

Traballo Fin de Grao

MODELOS DE ECUACIONES
DIFERENCIALES PARA JUEGOS
EVOLUTIVOS

Carlos Gondell Muiño

07, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Modelos de ecuaciones diferenciales para juegos evolutivos

Carlos Gondell Muño

07, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análisis Matemático
Título: Modelos de ecuaciones diferenciales para juegos evolutivos
Breve descripción do contido
La teoría de juegos evolutivos es la aplicación de la teoría de juegos al contexto del conflicto animal. En este trabajo estudiaremos el carácter dinámico de estos juegos a través del sistema que los modeliza, la ecuación del replicador. Terminaremos estudiando la existencia de bifurcaciones de Hopf a través de la equivalencia de este con el sistema de Lotka-Volterra.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Elementos de la Teoría de Juegos	1
1.1. Equilibrio de Nash	3
2. Juegos Evolutivos y la Ecuación del Replicador	7
2.1. Introducción a los juegos evolutivos	7
2.2. Dinámica del replicador	9
2.3. Equilibrios en la ecuación del replicador	10
2.4. Regiones de atracción y puntos críticos	17
2.5. Bifurcaciones	25
3. Ecuaciones de Lotka-Volterra	35
3.1. Equivalencia replicador-Lotka-Volterra	38
3.2. Existencia de bifurcaciones de Hopf y ciclos límite	39
3.3. Ecuaciones de Lotka-Volterra para cadenas tróficas	43
3.4. Ejemplo teórico	45
Bibliografía	51

Resumen

En este trabajo estudiaremos el carácter dinámico de los conocidos como juegos evolutivos a través de la ecuación del replicador. Más concretamente estudiaremos la relación entre las estrategias evolutivamente estables (EEE) del juego y la estabilidad de los puntos críticos de la ecuación. Estudiaremos, apoyándonos en la equivalencia con las ecuaciones de Lotka-Volterra, la existencia de bifurcaciones de Hopf en el sistema.

Abstract

In this paper we will study the dynamic character of the so-called evolutionary games through the replicator equation. More specifically, we will study the relationship between the evolutionarily stable strategies (ESS) of the game and the stability of the fixed points of the equation. We will study, based on the equivalence with the Lotka-Volterra equations, the existence of Hopf bifurcations in the system.

Introducción

La teoría de juegos, formulada en 1944 por John von Neumann y Oskar Morgenstern en su libro “Theory of Games and Economic Behaviour” [1], fue desarrollada inicialmente como el estudio de las estrategias del comportamiento humano que tienen como objetivo la toma de decisiones racionales. En 1973, de la mano de Maynard Smith y Price en “The logic of animal conflict” [2], la teoría de juegos es aplicada al contexto del comportamiento animal. En concreto se estudiará la búsqueda de la optimización evolutiva a la que están forzados todos los organismos que se rigen bajo la ley de la selección natural de Darwin. De esta forma nace la teoría de juegos evolutivos.

La teoría de juegos evolutivos tendrá como noción central de equilibrio el concepto de estrategia evolutivamente estable (EEE), de la misma manera que la teoría de juegos clásica tiene como noción central de equilibrio al equilibrio de Nash. Estas EEE representan estrategias presentes en una población, que se mantendrán en ella independientemente de la aparición de mutaciones (en forma de nuevas estrategias). Así, se puede observar que la teoría de juegos evolutivos se centra en el estudio de la frecuencia, en la población, de las distintas estrategias a lo largo del tiempo. Esto sugiere una relación entre el estudio de juegos evolutivos y el estudio de sistemas dinámicos; esta relación se hace explícita al ver que estos juegos pueden ser modelados a través de las ecuaciones del replicador.

Las ecuaciones del replicador, introducidas en 1978 por Peter Taylor y Leo Jonker en “Evolutionary Games and Population Dynamics” [3], son un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que describe la dinámica de una población en la cual los individuos más exitosos se reproducirán más. De esta forma, la evolución de una población con individuos que presentan distintas estrategias podrá ser estudiada utilizando las herramientas del análisis de sistemas dinámicos.

Además, en 1981 Josef Hofbauer probó en [4], la equivalencia entre las ecuaciones del replicador y las ecuaciones de Lotka-Volterra. Las ecuaciones de Lotka-Volterra, son un conjunto de ecuaciones diferenciales propuestas en la década de 1920 por Alfred J. Lotka y Vito Volterra (de manera independiente), que modelizan poblaciones de animales que interactúan en forma de depredador-presa. Estas ecuaciones han sido ampliamente estudiadas, ya que son un elemen-

to central de la matemática ecológica y por lo tanto, esta equivalencia permitirá utilizar los resultados obtenidos en las ecuaciones de Lotka-Volterra, para el estudio de las ecuaciones del replicador.

Capítulo 1

Elementos de la Teoría de Juegos

La Teoría de juegos es la teoría matemática que se encarga de estudiar situaciones de toma de decisiones. Los modelos de la teoría de juegos se agrupan en dos grandes grupos: juegos cooperativos y juegos no cooperativos, en los que los jugadores no disponen de mecanismos que permiten adoptar acuerdos vinculantes. Estos últimos serán el objeto de nuestro estudio.

La formulación adecuada de un modelo en teoría de juegos bajo el enfoque no cooperativo requiere hacer explícitos: el conjunto de los jugadores, que en nuestro caso será un conjunto finito; las reglas del juego; las posibles decisiones del conjunto de jugadores, que llamaremos estrategias; una relación de preferencias sobre las distintas combinaciones posibles de decisiones (estrategias) que expresaremos a través de una función que denominamos función de pagos.

Comenzaremos hablando de los juegos estáticos o juegos en forma estratégica. Estos representan un modelo estático de la interacción de varios jugadores. En este modelo los jugadores toman decisiones simultáneas y sin conocer la elección de los demás jugadores.

Definición 1.1. Un juego en forma estratégica G con conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$ es una $2n$ -tupla $G = (S_1, \dots, S_n, H_1, \dots, H_n)$ donde, para todo $i \in N$,

- S_i es el conjunto de estrategias del jugador i .
- $H_i : S = \prod_{i=1}^n S_i \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de pagos del jugador i , es decir, la función que asigna el pago al jugador i de acuerdo al perfil de estrategias que se utilice.

Los pagos representan las preferencias de cada jugador y su objetivo es maximizarlos.

Por último diremos que un perfil de estrategias es un vector de estrategias $s = (s_1, \dots, s_n)$ que asigna una estrategia a cada jugador, $s_i \in S_i$, $\forall i = 1, \dots, n$ que especifica completamente todas las acciones en el juego.

Definición 1.2. Un juego finito es un juego en forma estratégica $G = (S_1, \dots, S_n, H_1, \dots, H_n)$ cuyos jugadores tienen conjuntos de estrategias finitos.

Ejemplo 1.3. Oligopolio de Cournot.

Consideremos un conjunto de N empresas que se dedican a la producción de tarjetas gráficas. En cada caso la empresa i decide su cantidad de producción $s_i \geq 0$, que le supondrá un coste $c_i(s_i)$. El valor en el mercado de cada unidad producida vendrá dado por $f(\sum_{j=1}^n s_j)$, es decir, en función de la cantidad total producida. Podremos modelizar la situación a través de un juego en forma estratégica G donde para cada empresa i el conjunto de estrategias será $S_i = [0, \infty)$ y los pagos vendrán dados por $H_i = f(\sum_{j=1}^n s_j)s_i - c_i(s_i)$.

Sin embargo, no bastará con considerar el uso de una única estrategia en cada situación, ya que un jugador podrá aleatorizar su elección. Esto es explicado con profundidad en el libro de Osborne y Rubinstein (1944): *“There certainly are cases in which players introduce randomness into their behavior. For example, players randomly bluff in poker, governments randomly audit taxpayers, and some stores randomly offer discounts... The players have information about the frequencies with which actions were taken in the past... Each player uses these frequencies to form his belief about the future behavior of the other players, and hence formulate his action...”*.

Definición 1.4. Sea $S_i = \{s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^k\}$ el conjunto de estrategias puras del jugador i . Llamamos estrategia mixta del jugador i a toda distribución de probabilidad sobre S_i , y por tanto, a toda k -tupla $(\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^k)$ cuyas componentes son no negativas y suman 1.

Se interpreta σ_i como la estrategia consistente en jugar la estrategia pura s_i^1 con probabilidad σ_i^1 , s_i^2 con probabilidad σ_i^2 , ..., s_i^k con probabilidad σ_i^k , donde $\sigma_i^j \geq 0$, para cada $j = 1, 2, \dots, k$ y $\sum_{j=1}^k \sigma_i^j = 1$.

Al conjunto de estrategias mixtas del jugador i lo denotaremos por Σ_i indicando con ello que el conjunto de estrategias mixtas de un jugador está formado por todas las las distribuciones de probabilidad sobre S_i .

Definición 1.5. Sea $G = \{S_1, \dots, S_n, H_1, \dots, H_n\}$ un juego finito. La extensión mixta de G es el juego de forma estratégica

$$E(G) = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, H_1, \dots, H_n\},$$

donde, para cada jugador $i \in N$:

- $\Sigma_i = \{\sigma_i^j : \sigma_i^j \geq 0, j = 1, \dots, n_i \text{ y } \sum_{j=1}^{n_i} \sigma_i^j = 1\}$.
- $H_i(\sigma) = \sum_{s \in S} H_i(s)\sigma(s)$, $\forall \sigma \in \Sigma$, con $\Sigma = \prod_{i \in N} \Sigma_i$ denota el producto de conjuntos $\sigma_1(s_1) \times \dots \times \sigma_n(s_n)$.

Observación $E(G)$ es una extensión de G en el sentido de que, para todo jugador i , cada elemento de S_i , o estrategia pura, puede ser identificado con un elemento de Σ_i , o estrategia

mixta, por lo que podemos afirmar $S_i \subset \Sigma_i$. Por otro lado, las funciones de pago de los jugadores en $E(G)$ son extensiones de las funciones de pago de los jugadores en G .

Consideramos ahora un juego de únicamente dos jugadores. Sean σ_1, σ_2 estrategias mixtas del jugador 1 y 2 respectivamente. Entonces los pagos asociados al perfil de estrategias (σ_1, σ_2) vendrán dados por

$$H_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \sigma_1^j \sigma_2^k H_i(s_j, s_k), \quad i = 1, 2.$$

Una solución del juego será un par de estrategias (σ_1, σ_2) , siendo la primera componente la estrategia del jugador 1 y la segunda la estrategia del jugador 2.

Observación El conjunto de estrategias del jugador i puede ser identificado con el simplex de \mathbb{R}^{n_i} dado por:

$$\{\sigma_i \in \mathbb{R}^{n_i} : \sigma_i^k \geq 0 \forall k \in \{1, \dots, n_i\}, \sum_{k=1}^{n_i} \sigma_i^k = 1\}.$$

1.1. Equilibrio de Nash

Definiremos ahora una de las piedras angulares de la Teoría de Juegos, el equilibrio de Nash. Será definido para las condiciones que estamos considerando en este trabajo.

Definición 1.6. Sea $G = (S_1, \dots, S_n, H_1, \dots, H_n)$ un juego en forma estratégica, diremos que un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash si y sólo si:

$$H_i(\sigma^*) \geq H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i),$$

para todo $\sigma_i \in \Sigma_i$ y siendo

$$(\sigma_{-i}^*, \sigma_i) = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*).$$

Además, si $\sigma_1^* = \dots = \sigma_n^*$ diremos que el equilibrio es simétrico.

El equilibrio de Nash puede ser interpretado como una situación en la que, para cualquiera de los jugadores, cambiar de estrategia unilateralmente provocaría una disminución en los pagos. Por lo tanto es una situación en la que a ningún jugador “le interesa” variar su estrategia.

El propio Nash probó la existencia de equilibrios de Nash en juegos finitos. Es importante recalcar también que el siguiente teorema será válido únicamente en juegos que admitan una extensión mixta, es decir, juegos donde los jugadores puedan utilizar estrategias mixtas.

Teorema 1.7. *Toda extensión mixta de un juego en forma estratégica finito tiene al menos un equilibrio de Nash, ya sea puro o mixto.*

Una demostración del teorema puede encontrarse en [5].

Daremos una última definición, que será de utilidad en los próximos capítulos.

Definición 1.8. Un juego bipersonal de suma nula es un juego en forma estratégica $G = (S_1, S_2, H_1, H_2)$ tal que para todo perfil de estrategias (s_1, s_2) se tiene que

$$H_1(s_1, s_2) = -H_2(s_1, s_2).$$

De esta forma, un juego bipersonal de suma nula puede ser caracterizado definiendo únicamente una función de pago, que suele ser la del jugador 1 y se denota por H .

Llegados aquí, expondremos un ejemplo clásico para explicar los conceptos introducidos hasta ahora.

Ejemplo 1.9. Competencia publicitaria

Supongamos que dos empresas (E1 y E2) constituyen un duopolio local en el sector tecnológico. Al llegar el Black Friday, ambas empresas realizan ambiciosas inversiones en publicidad, que merman significativamente las ganancias obtenidas. Este año se han puesto de acuerdo y han decidido no hacer publicidad, por lo que cada una, si cumple el acuerdo, podrá obtener 40 millones de euros en beneficios. Sin embargo, una de ellas puede preparar en secreto su campaña publicitaria y lanzarla en el último momento, atrayendo a todos los clientes. Sus beneficios en ese caso serían de 60 millones, mientras que la empresa competidora perdería 25 millones.

Denotemos por T la acción de traicionar al competidor y por C la acción de cooperar. De esta forma el conjunto de estrategias puras vendrá dado por $S := S_1 = S_2 = \{T, C\}$ y los pagos se podrán esquematizar en la siguiente tabla (ver cuadro 1.1)

	T	C
T	10,10	60,-25
C	-25,60	40,40

Cuadro 1.1: Pagos del juego. Ejemplo 1.9

A la vista de la tabla, el encargado de la publicidad de E1 observa que la estrategia más eficiente es la de lanzar una campaña publicitaria. Esto se debe a que, independientemente de lo que haga la empresa competidora, sus beneficios van a ser mayores con la publicidad: si la empresa competidora decide mantener el trato, las ganancias de E1 serían 40 millones cuando también cooperan y 60 si deciden utilizar publicidad.

En caso de que la empresa competidora lance una campaña publicitaria, las ganancias de E1 entonces serían de 10 y -25 millones respectivamente. A su vez, el encargado de la publicidad de la

empresa 2 realizará el mismo análisis, por lo que también llegará a la conclusión de que es mejor utilizar publicidad. Nos encontramos entonces con el equilibrio de Nash del juego, que en este caso será (T, T) , es decir, ambas empresas lanzarán una campaña publicitaria independientemente del acuerdo alcanzado.

Este ejemplo deja en claro de forma muy directa la interpretación del concepto de equilibrio de Nash: un equilibrio de Nash describe una situación socialmente estable, que no tiene que ser necesariamente la situación óptima. En este caso ambas empresas hubieran obtenido mayores beneficios manteniendo el trato, aunque la mejor estrategia sea la de traicionar.

Referencias

En este capítulo el marco teórico ha sido extraído principalmente de [1], [5] y [6]. Mientras que los ejemplos han sido extraídos de [2] y [5].

Capítulo 2

Juegos Evolutivos y la Ecuación del Replicador

2.1. Introducción a los juegos evolutivos

“Grosso modo“ podemos decir que la teoría de juegos evolutivos es una aplicación de la teoría de juegos clásica a los contextos biológicos. Esencialmente, la teoría de juegos está basada en la racionalidad del ser humano. Esto es, modeliza el comportamiento de individuos que eligen estrategias y elaboran planes, buscando maximizar el resultado obtenido al resolver un conflicto. Por su parte, la teoría de juegos evolutivos pretende explicar el conflicto en el mundo animal y natural. El concepto de racionalidad es reemplazado por el de selección natural. Es necesaria la reinterpretación de algunos conceptos que hagan coherente la teoría en el contexto.

Entenderemos una estrategia como el comportamiento de un animal como respuesta a su genotipo. Las mutaciones, como modificadores del genotipo, se manifiestan como un cambio en el comportamiento animal, es decir como un cambio en el comportamiento estratégico.

Los pagos de una estrategia los mediremos según la cantidad esperada de descendientes que consigue el individuo que sigue dicha estrategia. Consecuentemente será más exitosa aquella estrategia que permite a su portador tener un número mayor de descendientes. El objetivo del juego es tener descendencia, preservar la especie o sobrevivir. Las interacciones entre individuos se consideran aleatorias.

Los equilibrios se corresponden con uno de los conceptos más relevantes de la teoría de juegos evolutivos: las estrategias evolutivamente estables (EEE).

Una cuestión importante a resolver por la teoría de los juegos evolutivos tiene que ver con

el comportamiento futuro de una población que sufre mutaciones. Esto es, si el comportamiento mutante tenderá a ser típico, tenderá la mutación a desaparecer, o bien a quedarse en un porcentaje de la población. “En otras palabras, una estrategia es estable, en sentido evolutivo, cuando no existe una estrategia mutante que dé una eficacia darwiniana superior a los individuos que la adoptan” (Maynard Smith, 1978).

El objeto de estudio será la población, las frecuencias de las distintas estrategias y cómo estas evolucionan con el tiempo.

Esta existencia de cierta dinámica en los conceptos que hemos presentado, nos conducirá inequívocamente al estudio de ecuaciones diferenciales.

Para adecuarnos más al contexto de poblaciones de la misma especie, en el sentido de la homogeneidad de las estrategias, será necesario (al menos en un comienzo), restringirnos al caso en el que ambos jugadores tienen el mismo conjunto de estrategias, $S := S_1 = \dots = S_n$ (lo que implica también $\Sigma := \Sigma_1 = \dots = \Sigma_n$).

En este caso solo serán de interés las soluciones simétricas $(\sigma^*, \dots, \sigma^*)$ y por lo tanto diremos que una solución σ^* es equilibrio de Nash si:

$$H_i(\sigma^*, \dots, \sigma^*) \geq H_i(\sigma^*, \dots, \sigma, \dots, \sigma^*) \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Definiremos algunos conceptos básicos de la teoría de juegos evolutivos, para adentrarnos luego en la dinámica del replicador.

Definición 2.1. Un perfil de población es un vector

$$x(s) = (p(s_1), \dots, p(s_n)),$$

que asigna una probabilidad a cada una de las distintas estrategias, s_i presentes en la población.

De esta forma se puede determinar el pago de una estrategia, σ , dada una población con un perfil de población x , con la siguiente expresión:

$$H(\sigma, x) = \sum_{s_i \in S} x(s_i) H(s, x).$$

Supongamos ahora una población donde todos los individuos adoptan la estrategia σ^* . Con el tiempo, un porcentaje ϵ de la población presentan una mutación, representada por la estrategia σ . A este nuevo perfil de población lo denotaremos por x_ϵ . En este contexto definimos una EEE de la forma siguiente:

Definición 2.2. Una estrategia $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ se dice que es evolutivamente estable (EEE) si para todo $\sigma \neq \sigma^*$ existe un $\epsilon^*(\equiv \epsilon^*(p)) > 0$ tal que

$$H(\sigma^*, x_\epsilon) > H(\sigma, x_\epsilon),$$

para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$.

Esto quiere decir que σ^* es una estrategia que no podrá ser superada por ninguna otra estrategia alternativa, es decir, se mantendrá en la población independientemente de las mutaciones que aparezcan.

Proposición 2.3. *Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ una estrategia en un juego evolutivo con funciones de pagos H_1, \dots, H_n . σ^* será una EEE si y solo si para todo $\sigma (= (\sigma_1, \dots, \sigma_n)) \neq \sigma^*$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. $H_i(\sigma^*) > H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i)$,
2. $H_i(\sigma^*) = H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i)$ y $H_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) > H_i(\sigma)$,

para todo $i = \{1, \dots, n\}$.

Una demostración de esta proposición se encuentra en [7].

Se sigue automáticamente un resultado significativo.

Proposición 2.4. *Sea σ una EEE, entonces será también un equilibrio de Nash.*

Demostración En este caso la condición para que una estrategia sea un equilibrio de Nash será una condición menos restrictiva que la condición (1) de la proposición previa.

Vemos entonces que el concepto de EEE es un refinamiento del equilibrio de Nash.

2.2. Dinámica del replicador

Al introducir el concepto de EEE estamos incorporando un claro carácter dinámico al estudio, ya que centramos nuestro interés en la evolución de las distintas estrategias dentro de la población. En este contexto consideraremos solo estrategias puras.

Denotaremos por n_i el número de individuos que utilizan la estrategia s_i y el número total de individuos en la población será N . Así, la frecuencia de cada una de las estrategias viene será $x_i = \frac{n_i}{N}$.

Definición 2.5. Un estado de población es un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ donde $x_i = \frac{n_i}{N}$.

Presentamos ahora la ecuación del replicador, dando paso al tratamiento dinámico de los juegos.

Denotemos por α y β las tasas de natalidad y de mortalidad, respectivamente, de la población. De esta forma el crecimiento del número de individuos que utilizan la estrategia s_i será

$$\dot{n}_i = (\alpha - \beta + H(s_i, x))n_i.$$

Es claro entonces que la tasa de crecimiento total de la población será:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= \sum_{i=1}^n \dot{n}_i = \sum_{i=1}^n (\alpha - \beta)n_i + \sum_{i=1}^n H(s_i, x)n_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha - \beta + H(s_i, x))n_i = (\alpha - \beta + \sum_{i=1}^n x_i H(s_i, x))N.\end{aligned}$$

Además, si definimos el pago medio de la población como

$$\bar{H}(x) = \sum_{i=1}^n x_i H(s_i, x),$$

siendo $H(s_i, x)$ el pago de un jugador que utiliza la estrategia s_i , se tiene finalmente que

$$\dot{N} = (\alpha - \beta + \bar{H}(x))N.$$

Pero como este estudio se centra en la variación de la frecuencia de las estrategias, nuestro objetivo será despejar \dot{x}_i . Derivando en la igualdad $n_i = x_i N$ obtenemos $\dot{n}_i = \dot{x}_i N + x_i \dot{N}$, despejando y luego sustituyendo en la expresión anterior llegamos a

$$\dot{x}_i N = \dot{n}_i - x_i \dot{N} = (\alpha - \beta + H(s_i, x))x_i N - (\alpha - \beta + \bar{H}(x))x_i N.$$

Dividiendo ambos miembros por N obtenemos el sistema de EDOs:

$$\dot{x}_i = (H(s_i, x) - \bar{H}(x))x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

que es conocido como la ecuación del replicador, donde una estrategia con mejor pago que otras aumentará su proporción dentro de la población.

Es importante destacar que el retrato de fases de la ecuación del replicador es el simplex unitario S_n definido como

$$S_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

Además, como los hiperplanos $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ y $x_i = 0$ son invariantes, también lo será S_n .

2.3. Equilibrios en la ecuación del replicador

Para poder describir la dinámica a largo plazo de la ecuación del replicador será necesario definir algunos conceptos básicos relacionados con el estudio de las EDOs.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \phi(t, x),$$

donde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : S_{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, cumple las condiciones de regularidad suficientes para satisfacer la unicidad de soluciones ($\phi \in C^1(S_{n+1})$) y $x = (x_1, \dots, x_n)$.

En caso de que la variable t no aparezca de forma explícita en las ecuaciones se dirá que el sistema es autónomo, y podremos reescribir el sistema como

$$\dot{x} = \phi(x), \quad (2.1)$$

donde $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : S_n \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Es importante destacar que la ecuación del replicador es un sistema autónomo.

Supongamos ahora que $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S_n$ es tal que $\phi(x^0) = 0$, se tendrá que la función constante $x(t) = x^0$ será solución del sistema (2.1). A este tipo de soluciones las denominaremos puntos críticos.

Los puntos críticos de la ecuación del replicador serán las estrategias $s_i \in S_n$ tales que $(H(s_i, x) = \bar{H}(x)) \forall i \in \text{supp}(s)$. Así, los puntos críticos de $\text{int}(S_n)$ serán las soluciones del sistema de ecuaciones $H(s_1, x) = \dots = H(s_n, x)$ (existe como mucho una solución) y los puntos críticos en el interior de cada una de las subcaras de S_n se obtienen de forma similar. En particular se tendrá que los vértices, e_i , del simplex son siempre puntos críticos.

Introduciremos ahora los conceptos de solución estable, asintóticamente estable e inestable.

Definición 2.6. Una solución $x(t)$ del sistema autónomo (2.1) definida en todo $t \geq 0$ se dirá que es estable si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\bar{x}(t)$ es otra solución que satisface

$$\|x(0) - \bar{x}(0)\| < \delta,$$

entonces $\bar{x}(t)$ está definida en todo $t \geq 0$ y se verifica que

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \epsilon,$$

para todo $t \geq 0$.

Definición 2.7. Una solución $x(t)$ del sistema autónomo (2.1) definida en todo $t \geq 0$ se dirá que es asintóticamente estable si es estable y además

$$\exists \eta > 0 : \|x(0) - \bar{x}(0)\| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0.$$

Diremos que una solución es inestable si no es estable.

Centraremos nuestro estudio en las soluciones de “tipo” punto crítico, de esta forma hablaremos de estabilidad de puntos en lugar de estabilidad de funciones.

Existirá una relación directa entre los equilibrios de Nash del juego y los puntos críticos de la ecuación del replicador. Esto se ve reflejado en el siguiente conjunto de implicaciones:

1. Si x_0 es equilibrio de Nash del juego, entonces es un punto crítico de la ecuación del replicador.
2. Si x_0 es un equilibrio de Nash estricto (equilibrio de Nash donde los pagos son estrictamente mayores al pago obtenido al desviarse unilateralmente), entonces x_0 es un punto crítico asintóticamente estable de la ecuación del replicador.
3. Si el punto crítico x_0 es el límite de una órbita interior, es decir,

$$x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t),$$

con $x_i(0) > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

entonces x_0 es un equilibrio de Nash.

4. Si x_0 es un punto crítico estable de la ecuación del replicador, entonces es un equilibrio de Nash.

Esta serie de implicaciones son conocidas como el “folk theorem” de los juegos evolutivos y serán demostradas más adelante en el trabajo. En general ninguna de las implicaciones inversas son ciertas. Para comprobar esto último veremos un ejemplo, no sin antes introducir una definición clave en el estudio de sistemas dinámicos.

Definición 2.8. Sea $\dot{x} = \phi(x)$ un sistema dinámico que presenta un punto crítico en x^* . Una función de Lyapunov es una función escalar $V(x)$ definida en un entorno del punto crítico ($V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) que cumple las siguientes condiciones

1. $V(x^*) = 0$.
2. $V \in C^1(\Omega)$.
3. $V(x) > 0 \forall x \neq x^*, x \in \Omega$.
4. $V^*(x) = \langle \nabla V(x), \phi(x) \rangle \leq 0 \forall x \neq x^*, x \in \Omega$.

$V^*(x)$ es conocida como la derivada orbital de V .

La razón por la que este concepto es particularmente importante se debe a que, en caso de existir una función de estas características para un punto crítico x^* , este será estable y en caso de que la desigualdad de la cuarta condición sea estricta, el punto será asintóticamente estable.

Ejemplo 2.9. Halcones y Palomas modificado.

En este ejemplo, existen dos especies en la misma población de aves. Los halcones, más agresivos y fuertes, y las palomas, más pequeñas y pasivas. En la lucha por el alimento existirá competencia intraespecie así como interespecie, es decir, los halcones (y análogamente las palomas) tendrán que competir tanto con las palomas como con otros halcones para obtener comida.

Los pagos vendrán en forma de la energía obtenida tras la interacción derivada de la competencia. Así, denotaremos por V a la energía presente en una “comida completa” y por C al coste energético de obtenerla. Las interacciones entre ambas especies vendrá determinada por estos tres casos:

- Si un halcón (H) compite por el alimento con una paloma (P), esta huirá y el halcón se quedará con el alimento. Ninguno de los dos gasta energía.
- Si dos palomas compiten, compartirán el alimento sin luchar.
- Si dos halcones compiten, lucharán por el alimento consumiendo energía.

Este conjunto de interacciones se ve representado en la siguiente tabla de pagos (Cuadro 2.1).

	Halcón	Paloma
Halcón	$(\frac{V}{2} - C, \frac{V}{2} - C)$	$(V, 0)$
Paloma	$(0, V)$	$(\frac{V}{2}, \frac{V}{2})$

Cuadro 2.1: Pagos del juego. Ejemplo 2.9

A la vista de la tabla distinguiremos entre tres casos en función de la relación entre la energía y el coste de obtenerla. Asumiendo siempre que $V, C > 0$.

- Si $V < 2C$ los equilibrios de Nash serán (P, H) y (H, P) que además serán estrictos.
- Si $V = 2C$ existirán tres equilibrios, (H, H) , (P, H) y (H, P) sin ser ninguno estricto.
- Si $V > 2C$ no existirá ningún equilibrio de Nash.

Introduciendo ahora la dinámica el replicador, consideramos x_1 y x_2 la proporción de halcones y palomas respectivamente. Se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(x_1(\frac{V}{2} - C) + x_2V - x_1^2(\frac{V}{2} - C) - x_1x_2V - x_2^2\frac{V}{2}) \\ &= x_1(x_1(\frac{V}{2} - C) + (1 - x_1)V - x_1^2(\frac{V}{2} - C) - x_1(1 - x_1)V - (1 - x_1)^2\frac{V}{2}), \end{aligned}$$

Reordenando y agrupando convenientemente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Cx_1\left(\left(\frac{V}{2C} - 1\right)x_1 + (1 - x_1)^2\frac{V}{C} - \left(\frac{V}{2C} - 1\right)x_1^2 - \frac{V}{2C}(1 - x_1)^2\right) \\ &= Cx_1(1 - x_1)\left(\left(\frac{V}{2C} - 1\right)x_1 + \frac{V}{2C}(1 - x_1)\right), \end{aligned}$$

llegamos a la ecuación $\dot{x}_1 = Cx_1(1 - x_1)\left(\frac{V}{2C} - x_1\right)$, que se hará cero cuando $x_1 = 0, 1, \frac{V}{2C}$.

Como $x_1 + x_2 = 1$, una simple comprobación en

$$\dot{x}_2 = x_2\left(\frac{V}{2}x_2 - \left(\frac{V}{2} - C\right)x_1^2 - x_1x_2V - \frac{V}{2}x_2^2\right),$$

confirma que los puntos de equilibrio del sistema son $P_1(1, 0)$, $P_2(0, 1)$ y $P_3\left(\frac{V}{2C}, 1 - \frac{V}{2C}\right)$.

Calcularemos la matriz jacobiana para estudiar la estabilidad de los puntos críticos. Esta vendrá dada por $J(x_1, x_2) =$

$$\begin{pmatrix} x_1(V - 2C) + x_2V - 3x_1^2\left(\frac{V}{2} - C\right) - 2x_1x_2V - x_2^2\frac{V}{2} & x_1V - x_1^2V - 2x_1x_2\frac{V}{2} \\ -2x_1x_2\left(\frac{V}{2} - C\right) - x_2^2V & x_2V - x_1^2\left(\frac{V}{2} - C\right) - 2x_2x_1V - 3x_2^2\frac{V}{2} \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana evaluada en cada uno de los puntos tomará la siguiente forma

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{V}{2} - C\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{V}{2} - C\right) \end{pmatrix},$$

con autovalores $\lambda_{P_1} = \left(-\left(\frac{V}{2} - C\right), -\left(\frac{V}{2} - C\right)\right)$.

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} \frac{V}{2} & 0 \\ -V & -\frac{V}{2} \end{pmatrix},$$

con autovalores $\lambda_{P_2} = \left(\frac{V}{2}, -\frac{V}{2}\right)$.

$$J\left(\frac{V}{2C}, 1 - \frac{V}{2C}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{V}{2}\left(1 - \frac{V}{2C}\right) & 0 \\ -V & -\frac{V}{2}\left(1 - \frac{V}{2C}\right) \end{pmatrix},$$

con autovalores $\lambda_{P_3} = \left(-\frac{V}{2}\left(1 - \frac{V}{2C}\right), -\frac{V}{2}\left(1 - \frac{V}{2C}\right)\right)$.

Distinguimos tres casos a la hora de evaluar los puntos críticos:

- Si $V > 2C$ entonces P_2 y P_3 son inestables, por tener autovalores con parte real positiva, y P_1 asintóticamente estable por tener ambos autovalores con parte real negativa. De esta forma vemos que P_1 es un punto crítico del sistema que no es equilibrio de Nash del juego.

- $V = 2C$ entonces P_2 será inestable y P_1 asintóticamente estable (lo veremos más adelante). Sin embargo, en este caso P_1 no será estricto, por lo que llegamos a un ejemplo de punto crítico asintóticamente estable que no es un equilibrio de Nash estricto.
- $V < 2C$ entonces P_2 y P_1 son inestables, por tener autovalores con parte real positiva, mientras que P_3 es asintóticamente estable, por tener ambos autovalores con parte real negativa.. Así P_2 y P_1 serán ejemplos de equilibrios de Nash que no son puntos estables del sistema.

Veamos que efectivamente, cuando $V = 2C$, P_1 es asintóticamente estable. En este caso el sistema toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Vx_1x_2 - Vx_1^2x_2 - \frac{V}{2}x_2^2x_1 = Vx_1x_2\left(1 - x_1 - \frac{x_2}{2}\right), \\ \dot{x}_2 &= \frac{V}{2}x_2^2 - x_1x_2^2 - \frac{V}{2}x_2^3 = Vx_2^2\left(\frac{1}{2} - x_1 - \frac{x_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Definimos la función $\hat{V} = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$, que será nuestra candidata a función de Lyapunov estricta. Es trivial que cumple todas las condiciones exceptuando la relacionada con la derivada orbital, que comprobamos a continuación.

$$\begin{aligned} \hat{V}^* &= 2(x_1 - 1)Vx_1x_2\left(1 - x_1 - \frac{x_2}{2}\right) + 2x_2Vx_2^2\left(\frac{1}{2} - x_1 - \frac{x_2}{2}\right) \\ &= -2x_2Vx_1x_2\frac{x_2}{2} + x_2^3V(-x_1) = -Vx_1x_2^3 - Vx_1x_2^3 < 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in S_2$ excepto los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ por lo que para un entorno del punto crítico $(1, 0)$, en este caso $\text{Int}(S_2)$, la función \hat{V} satisface las condiciones para ser función de Lyapunov estricta y con esto podemos concluir que $(1, 0)$ es asintóticamente estable.

Por último, trabajaremos con otro ejemplo clásico para terminar de ilustrar los nuevos conceptos. Además, este ejemplo será estudiado en profundidad más adelante.

Ejemplo 2.10. Piedra, papel o tijera.

Consideramos el archiconocido juego de piedra, papel o tijera. Recordemos su funcionamiento: Cada jugador puede escoger entre jugar piedra (R), papel (P) o tijera (S) (se tiene que $S_1 = S_2 = \{R, P, S\}$) de forma que los jugadores empatarán si utilizan la misma estrategia. Además piedra vencerá a tijera, tijera a papel y papel a piedra. Esto se representa en la siguiente tabla de pagos.

El único equilibrio de Nash del juego será el perfil de estrategias (σ, σ) donde $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$, sin embargo, este no será un EEE ya que:

$$H(\sigma, R) = \frac{1}{3}(H(R, R) + H(P, R) + H(S, R)) = 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

	R	P	S
R	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
P	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
S	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Cuadro 2.2: Pagos del juego. Ejemplo 2.10

y $H(R, R) = 0$ y por lo tanto σ no satisface las condiciones de la definición.

Ahora, consideremos que x_1, x_2, x_3 representan las proporciones de jugadores que utilizan R, P y S respectivamente, de esta forma el estado de la población será el vector $x = (x_1, x_2, x_3)$. Así, tendremos:

$$H(R, x) = x_1H(R, R) + x_2H(R, P) + x_3H(R, S) = x_3 - x_2,$$

$$H(P, x) = x_1H(P, R) + x_2H(P, P) + x_3H(P, S) = x_1 - x_3,$$

$$H(S, x) = x_1H(S, R) + x_2H(S, P) + x_3H(S, S) = x_2 - x_1.$$

Finalmente, introduciendo la ecuación del replicador obtenemos:

$$\dot{x}_1 = x_1(x_3 - x_2),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(x_1 - x_3),$$

$$\dot{x}_3 = x_3(x_2 - x_1).$$

Los puntos críticos en este caso serán los correspondientes a R, S y P ((1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) respectivamente) y el punto $e = (1/3, 1/3, 1/3)$ (equilibrio de Nash).

Para estudiar el comportamiento del sistema utilizaremos como función de Lyapunov la función

$$V(x) = \frac{1}{2} \left((x_1 - \frac{1}{3})^2 + (x_2 - \frac{1}{3})^2 + (x_3 - \frac{1}{3})^2 \right).$$

Veamos que efectivamente esta función es de Lyapunov en e . Es claro que $V(e) = 0$, que $V \in C^1(S_3)$ y que $V(x) > 0 \forall x \in S_3 \setminus \{e\}$. Falta comprobar que $V^*(x) \leq 0 \forall x \in S_3$:

$$\phi(x) = (x_1(x_3 - x_2), x_2(x_1 - x_3), x_3(x_2 - x_1)).$$

$$\nabla V(x) = (x_1 - \frac{1}{3}, x_2 - \frac{1}{3}, x_3 - \frac{1}{3}).$$

Así tenemos que la derivada orbital vendrá dada por

$$V^*(x) = x_1^2(x_2 - x_3) + x_2^2(x_1 - x_3) + x_3^2(x_2 - x_1).$$

Ahora suponemos, si pérdida de generalidad, que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ se tendrá entonces

$$V^*(x) \leq x_3^2(x_3 - x_2) + x_3^2(x_1 - x_3) + x_3^2(x_2 - x_1) = x_3^2(x_3 - x_2 + x_1 - x_3 + x_2 - x_1) = 0.$$

Como $V(x)$ es una función de Lyapunov no estricta para e , se tendrá entonces que e es un punto estable pero no necesariamente asintóticamente estable. Además puede probarse (ver [7] o [10]) que las órbitas serán ciclos periódicos alrededor de e .

2.4. Regiones de atracción y puntos críticos

Hasta este punto del trabajo, hemos realizado un estudio utilizando funciones de pago, ya que esto es lo más habitual en el campo de la teoría de juegos. Sin embargo, como a partir de este punto seguiremos una temática más relacionada con los sistemas dinámicos, será necesario comenzar a trabajar con matrices de pago para facilitar el estudio. No obstante, todos los resultados previos pueden ser expresados con una notación basada en matrices de pago, así como los resultados que serán obtenidos a continuación podrán ser expresados con funciones de pago.

Las matrices de pago están relacionadas con las funciones de pago de la siguiente manera:

Consideramos el simplex

$$S_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

que representan el conjunto de estrategias de ambos jugadores, al ser el juego simétrico.

Consideremos ahora $x^1, x^2 \in S_n$ y $N = \{1, \dots, n\}$. Se tiene que la función de pago del jugador k viene dada por

$$H_k(x^1, x^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H(i, j)(x_i^1)(x_j^2) = x^1 A_k (x^2)^t.$$

La matriz $n \times n$ $A_k = H_k(i, j)_{i, j \in N}$ se denominará matriz de pagos del jugador k , con $k = 1, 2$.

Todos los juegos que consideraremos de aquí en adelante serán juegos bipersonales de suma nula. De esta forma se tendrá que $A := A_1 = -A_2$ por lo que el juego quedará totalmente determinado por la matriz de pagos $A = H(i, j)_{i, j \in N}$.

En esta sección estudiaremos las regiones de atracción y los puntos críticos de las caras del simplex S_n . Ya vimos que una EEE es también equilibrio de Nash, veamos qué ocurre con la capacidad de atracción.

Definición 2.11. Región de atracción.

Consideremos el sistema de EDOs autónomo

$$\dot{x} = \phi(x),$$

con un punto crítico asintóticamente estable $x_0 \in S_n$. Sea $\psi(t; x_0)$ una solución del sistema, definimos la región de atracción de x_0 , $R \subset S_n$ como

$$R = \{y_0 \in S_n : \psi(t; y_0) \text{ esta definida } \forall t \geq 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t; y_0) - x_0\| = 0\}.$$

siendo $\psi(t; y_0)$ una solución del sistema tal que $\psi(0) = y_0$.

Es decir, la región de atracción de un punto crítico es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^n tales que toda solución del sistema con condiciones iniciales en el conjunto, converja al punto cuando $t \rightarrow \infty$. Diremos que un punto es atractor, si tiene como región de atracción algún entorno de sí mismo. Por último, diremos que un atractor es globalmente atractor si su región de atracción es todo el dominio de definición de ϕ (en este caso, S_n). De manera análoga se pondrán definir los conceptos de repulsor y región de repulsión.

Antes de enunciar los próximos resultados, reformularemos la proposición (2.3) para adecuarla al contexto de las matrices de pago.

Proposición 2.12. Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ una estrategia en un juego evolutivo con matriz de pago A . σ^* será una EEE si y solo si para todo $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \neq \sigma^*$ se cumple una de las siguientes condiciones:

- $\sigma A \sigma^* < \sigma^* A \sigma^*$.
- $\sigma A \sigma^* = \sigma^* A \sigma^*$ y $\sigma A \sigma < \sigma^* A \sigma$.

La primera condición nos asegura que σ^* es un equilibrio de Nash, es decir, ninguna estrategia obtiene mejores pagos “contra” la EEE, que la propia EEE. La segunda condición asegura que en caso de que una estrategia sea igual de buena contra la EEE que la propia EEE, entonces lo hará peor que la EEE contra sí misma.

Definición 2.13. Sea $f : R^n \rightarrow R$. Diremos que un punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ perteneciente al dominio de f es un punto estacionario de f si

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n) = 0.$$

Notación Denotaremos por ϕ_A al flujo inducido por A en S_n . El flujo inverso lo denotaremos por $-\phi_A = \phi_{-A}$.

Teorema 2.14. Una *EEE* es también un atractor.

Demostración Supongamos que tenemos una *EEE*, e , para el sistema inducido por la matriz A . Definimos la función

$$V = \prod_{i=1}^n x_i^{e_i}.$$

Para demostrar que e es un atractor, probaremos que existe un entorno N de e en el que V crece radialmente hacia e (y por ello e es el máximo de V en N y además el único punto estacionario de V). Además veremos que todas las órbitas dentro de una curva de nivel de V tienden a e .

En otras palabras, tendremos que ver que para todo $x \in N - e$ se cumplen las siguientes condiciones

1. $\nabla V \cdot (e - x) > 0$.

2. $V^* > 0$.

Haremos la prueba distinguiendo dos casos, según e esté en el interior del simplex o no.

Caso 1: $e \in \text{Int}(S_n)$.

(1) Sea $N = \text{Int}(S_n)$. Si $x \in \text{Int}(S_n) - e$ entonces $V > 0$ y

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = V \frac{e_i}{x_i},$$

de esta forma

$$\begin{aligned} \nabla V \cdot (e - x) &= V \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{x_i} (e_i - x_i) = V \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2 - e_i x_i}{x_i} - 1 + 1 \\ &= V \sum_{i=1}^n \frac{e_i^2 - e_i x_i}{x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{e_i x_i}{x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_i} = V \sum_{i=1}^n \frac{(e_i - x_i)^2}{x_i}. \end{aligned}$$

Por lo que, como $x \neq e$, $\nabla V \cdot (e - x) > 0$.

(2) Definimos ahora $f(x) = eAe - xAe$, $g(x) = eAx - xAx$ de forma que las condiciones de la proposición (2.12) se transforman en

- $f(x) > 0$.
- $f(x) = 0$ y $g(x) > 0$.

para todo $x \neq e$.

Sea $x \in \text{Int}(S_n) - e$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos $x_t = tx + (1-t)e$. Entonces $x_t \in S_n$ para $|t|$ suficientemente pequeño, ya que $e \in \text{Int}(S_n)$ y por ello $f(x_t) \geq 0$ por ser e un *EEE*. Se tiene además que

$$f(x_t) = eAe - txAe - (1-t)eAe = t(eAe - xAe) = tf(x),$$

por lo que $tf(x) \geq 0$ para $|t|$ suficientemente pequeño y $f(x) = 0$. Esto nos asegura que $g(x) > 0$ de nuevo porque e es una EEE. Finalmente

$$V^* = V \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{x_i} x_i ((Ax)_i - xAx) = V \left(\sum_{i=1}^n e_i (Ax)_i - xAx \sum_{i=1}^n e_i \right) = Vg(x) > 0.$$

Con esto concluimos la demostración para el caso $e \in \text{Int}(S_n)$.

Es importante destacar que, como en este caso $N = \text{Int}(S_n)$, la región de atracción de e contiene a $\text{Int}(S_n)$. Sin embargo, como $\text{Fr}(S_n)$ es invariante, la región de atracción está contenida en $\text{Int}(S_n)$. Por esto se tiene que la región de atracción será exactamente $\text{Int}(S_n)$.

Caso 2: $e \in \text{Fr}(S_n)$.

(1) Sea Γ una cara de S_n y supongamos $e \in \Gamma$.

Definimos ahora $N_1 = \text{Int}(\Gamma) \cup \text{Int}(S_n)$, $G = \text{Fr}(S_n) - \text{Int}(\Gamma) = S_n - N_1$.

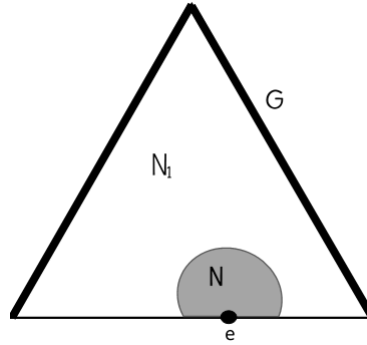


Figura 2.1: Cara Γ del n-síplex

Se tiene que si $x \in N_1 - e$ entonces $x_i \neq 0$ si $x_i \in \Gamma$. Además $e_i = 0$ si $x_i \notin \Gamma$, por esto

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \begin{cases} V \frac{e_i}{x_i}, & x_i \in \Gamma, \\ 0, & x_i \notin \Gamma. \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} \nabla V \cdot (e - x) &= V \sum_{i \in \Gamma} \frac{e_i}{x_i} (e_i - x_i) = V \sum_{i \in \Gamma} \frac{(e_i - x_i)^2}{x_i} - V \sum_{i \in \Gamma} \frac{x_i^2 - e_i x_i}{x_i} \\ &= V \sum_{i \in \Gamma} \frac{(e_i - x_i)^2}{x_i} + V(1 - \sum_{i \in \Gamma} x_i). \end{aligned}$$

donde el primer término será > 0 y el segundo ≥ 0 por lo que $\nabla V \cdot (e - x) > 0$.

(2) Si $x \in N_1$ entonces

$$V^* = V \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{x_i} x_i ((Ax)_i - xAx) = Vg(x),$$

ya que $e_i = 0$ si $x_i \notin \Gamma$.

Tendremos que buscar un entorno, N_1 , de e contenido en N de forma que $g(x)$ sea positivo en $N - e$.

Definimos entonces $G_0 = G \cap f^{-1}(\{0\})$.

De esta manera, $g > 0$ en G_0 ya que f es cero en esos puntos. Además, $g > 0$ en un entorno abierto de G_0 , G_1 .

Sea $G_2 = G - G_1$ que será entonces cerrado en G por ser G_1 abierto y, como G_2 es acotado, será también compacto.

Como $f > 0$ en G_2 (porque $f^{-1}(\{0\}) \subset G_1$), la función $\frac{g(x)}{f(x)}$ estará definida y será continua en G_2 , que como es compacto, $\frac{g(x)}{f(x)}$ estará acotada.

Escogemos entonces un ϵ , $0 < \epsilon < 1/2$, tal que $|\frac{g(x)}{f(x)}| < \frac{1}{2\epsilon}$ en G_2 , lo que es equivalente a

$$\epsilon|g(x)| < \frac{1}{2}f(x),$$

para todo x en G_2 .

Sea ahora N el entorno de e en N_1 dado por

$$N = \{x_t = tx + (1-t)e : x \in G, 0 < \epsilon\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} g(x_t) &= eA(tx + (1-t)e) - (tx + (1-t)e)A(tx + (1-t)e) \\ &= t^2eAx - t^2xAx - t(1-t)x Ae - t(1-t)x Ae = t^2g(x) + t(1-t)f(x). \end{aligned}$$

Ahora, si $0 < t < \epsilon$ y $x \in G_1$, se cumple que $g(x) > 0$ y $f(x) \geq 0$. Si $x \in G_2$, $f(x) > 0$ por lo que el segundo término es > 0 y además será mayor que el primer término ya que

$$|tg(x)| < \epsilon|g(x)| < \frac{1}{2}f(x) < (1-t)f(x).$$

Así concluimos que $g > 0$ y con esto termina la demostración.

Teorema 2.15. *Se cumple que:*

- Si una EEE pertenece a $Int(S_n)$, entonces esta será la región de atracción y no existirán más atractores.
- Si un atractor pertenece a $Int(S_n)$, entonces su región de atracción puede estar contenida en $Int(S_n)$ y pueden existir otros atractores en $Fr(S_n)$, pero no en $Int(S_n)$.

Antes de la demostración será necesario definir dos conceptos.

Definición 2.16. Sea (X, T) un espacio topológico y $E \subset X$ un subconjunto de X . Se define la clausura del conjunto E , \bar{E} , como:

$$\bar{E} = \{x \in X : \forall U(x), U(x) \cap E \neq \emptyset\}.$$

Definición 2.17. Sea (X, T) un espacio topológico y $E \subset X$ un subconjunto de X . Se dirá que E es denso en X si y solo si $\bar{E} = X$, es decir, si la clausura del conjunto es igual al espacio.

Demostración Vimos ya en la demostración del teorema (2.14) que una EEE en $Int(S_n)$ tendrá región de atracción $Int(S_n)$, así, no puede existir otro atractor en S_n excepto que su región de atracción fuera un conjunto no vacío contenido en $S_n - Int(S_n)$ lo cual es imposible ya que $Int(S_n)$ es denso en S_n .

La demostración de la segunda afirmación puede ser consultada en [14].

Deduciremos ahora la expresión de la ecuación del replicador en forma matricial, de la expresión calculada previamente. Transformaremos miembro a miembro la ecuación

$$\dot{x}_i = (H(s_i, x) - \bar{H}(x))x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

En primer lugar

$$\bar{H}(x) = \sum_{i=1}^n x_i H(s_i, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{s \in S} x_i x(s) H(s, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j = x^T A x,$$

y

$$H(s_i, x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = (Ax)_i.$$

De esta manera,

$$\dot{x}_i = (H(s_i, x) - \bar{H}(x))x_i = x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j \right) = x_i ((Ax)_i - x^T A x).$$

Llegados aquí, es claro que los puntos fijos del sistema en $Int(S_n)$ serán las soluciones de

$$(Ax)_1 = \dots = (Ax)_n,$$

tales que $x_i \in S_n \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Estamos ya en condiciones de demostrar algunas de las implicaciones del “folk theorem“, en concreto demostraremos las implicaciones 1, 3 y 4.

Demostración Folk Theorem

(I)

Sea \bar{x} un equilibrio de Nash de un juego con matriz de pagos A .

Al ser el juego simétrico, se tendrá que existe una constante k tal que $(A\bar{x})_i = k$ para todo $i = 1, \dots, n$ con $\bar{x}_i > 0$.

Por lo tanto cumplen las condiciones para ser un punto crítico de la ecuación del replicador,

como acabamos de ver.

(III)

Supongamos que $x(t) \in S_n$ converge a un punto \bar{x} y que \bar{x} no es un equilibrio de Nash, por esto, no será un mejor respuesta para si mismo. El conjunto de mejores respuestas de un jugador dada una estrategia, \hat{x} , del otro jugador se define como:

$$\bar{x} \in S_n : \bar{x}A\hat{x} \geq xA\hat{x}, \forall x \in S_n.$$

Es decir, existirán una estrategia s_i tal que

$$\bar{x}Ax\bar{x} < s_iAx\bar{x}.$$

Es decir, existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$s_iA\bar{x} - \bar{x}A\bar{x} > \epsilon,$$

lo que implica que $\dot{x}_i/x_i > \epsilon$ para t suficientemente grande, lo cual contradice el hecho de que $x(t)$ sea convergente.

(IV)

Supongamos que \bar{x} no es un equilibrio de Nash. Se tendrá por continuidad que existirán un i y un $\epsilon > 0$ tales que $(Ax)_i - xAx > \epsilon$ para todo x en un entorno de \bar{x} .

Para esos x , la componente x_i crece exponencialmente debido a que $\dot{x}_i > \epsilon x_i$, que entra en contradicción con el hecho de que el punto es estable.

Ejemplo 2.18. Atractor pero no EEE

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

ϕ_A es un flujo en el triángulo $x_0x_1x_2$. Tendremos en este caso el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_0[6x_1 - 4x_2 + (3x_1 + x_2)x_0 - (6x_0 + 3x_2)x_1 + (4x_0 - 5x_1)x_2], \\ \dot{x}_1 &= x_1[-3x_0 + 5x_2 + (3x_1 + x_2)x_0 - (6x_0 + 3x_2)x_1 + (4x_0 - 5x_1)x_2], \\ \dot{x}_2 &= x_2[-x_0 + 3x_1 + (3x_1 + x_2)x_0 - (6x_0 + 3x_2)x_1 + (4x_0 - 5x_1)x_2]. \end{aligned}$$

Tras una serie de cálculos se obtienen seis puntos críticos del sistema (en S_n): el baricentro $e = (1/3, 1/3, 1/3)$, los tres vértices del triángulo $x_0 = (1, 0, 0)$, $x_1 = (0, 1, 0)$, $x_2 = (0, 0, 1)$ y dos puntos adicionales $P_1 = (4/5, 0, 1/5)$ y $P_2 = (0, 5/8, 3/8)$.

Analizando los autovalores de la matriz jacobiana en cada caso, llegamos a las siguientes conclusiones:

- $\lambda_e = (\frac{-2}{3}, \frac{-1-i\sqrt{2}}{3}, \frac{-1+i\sqrt{2}}{3})$, $\lambda_{x_0} = (0, -1, -3)$. Tanto e como x_2 serán puntos atractores: e por tener todos los autovalores con parte real negativa y x_0 por ser una EEE, como veremos más adelante.
- $\lambda_{x_1} = (0, 3, 6)$ tiene todos los autovalores reales no negativos, por lo tanto x_1 es un repulsor.
- $\lambda_{x_2} = (0, -4, 5)$, $\lambda_{P_1} = \frac{1}{25}(-82, -36, 20)$, $\lambda_{P_2} = (33/8, -225/6, -225/6)$; x_2, P_1 y P_2 serán puntos de silla ya que presentan autovalores con parte real positiva y autovalores con parte real negativa.

Además, se tiene que e no será una EEE ya que $x_0 A e - e A e = 0$ y $x_0 A x_0 - e A x_0 = 4/3$.

Por último, se tendrá que x_0 es una EEE ya que $x A x_0 - x_0 A x_0 = -3x^1 - x^2 \leq 0$ para todos los puntos de $S_n - x_0$.

Introducimos ahora el concepto de equivalencia y estabilidad de juegos, que serán protagonistas de nuestros próximos resultados.

Sea M_{n+1} el espacio de los juegos con $n + 1$ estrategias, que puede ser identificado con el espacio de las matrices reales $(n + 1) \times (n + 1)$.

Definición 2.19. Sean $A, B \in M_{n+1}$. Diremos que A y B son equivalentes ($A \sim B$) si existe un homeomorfismo de S_n en sí mismo que preserve las caras, en el sentido de que la imagen de una cara es otra cara, no necesariamente ella misma.

Definición 2.20. Diremos que A es estable si tiene un entorno de equivalencias en M_{n+1} .

Teorema 2.21. *Un juego estable tendrá como mucho un punto crítico en el interior de cada cara de S_n .*

Una demostración de este resultado se encuentra en [14].

Veamos un ejemplo en el que aplicamos algunos de los resultados previos para estudiar la estabilidad del sistema planteado.

Ejemplo 2.22. Sea $A = I$ la matriz identidad 3x3. Obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_0(x_0 - (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)), \\ \dot{x}_1 &= x_1(x_1 - (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)), \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_2 - (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)). \end{aligned}$$

Este sistema presenta un punto crítico en el baricentro y uno en cada vértices de S_n . Comprobaremos que los vértices son atractores y el baricentro de S_n , e , es repulsor. Para comprobar que los vértices son atractores basta con ver que los tres son EEEs (por el teorema 2.14); lo verificaremos para x_0 ya que los otros dos casos son análogos.

Se tiene que $xAx_0 = x^1$ y $x_0Ax_0 = 1$, y como $x^1 < 1 \forall x^1 \in S_n - x_0$, x_0 será un EEE.

Consideramos ahora el sistema inducido por la matriz $-I$

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= x_0(-x_0 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_1 &= x_1(-x_1 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-x_2 + x_0^2 + x_1^2 + x_2^2),\end{aligned}$$

que presenta los mismos puntos críticos que el sistema anterior, aunque solo estudiaremos a e . Si $x \in S_n - e$ entonces $x Ae - e Ae = -1/3(x_0 + x_1 + x_2) + 1/3 = 0$, además $x Ax - e Ax = -(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) - 1/3 < 0$, $\forall x \in S_n - e$ por lo que e será una EEE. Aplicando ahora el teorema (2.14) y el teorema (2.15), e es un atractor para ϕ_{-I} y además no existen otros puntos críticos en $Int(S_n)$.

Por esto, e es un repulsor para ϕ_I .

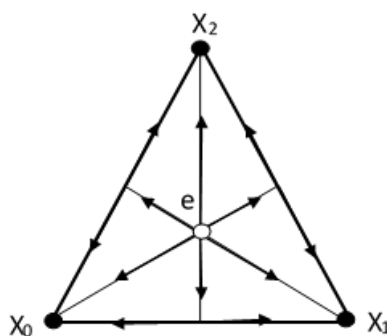


Figura 2.2: Retrato de fases. Ejemplo 2.22.

2.5. Bifurcaciones

Como pequeña introducción, diremos que la teoría de bifurcaciones es la rama matemática que estudia el cambio en la estructura topológica o cualitativa de una familia de curvas, en nuestro caso las soluciones de una familia de ecuaciones diferenciales. De esta manera, una bifurcación ocurre cuando un ligero cambio (continuo) en las condiciones iniciales del sistema provoca un cambio en el comportamiento del mismo.

La nomenclatura de “bifurcación“ fue propuesta por Henri Poincaré en 1885, en el que sería el primer trabajo en torno a un sistema que presentaba este comportamiento.

Estas bifurcaciones se pueden clasificar en dos principales grupos:

- Bifurcaciones locales: pueden ser analizadas a través de los cambios en las propiedades de la estabilidad local del equilibrio (puntos críticos).
- Bifurcaciones globales: no pueden ser analizadas en su totalidad a través de los cambios en las propiedades de la estabilidad local del equilibrio. Suelen ocurrir cuando “chocan” dos conjuntos invariantes del sistema.

Estudiaremos únicamente bifurcaciones locales, ya que pueden ser estudiadas a través de los puntos críticos del sistema. Comenzaremos analizando el tipo de bifurcaciones que pueden ocurrir en juegos parametrizados, en particular, analizaremos la posibilidad de que existan bifurcaciones de Hopf.

De manera poco formal diremos que una bifurcación de Hopf ocurre cuando al variar un parámetro de un sistema dinámico este presenta un cambio en la estabilidad del punto crítico en estudio, dando origen o desapareciendo una órbita periódica.

A continuación estudiaremos la existencia de bifurcaciones de Hopf en dos ejemplos.

Ejemplo 2.23. Piedra-Papel-Tijera.

Ya vimos que la matriz de pagos asociada al juego es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y así la dinámica asociada vendrá dada por:

$$\dot{x}_0 = x_0(x_1 - x_2),$$

$$\dot{x}_1 = x_1(x_2 - x_0),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(x_0 - x_1).$$

Como vimos previamente, las órbitas de ϕ_A en $\text{Int}(S_n) - e$ serán curvas cerradas simples alrededor de e .

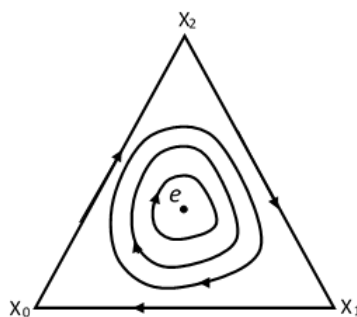


Figura 2.3: Retrato de fases. Ejemplo 2.23

Veremos ahora qué ocurre al introducir una perturbación.

Sea entonces

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1+\epsilon & -1 \\ -1 & 0 & 1+\epsilon \\ 1+\epsilon & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que el ejemplo anterior es el caso $\epsilon = 0$.

Para $\epsilon \neq 0$ la dinámica vendrá dada por

$$\dot{x}_0 = x_0(x_1 - x_2 + \epsilon(x_1 - \delta)),$$

$$\dot{x}_1 = x_1(x_2 - x_0 + \epsilon(x_2 - \delta)),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(x_0 - x_1 + \epsilon(x_0 - \delta)),$$

siendo $\delta = x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0$.

Definimos ahora la función $V(x) = x_0x_1x_2$. Se tendrá que

$$\nabla V(x) = (x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1),$$

por tanto

$$V^*(x) = \sum_{i=0}^2 x_i x_{i+1} x_{i+2} (x_{i+1} - x_{i+2} + \epsilon(x_1 - \delta)) = \sum_{i=0}^2 \epsilon(x_1 - \delta),$$

considerando los subíndices módulo 3 (es decir $i + 3 = i$).

De esta forma $V^* = \epsilon(1 - 3\delta)$, pero δ tiene un máximo de $1/3$ en el baricentro e y ningún otro punto estacionario en $Int(S_n)$. Siguiendo un razonamiento análogo al utilizado en la demostración del Teorema (2.14) concluimos que: Si $\epsilon > 0$ entonces $V^* > 0$ en $Int(S_n) - e$ y por lo tanto e es un atractor con región de atracción $Int(S_n)$.

De forma similar, si $\epsilon < 0$ entonces $V^* < 0$ en $Int(S_n) - e$ y así e es un repulsor con región de repulsión $Int(S_n)$.

Por lo tanto cuando el parámetro pasa por el valor crítico el flujo presenta una bifurcación de Hopf ya que el punto crítico, al pasar de atractor a repulsor, presenta un ciclo periódico.

Es importante destacar que este es un caso “degenerado“ en el sentido de que todos los ciclos aparecen en el valor crítico $\epsilon = 0$ y, por lo tanto, no existirán ciclos ni antes ni después de este. Si añadimos una dimensión aparecerán bifurcaciones de Hopf, como veremos en el próximo ejemplo.

Para probarlo será necesario enunciar primero el teorema de bifurcación de Hopf:



Figura 2.4: Retratos de fase según el parámetro. Ejemplo 2.23

Teorema 2.24. *De bifurcación de Hopf.*

Sea

$$\dot{x}(t) = \phi_\epsilon(x)$$

una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales de n dimensiones, dependientes de un parámetro real ϵ . Sea x_ϵ un punto crítico del sistema, y supongamos que todos los autovalores de la matriz jacobiana evaluada en x_ϵ tienen parte real negativa a excepción de un par de autovalores complejos conjugados

$$\alpha(\epsilon) \pm i\beta(\epsilon),$$

tales que $\alpha(\epsilon)$ y ϵ comparten signo y $\beta(0) \neq 0$. Esto quiere decir que x_ϵ será un nodo estable para $\epsilon < 0$ e inestable para $\epsilon > 0$.

Supongamos además que se cumplen tres condiciones adicionales:

- Las componentes de $\phi_\epsilon(x)$ son analíticas, es decir, pueden ser desarrolladas como una serie de potencias convergente.
- $(\frac{d\alpha}{d\epsilon})|_{\epsilon=0} > 0$.
- x_0 es asintóticamente estable.

Entonces, para valores positivos y suficientemente pequeños del parámetro ϵ , el punto crítico x_ϵ es inestable y está rodeado por un atractor periódico que depende del valor de ϵ .

Ejemplo 2.25. Bifurcaciones de Hopf generales

Consideremos en este caso la matriz

$$A = 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comenzamos considerando el caso crítico $\epsilon = 0$. Veremos que el baricentro e del tetraedro S_n es un atractor con región de atracción $Int(S_n)$.

Para ello utilizaremos las coordenadas $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ centradas en e dadas por

$$y = (x_0 + x_2) - (x_1 + x_3),$$

$$z = z_1 + iz_2 = (x_0 - x_2) + i(x_1 - x_3),$$

siendo i la constante imaginaria. Para el tratamiento de la variable compleja ha sido consultado [16].

Se tiene entonces que

$$\dot{x}_0 = x_0(4x_1 - 4(x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_0x_3)).$$

Considerando que

$$y^2 - 1 = x_0^2 + 2x_0x_1 + x_2^2 - 2(x_0 + x_2)(x_1 + x_3) + x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - 1.$$

Sumando y restando términos de forma adecuada y teniendo en cuenta que $x \in S_n$, se llega a

$$\begin{aligned} y^2 - 1 &= -4x_0x_1 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 4x_0x_3 + x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2 + x_1^2 \\ &+ 2x_1x_3 + x_3^2 + 2x_0x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_0x_3 - x_0 - x_1 - x_2 - x_3. \end{aligned}$$

Sacando factor común cada una de las variables para eliminar términos obtenemos que

$$x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + 2x_0x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_0x_3 - x_0 - x_1 - x_2 - x_3 = 0,$$

llegamos finalmente a que

$$\dot{x}_0 = x_0(4x_1 - 1 + y^2).$$

Razonando de forma análoga para cada una de las variables se tiene que la dinámica vendrá dada entonces por el sistema

$$\dot{x}_0 = x_0(4x_1 - 1 + y^2),$$

$$\dot{x}_1 = x_1(4x_2 - 1 + y^2),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(4x_3 - 1 + y^2),$$

$$\dot{x}_3 = x_3(4x_0 - 1 + y^2).$$

Se podrá reescribir el sistema en función de y, z . Derivando las expresiones del cambio de variable y tras una serie de cálculos se llega al siguiente sistema:

$$\dot{y} = -y + 4z_1z_2 + y^3,$$

$$\dot{z} = -iz - (1 - i)y\bar{z} + y^2z.$$

La aproximación lineal en el punto crítico vendrá dada por

$$\dot{y} = -y,$$

$$\dot{z} = iz,$$

por lo que el punto crítico tendrá autovalores $-1, \pm i$. A diferencia del ejemplo anterior, en este caso e será un atractor. Lo comprobamos:

Consideremos la función $V = x_0x_1x_2x_3$, que tendrá un máximo en el baricentro y ningún otro punto estacionario en $Int(S_n)$.

Así, $V^* = 4Vy^2$, $V^* > 0$ en $Int(S_n)$ excepto para los puntos en el plano $y = 0$, donde $V^* = 0$.

Así que, por un razonamiento análogo al utilizado al comienzo de la demostración del Teorema (2.14), e será un atractor con región de atracción $Int(S_n) \setminus \{(y, z) \in S_n : y = 0\}$. Bastará entonces con probar que cuando $y = 0$ las órbitas salen del plano $y = 0$, entrando en la región de atracción. Distinguiremos tres casos:

- Si $y = 0$ y $z_1z_2 \neq 0$, entonces $\dot{y} = 4z_1z_2 \neq 0$, por lo que la órbita cruzará el plano $y = 0$ y por lo tanto entrará en la región de atracción.
- Si $y = z_1 = 0$ y $z_2 \neq 0$, entonces

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_0 - \dot{x}_2 = 4x_0x_1 - x_0 - 4x_2x_3 + x_2 = 4x_0z_2 \neq 0,$$

por lo que la órbita cruzará el eje z_2 . Así, la órbita cruzará el plano $y = 0$ o se ajustará a las condiciones del caso anterior. En ambos casos entrará en la región de atracción.

- Si $y = z_2 = 0$ y $z_1 \neq 0$, entonces

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_3 = 4x_1(x_2 - x_0) = -4x_1z_1 \neq 0,$$

por lo que la órbita cruzará el eje z_1 . Así la órbita cruzará el plano $y = 0$ o se ajustará a las condiciones del primer caso. En ambos casos entrará en la región de atracción.

Concluimos entonces que e es un atractor con región de atracción $Int(S_n)$.

Consideramos ahora una perturbación $\epsilon \neq 0$. El baricentro e seguirá siendo el único punto crítico de $Int(S_n)$, pero en este caso la aproximación lineal en el punto crítico vendrá dada por

$$\dot{y} = (-1 + \epsilon)y,$$

$$\dot{z} = -(\epsilon + i)z.$$

Con autovalores $\lambda_1 = -1 + \epsilon$, $\lambda_2 = -\epsilon - i$ y $\lambda_3 = -\epsilon + i$. Siendo

$$V^* = 4V((1 - \epsilon)y^2 + 2\epsilon|z|^2).$$

De esta manera si $\epsilon \in (0, 1)$, todos los autovalores tienen parte real negativa y e será un atractor con región de atracción $Int(S_n)$. Por otro lado si $\epsilon < 0$, λ_1 tiene parte real negativa y λ_2 y λ_3 la tienen positiva, luego e será un punto de silla. Para $\epsilon < 0$ suficientemente pequeño debe existir un pequeño ciclo atractor cerrado cercano a e por el Teorema de bifurcación de Hopf (ver [15]), por lo que existirá una bifurcación de Hopf, que además no será “degenerada” al haber ciclos en un intervalo del parámetro ϵ .

Para cerrar el capítulo probaremos, tras presentar una serie de resultados previos, que para $n=2$ todas a bifurcaciones de Hopf son “degeneradas”.

Definición 2.26. Diremos que una matriz A es central si tiene un punto crítico aislado en el baricentro de S_n .

Supongamos ahora un sistema dinámica inducido por una matriz A , con un único punto crítico aislado $e \in Int(S_n)$. Sea E la matriz diagonal que tiene e como valores de la diagonal.

Definimos la centralización de A como la matriz $\bar{A} = (n + 1)AE$.

Lema 2.27. \bar{A} es central y $\bar{A} \sim A$. Además si A es central entonces $\bar{A} = A$.

Definición 2.28. Denotaremos por Z_n al conjunto de matrices $n \times n$ con ceros en la diagonal. Denotaremos por $Z_n^+ \subset Z_n$ al conjunto de matrices con ceros en la diagonal y con el resto de elementos distintos de cero.

Definición 2.29. Dadas dos matrices $A, B \in Z_{n+1}^+$, diremos que son equivalentes en signo si los elementos no diagonales tienen el mismo signo. Denotaremos la clase (de equivalencia) de signo por la correspondiente matriz de signos

Definición 2.30. Dada un permutación p de $\{0, 1, \dots, n\}$ y una matriz $A \in Z_{n+1}^+$ sea p_A la matriz obtenida al permutar las filas y las columnas de A por p . Diremos que $A, B \in Z_{n+1}^+$ combinatorialmente equivalentes si p_A y p_B son equivalentes en signo para algún p .

Definición 2.31. Sea C la clase (de equivalencia) combinatorial, que consiste en las dos clases de signo (ver [14])

$$S = \begin{pmatrix} - & + & - \\ - & 0 & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}, \quad -S = \begin{pmatrix} 0 & - & + \\ + & 0 & - \\ - & + & 0 \end{pmatrix}.$$

Sean C_-, C_0, C_+ los subconjuntos de C determinados por el signo de $\det(A)$.

Teorema 2.32. *Dos matrices en C son equivalentes si y solo si sus determinantes tienen el mismo signo. Así, C contiene tres clases de equivalencia, de las cuales C_+, C_- son clases estables y con flujos inversos el uno del otro, mientras que C_0 es inestable, siendo una subvariedad separando las clases estables. Si $A \in C_+, C_-$ entonces ϕ_A tiene un atractor, repulsor en $\text{Int}(S_n)$ con región de atracción, repulsión igual a $\text{Int}(S_n)$. Estos retratos de fases son: Por lo tanto cualquier*

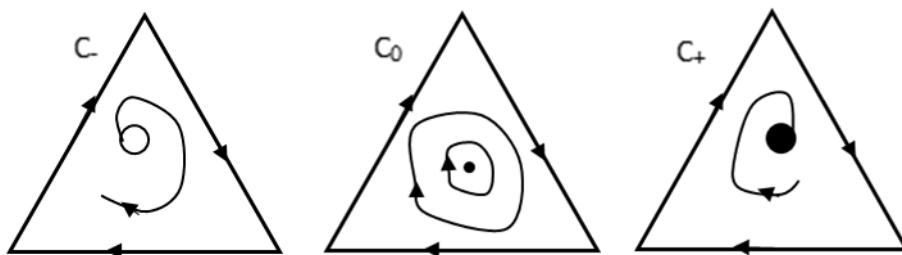


Figura 2.5: Retrato de fases en cada subconjunto de C

camino en C cruzando C_0 transversalmente induce una bifurcación de Hopf “degenerada”.

Una prueba de este teorema puede ser encontrada en [14].

Definición 2.33. Supongamos que A tiene un punto crítico aislado $e \in \text{Int}(S_n)$ y la centralización

$$\bar{A} = 3AE = \begin{pmatrix} 0 & \theta + a_0 & \theta - a_0 \\ \theta - a_1 & 0 & \theta + a_1 \\ \theta + a_2 & \theta - a_2 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\theta, a_i \in \mathbb{R}$. Definiremos como parámetros centrales de A a θ, a_i . Definiremos también $\rho = a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_0$.

Lema 2.34. *Las autovalores de ϕ_A en e tienen la forma $\frac{1}{3}(-\theta + \sqrt{-\rho})$. Es decir, los autovalores dependen únicamente de los parámetros centrales y no de e .*

Teorema 2.35. *Cuando $n = 2$ todas las bifurcaciones de Hopf son “degeneradas”.*

Haremos un esquema de demostración:

Para que una bifurcación de Hopf ocurra en una matriz A_0 será necesario que tenga un punto crítico aislado $e \in \text{Int}(S_n)$ con autovalores imaginarios.

Por lo tanto por el Lema(2.34) se tiene $\theta = 0$ y $\rho > 0$. Basta con asumir que A_0 es central, por el Lema(2.27), ya que esto no afecta a los autovalores, por el Lema(2.34).

Tendremos entonces tres posibles casos:

1. Todos los a_i son distintos de cero y tienen el mismo signo.
2. Todos los a_i son distintos de cero pero tienen signos distintos.

3. Algún a_i es igual a 0

El caso (1) cumple las hipótesis del Teorema(2.32).

Para el caso (2) ver la demostración completa en [14].

Para el caso (3), la matriz A_0 tendrá al menos un parámetro central $a_i = 0$. Además como $\rho > 0$ los otros dos parámetros centrales deberán ser distintos de cero y compartir signo. Así podemos asumir, sin pérdida de generalidad que

$$a_0, a_1 > 0, a_2 = 0, \theta = 0.$$

Consideramos ahora la perturbación A de A_0 dada al hacer $a_2 = 2\theta \neq 0$. que toma la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \theta + a_0 & \theta - a_0 \\ \theta - a_1 & 0 & \theta + a_1 \\ 3\theta & -\theta & 0 \end{pmatrix},$$

con $|\theta| < a_0, a_1$.

Cuando $\theta > 0$ estaremos en las condiciones del caso (1) y por lo tanto el baricentro e será un atractor con región de atracción $Int(S_n)$.

Cuando $\theta < 0$ estaremos en las condiciones del caso (2) y, como se puede ver en [14], el baricentro e será un repulsor con región de repulsión $G \subset S_n$.

De esta manera por el teorema de bifurcación de Hopf (ver [15]) existirá una familia 1-paramétrica de ciclos alrededor de e en el retrato de fases de ϕ_A . De esta forma cualquier camino a través de A_0 inducirá una bifurcación de Hopf "degenerada". Con esto concluimos la prueba.

Referencias

En este capítulo, la breve introducción sobre la teoría de juegos evolutivos y los ejemplos han sido extraídos de [7], [8], [9] y [10]. Las nociones básicas sobre sistemas de ecuaciones diferenciales y su relación con los juegos evolutivos se basan principalmente en [11], [12] y [13]. Por último, el estudio de las bifurcaciones ha sido extraído de [14], [15]

Capítulo 3

Ecuaciones de Lotka-Volterra

En la década de 1920 Alfred Lotka y Vito Volterra propusieron, de manera independiente, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para modelizar la dinámica de sistemas biológicos en el que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + \delta x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_1 x_2 + \gamma x_2,\end{aligned}$$

donde:

- x_1 es el número de individuos en la población que actúa como presa.
- x_2 es el número de individuos en la población que actúa como depredador.
- \dot{x}_1 e \dot{x}_2 representan el crecimiento de la población de presas y depredadores respectivamente.
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ son coeficientes que representan las interacciones entre las especies.

Este sistema, conocido como ecuaciones de Lotka-Volterra o ecuaciones depredador-presa, es clave en la matemática ecológica. Además, este sistema puede ser generalizado para n especies de la siguiente manera:

$$\dot{x}_i = x_i \left(\alpha_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right),$$

donde α_i representa el crecimiento o decrecimiento intrínseco de la población i y a_{ij} representa la influencia de la población j sobre la población i . Se definirá la matriz $A = (a_{ij})$ como matriz de interacciones.

En el caso n-dimensional el plano de fase, puesto que ninguna especie puede tener un número negativo de individuos, es el ortante

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Dada la importancia que este sistema tiene en la matemática ecológica, sería interesante poder relacionarlo con la ecuación del replicador y, de esta manera, poder utilizar los resultados de uno en el otro y viceversa (aunque el interés principal será poder aplicar los resultados de las ecuaciones de Lotka-Volterra en la ecuación del replicador).

Antes de demostrar esta equivalencia, estudiemos el comportamiento del caso bidimensional.

Recordemos que en este caso el sistema viene dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + \delta x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_1 x_2 + \gamma x_2. \end{aligned}$$

Es claro, tras unos cálculos sencillos, que los únicos puntos críticos del sistema serán $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\delta})$.

Tenemos que la matriz jacobiana viene dada por

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\alpha + \delta x_2 & \delta x_1 \\ -\beta x_2 & -\beta x_1 + \gamma \end{pmatrix}.$$

Evaluando la matriz jacobiana en P_1 se tiene que

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

con autovalores $\lambda_1 = -\alpha$ y $\lambda_2 = \gamma$. Al ser un autovalor positivo y otro negativo concluimos que $(0, 0)$ es punto de silla, inestable. Este punto crítico no es de interés ya que representa una situación en la que ambas poblaciones se han extinguido.

Evaluando ahora la matriz en P_2 obtenemos

$$J\left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\delta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\delta/\beta \\ -\beta\alpha/\delta & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalores $\lambda = \pm\sqrt{-\alpha\gamma}$. Como $Re(\lambda) = 0$ no podremos concluir nada acerca de la estabilidad del punto crítico. Por lo tanto, calcularemos las órbitas de forma explícita para estudiar la estabilidad.

Es inmediato comprobar que el sistema presenta también dos familias de soluciones

$$x_1(t) = ae^{-\alpha t}, \quad x_2(t) = 0; \quad x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = be^{\gamma t},$$

para $a, b \in \mathbb{R}$.

Para el cálculo de las órbitas del sistema (para $x_1, x_2 \neq 0$) será necesario resolver la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{-\alpha x_1 + \delta x_1 x_2}{-\beta x_1 x_2 + \gamma x_2}.$$

Esta puede ser reordenada como

$$\frac{-\beta x_1 + \gamma}{x_1} dx_1 = \frac{-\alpha + \delta x_2}{x_2} dx_2,$$

y por lo tanto es una ecuación de variables separadas, que integrando en ambos miembros, resulta:

$$\gamma \text{Ln}(x_1) - \beta x_1 + \alpha \text{Ln}(x_2) - \delta x_2 = k,$$

para algún $k \in \mathbb{R}$.

Tomando exponenciales obtenemos finalmente la solución

$$\frac{x_1^\gamma x_2^\alpha}{e^{\beta x_1} e^{\delta x_2}} = K,$$

para una constante $K \in \mathbb{R}$.

Probaremos ahora que esta familia de curvas está compuestas por curvas cerradas alrededor de $(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\delta})$.

Definimos la función

$$F(x_1, x_2) = \gamma \text{Ln}(x_1) - \beta x_1 + \alpha \text{Ln}(x_2) - \delta x_2,$$

de manera que cada una de las curvas de la familia previa, vendrá dada por un curva de nivel de F , $F(x_1, x_2) = K$.

Definiendo ahora $\hat{x}_1 = \frac{\gamma}{\beta}$ y $\hat{x}_2 = \frac{\alpha}{\delta}$, la expresión de F se transforma en

$$F(x_1, x_2) = \beta(\hat{x}_1 - \text{Ln}(x_1) - x_1) + \delta(\hat{x}_2 \text{Ln}(x_2) - x_2).$$

Consideramos ahora las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por $(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\delta})$, y que tienen como vector director $\vec{w} = (u, s)$, es decir,

$$\begin{cases} x_1 = \hat{x}_1 + us, \\ x_2 = \hat{x}_2 + vs, \end{cases}$$

$s \in \mathbb{R}$. En los puntos de la recta la función F toma la forma

$$F(s) = \beta(\hat{x}_1 \text{Ln}(\hat{x}_1 + us) - \hat{x}_1 - us) + \delta(\hat{x}_2 \text{Ln}(\hat{x}_2 + vs) - \hat{x}_2 - vs).$$

Calculamos la primera y segunda derivada:

$$\dot{F}(s) = \beta \left(\frac{\hat{x}_1 u}{\hat{x}_1 + us} - u \right) + \delta \left(\frac{\hat{x}_2 v}{\hat{x}_2 + vs} - v \right) = (\beta \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_1 + us} - \beta)u + (\delta \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_2 + vs} - \delta)v,$$

$$\ddot{F}(s) = -\frac{\beta \hat{x}_1 u^2}{(\hat{x}_1 + us)^2} - \frac{\delta \hat{x}_2 v^2}{(\hat{x}_2 + vs)^2}.$$

Como $\beta, \delta, \hat{x}_1, \hat{x}_2 > 0$, se tiene que $\ddot{F}(s) < 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, y por esto, $\dot{F}(s)$ es estrictamente decreciente y $V(s)$ cóncava. Además, es fácil comprobar que

$$\dot{F}(0) = (\beta - \beta)u + (\delta - \delta)v = 0.$$

Así, podemos concluir que el único máximo de la función F se dará cuando $s = 0$, es decir, en el punto $(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\delta})$. De esta forma, dado un plano $F = K < \max(F)$, todas las semirrectas en el plano que pasan por $(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\delta})$ tienen un único punto de corte con la órbita correspondiente. Esto nos permite afirmar que estas órbitas serán curvas cerradas alrededor de $(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\delta})$ pues si no lo fueran, existirían semirrectas con ninguno o más de un punto de corte con las órbitas.

3.1. Equivalencia replicador-Lotka-Volterra

En este apartado demostraremos la equivalencia entre las ecuaciones de Lotka-Volterra y las ecuación del replicador, que nos permitirán utilizar los resultados del primero en el segundo. Comenzaremos introduciendo coordenadas homogéneas definiendo

$$x_0 = 1, \\ y_i = \frac{x_i}{\sum_{j=0}^n x_j}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Entonces $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ está en el simplex $S_{n+1} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}, y_i \geq 0, \sum_{i=0}^n y_i = 1\}$. Además $y_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^n x_j}$ y podemos reescribir

$$y_i = x_i \frac{1}{\sum_{j=0}^n x_j},$$

obteniendo la transformación inversa que vendrá dada por

$$x_i = \frac{y_i}{y_0},$$

$i = 1, \dots, n$.

De esta manera las ecuaciones de Lotka-Volterra se transforman en

$$\dot{y}_i = \frac{\dot{x}_i}{\sum_{j=0}^n x_j} - \frac{x_i \sum_{j=0}^n \dot{x}_j}{(\sum_{j=0}^n x_j)^2}$$

$$= \frac{x_i(a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)}{\sum_{j=0}^n x_j} - \frac{x_i \sum_{j=0}^n x_j(a_{j0} + \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k)}{(\sum_{j=0}^n x_j)^2}.$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{j=0}^n x_j = (y_0)^{-1}$ y que $a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \sum_{j=0}^n a_{ij}x_j$, llegamos a

$$\dot{y}_i = x_i \left(\sum_{j=0}^n a_{ij}x_j \right) y_0 - x_i \left(\sum_{j=0}^n x_j \left(\sum_{k=0}^n a_{jk}x_k \right) \right) y_0^2.$$

Aplicando ahora la transformación inversa

$$\dot{y}_i = y_i \left(\sum_{j=0}^n a_{ij}y_j - \sum_{j,k=0}^n y_j a_{jk}y_k \right) \frac{1}{y_0},$$

fijando ahora $a_{0j} = 0$, que está en concordancia con las ecuaciones de Lotka-Volterra al fijar $x_0 = 1$. Así, excepto por el factor $\frac{1}{y_0}$ (que representa únicamente un cambio en la velocidad), tendremos el sistema de EDOs

$$\dot{y}_i = y_i \left(\sum_{j=0}^n a_{ij}y_j y_0 - x_i \sum_{j,k=0}^n y_j a_{jk}y_k \right), \quad i = 0, \dots, n,$$

en el simplex S_{n+1} , que es precisamente la ecuación del replicador. Se ve de manera sencilla que esta no varía en S_{n+1} si añadimos una constante arbitraria a cada columna de la matriz (a_{ij}) . Por lo tanto podremos escoger siempre constantes que fuercen $a_{0j} = 0 \forall j$ y podremos reescribir la ecuación del replicador como la de Lotka-Volterra.

3.2. Existencia de bifurcaciones de Hopf y ciclos límite

Comenzaremos con la definición del concepto de ciclo límite y ω -límite

Definición 3.1. ω -límite.

Sea $x_0 \in G \subset S_n$ y sea γ_{x_0} su órbita

$$\gamma_{x_0} = \{x(t; x_0), t \in I(x)\} \subset G.$$

Asumiendo que $[0, \infty) \in I(x)$ se define el ω -límite del punto x_0 como el siguiente conjunto

$$\omega(x_0) := \{y_0 \in G \text{ para los que existe } \{t_m\} \in I(x) : \lim_{m \rightarrow \infty} \{t_m\} = \infty \text{ y } \lim_{m \rightarrow \infty} \{x(t_m; x_0)\} = y_0\},$$

denotando por $x(t; x_0)$ a una solución $x(t)$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$.

Definición 3.2. Ciclo límite.

Una órbita periódica γ es un ciclo límite si $\omega(x_0) = \gamma$ para al menos un $x_0 \notin \gamma$.

Por último enunciaremos un teorema que será útil para la próxima demostración.

Teorema 3.3. (De Lyapunov.)

Sea $\dot{x} = \phi(x)$ un sistema de EDOs autónomo definido en $G \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en G . Sea $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable en G y x_0 un punto crítico. Si V es tal que $V^* \leq 0$ o $V^* \geq 0$ en todo G entonces $\omega(x_0) \cap G$ está contenida en el conjunto $\{x \in G : V^* = 0\}$.

Como en la sección anterior demostramos que para $n = 2$ la ecuación del replicador, y por lo tanto también las ecuaciones de Lotka-Volterra, no presentan bifurcaciones de Hopf generales. Veremos ahora, a través de las ecuaciones de Lotka-Volterra, que cuando $n \geq 3$ existen bifurcaciones de Hopf y por lo tanto ciclos límite en la ecuación del replicador. Para la demostración completa ver [4]. Es necesario añadir que en [19] se puede consultar una demostración de la existencia de bifurcaciones de Hopf y ciclos límite para la ecuación del replicador cuando $n \geq 3$

Para hacerlo, nos apoyaremos en el siguiente sistema de EDOs

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(1 - \beta x_1 - x_2 - \alpha x_3),$$

$$\dot{x}_3 = x_3(1 - \alpha x_1 - \beta x_2 - x_3).$$

Comenzamos asumiendo que la matriz (a_{ij}) es circulante. Se tendrá entonces que el sistema generalizado vendrá dado por la siguiente expresión

$$\dot{x}_i = x_i(1 - \sum_{j=1}^n c_j x_{i+j}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Una matriz circulante es una matriz cuadrada en la que todos los vectores de fila se componen de los mismos elementos y cada vector de fila se gira un elemento a la derecha en relación con el vector de fila anterior. Un ejemplo de matriz circulante será la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo que para $n = 3$ tendremos el sistema previo con $c_0 = 1, c_1 = \alpha, c_2 = \beta$. Definimos ahora $\gamma_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \lambda^{jk}$ con $\lambda = e^{2\pi i/n}$ y asumimos $\gamma_0 = \sum_{j=1}^n c_j > 0$. Busquemos ahora un punto crítico imponiendo que $x_1 = \dots = x_n =: k$, de esta forma

$$\dot{x}_i = k(1 - \sum_{j=1}^n c_j k) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{\sum_{j=1}^n c_j},$$

demostramos así la existencia del punto crítico

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_n = \left(\sum_{j=1}^n c_j \right)^{-1} = \gamma_0^{-1}.$$

Calculamos ahora la matriz jacobiana del sistema evaluada en el punto \bar{x} , calcularemos los elementos de la diagonal, ya que los demás elementos se obtienen trivialmente. Derivando el expresión i de sistema con respecto de x_i se obtiene

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} = 1 - 2c_0 x_i - \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_{i+j} = 1 - c_0 x_i - \sum_{j=0}^{n-1} c_j x_{i+j},$$

evaluando en el punto crítico obtenemos que

$$J_{i,i} = -\frac{1}{\gamma_0} c_0.$$

Calculando el resto de elementos se llega a que

$$J(\bar{x}) = -1/\gamma_0 \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

El siguiente resultado nos permite calcular los autovalores y autovectores de la matriz jacobiana, ya que esta también es circulante.

Proposición 3.4. *Los autovalores y autovectores de $C = \text{circ}(c_0, \dots, c_{n-1})$ vienen dados respectivamente por*

$$\omega_k = h(w_k), V_{\omega_k} = (1, w_k, \dots, w_k^{n-1})^T,$$

siendo $h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$ y w_k las raíces n -ésimas de la unidad¹.

Por lo tanto los autovalores serán de la forma $\omega_k = -\gamma_k/\gamma_0$, $k = 1, \dots, n$.

Se tiene entonces $\bar{\omega}_{n-k} = \omega_k$ para $k = 1, \dots, n-1$.

Probaremos ahora el siguiente el siguiente teorema:

Teorema 3.5. *Si $\text{Re}(\omega_1) \leq 0$ y $\text{Re}(\omega_k) < 0$ para $k = 2, \dots, n-2$ entonces x es globalmente atractor. En particular \bar{x} es asintóticamente estable.*

La importancia de este teorema radica en los dos corolarios que le siguen, cuya demostración se puede encontrar en [15].

Corolario 3.6. *Si \bar{x} es un atractor, entonces es un atractor global.*

¹Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, las n diferentes raíces n -ésimas de la unidad son $w_k = e^{2\pi i k/n}$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$

Corolario 3.7. Si $Re(\omega_k) < 0$ para $k = 2, \dots, n-2$ y $Re(\omega_1) > 0$ y suficientemente pequeño, entonces existe un ciclo límite estable cerca del punto crítico \bar{x} , que es inestable.

Demostración Lo haremos construyendo una función de Lyapunov.

Sean

$$P = x_1 \dots x_n, \quad S = \sum_{i=1}^n x_i, \quad Q = \sum_{i,j=1}^n c_{j-i} x_i x_j.$$

Calculamos ahora las derivadas orbitales de P y S

$$\nabla P = (x_2 \dots x_n, x_1 x_3 \dots x_n, \dots, x_1 \dots x_{n-1}),$$

de esta forma se tiene

$$\nabla P_i \phi_i = P - \sum_{i=1}^n c_i P x_{i+j} \Rightarrow P^* = \sum_{i=1}^n \nabla P_i \phi_i = P(n - \gamma_0 S).$$

En el caso de S tenemos

$$\nabla S = (1, \dots, 1) \Rightarrow S^* = \sum_{i=1}^n \phi_i = S - Q.$$

Combinando ambos resultados se tiene que

$$(PS^{-n})^* = P^* S^{n-1} - nPS^{-n-1} S^* = P(n - \gamma_0 S) S^{n-1} S - nPS^{-n-1} (S - Q),$$

y sacando factor común obtenemos

$$(PS^{-n})^* = PS^{-n-1} ((n - \gamma_0 S) S - nS + nQ) = PS^{-n-1} (nQ - \gamma_0 S^2).$$

Veamos que PS^{-n} es una función de Lyapunov global que cumple las hipótesis del teorema previo. Para ello trabajaremos con las siguientes variables, que por la proposición 3.4 serán los autovectores asociados a los autovalores ω_k ,

$$y_p = \sum_{i=1}^n \lambda^{ip} x_i, \quad p = 0, \dots, n-1.$$

Aplicando ahora la transformación inversa y tras una serie de cálculos (ver [4]) el sistema previo se transforma en

$$\dot{y}_p = y_p - \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m y_{-m} y_{p+m}.$$

Como $y_0 = S$ y haciendo una identificación de los elementos del sistema obtenido (para $p = 0$) con los de S^* tenemos

$$S^* = y_0 - \frac{1}{n} \left(\sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m y_{-m} y_m \right) \Rightarrow Q = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} Re \gamma_m |\gamma_m|^2.$$

Así se tiene

$$(PS^{-n})^* = PS^{n-1}(nQ - \gamma_0 S^2) = PS^{n-1}\left(\sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m |y_m|^2 - \gamma_0 y_0^2\right) = PS^{n-1}\left(\sum_{m=1}^{n-1} \gamma_m |y_m|^2\right),$$

por lo que $(PS^{-n}) \geq 0$ si $Re(\gamma_m) \geq 0$ para $m = 1, \dots, n-1$.

Aplicando ahora el Teorema de Lyapunov (3.3) se tendrá que toda órbita tiende a un conjunto invariante contenido en $\{x : ((PS^{-n})) = 0\}$. Será necesario entonces ver que este conjunto contiene únicamente el punto crítico \bar{x} y con esto terminará la prueba. Para ver una explicación en detalles de todos los casos, consultar [4]. Con esto y aplicando los resultados introducidos previamente llegamos al resultado buscado:

Teorema 3.8. *La ecuación de Lotka-Volterra n -dimensional permite ciclos límite estable si y solo si $n \geq 3$.*

3.3. Ecuaciones de Lotka-Volterra para cadenas tróficas

En esta sección analizaremos el comportamiento las ecuaciones de Lotka-Volterra en el estudio de cadenas tróficas de n especies. En ellas la primera especie es depredada por la segunda, que a su vez es depredada por la tercera, y así sucesivamente hasta llegar a la n -ésima especie que no es depredada por ninguna. De esta forma solo existirá competencia interespecie de cada población con su depredador o presa inmediata. Además asumimos que existe competencia intraespecie para cada población. Esto se expresa en el modelo con la equivalencia

$$a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow i - j \notin \{-1, 0, 1\}.$$

Esto transforma el sistema original en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(\alpha_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2), \\ \dot{x}_i &= x_i(-\alpha_j + a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{ii}x_i - a_{i,i+1}x_{i+1}), \\ \dot{x}_n &= x_n(-\alpha_n + a_{n,n-1}x_{n-1} - a_{nn}x_n), \end{aligned}$$

con $r_i > 0$ y $a_{i,j} \geq 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Probaremos, utilizando el teorema de Lyapunov (3.3), que si el sistema presenta un punto crítico interior \bar{x} entonces \bar{x} es globalmente estable. Comenzamos reescribiendo el sistema como

$$\dot{x}_i = x_i w_i \quad i = 1, \dots, n,$$

y definimos la función

$$V(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - \bar{x}_i L_n(x_i)),$$

tanto w_i como c_i serán determinadas en un futuro, forzando a V a cumplir las condiciones del teorema.

Calculamos primero su derivada orbital:

$$\nabla V(x) = (c_1 - c_1 \frac{\bar{x}_1}{x_1}, \dots, c_n - c_n \frac{\bar{x}_n}{x_n}), \quad \phi(x_i) = x_i w_i,$$

por tanto

$$V^* = \sum_{i=1}^n c_i(1 - \frac{\bar{x}_i}{x_i})(x_i w_i) = \sum_{i=1}^n c_i w_i (x_i - \bar{x}_i).$$

Como \bar{x} es un punto crítico, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2, \\ \alpha_i &= a_{i,i-1}\bar{x}_{i-1} - a_{ii}\bar{x}_i - a_{i,i+1}\bar{x}_{i+1}, \\ \alpha_n &= a_{n,n-1}\bar{x}_{n-1} - a_{nn}\bar{x}_n, \end{aligned}$$

así, los w_i toman la forma

$$\begin{aligned} w_1 &= -a_{11}(x_1 - \bar{x}_1) - a_{12}(x_2 - \bar{x}_2), \\ w_i &= a_{i,i-1}(x_{i-1} - \bar{x}_{i-1}) - a_{ii}(x_i - \bar{x}_i) - a_{i,i+1}(x_{i+1} - \bar{x}_{i+1}), \\ w_n &= a_{n,n-1}(x_{n-1} - \bar{x}_{n-1}) - a_{nn}(x_n - \bar{x}_n). \end{aligned}$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $y_i = x_i - \bar{x}_i$ las w_i se transforman en

$$\begin{aligned} w_1 &= -a_{11}y_1 - a_{12}y_2, \\ w_i &= a_{i,i-1}y_{i-1} - a_{ii}y_i - a_{i,i+1}y_{i+1}, \\ w_n &= a_{n,n-1}y_{n-1} - a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Haciendo cálculos en la expresión de la derivada orbital de V se tiene

$$\begin{aligned}
V^* &= \sum_{i=1}^n c_i y_i w_i = c_1 y_1 w_1 + \sum_{j=2}^{n-1} c_j y_j w_j + c_n y_n w_n \\
&= -c_1 a_{11} y_1^2 - c_1 a_{12} y_1 y_2 + \sum_{i=2}^{n-1} c_i a_{i,i-1} y_{i-1} y_i - \sum_{i=2}^{n-1} c_i a_{ii} y_i^2 \\
&\quad - \sum_{i=2}^{n-1} c_i a_{j,j+1} y_i y_{j+1} + c_n a_{n,n-1} y_{n-1} y_n - c_n a_{nn} y_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^n c_i a_{ii} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i a_{i,i+1} y_i y_{i+1} + \sum_{j=2}^n c_j a_{j,j-1} y_{j-1} y_j \\
&= \sum_{i=1}^n c_i a_{ii} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i a_{i,i+1} y_i y_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-1} c_{j+1} a_{j+1,j} y_j y_{j+1}.
\end{aligned}$$

Ahora podemos imponer que $V^* \leq 0$ haciendo que las constantes c_i sean de la forma

$$c_i a_{i,i+1} = c_{i+1} a_{i+1,i},$$

de esta forma

$$V^* = - \sum_{i=1}^n c_i a_{ii} y_i^2 = - \sum_{i=1}^n c_i a_{ii} (x_i - \bar{x}_i)^2.$$

Así, podremos aplicar el teorema de Lyapunov para afirmar que toda órbita γ en el primer hiperoctante H_1 es tal que:

$$\omega(x) \cap H_1 = \omega(x) \subset \{y \in H_1 : V^*(y) = 0\} = \{\bar{x}\},$$

y como $x = \bar{x}$ es solución del sistema se tiene que toda órbita del primer ortante convergerá en el punto crítico \bar{x} .

3.4. Ejemplo teórico

A modo de ejemplo, estudiaremos el caso $n=3$: una cadena trófica de tres especies. Este sistema ha sido estudiado en [19] y de forma más exhaustiva en las referencias del propio libro. Este sistema presenta comportamientos dinámicos diferentes, de acuerdo con los valores de los parámetros. Nos limitaremos a los pasos básicos, remitiéndonos a la literatura para un análisis más detallado. El sistema para estudiar el modelo será de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(r_1 - a_{11}x_1 - x_{12}x_2), \\
\dot{x}_2 &= x_2(-r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3), \\
\dot{x}_3 &= x_3(r_3 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3).
\end{aligned}$$

Obtenemos los puntos críticos resolviendo:

$$\begin{aligned}x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) &= 0, \\x_2(-r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3) &= 0, \\x_3(-r_3 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3) &= 0.\end{aligned}$$

La matriz jacobiana asociada al sistema es:

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} r_1 - 2a_{11}x_1 - a_{12}x_2 & -a_{12}x_1 & 0 \\ a_{21}x_2 & -r_2 + a_{21}x_1 - 2a_{22}x_2 - a_{23}x_3 & -a_{23}x_2 \\ 0 & a_{32}x_3 & -r_3 + a_{32}x_2 - 2a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

El origen $(0, 0, 0)$ es un punto crítico.

La matriz jacobiana

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & -r_2 & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 \end{pmatrix},$$

tiene un autovalor real positivo r_1 y dos autovalores reales negativos $-r_2$ y $-r_3$. Por lo tanto el origen es un punto de silla de sistema.

Para facilitar los cálculos de los otros puntos críticos, estudiaremos el sistema según las interacciones entre las distintas especies. Además, únicamente expondremos dos casos por motivos de simplicidad. El resto de casos pueden ser resueltos de forma similar a como han sido resueltos los dos que presentaremos a continuación.

CASO 1: Si no hay competencia intraespecie, es decir, $a_{ii} = 0$ $i = 1, 2, 3$.

Así, queda el siguiente sistema para resolver:

$$\begin{aligned}x_1(r_1 - a_{12}x_2) &= 0, \\x_2(-r_2 + a_{21}x_1 - a_{23}x_3) &= 0, \\x_3(-r_3 + a_{32}x_2) &= 0,\end{aligned}$$

obteniendo como puntos críticos:

- $P_0 = (0, 0, 0)$ que ya ha sido estudiado.
- $P_1 = (0, \frac{r_3}{a_{32}}, -\frac{r_2}{a_{23}})$ no está en nuestro espacio de soluciones pues no pertenece al primer ortante de \mathbb{R}^3 .

- $P_2 = \left(\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}}, 0\right)$.

La matriz jacobiana queda

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{21}}r_2 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{12}}r_1 & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{12}}r_1 \\ 0 & 0 & -r_3 + \frac{a_{32}}{a_{21}}r_1 \end{pmatrix}.$$

De donde obtenemos los autovalores:

$$\lambda_1 = -r_3 + \frac{a_{32}}{a_{21}}r_1 \quad \lambda_2 = \sqrt{-r_1r_2} \quad \lambda_3 = -\sqrt{-r_1r_2}.$$

Un autovalor real y dos autovalores imaginarios puros conjugados. Distinguimos 3 casos en función del signo del autovalor real

- Si $r_3 > \frac{a_{32}}{a_{21}}r_1$ el autovalor λ_1 sería real negativo. Así P^2 será un punto crítico estable.
 - Si $r_3 = \frac{a_{32}}{a_{21}}r_1$ el autovalor λ_1 sería 0. Por lo que en este caso, no podremos concluir utilizando las herramientas de este trabajo. Para un mayor estudio acerca de este sistema, consultar [19].
 - Si $r_3 < \frac{a_{32}}{a_{21}}r_1$ el autovalor λ_1 sería real positivo. En este caso el punto crítico será inestable y por lo tanto las órbitas divergerán a infinito.
- El sistema también presentará soluciones dependientes de un parámetro α , que tomarán la forma $P_3 = \left(\frac{a_{23}}{a_{21}}\alpha + \frac{r_1}{a_{12}}, \alpha\right)$ ($\alpha > 0$).

En este caso la matriz jacobiana queda

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{21}}(a_{23}\alpha + r_2) & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{12}}r_1 & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{12}}r_1 \\ 0 & a_{32}\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{-r_1(a_{23}\alpha + r_2 + \frac{a_{32}a_{23}}{a_{21}})}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{-r_1(a_{23}\alpha + r_2 + \frac{a_{32}a_{23}}{a_{21}})}.$$

Un autovalor cero y dos autovalores imaginarios puros conjugados. Por lo que de nuevo, no podremos concluir utilizando las herramientas de este trabajo. Para un mayor estudio acerca de este sistema, consultar [19].

CASO 2: Existe competencia intraespecie en una de ellas.

Supongamos, por ejemplo, que $a_{11} \neq 0$. Para obtener los puntos críticos resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) &= 0, \\x_2(-r_2 + a_{21}x_1 - a_{23}x_3) &= 0, \\x_3(-r_3 + a_{32}x_2) &= 0.\end{aligned}$$

Encontramos los puntos:

- $P_0 = (0, 0, 0)$ que ya ha sido estudiado.
- $P_1 = (0, \frac{r_3}{a_{32}}, -\frac{r_2}{a_{23}})$ que no pertenece al conjunto de las soluciones.
- $P_2 = (\frac{r_1}{a_{11}}, 0, 0)$.

La matriz jacobiana queda

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -r_1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}}r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}}r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son dos números reales negativos $\lambda_1 = -r_1$ $\lambda_2 = -r_3$ y $\lambda_3 = -r_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}}r_1$

- Si $\frac{a_{12}}{a_{11}}r_1 < r_2$ tendremos tres autovalores reales negativos, por lo que el punto será asintóticamente estable.
 - Si $\frac{a_{12}}{a_{11}}r_1 = r_2$ tendríamos dos autovalores reales negativos y otro nulo, con los que el punto será estable.
 - Si $\frac{a_{12}}{a_{11}}r_1 > r_2$ tendríamos dos autovalores reales negativos y uno real positivo y el punto crítico será un punto de silla.
- $P_3 = (\frac{r_2}{a_{21}}, \frac{r_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}a_{21}}r_2, 0)$.

Para que el punto pertenezca al conjunto de soluciones debe cumplirse que $\frac{a_{21}}{a_{12}}r_1 - \frac{a_{11}}{a_{12}}r_2 \geq 0$.

La matriz jacobiana es

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{a_{11}}{a_{21}}r_2 & -\frac{a_{12}}{a_{21}}r_2 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{12}}r_1 - \frac{a_{11}}{a_{12}}r_2 & 0 & -a_{23}(\frac{r_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}a_{21}}r_2) \\ 0 & 0 & -r_3 + a_{32}(\frac{r_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}a_{21}}r_2) \end{pmatrix},$$

y sus autovalores son

$$\lambda_1 = -r_3 + \frac{a_{32}}{a_{12}}r_1 - \frac{a_{11}a_{32}}{a_{12}a_{21}}r_2$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{a_{11}}{a_{21}}r_2 + \sqrt{\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right)^2 + 4\frac{a_{12}}{a_{21}}r_2\left(\frac{a_{21}}{a_{12}}r_1 - \frac{a_{11}}{a_{12}}r_2\right)}\right] \text{ (Real positivo por la condición de existencia de la solución).}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left[-\frac{a_{11}}{a_{21}}r_2 - \sqrt{\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right)^2 + 4\frac{a_{12}}{a_{21}}r_2\left(\frac{a_{21}}{a_{12}}r_1 - \frac{a_{11}}{a_{12}}r_2\right)}\right] \text{ (Real negativo por la condición de existencia de la solución).}$$

- $P_4 = \left(\frac{r_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{32}}r_3, \frac{r_3}{a_{32}}, \frac{a_{21}}{a_{23}a_{11}}r_1 - \frac{a_{23}a_{12}}{a_{11}a_{32}}r_3 - \frac{r_2}{a_{23}}\right)$ Es un punto interior.

La condición de existencia de este punto como solución del sistema de ecuaciones diferenciales, condiciona el valor del autovalor λ_1 del punto estudiado en el apartado anterior. Así, el análisis de la estabilidad ha de hacerse en conjunto.

$$\frac{a_{21}}{a_{23}a_{11}}r_1 - \frac{a_{23}a_{12}}{a_{11}a_{32}}r_3 - \frac{r_2}{a_{23}} \geq 0 \Rightarrow \frac{a_{32}}{a_{12}}r_1 - r_3 - \frac{a_{11}a_{32}}{a_{21}a_{12}}r_2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0.$$

Solo nos interesa el caso > 0 ya que si $\lambda_1 = 0$, $P_4 = P_3$ y ese caso ya ha sido estudiado previamente.

Si existe P_4 , que es un punto interior, tendremos que es globalmente estable por lo visto en la sección anterior y por lo tanto P_3 deberá ser inestable. Si no existe P_4 entonces P_3 será estable.

Referencias

El marco teórico principal de esta sección ha sido extraído de [17] y [7]. El desarrollo posterior ha sido basado en [4] y los ejemplos tanto de [7], [17] y [19].

Bibliografía

- [1] Von Neuman J. y Morgestern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton.
- [2] Maynard Smith, J. y Price, G.R. (1973) *The logic of animal conflict*, Nature, 246, 15-18.
- [3] Taylor, P. y Jonker L. (1978). *Evolutionary stable strategies and game dynamics*, Mathematical Biosciences, Volume 40.
- [4] Hofbauer, J. (1981). *On the occurrence of limit cycles in the Volterra-Lotka equation*, Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien, Austria.
- [5] Casas, B., Fiestras, G., García Jurado, I., González Díaz, J. (2012) *Introducción a la Teoría de Juegos*, USC editora, manuales.
- [6] Cerdá, E., Pérez, J. y Jimeno, J. L. (2014). *Teoría de Juegos*, Pearson, Madrid, España.
- [7] Hofbauer, J. y Sigmund, K. (1998), *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press.
- [8] Nowak, M. (2006). *Evolutionary dynamics*, Harvard University Press.
- [9] Cartabia, M. (2019). *Modelos para juegos evolutivos*, PhD Tesis Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, Argentina.
- [10] Sandholm, W. H. (2010). *Population Games and evolutionary dynamics*, MIT Press.
- [11] Hofbauer, J. y Sigmund, K. (2003). *Evolutionary game dynamics*, Bulletin of the American Mathematical Society, 40, 479-519.
- [12] Agarwal, R. y O'Regan, D. (2008). *An introduction to ordinary differential equations*, Universitext. Springer, New York, 2008.
- [13] Logemann, H. y Ryan, P. E. (2014). *Ordinary differential equations. Analysis, qualitative theory and control*, Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, London.

-
- [14] Zeeman, E. C. (1980). *Population dynamics from game theory*, Global theory of dynamical systems, pages 471–497. Springer, 1980.
- [15] Marsden J. y McCracken, M. (1976). *The Hopf bifurcation and its applications*, Appl. Math.Sc. 19 Springer, New York.
- [16] Márquez, I., Nieto, J.J. (2017). *Variable Compleja*, NINO-CID.
- [17] Cano Cancela, A. (2011). *Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional*, 28-122.
- [18] Diz Pita, E., Otero Espinar M.V. (2021) *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidad de Santiago de Compostela, Grado en Matemáticas.
- [19] Hofbauer, J., Schuster, P., Sigmund, K., Wolff, R. (1980). *Dynamical Systems under constant organization II: Homogeneous growth functions of degree $p = 2$* SfAM J. appl. Math. C38, 282-304.