $f$  uniformemente continua na rexión  $R$  e  $\{\pi_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  uniformemente converxente a  $\varphi$  en  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ,  $f(t, \pi_{n_k}(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t))$  uniformemente cando  $k \rightarrow \infty$  e, en consecuencia

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (f(s, \varphi(s))) ds,$$

tal e como se quería probar. □

*Observación 2.7.* Supoñendo que a solución de  $(P)$ , en caso de existir, fose única, toda sucesión de poligonais como as definidas na demostración do teorema converxería uniformemente en  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  a dita solución do problema, sen necesidade de extraer subsucesión ningunha.

En efecto, se isto non fose certo, existiría unha sucesión de solucións  $\varepsilon_n$ -aproximadas  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  diverxente nalgún punto  $t^* \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , o cal implica a existencia de, cando menos, dúas subsucesións converxentes a distintos límites (por ser o conxunto equicontinuo). Deste xeito, tal e como se viu na demostración do teorema anterior, tales funcións límite serían solucións (distintas) do problema  $(P)$ , o cal contradiría a hipótese de unicidade.

Isto facilita a implementación da construción da solución aproximada en ordenador, con métodos como Euler Explícito ou Euler Implícito, por exemplo.

Non obstante, é importante destacar que baixo as hipóteses do Teorema de Peano temos garantida a existencia dunha solución, mais non que esta sexa única.

## 2.1. Sucesión de Tonelli

Nesta sección proporciónase unha proba alternativa da existencia de solución de  $(P)$  cando  $f$  é continua. Nela, constrúese de novo unha sucesión de funcións que converxen a unha solución do problema, a *sucesión de Tonelli*. A idea da construción consiste en modificar lixeiramente o problema  $(P)$ , de xeito que para cada  $k$  natural obtemos un sistema perturbado cuxa solución se pode obter integrando. As solucións destes sistemas perturbados son as que formarán a sucesión de Tonelli.

*Demostración alternativa do Teorema (2.6).* En primeiro lugar, vexamos que é suficiente probar a existencia dunha solución definida cara á dereita de  $t_0$ .

Supoñamos que temos probado o resultado para unha solución dese tipo e consideremos o problema de valor inicial co tempo invertido

$$\begin{cases} x' = g(t, x) := -f(-t, x) \\ x(-t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

A función  $g$  é continua nunha veciñanza de  $(-t_0, x_0)$ , e por tanto o problema anterior ten unha solución  $\phi$  definida nun intervalo da forma  $[-t_0, -t_0 + \varepsilon]$ . Así, a función  $\varphi(t) = \phi(-t)$  será solución do problema orixinal definida en  $[t_0 - \varepsilon, t_0]$ .

Tendo isto en conta, pasamos a demostrar a existencia dunha solución do problema  $(P)$  nun intervalo da forma  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ , para algún  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

De novo, por ser  $A$  aberto, existen constantes  $a > 0$  e  $b > 0$  de forma que a rexión

$$R' = \{(t, x) : 0 \leq t - t_0 \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$$

está contida en  $A$ . Así, por ser  $f$  continua no compacto  $R'$ , está limitada. Denotemos

$$M = \max_{(t,x) \in R'} \|f(t, x)\| \quad \text{e} \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Ao igual que na demostración do Teorema 2.6, podemos supoñer  $M > 0$ .

Sexan  $I = [t_0, t_0 + \alpha]$  e  $\mathcal{A}$  o conxunto de todas as funcións  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  que verifican  $\gamma(t_0) = x_0$  e satisfán a condición de Lipschitz con constante  $M$ , é dicir,

$$\|\gamma(t) - \gamma(\hat{t})\| \leq M|t - \hat{t}| \quad \forall t, \hat{t} \in I.$$

Nótese que o feito de ser todas as  $\gamma$  Lipschitz-continuas ca mesma constante implica que o conxunto  $\mathcal{A}$  é equicontínuo.

En particular, a elección feita da constante  $\alpha$  permítenos asegurar que toda función  $\gamma \in \mathcal{A}$  verifica

$$\|\gamma(t) - x_0\| \leq M|t - t_0| \quad \forall t \in I.$$

Así, para toda  $\gamma \in \mathcal{A}$ , a composición  $t \in I \mapsto f(t, \gamma(t))$  está ben definida e é limitada (por  $M$ ) e continua en  $I$ . En consecuencia, podemos definir unha aplicación

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty)$$

que a cada  $\gamma \in \mathcal{A}$  lle asigna o número

$$F(\gamma) = \max_{t \in I} \left\| \gamma(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s)) ds \right\|,$$

que mide como de “lonxe” está  $\gamma$  de ser solución do problema.

En efecto, empregando o Teorema Fundamental do Cálculo deducimos que se  $F(\gamma) = 0$  para algunha  $\gamma \in \mathcal{A}$ , entón esa  $\gamma$  é solución de  $(P)$ .

Por unha parte, compróbase facilmente que a aplicación  $F$  é continua en  $\mathcal{A}$  dotada da topoloxía da norma do máximo (a da converxencia uniforme en  $I$ ). Por outra banda, polo Teorema de Ascoli-Arzelà, o dominio  $\mathcal{A}$  é compacto. En consecuencia,  $F$  acada mínimo nalgunha  $\varphi \in \mathcal{A}$ .

Vexamos que  $F(\varphi) = 0$ , para o que é suficiente comprobar que  $F$  acada valores positivos tan pequenos como se desexe en  $\mathcal{A}$ .

Para probar isto, seguimos a Tonelli e consideramos, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , o problema aproximado

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 & t \in [t_0, t_0 + \alpha/k], \\ x' = f(t - \alpha/k, x(t - \alpha/k)) & t \in (t_0 + \alpha/k, t_0 + \alpha]. \end{cases} \quad (P_k)$$

Para cada  $k$ , o problema  $(P_k)$  ten unha única solución  $\gamma_k \in \mathcal{A}$  que se pode obter integrando. De feito, facendo indución na partición  $\{t_0, t_0 + \alpha/k, t_0 + 2\alpha/k, \dots, t_0 + \alpha\}$  e facendo os cambios de variables pertinentes nas correspondentes integrais, pódese probar que tal solución verifica

$$\|\gamma_k(t) - x_0\| \leq b, \quad \forall t \in I$$

e

$$\gamma_k(t) = \begin{cases} x_0 & t \in [t_0, t_0 + \alpha/k], \\ x_0 + \int_{t_0}^{t-\alpha/k} f(s, \gamma_k(s)) ds & t \in (t_0 + \alpha/k, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Así, para  $t \in [t_0, t_0 + \alpha/k]$  temos que

$$\left\| \gamma_k(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \gamma_k(s)) ds \right\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right\| \leq \frac{M\alpha}{k},$$

e para  $t \in (t_0 + \alpha/k, t_0 + \alpha]$ ,

$$\left\| \gamma_k(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \gamma_k(s)) ds \right\| = \left\| \int_{t-\alpha/k}^t f(s, \gamma_k(s)) ds \right\| \leq \frac{M\alpha}{k}.$$

Por tanto, chegamos a que para todo  $k \geq 2$

$$0 \leq F(\varphi) \leq F(\gamma_k) \leq \frac{M\alpha}{k},$$

de onde se deduce, tomando límites cando  $k \rightarrow \infty$ , que  $F(\varphi) = 0$ . En consecuencia  $\varphi$  é solución de (P).

□

## Capítulo 3

# As iterantes de Picard

Outro resultado fundamental na teoría de ecuacións diferenciais é o Teorema de Picard-Lipschitz-Lindelöf, que proporciona unha condición suficiente para garantir que o problema  $(P)$  ten solución única.

Existen versións deste teorema con hipóteses distintas, mais neste traballo veremos só o resultado clásico, no que se pide que  $f$  sexa Lipschitz-continua e en cuxa demostración se emprega outra sucesión de solucións aproximadas do problema  $(P)$ , as *iterantes de Picard*. Como cabe esperar, baixo as hipóteses do teorema probarase que esta sucesión converge a unha solución verdadeira de  $(P)$ . Cómpre destacar que nesta proba, a diferenza da vista na materia de Introducción ás Ecuacións Diferenciais Ordinarias, non se emprega ningún teorema de punto fixo.

Antes de demostrar isto, introducimos unha serie de resultados que nos permiten garantir a unicidade de solución.

**Definición 3.1.** Diremos que a función  $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é *lipschitziana* en  $A$  con respecto á variable  $x$  se existe  $K > 0$  tal que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \cdot \|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in A.$$

Nótese que non é restrictivo supoñer  $K > 0$ , pois se  $f$  satisfai a condición de Lipschitz con constante 0 tamén o fai con calquera constante positiva.

O seguinte teorema proporciona unha cota para a diferenza máxima entre dúas solucións aproximadas de  $(P)$ .

**Teorema 3.2.** Sexan  $\delta > 0$  unha constante e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  dúas solucións  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ -aproximadas, respectivamente, de  $(P)$  nun intervalo  $(a, b)$  tales que

$$\|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| \leq \delta.$$

Se  $f$  é continua e lipschitziana con respecto á variable  $x$  en  $A$  con constante  $K$ , e  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ , entón para todo  $t \in (a, b)$  tense que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \delta e^{K|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{K} \left( e^{K|t-t_0|} - 1 \right). \quad (3.1)$$

*Demostración.* Faremos a proba no intervalo  $[t_0, b)$ , sendo análoga en  $(a, t_0]$ .

Por ser  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  solucións  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ -aproximadas de  $(P)$ , tense

$$\|\varphi'_i(s) - f(s, \varphi_i(s))\| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2,$$

en case todo punto de  $[t_0, b)$ . Integrando entre  $t_0$  e  $t$ , obtemos

$$\left\| \varphi_i(t) - \varphi_i(t_0) - \int_{t_0}^t f(s, \varphi_i(s)) ds \right\| \leq \varepsilon_i (t - t_0), \quad i = 1, 2.$$

Tendo en conta que  $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$ , sumando as dúas desigualdades anteriores tense

$$\left\| (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - (\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)) - \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds \right\| \leq \varepsilon (t - t_0).$$

Sexa  $r : [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a función que dá a distancia entre  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , isto é,  $r(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$ . A última desigualdade implica que

$$r(t) \leq r(t_0) + \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\| ds + \varepsilon (t - t_0), \quad (3.2)$$

e por ser  $f$  lipschitziana con respecto a  $x$  en  $A$  con constante  $K$

$$r(t) \leq r(t_0) + K \int_{t_0}^t r(s) ds + \varepsilon (t - t_0).$$

Sexa  $R : [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a función dada por

$$R(t) = \int_{t_0}^t r(s) ds.$$

Por hipótese,  $r(t_0) \leq \delta$ , polo que a última desigualdade pode reescribirse en termos de  $R$  como

$$R'(t) - KR(t) \leq \delta + \varepsilon (t - t_0).$$

Multiplicando ambos lados da desigualdade por  $e^{-K(t-t_0)}$  e integrando as expresións resultantes entre  $t_0$  e  $t$  obtemos

$$e^{-K(t-t_0)} R(t) \leq \frac{\delta}{K} \left( 1 - e^{-K(t-t_0)} \right) - \frac{\varepsilon}{K^2} e^{-K(t-t_0)} (1 + K(t-t_0)) + \frac{\varepsilon}{K^2},$$

e despegando

$$R(t) \leq \frac{\delta}{K} \left( e^{K(t-t_0)} - 1 \right) - \frac{\varepsilon}{K^2} \left( 1 + K(t-t_0) - e^{K(t-t_0)} \right).$$

Finalmente, substituíndo  $R(t)$  en (3.2), chegamos ao resultado enunciado

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| &= r(t) \leq r(t_0) + K \int_{t_0}^t r(s) ds + \varepsilon(t-t_0) \\ &\leq \delta e^{K(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{K} \left( 1 - e^{K(t-t_0)} \right). \end{aligned}$$

□

Nótese que, nas hipóteses do teorema anterior, se  $\varepsilon = 0$  e  $\delta = 0$ , entón  $\varphi_1 = \varphi_2$ , o cal proba a condición suficiente de unicidade que se enuncia a continuación.

**Teorema 3.3.** *Sexan  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  dúas solucións de (P) nun intervalo  $(a, b)$ . Se  $f$  é continua e lipschitziana con respecto á variable  $x$  en  $A$ , entón  $\varphi_1 = \varphi_2$ .*

Por comodidade, no que resta de sección traballaremos nunha rexión da forma

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\} \subset A,$$

onde  $f$  é uniformemente continua e acotada, e denotaremos, de novo,

$$M = \max_{(t,x) \in R} \|f(t, x)\| \quad \text{e} \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Ao igual que na sección anterior, podemos asumir  $M > 0$ , pois o caso  $M = 0$  proporciona a solución trivial.

Nestas condicións, defínense as *iterantes de Picard* no intervalo  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  mediante as fórmulas de recurrencia

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = x_0, \\ \varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{k-1}(s)) ds, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Unha vez introducida a sucesión, e mantendo esta notación, pasamos a demostrar o Teorema de Picard.

**Teorema 3.4** (de Picard-Lipschitz-Lindelöf). *Se  $f$  é continua e lipschitziana con respecto á variable  $x$  en  $R$ , as iterantes de Picard definidas en (3.3) existen e son continuas en  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , e converxen uniformemente á única solución  $\varphi$  de (P) neste intervalo.*

*Demostración.* Faremos a proba no intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , sendo análoga para  $[t_0 - \alpha, t_0]$ .

En primeiro lugar, probaremos por indución que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_k$  está definida e é de clase  $C^1$  en  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , e que cumpre

$$\|\varphi_k(t) - x_0\| \leq M(t - t_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \quad (3.4)$$

Para  $k = 0$ ,  $\varphi_0 = \text{cte}_{x_0}$  verifica trivialmente as condicións.

Supoñamos que  $\varphi_k$  verifica as condicións e vexamos que  $\varphi_{k+1}$  tamén. Por ser  $\varphi_k$  de clase  $C^1$  en  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , a función  $t \rightarrow f(t, \varphi_k(t))$  é continua e, por tanto, integrable en dito intervalo. Así, por (3.3),  $\varphi_{k+1}$  está definida e é de clase  $C^1$  en  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , e claramente

$$\|\varphi_{k+1}(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_k(s))\| ds \leq M(t - t_0)$$

para todo  $t$  no intervalo, tal e como se quería probar.

A desigualdade (3.4) ten unha sinxela interpretación xeométrica para o caso  $n = 1$ : todas as iterantes parten do punto  $(t_0, x_0)$  e permanecen dentro da rexión triangular  $T$  delimitada polas rectas  $x = x_0 + M(t - t_0)$ ,  $x = x_0 - M(t - t_0)$  e  $t = t_0 + \alpha$  (ver Gráfica 2.1). Para dimensión superior, permítenos garantir que permanecen dentro de  $R$ , o cal é suficiente para continuar a construción.

Falta probar a converxencia da sucesión. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\Delta_k(t) = \|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)\|, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

A partir da definición das iterantes, e empregando que  $f$  é lipschitziana en  $R$  (con constante de Lipschitz  $K > 0$ ), podemos acotar

$$\begin{aligned} \Delta_k(t) &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_k(s)) - f(s, \varphi_{k-1}(s))\| ds \\ &\leq K \int_{t_0}^t \|\varphi_k(s) - \varphi_{k-1}(s)\| ds = K \int_{t_0}^t \Delta_{k-1}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por outra banda, aplicando (3.4) con  $k = 1$  obtemos

$$\Delta_0(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| \leq M(t - t_0),$$

e por indución en (3.5), chegamos a que para todo  $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_k(t) \leq \frac{M}{K} \cdot \frac{K^{k+1} (t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M}{K} \cdot \frac{(K\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha],$$

o cal implica a converxencia uniforme en  $t$ .

É dicir, cada termo da serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \quad (3.6)$$

está maiorado polo  $k$ -ésimo termo da serie de Taylor de  $(M/K)e^{K\alpha}$ , polo que empregando o M-test de Weierstrass deducimos que (3.6) é uniformemente converxente.

En consecuencia, a serie

$$\varphi_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t))$$

é absoluta e uniformemente converxente en  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , e por tanto as sumas parciais

$$\varphi_n(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t))$$

converxen uniformemente en  $[t_0, t_0 + \alpha]$  a unha función continua  $\varphi$ .

Por último, vexamos que esta  $\varphi$  é solución de  $(P)$  en  $[t_0, t_0 + \alpha]$ .

Por unha banda, como todas as  $\varphi_k$  permanecen en  $R$ , tamén o fai o límite  $\varphi$ . En consecuencia, a función  $s \rightarrow f(s, \varphi(s))$  está definida e é continua en  $[t_0, t_0 + \alpha]$ .

Ademais, por ser  $f$  lipschitziana en  $R$ ,

$$\left\| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_k(s))) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_k(s))\| ds \leq K \int_{t_0}^t \|\varphi(s) - \varphi_k(s)\| ds.$$

Como  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ , a última integral tende a 0 cando  $k \rightarrow \infty$ , e por tanto, polo Teorema de Compresión, tamén o fai o primeiro termo.

Finalmente, tomando límites cando  $k \rightarrow \infty$  en (3.3), chegamos a que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Así,  $\varphi$  é solución de  $(P)$ , e é única polo Teorema 3.3.

□

Cómpre resaltar que a hipótese de lipschitzianidade é necesaria para garantir a converxencia das iterantes de Picard, non basta con ter asegurada a unicidade de solución, como se pon de manifesto no seguinte exemplo.

**Exemplo 3.5.** Sexa  $f$  a función definida en  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  mediante

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0 \\ 2t & \text{se } t \in (0, 1], x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t} & \text{se } t \in (0, 1], 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & \text{se } t \in (0, 1], t^2 < x. \end{cases}$$

que é continua e limitada pola constante 2 en  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ .

Ademais,  $f$  é monótona decrecente en  $x$  para  $t$  fixado, condición que implica a unicidade de solución nun intervalo definido cara a dereita de 0. Supoñamos, por contra, que existen dúas solucións distintas  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Non é restritivo supoñer que existen  $t^* \in [0, 1)$  e  $\varepsilon > 0$  tales que

$$\varphi_1(t^*) = \varphi_2(t^*) \quad \text{e} \quad \varphi_1 < \varphi_2 \text{ en } (t^*, t^* + \varepsilon).$$

Así, para  $t \in (t^*, t^* + \varepsilon)$  teríamos

$$\varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t)) < f(t, \varphi_2(t)) = \varphi_2'(t),$$

o cal implica que

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$$

para todo  $t \in [t^*, t^* + \varepsilon]$ , co que chegamos a unha contradición.

Por outra banda, continuando co exemplo, para a condición inicial  $(t_0, x_0) = (0, 0)$ , as iterantes de Picard definidas en (3.3) resultan

$$\varphi_0(t) = 0, \quad \varphi_{2k-1}(t) = t^2, \quad \varphi_{2k}(t) = -t^2; \quad k \in \mathbb{N}.$$

Así, existen dúas subsucesións que converxen a distintas funcións límite, pois

$$\varphi^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{2k-1}(t) = t^2 \quad \text{e} \quad \varphi_*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{2k}(t) = -t^2.$$

Nótese que, ademais, ningunha destas funcións é solución do problema, xa que

$$(\varphi^*)'(t) = 2t \neq -2t = f(t, t^2) \quad \text{e} \quad (\varphi_*)'(t) = -2t \neq 2t = f(t, -t^2).$$

En consecuencia, a sucesión de iterantes orixinal non pode ser converxente, malia ter garantida a existencia e unicidade de solución. De feito, facendo cálculos sinxelos, chegamos a que a solución do problema, representada xunto ás iterantes na Gráfica 3.1a, é

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{3}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

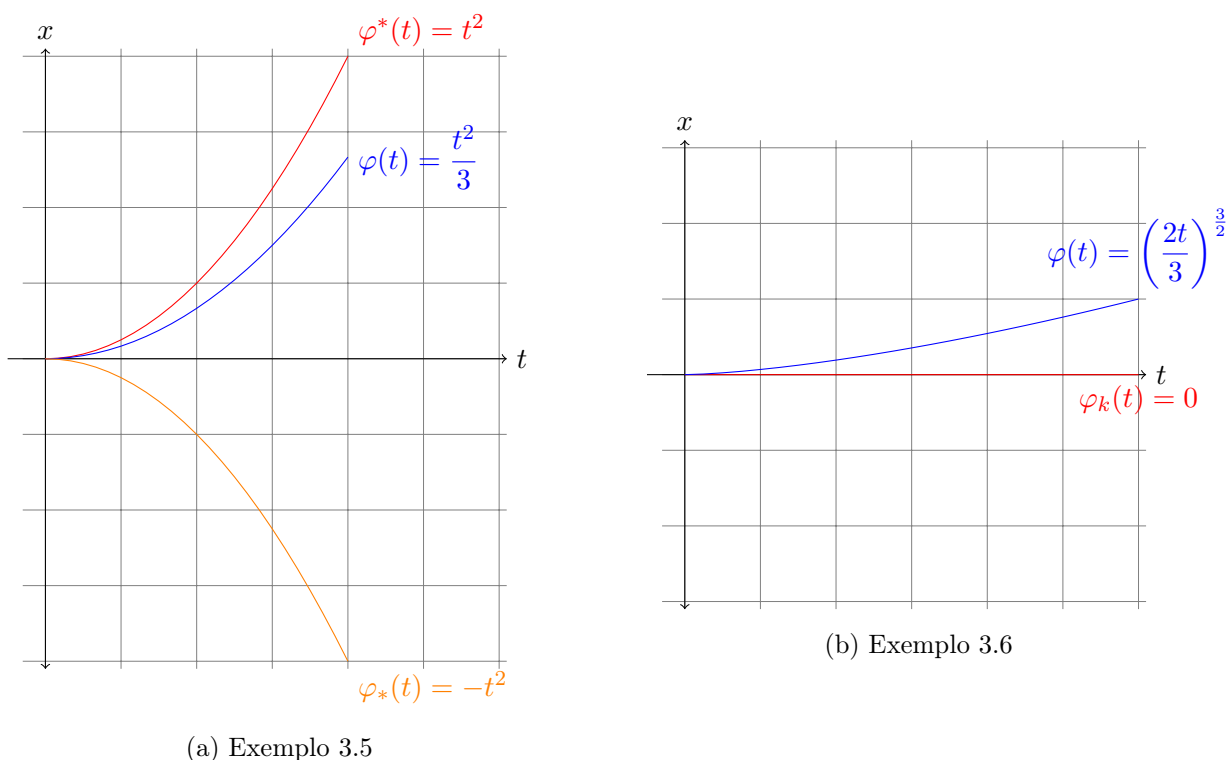


Figura 3.1: Representación gráfica das funcións referidas nos Exemplos 3.5 e 3.6.

Outra observación importante é que a converxencia das iterantes de Picard a unha solución do problema non implica que esta sexa única, como se amosa a continuación.

**Exemplo 3.6.** Consideremos a ecuación

$$x' = |x|^{\frac{1}{2}}.$$

Para o punto inicial  $(t_0, x_0) = (0, 0)$ , todas as iterantes de Picard son a función idénticamente nula, é dicir

$$\varphi_k(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, k \in \mathbb{N}.$$

A función constante cero é solución trivial do problema de valor inicial, mais tamén o é a función definida mediante

$$\varphi(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \forall t \geq 0,$$

polo que non hai unicidade de solución (ver Gráfica 3.1b).



## Capítulo 4

# Sucesión de Walter

Neste capítulo introdúcese unha sucesión funcional formada por solucións de problemas perturbados, a *sucesión de Walter*. Traballaremos sempre cun problema escalar ( $A \subset \mathbb{R}^2$ ), pois os desenvolvementos desta sección non se poden estender a sistemas. Facendo tender as perturbacións positivas introducidas no problema orixinal a cero (isto é, facendo tender os problemas perturbados ao orixinal), e baixo hipótese de continuidade sobre a función  $f$ , probaremos que a sucesión converge a unha solución especial de  $(P)$ , denominada *solución maximal*, que é a meirande de todas as solucións.

Cun procedemento totalmente análogo, sen máis que mudar as perturbacións positivas polas súas opostas, obteremos outra sucesión que converge a “outra” solución do problema, esta vez á chamada *solución minimal*, que é a menor de todas. Se o problema ten solución única, entón as solucións maximal e minimal son a mesma.

Un paso previo a introducir os conceptos de solución maximal e minimal, é definir o que se entende por sobresolucións e subsolucións.

**Definición 4.1.** Diremos que unha función  $w : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida nun intervalo  $J = [t_0, t_0 + \alpha]$  ( $\alpha > 0$ ) é sobresolución do problema  $(P)$  se é diferenciable,  $w(t_0) \geq x_0$  e para todo  $t \in J$  se cumpre

- (i)  $(t, w(t)) \in A$
- (ii)  $w'(t) > f(t, w(t))$ .

Analogamente, diremos que unha función  $v : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é subsolución do problema  $(P)$  se é diferenciable,  $v(t_0) \leq x_0$  e para todo  $t \in J$  se cumpre

- (i)  $(t, v(t)) \in A$
- (ii)  $v'(t) < f(t, v(t))$ .

*Observación 4.2.* Nun intervalo da forma  $J^- = [t_0 - \alpha, t_0]$  as condicións (ii) de sobresolución e subsolución invértense. É dicir, mantendo a notación,

$$\begin{aligned} (i)' \quad w'(t) &< f(t, w(t)) \\ (ii)' \quad v'(t) &> f(t, v(t)) \end{aligned}$$

para todo  $t$  en  $J^-$ .

Os conceptos de sub e sobresolución foron introducidos por primeira vez, nun contexto máis xeral, por Perron (1890), que á súa vez estaba a adaptar unha idea previa de Peano (1886). A idea é que unha sobresolución “vai por enriba” dunha solución verdadeira, e unha subsolución “vai por debaixo”.

Para formalizar esta interpretación, empregaremos os seguintes resultados.

**Lema 4.3.** *Sexa  $J_0 = (t_0, t_0 + \alpha]$  un intervalo e  $\phi, \psi : J_0 \rightarrow \mathbb{R}$  funcións diferenciables. Se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\phi(t) < \psi(t)$  para todo  $t$  en  $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ , entón verifícase unha das dúas seguintes afirmacións:*

1.  $\phi < \psi$  en  $J_0$ ,      ou
2. Existe  $t^* \in J_0$  tal que  $\phi(t) < \psi(t)$  para  $t \in (t_0, t^*)$ ,  $\phi(t^*) = \psi(t^*)$  e  $\phi'(t^*) \geq \psi'(t^*)$ .

*Demostración.* Supoñamos que (1) non se verifica.

Entón, por continuidade das funcións, ten que existir un primeiro instante  $t^* \in J_0$  no que  $\phi(t^*) = \psi(t^*)$ .

Ademais, por hipótese,  $\phi(t) < \psi(t)$  en  $(t_0, t^*)$ , polo que para  $h > 0$  suficientemente pequeno se verifica

$$\frac{\phi(t^*) - \phi(t^* - h)}{h} > \frac{\psi(t^*) - \psi(t^* - h)}{h}.$$

Finalmente, tomando límites na desigualdade anterior chegamos a que  $\phi'(t^*) \geq \psi'(t^*)$ .       $\square$

**Definición 4.4.** Dada unha función  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , defínese o defecto con respecto á ecuación  $x' = f(t, x)$  como a función

$$(D\varphi)(t) = \varphi'(t) - f(t, \varphi(t)).$$

O defecto dunha función indica como de cerca está dita función de ser solución da ecuación.

**Teorema 4.5** (de Comparación). *Sexa  $J_0 = (t_0, t_0 + \alpha]$  un intervalo e  $\phi, \psi : J_0 \rightarrow \mathbb{R}$  funcións diferenciables. Se  $D\phi < D\psi$  en  $J_0$  e existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\phi(t) < \psi(t)$  para todo  $t$  en  $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ , entón*

$$\phi < \psi \text{ en } J_0.$$

*Demostración.* Como se verifican as hipóteses do Lema 4.3, basta probar que non se pode dar o resultado (2) do mesmo.

En efecto, se existise  $t^* \in J_0$  con  $\phi(t^*) = \psi(t^*)$ , entón

$$\phi'(t^*) = (D\phi)(t^*) + f(t^*, \phi(t^*)) < (D\psi)(t^*) + f(t^*, \psi(t^*)) = \psi'(t^*),$$

polo que non se verifica  $\phi'(t^*) \geq \psi'(t^*)$ . Logo, non pode darse (2) e, en consecuencia,  $\phi < \psi$  en  $J_0$ .

□

Como corolario, temos o resultado correspondente no intervalo  $J_0^-$ , cuxa proba é inmediata sen máis que considerar a transformación

$$\bar{\phi}(t) = \phi(2t_0 - t) \quad \text{e} \quad \bar{f}(t, x) = -f(2t_0 - t, x),$$

que introduce un signo negativo no defecto

$$(D\bar{\phi})(t) = \bar{\phi}'(t) - \bar{f}(t, \bar{\phi}(t)) = -(D\phi)(2t_0 - t, x),$$

e reduce o problema ao caso anterior.

**Corolario 4.6.** *Sexa  $J_0^- = [t_0 - \alpha, t_0)$  un intervalo e  $\phi, \psi : J_0^- \rightarrow \mathbb{R}$  funcións diferenciables. Se  $D\phi > D\psi$  en  $J_0$  e existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\phi(t) < \psi(t)$  para todo  $t$  en  $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ , entón*

$$\phi < \psi \text{ en } J_0^-.$$

Empregando estes resultados, xa podemos formalizar a interpretación que dabamos de sub e sobresolución da forma que segue: se  $v, w, \varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son, respectivamente, unha subsolución, sobresolución e solución do problema  $(P)$ , entón

$$v(t) < \varphi(t) < w(t), \quad \forall t \in I, t > t_0.$$

Estas desigualdades despréndense directamente do Teorema 4.5. En efecto, vexamos que tomando  $\phi = v$  e  $\psi = \varphi$ , se verifican as hipóteses.

Por unha banda, é evidente que

$$Dv < 0 = D\varphi.$$

Ademáis, por continuidade das funcións, podemos garantir que existe  $\varepsilon > 0$  de forma que  $v(t) < \varphi(t)$  para  $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ . Distinguimos dous casos

a) Se  $v(t_0) < \varphi(t_0)$ , é trivial.

b) Se  $v(t_0) = x_0$ , entón  $v'(t_0) < f(t_0, x_0) = \varphi'(t_0)$ , é dicir,  $(v - \varphi)'(t_0) < 0$ . Así, por definición de derivada, existe unha veciñanza cara a dereita de  $t_0$  na que

$$\frac{v(t) - \varphi(t)}{t - t_0} < 0,$$

e, en consecuencia,  $v < \varphi$  en dita veciñanza.

Desta maneira chegamos a que

$$v(t) < \varphi(t) \quad \forall t \in I, t > t_0.$$

Cun razonamento totalmente análogo, tomando  $\phi = \varphi$  e  $\psi = w$ , obtemos a desigualdade

$$\varphi(t) < w(t) \quad \forall t \in I, t > t_0.$$

E do mesmo xeito, empregando o Corolario 4.6, xustificamos as desigualdades para  $t \leq t_0$ .

*Observación 4.7.* Un método moi común para atopar sub e sobresolucións, e que de feito é empregado na a propia construción da sucesión de Walter, é facer pequenas modificacións na función  $f$  para obter funcións  $f_1$  e  $f_2$  que satisfagan

$$f_1(t, x) < f(t, x) < f_2(t, x),$$

e de xeito que os seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f_1(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = f_2(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

poidan ser resoltos de forma explícita.

**Exemplo 4.8.** Consideremos a seguinte ecuación de Bernoulli

$$\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Para tempo positivo tense que  $x^2 < t^2 + x^2$ . Así, resolvendo o sistema con  $f_1(t, x) = x^2$

$$\begin{cases} v' = v^2 \\ v(0) = 1, \end{cases}$$

obtemos a subsolución

$$v(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Da expresión de  $v$  vemos que está definida para  $t$  en  $(0, 1)$ . Neste intervalo temos  $x^2 + 1 > x^2 + t^2$ . Logo, resolvendo o sistema con  $f_2(t, x) = x^2 + 1$

$$\begin{cases} w' = w^2 + 1 \\ w(0) = 1, \end{cases}$$

obtemos a sobresolución

$$w(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

con  $t \in (0, \pi/4)$ .

Pódense obter sobresolucións moito máis aproximadas á solución do problema, mais a única intención deste exemplo é ilustrar o procedemento para un caso sinxelo.

A continuación, definimos o que se entende por solucións maximal e minimal do problema  $(P)$ , e probamos a súa existencia construíndo sucesións de funcións que converxen a elas.

**Teorema 4.9.** *Se  $f$  é continua en  $A$ , entón o problema  $(P)$  ten dúas solucións (posiblemente idénticas)  $\varphi^*$  e  $\varphi_*$  definidas nun intervalo maximal e que verifican*

$$\varphi_*(t) \leq \varphi(t) \leq \varphi^*(t)$$

para toda solución  $\varphi$  de  $(P)$  en todo  $t$  no que as tres funcións involucradas estean definidas. A función  $\varphi^*$  denomínase solución maximal, e a función  $\varphi_*$  solución minimal.

*Demostración.* Por ser  $A \subset \mathbb{R}^2$  aberto, existen constantes  $a, b > 0$  tales que

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset A.$$

Por ser  $R$  compacto,  $f$  é uniformemente continua e limitada en  $R$ . Sexan

$$M = \max_{(t,x) \in R} |f(t, x)| \quad \text{e} \quad \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M+1} \right\}.$$

Sexa  $\varphi$  unha solución de  $(P)$  en  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , cuxa existencia está garantida polo Teorema 2.6.

Seguindo a Walter, construímos a sucesión  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como segue. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sexa  $w_n$  unha solución do problema perturbado

$$\begin{cases} w'_n = f(t, w_n) + 1/n \\ w_n(t_0) = x_0 + 1/n. \end{cases} \quad (P_n)$$

Nótese que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f + 1/n$  está acotado por  $M + 1$ , e pola elección feita de  $\alpha$  cada  $w_n$  estará tamén definida, polo menos, en  $I$ .

Agora, aplicando o Teorema 4.5 (e o Corolario 4.6) primeiro con  $\phi = \varphi$ ,  $\psi = w_{n+1}$  e despois con  $\phi = w_{n+1}$ ,  $\psi = w_n$ , obtemos as desigualdades

$$\varphi(t) < w_{n+1}(t) < w_n(t), \quad \forall t \in I, n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, a sucesión  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é monótona decrecente e acotada inferiormente, polo que existe o límite

$$\varphi^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t) \geq \varphi(t) \quad \forall t \in I.$$

Ademais,

$$|w'_n(t)| = \left| f(t, w_n(t)) + \frac{1}{n} \right| \leq M + 1, \quad \forall t \in I, n \in \mathbb{N},$$

o cal implica que  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é equicontinuo, polo que a converxencia a  $\varphi^*$  en  $I$  é uniforme.

Isto permite o paso ao límite baixo o signo integral na ecuación integral equivalente a  $(P_n)$

$$w_n(t) = x_0 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}(t - t_0) + \int_{t_0}^t f(s, w_n(s)) ds,$$

obtendo

$$\varphi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi^*(s)) ds.$$

Así, chegamos a que  $\varphi^*$  é solución de  $(P)$  e satisfai

$$\varphi(t) \leq \varphi^*(t), \quad t \in I,$$

para toda  $\varphi$  solución de  $(P)$ .

Do mesmo xeito, construímos a sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  é unha solución do problema

$$\begin{cases} v'_n = f(t, v_n) - 1/n \\ v_n(t_0) = x_0 - 1/n. \end{cases}$$

Cun razonamento totalmente análogo ao anterior, chegamos a que existe a función límite

$$\varphi_*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \quad t \in I,$$

que é solución de  $(P)$  e que verifica

$$\varphi_*(t) \leq \varphi(t), \quad t \in I,$$

para toda  $\varphi$  solución de  $(P)$ .

---

A maximalidade do intervalo de definición é consecuencia da continuidade de  $f$  e dos resultados de extensión de solucións coñecidos para ecuacións diferencias ordinarias.

□

Facemos a continuación dúas observacións interesantes que se desprenden deste último teorema.

*Observación 4.10.* Da propia definición dedúcese que, en caso de existir, a solución maximal (minimal) é única. En efecto, se  $\varphi^*$  e  $\psi^*$  son solucións maximais (minimais) de  $(P)$ , deben verificar

$$\varphi^*(t) \leq \psi^*(t) \quad \text{e} \quad \psi^*(t) \leq \varphi^*(t)$$

para todo  $t$  no intervalo maximal de definición da solución, do que se deduce que  $\varphi^* = \psi^*$ .

*Observación 4.11.* Nótese que a solución do problema  $(P)$  é única se o sé as súas solucións maximal e minimal coinciden.



## Capítulo 5

# Series de Potencias en Matlab

Nesta última sección retomamos a hipótese de analiticidade sobre a función  $f$  para asegurar o bo funcionamento do *método das series de potencias*, introducido no Capítulo 1 e adaptado agora a dous programas numérico-simbólicos implementados en Matlab e SageMath.

### 5.1. Método sen subdivisiones do intervalo

Recordemos que, como se comentaba ao principio do traballo, cando intentamos aplicar o método das series de potencias para resolver o problema ( $P$ ) moitas veces non é posible obter unha expresión que nos permita coñecer todos os coeficientes de Maclaurin da solución. Non obstante, un programa sinxelo permite obter polinomios de Maclaurin de grao tan alto como se desexe, o que permite acadar boas aproximacións da solución exacta (ver código no Anexo I).

Aínda que existen métodos numéricos para obter polinomios de Taylor en diversas linguaxes de programación dende hai moitos anos, como o exposto en [2], o salientable do noso método é o emprego que facemos do cálculo simbólico, que non só permite obter boas aproximacións numéricas, senón que devolve unha función (non unha nube de puntos) como solución aproximada, e dita función pode empregarse de novo para todo tipo de cálculos simbólicos.

De feito, en cada etapa  $n$  constrúese o polinomio de Taylor de grao  $n + 1$  da solución centrado en  $t = 0$  (facemos énfase en que se trata do polinomio exacto, non unha aproximación do mesmo), e detense o proceso cando o defecto dese polinomio con respecto á EDO (véxase Definición 4.4) é inferior a un valor prefixado.

Á hora de calcular o polinomio de Taylor exacto en cada paso, a dificultade xorde cando nos atopamos coa necesidade de avaliar  $f$  e as súas derivadas sucesivas sobre  $(t, x(t))$ , sendo  $x(t)$  a

solución descoñecida. É dicir, sabendo que

$$x' = f(t, x(t)),$$

entón para cada  $n$  natural temos

$$x^{(n+1)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}(t, x(t)).$$

non obstante, non podemos aplicar a regra da cadea para calcular o último termo, pois non coñecemos a expresión exacta da función  $x(t)$ .

Para solventar ese problema, observemos que realmente o único que precisamos é o valor da derivada no punto  $t = 0$ , e se temos dúas funcións que verifican

$$x^{(i)}(0) = y^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

entón

$$\left. \frac{d^n f}{dt^n}(t, x(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d^n f}{dt^n}(t, y(t)) \right|_{t=0}$$

En consecuencia, en cada etapa  $n + 1$  podemos reemplazar  $x(t)$  polo seu polinomio de Maclaurin de grao  $n$ ,  $x_n(t)$ , e continuar co proceso substituíndo  $f(t, x(t))$  por  $f(t, x_n(t))$  para o cálculo da derivada  $n + 1$  no punto  $t = 0$ .

En cada etapa, o cálculo da derivada

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t, x_n(t))$$

realizámolo de xeito simbólico, o que incrementa moito o tempo de cálculo para valores altos de  $n$ , e é aquí onde se atopa o principal inconveniente dos nosos programas.

No Anexo I adxúntase o código co que se pode implementar este método en Matlab, e que empregamos para resolver os exemplos que aparecen a continuación. Cómpre mencionar que tamén se implementou en SageMath (incluímos os enlaces que dan acceso ao código utilizado en cada exemplo), coa vantaxe de que esta é unha plataforma *online* e gratuita, e co inconveniente de que en moitas ocasións é notablemente máis lento.

**Exemplo 5.1.** Presentamos un exemplo con solución coñecida, que resolveremos co código básico e que ilustra, a partir das gráficas, que a solución calculada co noso método aproxima con gran precisión á exacta.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

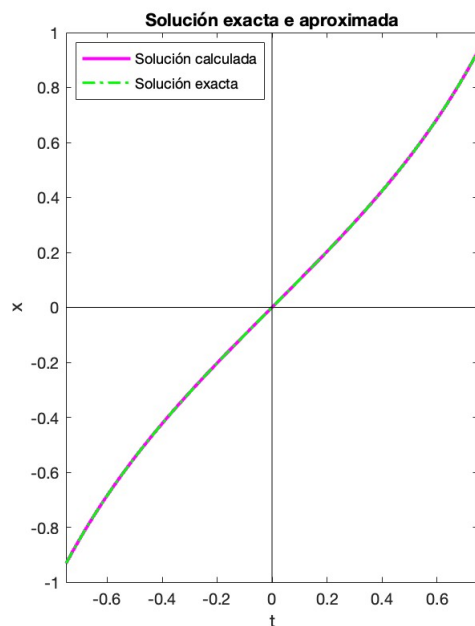


Figura 5.1: Soluciones exacta (verde) e aproximada (rosa) da ecuación  $x' = 1 + x^2$ .

cuxa solución é a función tanxente.

Introducindo estes datos no programa de Matlab, obtemos converxencia (erro inferior a  $10^{-6}$ ) co polinomio de grao 23 da solución. Definimos o erro como o defecto do polinomio construído con respecto a función  $f$  nos extremos do intervalo. É dicir, neste caso concreto tomamos como erro en cada etapa

$$p'_n(l) - f(l, p_n(l)),$$

sendo  $p_n$  o polinomio de Maclaurin de grao  $n$  da solución e  $l = 0.75$  a lonxitude do intervalo.

Na figura 5.1 amósanse simultaneamente as gráficas da solución exacta e da aproximación que obtimos. Incluímos tamén un código QR que dá acceso ao código adaptado a SageMath que resolve este problema, ao que tamén se pode acceder dende este enlace.

A continuación, completamos o exemplo do Capítulo 3 co cálculo da solución do problema.

**Exemplo 5.2.** Retomemos a ecuación de Bernoulli

$$\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Na sección anterior, obtiñamos como subsolución a función

$$v(t) = \frac{1}{1-t},$$

e como sobresolución

$$w(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Resolvendo esta ecuación de novo co código básico, acádase a converxencia (erro inferior a  $10^{-3}$  no intervalo  $[0, \pi/4]$ , definindo o erro coma no exemplo anterior) co polinomio de Taylor de grao 43 da solución.

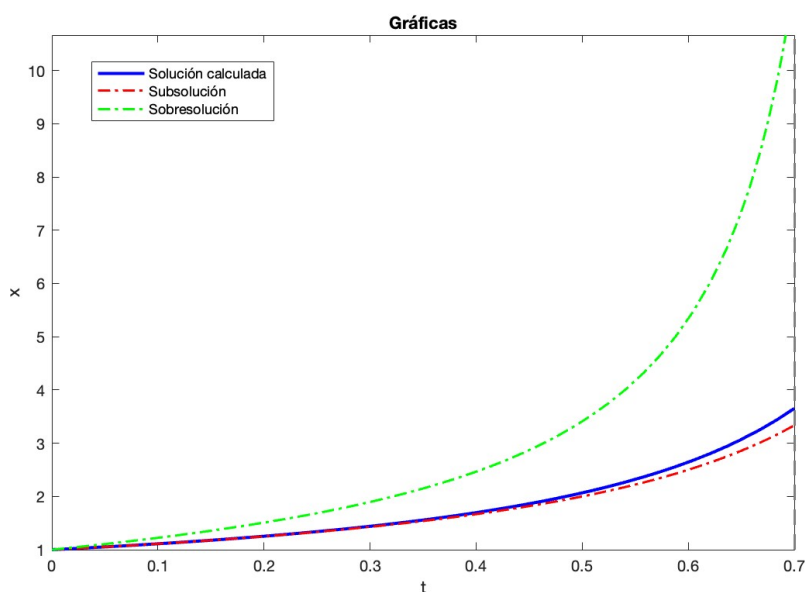


Figura 5.2: Solución (azul), subsolución (vermello) e sobresolución (verde) de  $x' = t^2 + x^2$ .

Representando a solución obtida xunto coas funcións  $v$  e  $w$  (ver Gráfica 5.2), podemos observar como a partir de  $t = 0$  a gráfica de  $v$  vai por debaixo da solución, e a de  $w$  por enriba, tal e como se xustificou no capítulo anterior.

Inclúese de novo o código QR do programa implementado en SageMath, ao que se pode acceder dende este enlace, mais neste caso xa se pon de manifesto o inconveniente do tempo de cálculo que se comentaba ao principio: a partir de grao 25, obsérvase claramente que o programa tarda cada vez máis en completar unha iteración do bucle, chegando a empregar máis de 10 segundos nas últimas.

Modificando lixeiramente o primeiro código, obtemos un programa que permite resolver, co mesmo método, sistemas de ecuacións diferenciais de calquera orde.

**Exemplo 5.3.** As ecuacións depredador-presa foron propostas de xeito independente por Alfred Lotka en 1925 e Vito Volterra en 1926. Empréganse para describir dinámicas de sistemas

biolóxicos nos que interactúan dúas especies, unha como presa e outra como depredador.

O seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = xy - 2x \\ y' = -xy/2 + y \\ x(0) = 2 \\ y(0) = 1.9, \end{cases}$$

forma un par de ecuacións Lotka-Volterra, onde  $x(t)$  representa o número de depredadores e  $y(t)$  o número de presas en función do tempo.

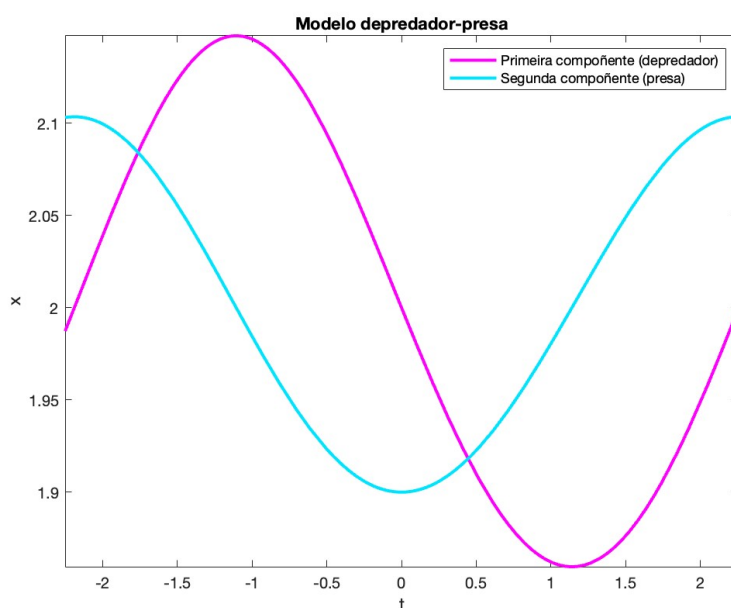


Figura 5.3: Gráfica da evolución da poboación de depredadores (rosa) e presas (azul) que se obtén como solución das ecuacións de Lotka-Volterra no Exemplo 5.3.

Neste tipo de sistemas, un *equilibrio de poboación* ten lugar cando ambas as derivadas son nulas, é dicir, cando non varía a poboación de ningunha das especies. Neste exemplo en concreto, os equilibrios atópanse no punto  $(0, 0)$ , que representa a extinción de ambas as especies, e no punto  $(2, 2)$ , no que as especies manterían indefinidamente o seu número de individuos distinto de cero. Como a condición inicial  $(2, 1.9)$  é distinta dos dous puntos de equilibrio, a solución que obteremos é non constante.

Resolvendo o exemplo co código de Matlab para sistemas, obtemos converxencia (erro inferior a  $10^{-4}$ , tomando o erro de xeito análogo aos dous exemplos anteriores, sen mais que substituír o valor absoluto pola norma infinito) con polinomios de grao 36, e a gráfica da solución aproximada

que se amosa na figura 5.3. Nela, obsérvase como a poboación de presas diminúe a medida que aumenta a de depredadores, ata chegar a un punto no que, a falta de alimento, empeza a diminuír o número de depredadores, co conseguinte aumento de presas, e este movemento repítese periodicamente no tempo. De feito, a órbita da solución é periódica, como se pode observar na representación da órbita realizada con Matlab (ver gráfica 5.4).

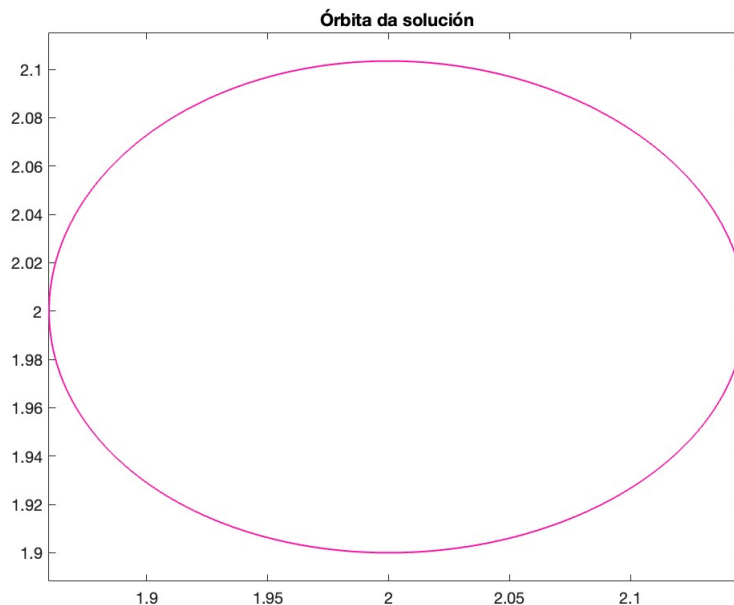


Figura 5.4: Órbita da solución do sistema Lotka-Volterra do Exemplo (5.3).

Ao código en SageMath pode accederse dende este enlace ou escaneando o código QR da figura 5.3.

## 5.2. Método con subdivisións do intervalo

É evidente que o método exposto na sección precedente pode presentar problemas, entre outros motivos, cando o raio de converxencia da expansión en serie da solución non abarca todo o intervalo no que traballamos. Para solventar esa dificultade, nesta sección introducimos unha modificación do método das series de potencias na que empregamos subdivisións do intervalo de partida, de xeito que a serie sexa converxente en cada unha delas.

En primeiro lugar, divídese o intervalo de partida en  $n$  subintervalos consecutivos de lonxitude máxima un valor prefixado. Despois, calcúlase en cada un deles o polinomio de Taylor da solución, de grao comprendido entre dous valores prefixados, tomando como condición inicial o valor

que resulta de avaliar no extremo esquerdo do subintervalo o polinomio calculado no intervalo anterior.

Esta división é necesaria no caso de que o raio de converxencia da solución non abarque todo o intervalo, mais é preferible o uso do primeiro código cando este sexa eficiente, pois, ao requerir menos derivadas de funcións simbólicas, é moito máis rápido.

O exemplo seguinte pon de manifesto, tras unha breve introdución, a importancia de dividir o intervalo de partida en subintervalos máis pequenos co obxectivo de que a serie que calculamos sexa converxente en todo o intervalo á solución do problema.

**Exemplo 5.4.** No deseño de estradas e vías férreas, para unir dous tramos con distintos raios de curvatura ( $R_1 \neq R_2$ ), empréganse curvas de transición que permiten pasar de  $R_1$  a  $R_2$  de modo “suave”. Este cambio suave na curvatura fai que diminúa en gran medida o risco de accidente. A curva de transición máis utilizada sempre foi, e sigue sendo a clotoide, tamén coñecida como espiral de Euler ou espiral de Cornu.

Os primeiros traballos sobre esta curva, con múltiples aplicacións en distintas ramas da ciencia, datan de finais do século XVII e están enmarcados no estudo dun problema de elasticidade, introducido en 1694 polo matemático suízo Jakob Bernoulli (1654), e resolto con éxito, a mediados do XVIII, por outro gran científico suízo da época, Leonhard Euler (1701). Anos máis tarde, a curva foi redescuberta por dous físicos franceses ao estudar a difracción da luz: primeiro foi Augustin-Jean Fresnel (1788) quen parametrizou a curva en termos de integrais (as famosas *integrales de Fresnel*) e máis tarde foi Marie Alfred Cornu (1841) quen conseguiu usar esa parametrización para debuxar a curva de maneira precisa.

O seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = \cos(t^2) \\ y' = \sin(t^2) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

ten como solución as integrais de Fresnel.

Introducimos os datos no programa que resolve os sistemas sen dividir o intervalo, empregando tres lonxitudes distintas para o intervalo de definición, e obtemos as gráficas que se amosan nas figuras 5.5, 5.6 e 5.7.

Se establecemos a lonxitude do intervalo en  $l = 2.5$ , obtemos converxencia (erro inferior a  $10^{-3}$ ) en todo o intervalo (ver gráfica 5.5).

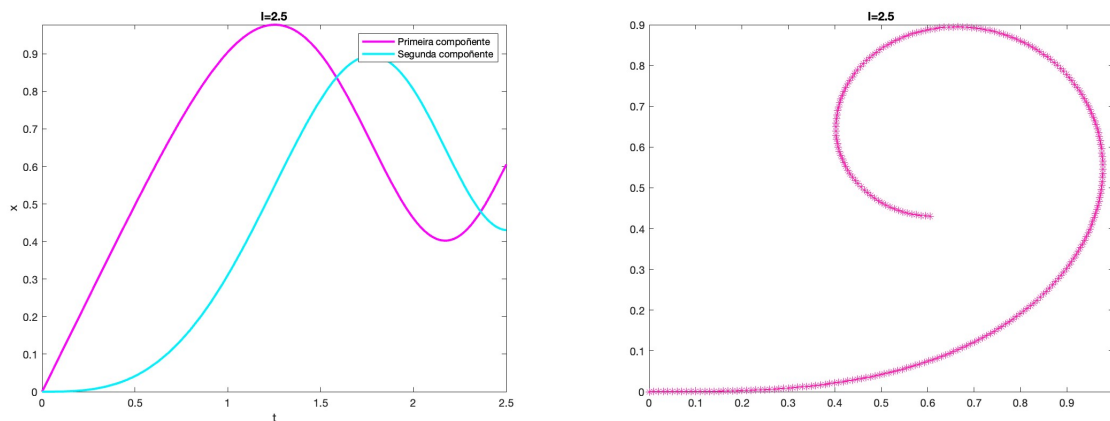


Figura 5.5: Aproximacións das integrais de Fresnel e espirais de Cornu que parametrizan calculadas co código básico nun intervalo de lonxitude 2.5.

Para lonxitude 3.1, xa se observa como a solución comeza a desviarse antes de chegar ao tempo  $t = 3$  (ver gráfica 5.6).

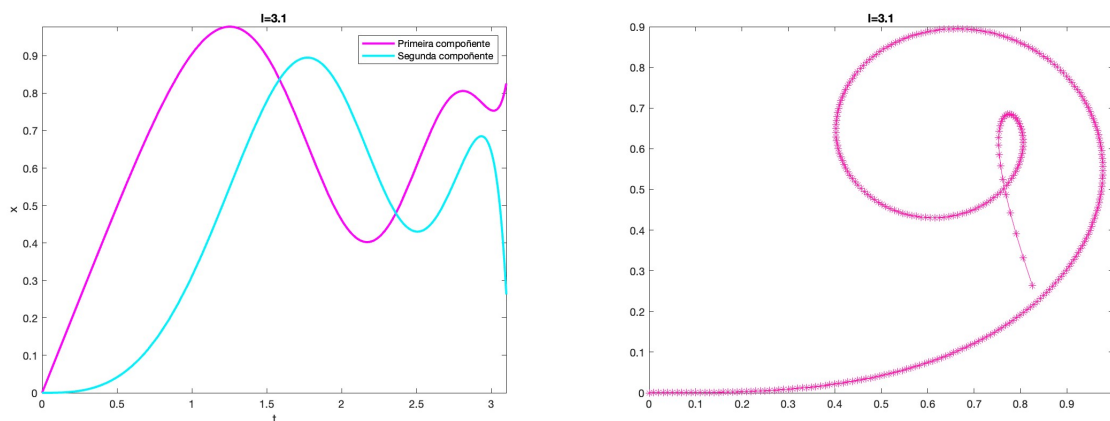


Figura 5.6: Aproximacións das integrais de Fresnel e espirais de Cornu que parametrizan calculadas co código básico nun intervalo de lonxitude 3.1.

Finalmente, para lonxitude 3.3, o erro xa é moi elevado (superior a 94), como se observa na figura 5.7.

Tradicionalmente, e aínda hoxe en día, nas Escolas de Enxeñaría o cálculo da clotoide lévase a cabo empregando fórmulas engorrosas que se obteñen truncando, e posteriormente integrando,

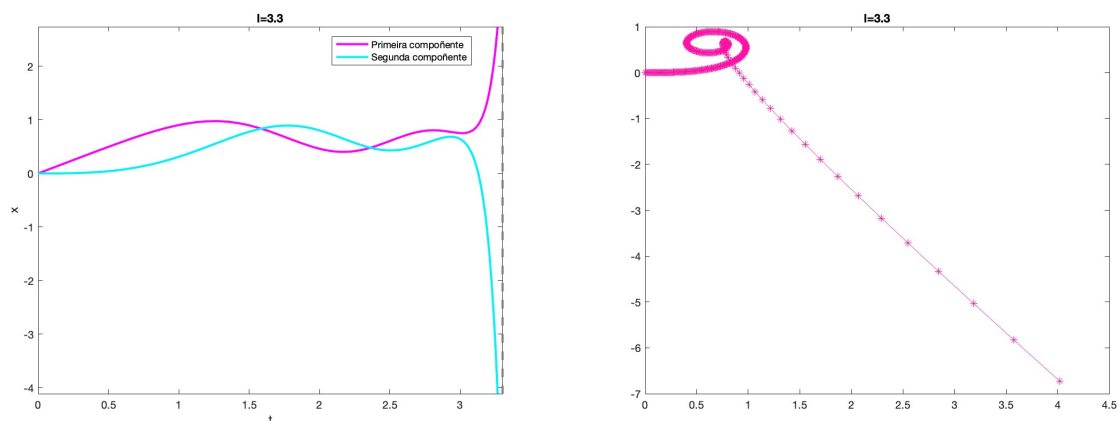


Figura 5.7: Aproximacións das integrais de Fresnel e espirais de Cornu que parametrizan calculadas co código básico nun intervalo de lonxitude 3.3.

as series de Maclaurin do seno e coseno (ver [1]). Esta técnica, en certa medida similar ao método de series de potencias aplicado a este problema, coa salvedade de que neste caso non se trunca (en teoría) a serie, presenta os mesmos problemas que se mencionaron á hora de motivar a introdución das particións no código básico, tal e como se comenta en [6].

Non obstante, se introducimos agora os datos deste problema no programa que emprega particións do intervalo, que se adxunta tamén no Anexo I, obtemos como saída unha aproximación da solución en forma de polinomio de Taylor, de distinto grao en cada subintervalo e verificando o test de parada (erro inferior a  $10^{-3}$ ) en todos eles para calquera lonxitude do intervalo inicial.

Na figura 5.8 represéntanse as dúas compoñentes da solución con respecto ao tempo no intervalo  $[0, 10]$ , e na figura 5.9 a espiral de Cornu que parametrizan, xunto co QR que dá acceso ao código implementado en SageMath, que se pode consultar directamente neste enlace.

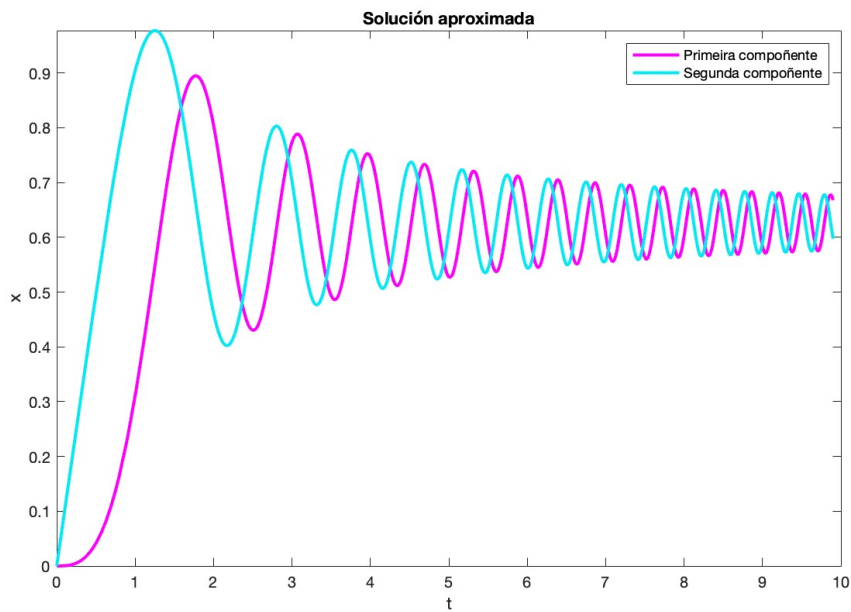


Figura 5.8: Integrales de Fresnel calculadas co código detallado no Anexo I.

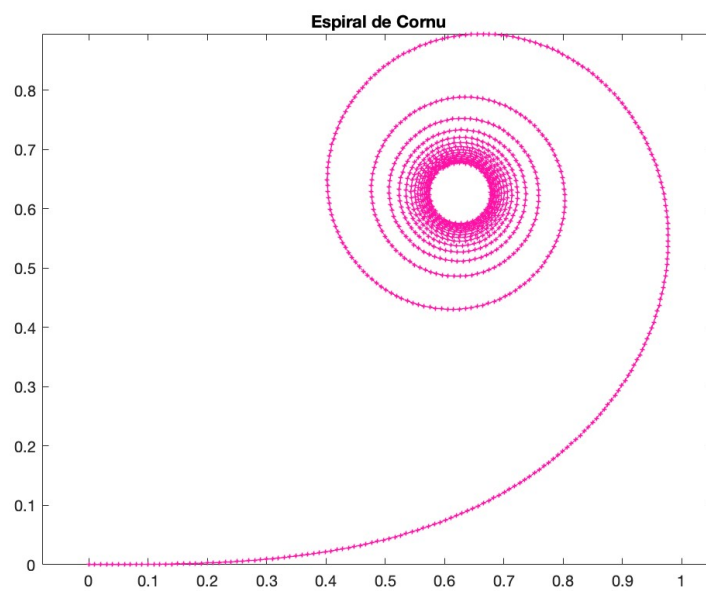


Figura 5.9: Espiral de Cornu parametrizada pelas integrales de Fresnel obtidas como solución do problema do Exemplo 5.4.

## Anexo I

# Código de Matlab

Neste anexo adxúntanse os códigos dos programas elaborados con Matlab.

O código que empregamos nos exemplos 5.1 e 5.2 é o seguinte

```
clc; clear all;
format long;

%%
%% -----DATOS-----
nmax=25; %Grao maximo permitido para os polinomios de Maclaurin que
        imos construír
eps=1.e-6; %Tolerancia para o test de parada

l=0.75; %lonxitude intervalo
cin=0; %condicion inicial

syms f(t,x) g(t) v(t) w(t) p(t) z(t) d(t) dp(t);
f(t,x) = 1 + x^2; %f(t,x)

g(t)= tan(t); %solucion exacta (se disponemos dela)

fin=0; %actualizase a fin=1 cando se cumpre o test de parada.
solex=1; %indica se disponemos ou non de solucion exacta

%%
%% -----INICIALIZACION-----
```

```

fprintf(1,"Resolucion aproximada por series de potencias do
        problema \n")

fprintf(1,"x'=f(t,x), x(0)= 'g' en 'g'<t<'g' onde \n",cin,-1,1);

fprintf(1,"f(t,x)= 's' \n",char(f(t,x)));

p(t)= cin+f(0,cin)*t; %Polinomio de Maclaurin de primeiro grao da
        solucion exacta.

%%
%% -----BUCLE-----

for i = 1:nmax
    z(t) = f(t,p(t));
    d(t) = diff(z,t,i);
    a =(d(0)/factorial(i+1)); % Coeficiente a_(i+1) da serie.
    p(t)=p(t)+ a*t^(i+1); % Polinomio de Maclaurin de grao (i
        +1) da solucion exacta.
    dp(t)=diff(p(t),t);

    % tests parada
        err=abs((dp(1)-f(1,p(1)))); % mide como de lonxe esta p
            (t) de ser solucion da EDO no punto t=1.
            if (a==0)&&(err==0)
                solex=2; % Indica que chegamos a solucion
                    exacta.
                    fprintf(1,"A solucion exacta e x(t)= 's' \n",
                        char(p(t)));
                    break

            elseif (fin==0)&&(max(err,abs(a)*1^(i+1))<eps) %0
                termo abs(a)*1^(i+1) e unha cota do valor
                    absoluto da diferenza no intervalo (-1,1) entre
                        o ultimo polinomio calculado e o penultimo.
                        fin=1;

```

---

```

        fprintf(1,"Acadouse a aproximacion requerida co
                polinomio de Maclaurin da solucion de grao:
                'i'\n ",i+1);
        fprintf(1,"Erro 'g' inferior a 'g'",err,eps);
        fprintf(1," no intervalo ('g','g')\n",-1,1);
        fprintf(1, "A solucion aproximada e \n x(t)= 's
                '\n",char(p(t)));
    end

    % Calculo dos "raios de converxencia"
    if abs(a)>0
        r=(1/abs(a))^(1/(i+1));
        fprintf(1,"Aproximacion do raio de
                converxencia: 'g'\n ",i,r);
    else
        fprintf(1,"Aproximacion 'i' do raio de
                converxencia: division entre 0\n",i);
    end
end

%%----- CASO NON CONVERXENCIA -----

if (fin==0)&&(max(err,abs(a)*l^(nmax+1))>eps)
    fprintf(1,"A ultima solucion obtida NON acada a aproximacion
            desexada (erro inferior a epsilon= 'g' .)\n",eps);
    fprintf(1," Modifique algun dos parametros l ou nmax. \n");
    fprintf(1,"Ultimo erro calculado: 'g' \n.",max(err,abs(a)*l^(
            nmax+1)));
    fprintf(1,"Ultima solucion aproximada calculada x(t)= 's' \n",
            char(p(t)));
end

%%
%% ----- GRAFICAS -----

if solex==2

```

```

    fplot(p,[-1,1],"magenta",'Linewidth',2)
    title('Solucion exacta')
    xlabel('t');
    ylabel('x');
elseif solex==1
    fplot(p,[-1,1],"magenta",'Linewidth',2,'DisplayName','Solucion
        calculada')
    hold on
    fplot(g,[-1,1],"green",'LineStyle','-','Linewidth',1.5,'
        DisplayName','Solucion exacta')
    hold off
    title('Solucion exacta e aproximada')
    xlabel('t');
    ylabel('x');
elseif solex==0
    fplot(p,[-1,1],"magenta",'Linewidth',2)
    title('Solucion aproximada')
    xlabel('t');
    ylabel('x');
end

```

A continuación inclúese a modificación do primeiro código que permite resolver sistemas de orde  $n$  e que se empregou na resolución do exemplo 5.3.

```

nmax=40; %Grao maximo permitido para os polinomios de MacLaurin que
        imos construír
eps=1.e-4; %Tolerancia para o test de parada

n=2;      %Dimension da variable x
l=2.25;   %lonxitude intervalo
cin=[2,1.9]; %condicion inicial

syms x f(t,x) p(t) z(t) g(t) d(t) dp(t) [1 n];
f(t,x) = [x(1)*x(2) -2*x(1), x(2) -x(1)*x(2)/2] ; %f(t,x)

fin=0; %actualizase a fin=1 cando se cumpre o test de parada.
solex=0;

```

```

%%
%%-----INICIALIZACION-----

fprintf(1,"Resolucion aproximada por series de potencias do
        problema \n")

fprintf(1,"x'=f(t,x), x(0)= ('s') en 'g'<t<'g' onde \n",num2str(cin
        ),-1,1);

fprintf(1,"f(t,x)= 's' \n",char(f));

p(t)= cin + subs(f,[t ,x],[0 ,cin])*t; %Polinomio de Maclaurin de
        primeiro grao da solucion exacta.

%%
%%-----BUCLE-----

for i = 1:nmax
    z(t) = subs(f,x,p(t));
    d(t) = diff(z,t,i);
    a =(d(0)/factorial(i+1)); %Vector dos coeficiente a_(i+1)
        das series de (f1,...fn).
    p(t)=p(t)+ a*t^(i+1); %Polinomio de Maclaurin de grao (i+1)
        da solucion exacta.
    dp(t)=diff(p(t),t);

    %tests parada
    amax=norm(a,Inf);
    err=norm(dp(1)-subs(f, [t x], [1 p(1)]),Inf);%mide como
        de lonxe esta p(t) de ser solucion da EDO no punto
        t=1.
    if (amax==0)&&(err==0)
        solex=2; %Indica que chegamos a solucion exacta
        .
        fprintf(1,"A solucion exacta e x(t)= 's' \n",
            char(p));
        break

```

```

elseif (fin==0)&&(max(err,amax*1^(i+1))<eps) %0
    termo abs(a)*1^(i+1) e unha cota do valor
    absoluto da diferenza no intervalo (-1,1) entre
    o ultimo polinomio calculado e o penultimo.
    fin=1;
    fprintf(1,"Acadouse a aproximacion requerida co
        polinomio de Maclaurin da solucion de grao:
        'i'\n ",i+1);
    fprintf(1,"Erro 'g' inferior a 'g'",err,eps);
    fprintf(1," no intervalo (-'g','g')\n",1,1);
    fprintf(1, "A solucion aproximada e \n x(t)= 's
        '\n",char(p));
end

%calculo dos "raios de converxencia"
if amax>0
    r=(1/amax)^(1/(i+1));
    fprintf(1,"Aproximacion 'i' do raio de
        converxencia: 'g'\n ",i,r);
else
    fprintf(1,"Aproximacion 'i' do raio de
        converxencia: division entre 0\n",i);
end

%
end

%%----- CASO NON CONVERXENCIA -----

if (fin==0)&&(max(err,amax*1^(nmax+1))>eps)
    fprintf(1,"A ultima solucion obtida NON acada a aproximacion
        desexada (erro inferior a epsilon= 'g' .)\n",eps);
    fprintf(1," Modifique algun dos parametros l ou nmax. \n");
    fprintf(1,"Ultimo erro calculado: 'g' \n.",max(err,amax*1^(nmax
        +1)));
    fprintf(1,"Ultima solucion aproximada calculada x(t)= 's' \n",
        char(p));

```

```

end

%%----- GRAFICAS -----

if solex==2
    fplot(p,[-1,1],"magenta",'Linewidth',2)
    title('Solucion exacta')
    xlabel('t');
    ylabel('x');
elseif solex==1
    fplot(p,[-1,1],"magenta",'Linewidth',2,'DisplayName','Solucion
        calculada')
    hold on
    fplot(g,[-1,1],"green",'LineStyle','-','Linewidth',1.5,'
        DisplayName','Solucion exacta')
    hold off
    title('Solucion exacta e aproximada')
    xlabel('t');
    ylabel('x');
elseif solex==0
    fplot(p,[-1,1],"magenta",'Linewidth',2)
    title('Solucion aproximada')
    xlabel('t');
    ylabel('x');
end

```

Por último, inclúese o código que emprega divisións do intervalo de definición da solución, que se emprega no exemplo 5.4.

```

%%-----DATOS-----

gmin=5; %grao minimo dos polinomios de Taylor que imos usar
gmax=20; %grao maximo dos polinomios de Taylor que imos usar (gmax
    =1 danos o metodo de Euler Explicito)
nl=6; %Minimo subintervalo de lonxitude 2^(2-nl)
eps=1.e-3; %Tolerancia para o test de parada

n=2; %Dimension da variable x
t0=0; %tempo inicial

```

```

tf=10; %tempo final
%l=1; %lonxitude intervalo (alternativo a tf)
x0=[0,0]; %condicion inicial

nmax=floor(tf/2^(2-nl))+1; %Numero maximo de nos da particion (
    tamen se pode dar como dato alternativo a nl)

syms x f(t,x) g(t) p(t) z(t) d(t) dp(t) solu(t) [1 n];
f(t,x) = [cos(t^2),sin(t^2)] ; %f(t,x)

solex=0; %indica que non disponemos da solucion exacta

%%-----PRESENTACION POR PANTALLA-----

fprintf(1,"Resolucion aproximada por series de potencias do
    problema \n")

fprintf(1,"x'=f(t,x), x('g')= ('s') en 'g'<t<'g' onde \n",t0,
    num2str(x0),t0,tf);

fprintf(1,"f(t,x)= 's' \n",char(f));

if solex==1
    fprintf(1,"A solucion exacta e x(t)= 's' \n .",char(g(t)));
end

fprintf(1,"Empregaremos polinomios de grao minimo 'i' e maximo 'i',
    e unha particion maxima de 'i' subintervalos.\n",gmin,gmax,nmax
    -1);

%%-----INICIALIZACION-----

tin=t0; %actualizase ao tempo inicial t_{k-1} en cada
    subintervalo
cin=x0; %actualizase a condicion inicial p(tin) en
    cada subintervalo
sol=[x0]; %vector para almacenar a nube de puntos da
    solucion

```

---

```

err=[0];           %vector para almacenar os erros
nodo=[t0];        %vector para almacenar os nodos
solu(t)=0;        %solucion (funcion)

%%-----BUCLE-----

for k = 1:nmax %bucle no intervalo [t_{k-1},t_{k}]
    if tin>=tf
        nmax=k-1;
        break
    else
        for j = (gmin-1):gmax %construcion da serie no intervalo [t_{k-1},t_{k}]
            p(t)=cin+subs(f,[t x],[tin cin])*(t-tin);
            fin=0;
            for i =1:j+1
                z(t)=subs(f,x,p(t));
                d(t) = diff(z,t,i);
                a=d(tin)/factorial(i+1); %Denotando a serie de potencias
                    por sum_i a(i)(t-tin)^i, aqui estamos calculando o
                    termo a(i+1).
                p(t)=p(t)+a*(t-tin)^(i+1); %Polinomio de Taylor de grao
                    i+1 da solucion exacta.
            end
            dp(t)=diff(p(t),t);
            for l = 1:nl
                temp=min(tin+2^(1-l),tf);
                test=norm(dp(temp)-subs(f, [t x], [temp p(temp)]),Inf);
                if test<eps
                    solu(t)=solu(t)+p(t)*(heaviside(t-tin)-heaviside
                        (t-temp));
                    sol(k+1,1:n)=p(temp));
                    fprintf(1,"Solucion aproximada no intervalo('g'
                        , 'g'):\n",tin,temp);
                    fprintf(1,"x(t)= 's' \n",char(p(t)));
                    tin=temp;
                    cin=p(temp);
                    nodo(k+1)=temp;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        fin=1;
        if solex==1
            err(k+1,1:n)=p(tin)-g(tin);
            break
        end
    end
    if tin>tf
        break
    end
end
if fin==1
    break
end
end
if fin==0 %caso de non converxencia no intervalo [t_{k-1},t_{k}]
    solu(t)=solu(t)+p(t)*(heaviside(t-tin)-heaviside(t-(tin
        +2^(1-(nl-1)))));
    cin=p(tin+2^(1-(nl-1)));
    tin=tin+2^(1-(nl-1));
    sol(k+1,1:n)=cin;
    nodo(k+1)=tin;
    if solex==1
        err(k+1,1:n)=p(tin)-g(tin);
    end
    nmax=k;
    fprintf(1,"Non se acada converxencia (erro inferior a '
        g')no intervalo ('g','g') con polinomios de grao 'i'
        \n",eps,tin-2^(1-(nl-1)),tin,gmax);
    fprintf(1,"Ultima aproximacion calculada no intervalo('
        g','g'):\n",tin-2^(1-(nl-1)),tin);
    fprintf(1,char(p(t)));
    break
end
end
end

%%----- GRAFICAS -----

```

---

```
if solex==1
    fplot(solu,[t0,tf],"magenta",'Linewidth',2,'Displayname','
        Solucion calculada')
    hold on
    fplot(g,[t0,tf],"green",'LineStyle','-','Linewidth',1.5,'
        Displayname','Solucion exacta')
    hold off
    title('Solucion exacta e aproximada')
    xlabel('t');
    ylabel('x');
elseif solex==0
    fplot(solu,[t0,tf],"magenta",'Linewidth',2)
    title('Solucion aproximada')
    xlabel('t');
    ylabel('x');
end
```



# Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. e Stegun, I. (1972). *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover, New York.
- [2] Chang, Y. F. e Corliss, G. (1994). ATOMFT: Solving ODEs and DAEs Using Taylor Series. *Comput. Math. Appl*, **28**, 209–233.
- [3] Coddington, E. A. e Levinson, N. (reimp. 2018). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill.
- [4] López Pouso, R. (2012). Peano’s Existence Theorem revisited. ArXiv e-prints, arXiv:1202.1152 [math.CA].
- [5] Piccinini, L.C., Stampacchia, G., e Vidossich, G. (1984). *Ordinary Differential Equations in  $\mathbb{R}^n$ : Problems and Methods*. Springer.
- [6] Vázquez-Méndez, M. E. e Casal, G. 2016. (2016). The clothoid computation: A simple and efficient numerical algorithm. *J. Surv. Eng.* 142 (3): 04016005.
- [7] Walter, W. (1971). There is an elementary proof of Peano’s existence Theorem. *Amer. Math. Monthly*, **78(2)**, 170–173.
- [8] Walter, W. (1998). *Ordinary Differential Equations*. Springer.