FACULTADE DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Estudio de curvas planas proyectivas. Clasificación proyectiva de curvas de grado tres

Xiana Pombo Costal

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Estudio de curvas planas proyectivas. Clasificación proyectiva de curvas de grado tres

Xiana Pombo Costal

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

# Trabajo propuesto

| |
|---|
| **Área de Conocimiento: Álgebra** |
| **Título: Estudio de curvas planas proyectivas. Clasificación proyectiva de curvas de grado tres.** |
| **Breve descripción del contenido** |
| El estudio de Curvas Algebraicas es un tema clásico del que se estudian algunos conceptos como el Teorema de Bezout en el programa actual del Grado de Matemáticas y explícitamente en la materia Álxebra, Números e Xeometría. No obstante, en este TFG se propone un estudio de las curvas planas proyectivas introduciendo conceptos como el grado de la Curva, puntos singulares, Hessiana, puntos de inflexión, deficiencia de una curva plana... Como una aplicación interesante de estos conceptos y otros que se mencionan más adelante, se aborda la clasificación proyectiva de las curvas planas de grado 3.<br><br>En esta clasificación, y en el caso de curvas irreducibles existen esencialmente dos tipos de cúbicas, aquellas que son racionales, y que poseen necesariamente un punto singular, y las cúbicas lisas o carentes de puntos singulares.<br>Las curvas irreducibles racionales aparecen geométricamente mediante proyección de la llamada cúbica racional normal, o cúbica alabeada en el espacio proyectivo 3-dimensional.<br>Las curvas lisas no son curvas racionales, corresponden a los ceros de un polinomio homogéneo genérico de grado 3 en tres variables y poseen lo que se llama deficiencia 1.<br>La existencia de estas curvas de grado 3 no racionales justifica históricamente la introducción del concepto de género aritmético y género geométrico de una curva algebraica plana arbitraria. |

# Índice

## Resumen

El estudio de las Curvas Algebraicas es un tema clásico dentro del campo del Álgebra que se nos introduce a través del Teorema de Bezout.
En este trabajo se realiza un estudio de la clasificación proyectiva de las curvas de grado 3 a través de la observación de su racionalidad. Además también se realiza un estudio de la ley de grupos de la cúbica lisa basándonos en la estructura de sus puntos de inflexión.

## Abstract

The study of Algebraic Curves is a classic topic within the field of Algebra that is introduced to us through Bezout's Theorem.
In this document a study of the projective classification of 3rd degree curves is carried out through the observation of their rationality. In addition, a study of the group law of the smooth cubic is also carried out based on the structure of its inflection points.

# Introducción

En este TFG se realiza un estudio de la clasificación proyectiva de las curvas de grado 3 del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$. El objetivo es dar una introducción ilustrativa a las curvas algebraicas del plano. Después de las cónicas, el primer ejemplo ya interesante es el de las curvas de grado 3. Por supuesto, esencialmente nos interesan el caso de las cúbicas irreducibles. Existen dos clases de tales cúbicas, las racionales, caracterizadas por tener siempre una única singularidad, que es un nodo o una cúspide y las que son lisas en todo punto, que precisamente no son racionales. Una prueba de la irracionalidad de la cúbica lisa puede consultarse en el libro de M. Reid [R88] página 28.

El trabajo se divide en cuatro capítulos: un primer capítulo en donde se da la definición del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ asociado a un espacio vectorial V, real o complejo, de dimensión $n+1$, y el concepto de proyectividad. En el segundo capítulo se hace un estudio del concepto de punto singular para una curva plana. Como el concepto es de naturaleza local, se comienza estudiando las curvas en el caso afín y se pasa después al caso proyectivo. En el capítulo 3 expone el estudio de las cúbicas del plano proyectivo. Primero se distingue y caracteriza el caso en que la cúbica es reducible, ya sea en una recta y una cónica no degenerada, o tres rectas disjuntas o confundidas. A continuación, en el cuarto y último capítulo se estudian detalladamente las cúbicas irreducibles.

En el caso singular, a partir de las propiedades geométricas de la curva; es decir, del grado y la naturaleza del punto singular, se obtiene lo que llamamos la forma normal canónica de tales curvas y de hecho se prueba que éstas son dos clases de curvas cúbicas salvo proyectividad. Como propiedad que las identifica, se da la parametrización de tales cúbicas; es decir, se prueba de manera explícita que ambas curvas son racionales.

En el caso liso, dando por hecho la irracionalidad; es decir, que dicha cúbica no es parametrizable; véase la referencia citada al principio de la introducción, nos centramos en la estructura de grupo que posee la cúbica lisa, destacando la argumentación de la propiedad asociativa. Asimismo se prueba que esta cúbica posee exactamente 9 puntos de inflexión y se estudian algunas propiedades geométricas.

La clasificación salvo proyectividad de las cúbicas lisas es un resultado fundamental dentro de la clasificación de curvas salvo proyectividad. Uno necesita encontrar un invariante de tales curvas y calcular el espacio en donde varía tal invariante. Salmon encontró que dicho invariante viene dado por la razón doble de los 4 puntos alineados en que las cuatro tangentes a la cúbica lisa pasando por un punto cualquiera de la curva, cortan a la cúbica. Tal invariante es la razón doble de dichos cuatro puntos y clásicamente se conoce como el $j-$invariante. Tal invariante es un número complejo finito; es decir, el espacio de parámetros que está en correspondencia con las clases de isomorfía de cúbicas lisas del plano proyectivo complejo, es precisamente isomorfo a una recta afín $\mathbb{A}^1$. Este resultado ilustra lo que va a ser reiterativo en toda la Geometría Algebraica : El espacio de Moduli, ,o espacio de parámetros de las clases de isomorfía de curvas de género aritmético dado, es siempre una variedad algebraica cuasi-proyectiva.

# Capítulo 1

# Preliminares

Emplearemos este primer capítulo para definir una serie de conceptos de los que haremos uso a lo largo del resto del trabajo y para hablar del Teorema de Bezout, un concepto clásico en el estudio de las curvas algebraicas.

## 1.1. Definiciones

**Definición 1.1.** Sea V un espacio vectorial de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Se define el **espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ asociado a V** como el conjunto de rectas vectoriales de V. De manera más precisa, se considera en $\mathrm{V}\setminus\{0\}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} = \mathbb{K}^* \text{ tal que } x = \lambda y$$

Sea $x \in \mathrm{V}\setminus\{0\}$, si se tiene que alguna coordenada $x_i$ de $x$ es no nula entonces su clase de equivalencia será $[x] = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$ que son todos los puntos de la recta vectorial que genera menos el $0$. Por tanto $\mathbb{P}(\mathrm{V}) = \mathrm{V}\setminus\{0\}/\mathbb{K}^*$ y existe una aplicación canónica $\pi : \mathrm{V}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{V})$.

**Definición 1.2.** Si $P = [x]$ es un punto de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, un representante de $P$, $(x_0 : \ldots : x_n) \in P$ se dice un conjunto de **coordenadas homogéneas de** $P$. Si $(x_0 : \ldots : x_n)$ son coordenadas homogéneas de $P$, también lo son $\lambda(x_0 : \ldots : x_n)$ con $\lambda \neq 0$. Llamaremos **sistema de coordenadas homogéneas en** $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ a toda aplicación biunívoca entre los puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ y una clase de coordenadas homogéneas. Es decir, existe un criterio que asocia a cada punto $P$ un conjunto de coordenadas homogéneas sin ambigüedad.

**Definición 1.3.** Sea $\mathbb{P}(V)$ el espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial V. Una **referencia proyectiva** son $n+2$ puntos $\{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ tales que $n+1$ puntos cualesquiera entre ellos son proyectivamente independientes.

**Definición 1.4.** Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensiones respectivas $n+1$ y $m+1$ y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Se tiene que existe la siguiente **aplicación proyectiva** o **proyectividad** $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(Nuc(f)) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ bien definida por $[x] \longrightarrow [f(x)]$.

## 1.2. Teorema de Bezout

Sean $C$ y $D$ dos curvas sin componentes comunes de grados $n$ y $m$ respectivamente. Si $E_2 = (0,0,1) \notin C \cap D$ entonces el cono de rectas que proyectan desde $E_2$ los puntos de intersección de $C$ con $D$ viene dado por la ecuación de la resultante:

$$R_{x_2}(x_0, x_1) = 0$$

obtenida eliminando la variable $x_2$ en las ecuaciones de las curvas.
Sobre $\mathbb{C}$, este polinomio es siempre de la forma:

$$R_{x_2}(x_0, x_1) = (\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_0)^{s_1} \ldots (\alpha_r x_1 - \beta_r x_0)^{s_r} \quad \textit{tal que} \quad s_1 + \ldots + s_r = n \cdot m \tag{1.1}$$

Tenemos por otra parte que existen $\gamma_i$ $(i = 1 \ldots r)$ tales que $P_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ son los puntos de intersección en las ecuaciones de las curvas $C$ y $D$. Ahora bien, tales $\gamma_i$ no están determinados necesariamente de modo único por los $(\alpha_i, \beta_i)$.
Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} f(x,y) = y^2 + x^2 - 2x \\ \\ g(x,y) = y^2 - x \end{cases}$$

En coordenadas proyectivas tendríamos:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xz \\ \\ G(x,y,z) = y^2 - xz \end{cases}$$

Las intersecciones con la recta $z = 0$ son respectivamente:

$$x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow (\pm i, 1, 0), \quad 2 \textit{ puntos distintos}$$
$$y^2 = 0 \Longleftrightarrow (1,0,0), \quad 1 \textit{ punto con multiplicidad } 2$$

Por tanto, el punto de coordenadas $(0,1,0)$ que es el punto del infinito de la recta de ecuación $x = 0$ no pertenece a la intersección de ambas curvas, lo cual significa que los 4 puntos de intersección del círculo y la parábola están en el plano afín de coordenadas $(x, y, 1)$.

Proyectando desde $E_1 = (0,1,0)$ sobre la recta $y = 0$, se tiene que las x-coordenadas de los puntos de proyección se corresponden con las raíces de la resultante $R_y(x)$ eliminando la variable $y$.

De manera explícita:

$$R(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2-2x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2-2x \\ 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^2(x-1)^2$$

Los puntos de intersección de las curva, que son $\{(0,0),(1,1),(1,-1)\}$, se proyectan en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ sobre la recta $y=0$. Estos puntos corresponden a los valores $x^2 = 0$ y $(x-1)^2 = 0$.
Vemos que las multiplicidades de las raíces no reflejan la situación geométrica de los puntos con respecto a las curvas. Es decir, en ambos casos la multiplicidad es 2, sin embargo en el caso $x^2 = 0$, el punto $(0,0)$ es de tangencia para las curvas y la recta proyectante $\overline{E_1(0,0)}$ es tangente a ambas curvas. Mientras que en el caso de $(x-1)^2 = 0$ la interpretación es diferente: sobre el punto $(1,0)$ se proyectan 2 puntos diferentes $(1,\pm 1)$ de la intersección. Más aún, vemos que las raíces de $R_y(x)$ no permiten deducir el nº de intersecciones propias.
La situación es muy diferente si lo que hacemos es proyectar sobre la recta $x = 0$ desde $E_0 = (1,0,0)$ que es el punto del infinito de la recta $y=0$. En este caso los puntos de intersección de las curvas se proyectan en los 3 puntos de coordenadas $(0,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,-1,0)$. La Resultante es:

$$R_x(y) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & y^2 \\ -1 & y^2 & 0 \\ 0 & -1 & y^2 \end{vmatrix} = y^2(y-1)(y+1)$$

Ahora $y^2 = 0$ proporciona el punto de intersección $(0,0)$ con multiplicidad 2 y esta multiplicidad sí se interpreta como que ambas curvas tienen en ese punto la tangente común $x = 0$. Por otra parte, los valores $y = 1$ e $y = -1$ dan los puntos $(1,1)$ y $(1,-1)$ y la multiplicidad 1 se interpreta como la transversalidad de las curvas en dicho punto.
Estas interpretaciones geométricas vendrán justificadas mediante la llamada desigualdad fundamental relacionando la multiplicidad de intersección que definiremos en breve con las multiplicidades de un punto dentro de una curva. Por el momento observemos cual es la diferencia entre el primer caso y el segundo.
Proyectando desde $E_1$, tenemos 2 rectas proyectantes que unen $E_1$ con los puntos de intersección: la recta que une $E_1$ con $(0,0)$ la cual es tangente a ambas curvas en el punto $(0,0)$; y la

recta que une $E_1$ con $(1,1)$ la cual contiene una intersección más de ambas curvas.
En contraposición, proyectando desde $E_0$, tenemos tantas rectas proyectantes como puntos de intersección propia para ambas curvas. En este caso, si $P$ es un punto de intersección, la recta $\overline{E_0P}$ ni es tangente a alguna de las curvas en $P$ ni contiene otros puntos de intersección diferentes de $P$.

Destacamos esta segunda situación diciendo que $E_0$ está en buena posición con respecto a ambas curvas. De manera explícita:

**Definición 1.2.1.** Sean $C$ y $D$ dos curvas planas. Diremos que están en **buena posición** con respecto al sistema de coordenadas $(x_0, x_1, x_2)$ o que éste es un **sistema de coordenadas admisible** para $C$ y $D$ precisamente si:

1. $E_2 \notin C$ y $E_2 \notin D$
2. Para cada $P \in C \cap D$, la recta proyectante $\overline{E_2P}$ no contiene otros puntos de $C \cap D$ diferentes de $P$ y no es tangente a alguna de las curvas $C$ o $D$ en $P$.

Supongamos que $\{P_1 \dots P_r\}$ son los puntos en $C \cap D$, denotemos por $\overline{P_iP_j} = L_{ij}$ la recta que une $P_i$ con $P_j$. Cuando $i \leq j$ incluimos las rectas tangentes principales a $C$ y a $D$ por el punto $P_i$; es decir, las rectas en los conos tangentes. Todas las rectas son en nº finito. Por tanto, si consideramos el cerrado $C + D + \sum L_{ij}$, éste tiene una ecuación $H(x_0, x_1, x_2) = 0$ y un punto $P \notin Z(H)$ es un punto en posición admisible con respecto a $C$ y a $D$.
Más aún, consideramos el espacio afín $\mathbb{A}^9 = M(3, \mathbb{C})$ de matrices $3 \times 3$ con coeficientes complejos y sean $y_{ij}$ las entradas de la matriz. Se tiene que $\{y_{ij}\}$ es un sistema de coordenadas y las matrices que definen una proyectividad constituyen el abierto complementario a la hipersuperficie: $D(a_{ij}) = det(a_{ij}) = 0$. Una tal matriz define un cambio del sistema de coordenadas $(x_0, x_1, x_2)$ a un sistema de coordenadas $(x'_0, x'_1, x'_2)$ mediante las ecuaciones $X = AX'$, $A = (a_{ij})$. El punto de coordenadas $E_2 = (0,0,1)$ en el sistema $X'$ proviene de un punto de coordenadas $AE_2 = (a_{02}, a_{12}, a_{22})$ en el sistema X. Este punto está en posición admisible con respecto a $C$ y $D$ precisamente si $H(a_{02}, a_{12}, a_{22}) \neq 0$. Es decir, las matrices definiendo sistemas de coordenadas admisibles y aplicando un punto $P \notin C + D + \sum L_{ij}$ en el punto de coordenadas $E_2 = (0,0,1)$, son los puntos en $\mathbb{A}^9$ definidos por el abierto $U = \{A \in Gl(3, \mathbb{C}) \,/\, H(a_{02}, a_{12}, a_{22}) \neq 0\} = \left\{(a_{ij}) \in \mathbb{A}^9 \,/\, D(a_{ij}) \cdot H(a_{02}, a_{12}, a_{22}) \neq 0\right\}$. Por tanto, dada la hipersuperficie $P(y_{ij}) = D(y_{ij}) \cdot H(y_{02}, y_{12}, y_{22})$, los sistemas de coordenadas admisibles están definidos por las matrices $A$ en el abierto no vacío $U := \mathbb{A}^9 \setminus (P(y_{ij}) = 0)$ con $\mathbb{A}^9 = M(3, \mathbb{C})$.

Por tanto, vemos que siempre existe una proyectividad que coloca dos curvas dadas $C$ y $D$ con respecto al punto $E_2$ en buena posición y las proyectividades que conservan la buena posición forman un abierto no vacío. Así pues, la proyectividad genérica conserva la buena posición de 2 curvas.

En este caso se tiene la siguiente ventaja:

**Propiedad:** Si $C$ y $D$ están en buena posición con respecto a $E_2 = (0,0,1)$, existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de intersección de $C$ con $D$ con raíces $(\alpha_i, \beta_i)$ del polinomio $R_{x_2}(x_0, x_1) = 0$. Es decir, para cada $(\alpha_i, \beta_i)$, existe un único $\gamma_i \in \mathbb{C}$ tal que $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ es un punto en $C \cap D$.

En esta situación introducimos la siguiente definición.

**Definición 1.2.2.** Sean $C$ y $D$ dos curvas sin componentes comunes en buena posición. Si $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ es un punto en $C \cap D$, se define la **multiplicidad** o **índice de intersección de las curvas $C$ y $D$ en $P$** como el mayor natural $s(P)$ tal que $(\alpha x_1 - \beta x_0)^{s(P)}$ divide a $R_{x_2}(x_0, x_1)$. Denotamos este número como:

$$s(P) := i(C, D, P) = (C, D)_P$$

Nótese que con esta definición, la relación 1.1 establece de manera inmediata el siguiente teorema.

**Teorema de Bezout.** Sean $C$ y $D$ dos curvas proyectivas sin componentes comunes de grados respectivos $n$ y $m$. Sean $\{P_1 \dots P_r\}$ los puntos en la intersección $C \cap D$ y $s(P_i) = i(C, D, P_i)$. Se verifica:

$$\sum_{i=1}^{r} s(P_i) = \sum_{j=1}^{r} i(C, D, P_j) = n \cdot m$$

**Observación:** Debemos de probar que la definición de multiplicidad de intersección dada anteriormente es independiente del sistema de coordenadas elegido. Ya hemos visto que la proyectividad genérica aplica un sistema de coordenadas admisible en otro de igual naturaleza. En tal situación debemos probar que los números $s(P_i)$ en un sistema y otro son los mismos.

**Teorema 1.2.3.** La multiplicidad de intersección definida anteriormente es un invariante proyectivo. Es decir, si $C$ y $D$ son dos curvas en buena posición con respecto a $E_2 = (0,0,1)$ y $T$ es una proyectividad genérica, entonces $TC$ y $TD$ están en buena posición y para cada $P \in C \cap D$ se tiene:

$$(C, D)_P = (TC, TD)_{TP}$$

**Demostración:** Sea $(x_0, x_1, x_2)$ un sistema de coordenadas de manera que $C$ y $D$ están en buena posición con respecto a $E_2 = (0,0,1)$. Veamos cuáles son las proyectividades que llevan

este sistema de coordenadas en otro de igual naturaleza.
Si $(x'_0, x'_1, x'_2)$ es otro sistema de coordenadas admisible, estará definido por una transformación lineal ( $x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x'_j$ ). Un tal sistema es uno en donde el punto $E_2 = (0,0,1)$ vuelve a estar en buena posición. Las coordenadas de este punto en el sistema inicial son $(a_{02}, a_{12}, a_{22})$.

Supongamos que $H(x_0, x_1, x_2) = 0$ es la ecuación de $C + D + \sum L_{ij}$. El conjunto de matrices $A = (a_{ij})$ que proporcionan el sistema de coordenadas admisible es

$$U =: \{A \in Gl(3, \mathbb{C}) \;/\; H(a_{02}, a_{12}, a_{22}) \neq 0\} = \mathbb{A}^9 \smallsetminus \{P(x_{ij}) = 0\}$$

Dentro de el espacio afín $\mathbb{A}^9 = M(3, \mathbb{C})$ podemos escribir este conjunto como el complementario de la hipersuperficie $P(y_{ij}) = D(y_{ij}) \cdot H(y_{02}, y_{12}, y_{22}) = 0$.

Vamos a aplicar que como espacio topológico, $U$ es conexo por caminos. Sean $A$ y $B$ dos puntos en $U$ y sea $L$ la recta del espacio afín $\mathbb{A}^9$ uniendo $A$ con $B$. Como $A, B \notin Z(P(y_{ij}))$, la recta no está contenida en la hipersuperficie $Z(P(y_{ij})) = 0$ y de hecho, los puntos comunes son un cerrado propio, es decir, un conjunto finito de puntos. Claramente $L' = L \smallsetminus (L \cap Z(P)) \subset U$ es un camino que contiene a $B$ y a $A$.

Vemos ahora que la multiplicidad de intersección no depende del sistema de coordenadas. Sea $s_P(C, D)$ la multiplicidad en el sistema $(x_0, x_1, x_2)$ y $s'_P(TC, TD)$ la multiplicidad en el sistema $(x'_0, x'_1, x'_2)$. Vamos a probar que son iguales.
Si $X = AX'$, en donde $A$ define el paso de x-coordenadas a x'-coordenadas, consideramos en $U$ una curva continua que une ambos sistemas, es decir:

$$\{0 \leq t \leq 1\} \longrightarrow A_t \in U \quad \textit{tal que } A_0 = I \textit{ y } A_1 = A \tag{1.2}$$

y para cada $t$, $A_t$ define un sistema $X_t$ mediante $X = A_t X_t$.

Para cada $t$, las curvas $C = Z(F)$, $D = Z(G)$ se transforman en curvas $C_t = Z(F_t(x_t))$, $D_t = Z(G_t(x_t))$ y podemos considerar la Resultante $R_{F_t, G_t}(x_{t_0}, x_{t_1})$.
Por construcción $R_t(x_0, x_1) := R_{F_t, G_t}(x_0, x_1)$ es una familia t-paramétrica continua de polinomios homogéneos de grado $n \cdot m$. Es decir, se tiene que 1.2 induce una curva continua.

$$\begin{array}{rcl} & \{0 \leq t \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1]_{n \cdot m}) & \\ t & \rightsquigarrow \quad R_t(x_0, x_1) = R_{F_t, G_t}(x_0, x_1) & \end{array}$$

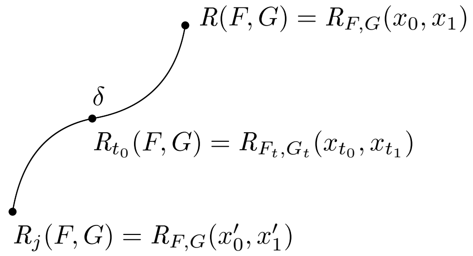
Como cada $x_t$ es admisible, el nº de raíces distintas de $R_t$ sin contar multiplicidades coincide con el nº de intersecciones en el conjunto $C_t \cap D_t$ que es constante.
Ahora bien, como la multiplicidad de cada raíz es un polinomio homogéneo de 2 variables se

reduce a la de una raíz para un polinomio en una variable, la multiplicidad de cada raíz $(\alpha_i, \beta_i)_t$ es una función continua de $t$ y en consecuencia es constante por el siguiente resultado de raíces de polinomios en una variable.

**Lema 1.2.4.** Sea $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado $d$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de dicho polinomio con multiplicidad $s$.
Supongamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que las restantes raíces de $f(x) = 0$ se encuentran a distancia $> \varepsilon$. Entonces existe un $\delta > 0$ para $\varepsilon$ tal que cada polinomio cuyos coeficientes difieren de los de $f$ en menos de $\delta$ tiene exactamente $s$ raíces en el círculo de centro $\alpha$ y radio $\varepsilon$ contando con multiplicidad.

**Demostración:** El lema está garantizando lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \stackrel{R}{\longrightarrow} & \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1]_{m \cdot n} \\ t & \rightsquigarrow & R_t(F, G) \end{array}$$




Fijado $t_0$, el lema dice que en un entorno $(R_{t_0}, \delta_i)$, cada $R_t \in (R_{t_0}, \delta_i)$ verifica que la multiplicidad de la raíz $(\alpha_i, \beta_i)_t$ se mantiene constante. Tomando $\delta = min\ \{\delta_i\ , \ i \in (1 \ldots r)\ \}$. Se concluye que $s(P_i)$ se mantiene constante para cada raíz $P_i = (\alpha_i, \beta_i)$.

Una de las propiedades fundamentales de esta exposición y que curiosamente permite un cálculo explícito de la multiplicidad de intersección sin tener que utilizar el cálculo explícito de resultantes es la llamada Desigualdad Fundamental: relaciona $(C, D)_P$ con datos locales de $C$ y $D$ en $P$.

**Teorema de la Desigualdad Fundamental.** Sean $C$ y $D$ dos curvas de grados $n$ y $m$ y sea $P \in C \cap D$. Se verifica:

1. $(C, D)_P \geq m_P(C) \cdot m_P(D)$

2. La desigualdad es estricta precisamente si $C$ y $D$ poseen una recta tangente común en $P$.

**Demostración:** Una prueba de este resultado puede verse en el libro de Fulton [F69].

**Definición 1.2.5.** Sean $C$ y $D$ dos curvas sin componentes comunes, se define el **nº de intersección global de las curvas** como:

$$(C, D) := \sum_{P \in C \cap D} i(C, D, P) = \sum_{P \in C \cap D} (C, D)_P$$

**Corolario 1.2.6.** Si $C$ y $D$ son curvas sin componentes comunes de grados $n$ y $m$ se verifica:

$$n \cdot m = (C, D) = \sum_{P \in C \cap D} (C, D)_P \geq \sum_{P \in C \cap D} m_P(C) \cdot m_P(D)$$

donde la primera igualdad vienen dada por el Teorema de Bezout y el $\geq$ viene dado por el Teorema de la Desigualdad Fundamental.

# Capítulo 2

# Puntos lisos y singulares de una curva

## 2.1. Caso afín

Momentáneamente comenzamos trabajando en el caso afín:

**Definición 2.1.1.** Supongamos $f(x, y) = 0$ la ecuación de una curva plana y sea $P = (\alpha, \beta)$ un punto de la curva $C$ $(f(x, y) = 0)$. El punto $P \in C$ se dice **singular** cuando verifica:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0 \tag{2.1}$$

En caso contrario, se dice que $P$ es **liso**. Por otra parte, si se cumple 2.1 y si alguna de las derivadas parciales de segundo orden es no nula en $P$, entonces se dice que $P$ es un **punto doble**. En este caso, la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)(x-\alpha)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)(x-\alpha)(y-\beta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)(y-\beta)^2 = 0$$

se descompone sobre $\mathbb{C}$ en dos factores lineales que representan dos rectas que llamaremos **rectas tangentes principales a la curva $C$ en $P$**. Una recta tangente principal a $C$ en $P$ es una recta límite de rectas secantes a $C$ pasando por $P$.
Si por el contrario, el punto $P$ satisface 2.1 y además

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = 0,$$

pero alguna derivada parcial del tercer orden es no nula en $P$, diremos que $P \in C$ es un **punto triple**.

En general se tiene la siguiente definición:

**Definición 2.1.2.** Un punto $P \in C$ es un **punto singular de orden** $r$ precisamente si todas las derivadas parciales hasta el orden $r-1$ se anulan en $P$ y existe alguna derivada parcial de orden $r$ no nula en $P$. En tal caso, la ecuación:

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-i}\, \partial y^i}(P)(x-\alpha)^{r-i}(y-\beta)^i = 0 \tag{2.2}$$

representa $r$ rectas distintas o confundidas pasando por $P$ que se dicen **las rectas tangentes principales a** $C$ **en** $P$.

La justificación de la definición anterior, y, en particular, el término de recta tangente principal a $P$ viene dada por el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.3.** $P$ es un punto singular de orden $r$ para $C$ precisamente si cada recta pasando por $P$ tiene al menos $r$ intersecciones o puntos sobre $P$. Las rectas tangentes a $C$ en $P$ son las definidas por 2.2 y están caracterizadas por tener en $P$ más de $r$ puntos de intersección.

**Demostración:** Sea $P = (\alpha, \beta)$ y escribamos el desarrollo de Taylor del polinomio $f(x,y)$ en $(\alpha, \beta)$, se tiene:

$$f(x,y) = f(\alpha,\beta) + f_1(x,y) + f_2(x,y) + \ldots + f_n(x,y)$$

en donde

$$f_h(x,y) = \frac{1}{h\,!} \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} \frac{\partial^h f}{\partial x^{h-i}\, \partial y^i}(P)(x-\alpha)^{h-i}(y-\beta)^i$$

Entonces $P$ es singular de orden $r$ precisamente si:

$$f(\alpha,\beta) = 0\,; \quad f_1 \equiv 0\,; \quad \ldots \quad f_{r-1} \equiv 0 \quad y \quad f_r \not\equiv 0$$

con lo cual:

$$f(x,y) = f_r(x,y) + f_{r+1}(x,y) + \ldots + f_n(x,y)$$

Consideremos ahora las rectas pasando por $P = (\alpha, \beta)$, es decir:

$$y - \beta = t(x-\alpha)$$

Nótese que para el calor de la pendiente $t = \infty$, la recta tiene ecuación $x - \alpha = 0$.

Las intersecciones de la curva con la recta vienen dadas por el sistema:

$$f(x,y) = 0 \quad ; \quad y - \beta = t(x-\alpha)$$

con el cual conseguimos:

$$\frac{1}{r\,!}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(\frac{\partial^r f}{\partial^{r-i}x\,\partial^i y})(P)(t(x-\alpha))^{r-i}(x-\alpha)^i+\ldots=0$$

Es decir:

$$(x-\alpha)^r\left[\frac{1}{r\,!}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-i}\,\partial y^i}(P)t^{r-i}\right]+\ldots+(x-\alpha)^n\left[\frac{1}{n\,!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\,\partial y^i}(P)t^{n-i}\right]=0$$

Con lo cual vemos que cualquiera que sea el valor de la pendiente $t$, la raíz $x=\alpha$ es una raíz r-múltiple, lo cual dice que el punto $P=(\alpha,\beta)$ cuenta r veces en la intersección de la curva con la recta.

Ahora bien, si llamamos $t_1,\ldots,t_r$ a las $r$ raíces de la ecuación

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-i}\,\partial x^i}(P)t^{r-i}=0$$

se tiene entonces que las rectas $y-\beta=t_i(x-\alpha)$ con $i=1\ldots r$ poseen en $P$ más de $r$ intersecciones.

Recíprocamente, si cada recta $y-\beta=t(x-\alpha)$ tiene al menos $r$ intersecciones con $C$ en $P$ es porque en el desarrollo de Taylor es posible sacar $(x-\alpha)^r$ factor común y no menos potencia. Necesariamente, para todo $h<r$ es $f_h(x,y)=0$. En consecuencia:

$$\frac{\partial^h f}{\partial x^{h-i}\,\partial y^i}(P)=0 \quad \textit{para todo } h<r \textit{ y todo } i\le h$$

Así pues $P=(\alpha,\beta)$ es un punto r-singular precisamente si entre las rectas pasando por $P$, la genérica (todas salvo un número finito) corta a $C$ en $P$ en $r$ puntos confundidos y fuera de $P$ en otros $n-r$ puntos.

Cuando $P=(0,0)$, el desarrollo de Taylor coincide con la descomposición del polinomio en partes homogéneas, es decir:

$$f(x,y)=f_1(x,y)+f_2(x,y)+\ldots+f_n(x,y)$$

y se ve directamente que $P$ es simple o no singular precisamente si $f_1(x,y)\not\equiv 0$.

Por otra parte, $P=(0,0)$ es r-singular si se cumple lo siguiente:

$$f_1\equiv 0\,,\ f_2\equiv 0\,,\ \ldots\,,\ f_{r-1}\equiv 0 \quad \textit{pero}\ f_r\equiv 0$$

en tal caso, la ecuación $f_r(x,y)=0$ se dice la ecuación del cono tangente a la curva en $P$, es decir, las $r$ rectas tangentes distintas o confundidas a la curva $C$ en $P$.

Así, por ejemplo, tenemos que existen dos tipos de puntos dobles: los **nodos**, en donde las dos rectas tangentes son distintas; y las **cúspides**, en donde las dos rectas tangentes son confundidas. Por ejemplo, veamos qué es el $(0,0)$ para cada una de las siguientes 3 cúbicas planas:

1. $y^2 - x^2 - x^3 = 0$: $(0,0)$ es un nodo con 2 rectas tangentes reales
2. $y^2 + x^2 - x^3 = 0$ : $(0,0)$ es un nodo con 2 rectas tangentes complejas cortándose en el $(0,0)$ (punto real)
3. $y^2 - x^3 = 0$: $(0,0)$ es una cúspide con recta tangente doble

En el análisis de las curvas planas de grado 3, aparecen puntos no singulares de interés, en ellos la tangente atraviesa a la curva de manera que distingue el paso de cóncava a convexa, tales puntos se dicen de inflexión.

**Definición 2.1.3.** Un punto no singular $P$ de una curva $C$ se dice de **inflexión** cuando la recta tangente $T_P(C)$ corta a $C$ en $P$ en, al menos, tres puntos confundidos.

## 2.2. Caso proyectivo

Vamos ahora a caracterizar tales puntos en el caso de considerar el plano proyectivo, y, a partir de ahora, consideraremos la ecuación homogénea de la curva.
Sea $C$ una curva proyectiva de ecuación homogénea de grado $n \geq 3$ dada por el polinomio:

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

Sea $P = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in C$ un punto y sea $Q = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \neq P$ otro punto arbitrario del plano proyectivo. Consideramos la recta $\overline{PQ}$ dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_0 + t\beta_0 \\ x_1 = \alpha_1 + t\beta_1 \\ x_2 = \alpha_2 + t\beta_2 \end{cases}$$

Las intersecciones de la recta con la curva vienen dadas por:

$$F(\alpha_0 + t\beta_0,\, \alpha_1 + t\beta_1,\, \alpha_2 + t\beta_2) = F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) + \left( \sum_{i=0}^{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) (P)\beta_i \right) t + \\ + \frac{1}{2!} \left( \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (P)\beta_i\beta_j \right) t^2 + ... = 0 \tag{2.3}$$

Impongamos condiciones para que la recta $\overline{PQ}$ corte a $C$ en $P$ con multiplicidad $\geq 3$. Esto sucede cuando $t = 0$ es una raíz con multiplicidad $\geq 3$ en la ecuación anterior 2.3.
Equivalentemente, cuando se cumple que:

$$F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \qquad \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)\beta_i = 0, \qquad \sum \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P) \right) \beta_i \beta_j = 0$$

En todo caso, $P \in C$ por lo que distingamos entre que $P$ sea singular o liso.

### 2.2.1. P es liso

Si $P$ es liso, tenemos que:

$$alguna \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) \neq 0$$

y

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) x_i = 0$$

es la ecuación de la tangente a $C$ en $P$.
Vemos que $Q = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ arbitrario sobre $\overline{PQ}$ yace en la recta tangente, pero también yace en la cónica de ecuación $\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)\, x_i x_j = 0$. Así pues, esta cónica contiene todos los puntos de la recta tangente y por tanto es degenerada. Esto sucede precisamente si

$$det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P) \right) = 0$$

y $P$ es un punto que yace en la curva de ecuación:

$$H(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = 0$$

Esta curva está definida por un polinomio homogéneo de grado $3(n-1)$ y se dice la **Hessiana con respecto a la curva** $C$.

### 2.2.2. P es singular

Si $P$ es un punto singular se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0 \quad con \ i = 0, 1, 2$$

y no existe tangente única.
Puede suceder que sea un punto doble, en cuyo caso, alguna $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P) \neq 0$ y se tiene que la recta $\overline{PQ}$ corta con multiplicidad $\geq 3$ precisamente si forma parte de la cónica degenerada. El punto $P$ puede ser un nodo o una cúspide por lo que también sería una solución de la curva Hessiana.
Se tiene también que, claramente si $P$ es r-singular con $r \geq 3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P) = 0$ para todo $(i,j)$, y por tanto $P$ sería un punto de la Hessiana.

Recíprocamente:

- Sea $P$ **r-singular**, si $r \geq 3$, $P$ es solución de la curva Hessiana.
- Si $P$ es **doble**, también será solución de la Hessiana porque si $x_0(P) \neq 0$ la cónica se reduciría a un polinomio homogéneo de grado 2: $\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)\, x\, y = 0$ que se descompone en 2 factores lineales, luego la cónica es degenerada.
- Finalmente, si $P$ es **simple**, la recta tangente a $C$ en $P$ viene dada por $\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) x_i = 0$.
  Supongamos que $P$ es solución de la Hessiana.
  Equivalentemente la cónica $K : \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)\, x_i\, x_j = 0$ es degenerada.

Precisamos ahora del Teorema de Euler:

**Teorema de Euler.** Sea $F(x_0, x_1, x_2)$ homogéneo de grado n, entonces se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \cdot x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot x_2 = nF(x_0, x_1, x_2)$$

Más aún, para todo $s$:

$$\sum x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s} \frac{\partial^s F}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} = n(n-1)\ldots(n-s+1)F$$

**Demostración:** La primera relación es cierta para un monomio $x_0^{i_0} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2}$ con $i_0 + i_1 + i_2 = n$. Como $\frac{\partial}{\partial x_i}$ es aditivo, lo es para un polinomio homogéneo. La segunda relación es cierta aplicando reiteradamente la primera.

Volvamos a nuestro argumento. Consideremos sobre $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ la fórmula de Euler aplicada 2 veces:

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = n(n-1) = F(x_0, x_1, x_2)$$

Como $P = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ está en la curva, encontramos que

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P) \alpha_i \alpha_j = n(n-1)F(x_0, x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow P \in K$$

Por otra parte, la recta tangente a la cónica $K$ en $P$ es la polar de $K$ respecto de $P$; es decir:

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)\alpha_j x_i = 0$$

Ahora bien, dado el polinomio de grado $n-1$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, la fórmula de Euler establece:

$$\sum_{j=0}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} x_j = (n-1)\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

En particular:

$$\sum_{j=0}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)\alpha_j = (n-1)\frac{\partial F}{\partial x_i}(P)$$

Tenemos:

$$\left(\sum_{j=0}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_j}(P)\alpha_j\right) x_0 + \left(\sum_{j=0}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_j}(P)\alpha_j\right) x_1 + \left(\sum_{j=0}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(P)\alpha_j\right) x_2 = 0$$

En donde el primer paréntesis se corresponde con $(n-1)\frac{\partial F}{\partial x_0}(P)$, el segundo con $(n-1)\frac{\partial F}{\partial x_1}(P)$ y el tercero con $(n-1)\frac{\partial F}{\partial x_2}(P)$.
Así pues, la tangente a $K$ en $P$ es la tangente a $C$ en $P$, pero como $K$ es degenerada, contiene a la tangente y así esta recta corta en $P$ con multiplicidad $\geq 3$.

**Conclusión:** Sea $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva de grado $n$, se define la Hessiana como la curva de ecuación:

$$H(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = 0$$

Esta curva, dado que cada parcial de segundo orden es un polinomio de grado $n-2$, tiene grado $3(n-2)$, así que está definida para curvas de grado $\geq 3$.

Los puntos comunes a una curva y su Hessiana son: los puntos singulares y los puntos de inflexión.

**Observación:** Una vez probado el Teorema de Bezout, prueba la cual exige una definición rigurosa de la multiplicidad de intersección de dos curvas en un punto común, tenemos que:

- En un punto de inflexión la multiplicidad de intersección es 1.
- En un nodo la multiplicidad de intersección es 6.

- En una cúspide la multiplicidad de intersección es 8.

Ahora, sea una cúbica irreducible, su Hessiana tiene grado 3 y ambas se cortan en 9 puntos contados con su multiplicidad. Si la cúbica es lisa, por lo anterior, tiene 9 puntos de inflexión distintos. Si hay puntos singulares, no son de orden $\geq 3$ porque uniendo un tal punto con otro de la curva, tal recta corta en $4 > 3$ puntos a la cúbica y ésta es irreducible. Así se tiene que hay singularidades dobles únicamente. Además por el mismo razonamiento solo hay un punto singular doble: si es un nodo, Bezout y lo anterior dicen que la cúbica y la Hessiana se cortan en el nodo con multiplicidad 6 y en 3 puntos de inflexión distintos. Si el punto es una cúspide, entonces la cúbica irreducible tiene un único punto de inflexión.

**Conclusión:** Toda cúbica irreducible del plano, tiene, al menos, un punto de inflexión.
Más aún, toda curva no singular de grado $\geq 3$ tiene puntos de inflexión.

### 2.2.3. Puntos singulares de una curva

Sea $C \in \mathbb{P}^2$ una curva irreducible de grado $n$ con ecuación homogénea $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Hemos definido un punto singular $P = (0, 0, 1) \in C$ como un punto tal que si $f(x, y) := \frac{1}{x_0^{\partial F}} F(x_0, x_1, x_2)$ y $x = \frac{x_1}{x_0}$ ; $y = \frac{x_2}{x_0}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$ ; $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$.

Equivalentemente si consideramos la ecuación homogénea y tenemos en cuenta la fórmula de Euler: $\frac{\partial F}{\partial x_0} \cdot x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot x_2 = (\partial F) \cdot F$ vemos que si dos parciales se anulan en $P$ y $P \in C$, equivalentemente la tercera parcial también se anula. De hecho, la recta tangente en P tiene ecuación:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P) \cdot x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P) \cdot x_2 = 0$$

Tal recta existe precisamente si alguna $\frac{\partial F}{\partial x_i}(P)$ es no nula. Los puntos singulares son las soluciones comunes de las ecuaciones: $\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0$ ; $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ ; $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ o bien de dos de ellas y la ecuación de la curva $F = 0$.

**Proposición 2.2.3.1.** Dada una curva irreducible $C$, el conjunto de puntos singulares es un cerrado propio de la curva $C$. Por tanto es un subconjunto finito de puntos.

**Demostración:** Supongamos que el cerrado definido por $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$, $i = 0 \ldots 2$ es no vacío y no es propio. Entonces $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ se anula en todos los puntos de la curva $F$ y por el lema de Study $F$ divide a $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ ; pero este polinomio tiene grado igual a $\partial F - 1$ luego ello no puede suceder. Así que los puntos singulares forman un cerrado propio.

**Corolario 2.2.3.2.** Una vez probado el Teorema de Bezout, la intersección de las curvas $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ es un cerrado propio; luego, un número finito de puntos. Así, en una curva irreducible, los puntos no singulares forman un abierto no vacío, luego denso.

# Capítulo 3

# Clasificación proyectiva de las cúbicas planas

## 3.1. Cúbicas reducibles

En todo lo que sigue se consideran curvas en el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Supongamos que $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ es la ecuación de una cúbica. Investiguemos las condiciones bajo las que tal ecuación es reducible, es decir, se tenga $F = G \cdot H$ en donde el grado de $G$ y $H$ es $< 3$. Entonces uno de ellos es de grado 1; sea $H(x_0, x_1, x_2) = 0$ tal que define una recta. Necesariamente $G = 0$ define una cónica.

### 3.1.1. Cónica irreducible

Si tal cónica es no degenerada (irreducible), la recta y la cónica se cortan en 2 puntos $P_1, P_2$. Las posibilidades son:


(a) $F = 0$ tiene dos puntos dobles

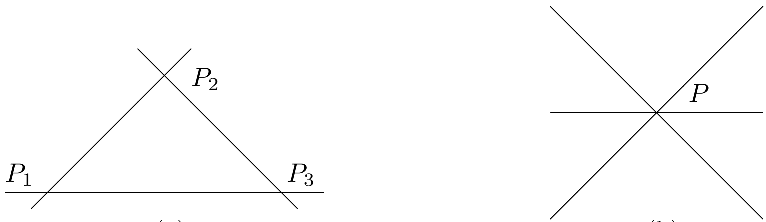
(b) $F = 0$ tiene dos puntos dobles infinitamente próximos

Figura 3.1: Cónicas

Si $P_1 \neq P_2$, la cúbica $F = 0$ tiene 2 puntos dobles.
Cuando $P_1 = P_2$ veremos que la cúbica tiene también dos puntos pero que se encuentran infinitamente próximos. Esto quiere decir que la recta $\overline{P_1P_2}$, es decir, la recta tangente a la cónica en $P_1 = P_2$ tiene 4 intersecciones con la cúbica en $P_1 = P_2$.

### 3.1.2. Cónica reducible

Si la cónica $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ reducible se tiene los casos siguientes:



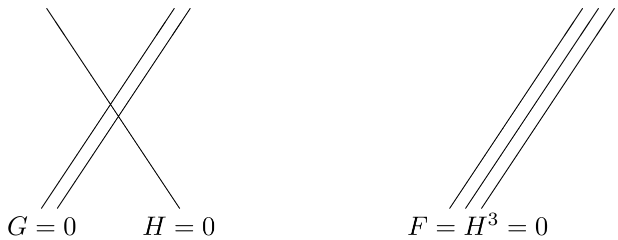

(a) (b)

Figura 3.2: Representación en la que se considera a la cónica G reducible

que corresponden a cuando no existen componentes múltiples. Es decir, la cúbica posee 3 puntos dobles o un punto triple.

### 3.1.3. Cónicas muy degeneradas

Este caso corresponde a cónicas en las cuales una de las rectas es múltiple. Si observamos la ilustración que tenemos a continuación se tiene que en el primer caso se trata de una cónica reducible pero en el segundo no. En ambos casos la cúbica una infinidad de puntos singulares.




(a) (b)

Figura 3.3: Representación en el caso de que existan componentes múltiples

Por tanto, si una cúbica es reducible, posee al menos 2 puntos dobles o un punto simple. Estas condiciones resultan suficientes para la reducibilidad. En efecto, si la cúbica tiene 2 puntos dobles $P_1, P_2$ entonces la recta $\overline{P_1P_2}$ corta a la cúbica en 4 puntos (2 confundidos en $P_1$ y 2 confundidos en $P_2$), por tanto, debe estar contenida en la cúbica y ésta es reducible. Análogamente si existe $P$ punto triple, tomando cualquier otro punto $Q \neq P$, en la cúbica, la recta $\overline{PQ}$ tiene $4 = 3 + 1$ intersecciones con la cúbica y debe estar contenida en la cúbica. Así pues:

**Teorema 3.1. (de reducibilidad de las cúbicas).** Una cúbica $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ es reducible $\Longleftrightarrow$ tiene o un punto triple, o, al menos, dos puntos dobles que eventualmente pueden ser infinitamente próximos.

Podemos traducir esta caracterización en términos del polinomio homogéneo $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Un tal polinomio de grado 3 es reducible precisamente si:

- o bien el sistema $\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ tiene al menos 2 soluciones eventualmente coincidentes
- o bien el sistema $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ con $0 \leq i, j \leq 2$ tiene 1 solución.

## 3.2. Cúbicas irreducibles

Supongamos ahora que $C$ es una cúbica irreducible. Si existe un punto singular $P \in C$, sea $Q \neq P$ otro punto en $C$; la recta $\overline{PQ}$ debe cortar a $C$ en exactamente $n + 1 = 3$ puntos siendo $n \geq 2$ por ser $P$ singular. Necesariamente $n = 2$ y vemos que si hay puntos singulares, sólo puede haber 1 y ser doble. Ocurre de forma clara que si $P \neq Q$ son ambos puntos singulares, la recta $\overline{PQ}$ corta a $C$ en $m$ puntos con $m \geq 2 + 2 = 4$ y obliga a C a ser reducible.

Así pues, una cúbica irreducible: o es no singular, o es singular y posee exactamente un punto singular doble que o es un nodo o una cúspide. Estudiemos ahora su clasificación proyectiva.

### 3.2.1. Cúbica irreducible con una cúspide

Sea $C$ una cúbica irreducible con un punto cuspidal $P_0$ y sea $r_1$ la recta tangente a $P_0$. Sea $P_2 \neq P_0$ otro punto sobre $C$, necesariamente liso y sea $r_2$ la recta tangente a $P_2$. Ejemplificamos esta situación gráficamente:

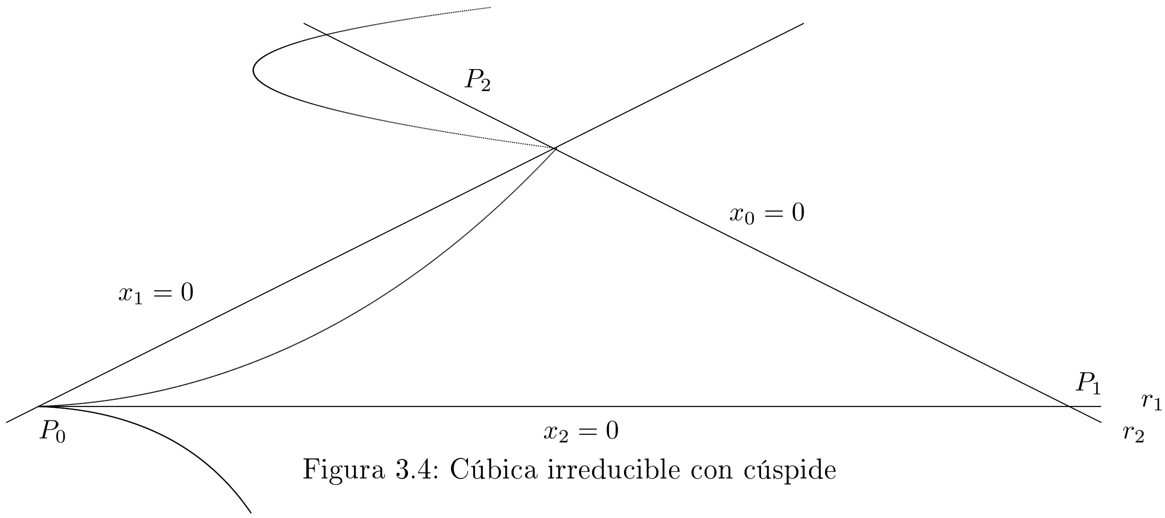



Figura 3.4: Cúbica irreducible con cúspide

Como $r_1$ corta a $C$ en $P_0$ con multiplicidad 3, no contiene más puntos en común con $C$. Como $r_2 = T_{P_2}(C)$ y $C$ es irreducible, $r_2 \neq \overline{P_0P_2}$, por tanto, $P_1 = r_1 \cap r_2 \notin C$ satisface $\{P_0, P_1, P_2\}$ son no alineados. Existe una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tal que $\varphi(P_i) = (0 : 1_i : 0)$.
De este modo, las ecuaciones de las rectas $r_1$ y $r_2$ son:

$$r_1 : x_2 = 0 \qquad ; \qquad r_2 : x_0 = 0$$

Como $C$ es irreducible $x_0$ no divide a la ecuación de $C$, sea $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ homogéneo de grado 3. Podemos escribir:

$$F(x_0, x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2)\, x_0^3 + f_1(x_1, x_2)\, x_0^2 + f_2(x_1, x_2)\, x_0 + f_3(x_1, x_2) = 0 \tag{3.1}$$

en donde cada $f_i(x_1, x_2)$ es homogéneo de grado $i$. Nótese que ciertamente $x_0$ aparece en la ecuación de $C$, de lo contrario, cada $f_i$ sería homogéneo de grado 3 y $F(x_0, x_1, x_2) = F(x_1, x_2)$ es homogéneo de grado 3 en 2 variables y se descompone en 3 rectas. Pero $C$ es irreducible.

Tomando coordenadas no homogéneas $x = \frac{x_1}{x_2}$ y $y = \frac{x_2}{x_0}$, la ecuación 3.1 resulta:

$$f_0(x, y) + f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) = 0 \quad \textit{con } f_i \textit{ homogéneo grado } i$$

Puesto que $P_0 = (1, 0, 0)$ es doble, $f_0 \equiv 0$ ; $f_1 \equiv 0$ y $f_2(x, y) = 0$ proporciona las tangentes por $P_0$. Como $P_0$ es cuspidal con tangentes $x_2^2 = 0$, encontramos que $f_2(x, y) = y^2$ y la ecuación 3.1 es de la forma:

$$x_2^2 x_0 + f_3(x_1, x_2) = 0 \quad \textit{con } f_3 \not\equiv 0 \textit{ ya que } C \textit{ es irreducible} \tag{3.2}$$

Sabemos que $P_2 = (0, 0, 1)$ es un punto en $C$ con tangente $x_0 = 0$, es decir, en 3.2 vemos que $f_3(0, 1) = 0$, con lo cual $x_1$ divide a $f_3(x_1, x_2)$. Así pues, existe $g_2(x_1, x_2)$ homogéneo de grado 2 tal que $f_3(x_1, x_2) = x_1 \cdot g_2(x_1, x_2)$.
Más aún, como $x_0 = 0$ es tangente a $C$ en $P_2$, las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x_2^2 x_0 + x_1 g_2(x_1, x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

proporcionan el punto $P_2 = (0, 0, 1)$ con solución doble. Así pues, necesariamente $g_2(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2)$ y la ecuación es de la forma:

$$x_2^2 x_0 + x_1^2 g_1(x_1, x_2) = x_2^2 x_0 + x_1^2(a x_1 + b x_2) = 0$$

Se tiene que $a \neq 0$, de lo contrario, $x_2$ dividiría a la ecuación y $C$ sería reducible.
Veamos ahora qué ocurriría si se da $b = 0$. La ecuación de $C$ sería de la forma:

$$x_2^2 x_0 + x_1^3 = 0 \tag{3.3}$$

Nótese que en este caso las intersecciones de la tangente a $P_2$ con la curva vienen dadas por $x_0 = 0$ ; $x_1^3 = 0$; luego: $P_2$ tiene multiplicidad 3 y así $P_2$ es un punto de inflexión.

Ahora bien, ya hemos razonado que los puntos de inflexión están en la curva $F = 0$ y su Hessiana $H(F) = 0$. Por Bezout hay a lo sumo un número finito. En todo caso, es posible elegir $P_2$ no singular y no punto de inflexión, en cuyo caso $b \neq 0$.
Mediante la proyectividad:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la cúbica es de la forma:

$$x_2^2 x_0 + x_1^2(x_1 + x_2) = 0$$

**Conclusión**: Todas las cúbicas irreducibles con un punto cuspidal son proyectivamente equivalentes.

Más aún, como la ecuación $y^2 = x^3$ es una tal cúbica con un punto cuspidal, se tiene que todas las cúbicas de este tipo son equivalentes a la de ecuación $y^2 = x^3$. Esta ecuación se dice la **forma canónica de las cúbicas irreducibles con un punto cuspidal**.

Nótese que la ecuación proyectiva de esta forma canónica es precisamente la ecuación 3.3 que era:

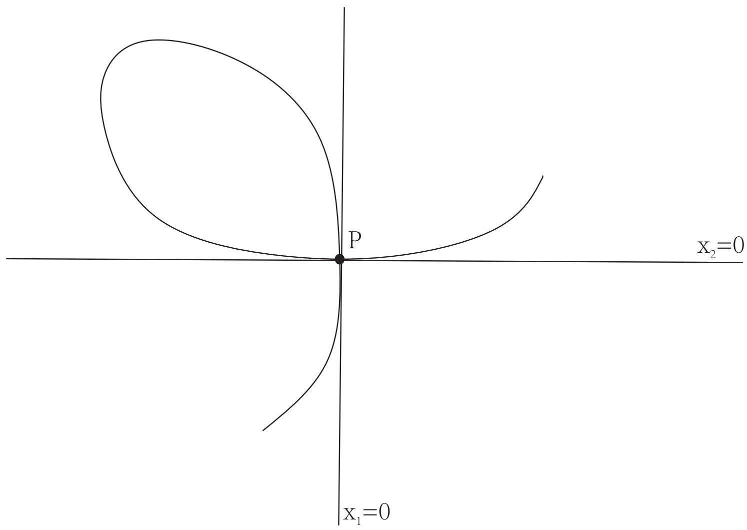
$$x_2^2 x_0 + x_1^3 = 0$$

Por un cálculo directo comprobamos que esta cúbica tiene en $(0,0,1)$ su único punto de inflexión. Así pues:

**Conclusión**: Toda cúbica irreducible con un punto cuspidal posee un único punto de inflexión.

### 3.2.2. Cúbica irreducible con un nodo

Suponemos ahora que $P \in C$ es el nodo y que $r_1$ y $r_2$ son las dos tangentes pasando por $P$ que cortan a $C$ en $P$ con multiplicidad 3. Podemos considerar una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ que transforme $P$ en el punto $(1,0,0)$, $r_1$ en la recta de ecuación $x_1 = 0$ y $r_2$ en la recta de ecuación $x_2 = 0$.




La ecuación de $C$ es ahora de la forma:

$$x_0 x_1 x_2 + f_3(x_1, x_2) = 0$$

que se puede explicitar en la forma:

$$x_0 x_1 x_2 + a x_1^3 + b x_1^2 x_2 + c x_1 x_2^2 + d x_2^3 = 0 \tag{3.4}$$

Agrupando términos podemos escribir:

$$x_1 x_2 (x_0 + b x_1 + c x_2) + a x_1^3 + d x_2^3 = 0$$

Considerems la siguiente proyectividad:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La curva 3.4 se transforma en la curva

$$x_0x_1x_2 + ax_1^3 + dx_2^3 = 0$$

Necesariamente $a \neq 0 \neq d$, de lo contrario C sería reducible. Si consideramos ahora otra proyectividad:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{ad}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

En este caso, la curva se transforma en:

$$x_0x_1x_2 + x_1^3 + x_2^3 = 0$$

**Conclusión**: todas las cúbicas irreducibles con un nodo ordinario son proyectivamente equivalentes. Se puede elegir, por ejemplo:

$$y^2 = x(x-1)^2 \tag{3.5}$$

como forma canónica de una cúbica irreducible con un nodo. La ecuación proyectiva correspondiente es:

$$x_0x_2^2 = x_1(x_1 - x_0)^2$$

Un cálculo directo muestra que esta cúbica irreducible tiene 3 puntos de inflexión: 2 a distancia finita y el tercero $(0, 0, 1)$ en el infinito.

## 3.3. Racionalidad de una cúbica irreducible singular

Se tiene que una cúbica singular o posee un nodo o posee un punto cuspidal y, además, en este último caso hay un único punto de inflexión.

**Proposición 3.3.1.** Todas las cúbicas planas nodales son proyectivamente equivalentes, admitiendo como ecuación una de la forma $x^3 + y^3 = xyz$. Para ésta, $(0,0,1)$ es un punto doble y el haz de rectas $y = tx$ permite dar una parametrización de la cúbica, a saber $x = t; \quad y = t^2; \quad z = 1 + t^3$. Igualmente, todas las cúbicas cuspidales son proyectivamente equivalentes, admitiendo como ecuación una de la forma $y^2 z = x^3$. Para ésta, $(0,0,1)$ es un punto doble y el haz de rectas $y = tx$ permite dar una parametrización de la cúbica, a saber: $x = t^2; \quad y = t^3; \quad z = 1$.

**Demostración:** Sea C una cúbica nodal, podemos suponer que $P = (0,0,1)$ es el nodo y que $x, y = 0$ son las rectas tangentes. La ecuación afín será de la forma

$$f(x,y) = xy + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

en donde no aparecen términos en $x^2$ e $y^2$. Además se tiene que $a \neq 0$ y $d \neq 0$ al ser $y = 0,\ x = 0$ tangentes en un punto doble. Ahora la curva proyectiva es:

$$f(x,y,z) = xyz + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = ax^3 + dy^3 + xy(z + bx + cy)$$

Podemos considerar la transformación proyectiva $\overline{x} = x; \quad \overline{y} = y; \quad \overline{z} = z + bx + cy$ con lo cual $f(x,y,z) = ax^3 + dy^3 + zxy$. Nuevamente la transformación proyectiva $\overline{x} = \sqrt[3]{a}x; \quad \overline{y} = \sqrt[3]{d}y; \quad z = -\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{d}\overline{z}$ permite llegar a la ecuación

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 - xyz$$

que afínmente sería

$$f(x,y,1) = x^3 + y^3 - xy$$

cortando ahora con $y = tx$ conseguimos $x^3 + (tx)^3 - tx^2 = 0; \quad x^2((1+t^3)x - t) = 0$ que proporciona $x = y = 0$ doble y $x = \frac{t}{1+t^5}$. Entonces $y = \frac{t^2}{1+t^3}$ y así $x = t; \quad y = t^2; \quad z = 1 + t^3$ es una parametrización.

Consideremos ahora C la cúbica cuspidal. Podemos suponer que $P = (0,0,1)$ e $y = 0$ es tangente. La ecuación afín de la curva sería:

$$f(x,y,1) = y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

en donde $a \neq 0$, al ser $y = 0$ tangente en un punto doble.
Ahora bien, $C$ posee un punto de inflexión $Q$. Podemos suponer $Q = (0,1,0)$, la tangente inflexional la puedo tomar $x = 0$ o bien $z = 0$. Nótese que si tomamos $z = 0$, se determina completamente la referencia proyectiva. Existe una transformación proyectiva $T$ que lleva $P$ en $(0,0,1)$, $Q$ en $(0,1,0)$, $T_P(C)$ en $y = 0$; $P_Q(C)$ en $z = 0$; luego la recta $\overline{PQ}$ en $x = 0$.
Para imponer estas últimas condiciones, proyectivizamos la curva:

$$f(x,y,z) = y^2z + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

y tomamos la restricción afín $y = 1$, teniéndose:

$$f(x,1,z) = z + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Como $f(0,1,0) = 0$, entonces $d = 0$ y como $z = 0$ es tangente inflexional se tiene que $a \neq 0$ pero $b = c = 0$. Así pues:

$$f(x,y,z) = y^2z + ax^3$$

Ahora hacemos la transformación proyectiva $\overline{x} = -\sqrt[3]{a}x$ y la ecuación de la cúbica es:

$$f(x,y,z) = y^2z - x^3$$

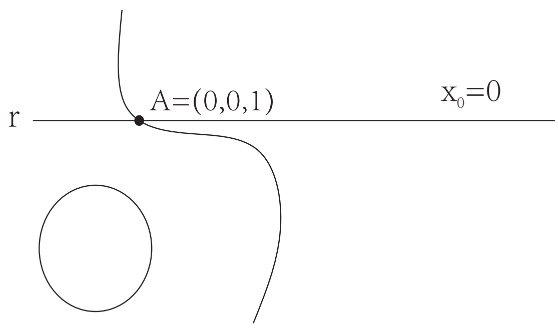
Afínmente:

$$y^2 = x^3$$

Intersecando con las rectas $y = tx$ encontramos $x^2(x-t)^2 = 0$; que dice que $x = y = 0$ es doble y $x = t^2$, luego $y = t^3$, nos da el otro punto de corte. Así pues: $(x,y,z) = (t^2,t^3,1)$ es una parametrización.

## 3.4. Cúbica irreducible no singular

Supongamos ahora que $C$ es una cúbica no singular: cada punto de $C$ que verifique la ecuación de su Hessiana es un punto de inflexión. De hecho, ciertamente $C$ tiene puntos de inflexión. Sea $A$ tal punto y $r = T_A(C)$ la recta tangente. Por tanto $r$ corta a $C$ en $A$ con multiplicidad exactamente 3. Mediante una proyectividad podemos suponer que $r$ es la recta $x_0 = 0$ y el punto $A$ es el punto $A = (0,0,1)$. Esto significa que tomando coordenadas no homogéneas $x = \frac{x_1}{x_0}$; $y = \frac{x_2}{x_0}$, $A$ está en la recta del infinito del plano afín de coordenadas $(x,y)$, como se puede ver en el siguiente ejemplo ilustrativo:



Razonando como en los casos previos, como $C$ es irreducible, su ecuación no es divisible por $x_2$, pero esta variable aparece en ella. Ordenando la ecuación por potencias de $x_2$ tenemos:

$$a_0x_2^3 + a_1(x_0, x_1)x_2^2 + a_2(x_0, x_1)x_2 + a_3(x_0, x_1) = 0$$

Reduciendo la ecuación al plano afín $x_2 \neq 0$ y, teniendo en cuenta que el punto $A = (0, 0, 1) \in C$ es liso con tangente $x_0 = 0$, encontramos que $a_0 = 0$ y $a_1(x_0, x_1) = ax_0$. Pero todavía más, como $A$ es inflexión, las intersecciones de la curva con la tangente inflexional $x_0 = 0$ son 3 puntos confundidos en $A$; es decir, el sistema:

$$\begin{cases} ax_0x_2^2 + a_2(x_0, x_1)x_2 + a_3(x_0, x_1) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

tiene como solución al punto $A = (0, 0, 1)$ con multiplicidad 3. Equivalentemente, la ecuación

$$a_2(0, x_1)x_2 + a_3(0, x_1) = 0$$

debe tener la solución $(0, 1)$ con multiplicidad 3. Como $a_2(0, x_1)$ es homogéneo de grado 2 y $a_3(0, x_1)$ es homogéneo de grado 3, necesariamente $a_2(x_0, x_1) = x_0b(x_0, x_1)$ con $b(x_0, x_1)$ homogéneo de grado 1 y $a_3(0, x_1) \neq 0$, es decir, podemos escribir la ecuación anterior como

$$x_0x_2^2 + 2x_0x_2b(x_0, x_1) + a_3(x_0, x_1) = 0$$

Completamos el cuadrado con los dos primeros sumandos:

$$x_0x_2^2 + 2x_0x_2b(x_0, x_1) = x_0(x_2^2 + 2x_2b(x_0, x_1) + b(x_0, x_1)^2 - b(x_0, x_1)^2)$$

y conseguimos:

$$x_0(x_2^2 + 2x_2b(x_0, x_1) + b(x_0, x_1)^2) - x_0b(x_0, x_1)^2 + a_3(x_0, x_1) = 0$$

donde $x_0b(x_0, x_1)^2 + a_3(x_0, x_1)$ es homogéneo de grado 3. Definimos ahora una nueva variable $(x')^2 = x_2^2 + 2x_2b(x_0, x_1) + b(x_0, x_1)^2$.
Consideremos la proyectividad definida por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = x_1 \\ x_2' = b(x_0, x_1) + x_2 \end{cases}$$

La ecuación de la curva se transforma ahora en

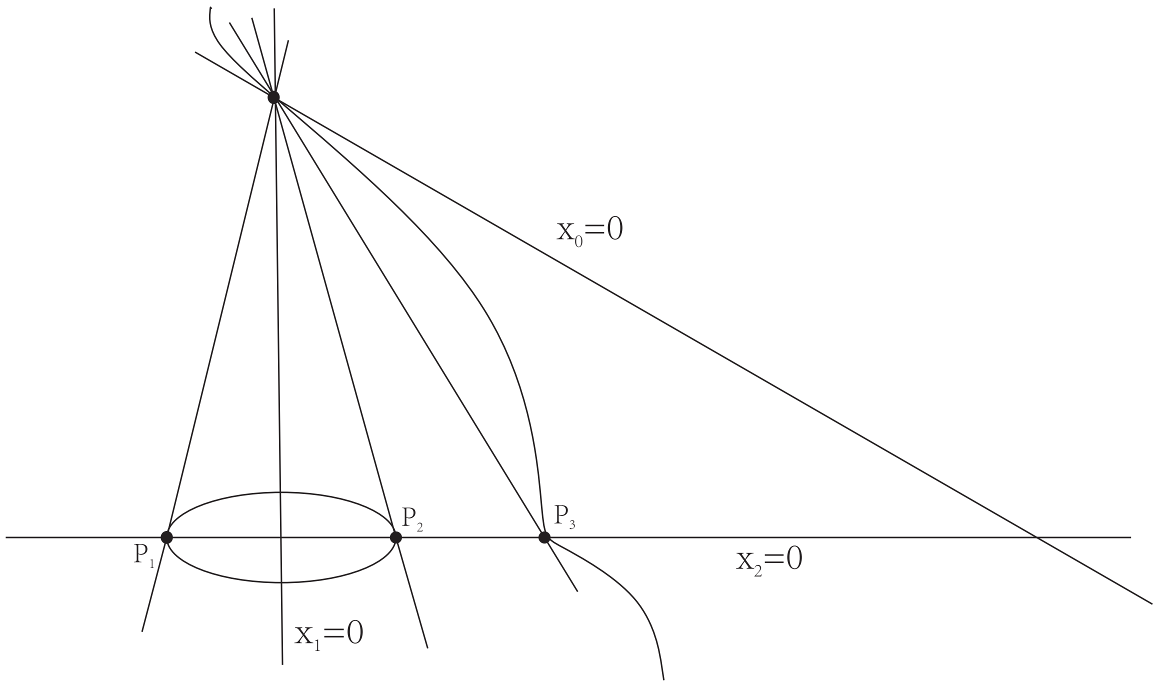
$$x_0x_2^2 = \varphi(x_0, x_1) = \prod_{i=1}^{3}(x_1 - x_0\lambda_i)$$

en donde hemos usado que $\varphi(x_0, x_1)$ es homogéneo de grado 3.

Sobre el plano afín de coordenadas $x = \frac{x_1}{x_0}$; $y = \frac{x_1}{x_0}$, la ecuación es ahora:

$$y^2 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$$

en donde $P_i = (1, \lambda_i, 0)$ son 3 puntos alineados sobre la recta $x_2 = 0$. Nótese que cada recta $x_1 - x_0\lambda_i = 0$ pasa por 2 de los puntos $P_i = (1, \lambda_i, 0)$ y una vez por $A = (0, 0, 1)$. Además $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$ son diferentes entre sí, de lo contrario $P_i$ sería singular. Por tanto, las rectas $\overline{AP_i}$ son 3 rectas tangentes a $P_1, P_2, P_3$ pasando por $A$ y diferentes de la tangente inflexional en $A$. Geométricamente la situación sería la siguiente:




En particular, la proyectividad definida por las ecuaciones previas puede interpretarse geométricamente como la que transforma la recta que pasa por los puntos $P_1, P_2, P_3$ en la ecuación $x_2 = 0$. Además este cálculo prueba lo siguiente:

**Proposición 3.4.1.** Si $A$ es un punto de inflexión para una cúbica no singular $C$, existen 3 rectas tangentes a $C$ pasando por A que son distintas entre sí y distintas de la tangente inflexional, de manera que los puntos de tangencia $P_1, P_2, P_3$ están alineados.

Finalmente observemos las intersecciones de $C$ con la recta $x_1 = 0$ :

$$x_0 x_2^2 = -(x_0^3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \Longleftrightarrow x_0(x_2^2 + x_0^2 + x_0^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = 0$$

de donde obtenemos el punto $A = (0, 0, 1)$ con multiplicidad 1, y siempre que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, dos puntos diferentes sobre la cúbica.

Podemos considerar la proyectividad que lleva la recta $\overline{AP_1}$ de ecuación $x_1 - \lambda_1 x_0$ en la de ecuación $x_1 = 0$ y posteriormente la que elige el punto unido sobre la recta $\overline{AP_2}$, es decir, dada la ecuación:

$$x_0x_2^2 = x_1(x_1 - ax_0)(x_1 - bx_0) \quad \textit{con } a \neq b$$

aplicamos la recta $x_1 - ax_0$ en $x_1 - x_0$ y se tiene la ecuación

$$\frac{x_0}{a}x_1^2 = x_1(x_1 - x_0)(x_1 - \frac{b}{a}x_0)$$

ahora hacemos el cambio $x_2 \longrightarrow \sqrt{a}x_2$ y la ecuación resulta:

$$x_0x_2^2 = x_1(x_1 - x_0)(x_1 - \lambda x_0) \quad \textit{con } \lambda \neq 0, 1$$

Lo que hemos hecho es cambiar el punto $P_2$ en $(1, 1, 0)$ y el punto unido $(1, 1, 1) = U$ está sobre la recta $\overline{AP_2}$. En coordendas no homogéneas $x = \frac{x_1}{x_0}$; $y = \frac{x_1}{x_0}$, la ecuación de la curva $C$ es ahora

$$y^2 = x(x - 1)(x - \lambda) \quad \textit{con } \lambda \neq 0, 1 \tag{3.6}$$

que es la forma normal de Weierstrass y podemos considerar como **ecuación canónica de las cúbicas no singulares**.

**Recíprocamente**: Supongamos que es posible demostrar mediante razonamientos geométricos (sin hacer uso de reducir una cúbica a su forma canónica) las propiedades siguientes:

1. Una cúbica con un **punto cuspidal** posee un punto de inflexión.
2. Una cúbica con un **nodo** tiene puntos de inflexión y por cada uno de ellos existe una recta tangente a la cúbica diferente de la tangente inflexional.
3. Una cúbica **no singular** tiene puntos de inflexión y por cada uno de ellos existen 3 rectas tangentes a la cúbica diferentes de la tangente inflexional que encuentran a la cúbica en 3 puntos alineados.

En tal caso, se puede llegar a las formas canónicas 3.3, 3.5 y 3.6 considerando las referencias proyectivas como en las figuras siguientes:

CASO 1.

- $E_0$ es punto de inflexión con tangente $x_0 = 0$
- $E_0$ es punto cuspidal con tangente $x_2 = 0$

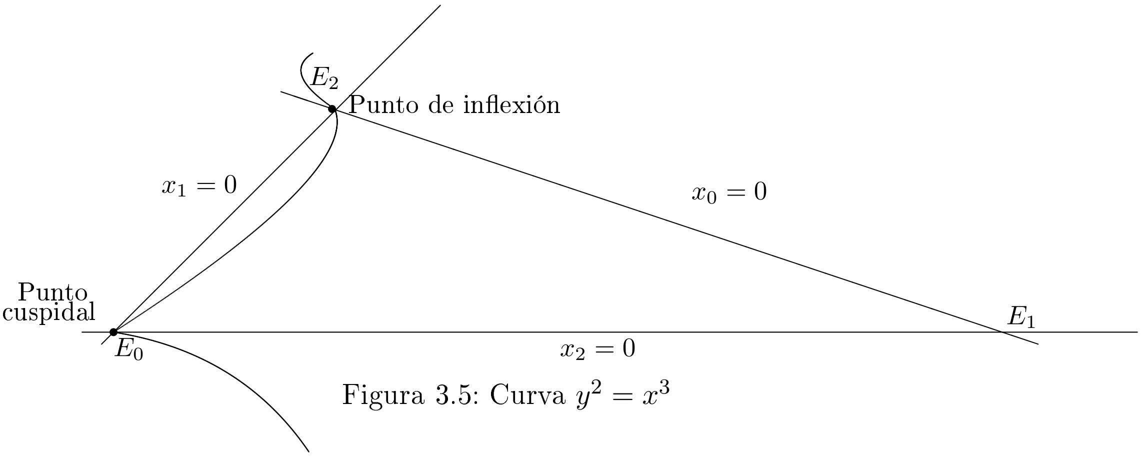



Figura 3.5: Curva $y^2 = x^3$

CASO 2.

- $E_2$ es punto de inflexión con tangente $x_0 = 0$
- $x_1 = 0$ es la tangente a $C$ pasando por $E_2$
- $x_2 = 0$ es la recta pasando por el punto de tangencia y el punto doble
- El punto unido $(1, 1, 1) = U$ de la referencia está sobre la recta que une $E_2$ con el punto doble

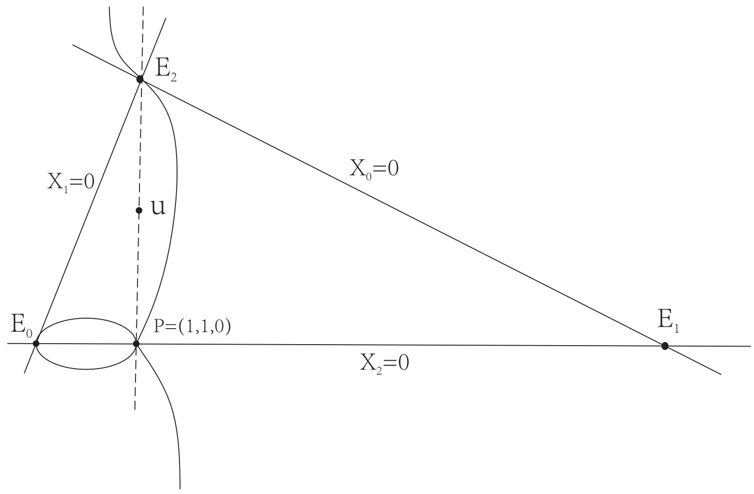



Figura 3.6: Curva: $y^2 = x(x-1)^2$

CASO 3.

- $E_2$ punto de inflexión con tangente $x_0 = 0$
- $x_2 = 0$ recta por los puntos $P_1, P_2, P_3$ de tangencia de las 3 rectas tangentes por $E_2$ diferentes de la inflexional
- $x_1 = 0$ una de las rectas tangentes por $E_2$
- El punto unido $U$ de la referencia sobre una de las otras 2 rectas tangentes

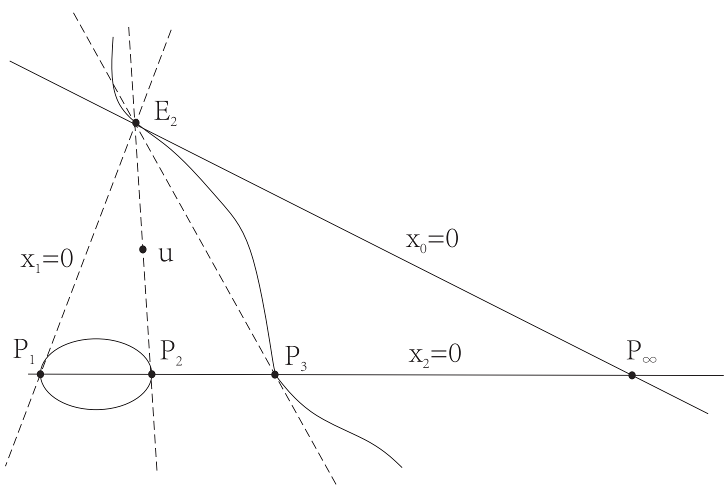



Figura 3.7: Curva: $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$

De lo anterior queda claro que los casos 1. y 2. se obtienen por degeneración del caso 3.
Si $P_2 = P_3$ y $P_1 \neq P_2$ se tiene el punto doble ordinario y cuando $P_1 = P_2 = P_3$ se tiene el punto cuspidal.

También de la discusión de las formas canónicas mediante cambios del referencial proyectivo queda claro que:

1. Todas las cúbicas con un nodo son proyectivamente equivalentes entre sí.
2. Todas las cúbicas con una cúspide son proyectivamente equivalentes.

Además 1. y 2. son 2 clases disjuntas.

Queda razonar cuántas clases proyectivamente equivalentes de cúbicas lisas existen. Teniendo en cuenta la forma canónica o reducida de Weierstrass parece que tales clases se corresponden con los valores del parámetro $\lambda: \quad \lambda \neq 0, 1$. Vamos a estudiar esta situación en detalle.

## 3.5. El espacio de Moduli de cúbicas lisas en el plano proyectivo

Comenzamos recordando el concepto de razón doble de 4 puntos sobre una recta proyectiva $\mathbb{P}^1$.

**Definición 3.5.1.** Sea $\mathbb{P}^1$ una recta proyectiva y sean $P_1, P_2, P_3, P_4$ puntos de la recta tales que $P_1, P_2, P_3$ son distintos. Se define la **razón doble** de $P_1, P_2, P_3, P_4$ como $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, en donde $(y_0, y_1)$ son las coordenadas homogéneas del punto $P_4$ en la referencia proyectiva formada por $P_1, P_2$ como puntos fundamentales y $P_3$ como punto unido.

Supongamos que $P_i = (\lambda_i, \mu_i) \in \mathbb{P}^1$. Nótese que no se hace ninguna hipótesis acerca del punto $P_4$. Vamos a dar una expresión para la razón doble en función de las coordenadas de los puntos. Para que $\{P_1, P_2, P_3\}$ formen una referencia proyectiva, calculamos $(a, b)$ tales que $aP_1 + bP_2 = P_3$. Esto conduce al sistema lineal:

$$a \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a\lambda_1 + b\lambda_2 = \lambda_3 \\ a\mu_1 + b\mu_2 = \mu_3 \end{array} \right. \quad ; \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}$$

Así pues, substituimos los representantes de $P_1$ y $P_2$ por $aP_1$, $bP_2$ y ahora $\{aP_1, bP_2, P_3\}$ es una referencia proyectiva. Las coordenadas homogéneas $(y_0, y_1)$ de $P_4 = (\lambda_4, \mu_4)$ en esta referencia son:

$$y_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 a \\ \mu_1 a \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} b\lambda_2 \\ b\mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \mu_4 \end{pmatrix} \iff y_0 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_4 & b\lambda_2 \\ \mu_4 & b\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ a\mu_1 & b\mu_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 a & \lambda_4 \\ \mu_1 a & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ a\mu_1 & b\mu_2 \end{vmatrix}}$$

Así pues, las coordenadas no homogéneas:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{a\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}}{b\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_1 \\ \mu_4 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix}}$$

Nótese que cuando $P_4 = P_1, P_2, P_3$ se obtienen respectivamente los valores $\frac{y_1}{y_0} = 0, \infty, 1$.

El significado de la razón doble es que constituye un variante proyectivo, es decir:

**Teorema 3.5.2.** Sean $\mathbb{P}^1_1$, $\mathbb{P}^1_2$ rectas proyectivas y sean $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} \subset \mathbb{P}^1_1$ y $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \subset \mathbb{P}^1_2$ con $\{P_1, P_2, P_3\}$ distintos y $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ distintos. Existe un isomorfismo $f : \mathbb{P}^1_1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_2$ tal que $f(P_i) = Q_i$ precisamente, si $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ (la razón doble coincide).

**Demostración:** Es la misma que la del Teorema Fundamental pero caracterizando esta vez las proyectividades. Supongamos $P_i = [v_i]$ ; $Q_i = [w_i]$. Entonces $f$ viene inducido por una aplicación lineal $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que $\varphi(v_i) = w_i$ con $i = 1, 2, 3$. Si $P_4$ tiene coordenadas homogéneas $(y_0, y_1)$ en el referencial proyectivo $\{P_1, P_2, P_3\}$ entonces $f(P_4)$ tiene las mismas coordenadas que $P_4$ pero con respecto al referencial $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Por tanto, por definición de razón doble :

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_0}{y_1} = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, f(P_4))$$

Entonces : $f(P_4) = Q_4$ precisamente si $Q_4$ tiene coordenadas homogéneas $(y_0, y_1)$ y esta condición es equivalente a : $\beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{y_0}{y_1}$ y así concluye la prueba.

Resulta claro que dados 4 puntos en $\mathbb{P}^2$, su razón doble depende del orden en que se consideren. Ahora bien, sean $P_1, P_2, P_3, P_4$ todos distintos, es decir, la situación más general. Calculando la razón doble de todas sus permutaciones se obtienen exactamente 6 valores :

$$B = \left\{ \beta = (P_1, P_2, P_3, P_4) \quad ; \quad \frac{1}{\beta} \quad ; \quad 1 - \beta \quad ; \quad \frac{1}{1-\beta} \quad ; \quad \frac{\beta - 1}{\beta} \quad ; \quad \frac{\beta}{\beta - 1} \right\}$$

Deseamos encontrar una función que se mantenga constante sobre este conjunto y por tanto que caracterice las cuaternas de puntos sobre la recta. Una función $J$ debe verificar que $J(\beta) = J(\beta')$ para $\beta, \beta' \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ precisamente si $\beta' \in \left\{\beta,\ \frac{1}{\beta},\ 1-\beta,\ \frac{1}{1-\beta},\ \frac{\beta-1}{\beta},\ \frac{\beta}{\beta-1}\right\}$.

Para ello consideremos la situación general en que el conjunto de valores $B$ son todos distintos y construyamos el polinomio mónico de grado 6 que tiene por raíces precisamente al conjunto mencionado, que va a ser:

$$q(x) = (x^2 - x + 1)^3 - j(\beta)x^2(x-1)^2$$

en donde $j(\beta) = \frac{(\beta^2-\beta+1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2}$ es una función racional definida para todo $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Por construcción :

$$j(\beta) = j(\beta') \Longleftrightarrow \beta' \in B$$

Hay ocasiones en las que los valores de $B$ no son todos distintos. Esto sucede cuando se dan los siguientes valores de $\beta$ : $\beta = -1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -\varepsilon,\ -\varepsilon^2$ siendo $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ una raíz cúbica primitiva de la unidad.

En los casos $\beta = -1,\ 2,\ \frac{1}{2}$ resulta que $j(\beta) = \frac{27}{4}$ y en tal caso el polinomio es $q(x) = (x+1)^2(x-2)^2(x-\frac{1}{2})^2$ y $B = \left\{1, 1, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
En los casos $\beta = -\varepsilon,\ -\varepsilon^2$ resulta que $j(\beta) = 0$ y el polinomio es $q(x) = (x^2 - x + 1)^3 = (x+\varepsilon)^3(x+\varepsilon^2)^3$ y las raíces son $B = \left\{-\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon^2, -\varepsilon^2, -\varepsilon^2\right\}$.

Por tanto, en todo caso :

**Lema 3.5.3.** Dada la función racional $j(\beta) = \frac{(\beta^2-\beta+1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2}$ definida en $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ se verifica :

$$j(\beta) = j(\beta') \Longleftrightarrow \beta' \in B$$

Por tanto, si bien es cierto que la razón doble de una cuaterna de puntos distintos en una recta proyectiva depende del orden en que sean considerados, hemos encontrado una función racional $j(\beta)$ que no depende de tal orden. Así pues : si $P_1, P_2, P_3, P_4$ son 4 puntos distintos, está bien definido $j(\beta(P_1, P_2, P_3, P_4))$ que se dice el **módulo de la cuaterna** y se verifica el siguiente teorema.

**Teorema 3.5.4.** Sean $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ y $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ 2 cuaternas no ordenadas de puntos distintos sobre una recta proyectiva. Éstas son equivalentes $\Longleftrightarrow$ $j(\beta(P_1, P_2, P_3, P_4)) = j(\beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4))$.

**Demostración:** si $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ y $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ son proyectivamente equivalentes, existe $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $\{f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$. En tal caso se tiene: $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)$ por el teorema previo, y por el lema anterior $j(P_1, P_2, P_3, P_4) = j(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4) = j(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.
Recíprocamente, si $j(P_1, P_2, P_3, P_4) = j(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ por el lema previo, después de haber permutado $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ se tiene: $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_{i_1}, Q_{i_2}, Q_{i_3}, Q_{i_4})$ y entonces, por el teorema anterior existe una proyectividad aplicando $P_j$ en $Q_{ij}$.

Todavía necesitamos un resultado auxiliar: el comportamiento de multiplicidades de intersección frente a una proyectividad.

**Proposición 3.5.5.** Sea $T : \mathbb{P}^2_1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ una proyectividad con matriz inversible $N$, de manera que $(x_0, x_1, x_2)$ coordenadas homogéneas en el $\mathbb{P}^2_1$ se transforman de la siguiente manera: $NX = Y$. Sea $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva $C$ y sea $TC$ su transformada. Sean $P, Q$ dos puntos, $r$ la recta que los une y $TP$, $TQ$, $Tr$ sus transformados. Se verifica:

$$m_p(C, r) = m_{TP}(TC, Tr)$$

**Demostración:** sea $G(y_0, y_1, y_2) = 0$ la ecuación de la curva transformada $TC$. Los puntos $(y_0, y_1, y_2) \in TC$ se corresponden biunívocamente con los $(x_0, x_1, x_2) \in C$ mediante $(y_0, y_1, y_2) = N(x_0, x_1, x_2)$. Es decir :

$$F(x_0, x_1, x_2) = F(N^{-1}(y_0, y_1, y_2)) = FN^{-1}(y_0, y_1, y_2)$$

Con lo cual :

$$G(y_0, y_1, y_2) = 0 \iff FN^{-1}(x_0, x_1, x_2) = 0$$

Sea $r = \{\lambda P + \mu Q\}$ con $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$, las intersecciones de $C = Z(F)$ con la recta $r$ corresponden a las raíces contadas con multiplicidad del polinomio $F(\lambda P + \mu Q) = 0$. Ahora sean $TP = NP$; $TQ = NQ$. Las intersecciones de la curva $TC$ con la recta $Tr = \{\lambda TP + \mu TQ\}$ con $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$ corresponden a las raíces contadas con multiplicidad de $G(\lambda TP + \mu Q) = 0$.
Ahora bien:

$$G(\lambda TP + \mu TQ) = G(\lambda NP + \mu NQ) = G(N(\lambda P + \mu Q)) = FN^{-1}N(\lambda P + \mu Q) = F(\lambda P + \mu Q)$$

Con lo cual $(\lambda_0, \mu_0)$ es solución de $F(\lambda P + \mu Q) = 0$ con cierta multiplicidad no necesariamente igual a la multiplicidad de $G(\lambda TP + \mu TQ) = 0$. En particular la proposición queda probada.

**Corolario 3.5.6.** Se verifican las propiedades siguientes:

1. El grado de una curva plana es un variante proyectivo.

2. Un punto $P \in C$ de inflexión se aplica por una proyectividad en un punto de inflexión.
3. Una proyectividad aplica un punto múltiple de orden $r$ en otro de igual orden.

**Proposición 3.5.7.** Sea $C$ una cúbica lisa. Se verifica: $A$ y $B$ son 2 puntos de inflexión, la recta $r$ que pasa por ellos corta a $C$ en un tercer punto de inflexión.

**Demostración:** Podemos considerar para $C$ su ecuación normal o de Weierstrass $y^2 = \varphi(x)$ en donde $x = \frac{x_1}{x_0}$; $y = \frac{x_2}{x_0}$; $x_0 = 0$ es la recta del infinito correspondiente al plano afín $\mathbb{A}^2_{xy}$. También podemos suponer que $A = E_2 = (0,0,1)$. Dada esta situación por ser $B$ un punto de inflexión ha de ser distinto de los puntos $P_i = (1,0,0), (1,1,0), (1,\lambda,0)$. Por tanto $B = (1,0,b)$ con $b \neq 0$. Consideramos la proyectividad definida por:

$$x' = x \quad ; \quad y' = y$$

Esta proyectividad deja invariante la curva $y^2 = \varphi(x)$ y transforma la recta $h = \overline{E_2 B}$ en otra recta $\overline{TE_2 TB} = \overline{TE_2 B'}$ en donde $TE_2$ y $B'$ son de inflexión. Ahora bien, $B = (a,b)$ se aplica en $B' = (a,-b)$, con lo cual vemos que $B'$ y $B$ están sobre la recta $x = a$, cuya dirección es $x_1 = 0$ y por tanto contiene al punto del infinito $E_2$. En consecuencia, el tercer punto de corte de $\overline{E_2 B}$ es $B'$ y es de inflexión.

**Teorema 3.5.8. (Teorema débil de Salmon)** Sea $C$ una cúbica lisa y $P \in C$ un punto de inflexión. La cúbica $C$ posee exactamente 4 tangentes distintas que pasan por $P$, incluyendo la tangente inflexional. El módulo de las 4 tangentes es independiente de la elección de $P$.

**Demostración:** Supongamos primero para $C$ su forma normal: entonces $E_2 = (0,0,1)$ es un punto de inflexión con tangente $x_0 = 0$. Las otras 3 tangentes pasando por $P$ vienen dadas por las rectas de ecuación $x = 0$; $x = 1$; $x = \lambda$ con $\lambda \neq 0, 1$.
Sea ahora $C$ una cúbica no singular cualquiera y $P$ un punto de inflexión, hemos razonado que existe una proyectividad $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ que aplica $P$ en $E_2 = (0,0,1)$. Mediante esta proyectividad las rectas del haz pasando por $P$ se corresponden biunívocamente con las tangentes a $TC$ por $E_2$. Más aún, los puntos de tangencia $Q_1, Q_2, Q_3$ están alineados con el punto de intersección de esta recta con la tangente inflexional; sea $Q_4$, entonces éstos corresponden con los $P_1, P_2, P_3, P_\infty$ en la forma normal.

Entendiendo la razón doble de las 4 tangentes como la de los 4 puntos alineados obtenidos intersecando con una recta, vemos que $\beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \beta(P_1, P_2, P_3, P_\infty)$. Ahora bien, en la forma normal : $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (1,1,0)$, $P_3 = (1,\lambda,0)$ y $P_\infty = (0,1,0)$.
Encontramos que :

$$\beta(P_3, P_2, P_1, P_\infty) = \lambda$$

y en consecuencia:

$$j(C) = j(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$$

**Corolario 3.5.9.** Dadas $C$ y $C'$ dos cúbicas no singulares en $\mathbb{P}^2$ se tiene:

$$C \text{ y } C' \textit{ son proyectivamente equivalentes} \iff j(C) = j(C')$$

**Demostración:** Sean $C$ y $C'$ proyectivamente equivalentes, entonces ambas son equivalentes a una misma cúbica dada en forma normal $y_2 = x(x-1)(x-\lambda)$ y en consecuencia se tiene que $j(C) = j(C') = j(\lambda)$.

Recíprocamente sean $C$ y $C'$ dos cúbicas lisas y consideremos sus formas normales:
$y_2 = x(x-1)(x-\lambda)$ ; $y_2 = x(x-1)(x-\lambda')$ y supongamos que $j(\lambda) = j(\lambda')$.
Si $\lambda' = \lambda$, las posibilidades para $\lambda'$ son los 5 siguientes valores:

$$\frac{1}{\lambda} \quad ; \quad 1-\lambda \quad ; \quad \frac{1}{1-\lambda} \quad ; \quad \frac{\lambda-1}{\lambda} \quad ; \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

Será suficiente probar la existencia de una proyectividad que transforma $y_2 = x(x-1)(x-\lambda)$ en $y_2 = x(x-1)(x-\lambda')$ cuando $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, dado que en los demás casos serán composiciones de entre las siguientes:

- Si $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, encontramos $y_2 = x(x-1)(x-\lambda) \iff \lambda^3 y^2 = \lambda x(\lambda x - \lambda)(\lambda x - 1) = (\lambda^{\frac{3}{2}})^2 y^2 = (\lambda^{\frac{3}{2}} y)^2$ y vemos que la substituación $x' = \lambda x$ ; $y' = \lambda^{\frac{3}{2}} y$ proporciona la proyectividad.

- Si $\lambda' = 1-\lambda$, tenemos $y^2 = x(x-1)(x-(1-\lambda)) = x(x-1)(x-1+\lambda) = x(x-1)(-(-x+1-\lambda))$. Hagamos $-x+1 = x'$ ; $x = 1-x'$ ; $y^2 = (1-x')(-x')(-(x'-\lambda)) = (x'-1)(x')(x'-\lambda)(-1) = x'(x'-1)(x'-\lambda)(-1)$ Es decir $(-1)y^2 = i^2 y^2 = (iy)^2 = x'(x'-1)(x'-\lambda)$ ; haciendo $y' = iy$ se concluye.

## 3.6. Clasificación de cúbicas lisas de grado 3

Primero hacemos un comentario acerca del cálculo del módulo de una cúbica lisa. Basándonos en el Teorema débil de Salmon, en general no es fácil encontrarlo, ya que supone haber calculado de antemano los puntos de inflexión. Sin embargo, Salmon ha dado un resultado relevante:

**Teorema fuerte de Salmon.** Sea $C$ una cúbica plana no singular. Si $P \in C$ no es un punto de inflexión, existen 4 rectas tangentes a $C$ desde $P$ distintas entre sí y distintas a la tangente a $C$ en $P$.

Cuando el punto $P$ se aproxima al punto de inflexión una de las 4 rectas tangentes tiende a la tangente por $P$ y proporcionan la tangente de inflexión.

**Demostración:** Dada una cúbica lisa, sabemos que desde un punto genérico del plano se pueden trazar 6 rectas tangentes a la cúbica. Los puntos de contacto de tales tangentes son los puntos de intersección de la curva con su curva polar respecto al punto.
Vamos a estudiar cuántas rectas tangentes se pueden trazar a la cúbica si el punto yace en ésta. Se trata de calcular explícitamente el 0-ciclo intersección de la cúbica con su polar, que es de grado 6. Veremos que la multiplicidad de intersección de un punto es 1 si el punto no es $P$ y vale 2 o 3 dependiendo de si $P$ es simple ordinario o de inflexión.

Suponemos que $P = (0,0,1)$ y que $y = 0$ es la tangente. La ecuación de la cúbica es:

$$f(x,y,z) = z^2y + z(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) + (ax^3 + bx^2y + cxu^2 + dy^3)$$

y la polar respecto a $(0,0,1)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zy + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

En particular $P$ está en la intersección de la cúbica y su polar.
Supongamos que $P$ es ordinario, entonces $y = 0$ corta a $f$ en $P$ con multiplicidad 2, por lo que $\alpha \neq 0$. Considerando las curvas en el plano $z = 1$ se tiene:

$$f(x,y,z) = y + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + (ax^3 + bx^2y + cxu^2 + dy^3)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,1) = 2y + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

con lo cual $P$ es liso en ambos con $y = 0$ tangente común. La multiplicidad de intersección es $1+$ puntos próximos. Para calcular los puntos próximos aplicamos la transformación cuadrática especial $\overline{x} = x$ ; $\overline{xy} = y$ . Entonces:

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{xy} + \alpha\overline{x}^2 + \beta\overline{x}^2\overline{y} + \ldots = 0 \Leftrightarrow \overline{y} + \alpha\overline{x} + \beta\overline{xy} + \ldots = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(\overline{x},\overline{y}) = \alpha\overline{xy} + \alpha\overline{x}^2 + \beta\overline{x}^2\overline{y} + \ldots = 0 \Leftrightarrow \alpha\overline{y} + \alpha\overline{x} + \beta\overline{xy} + \ldots = 0$$

Vemos que $P$ es simple con tangentes distintas, luego se tiene que el número de puntos próximos es 1. Así, la multiplicidad de intersección es $P$ es 2.

Si suponemos que $P$ es una inflexión, entonces $\alpha = 0$ y $a \neq 0$ . Ahora la polar es reducible:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y(2z + \beta x + \gamma y) \quad \textit{tal que} \quad 2z + \beta x + \gamma y = 0 \quad \textit{no contiene a } P,$$

por lo tanto la multiplicidad de intersección es $(f,y)_P = 3$ .

Sea ahora $Q \neq P$ un punto de contacto de una recta tangente a la cúbica desde $P$. Como una recta y una cúbica se cortan en 3 puntos, $Q$ debe de ser ordinario. Es decir, si suponemos que $y = 0$ es la tangente en $Q$, la ecuación de la cúbica es:

$$f(x, y, z) = z^2y + z(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

en donde $\alpha \neq 0$.
Como el punto $P$ yace en $y = 0$ es de la forma $(x, 0, z)$ y además debe ser $x \neq 0$ pues $P \neq Q$. Como $f(x, 0, z) = z\alpha x^2 + ax^3 = x^2(z\alpha + ax) = 0$ deducimos que $z\alpha + ax = 0$, luego $P = (x, 0, \frac{-ax}{\alpha}) \equiv (\alpha, 0, -a)$ y eventualmente $a$ pudiera ser 0. La polar respecto a $P$ es:

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2\alpha zx + \beta zy + 3ax^2 + 2bxy \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2zy + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

con lo cual

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial z} = \alpha(2\alpha zx + \beta zy) - a2zy + \alpha(3ax^2 + 2bxy) - a(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)$$

Así $Q$ es liso con tangentes $y = 0$ para $f$ y $\alpha(2\alpha x + \beta y) - 2ay = 0$ para la polar que, como $\alpha \neq 0$, es diferente de $y = 0$. Así pues la multiplicidad de intersección en $Q$ vale 1.

En consecuencia, desde un punto de una cúbica se pueden trazar exactamente 4 tangentes a la cúbica y son distintas. Si el punto no es de inflexión se excluye la tangente por el punto y si es de inflexión, se incluye.

Consideremos el módulo $J(\lambda) = \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)}$. Veamos que la ecuación $J(\lambda) = c$ con $c \in \mathbb{C}$ tiene siempre solución excepto cuando $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ en cuyo caso $J(\lambda) = \infty$. Vemos entonces que llamando

$$C = \{\textit{cúbicas no singulares}\} \ / \ \textit{equivalencia proyectiva}$$

existe un isomorfismo $J : C \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{(0, 1)\} = \mathbb{A}^1$
Este es el primer ejemplo de Espacio de moduli, el espacio que clasifica las cúbicas lisas es isomorfo con una variedad algebraica: la recta afín $\mathbb{A}^1$.

# Capítulo 4

# Estudio de las cúbicas irreducibles

## 4.1. Configuración geométrica definida por las inflexiones de una curva lisa

Ya hemos visto que una cúbica lisa posee 9 puntos de inflexión. Recordemos que una recta corta a la cúbica en 3 puntos contados con multiplicidad. Nos será útil en el estudio que vamos a hacer el siguiente resultado:

**Proposición 4.1.1.** Dada una cúbica lisa $C$, si $L$ es una recta uniendo 2 puntos de inflexión, $L$ corta a $C$ en un tercer punto de inflexión.

**Demostración:** La familia de cúbicas planas depende de 9 parámetros. Imponiendo 8 condiciones independientes tenemos un haz de cúbicas $C + \lambda C' = 0$. Las cúbicas pasando por los 8 puntos que determinan tales condiciones son las cúbicas de este haz. Pero por Bezout, $C$ y $C'$ se cortan en 9 puntos y toda $C + \lambda C'$ tiene en común esos 9 puntos. Así pues, las cúbicas que pasan por 8 puntos, pasan también por un noveno punto.
Sea $L$ una recta uniendo 2 puntos de inflexión $P_1, P_2$ en la cúbica. Sea $P_3$ el tercer punto de corte. Llamemos $L_1, L_2, L_3$ a las tangentes en $P_1, P_2, P_3$. Entonces $L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$ es una cúbica que pasa por 8 puntos de los 9 de intersección de la cúbica $C = 0$ con la cúbica $L^3 = 0$. Sin embargo se cumple también que $L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$ pasa también por el noveno. Así $L_3$ corta a $C$ en $P_3$ con multiplicidad 3 y $P_3$ es un punto de inflexión.

**Teorema 4.1.2.** Existen 12 rectas, cada una de ellas conteniendo 3 puntos de inflexión de una cúbica lisa. Estas rectas se pueden distribuir en 4 triángulos cada uno de ellos conteniendo los 9 puntos de inflexión de la cúbica. La configuración de los punto de inflexión de una cúbica lisa y las rectas que los contienen en un espacio afín finito: el espacio afín sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$.

**Demostración:** La haremos en varios pasos para explicarla de forma exhaustiva y así entenderla lo mejor posible.
Sean $\{P_1,\ldots,P_9\}$ los puntos de inflexión de la cúbica lisa $C$. Fijemos uno de ellos, por ejemplo $P_1$. Dado $P_2$, la recta $\overline{P_1P_2}$ corta a $C$ en un tercer punto de inflexión. Sea $\overline{P_1P_2P_3}$ dicha recta, tomemos $P_4$ otro punto de inflexión distinto, la recta $\overline{P_1P_4}$ corta a $C$ en un punto de inflexión distinto de $P_2$ y $P_3$ ya que no puede haber más de 3 puntos comunes a una cúbica y una recta. Así tenemos otra recta $\overline{P_1P_4P_5}$. Con igual razonamiento encontramos las rectas $\overline{P_1P_6P_7}$ y $\overline{P_1P_8P_9}$. Así pues, tenemos que por cada punto de inflexión existen 4 rectas distintas conteniendo todos los 9 puntos de inflexión.

Podemos contar el número total de tales rectas: cada punto de inflexión da lugar a 4 rectas, pero entre todas estas 36, la recta que une 3 inflexiones está contada 3 veces (una por cada punto que contiene). Así pues el número de rectas se reduce a 12.

Ahora veamos que cada recta de las que pasa por $P_1$ da lugar a un triángulo conteniendo 9 inflexiones. Fijemos la recta $l=\overline{P_1P_2P_3}$, de ella salen 9 rectas conteniendo a los 9 puntos de inflexión. En consecuencia faltan por determinar 2 rectas $l'$ y $l''$ distintas de $l$ y distintas de las 9 a las que da lugar $l$.
La recta $l'$ pasa por 3 inflexiones que no pueden ser las contenidas en $l$ pues de lo contrario $l'$ sería o bien $l$ o una de las 9 rectas que salen de $l$. Entonces podemos suponer $l'=\overline{P_4P_5P_6}$. Ahora, la otra recta $l''$ es distinta de $l$, de $l'$ y de las 9 rectas que salen de $l$, sin embargo es claro que estas 9 rectas unen $\overline{P_1P_2P_3}$ con $\overline{P_4P_5P_6}$. En consecuencia, $l''$ tiene que ser la recta uniendo los 3 puntos de inflexión restantes $P_7, P_8$ y $P_9$. En consecuencia $l=\overline{1,2,3}$; $l'=\overline{4,5,6}$; $l''=\overline{7,8,9}$ constituyen un triángulo conteniendo los 9 puntos de inflexión.

La recta $r=\overline{1,4,7}$ determina un segundo triángulo: la recta $r'$ que pasa por 2 debe contener por igual razón que antes un punto de inflexión en $l'$ y otro en $l''$. Si tomamos por ejemplo la recta $\overline{2,5}$, llamemos $8$ al punto donde corta a $l'$. Ahora queda necesariamente $r''$ conteniendo a $\overline{6,8,9}$.

Distribuyendo los puntos en una matriz $3\times 3$, encontramos que las filas, por un lado, y las columnas, por otro, dan 2 triángulos conteniendo las 9 inflexiones. Con esta información podemos identificar los otros 2 triángulos que se definen a partir de las otras 2 rectas pasando por $1$. Claramente una es $\overline{1,5,9}$ pues la elección de $6$ u $8$ implica 4 inflexiones sobre una recta y la otra es $\overline{1,6,8}$.
El triángulo construido a partir de $s=\overline{1,5,9}$ está formado por ésta y las rectas $s'$ y $s''$ que

identificamos a continuación. Se tiene que la recta que pasa por $2,6$ y por el tercer punto de corte no puede estar en $r'$ ni en $r''$ ni en $l'$ ni en $l''$ pues habría 4 inflexiones en una de esas rectas, luego tal punto es $r \cap l'' = 7$, por tanto tenemos $s' = \overline{2,6,7}$. Con un razonamiento análogo obtenemos $s'' = \overline{4,8,3}$.

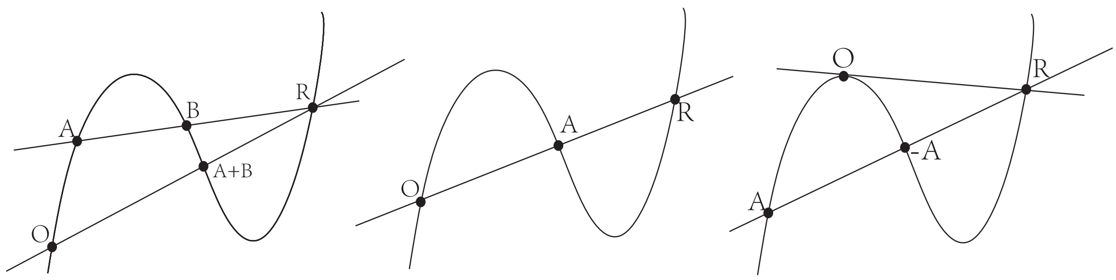
Vemos que, con respecto a la matriz numérica, un tercer triángulo viene definido por las 3 rectas correspondientes a los términos positivos en el desarrollo del determinante.
El cuarto triángulo está definido por $t = \overline{1,6,8}$ y $t'$, $t''$ son los otros 2 sumandos que junto con $t$ dan los términos negativos en el determinante.

## 4.2. Ley de grupo en los puntos de una cúbica plana no singular

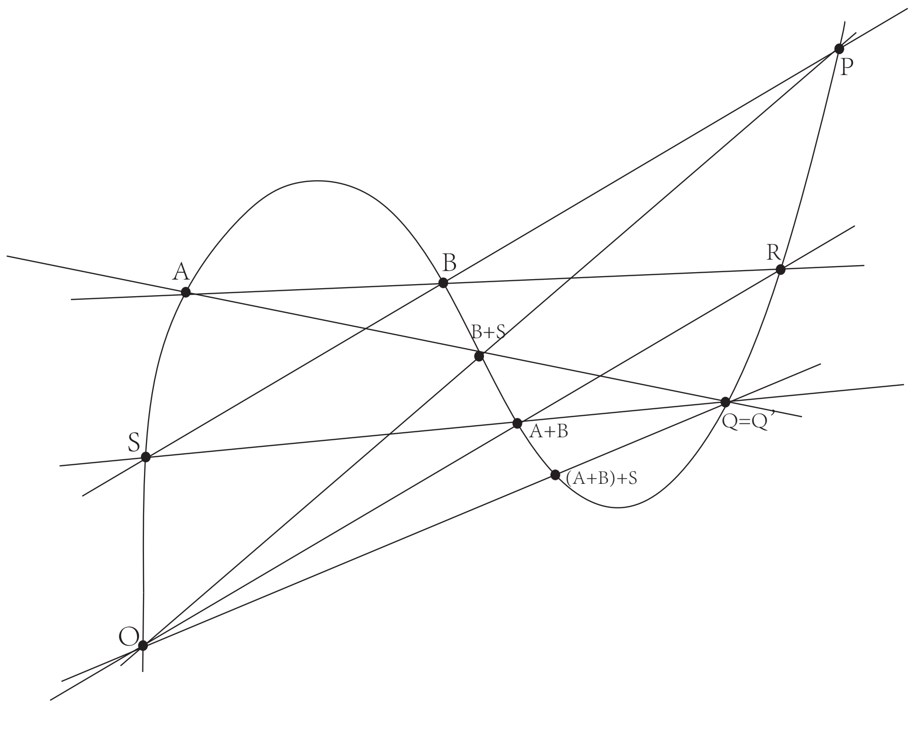
Vamos a introducir una operación en los puntos de una cúbica no singular mediante la cual, dichos puntos estructuran algebraicamente como un grupo. Ello permitirá obtener algunos resultados geométricos muy cómodamente usando el formalismo algebraico.

**Definición 4.3.1.** Sea $C$ un cúbica no singular y fijemos como referencia un punto $O \in C$. Dados $A, B$ dos puntos cualesquiera en $C$ consideramos la recta $\overline{AB} = L$; entendiendo que si $A = B$, $L$ es la tangente a $C$ en el punto $A$. Por ser $C$ de grado 3, existe un tercer punto $R$ tal que $L \cap C = \{A, B, R\}$. Ahora sea $H$ la recta definida por $O$ y $R$, cortará a $C$ en un tercer punto que denotaremos por $A + B$.
Esta construcción geométrica permite definir una aplicación $C \times C \longrightarrow C$ y vamos a probar que dicha aplicación es una operación con la cual $(C, +)$ es un grupo abeliano.

Se tiene que la conmutatividad es inmediata pues la recta determinada por 2 puntos es única; luego, $A + B = B + A$. Además $O \in C$ es el elemento neutro. Sea $A \in C$, busquemos $-A$ tal que $A + (-A) = O$. Por lo tanto, si $R$ es la tercera intersección de $\overline{A(-A)}$ con $C$, "$O$" debe ser la tercera intersección de la recta $\overline{OR}$ con $C$. Es decir, $\overline{OR}$ debe ser tangente en $O$. Como $O$ es fijo, consideremos dicha tangente, entonces está determinado el tercer punto $R$ y $(-A)$ es el tercer punto de intersección entre la recta $\overline{AR}$ y $C$. Los 3 dibujos siguientes ilustran lo que acabamos de explicar:




Queda probar ahora la asociatividad: $(A+B)+S = A+(B+S)$. Se puede ilustrar gráficamente esta propiedad como sigue:




Construyamos $(A+B)+S$. Sea $R$ la tercera intersección de la recta $L_1 = \overline{AB}$ con la cúbica $C$, entonces $A+B$ es la tercera intersección de $\overline{OR}$ con $C$. Sea ahora $Q$ la tercera intersección de $L_3 = \overline{S(A+B)}$ con $C$, entonces $(A+B)+S$ es la tercera intersección de $\overline{OQ}$ con $C$.

Construyamos $A+(B+S)$. Sea $P$ la tercera intersección de la recta $H_1 = \overline{BS}$ con $C$, entonces $B+S$ es la tercera intersección de $\overline{OP}$ con $C$. Sea ahora $Q'$, la tercera intersección de la recta $\overline{A(B+S)}$ entonces $A+(B+S)$ es la tercera intersección de $\overline{OQ'}$ con $C$.
Por lo tanto: $(A+B)+S = A+(B+S)$ precisamente si $OQ = 0Q'$, es decir, $Q = Q'$, es decir, $A$, $B+S$ y $Q$ son colineales. Para obtener $Q$, es necesario considerar 2 rectas: $L_1 = \overline{ABR}$, y $L_3 = \overline{S(A+B)Q}$.

Por otra parte, queremos probar que $Q$ es colineal con $A$ y con $B+S$. Por otra parte tenemos que $B+S$ se obtiene de la recta $\overline{O(B+S)P}$.
Consideremos la cúbica:

$$K := \overline{ABR} + \overline{S(A+B)Q} + \overline{O(B+S)P}$$

$K$ corta a $C$ en 9 puntos, a saber: $\{A, B, P, S, A+B, Q, O, B+S, R\}$.
Ahora bien, como $S, B$ y $P$ yacen en una recta $H_1$, los restantes están sobre una cónica: $\{A, A+B, Q, O, B+S, R\}$.
Por lo tanto $A, B+S$ y $Q$ serán colineales precisamente si $O, A+B$ y $R$ lo son, lo cual es inmediato por la construcción de $A+B$.

**Observación:** Hemos utilizado el siguiente resultado:
Sean $K$ y $C$ dos curvas de grado $n$, si $nm$ de entre los $n^2$ puntos comunes yacen en una curva $\Gamma$ irreducible de grado $m$, los $n(n-m)$ restantes yacen en una curva de grado $n-m$.

# Bibliografía

[G01] Fischer G. (2001). *Plane Algebraic Curves*, Student Mathematical Library, Volume **15**. A.M.S. Editorial Board.

[H03] Hulek, K. (2003). *Elementary Algebraic Geometry*, Student Mathematical Library, Volume **20**. A.M.S. Editorial Board.

[R88] Reid, M. (1988). *Undergraduate Algebraic Geometry*, London Mathematical Society, Student Texts **12**. Cambridge University Press.

[F69] Fulton, W. (1969). *Algebraic Curves: An Introduction To Algebraic Geometry*, Editorial Benjamin