



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Geodésicas en variedades de Riemann

Alejandro Victorero Domínguez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Geodésicas en variedades de Riemann

Alejandro Victorero Domínguez

Julio, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Geometría y Topología
Título: Geodésicas en variedades de Riemann
Breve descripción do contido
El objetivo del trabajo se centrará en analizar las propiedades minimizantes de las geodésicas en variedades de Riemann. Se dedicará especial atención a las propiedades locales y la influencia de la curvatura en términos de la existencia de puntos conjugados.
Recomendacións
Cursar la asignatura de Variedades Diferenciables.
Outras observacións

Índice general

Resumen	vii
Introducción	ix
1. Preliminares	1
1.1. Variedades diferenciables, espacio tangente y campos de vectores	1
1.2. Formas diferenciables y el fibrado cotangente	3
1.3. Corchete de Lie	5
1.4. Variedades de Riemann	6
1.5. Isometrías entre variedades de Riemann	6
1.6. Diferencial y gradiente de una función	7
2. Conexiones y derivada covariante	9
3. La conexión de Levi-Civita	17
4. Geodésicas y aplicación exponencial	21
4.1. Geodésicas	21
4.2. Aplicación exponencial	23
4.3. Entornos normales y la función separación radial	24
5. Propiedades minimizantes	27
5.1. Variaciones	27
5.2. Longitud y distancia en una variedad de Riemann	30
5.3. Geodésicas y curvas minimizantes	31
5.4. Las geodésicas son curvas localmente minimizantes	34
Bibliografía	43

Resumen

Tras introducir la noción de variedad de Riemann, se estudiará la conexión de Levi-Civita; su existencia y unicidad. Así, será posible introducir el concepto de geodésica parametrizada como las curvas cuya velocidad determina un campo de vectores paralelo a lo largo de la curva. Estudiaremos las propiedades minimizantes de las geodésicas, mostrando que si una curva uniendo dos puntos tiene longitud menor que cualquier otra curva que una dichos puntos, entonces es una geodésica. Aunque el recíproco del anterior resultado no es cierto en general, sí se cumple localmente, mostrando que en entornos uniformemente normales las geodésicas son las curvas de menor longitud que unen dos puntos dados.

Abstract

After introducing the notion of Riemannian manifold, the Levi-Civita connection will be studied; its existence and uniqueness. Thus, it will be possible to introduce the concept of parametrized geodesics as the curves whose velocity determines a parallel vector field along the curve. We will study the minimizing properties of geodesics, showing that if a curve joining two points has length less than any other curve joining those points, then it is a geodesic. Although the converse of the previous result is not true in general, it is true locally, showing that in uniformly normal neighborhoods the geodesics are the curves of shortest length that join two given points.

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de las geodésicas en las variedades de Riemann, en particular sobre una de sus propiedades geométricas más relevantes: las geodésicas son curvas que localmente minimizan la distancia. Por este motivo, a lo largo de esta memoria exploraremos y desarrollaremos todas las herramientas y conceptos necesarios para poder demostrar dicha propiedad. Se intentará aportar una visión geométrica de los resultados más formales (siempre que se pueda) con el fin de no perder de vista nuestro objetivo final.

Sin embargo, es importante plantearse por qué las geodésicas son curvas tan destacadas en una variedad y, por tanto, por qué ocupan el eje central de este trabajo. Dentro del contexto de las variedades nos encontramos con la *Geometría de Riemann*, que trata sobre el análisis de las propiedades que se preservan mediante isometrías. Entonces, para poder desarrollar un estudio geométrico de una variedad, medir distancias es fundamental y está claro que se deben buscar y caracterizar las curvas que minimicen la distancia entre dos puntos. Como ya se adelantó, dichas curvas serán las geodésicas, pero sólo desde un punto de vista local.

La motivación principal de este trabajo ha sido generalizar los conceptos y resultados vistos en la asignatura de tercer curso *Teoría Global de Superficies* del Grado en Matemáticas de la USC. Allí, en el contexto de las superficies regulares en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , las curvas geodésicas son aquellas para las que existe una parametrización para la cual su aceleración es nula, es decir, son curvas de velocidad constante. Por lo tanto, y desde un punto de vista intrínseco, lo anterior se traduce en que las geodésicas son las curvas “lo más rectas posible” en la superficie. Uno de los resultados más relevantes que se ven es que las geodésicas están caracterizadas localmente dados un punto inicial y un vector dirección inicial. A partir de este hecho se define la aplicación exponencial, la cual presenta ciertas propiedades que la hacen indispensable para probar que las geodésicas son curvas minimizantes, e incluso para introducir nuevos sistemas de coordenadas.

Con un afán generalizador, nos planteamos si es posible probar resultados similares

a los anteriores desde un punto de vista más amplio. En la signatura optativa de cuarto *Variedades Diferenciables* se nos presenta la noción de variedad como una generalización de los espacios euclidianos de dimensión finita. Partiendo de esta base, iremos introduciendo una serie de herramientas que nos permitirán “derivar” campos de vectores sobre una variedad, definir lo que entenderemos por una curva geodésica y la aplicación exponencial. Una vez visto este repertorio nos lanzaremos directamente a por el objetivo principal de esta memoria: demostrar que las geodésicas minimizan localmente la distancia.

El trabajo empieza en el Capítulo 1 con una suerte de recopilación de conceptos y cuestiones que se trataron en la asignatura de *Variedades Diferenciables*. Es importante asentar las bases sobre las que se está trabajando, por lo que conocer lo expuesto en este capítulo será de gran ayuda para poder seguir las siguientes partes. Aunque algunos resultados no guarden relación directa con los desarrollos posteriores, lo cierto es que sí se hará uso de ellos para progresar en la exposición.

En el Capítulo 2 empieza propiamente el contenido del trabajo. Aquí se define la noción de *conexión*, fundamental para el estudio geométrico de curvas sobre variedades, la *derivada covariante* y el *transporte paralelo* de un vector a lo largo de una curva. En este capítulo se presentan estos conceptos desde un punto de vista general de las variedades diferenciables. En el Capítulo 3 nos centraremos en el ámbito de las variedades de Riemann y, buscando que nuestra conexión presente un “buen comportamiento” respecto de la métrica, encontraremos que existe una única conexión destacada: la conexión de Levi-Civita.

En el Capítulo 4 se tratará la definición de las geodésicas y de la aplicación exponencial, junto con algunas propiedades de interés. También se definirá la función separación radial que, aunque en este capítulo reciba un tratamiento más formal, en el siguiente desempeñará un papel crucial para resultados necesarios para dar el salto a demostrar la propiedad minimizante de las geodésicas.

Finalmente, el Capítulo 5 versará exclusivamente sobre la propiedad minimizante de la distancia de las geodésicas. Aquí veremos que toda curva minimizante debe ser una geodésica, pero solamente se verificará el recíproco (es decir, que toda geodésica es una curva minimizante) a un nivel local. Para probar todo esto, recurriremos al cálculo variacional, y nuestra herramienta básica para probar dicha propiedad serán las *variaciones*.

Para la realización de este Trabajo de Fin de Grado se ha seguido en gran medida el libro [4], aunque los demás libros de la bibliografía también resultaron bastante influyentes para la elaboración final de la presentación. Además, algunas cuestiones relacionadas con las asignaturas del grado que se pueden enmarcar dentro de la Geometría Diferencial y

de las Ecuaciones Diferenciales estarán presentes en ciertas demostraciones de resultados puntuales.

Capítulo 1

Preliminares

Para sentar notación, a lo largo de todo el trabajo se utilizará el **criterio de suma de Einstein**. Consiste en omitir los símbolos de sumatorio cuando aparezcan índices repetidos en posición de subíndice y superíndice. Por ejemplo, si $v = (v_1, \dots, v_n)$ es un vector de \mathbb{R}^n , con la notación usual lo escribiríamos en la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ como

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i.$$

Con la notación de Einstein, tomando el convenio de que las componentes de los vectores se escriben con superíndices, nuestro vector v se escribiría en base canónica como

$$v = v^i e_i.$$

Fijémonos que el sumatorio no es necesario escribirlo porque tenemos el índice i repetido en una posición de superíndice y de subíndice, por lo que se sobreentiende que estamos sumando respecto del índice i .

1.1. Variedades diferenciables, espacio tangente y campos de vectores

Definición 1.1. Sea M un espacio topológico Hausdorff y localmente euclidiano de dimensión n . Se define una **carta** sobre M como un par (\mathcal{U}, φ) , donde \mathcal{U} es un abierto en M y $\varphi: \mathcal{U} \subset M \rightarrow \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

Dada una carta (\mathcal{U}, φ) , se denomina a \mathcal{U} un **abierto coordinado**. Se dirá que las componentes $x^1, \dots, x^n: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de φ son **funciones coordenadas**, y que $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ es un **sistema de coordenadas**.

Definición 1.2. Una **variedad diferenciable** de dimensión n es un par $(M, [\mathcal{A}]_\infty)$, donde M es un espacio topológico Hausdorff y localmente euclidiano de dimensión n , y $[\mathcal{A}]_\infty$ es una estructura diferenciable sobre M . Por simplicidad denotaremos por M a la variedad diferenciable.

Definición 1.3. Sea M una variedad diferenciable. En cada punto de la variedad se puede considerar el espacio tangente en $p \in M$, que es el espacio vectorial real de todos los vectores tangentes a M en p , y lo denotaremos por T_pM . Se define el **fibrado tangente** como la unión disjunta de los espacios tangentes a todos los puntos de M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM,$$

donde cada T_pM es el espacio tangente al punto p .

Definición 1.4. Sea M una variedad diferenciable. Un **campo de vectores** sobre M es una correspondencia que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente a p :

$$\begin{aligned} X: M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p \in T_pM. \end{aligned}$$

Un campo de vectores se puede ver como una sección de la proyección $\pi: TM \rightarrow M$. Además, se dirá que un campo de vectores es diferenciable si, para cada función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable \mathcal{C}^∞ , la función

$$\begin{aligned} Xf: M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto (Xf)(p) := X_p(f) \end{aligned}$$

también es diferenciable \mathcal{C}^∞ .

Denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$ al conjunto de funciones $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables \mathcal{C}^∞ , y por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de campos de vectores diferenciables sobre M .

Sea (\mathcal{U}, φ) una carta de una variedad diferenciable M de dimensión n , y sea $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ un sistema local de coordenadas. Para cada $i = 1, \dots, n$ se tienen los **campos coordenados** sobre \mathcal{U} dados por

$$\begin{aligned} \partial_{x^i}: \mathcal{U} &\longrightarrow T\mathcal{U} \subset TM \\ p &\longmapsto (\partial_{x^i})_p \in T_p\mathcal{U} \equiv T_pM, \end{aligned}$$

que están definidos en cada $p \in M$ como $(\partial_{x^i})_p(f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ para cualquier $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Proposición 1.5. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $p \in M$. Entonces $T_p M$ es un espacio vectorial de dimensión n , y para cualquier carta $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ conteniendo a p , los campos coordenados $(\partial_{x^1})_p, \dots, (\partial_{x^n})_p$ forman una base de $T_p M$.*

La demostración de este resultado se puede consultar en [3].

Teniendo en cuenta la proposición previa, en cada $p \in M$, dado un sistema local de coordenadas $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ en un abierto coordenado $\mathcal{U} \subset M$ de p , podemos escribir la expresión local de un campo de vectores. De esta forma, si X es un campo de vectores sobre M , para cada $p \in \mathcal{U}$ se tendrá que

$$X_p = X^i(p)(\partial_{x^i})_p,$$

siendo $X^i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, n$, las componentes de X en (\mathcal{U}, φ) , es decir, funciones tales que $X^i(p) = X_p(x^i)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Así, diremos que

$$X = X^i \partial_{x^i}$$

es la expresión local de X en (\mathcal{U}, φ) , donde $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$ es la base local de TM .

1.2. Formas diferenciables y el fibrado cotangente

Definición 1.6. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, y sea $k \in \mathbb{N}$. Una aplicación $\omega: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una **k-forma lineal** sobre V si:

(i) ω es *multilineal*: para cualesquiera $v_1, \dots, v_i, v'_i, \dots, v_k \in V$, con $i = 1, \dots, k$, y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\omega(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots, v_k) = \lambda \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \mu \omega(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k),$$

(ii) ω es *antisimétrica*: para cualesquiera $v_1, \dots, v_k \in V$, con $i < j$,

$$\omega(v_1, \dots, \overset{(i)}{v_i}, \dots, \overset{(j)}{v_j}, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, \overset{(i)}{v_j}, \dots, \overset{(j)}{v_i}, \dots, v_k).$$

Denotamos por

$$\Lambda^k(V) = \{\omega: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ multilineal y antisimétrica}\}$$

al conjunto de **k-formas lineales** sobre V . $\Lambda^k(V)$ tiene estructura de espacio vectorial real.

Definición 1.7. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Para cada $p \in M$ se define el **espacio cotangente** a M en p , que denotaremos por T_p^*M , como el espacio vectorial dual de T_pM :

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \{\alpha: T_pM \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \text{ lineal}\}.$$

El **fibrado cotangente** de M es el conjunto

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M,$$

y el **fibrado exterior** de grado k sobre M es

$$\Lambda^k(TM) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM).$$

Los elementos de $\Lambda^k(T_pM)$ son las k -formas lineales sobre T_pM , aunque también se dirá que son k -formas lineales en p .

Definición 1.8. Una **k -forma** sobre una variedad diferenciable M es una aplicación que asigna a cada $p \in M$ una k -forma lineal en p :

$$\begin{aligned} \omega: M &\longrightarrow \Lambda^k(TM) \\ p &\longmapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_pM). \end{aligned}$$

Nos planteamos ahora calcular la expresión local de una k -forma. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , y sea (\mathcal{U}, φ) una carta de M , con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ nuestro sistema local de coordenadas. Para cada $p \in \mathcal{U}$ se tienen las 1-formas lineales en p , con $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} (dx^i)_p: T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto (dx^i)_p(v) := v(x^i). \end{aligned}$$

Así, $\{(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\}$ es la base de T_p^*M dual de la base $\{(\partial_{x^1})_p, \dots, (\partial_{x^n})_p\}$ de T_pM . Por lo tanto, para cada $1 \leq k \leq n$, $\{(dx^{j_1})_p \otimes \dots \otimes (dx^{j_k})_p : 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n\}$ es una base de $\Lambda^k(T_pM)$.

Sea pues ω una k -forma sobre M . En cada $p \in \mathcal{U}$ se puede escribir como

$$\omega_p = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1 \dots j_k}(p) (dx^{j_1})_p \otimes \dots \otimes (dx^{j_k})_p,$$

siendo $a_{j_1 \dots j_k}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ las componentes de ω en (\mathcal{U}, φ) , es decir, funciones tales que $a_{j_1 \dots j_k}(p) = \omega_p((\partial_{x^1})_p, \dots, (\partial_{x^n})_p)$. De esta forma, diremos que

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k}$$

es la expresión local de ω en (\mathcal{U}, φ) . Además, una k -forma se dirá diferenciable si sus funciones componentes son diferenciables \mathcal{C}^∞ .

Por otro lado, y de forma natural, se puede dar otra interpretación de las formas diferenciables. Para cada $k \geq 1$, una k -forma diferenciable $\omega: M \rightarrow \Lambda^k(TM)$ define una aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal y antisimétrica

$$\begin{aligned} \omega: \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{F}(M) \\ (X_1, \dots, X_k) &\longmapsto \omega(X_1, \dots, X_k) \end{aligned}$$

dada por $\omega(X_1, \dots, X_k)(p) := \omega_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p)$.

1.3. Corchete de Lie

Definición 1.9. Dados dos campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el **corchete de Lie** de X e Y es un campo de vectores definido por

$$\begin{aligned} [X, Y]: \mathfrak{F}(M) &\longrightarrow \mathfrak{F}(M) \\ f &\longmapsto XY(f) - YX(f). \end{aligned}$$

El espacio vectorial real $\mathfrak{X}(M)$, con la aplicación

$$\begin{aligned} [,]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y], \end{aligned}$$

es un **álgebra de Lie** sobre \mathbb{R} . Esto se debe a que el corchete de Lie cumple las siguientes propiedades:

- (i) $[,]$ es \mathbb{R} -lineal,
- (ii) es anticonmutativo: $[X, Y] = -[Y, X]$,
- (iii) verifica la *identidad de Jacobi*: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Además, existe una especie de “regla del producto” para el corchete de Lie. Dada un función $f \in \mathfrak{F}(M)$ y dos campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple la siguiente igualdad:

$$[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y].$$

También es fácil comprobar (y nos será de gran utilidad a lo largo del trabajo) que el corchete de Lie de campos coordenados es nulo, es decir, se cumple que

$$[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0$$

para cada $i, j = 1, \dots, n$.

1.4. Variedades de Riemann

Definición 1.10. Se define una **métrica de Riemann** en una variedad diferenciable M como un campo de tensores de tipo $(0,2)$, que se denotará por g , simétrico y definido positivo; es decir, verificando:

- (i) $g(X, Y) = g(Y, X)$, para cualesquiera campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,
- (ii) $g(X, X) > 0$, para todo campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$,
- (iii) $g(X, X) = 0$ si, y solo si, $X = 0$.

De esta forma, una métrica de Riemann define un producto escalar en cada espacio tangente $T_p(M)$ a cada punto $p \in M$ de la variedad:

$$g: p \in M \mapsto g_p: T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X_p, Y_p) \mapsto g_p(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p.$$

Denominaremos **variedad de Riemann** al par (M, g) formado por una variedad diferenciable M y una métrica de Riemann g definida sobre la variedad.

Dado un sistema local de coordenadas (x^1, \dots, x^n) en un abierto coordenado $\mathcal{U} \subset M$, podemos escribir la expresión local de la métrica g como sigue:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad \text{donde } g_{ij} = g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}),$$

siendo $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$ la base local de TM y $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ la base local de T^*M .

1.5. Isometrías entre variedades de Riemann

Una vez definido el concepto de las variedades de Riemann, nos interesará poder comparar entre ellas su estructura e introducir así la noción de cuándo dos variedades “son lo mismo”, es decir, busquemos definir el concepto de *isometría* entre dos variedades de Riemann. Para ello, definiremos a continuación el *pull-back* de una métrica, que en líneas generales nos permitirá definir una métrica en una variedad a partir de la otra cuando se den ciertas condiciones.

Sean (M, g) y (\bar{M}, \bar{g}) dos variedades de Riemann. Teniendo en cuenta que las métricas son campos de tensores de tipo $(0,2)$, una aplicación diferenciable $\Phi: M \rightarrow \bar{M}$ induce un campo de tensores de tipo $(0,2)$ en M , que denotaremos por $\Phi^*\bar{g}$ y que se llama el **pull-back** de \bar{g} por Φ , que se define para dos campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ como

$$(\Phi^*\bar{g})(X, Y) := \bar{g}(d\Phi(X), d\Phi(Y)).$$

Por lo tanto, en cada $p \in M$,

$$\begin{aligned} (\Phi^* \bar{g})_p : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\Phi^* \bar{g})_p(u, v) = \bar{g}_{\Phi(p)}(d\Phi_p(u), d\Phi_p(v)). \end{aligned}$$

Observemos que, por las propiedades de la métrica \bar{g} , $\Phi^* \bar{g}$ es definido positivo y simétrico. Por lo tanto, $\Phi^* \bar{g}$ es una métrica de Riemann en M si, y solo si, Φ es una inmersión. En efecto, si suponemos que

$$0 = (\Phi^* \bar{g})(X, X) = \bar{g}(d\Phi(X), d\Phi(X)),$$

por ser \bar{g} una métrica de Riemann, se tiene $d\Phi(X) = 0$. De esta forma, si Φ es una inmersión, entonces $d\Phi$ es inyectiva, y de lo anterior se deduciría que $X = 0$.

En resumen, las métricas de Riemann se transforman en métricas de Riemann por pull-back si Φ es una inmersión.

Definición 1.11. Sean (M, g) y (\bar{M}, \bar{g}) dos variedades de Riemann. Una aplicación diferenciable $\Phi: M \rightarrow \bar{M}$ se dice una **isometría** si es un difeomorfismo que verifica que $\Phi^* \bar{g} = g$. De forma más general, Φ se llamará una **isometría local en un punto** $p \in M$ si existe un entorno $\mathcal{U} \subset M$ de p tal que $\Phi|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \Phi(\mathcal{U})$ es una isometría. Se dirá que es una **isometría local** si para cualquier $p \in M$ es una isometría local en dicho punto.

De esta forma, si existe una isometría entre (M, g) y (\bar{M}, \bar{g}) , se dirá que son dos variedades de Riemann **isométricas**. Si todo punto de M tiene un entorno que es isométrico a un abierto de \bar{M} , entonces se dirá que (M, g) es **localmente isométrico** a (\bar{M}, \bar{g}) .

1.6. Diferencial y gradiente de una función

Definición 1.12. Sea M una variedad diferenciable. Si $f \in \mathfrak{F}(M)$, la **diferencial** de f es una 1-forma diferenciable sobre M definida por

$$\begin{aligned} df : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{F}(M) \\ X &\longmapsto df := X(f). \end{aligned}$$

En un abierto coordenado $\mathcal{U} \subset M$ con un sistema local de coordenadas (x^1, \dots, x^n) , podemos escribir la expresión local de la diferencial df como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k,$$

siendo $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ la base local de T^*M .

Definición 1.13. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Para cada $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ llamamos **gradiente** de f a un campo de vectores ∇f verificando $g(\nabla f, X) := X(f)$ para todo $X \in TM$.

De las definiciones previas se puede apreciar que se puede caracterizar ∇f mediante

$$df(X) = g(\nabla f, X) \quad \forall X \in TM.$$

También cabe destacar que la definición de ∇f depende de la métrica considerada, mientras que df estará bien definido en cualquier variedad diferenciable.

Capítulo 2

Conexiones y derivada covariante

En este capítulo se definirá un objeto fundamental para el estudio geométrico de curvas sobre variedades denominado *conexión*. Aunque su definición parezca demasiado formal a primera vista, lo cierto es que a partir de un estudio local de sus propiedades observaremos que induce una suerte de derivada de campos de vectores sobre una variedad. También el sentido de paralelismo de campos de vectores surgirá más adelante. Finalmente, veremos que dicha definición “demasiado formal” en realidad esconde una interesante interpretación geométrica.

Definición 2.1. Una **conexión** en una variedad diferenciable M es un operador

$$\begin{aligned} D: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto D_X Y \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

(i) Es \mathbb{R} -lineal en la variable Y :

$$D_X(a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 D_X Y_1 + a_2 D_X Y_2, \text{ para todo } a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

(ii) Es tensorial ($\mathfrak{F}(M)$ -lineal) en la variable X :

$$D_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 D_{X_1} Y + f_2 D_{X_2} Y, \text{ para todo } f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(M),$$

(iii) Verifica la regla de Leibniz en la variable Y :

$$D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y, \text{ para cualquier } f \in \mathfrak{F}(M).$$

A continuación procedemos a calcular la expresión en coordenadas de una conexión D . Sea M nuestra variedad diferenciable de dimensión n y sea $p \in M$ un punto de la variedad. Consideremos (x^1, \dots, x^n) un sistema de coordenadas locales alrededor de p .

Luego $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$ es una base local de campos de vectores. Dados dos campos de vectores diferenciables $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sobre M , se expresarán en dicho sistema de coordenadas como

$$X = X^i \partial_{x^i}, \quad Y = Y^j \partial_{x^j}.$$

Además, para dicho sistema de coordenadas, estableceremos que

$$D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}, \quad (2.1)$$

siendo las funciones (diferenciables) Γ_{ij}^k los **símbolos de Christoffel** de la conexión.

Entonces, haciendo uso de las propiedades de la conexión, podemos hallar la expresión en coordenadas de D mediante:

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_X(Y^j \partial_{x^j}) = X(Y^j) \partial_{x^j} + Y^j D_X \partial_{x^j} \\ &= X(Y^j) \partial_{x^j} + Y^j D_{X^i \partial_{x^i}} \partial_{x^j} \\ &= X(Y^j) \partial_{x^j} + X^i Y^j D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} \\ &= X(Y^j) \partial_{x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k} \\ &= \left\{ X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_{x^k}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se renombró en el primer sumando el índice mudo de suma j por k . Para mayor comodidad, escribimos a continuación la expresión local de la conexión sin los pasos intermedios:

$$D_X Y = \left\{ X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_{x^k}. \quad (2.2)$$

Observación 2.2. Si atendemos ahora a la expresión local para una conexión (2.2) y nos centramos en cada sumando por separado, deducimos que, fijado un $p \in M$, $(D_X Y)_p$ depende únicamente de:

- $X_p(Y^k)$, es decir, del valor de X en p y del valor de Y en las curvas integrales de X .
- $X^i(p) Y^j(p) \Gamma_{ij}^k(p)$, es decir, del valor de X e Y en el punto $p \in M$.

En resumen, $(D_X Y)_p$ sólo depende del valor en el punto $p \in M$ del campo X y de los valores que toma el campo Y a lo largo de de la curva integral de X que pasa por p . De esta forma, y en consecuencia, podemos seguir estudiando el comportamiento local de una conexión extendiendo la noción de conexión introducida en la Definición 2.1 y considerar la conexión como un operador

$$\begin{aligned} D: T_p M \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow T_p M \\ (v, Y) &\longmapsto D_v Y := (D_X Y)_p, \end{aligned}$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$ es una extensión arbitraria del vector tangente v , es decir, $X_p = v \in T_pM$. Esta definición es independiente de la elección de X . En efecto, sean $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X_p = v = \tilde{X}_p$. Se tendrá que

$$(D_X Y - D_{\tilde{X}} Y)_p = 0$$

ya que, como sabemos, el valor de $(D_X Y)_p$ y $(D_{\tilde{X}} Y)_p$ depende solamente del valor de los campos X y \tilde{X} en el punto p (respectivamente), que son iguales por suponer que $X_p = v = \tilde{X}_p$, y del valor de Y en las curvas integrales de X y \tilde{X} (respectivamente). Ahora bien, las curvas integrales tienen en ambos casos las mismas condiciones iniciales, es decir, $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = \dot{\tilde{\gamma}}(0) = v$, luego Y toma los mismos valores en γ y $\tilde{\gamma}$. Teniendo en cuenta lo expuesto, así se puede justificar que la diferencia es nula.

Motivados por entender en qué sentido un campo Y toma valores sobre una curva integral, también nos interesará el problema más genérico de poder calcular la velocidad y aceleración de una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ sobre una variedad M . Para ello, antes de nada deberíamos intentar comprender qué entendemos por un campo de vectores a lo largo de una curva.

Definición 2.3. Sea $\gamma: I \rightarrow M$ una curva diferenciable sobre M . Un **campo de vectores a lo largo de γ** es una aplicación diferenciable $V: I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in I$. Denotaremos por \mathfrak{X}_γ al espacio de campos de vectores a lo largo de la curva γ .

Por ejemplo, $\dot{\gamma}: t \in I \mapsto \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ es un campo de vectores a lo largo de γ y representa la velocidad en cada instante t de la curva γ . De hecho, la noción de campo de vectores a lo largo de una curva surge con el fin de poder estudiar la velocidad de γ . Esto es así porque, en particular, $\dot{\gamma}$ nunca puede ser la restricción a la curva de un campo de vectores en la variedad si γ presenta autointersecciones.

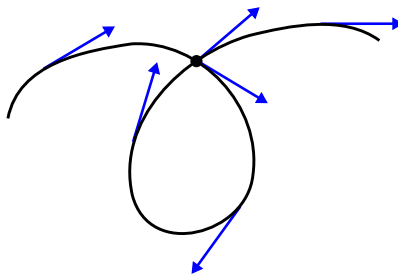


Figura 2.1: En una curva con autointersecciones, el campo velocidad toma varios valores en un mismo punto, luego no puede ser restricción de un campo definido en todo M .

La siguiente proposición nos ayudará a aclarar el concepto de *conexión*. Viene a decir que una conexión D induce un operador sobre campos de vectores D_t que denominaremos *derivada covariante*. De esta forma, se verá que una conexión nos da lugar a una “derivación” de campos de vectores a lo largo de una curva γ sobre M .

Proposición 2.4. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión D y $\gamma: I \rightarrow M$ una curva sobre M . Entonces existe un único operador*

$$\begin{aligned} D_t: \mathfrak{X}_\gamma &\longrightarrow \mathfrak{X}_\gamma \\ V &\longmapsto D_t V \end{aligned}$$

que asocia a cada campo de vectores V a lo largo de una curva $\gamma: I \rightarrow M$ otro campo de vectores a lo largo de γ , que denominaremos **derivada covariante** de V a lo largo de γ y denotaremos por $D_t V$, verificando:

- (i) $D_t(\alpha V + \beta W) = \alpha D_t V + \beta D_t W$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $V, W \in \mathfrak{X}_\gamma$,
- (ii) $D_t(fV) = \frac{df}{dt}V + fD_t V$, para cualquier función $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (iii) Si V es la restricción a γ de un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ en cada punto, es decir, si $V(t) = Y(\gamma(t))$, $t \in I$, entonces

$$D_t V = D_{\dot{\gamma}} Y.$$

Observación 2.5. Notemos que la propiedad (iii) en la proposición anterior tiene pleno sentido en función de la *Observación 2.2*. En efecto, sea una curva γ y un campo de vectores V a lo largo de γ , de forma que $V(t) = Y(\gamma(t))$ con $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Fijado un $t \in I$, se tendrá que $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$, y por tanto $D_{\dot{\gamma}(t)}Y \in T_{\gamma(t)}M$. Entonces, tendrá sentido ver la conexión punto a punto a lo largo de γ como

$$(D_t V)_{\gamma(t)} = (D_{\dot{\gamma}(t)} Y)_{\gamma(t)}.$$

Demostración. Supongamos que existe un operador tal que verifica (i), (ii), (iii). Sea (x^1, \dots, x^n) un sistema de coordenadas locales en un abierto $\mathcal{U} \subset M$ con $\gamma(I) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Denotemos por $(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ la expresión local de $\gamma(t)$ en dicho sistema de coordenadas. Podemos expresar el campo V localmente como $V = V^j \partial_{x^j}$, siendo $V^j = V^j(t)$ y $\partial_{x^j} = \partial_{x^j}(\gamma(t))$.

Por (i) y (ii),

$$D_t V = D_t(V^j \partial_{x^j}) = \frac{dV^j}{dt} \partial_{x^j} + V^j D_t \partial_{x^j}.$$

Por (iii),

$$D_t \partial_{x^j} = D_\gamma \partial_{x^j} = D_{\dot{\gamma}^i \partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \dot{\gamma}^i D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \dot{\gamma}^i \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}.$$

Con las dos expresiones anteriores obtenemos que

$$D_t V = \frac{dV^j}{dt} \partial_{x^j} + V^j \dot{\gamma}^i \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k},$$

y renombrando el índice mudo de suma j por k en el primer sumando de la expresión, nos queda que

$$D_t V = \left\{ \frac{dV^k}{dt} + V^j \dot{\gamma}^i \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_{x^k}, \quad (2.3)$$

La expresión (2.3) demuestra que, si existiese un operador en tales condiciones, entonces es único.

Para probar la existencia, se define $D_t V$ en \mathcal{U} como en (2.3), y se comprueba que verifica las propiedades esperadas. Si \mathcal{W} es otro entorno coordinado con $\mathcal{W} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, definiendo $D_t V$ en \mathcal{W} como en (2.3), las definiciones coinciden en $\mathcal{W} \cap \mathcal{U}$ por la unicidad de $D_t V$ en \mathcal{U} . De esta forma podemos extender la definición de $D_t V$ a todo M . ■

Definición 2.6. Sea M una variedad diferenciable con una conexión D . Un campo de vectores V a lo largo de una curva $\gamma: I \rightarrow M$ se dice **paralelo** si $D_t V = 0$ para todo $t \in I$.

Proposición 2.7. Sea M una variedad diferenciable con una conexión D . Sea $\gamma: I \rightarrow M$ una curva diferenciable y tomemos un vector $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo de vectores V paralelo a lo largo de γ tal que $V(t_0) = v_0$.

La idea de la demostración para la Proposición 2.7 es la siguiente: en la demostración de la Proposición 2.4, en particular en la expresión (2.3), se nos da una expresión en coordenadas locales de $D_t V$. Igualando $D_t V = 0$ obtenemos

$$\frac{dV^k}{dt}(t) + V^j(t) \dot{\gamma}^i(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

es decir, nos queda un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden. El teorema de existencia y unicidad de EDO's de primer orden nos garantiza que existen soluciones únicas V^j , definidas en I , para las condiciones iniciales dadas. Entonces, el campo de vectores V deseado será pues $V(t) = V^j(t) \partial_{x^j} \big|_{\gamma(t)}$. Se puede consultar esta demostración con más detalle en [4].

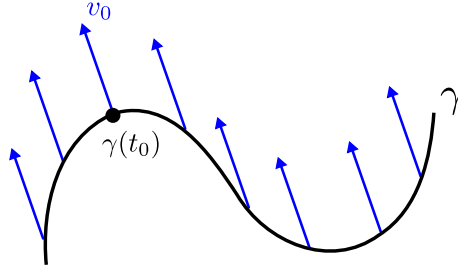


Figura 2.2: Transporte paralelo del vector v_0 a lo largo de γ .

En conclusión, fijado $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ existe un $V(t) \in \mathfrak{X}_\gamma$ paralelo y tal que $V(t_0) = v_0$. Este campo de vectores se denomina el **transporte paralelo** de v_0 a lo largo de γ .

Para entender mejor la importancia del transporte paralelo planteémonos el siguiente problema: dada una curva $\gamma: I \rightarrow M$ sobre M , queremos calcular su aceleración en un instante $t_0 \in I$. Sabemos que $\dot{\gamma}(t)$ está definido para todo $t \in I$, entonces una definición natural para la aceleración de γ podría ser mediante el siguiente límite:

$$\ddot{\gamma}(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \dot{\gamma}(t_0 + t) - \dot{\gamma}(t_0) \}.$$

Sin embargo, esta definición presenta algunas dificultades. La más relevante es que $\dot{\gamma}(t_0 + t) \in T_{\gamma(t_0+t)}M$ y $\dot{\gamma}(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$, es decir, estamos restando vectores de espacios vectoriales distintos. Necesitaríamos dar un isomorfismo entre $T_{\gamma(t_0+t)}M$ y $T_{\gamma(t_0)}M$ para poder operar entre ellos. Sin embargo, aunque dichos espacios sean isomorfos ($\dim T_{\gamma(t_0+t)}M = \dim M = \dim T_{\gamma(t_0)}M$), el resultado de las operaciones puede variar dependiendo del isomorfismo escogido. En nuestro caso, esto se puede resolver gracias a que la identificación entre espacios tangentes se hace mediante el transporte paralelo.

De esta forma, dada una curva $\gamma: I \rightarrow M$ sobre la variedad M y $t_0, t_1 \in I$, el transporte paralelo establece una aplicación

$$\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma: T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M,$$

donde para cada $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ es tal que $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(v_0) = V(t_1)$, siendo $V(t)$ el transporte paralelo de v_0 a lo largo de γ .

Proposición 2.8. *La aplicación $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma$ es lineal. Tomemos $v_0, w_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ arbitrarios, y sean $V(t)$ y $W(t)$ campos de vectores paralelos a lo largo de γ tales que $V(t_0) = v_0$ y $W(t_0) = w_0$. Así, $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(v_0) = V(t_1)$ y $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(w_0) = W(t_1)$.

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios, el campo de vectores a lo largo de γ dado por $\alpha V(t) + \beta W(t)$ sigue siendo paralelo por la linealidad de la derivada covariante:

$$D_t(\alpha V + \beta W) = \alpha D_t V + \beta D_t W = 0.$$

Entonces, el transportado paralelo del vector $\alpha v_0 + \beta w_0$ es

$$\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(v_0) = V(\alpha v_0 + \beta w_0) = \alpha V(t_1) + \beta W(t_1) = \alpha \mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(v_0) + \beta \mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(w_0).$$

Luego $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma$ es lineal.

Para ver que es isomorfismo nos basta con ver que es inyectivo. En efecto, una aplicación lineal inyectiva entre espacios vectoriales de igual dimensión es un isomorfismo. Veamos pues que $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma$ es inyectivo. Como el transportado paralelo del vector 0 es el propio vector 0, si se tuviese que $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(v) = 0$ para un cierto $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, por la unicidad del transporte paralelo deducimos que $v = 0$. Por lo tanto $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma$ es inyectivo. ■

Con todo lo visto hasta ahora podemos empezar a hacer algunas conclusiones. Como acabamos de comprobar, a lo largo de una curva γ tenemos un isomorfismo entre dos espacios tangentes $T_{\gamma(t_0)}M$ y $T_{\gamma(t_1)}M$. Esta posibilidad de comparar, o *conectar*, espacios tangentes en distintos puntos da lugar al término de *conexión*.

Para nuestra sorpresa hemos encontrado un bucle en nuestro desarrollo. Observemos que comenzamos con un operador al que denominamos *conexión*, el cual inducía una suerte de derivada llamada *derivada covariante*, y a partir de ella éramos capaces de establecer un sentido de paralelismo sobre los campos de vectores en una variedad. Podríamos decir que la aplicación $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma$ se define en términos de D . Lo que se nos indica ahora es que la idea del transporte paralelo de vectores a lo largo de una curva nos devuelve de nuevo el concepto de *conexión*, pero ahora como forma de conectar dos espacios tangentes en puntos distintos sobre una variedad mediante un isomorfismo.

Con el fin de cerrar el bucle, y a manera de conclusión, la siguiente proposición nos dice cómo podemos recuperar la conexión mediante la aplicación del transporte paralelo.

Proposición 2.9. *Sean X e Y campos de vectores sobre la variedad M y sea $\gamma: I \rightarrow M$ una curva integral de X en el punto $p \in M$ ($\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X_p$). Entonces*

$$D_{X_p}Y = (D_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \left(\mathcal{P}_{0, t}^\gamma \right)^{-1} Y_{\gamma(t)} - Y_p \right\}.$$

Demostración. Sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base de $T_p M$ y denotemos por $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ al conjunto de campos de vectores que son el transportado paralelo de los vectores E_i en el

instante $t \in I$, es decir, los $E_i(t)$ son los únicos campos de vectores paralelos a lo largo de γ verificando $E_i(0) = E_i$.

Para cada $t \in I$ dicho conjunto forma una base de $T_{\gamma(t)}M$ puesto que $\mathcal{P}_{0,t}^\gamma$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo tanto, podemos escribir el campo de vectores $Y_{\gamma(t)}$ a lo largo de γ en términos de esta base:

$$Y_{\gamma(t)} = y^i(t)E_i(t),$$

y notemos que $Y_{\gamma(0)} = Y_p = y^i(0)E_i$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \left(\mathcal{P}_{0,t}^\gamma \right)^{-1} Y_{\gamma(t)} - Y_p \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ y^i(t) \left(\mathcal{P}_{0,t}^\gamma \right)^{-1} E_i(t) - y^i(0)E_i \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ y^i(t)E_i - y^i(0)E_i \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y^i(t) - y^i(0)}{t} E_i \\ &= \left. \frac{dy^i}{dt} E_i \right|_{t=0} = D_t(y^i(t)E_i(t))|_{t=0} = D_t Y|_{t=0} = D_{X_p} Y, \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de que

$$D_t(fV) = \frac{df}{dt}V + fD_tV = \frac{df}{dt}V$$

si V es un campo paralelo. ■

Capítulo 3

La conexión de Levi-Civita

Hasta ahora hemos hablado de conexiones en el contexto general de las variedades diferenciables. Si pretendemos trabajar en variedades de Riemann entonces debemos encontrar alguna conexión que nos respete las propiedades de la métrica. De esta forma, nos interesa llegar al teorema fundamental de la geometría de Riemann (Teorema 3.5), que nos dice que podemos definir una única conexión en una variedad de Riemann mientras verifique un par de condiciones. Exploraremos un poco dichas propiedades que le pediremos a nuestra conexión antes de pasar al teorema de interés.

Definición 3.1. Sea M una variedad de Riemann, siendo g su métrica de Riemann asociada, y sea D una conexión sobre M . La conexión se dice **compatible** con la métrica si verifica

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$$

para cualesquiera campos de vectores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

La siguiente proposición (a la cual no le proporcionaremos una demostración, pero que se puede consultar en [4]) nos ayudará a comprender la motivación de la condición de compatibilidad de una conexión con la métrica.

Proposición 3.2. *Dada una conexión D sobre una variedad de Riemann M , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *D es compatible con la métrica g .*

(ii) *Si V y W son campos de vectores a lo largo de una curva $\gamma: I \rightarrow M$, se cumple que*

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g(D_t V, W) + g(V, D_t W).$$

(iii) Para cualesquiera campos de vectores paralelos V y W a lo largo de cualquier curva $\gamma: I \rightarrow M$ se verifica

$$g(V(t), W(t)) = \text{constante}.$$

(iv) La aplicación transporte paralelo $\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ es una isometría lineal, para cualquier curva $\gamma: I \rightarrow M$ y para cualesquiera $t_0, t_1 \in I$.

Observación 3.3. Como ya se dijo en la afirmación (iv), la aplicación transporte paralelo considerando ahora las respectivas métricas de cada espacio,

$$(T_{\gamma(t_0)}M, g_{\gamma(t_0)}) \xrightarrow{\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma} (T_{\gamma(t_1)}M, g_{\gamma(t_1)})$$

es una isometría lineal, que en otras palabras significa que

$$g_{\gamma(t_0)}(v_0, w_0) = g_{\gamma(t_1)}(\mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(v_0), \mathcal{P}_{t_0, t_1}^\gamma(w_0)), \quad \forall v_0, w_0 \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

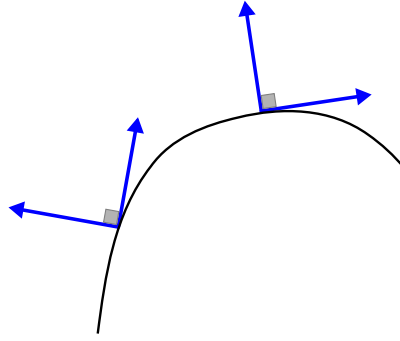


Figura 3.1: El transporte paralelo es una isometría.

Definición 3.4. Una conexión D sobre una variedad M se dice **simétrica** cuando

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

para cualesquiera campo de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

En un sistema local de coordenadas (x^1, \dots, x^n) , la condición de que una conexión D sea simétrica implica que

$$D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} - D_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i} = [\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0,$$

lo cual es equivalente a que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, es decir, que los símbolos de Christoffel sean *simétricos* respecto a los subíndices. En efecto, sustituyendo en la expresión anterior la expresión local (2.1) de una conexión para campos coordenados, se obtiene que

$$\left\{ \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right\} \partial_{x^k} = 0,$$

de donde se puede deducir entonces que $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0$.

Teorema 3.5 (Teorema fundamental de la geometría de Riemann). *Dada una variedad de Riemann M con una métrica g , existe una única conexión ∇ sobre M verificando:*

(i) ∇ es simétrica.

(ii) ∇ es compatible con la métrica.

La conexión ∇ en estas condiciones se llama la **conexión de Levi-Civita** de g .

Demostración. Supongamos en primer lugar la existencia de ∇ . Entonces

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\ Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Utilizando la simetría de ∇ en el último sumando de cada expresión,

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]), \\ Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y, X]), \\ Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X, [Z, Y]). \end{aligned}$$

Sumando la primera expresión con segunda y restando la tercera, se tiene que

$$Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = g(Y, [X, Z]) + g(Z, [Y, X]) - g(X, [Z, Y]) + 2g(\nabla_X Y, Z).$$

Despejando $2g(\nabla_X Y, Z)$ en la ecuación anterior obtenemos lo que se denomina la *identidad de Koszul*:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y]). \end{aligned} \quad (3.1)$$

La identidad de Koszul prueba que ∇ está determinada de forma única por la métrica; por lo tanto, si existe es única. En efecto, si suponemos que ∇^1 y ∇^2 son dos conexiones simétricas y compatibles con la métrica, como el segundo miembro de la igualdad no depende de la conexión,

$$g(\nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z) = 0 \iff \nabla_X^1 Y = \nabla_X^2 Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

luego $\nabla^1 = \nabla^2$.

Para probar la existencia, se define ∇ mediante la identidad de Koszul, y se puede comprobar que está bien definida y que verifica las propiedades de conexión. ■

A partir de la identidad de Koszul se puede calcular una fórmula explícita para los símbolos de Christoffel de la conexión ∇ de Levi-Civita. En efecto, considerando un sistema de coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) , aplicando (3.1) sobre los campos coordenados (recordemos que tienen corchete de Lie nulo) obtenemos que

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j}, \partial_{x^k}\right) &= \partial_{x^i}g(\partial_{x^j}, \partial_{x^k}) + \partial_{x^j}g(\partial_{x^k}, \partial_{x^i}) - \partial_{x^k}g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) \\ &= \partial_{x^i}g_{jk} + \partial_{x^j}g_{ik} - \partial_{x^k}g_{ij}. \end{aligned}$$

Recordemos que en (2.1) se definieron los símbolos de Christoffel como $\nabla_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^\ell\partial_{x^\ell}$, luego

$$2\Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} = \partial_{x^i}g_{jk} + \partial_{x^j}g_{ik} - \partial_{x^k}g_{ij}. \quad (3.2)$$

Como g es definida positiva, su matriz (g_{ij}) es definida positiva, entonces $\det(g_{ij}) > 0$. Por tanto, (g_{ij}) tiene inversa y la denotamos por $(g_{\ell k})^{-1} = (g^{mk})$, y es tal que $g_{\ell k}g^{mk} = \delta_\ell^m$.

Multiplicando a ambos lados de (3.2) por g^{mk} (y despejando los Γ_{ij}^m en la expresión resultante), obtenemos una expresión explícita de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{k\ell}(\partial_{x^i}g_{j\ell} + \partial_{x^j}g_{i\ell} - \partial_{x^\ell}g_{ij}). \quad (3.3)$$

Observación 3.6. Como consecuencia inmediata de la expresión (3.3) se tiene que los símbolos de Christoffel están determinados de forma única por los coeficientes de la métrica y sus primeras derivadas. Por tanto, la conexión de Levi-Civita es invariante por isometrías y, en consecuencia, los objetos que se definan a partir de ella (como pueden ser las geodésicas, que se verán en el siguiente capítulo).

Entonces, si $\Phi: (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ es una isometría entre variedades de Riemann, se tendrá que $\Phi^*\bar{g} = g$, o equivalentemente que

$$g_p(X_p, Y_p) = \bar{g}_{\Phi(p)}(d\Phi_p(X_p), d\Phi_p(Y_p)),$$

y por lo tanto se tendrá que

$$d\Phi_p(\nabla_X Y)_p = (\bar{\nabla}_{d\Phi_p(X_p)} d\Phi_p(Y_p))_{\Phi(p)}$$

para cualesquiera campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ en M .

Capítulo 4

Geodésicas de Riemann y la aplicación exponencial

A partir de este capítulo consideraremos que M es una variedad de Riemann con una métrica g . Como vimos en el capítulo anterior, existe una única conexión ∇ destacada que es la conexión de Levi-Civita. Por lo tanto, en lo que resta de trabajo, se sobreentenderá que estamos trabajando con la conexión de Levi-Civita asociada a g . De igual forma, todas las derivadas covariantes, geodésicas y, en general, cualquier término que se defina a partir de una conexión lo hará partir de la conexión de Levi-Civita.

4.1. Geodésicas

En el Capítulo 2 planteamos el problema de calcular la aceleración de una curva, lo cual nos motivó a reforzar la idea de la derivada covariante y del transporte paralelo. Hecho esto, ahora ya estamos en condiciones de definir dicho concepto.

Definición 4.1. Sea $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva sobre la variedad de Riemann (M, g) . Se define la **aceleración** de γ como el campo de vectores $\nabla_t \dot{\gamma}$ a lo largo de γ .

Surgen de esta forma unas curvas destacadas sobre la variedad desde un punto de vista geométrico: las geodésicas, que son curvas con aceleración nula.

Definición 4.2. Una curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ sobre la variedad M se dice **geodésica parametrizada** si $\nabla_t \dot{\gamma}(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Teorema 4.3 (Teorema de existencia y unicidad de geodésicas). *Sea M una variedad de Riemann. Para cualesquiera $p \in M$, $v \in T_p M$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, tal que $t_0 \in I$, y una geodésica parametrizada $\gamma: I \rightarrow M$ verificando $\gamma(t_0) = p$ y $\dot{\gamma}(t_0) = v$. Además, dicha geodésica es única para tales condiciones iniciales.*

La idea de la demostración para el Teorema 4.3 es la siguiente: sea (x^1, \dots, x^n) un sistema de coordenadas locales en un entorno \mathcal{U} de p . La curva $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ será una geodésica si, y solo si, tiene aceleración nula. Por lo tanto, haciendo cálculos similares a los efectuados para llegar a (2.3),

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_t \dot{\gamma} &= \nabla_t \left(\dot{\gamma}^k \partial_{x^k} \right) = \frac{d}{dt} \dot{\gamma}^k \partial_{x^k} + \dot{\gamma}^k \nabla_{\dot{\gamma}} \partial_{x^k} = \ddot{\gamma}^k \partial_{x^k} + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k} \\ &= \left\{ \ddot{\gamma}^k + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_{x^k}. \end{aligned}$$

De esta forma, γ será una geodésica respecto de ∇ si, y solo si, sus componentes satisfacen lo que se denomina la *ecuación geodésica*:

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

A partir de aquí la demostración de la existencia y unicidad de la geodésica γ se apoyará en el hecho de (4.1) es un sistema de EDO's segundo orden. La técnica habitual de utilizar variables auxiliares tales que $v^i = \dot{\gamma}^i$ nos permitirá convertir (4.1) en un sistema de EDO's de primer orden equivalente con el doble de incógnitas. Haciendo uso del teorema de existencia y unicidad de soluciones para sistemas de EDO's de primer orden podremos garantizar, en nuestro caso, la existencia y unicidad de geodésicas para unas condiciones iniciales dadas. Se puede consultar esta demostración con más detalle en [4].

Del enunciado de unicidad del teorema previo se deduce la existencia de una **geodésica maximal**, que será aquella cuyo intervalo de definición no se pueda extender a otro intervalo más grande, verificando las condiciones iniciales $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$. Usualmente, esa geodésica maximal se suele denominar como *la geodésica con punto inicial p y velocidad inicial v* , y se denotará por γ_v .

Una propiedad que necesitaremos más adelante para definir la aplicación exponencial es la *homogeneidad de las geodésicas*.

Lema 4.4. *Para cualquier $v \in T_p M$, sea γ_v una geodésica que pasa por $p \in M$ definida en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces la geodésica γ_{av} , con $a > 0$, está bien definida en el intervalo $(-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a})$ y se verifica que*

$$\gamma_{av}(t) = \gamma_v(at).$$

Demostración. Sea la curva $\alpha: (-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a}) \rightarrow M$ dada por $\alpha(t) = \gamma_v(at)$. Entonces

$$\alpha(0) = \gamma_v(0) = p, \quad \dot{\alpha}(0) = a\dot{\gamma}_v(0) = av.$$

Además, como $\dot{\alpha}(t) = a\dot{\gamma}_v(at)$,

$$\nabla_t \dot{\alpha}(t) = \nabla_{\dot{\alpha}(t)} \dot{\alpha}(t) = a^2 \nabla_{\dot{\gamma}_v(at)} \dot{\gamma}_v(at) = 0.$$

Por lo tanto, α es una geodésica pasando por p y con velocidad inicial av . Por la unicidad de las geodésicas, se deduce que $\alpha(t) = \gamma_v(at) = \gamma_{av}(t)$. ■

4.2. Aplicación exponencial

Definición 4.5. Se define la **aplicación exponencial** con base $p \in M$ como la aplicación

$$\begin{aligned} \exp_p: \mathcal{E}_p \subset T_p M &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \exp_p(v) := \gamma_v(1), \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{E}_p := \{v \in T_p M : \text{la geodésica } \gamma_v \text{ está definida en } t = 1\}$ el dominio de definición de la aplicación exponencial.

La diferenciabilidad de la aplicación \exp_p se deduce de la existencia de flujos locales para sistemas de ecuaciones de primer orden. Una demostración puede verse en [4]. Geométricamente, $\exp_p(v)$ es el punto en M que se obtiene tras recorrer una longitud $\|v\|$, empezando en p , a lo largo de la geodésica con punto inicial p y velocidad inicial $\frac{v}{\|v\|}$.

Proposición 4.6. *Dado $p \in M$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p: B_\varepsilon(0) \subset T_p M \rightarrow M$ es un difeomorfismo entre $B_\varepsilon(0)$ y un subconjunto abierto de M .*

Demostración. Calculemos $d(\exp_p)_0$. Para ello, tomemos un vector $v \in T_p M$ arbitrario y sea $\beta(t) = tv$ una curva que representa a v . Se tendrá que

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_0(v) &= \left. \frac{d}{dt} (\exp_p \circ \beta)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\exp_p(tv)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma_{tv}(1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma_v(t) \right|_{t=0} \\ &= \dot{\gamma}_v(0) = v. \end{aligned}$$

Así, $d(\exp_p)_0: T_0(T_p M) \cong T_p M \rightarrow T_p M$ es la identidad de $T_p M$. Por el teorema de la función inversa, \exp_p es un difeomorfismo local en un entorno de 0. ■

Observación 4.7. En la demostración de la proposición anterior se ha hecho la identificación $T_0(T_p M) \cong T_p M$. En general, y de aquí en adelante, será habitual identificar el espacio tangente a $T_p M$ en $v \in T_p M$, $T_v(T_p M)$, con el propio $T_p M$, y escribiremos $T_v(T_p M) \cong T_p M$.

4.3. Entornos normales y la función separación radial

De la Proposición 4.6 podemos deducir que, para cualquier $p \in M$, existe un entorno \mathcal{V} del origen de T_pM y un entorno \mathcal{U} de p en M tal que $\exp_p: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ es un difeomorfismo.

Definición 4.8. Si \exp_p es un difeomorfismo en un entorno \mathcal{V} del origen de T_pM , $\mathcal{U} = \exp_p(\mathcal{V})$ se denomina un **entorno normal** de p .

En un entorno normal, un tipo de geodésicas importante que consideraremos a menudo a lo largo del trabajo serán las *geodésicas radiales*. Las geodésicas que salen de $p \in M$, es decir, las curvas de la forma

$$\gamma: t \in I \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$$

para un cierto $v \in T_pM$, se denominan **geodésicas radiales**.

Definición 4.9. Sea $\varepsilon > 0$ tal que \exp_p es un difeomorfismo en una bola $B_\varepsilon(0) \subset T_pM$, entonces la imagen $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ se llama una **bola geodésica** en M . Además, si la bola cerrada $\overline{B_\varepsilon(0)}$ está contenida en un abierto en el cual \exp_p es un difeomorfismo, entonces $\exp_p(\overline{B_\varepsilon(0)})$ se llama una **bola geodésica cerrada**, y $\exp_p(\partial\overline{B_\varepsilon(0)})$ se denomina una **esfera geodésica**.

Definición 4.10. Fijada una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM , se tiene el isomorfismo $E: \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$ dado por $E(x^1, \dots, x^n) = x^i e_i$. Si \mathcal{U} es un entorno normal de p , podemos combinar dicho isomorfismo con la aplicación exponencial para obtener la siguiente aplicación coordenadas

$$\varphi = E^{-1} \circ \exp_p^{-1}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Este tipo de coordenadas se denominan las **coordenadas normales** centradas en p .

A continuación definiremos la *función separación radial*, que será una herramienta fundamental para la demostración del Lema de Gauss (Lema 5.15). La importancia de esta función se hará más evidente una vez visto dicho lema.

Definición 4.11. Sea \mathcal{U} un entorno normal de un punto $p \in M$. Se define la **función separación radial** como

$$\begin{aligned} r: \mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto r(q) := \|\exp_p^{-1}(q)\|. \end{aligned}$$

Considerando como punto base $p = \exp_p(0)$, la función r mide la separación de un punto cualquiera $q \in \mathcal{U}$ respecto al punto base $p \in \mathcal{U}$ en términos del módulo del vector $\exp_p^{-1}(q) \in T_pM$. Observemos que la función r no es diferenciable en p .

Podemos ver cuál es la expresión en coordenadas normales de la función separación radial. Si tomamos $q = \exp_p(x^i e_i)$, siendo $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $T_p M$, se tendrá que

$$r: q = (x^1, \dots, x^n) \mapsto \|x^1 e_1 + \dots + x^n e_n\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}.$$

Por lo tanto, la expresión en coordenadas normales de r es

$$r(x^1, \dots, x^n) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición 4.12. En coordenadas normales, llamamos **campo de vectores radial** a

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{x^k}{r} \partial_{x^k},$$

siendo r la función de separación radial.

Es necesario probar que el campo de vectores radial introducido anteriormente determina (efectivamente) un campo de vectores definido localmente en un entorno de $p \in M$. De hecho, el campo de vectores radial es el gradiente de la función separación radial, como se probará en el Corolario 5.16.

Aunque de primeras pueda parecer que la definición del campo de vectores radial sea un capricho formal, lo cierto es que su expresión está pensada para ser el “dual” de la diferencial de la función de separación radial, dr . La idea de “dualidad” se interpretaría en este caso en el sentido de que $dr \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = 1$. En efecto, si calculamos la diferencial de la separación radial

$$dr = d \left(\left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{x^k}{\left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} dx^k = \frac{x^k}{r} dx^k,$$

una serie de cálculos nos bastan para comprobar que el campo de vectores radial se comporta conforme a lo que esperamos:

$$\begin{aligned} dr \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) &= dr \left(\frac{x^k}{r} \partial_{x^k} \right) = \frac{x^k}{r} dr (\partial_{x^k}) = \frac{x^k}{r} \left\{ \frac{x^i}{r} dx^i \right\} \partial_{x^k} \\ &= \frac{x^k}{r} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{r} = \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n (x^k)^2 = \frac{r^2}{r^2} = 1. \end{aligned}$$

Vemos que al final esta construcción *ad hoc* es lo que acaba motivando la definición de $\frac{\partial}{\partial r}$.

Observación 4.13. Para cada geodésica radial $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ parametrizada por arco se verifica que $\dot{\gamma}(t) = \frac{\partial}{\partial r}(\gamma(t))$. En efecto, escribamos $\gamma(t)$ en coordenadas normales. Si $v \in T_pM$ es tal que $v = v^k e_k$, se deduce que

$$\gamma(t) = \exp_p(tv) = (tv^1, \dots, tv^n) = (tv^k) e_k,$$

luego $\dot{\gamma}(t) = v^k \partial_{x^k}$. Por otro lado,

$$\frac{\partial}{\partial r}(\gamma(t)) = \frac{tv^k}{(\sum_{i=1}^n (tv^i)^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_{x^k} = \frac{tv^k}{t} \partial_{x^k} = v^k \partial_{x^k}, \quad (4.2)$$

donde se ha tenido en cuenta que $(\sum_{i=1}^n (tv^i)^2)^{\frac{1}{2}} = (t^2 \sum_{i=1}^n (v^i)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t^2} = |t| = t$ considerando que $t > 0$.

En resumen, de lo anterior se concluye que el campo de vectores radial es unitario, es decir, que $\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 1$, y que para cualquier geodésica radial parametrizada por arco se verifica que

$$\frac{\partial}{\partial r}(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t).$$

Además, a partir de (4.2) se deduce que en general $\frac{\partial}{\partial r}(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ para cualquier geodésica radial.

Capítulo 5

Sobre la propiedad minimizante de la distancia de las geodésicas

En este capítulo pretendemos demostrar una de las propiedades de las geodésicas más relevantes: en una variedad de Riemann las geodésicas son curvas que minimizan la distancia entre dos puntos de la variedad. Para ello recurriremos al cálculo variacional, y nuestra herramienta básica para probar dicha propiedad serán las *variaciones*. Antes de nada, es importante aclarar que en este trabajo consideraremos exclusivamente curvas regulares, pero el desarrollo que se vaya a hacer se puede ver desde un punto de vista más general con curvas regulares a trozos.

5.1. Variaciones

Definición 5.1. Sea $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva regular sobre M . Una **variación** de γ es una aplicación

$$\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \longrightarrow M$$

tal que $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$.

Dada una variación, podemos definir dos tipos de curvas:

- **Curvas longitudinales:** para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tenemos las curvas (diferenciables)

$$\begin{aligned} \Gamma_s: [a, b] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \Gamma_s(t) = \Gamma(s, t). \end{aligned}$$

Observemos que $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$.

Podemos considerar el campo velocidad de las curvas longitudinales:

$$T: (s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \mapsto T(s, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M.$$

- **Curvas transversales:** para cada $t \in [a, b]$ tenemos las curvas (diferenciables)

$$\begin{aligned} \Gamma^t: (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ s &\longmapsto \Gamma^t(s) = \Gamma(s, t). \end{aligned}$$

Podemos considerar el campo velocidad de las curvas transversales:

$$S: (s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \mapsto S(s, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M.$$

Al igual que la noción de campo de vectores a lo largo de una curva se utilizó para formalizar la velocidad de una curva, el campo velocidad de las curvas longitudinales y transversales de una variación determinan unos *campos de vectores a lo largo de la variación*. Como Γ es regular, los campos de vectores de las familias de curvas anteriores son ejemplos de campos de vectores a lo largo de Γ .

Notemos que el campo T restringido a cada curva transversal es un campo de vectores a lo largo de Γ^t y, análogamente, el campo S restringido a cada curva longitudinal es un campo de vectores a lo largo de Γ_s .

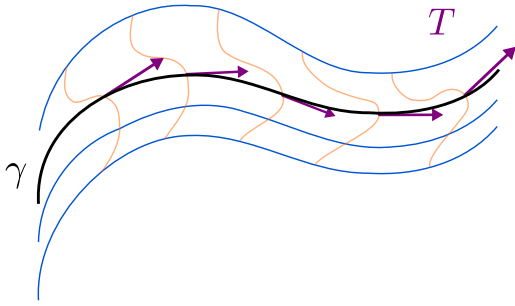


Figura 5.1: Curvas longitudinales y campo longitudinal asociado.

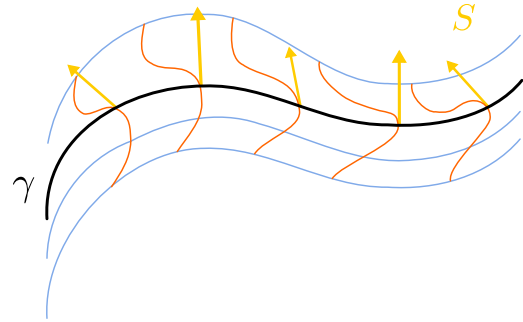


Figura 5.2: Curvas transversales y campo transversal asociado.

El siguiente lema lo necesitaremos más adelante y su demostración (que se puede consultar en [4]) se basa en la simetría de la conexión ∇ .

Lema 5.2 (Lema de simetría). *Sea Γ una variación de $\gamma: [a, b] \rightarrow M$. Entonces se tiene que $\nabla_s T = \nabla_t S$.*

Definición 5.3. Si Γ es una variación de $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, se dice que es **propia** si $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Observación 5.4. Si Γ es una variación propia, las siguientes curvas transversales son constantes:

$$\begin{aligned}\Gamma^a: s \in (-\varepsilon, \varepsilon) &\longmapsto \Gamma(s, a) = \gamma(a), \\ \Gamma^b: s \in (-\varepsilon, \varepsilon) &\longmapsto \Gamma(s, b) = \gamma(b),\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso el campo $\frac{\partial}{\partial s}\Gamma$ se anula en los extremos del intervalo $[a, b]$.

Definición 5.5. Dada una variación Γ de $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, el **campo de variación** de Γ es el campo de vectores a lo largo de γ dado por

$$V: t \in [a, b] \longmapsto V(t) = S(0, t) = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, t) \right|_{s=0}$$

Analicemos más detenidamente la relación que existe entre los campos de vectores a lo largo de una curva y una variación de esta. En primer lugar, como ya se ha visto, toda variación $\Gamma(s, t)$ de una curva $\gamma(t)$ determina un campo de vectores $V(t)$ a lo largo de γ : el campo de variación $V(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, t)$. Además, si la variación es propia, entonces el campo de la variación se anula en los extremos; $V(a) = V(b) = 0$, y en este caso diremos que el campo de variación es **propio**. Recíprocamente, veamos a continuación que todo campo de vectores da lugar a una variación.

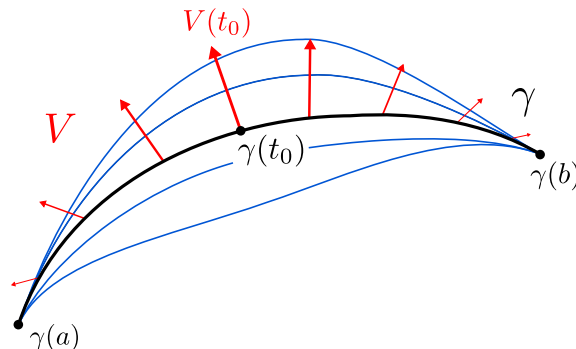


Figura 5.3: Campo de variación propio.

Lema 5.6. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva sobre M y $X(t)$ un campo de vectores a lo largo de γ . Entonces existe una variación $\Gamma(s, t)$ de γ de forma que X es el campo de la variación de Γ . Además, la variación es propia si, y solo si, $X(a) = X(b) = 0$.

Demostración. Para cada $t \in [a, b]$ se tiene que $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ y, por tanto, podemos considerar la geodésica $\gamma_{X(t)}$ determinada por las condiciones iniciales $\gamma_{X(t)}(0) = \gamma(t)$ y $\dot{\gamma}_{X(t)}(0) = X(t)$. Imitando la construcción de las superficies regladas, consideramos la variación

$$\Gamma: (s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \mapsto \Gamma(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sX(t)).$$

Claramente $\Gamma(0, t) = \exp_{\gamma(t)}(0) = \gamma(t)$. Además, notemos que las curvas transversales son tales que

$$\Gamma^a(s) = \exp_{\gamma(a)}(sX(a)) \equiv \gamma(a), \quad \Gamma^b(s) = \exp_{\gamma(b)}(sX(b)) \equiv \gamma(b)$$

si el campo X es propio ($X(a) = X(b) = 0$), por lo que Γ sería una variación propia de γ .

Comprobemos que el campo de la variación es exactamente $V(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, t) = X(t)$. Haciendo unos cálculos similares a los realizados en la demostración de la Proposición 4.6, se tiene que

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial}{\partial s} \exp_{\gamma(t)}(sX(t)) \Big|_{s=0} = d(\exp_{\gamma(t)})_{sX(t)}(X(t)) \Big|_{s=0} = d(\exp_{\gamma(t)})_0(X(t)) = X(t).$$

Finalmente, el único punto que faltaría de la demostración es garantizar la existencia de un valor $\varepsilon > 0$ de forma que todas las geodésicas radiales $\gamma_{X(t)}$ estén definidas en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. En efecto, esto último se deduce de la existencia local de geodésicas y de que $\gamma([a, b])$ es compacto. ■

5.2. Longitud y distancia en una variedad de Riemann

En primer lugar, para poder abordar el tema de que las geodésicas son las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos de una variedad, debemos definir lo que entendemos por distancia y en qué sentido una curva minimiza una distancia. En esta sección se formalizarán los conceptos necesarios y se darán algunos resultados para que el problema que queremos abordar quede definido de forma clara.

Antes de nada, es importante destacar lo que ya se comentó al principio del capítulo: únicamente consideraremos curvas regulares para simplificar la presentación. Un planteamiento más riguroso nos obligaría a trabajar con curvas diferenciables a trozos uniendo dos

puntos p y q , dado que la conexión y el carácter localmente euclídeo simplemente garantizan la conexión por caminos de la variedad y, por tanto, la existencia de una aplicación continua σ uniendo p y q . Aproximando el camino σ por poligonales obtendríamos una curva diferenciable a trozos que une p y q , para la que es posible calcular su longitud.

Sin embargo, y por simplificar la exposición, consideraremos exclusivamente curvas diferenciables uniendo cualesquiera par de puntos $p, q \in M$, aunque no perdamos de vista que los siguientes resultados tienen su versión más general para curvas diferenciables a trozos.

Definición 5.7. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva sobre una variedad de Riemann M , se define la **longitud** de γ como

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

La longitud de una curva es independiente de la reparametrización tomada de la misma, como muestra el siguiente resultado (cuya demostración se puede consultar en [2]).

Lema 5.8. Para cualquier curva $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, y cualquier reparametrización $\tilde{\gamma}$ de la misma, se tiene que $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$.

Definición 5.9. Sea M una variedad de Riemann conexa. Para cualesquiera par de puntos $p, q \in M$, se define la **distancia de Riemann** $d(p, q)$ como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas que unen p y q .

Es casi inmediato comprobar que la función distancia de Riemann $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida. Además, también es fácil probar que d es efectivamente una métrica sobre M , por lo que el par (M, d) es un espacio métrico.

Definición 5.10. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ sobre una variedad de Riemann M se dice que es **minimizante** si $L(\gamma) \leq L(\sigma)$, para cualquier curva σ uniendo los mismos puntos inicial y final.

5.3. Geodésicas y curvas minimizantes

Una vez visto lo anterior, presentamos el problema en cuestión para su resolución. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva que une dos puntos p y q de nuestra variedad de Riemann conexa M , es decir, es tal que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$. Querriamos saber qué tipo de curva es γ si es tal que $L(\gamma) \leq L(\sigma)$, para toda curva σ sobre M uniendo p y q .

Consideremos pues Γ una variación propia de γ , y sea el funcional longitud

$$L: s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto L(\Gamma_s) = \int_a^b \left\| \frac{\partial \Gamma_s}{\partial t}(t) \right\| dt.$$

Por como está planteado el problema, sabemos que L tiene un mínimo en $s = 0$ para cualquier variación propia de γ , es decir, se tendrá que

$$\left. \frac{d}{ds} L(\Gamma_s) \right|_{s=0} = 0.$$

Entonces, desarrollando la expresión de L ,

$$L(\Gamma_s) = \int_a^b \left\| \frac{\partial \Gamma_s}{\partial t}(t) \right\| dt = \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t) \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt. \quad (5.1)$$

Derivando la expresión (5.1), omitiendo la evaluación en (s, t) para mayor comodidad,

$$\frac{d}{ds} L(\Gamma_s) = \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle^{\frac{1}{2}}} dt. \quad (5.2)$$

En la expresión (5.2), el intercambio de la derivada con el símbolo integral se justifica, a grandes rasgos, diciendo que Γ es una función lo suficientemente regular ya que (como se dijo al principio del capítulo) solamente consideramos curvas regulares.

Recordemos que $T = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$, por lo que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial s}, T \right\rangle = \langle \nabla_s T, T \rangle = \langle \nabla_t S, T \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle. \quad (5.3)$$

Luego, teniendo en cuenta (5.3) y que por la regla del producto

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right\rangle, \quad (5.4)$$

la expresión (5.2) quedaría como

$$\frac{d}{ds} L(\Gamma_s) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right\rangle \right\} \frac{dt}{\left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.5)$$

Ahora bien, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que γ está parametrizada por arco, es decir, que $\|\dot{\gamma}(t)\| = \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, t) \right\| = 1$. En efecto, cualquier curva regular se puede reparametrizar por longitud de arco. Esto último se puede consultar en [2].

Entonces, por un lado, sustituyendo en $s = 0$ obtendríamos que

$$\left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, t), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, t) \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = 1. \quad (5.6)$$

Por otro lado, considerando el campo de la variación $V(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, t)\dot{\gamma}(t)$, se tiene que

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(0, t) = \frac{\partial}{\partial t}\dot{\gamma}(t) = \nabla_t \dot{\gamma}(t). \quad (5.7)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (5.6) y (5.7) al evaluar en $s = 0$ en (5.5), se deduce que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} L(\Gamma_s) \right|_{s=0} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, t), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, t) \right\rangle dt - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, t), \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(0, t) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \langle V(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \right) dt - \int_a^b \langle V(t), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \langle V(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle V(t), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \rangle dt = - \int_a^b \langle V(t), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

ya que, por ser V una variación propia, $V(a) = V(b) = 0$.

De esta forma, llegamos a que $\left. \frac{d}{ds} L(\Gamma_s) \right|_{s=0} = 0$ para cualquier variación propia Γ si, y solo si, $-\int_a^b \langle V(t), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \rangle dt = 0$ para cualquier campo de vectores $V(t)$ a lo largo de γ con $V(a) = V(b) = 0$. En particular, tomando la función de variable real $f(x) = (x-a)(b-x)$, podemos considerar el campo de vectores

$$V(t) := f(t)\nabla_t \dot{\gamma}(t),$$

que es tal que $V(a) = V(b) = 0$. Luego, tomando una variación propia asociada a $V(t)$ como en el Lema 5.6, se tiene que

$$0 = \int_a^b \langle V(t), \nabla_t \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b f(t) \|\nabla_t \dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Como el integrando es de signo constante en $[a, b]$, $f(t) \|\nabla_t \dot{\gamma}(t)\|^2 = 0$ para todo $t \in [a, b]$; lo cual implica que $\nabla_t \dot{\gamma}(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, ya que f es una función estrictamente positiva en (a, b) . De esto último podemos concluir que $\nabla_t \dot{\gamma} \equiv 0$ para cualquier $t \in [a, b]$.

Los siguientes resultados recogen los hechos probados más importantes en el desarrollo anterior.

Teorema 5.11. *Toda curva minimizante parametrizada por arco es una geodésica.*

Corolario 5.12. *Una curva regular γ parametrizada por arco es un punto crítico del funcional L si, y solo si, es una geodésica.*

Observación 5.13. El recíproco del Teorema 5.11 no es cierto, es decir, que no toda geodésica es una curva minimizante. Ilustraremos esto para el caso del cilindro en \mathbb{R}^3 .

En primer lugar tenemos que destacar que las geodésicas del cilindro son los meridianos, las circunferencias resultantes de intersectar los planos con coordenada $z = \text{constante}$, y las hélices. Esto se puede justificar utilizando el hecho de que el plano y el cilindro son homeomorfos y localmente isométricos. Las rectas, que son las geodésicas del plano se convertirán en hélices, así que son geodésicas en el cilindro.

Dicho esto, observemos que no toda geodésica del cilindro minimiza la distancia. Consideremos dos puntos distintos en el mismo meridiano. Está claro que el propio meridiano es la curva que minimiza la distancia entre los dos puntos. Sin embargo, podemos considerar una hélice que dé una vuelta al cilindro y que una los dos puntos. Esta hélice es una geodésica pero no minimiza la distancia entre los puntos. El estudio y desarrollo de este ejemplo se puede consultar con mayor detalle en [2].

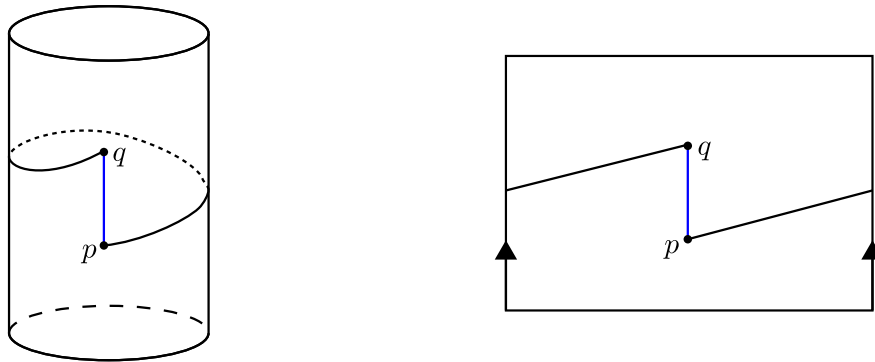


Figura 5.4: Las geodésicas del cilindro mediante isometría local con el plano. Observemos que la hélice uniendo p y q no minimiza la distancia.

Hay que destacar un punto importante en la *Observación 5.13* y es que se ha visto, desde un punto de vista global, que las geodésicas no son siempre curvas que minimizan la distancia en la variedad. Con todo, en la siguiente sección veremos que las geodésicas sí son curvas minimizantes localmente.

5.4. Las geodésicas son curvas localmente minimizantes

A continuación enunciaremos lo que se entiende por que una curva sea localmente minimizante, y daremos un lema que será de gran utilidad para las demostraciones de los

resultados de interés.

Definición 5.14. Una curva $\gamma: I \rightarrow M$ se dice **localmente minimizante** si para cualquier $t_0 \in I$ existe un entorno $U \in I$ tal que $\gamma|_U$ es minimizante entre cualquier par de puntos de U .

Lema 5.15 (Lema de Gauss). *Sea \mathcal{U} una bola geodésica centrada en $p \in M$. El gradiente de la función separación radial es ortogonal a las esferas geodésicas de \mathcal{U} .*

Demostración. Sea $q \in \mathcal{U}$. Como \exp_p es un difeomorfismo en \mathcal{U} , existirá un vector $v \in T_p M$ tal que $q = \exp_p(v)$. Sea $X \in T_p M$ un vector tangente a la esfera geodésica que pasa por q . De nuevo, como \exp_p es un difeomorfismo, existirá un vector $w \in T_v(T_p M) \equiv T_p M$ tal que $X = d(\exp_p)_v(w)$. Si $R = d(p, q)$, entonces observemos que $v \in \partial \overline{B_R(0)}$ y $w \in T_v(S_R(0))$, donde denotamos por $S_R(0) = \partial \overline{B_R(0)}$ a la esfera geodésica centrada en el origen de radio R .

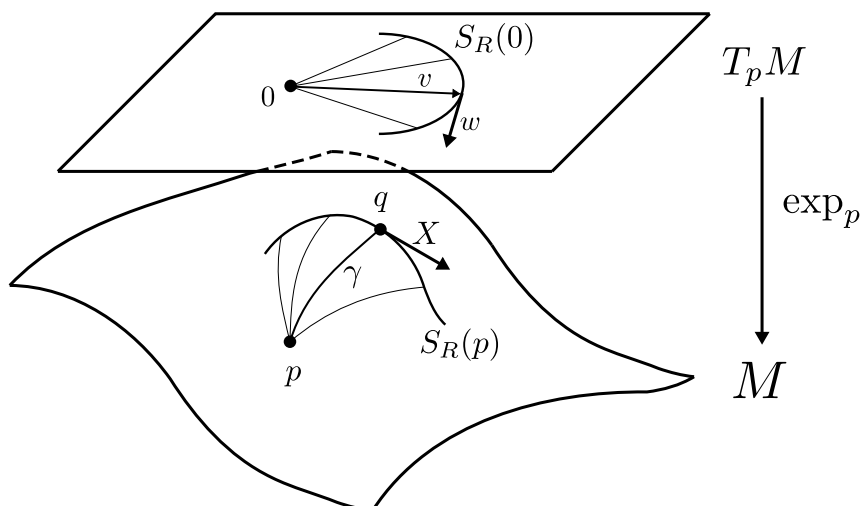


Figura 5.5: Esquema de la demostración del Lema de Gauss.

Tomemos una curva $\sigma(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, sobre $S_R(0)$ que represente al vector w , es decir, σ es tal que $\sigma(0) = v$ y $\dot{\sigma}(0) = w$. Consideraremos las geodésicas radiales con velocidad inicial $\sigma(s)$, que son curvas de la forma $\exp_p(t\sigma(s))$, y que determinarán una variación de $\gamma(t) = \exp_p(tv)$; siendo γ la geodésica radial que une p y q . En otras palabras, se tiene la variación Γ de γ dada por

$$\Gamma(s, t) = \exp_p(t\sigma(s)).$$

Observemos que para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\sigma(s)$ es un vector de longitud R , luego las curvas longitudinales Γ_s son geodésicas de velocidad constante R . Además, por otro lado, será

importante destacar que la geodésica $\gamma_v(t)$ no tiene por qué estar parametrizada por arco, pero es una geodésica radial que sale de p . Teniendo en cuenta la *Observación* 4.13, en este caso se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial r} (\gamma_v(t)) = \frac{\dot{\gamma}_v(t)}{\|\dot{\gamma}_v(t)\|} = \frac{1}{R} \dot{\gamma}_v(t).$$

Consideremos los campos $S = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}$ y $T = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ de la variación Γ . Se calculará su valor para dos puntos distintos con $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1]$. Se hará uso de que $d(\exp_p)_0$ es la identidad, como se vio en la demostración de la *Proposición* 4.6. Dicho esto, hacemos el cálculo para $(s, t) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} S(0, 0) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, 0) = \frac{d}{ds} (\exp_p(t\sigma(s))) (t) \Big|_{s=0, t=0} = d(\exp_p)_{t\sigma(s)} (t\dot{\sigma}(s)) \Big|_{t=0, s=0} \\ &= d(\exp_p)_0 (0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0, 0) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, 0) = \frac{d}{dt} (\exp_p(t\sigma(s))) (t) \Big|_{s=0, t=0} = d(\exp_p)_{t\sigma(s)} (\sigma(s)) \Big|_{t=0, s=0} \\ &= d(\exp_p)_0 (\sigma(0)) = \sigma(0) = v. \end{aligned}$$

Y ahora para $(s, t) = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} S(0, 1) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, 1) = \frac{d}{ds} (\exp_p(t\sigma(s))) (t) \Big|_{s=0, t=1} = d(\exp_p)_{t\sigma(s)} (t\dot{\sigma}(s)) \Big|_{s=0, t=1} \\ &= d(\exp_p)_{\sigma(0)} (\dot{\sigma}(0)) = d(\exp_p)_v (w) = X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0, 1) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, 1) = \frac{d}{dt} (\exp_p(t\sigma(s))) (t) \Big|_{s=0, t=1} = d(\exp_p)_{t\sigma(s)} (\sigma(s)) \Big|_{s=0, t=1} \\ &= d(\exp_p)_v (v). \end{aligned}$$

Para seguir desarrollando $d(\exp_p)_v (v)$, sea $\beta(t) = (1+t)v$ una curva que representa a v , que es tal que $\beta(0) = v$ y $\dot{\beta}(0) = v$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(0, 1) &= d(\exp_p)_v (v) = \frac{d}{dt} (\exp_p \circ \beta) (t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\exp_p((1+t)v)) (t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \gamma_{((1+t)v)}(1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_v(1+t) \Big|_{t=0} = \dot{\gamma}_v(1) = R \frac{\partial}{\partial r} (q). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estos resultados, se tiene que $\langle S(0, 0), T(0, 0) \rangle = 0$ y $\langle S(0, 1), T(0, 1) \rangle = \langle X, R \frac{\partial}{\partial r}(q) \rangle$. Por lo tanto, como nuestro objetivo es probar que $\langle X, \frac{\partial}{\partial r}(q) \rangle = 0$, a la vista de los cálculos anteriores, nos basta con ver que $\langle S, T \rangle$ es independiente de t . Así,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle S, T \rangle = \langle \nabla_t S, T \rangle + \langle S, \nabla_t T \rangle = \langle \nabla_s T, T \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \|T\|^2 = 0,$$

donde hemos hecho uso de los siguientes resultados: el lema de simetría (Lema 5.2), el hecho de que $\nabla_t T \equiv 0$ por ser las curvas Γ_s geodésicas, y que $\|T\| = \|\dot{\Gamma}_s\| = R$ para cualquier valor de (s, t) . De esta forma, queda pues demostrado el resultado. ■

Corolario 5.16. *Sea \mathcal{U} una bola geodésica centrada en $p \in M$. Entonces, en coordenadas normales, se cumple que $\nabla r = \frac{\partial}{\partial r}$ en $\mathcal{U} - \{p\}$, siendo r la función de separación radial.*

Demostración. Para cualquier $q \in \mathcal{U} - \{p\}$ y $X \in T_q M$, intentaremos probar que $\langle \frac{\partial}{\partial r}, X \rangle = \langle \nabla r, X \rangle$, de donde podremos deducir que entonces que $\nabla r = \frac{\partial}{\partial r}$.

Para ello, consideremos $S_R(p) = \exp_p(\overline{\partial B_R(0)})$ la esfera geodésica centrada en p que contiene a q . Como $\frac{\partial}{\partial r}$ es ortogonal a las esferas geodésicas por el lema de Gauss, podemos descomponer X de la siguiente forma:

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial r} + Z,$$

siendo $Z \in T_q(S_R(p))$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observemos que $dr(Z) = 0$. En efecto, tomando una curva β que represente a Z ,

$$\beta: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow S_R(p)$$

tal que $\beta(0) = q$ y $\dot{\beta}(0) = Z$, realizamos el cálculo

$$dr(Z) = \frac{d}{dt}(r \circ \beta)(t) = \frac{d}{dt}(R) = 0.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$dr(X) = dr\left(\alpha \frac{\partial}{\partial r} + Z\right) = \alpha dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + dr(Z) = \alpha,$$

donde se ha hecho uso de que $dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$.

Ahora, por un lado, por definición de ∇r ,

$$\langle \nabla r, X \rangle := X(r) = dr(X) = \alpha.$$

Por otro lado, veamos que que $\langle \frac{\partial}{\partial r}, X \rangle = \alpha$. Haciendo cálculos,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, X \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \alpha \frac{\partial}{\partial r} + Z \right\rangle = \alpha \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, Z \right\rangle = \alpha,$$

donde hemos hecho $\langle \frac{\partial}{\partial r}, Z \rangle = 0$ por el Lema de Gauss.

Se concluye que $\langle \frac{\partial}{\partial r}, X \rangle = \langle \nabla r, X \rangle$ para cualquier $X \in T_q M$, luego se deduce el resultado del corolario. ■

Proposición 5.17. *Sean $p, q \in M$ tales que q está contenido en una bola geodésica centrada en p . Entonces, la geodésica radial que une p y q es la única curva minimizante uniendo dichos puntos.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ es una bola geodésica conteniendo a q . Sea $\gamma: [0, R] \rightarrow M$ la geodésica radial que une p y q , que supondremos que está parametrizada por longitud de arco. Como en esta situación \exp_p es un difeomorfismo, podemos escribir $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ para un cierto $v \in T_p M$ unitario. Por lo tanto, se tiene que $L(\gamma) = R$ ya que γ tiene velocidad de módulo unitario. Denotaremos por $S_R(p)$ a la esfera geodésica centrada en p de radio R .

Sea $\sigma: [0, b] \rightarrow M$ otra curva parametrizada por arco que una p y q . Tenemos que demostrar que $L(\gamma) \leq L(\sigma)$. En primer lugar, observemos que no tenemos garantizado que $\sigma([0, b]) \subset S_R(p)$. Así, haremos lo siguiente: sea $t_0 \in [0, b]$ el último instante en el que $\sigma(t) = p$, y sea $t_1 \in [0, b]$ el primer instante tras t_0 que $\sigma(t) \in S_R(p)$.

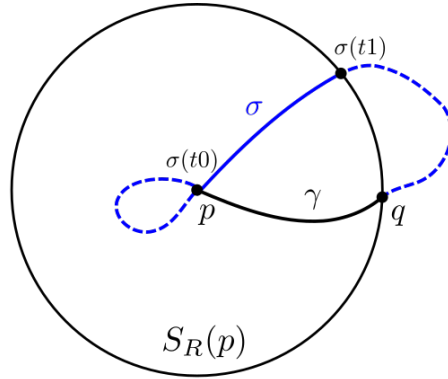


Figura 5.6: La geodésicas radiales son localmente minimizantes.

Para cada $t \in (t_0, t_1]$, descomponemos $\dot{\sigma}(t)$ en su componente normal y tangencial a la esfera geodésica que pasa por $\sigma(t)$. Es decir, consideramos

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\sigma}(t)^\perp + \dot{\sigma}(t)^\top = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\sigma}(t)^\top$$

para todo $t > t_0$. Por el lema de Gauss, esta descomposición es ortogonal. Entonces,

$$\|\dot{\sigma}(t)\| = |\alpha(t)| + \|\dot{\sigma}(t)^\top\| \geq |\alpha(t)|, \quad t > t_0.$$

De esta forma,

$$L(\sigma) \geq L(\sigma|_{[t_0, t_1]}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{t_0+\delta}^{t_1} \|\dot{\sigma}(t)\| dt \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{t_0+\delta}^{t_1} |\alpha(t)| dt \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{t_0+\delta}^{t_1} \alpha(t) dt \right| \quad (5.8)$$

Analicemos la última integral. Por un lado,

$$\alpha(t) = dr(\sigma(t)) = \frac{d}{dt}(r \circ \sigma)(t),$$

siendo r la función de separación radial. Luego

$$\int_{t_0+\delta}^{t_1} \alpha(t) dt = \int_{t_0+\delta}^{t_1} \frac{d}{dt}(r \circ \sigma)(t) dt = r(\sigma(t_1)) - r(\sigma(t_0 + \delta)) = R - r(\sigma(t_0 + \delta)). \quad (5.9)$$

Teniendo en cuenta (5.9), la ecuación (5.8) queda como

$$L(\sigma) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} |R - r(\sigma(t_0 + \delta))| = R = L(\gamma), \quad (5.10)$$

donde se ha hecho uso de que $\lim_{\delta \rightarrow 0} r(\sigma(t_0 + \delta)) = r(p) = 0$.

Hemos demostrado que $L(\gamma) \leq L(\sigma)$ para una curva σ parametrizada por arco arbitraria uniendo p y q . Supongamos ahora que se diese la igualdad $L(\gamma) = L(\sigma)$. Tenemos que ver la unicidad de γ como curva minimizante entre p y q , es decir, que $\gamma = \sigma$.

En primer lugar, observemos que todas las desigualdades de (5.8) y (5.10) se convierten en igualdades. Analicemos cada una:

Que $L(\sigma) = L(\sigma|_{[t_0, t_1]})$ implica que $t_0 = 0$ y $t_1 = b = R$, ya que si no los segmentos previos al instante t_0 y posteriores a t_1 contribuirían con longitudes positivas a la longitud total de σ .

Que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{t_0+\delta}^{t_1} \|\dot{\sigma}(t)\| dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{t_0+\delta}^{t_1} |\alpha(t)| dt$ implica que $\|\dot{\sigma}(t)\| = |\alpha(t)|$ para todo $t \in (0, R]$, es decir, que $\dot{\sigma}(t)^\top \equiv 0$.

Entonces, puesto que σ es de velocidad unidad y que $\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 1$, se tiene que

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = |\alpha(t)| \left\| \frac{\partial}{\partial r} \right\| = |\alpha(t)| = 1.$$

Se deduce que $\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial r}$. Luego, como γ y σ son curvas integrales de $\frac{\partial}{\partial r}$ que pasan por q en tiempo $t = R$, se concluye que $\gamma = \sigma$. ■

Observación 5.18. Como consecuencia de la Proposición 5.17 se tiene que, para radios $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeños, las bolas geodésicas $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ coinciden con las bolas métricas $B_d(p, \varepsilon) = \{q \in M : d(p, q) < \varepsilon\}$. Notemos que se ha hecho un abuso de notación con $B_\varepsilon(p)$. Sin que cause confusión, en lo que queda de trabajo utilizaremos la notación $B_\varepsilon(p)$ para representar a la bola geodésica centrada en $p \in M$ de radio $\varepsilon > 0$.

Finalmente, para poder probar que toda geodésica es una curva minimiza localmente será necesario acudir a un refinamiento del concepto de entorno normal. Un abierto $\hat{\mathcal{U}} \subset M$ es un **entorno uniformemente normal** si existe un radio $\delta > 0$ de forma que $\hat{\mathcal{U}} \subset B_\delta(q)$ para cada $q \in \hat{\mathcal{U}}$. El siguiente lema nos garantiza la existencia de entornos uniformemente normales.

Lema 5.19. *Sea $p \in M$ y $\mathcal{U} \subset M$ un entorno abierto de p . Entonces existe un entorno uniformemente normal $\hat{\mathcal{U}}$ de forma que $p \in \hat{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea \mathcal{U} un entorno de $p \in M$ y fijemos un $\varepsilon > 0$ de manera que la bola geodésica cerrada $\overline{B_\varepsilon(p)}$ sea tal que $\overline{B_\varepsilon(p)} \subset \mathcal{U}$. Para cada $q \in \overline{B_\varepsilon(p)}$ existe un $\delta_q > 0$ de forma que $B_{\delta_q}(q) = \exp_q(B_{\delta_q}(0))$ es un entorno normal. La familia $\{B_{\delta_q}(q)\}_{q \in \overline{B_\varepsilon(p)}}$ es un recubrimiento abierto de $\overline{B_\varepsilon(p)}$, por lo que existe un subrecubrimiento finito

$$B_{\delta_{q_1}}(q_1), \dots, B_{\delta_{q_k}}(q_k).$$

Tomemos $\delta = \min\{\delta_{q_1}, \dots, \delta_{q_k}\}$ y veamos que $\hat{\mathcal{U}} = B_{\frac{\delta}{2}}(p)$ es un entorno uniformemente normal, es decir, que $\hat{\mathcal{U}} \subset B_\delta(q)$ para cada $q \in \hat{\mathcal{U}}$. Se tiene que para cada $q \in \hat{\mathcal{U}} = B_{\frac{\delta}{2}}(p)$ se cumple que $d(p, q) < \frac{\delta}{2}$. Además, para cada $\bar{q} \in \hat{\mathcal{U}}$

$$d(\bar{q}, q) \leq d(\bar{q}, p) + d(p, q) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

por lo que $\bar{q} \in B_\delta(q)$. ■

Teorema 5.20. *Toda geodésica es localmente minimizante.*

Demostración. Fijemos un $p \in M$ y sea $\gamma: I \rightarrow M$ una geodésica que pase por p , pongamos que $\gamma(0) = p$, y que podemos suponer definida en un entorno abierto $I \subset \mathbb{R}$. Sea \mathcal{W} un entorno uniformemente normal de p , y consideremos $U \subset I$ la componente conexa de $\gamma^{-1}(\mathcal{W})$ que contenga al 0. Si tomamos $t_1, t_2 \in U$ y consideramos dos puntos $q_1 = \gamma(t_1)$ y $q_2 = \gamma(t_2)$, por definición de entorno uniformemente normal, se tiene que q_2 está contenido en una bola geodésica $B_\delta(q_1)$ centrada en q_1 para un radio $\delta > 0$. Por lo tanto, por la Proposición 5.17, la geodésica radial que une q_1 y q_2 es la única curva minimizante uniendo dichos puntos. Sin embargo, la restricción de γ a \mathcal{W} , $\gamma|_{\mathcal{W}}$, es una geodésica que une q_1 y q_2 dentro de la misma bola geodésica $B_\delta(q_1)$, por lo que se deduce que γ debe ser esta geodésica minimizante. ■

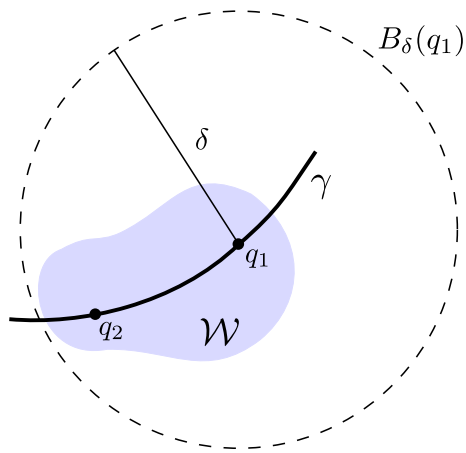


Figura 5.7: Las geodésicas son localmente minimizantes.

Bibliografía

- [1] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992
- [2] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [3] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **218**. Springer, New York, 2013.
- [4] J. M. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, **176**. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] M. D. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (vol. II)*. Publish or Perish, Houston, Texas, 1999.