

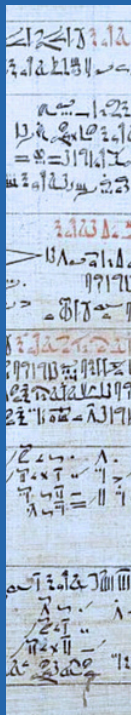
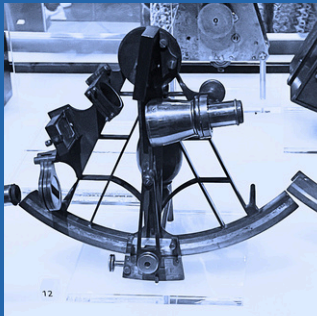
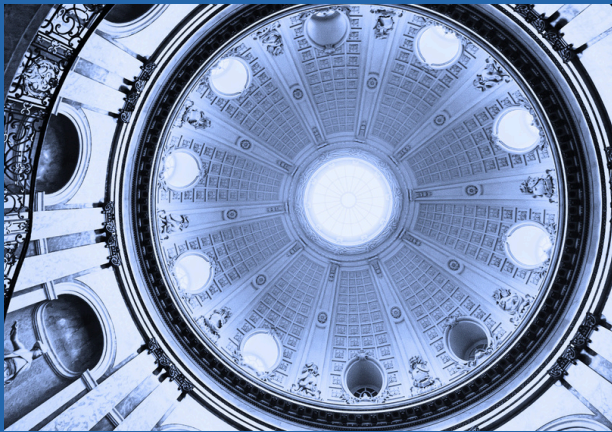
REVISTA ESTUDANTIL

Nº 10 MARZO 2025

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

# ÁIS

# MATES





# Introdución

## Dirección da Revista

Moi bo día lectora ou lector! Estamos encantadas e encantados de que nos leades e desfrutedes connosco deste proxecto. A continuación podedes ver un resumo dos artigos deste número.

### ÍNDICE

#### *Actualidade*

- **O Problema de Kakuya**  
*Francisco Estévez Lengua* páx. 2-3

#### *Retos*

- **Retos Matemáticos**  
*Sementeira* páx. 4

#### *Teoría*

- **Códigos QR e Reed-Solomon**  
*Alejandro Pousa Alonso* páx. 5
- **Wikipedia, Kevin Bacon e teoría de grafos**  
*Santiago González Gómez* páx. 6-7

### ASOCIACIÓN GALEGA DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICAS

Dende fai uns meses a revista xuntouse a unha nova asociación, a **Asociación MaEGA**.

A Asociación Galega de Estudantes de Matemáticas (MaEGA) ([maega.gal](http://maega.gal)) nace coa intención de reunir o estudiantado galego desta disciplina para compartir experiencias e impulsar iniciativas que fomenten as matemáticas en Galicia. A través de diversas actividades, MaEGA busca tanto achegar as matemáticas á sociedade como reforzar a formación do propio alumnado universitario.

Un dos obxectivos principais da asociación é conectar co estudiantado de ensino medio. Para iso, promovemos charlas en institutos, onde estudantes universitarios ofrecen a súa perspectiva sobre a carreira, axudando así a aqueles que dubidan sobre que estudos escoller.

Por outra banda, conscientes da baixa participación feminina en competicións matemáticas, MaEGA impulsa o programa Aurias, que ofrece tutorización e asesoramento por parte de estudantes universitarias a alumnas de instituto, fomentando a súa presenza nestes eventos e reducindo a brecha de xénero.

Xa dentro da universidade, desenvolvemos proxectos como Sementeira, o club olímpico da facultade, no que estudantes de cursos superiores colaboran con aqueles que comezan a súa andaina universitaria, traballando en problemas matemáticos de tipo olímpico.

Dende Máis Mates, parécenos fundamental apoiar estas iniciativas e colaborar con MaEGA na promoción das matemáticas e do galego. Se queres saber máis ou participar, visita [maega.gal](http://maega.gal).

# O Problema de Kakeya

Francisco Estévez Lengua

Un **conxunto de Kakeya**, tamén denominado conxunto de Besicovitch, é un subconxunto do espazo euclidiano que contén un **segmento unitario en todas as direccións**. Por exemplo, un disco de radio  $1/2$  no plano euclidiano ou unha esfera de radio  $1/2$  no espazo tridimensional constitúe un conxunto de Kakeya. Un **conxunto de agulla de Kakeya** é un conxunto de Besicovitch no plano cunha propiedade aínda máis forte: dentro del, un segmento unitario pode xirar de maneira continua un ángulo de  $180^\circ$ , retornando á súa posición inicial pero con orientación inversa. Novamente, un disco de radio  $1/2$  constitúe un exemplo dun conxunto de agulla de Kakeya.

Unha pregunta que se formulou foi determinar cal pode ser a medida máis pequena que pode ter un conxunto con esta propiedade.

Esta pregunta foi formulada por primeira vez, para rexións convexas, por *Sōichi Kakeya* (1917). Foi grazas a Pál [1] a obtención da solución para conxuntos convexas: considérase un triángulo equilátero de altura 1 e área  $1/\sqrt{3}$ , intenta construílo nun papel!

Por outra banda, eliminando a restricción de convexidade, *Kakeya* suxeriu unha forma deltoide de tres puntas, aínda que posteriormente se demostrou incorrecta. Proba a coller unha agulla ou lápiz e verificar que é un conxunto de Kakeya.

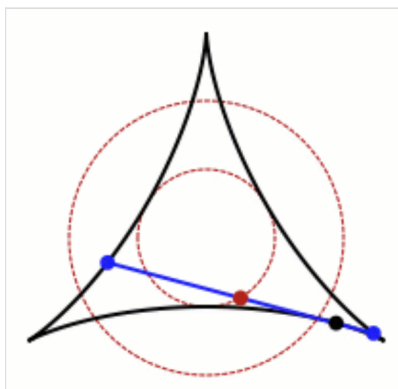


Fig. 1: Deltoide de tres puntas

## PRIMEIROS AVANCES

Dous anos despois, *Abram Besicovitch* demostrou que é posible construír conxuntos de Kakeya de medida arbitrariamente pequena, sorprendendo á comunidade matemática e refutando a hipótese de Kakeya [2].

En 1928 *Oskar Perron* simplificou a construción orixinal de Besicovitch, introducindo o método da "Árbore de Perron" para a construción destes conxuntos, reducindo aínda máis a súa área [3]. O tratamento para a construción é bastante sinxela se se imaxina adecuadamente.

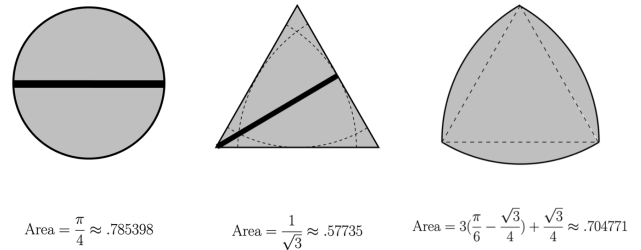


Fig. 2: Exemplos de conxuntos de Kakeya convexas

## CONSTRUCCIÓN DUN CONXUNTO DE BESICOVITCH.

Construamos este conxunto e vexamos como se pode obter un conxunto de Besicovitch de medida nula. O obxectivo é reducir iterativamente a súa área mantendo sempre a propiedade de conter segmentos en todas as direccións.

Primeiro construímos un patrón, que se chama **árbore de Perron**.

**Triángulo inicial:** Partimos dun triángulo de altura 1 cun ángulo positivo suficientemente pequeno no vértice superior.

**División e superposición:** Comezamos dividíndoo en dous subtriángulos, desprazando estes de maneira que a área total se reduza. A agulla pode moverse entre os subtriángulos seguindo un patrón en forma de "N" (véxase 3).

**Iteracións:** Repetimos este proceso, subdividindo cada triángulo en  $2^n$  subtriángulos e superpoñéndoos. A medida que o número de iteracións aumenta, a área do conxunto redúcese progresivamente.

**Límite:** Tras un número suficiente de iteracións, a área pode facerse arbitrariamente pequena, aproximándose a cero.

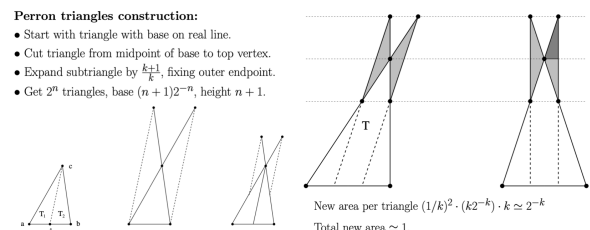


Fig. 3: Construción de triángulos de Perron

Para construír un conxunto de Besicovitch, utilizamos unha variante do método de Perron, combinando múltiples copias rotadas da árbore de Perron.

**Construción básica:** Iniciamos cunha árbore de Perron xerada a partir dun triángulo equilátero e aplicamos o proceso iterativo descrito anteriormente.

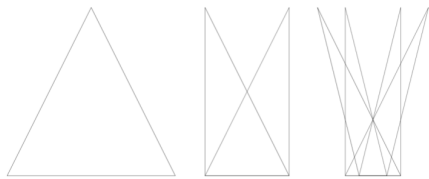
**Rotacións:** Tomamos seis copias desta construción e rotámolas en distintas direccións para garantir que o conxunto inclúa segmentos en todas as orientacións.

**Área:** A área final é a suma das áreas de cada iteración, que diminúe á medida que aumentamos as subdivisións. Pódese demostrar que esta área pode facerse tan pequena como queiramos, tendendo a cero. Non incluiremos aquí a demostración formal, pois aínda que o proceso resulta relativamente sinxelo de seguir, é longo. A demostración pódese ver en ...

Deste xeito, obtemos un conxunto de Besicovitch de medida nula.

Rescale to height 1. New total area  $\simeq k/k^2 = 1/k$ .

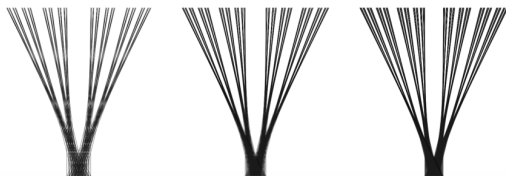
Stages 1,2,3:



Stages 3,4,5:



Stages 6,7,8:



**Fig. 4:** Construción dun conxunto de Besicovitch de medida nula

A evolución no estudo dos conxuntos de Kakeya foi marcada por unha serie de avances significativos ao longo do tempo. Inicialmente, *H.J. Van Alphen* demostrou a existencia de conxuntos de Kakeya contidos en círculos de radio arbitrariamente pequeno ( $2 + \epsilon$ , con  $\epsilon > 0$ ), ampliando así a comprensión da súa xeometría [4]. Máis adiante, *Bloom e Schoenberg* desenvolveron novas técnicas que permitiron reducir aínda máis a área destes conxuntos, e *F. Cunningham* conseguiu probar que existen conxuntos de Kakeya simplemente conexos cunha área inferior a calquera valor positivo arbitrario [5].

## CONXECTURA DE KAKEYA

Despois, ideouse a **conxectura de Kakeya** que establece que a dimensión de Hausdorff e a dimensión de Minkowski superior dun conxunto de Kakeya en  $\mathbb{R}^n$  debe ser igual a  $n$ . Definimos estas dimensións sen entrar en moito formalismo da seguinte maneira:

**Definición 1.** A dimensión de Hausdorff é unha xeneralización da noción de dimensión que mide a complexidade xeométrica dun conxunto mediante a súa estrutura de cubrimento con bolas de radio arbitrariamente pequeno.

**Definición 2.** A dimensión de Minkowski superior, tamén chamada dimensión de caixa, mide como cambia o número de caixas necesarias para cubrir un conxunto cando a escala de observación diminúe.

*Nets Katz, Izabella Łaba e Terence Tao* lograron melloorar os límites inferiores para a dimensión dos conxuntos de Kakeya, establecendo conexións clave coa análise harmónica e a combinatoria aritmética [6]. Unha contribución fundamental chegou da man de *Zeev Dvir*, quen resolveu a versión do problema en campos finitos empregando ferramentas da teoría dos polinomios para demostrar a existencia dunha cota inferior positiva para a dimensión destes conxuntos [7].

Ata hai pouco, a conxectura estaba demostrada para dimensións baixas: en dimensións unidimensional e bidimensional. Porén, en febreiro de 2025, os matemáticos *Hong Wang*, da Universidade de Nova York, e *Joshua Zahl*, da Universidade de Columbia Británica, publicaron unha demostración que confirma a conxectura en tres dimensións. No seu traballo, titulado “Volume estimates for unions of convex sets, and the Kakeya set conjecture in three dimensions”, establecen que calquera conxunto de Kakeya en  $\mathbb{R}^3$  ten dimensión de Hausdorff e de Minkowski igual a 3. anunciaron un avance crucial na teoría da medida xeométrica ao afirmar que probaron a conxectura de Kakeya en tres dimensións, un resultado que, de confirmarse, suporía un progreso decisivo no estudo deste problema [8].

A evolución deste problema mostra como a matemática moderna continúa explorando cuestións fundamentais sobre a **Teoría da medida**, a **xeometría** e a **análise harmónica**.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Pal, Julius. “Ueber ein elementares variationsproblem”. *Kongelige Danske Videnskabernes Selskab Math.-Fys. Medd.* 2: 1–35. 1920.
2. A. Besicovitch, “On two questions of the theory of measure,” *Math. Ann.*, vol. 10, 1919.
3. O. Perron, “Über einen Satz von Besicovitch,” *Math. Z.*, vol. 28, 1928.
4. Alphen, H. J. “Uitbreiding van een stelling von Besicovitch”. *Mathematica Zutphen* B. 10: 144–157. 1942.
5. F. Cunningham, “Simply connected Kakeya sets,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 78, 1971.
6. N. Katz, T. Tao, “Bounds on Kakeya sets,” *J. Anal. Math.*, vol. 87, 2002.
7. Z. Dvir, “Kakeya sets over finite fields,” *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 22, 2008.
8. H. Wang, J. Zahl, “Kakeya conjecture in three dimensions,” *arXiv*, 2025. arxiv.org/2502.17655

# Retos Matemáticos



## XOGOS DE PERIÓDICO

Resolve o seguinte Sudoku:

	4				5	9	3	
	5	7		6			2	
3				2			5	
6		9		5	2			
4	7							
				1	7			
	6	3				4		
7	9	5	2					1
	2		3	9		7		

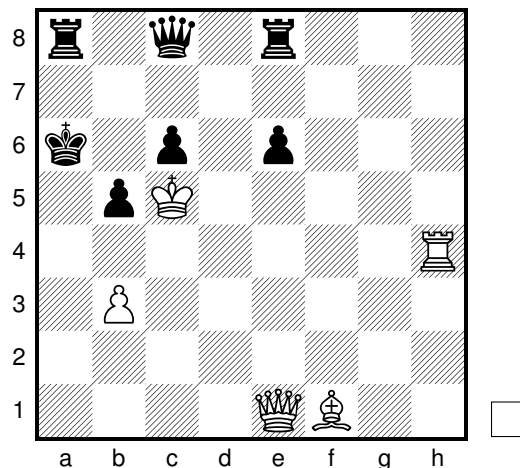
Solución do Sudoku:

1	2	4	7	2	7	1	2	5
7	9	5	8	6	1	3	1	3
8	6	9	2	1	4	9	2	8
5	3	8	6	1	7	2	4	9
4	7	2	8	3	9	5	6	1
6	1	9	4	5	2	3	7	8
3	8	6	9	2	2	4	1	5
9	5	7	1	6	3	8	3	8
2	4	1	7	8	5	9	3	6

Solución do xadrez:

#b4c  
2a4+bxa4  
1a5+xa5

Gañan as brancas en 3 movementos...



Descubrimos a cita do número anterior:

*“En matemáticas non entendes as cousas. Simplemente te afás a elas.”*

— John von Neumann (1979)

Es quen de recuperar a cita cifrada?

*“Xw axxsjehfgop wck e ooxs ai rxvzii c jigjs blqs x gcrwop hwpwxkxop”.*

— Henri Poincaré (1921)

## PROBLEMAS PROPOSTOS

- Dado un conxunto  $M$  de 2024 enteiros positivos, ningún dos cales ten divisores primos maiores ca 25, proba que podemos atopar 4 elementos distintos en  $M$  cuxa media xeométrica sexa un enteiro.
- Atopar  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  tal que para cada  $x \in \mathbb{R}^+$  existe un único  $y \in \mathbb{R}^+$  de tal xeito que
 
$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$
- Consideremos  $n > 2$  números reais (non necesariamente distintos) con suma nula. Para cada unha das  $2^n - 1$  formas de escoller algúns dos  $n$  números orixinais (al menos un), calculamos a suma dos números escollidos. Organizamos os resultados de estas sumas de maior a menor. Se  $S$  é a maior suma, cal é o valor mínimo posible da segunda maior suma?
- Os seguintes cadrados (conformados polos números entre o 1 e o 9) cumpren dúas condicións distintas. O primeiro é unha suma, sendo as dúas primeiras filas os sumandos e a terceira o resultado. No segundo cadrado podes pasar de cada número ao seguinte dando un paso vertical ou horizontal. Escribe, se é posible, un cadrado que cumpra ambas cousas.

	3	1	8
+	6	5	4
—	9	7	2

7	6	1
8	5	2
9	4	3

Solucións do nº anterior:



# Códigos QR e Reed-Solomon

Alejandro Pousa Alonso

Cada ano que pasa, a sociedade normaliza máis rápido os novos avances tecnolóxicos. Hoxe en día, as IA's están moi implantadas na sociedade, tanto que a un costaríalle crer que ChatGPT saíu fai dous anos e medio. Pero, por exemplo, os códigos QR son parte das nosas vidas, e sobre todo, a xente máis nova, non saberá que teñen xa trinta anos.

O código QR (*Quick Response Code*) naceu no Xapón en 1994 e foi creado por unha empresa de automoción motivada pola necesidade de mellorar a velocidade de escaneo de identificacións na produción e loxística. Con anterioridade, predominaban os códigos de barras, que se levaban usando dende 1952, que a pesar de ser solapados polos QR, seguiron empregándose ata o día de hoxe nos envases e paquetes.

Para explicar o seu funcionamento, comezaremos polo máis básico. A estrutura do QR inclúe tres cadrados nas esquinas que permiten ó lector orientar o código. O resto da área que ocupa é utilizada para almacenar a información, véxase en módulos de cor branca e negra ou, en casos especiais, outras dúas cores suficientemente contrastadas. Tampouco é necesario que entre as cores haxa unhas fronteiras tan marcadas, hainos incluso con degradados.



Fig. 1: Código QR en perfecto estado



Fig. 2: Código QR danado

Estes códigos servirannos como exemplo para mostrar do que vai tratar o resto do artigo. Loxicamente, pensamos que o primeiro QR vai funcionar perfectamente, e que o segundo non, pero ao escanealos, ambos funcionan. Como é isto posible?

A capacidade dun código QR (ou de barras) para ser escaneable, incluso estando danado, chámase redundancia. Non todo o que vemos é información, senón que gran parte do mesmo é corrección de erros. Existen catro niveis de especificación segundo a porcentaxe de código que pode destruírse antes de que sexa ilexible. Estes denomínanse como niveis L,M,Q,H segundo as porcentaxes do 7%, 15%, 25% e 30% respectivamente.

O código Reed-Solomon traballa con grupos de  $m$  bits que se denominan símbolos, e estes dinse erróneos se hai algún bit da súa composición que teña un erro. Tamén, cada palabra consta de  $k$  símbolos de información e  $r$  símbolos de paridade, tales que a lonxitude da palabra é  $n = k + r$ . Ademais,  $t = r/2$  é o número máximo de erros corrixibles. Tamén se ten que  $n = 2^q - 1$ , non obstante, esta relación non se cumpre de todo cos códigos QR, xa que estes non usan todo o espazo do corpo finito onde traballamos; explicárase isto máis adiante. Antes de ver un exemplo, debemos saber que un código Reed-Solomon cunha lonxitude de  $n$  símbolos totais e  $k$  símbolos de datos denótase por  $RS(n, k)$ .

Supoñamos agora que temos un código QR de nivel de corrección M tal como  $RS(26,18)$ . Temos 18 símbolos de datos, é dicir, de información útil, e 26 símbolos totais, polo que facendo a diferenza quedámonos con  $26 - 18 = 8$  símbolos de paridade. Ó dividir estes entre dous, temos que o noso código QR admite ata 4 símbolos erróneos ( $\approx 15\%$ ), o esperable para ser do nivel de corrección M.

Imos considerar  $\mathbb{F}_{2^q}$ , o corpo finito de  $2^q$  elementos, e  $\alpha \in \mathbb{F}_{2^q}$  un elemento primitivo, é dicir,  $\alpha$  xera coas súas potencias todos os elementos non nulos do corpo. Agora, dada unha mensaxe de  $k$  símbolos, polo teorema de interpolación, existe un único polinomio de grao  $k - 1$  que pase por  $k$  puntos dados. Así pois, temos

$$m(x) = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \dots + m_{k-1}x^{k-1}$$

con  $m_i \in \mathbb{F}_{2^q}$

Para agregar os  $2t = r$  símbolos de paridade, definimos o polinomio xerador, o cal é clave na codificación, e a súa función é engadir os símbolos de paridade. Este é da forma:

$$g(x) = (x - \alpha^0)(x - \alpha)(x - \alpha^2) \dots (x - \alpha^{2t-1})$$

Por último, se multiplicamos ambos polinomios e evaluamos nas  $n - 1$  primeiras potencias de  $\alpha$ , temos a nosa información codificada; é dicir:

$$c(x) = g(x) \cdot m(x)$$

$$V = (c(\alpha^0), c(\alpha^1), \dots, c(\alpha^{n-1}))$$

Notemos que os  $2t - 1$  primeiros elementos de  $V$  son zeros, e isto corresponderíase ós símbolos de paridade da mensaxe.

Aínda que este algoritmo desenvolveuse nos anos 60, segue sendo clave na tecnoloxía moderna. Non só os CD's e os códigos QR o usan, senón que tamén se empregan en comunicacións espaciais, por exemplo, a NASA úsao para transmitir datos dende sondas espaciais como a Voyager. Aínda que Reed-Solomon segue sendo un estándar, poderían outros algoritmos das novas xeracións reemplazar a Reed-Solomon? Pronto o descubriremos, pero o seu legado na tecnoloxía moderna é innegable.

### Referencias

Pedro Jesús Martínez Garrido, *Realización Software de un Codificador/Decodificador Reed-Solomon*, Universidad de Sevilla.

Wikipedia, *Reed-Solomon*, <https://es.wikipedia.org/wiki/Reed-Solomon>.

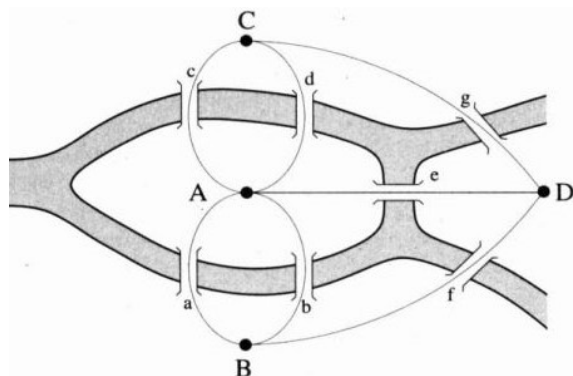
Vcubingx, *What are Reed-Solomon Codes? How computers recover lost data*, Youtube: [www.youtube.com/watch?v=1pQJkt7-R4Q&ab](http://www.youtube.com/watch?v=1pQJkt7-R4Q&ab)

# Wikipedia, Kevin Bacon e teoría de grafos

Santiago González Gómez

**S**eguramente todos probamos algunha vez o seguinte xogo: chegar a un artigo de Wikipedia partindo doutro aleatorio simplemente navegando entre hiperenlaces. Non é moi complicado, pois Wikipedia é unha rede densamente interconectada onde hai múltiples formas de chegar á meirande parte dos artigos. Neste contexto un pode preguntarse, cal é o camiño máis curto entre dous artigos dados? Ou mesmo, temos asegurado poder chegar ao noso destino? Imos empregar este pequeno xogo como excusa para falar brevemente dunha rama das Matemáticas coñecida como teoría de grafos, e tamén doutros problemas moi similares ao de Wikipedia.

## Nodos, arestas e pontes prusianas



**Fig. 3:** Imaxe esquemática das pontes de Königsberg co grafo correspondente.

Na antiga cidade prusiana de Königsberg (actual Kaliningrado, Rusia) existían sete pontes que cruzaban o río Pregel, unindo as dúas ribeiras e dúas illas no medio do río (figura (3)). Estas pontes eran as protagonistas dun tradicional acertixo: pode un turista dar un paseo por Königsberg de xeito que cruce as sete pontes unha soa vez? En 1735, Euler demostrou que non, que dito roteiro é imposible: existe solución se, e só se, a cada masa de terra (agás aos puntos iniciais e finais, se estes fosen diferentes) chegan un número par de pontes, cousa que non ocorre en Königsberg. Este foi o primeiro teorema do que posteriormente deu en chamarse teoría de grafos, unha rama que abarca unha gran cantidade de problemas que poden ser modelizados mediante un grafo. Seguiremos [1] para introducir os conceptos teóricos da teoría de grafos.

Un grafo é simplemente un par de conxuntos que se adoitan representar graficamente: os elementos do primeiro deles chámanse **vértices** ou **nodos**, e os do segundo, **arestas**. Informalmente, podemos pensar nos nodos

como lugares dalgún tipo e nas arestas como nos camiños que se poden tomar para chegar dun nodo a outro. Nestes termos, o problema das pontes de Königsberg pode modelizarse mediante un grafo con catro nodos (as dúas illas e as dúas ribeiras do río) e sete arestas (as pontes). Como neste caso poden atravesarse as pontes en calquera sentido, o grafo dise **non orientado**.

Outra cousa interesante que se pode engadir a un grafo son etiquetas, que aumentan considerablemente a versatilidade para modelizar distintos problemas. Por exemplo, imaxinemos que nos cobran unha tarifa por atravesar cada ponte (ou que temos en conta a lonxitude das pontes). Un problema interesante sería visitar tódolos nodos pagando o mínimo posible (respectivamente, camiñando o menos posible); as etiquetas aparecerían nas arestas e representarían o prezo pagado por empregala ou a distancia percorrida. Tamén poden representarse outro tipo de situacións con etiquetas nos nodos. Por exemplo, pode ocorrer que teñamos un conxunto de nodos que representan almacéns cun certo produto e outros que representan tendas con necesidades específicas de reposición. Neste caso, gustaríanos elixir a forma óptima de facer chegar o stock ás tendas considerando a demanda e as limitacións de stock.

Neste artigo, centrarémonos no problema de atopar o camiño máis curto entre dous nodos, e como se aplica ao xogo que presentabamos inicialmente.

## Os seis graos e Hollywood

Trala Primeira Guerra Mundial, púxose de moda a discusión sobre a cambiante demografía do planeta, e como a crecente globalización achegaba cada vez máis a tódolos habitantes da Terra. En 1929, o escritor húngaro Frigyes Karinthy foi o primeiro en explorar a seguinte idea: se consideramos unha rede na que aparezan tódolos habitantes do planeta como nodos e as conexións entre eles (é dicir, se dúas persoas se coñecen ou non) como arestas, cantos intermediarios bastan para conectar a dúas persoas calesquera? Esta pregunta inicialmente inocente deu pé ao que hoxe en día se coñece como “teoría dos seis graos de separación”, pois considérase que, en xeral, basta con seis persoas ou menos. É dicir, o máis probable é que estas seis coñecidos ou menos de, por exemplo, Taylor Swift. Esta teoría pódese aplicar a grupos máis reducidos de persoas, por exemplo, os usuarios dunha rede social. Nese caso, os graos de separación poden ser máis ou menos de seis, dependendo do número de persoas e, sobre todo, do nivel de interconexión.

Imos exemplificar esta teoría cun exemplo. Kevin Bacon é un actor estadounidense coñecido, por exemplo, por protagonizar *Footlose*. A súa filmografía é tan extensa que nos anos 90 moitos tiñan a sensación de que estaba por todos os lados. Por iso, en 1994 varios estudantes do Albright College de Pennsylvania decidiron crear un xogo coñecido como os “Seis graos de Kevin Bacon”. O xogo é o seguinte: dado un actor calquera, podemos atopar un camiño que o conecte con Kevin Bacon en seis pasos ou menos? Como vemos, a idea é moi similar á teoría dos seis graos de separación. Neste caso, as “arestas” son películas nas que coincidiron os

dous actores que se sitúan como nodos nos seus extremos, e a lonxitude do camiño mínimo atopado é o que se coñece como número de Bacon. Así, Kevin Bacon ten un número de Bacon 0, e os actores que traballaron directamente con el teñen número de Bacon 1. Por exemplo, Santiago Segura ten número de Bacon 2: traballou con Alec Baldwin en *Torrente 5*, e Baldwin traballou con Kevin Bacon en *She's Having A Baby*.

En Matemáticas, temos un concepto similar ao do número de Bacon: o número de Erdős, que mide a distancia entre o matemático Paul Erdős e outro matemático calquera. Neste caso, as conexións son artigos nos que dous matemáticos colaboraron.

## Dijkstra e Wikipedia

Volvamos entón ao noso problema inicial. Imos traballar coa Wikipedia en inglés simplemente pola cantidade de recursos á nosa disposición. Se queremos atopar o camiño máis curto entre calquera par de páxinas de Wikipedia, precisamos un grafo con tódolos artigos de Wikipedia nos nodos (6,970,796 no momento de redacción) e as conexións por hiperenlaces nas arestas. Dito grafo pode verse na referencia [2], alomenos no seu estado en abril do ano pasado (Wikipedia é unha web que se atopa en constante cambio).

A primeira diferenza que atopamos con respecto ao problema das pontes de Königsberg ou ao dos graos de separación é que este grafo é **orientado**; é dicir, moitas arestas pódense percorrer nunha dirección pero non noutra. Por exemplo, na páxina da Universidade de Santiago de Compostela hai un hiperenlace que nos leva directamente á páxina sobre Matemáticas, pero no artigo sobre Matemáticas non hai ningún enlace directo á páxina sobre a USC.

O que nos interesa agora é atopar o algoritmo que nos devolva o camiño buscado. Na materia de Programación Linear e Enteira de segundo curso do grao, para resolver problemas de camiño máis curto con arestas etiquetadas (suponse que esas etiquetas representan distancia) emprégase un procedemento moi sinxelo coñecido como **algoritmo de Dijkstra**. O noso problema é moi particular, no sentido en que tódolos hiperenlaces teñen a mesma distancia ao seguinte nodo. Polo tanto, o noso grafo non está etiquetado (ou podemos considerar que tódalas arestas teñen etiqueta 1). Non imos profundar en como funciona o algoritmo de Dijkstra en xeral, pero resulta que a equidistancia que caracteriza o noso caso fai que o algoritmo de Dijkstra se converta nun procedemento de absoluta forza bruta: dado un artigo inicial, compróbase se o destino se atopa como hiperenlace no artigo. Se a resposta é negativa, compróbanse tódolos artigos citados no inicial para ver se esta vez si aparece a páxina de destino, etc. O tempo computacional deste algoritmo é enorme en xeral debido á inxente cantidade de artigos e de enlaces posibles (aínda que se poida pulir non comprobando de novo camiños circulares). Porén, na realidade o tempo de computación adoita ser moi curto por ser Wikipedia un grafo moi denso; noutras palabras, adóitase rematar rápido simplemente porque os graos de separación adoitan ser poucos.

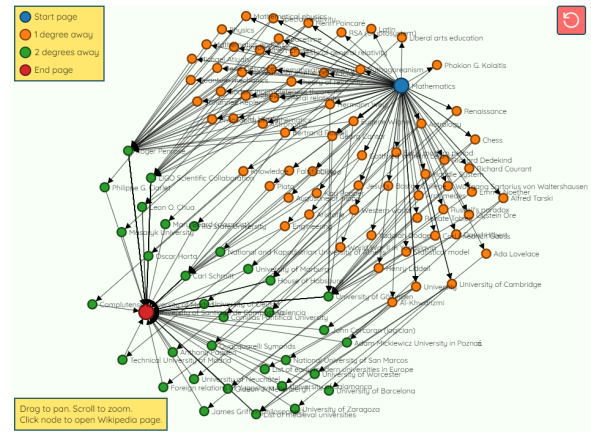


Fig. 4: Grafo Matemáticas → USC dado por [3].

A web [3] é un proxecto que, mediante este método, permite calcular o camiño máis curto entre dúas páxinas de Wikipedia dadas. Por exemplo (alomenos no momento da elaboración da páxina), para chegar do artigo sobre Topoloxía Alxébrica ao artigo sobre Pablo Motos debemos empregar non menos de 5 hiperenlaces, e hai 2826 formas diferentes de facelo nese número de pasos. Un dos camiños posibles é Topoloxía Alxébrica → René Thom (matemático francés, medalla Fields en 1958) → Varsovia → Oviedo → Melendi → Pablo Motos. O camiño inverso, de Pablo Motos a Topoloxía Alxébrica, pode realizarse en 3 pasos, pero só existe unha forma de facelo: Pablo Motos → Servizo militar → Investigación de operacións → Topoloxía Alxébrica.

Para rematar, recomendo botarlle a unha ollada ao proxecto do youtuber “adumb” ([2]) no que se analiza en máis profundidade o grafo de Wikipedia: a lonxitude media dos camiños, os subgrafos máis densamente conectados que nela se atopan... Non se cumpre a teoría dos seis graos, alomenos para “adumb”, que decidiu non empregar os hiperenlaces nas seccións “Referencias” e “Véxase tamén” por consideralos trampa, cousa que si fai [3]. Tampouco se pode atopar un camiño entre calquera par de artigos dados. Isto adoita ocorrer pola presenza de “artigos orfos” (aos que non chega ningún enlace) ou “artigos sen saída” (dos que non sae ningún enlace), ou porque algún dos artigos pertence a algún subgrupo moi especializado que só está conectado entre si. Como curiosidade, “adumb” atopou un artigo, “Fanta Cake”, que era á vez un artigo orfo e sen saída. Dende que saíu no vídeo, o artigo foi editado unha chea de veces e agora mesmo conta cun cento de hiperenlaces saíntes, un breve recordatorio de que ás veces é imposible estudar algo sen modificalo para sempre.

## Referencias

- [1] CASARES DE CAL, M. A. (2022) Apuntamentos do tema de Análise de Redes. Programación Linear e Enteira. Universidade de Santiago de Compostela.
- [2] ADUMB (2024), I Made a Graph of Wikipedia... This Is What I Found, enlace: <https://www.youtube.com/watch?v=JheGL6uSF-4>.
- [3] WENGER, J. (2018). *Six Degrees of Wikipedia*, enlace: [sixdegreesofwikipedia.com](http://sixdegreesofwikipedia.com).



*Euler foi un xenio das Matemáticas, pero aínda así, non tivo a sorte de ler Máis Mates antes de quedarse irremediamente cego. Gauss posiblemente se aburría moito entre clases, algo que podería ter remediado se se lle ocorrese inventar Máis Mates. Hipatia tampouco a tivo nas súas mans, pero seguro que gozaría das cónicas da portada. Se cadra Galois podería ter achado a fórmula de Máis Mates, pero morreu demasiado novo... E ti? Ti tes Máis Mates ao alcance da man!*

*Máis Mates é un proxecto en forma de revista do alumnado para o alumnado, o proxecto co que todos eses egrexios persoeiros soñarían. Cada mes, traémosvos novos artigos con pequenas anécdotas da historia das matemáticas, as últimas novas, entrevistas, pasatempos, pequenos petiscos en diversos temas que ao mellor non se tratan en profundidade na carreira... En definitiva, todo o que esperta a nosa curiosidade como alumnas e alumnos, e que quizais esperte tamén a túa!*

*Estamos aí para que desconectes na metade dunha dura sesión de estudo, ou para todo o que se che ocorra. Lenos, coméntanos, compártenos, escríbenos e colabora con nós!*



FACULTADE DE MATEMÁTICAS



*Accede á revista!*

*revistamaismates@gmail.com*



FACULTADE DE MATEMÁTICAS