



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Mestrado

**O método das rexións solución
aplicado a sistemas con condicións
non lineares**

Marcos Tella Álvarez

Xullo, 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MESTRADO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Mestrado

**O método das rexións solución
aplicado a sistemas con condicións
non lineares**

Marcos Tella Álvarez

Xullo, 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

F. Adrián Fernández Tojo, profesor do Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización da Universidade de Santiago de Compostela, como director do Traballo Fin de Mestrado con título *O método das rexións solución aplicado a sistemas con condicións non lineares*,

AUTORIZA

a Marcos Tella Álvarez para a súa presentación coa fin de obter o Título de Mestrado en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Santiago de Compostela, a 2 de xullo de 2019.

Fdo.: F. Adrián Fernández Tojo

Fdo.: Marcos Tella Álvarez

“Life is often compared to a marathon, but I think it is more like being a sprinter; long stretches of hard work punctuated by brief moments in which we are given the opportunity to perform at our best”.

Michael Johnson

Índice xeral

Notación	IX
Resumo	XI
1. Introducción	1
2. Conceptos previos	5
2.1. O grao topolóxico	5
2.2. Subsolucións e sobresolucións	11
2.3. Tubos solución	18
3. O método das rexións solución	23
3.1. Rexións solución	23
3.2. Condicións lineares	31
4. Rexións solución e condicións non lineares	37
5. Conclusións	45

Notación

Lista dos símbolos máis empregados no traballo.

\mathbb{R}^+	Conxunto dos números reais positivos.
$\text{Int}(\Omega)$	Interior de Ω .
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω .
$\overline{\Omega}$	Clausura de Ω .
$B(x, r)$	Bóla aberta n -dimensional de centro x e radio r .
$B[x, r]$	Bóla pechada n -dimensional de centro x e radio r .
$\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$	Conxunto de aplicacións k veces diferenciáveis.
$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$	Conxunto de aplicacións $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que estas e as súas derivadas se poden estender con continuidade a $\overline{\Omega}$.
$L^1(I, \mathbb{R}^n)$	Espazo das funcións absolutamente integrables.
$L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$	Espazo das funcións medibles esencialmente limitadas.
$W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$	Conxunto das funcións absolutamente continuas.
$W_{\text{loc}}^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$	Conxunto das funcións localmente absolutamente continuas.
$\mathcal{Q}(\overline{\Omega}, X)$	Conxunto dos operadores compactos con dominio $\overline{\Omega}$ e codominio X .
$\ \cdot\ $	Norma usual de \mathbb{R}^n .
$\ \cdot\ _\infty$	Norma do supremo.
$\ \cdot\ _{L^1}$	Norma do espazo $L^1(I, \mathbb{R}^n)$.
$\ \cdot\ _X$	Norma do espazo de Banach X .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto escalar usual de \mathbb{R}^n .
S_f	Conxunto de puntos críticos de f .
J_f	Matriz xacobiana f .

$\frac{\partial f}{\partial t}$	Derivada parcial de f con respecto da variable t .
∇f	Gradiente de f .
$\nabla_x f$	Vector de derivadas parciais de f con respecto de $x = (x_1, \dots, x_n)$.
Id	Aplicación (ou operador) identidad.
sign	Función signo.
c.t.p.	Abreviatura de “en case todo punto”.

Resumo

O método das rexións solución pertence a unha serie de técnicas de resolución de problemas diferenciais consistentes en procurar solucións en zonas axeitadas do espazo de traballo.

Comezaremos esta presentación introducindo os antecedentes ao método das rexións solución presentes na literatura, para así pór en contexto ao lector. Logo diso, faremos unha análise exhaustiva do funcionamento e as características de ditas rexións, observando as similitudes e diferenzas respecto dos métodos anteriores.

Finalmente, concluiremos coa exposición dunha serie de resultados propios nos cales estudaremos a resolución de problemas diferenciais con condicións non lineares vía o método das rexións solución.

Abstract

The method of solution regions belongs to a group of techniques whose main aim is to solve differential problems by searching for solutions in suitable regions of the work space.

We will begin this dissertation introducing the precedents to the solution regions method present in the literature, in order to put the reader in context. After that, we will do an exhaustive analysis of the functioning and characteristics of these regions, noticing the similarities and differences with respect to the previous methods.

Finally, we will conclude with the presentation of our findings with which we will study the resolution of differential problems with nonlinear conditions via the method of solution regions.

1. Introducción

No ano 1886 Giuseppe Peano publicou o seu célebre teorema de existencia de solución de ecuacións diferenciais en [23]. Así, dado un problema de valor inicial

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0, \quad (1.1)$$

onde $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é unha función definida nunha veciñanza de (t_0, u_0) , o autor demostrou o seguinte enunciado.

Teorema 1.1 (Teorema de Existencia de Peano). *Se a función f é continua nun entorno de (t_0, u_0) , entón o problema de valor inicial (1.1) ten polo menos unha solución definida nunha veciñanza de t_0 .*

Este resultado permítenos probar a existencia de solucións de forma local, pero poderíamos estar interesados en querer garantir dita existencia de xeito global, nun intervalo concreto I . Isto tamén é posible grazas ao Teorema 1.1 se $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continua e limitada, cousa que tamén proba Peano en [23] (véxase [27, páx. 282]).

Logo diso, entre os anos 1890 e 1893 Emile Picard presentou en [24, 25] os seus traballos sobre ecuacións diferenciais ordinarias e en derivadas parciais, nos cales empregaba métodos monótonos iterativos para a proba de existencia de solución de ditas ecuacións.

Botaba deste xeito a andar a que hoxe se coñece como teoría das sub e sobresolucións. Esta teoría consiste en probar a existencia de solución de (1.1) nun intervalo dado, pero non ao xeito de Peano en [23], senón a través de técnicas derivadas dos mencionados traballos de Picard.

Os conceptos de *subsolución* e *sobresolución* dunha ecuación diferencial ordinaria foron introducidos no ano 1931 por Giuseppe Scorza Dragoni en [6]. Así, o método das sub e sobresolucións converteuse nunha técnica moi útil orientada a resolver problemas diferenciais do tipo

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I, \quad u(t_0) = u_0.$$

Co paso do tempo, foron aparecendo numerosas xeneralizacións con respecto á regularidade da función f e ás condicións iniciais e de contorno. Xa nos anos 1990, algúns autores repararon na esencia xeométrica do método das sub e sobresolucións. Dito de forma moi breve, observaron a maneira na que se transforma o problema de partida para procurar solucións do mesmo entre a subsolución e a sobresolución.

A partir do anterior, apareceu primeiramente o método dos *tubos solución*, concepto que se lle debe a Benoit Mirandette [19]. Tal método xeneraliza ao das sub e sobresolucións no sentido de que no primeiro se procuran solucións en rexións (tubos) menos concretas ca no segundo.

Porén, tanto nas sub e sobresolucións como nos tubos solución a xeometría das rexións nas que buscar solucións queda completamente determinada, e isto pode ser algo moi restrictivo. Este feito motivou a procura de solucións en rexións máis abstractas, tentando empregar argumentos de tipo máis topolóxico para así rompermos as limitacións xeométricas que impoñen os métodos anteriores.

Chegamos entón á teoría das *rexións solución*. O concepto de rexión solución foi introducido por Marlène Frigon en [9]. No presente traballo analizaremos o funcionamento e as características deste método, estudaremos as semellanzas e diferenzas con respecto aos métodos anteriores e veremos como estes son xeneralizados polo primeiro.

Poremos ademais especial énfase nos resultados de F. Adrián Fernández Tojo recollidos en [26], nos que o autor xeneralizou o concepto de *rexión admisible* (conxuntos candidatos a ser rexións solución) visto en [9] a partir dunha análise conxunta das súas propiedades analíticas e topolóxicas. Grazas a iso, Tojo conseguiu dar unha caracterización moi elegante das que chamará *rexións admisibles febles*, que comentaremos con detalle.

Tamén repararemos, logo dunha extensa revisión bibliográfica, nas diferentes xeneralizacións feitas para as sub e sobresolucións e os tubos solución, para posteriormente pescudar a posibilidade de considerarmos resultados similares no eido das rexións solución.

Deste xeito, a partir dos resultados para problemas diferenciais con condicións iniciais e de fronteira lineares introducidos en [26], presentaremos finalmente unha serie de resultados propios a través dos cales resolveremos problemas diferenciais con condicións iniciais e de fronteira non lineares.

No que se refire á organización deste documento, estruturaremos os contidos do presente traballo da seguinte maneira. No Capítulo 2 introduciremos todos aqueles conceptos previos que precisaremos para desenvolver a teoría das rexións solución.

Así, na Sección 2.1 presentaremos a *teoría do grao topolóxico* e do *índice de punto fixo*, ferramentas esenciais que nos farán falla en numerosas ocasións. Logo diso, na Sección 2.2 falaremos do método das sub e sobresolucións, a primeira das técnicas xa mencionadas con anterioridade que apareceu na literatura. Para rematar o capítulo, veremos na Sección 2.3 o que son os tubos solución, unha xeneralización das sub e sobresolucións que conforman un chanzo intermedio entre estas e as rexións solución.

No Capítulo 3 faremos unha análise exhaustiva das rexións solución. Primeiramente introduciremos na Sección 3.1 a noción de rexión solución, a partir dos conceptos de rexión admisible e *par admisible*. Logo diso comentaremos as semellanzas e diferenzas existentes coas sub e sobresolucións e cos tubos solución. Acto seguido, enunciaremos e demostraremos os teoremas de existencia vía o método das rexións solución presentados en [9].

Continuaremos, pois, coa Sección 3.2. Veremos como se xeneraliza en [26] a noción de rexión solución, para o cal introduciremos os conceptos de rexión admisible feble e *par admisible feble*. A continuación presentaremos unha caracterización das rexións

admisibles febles a partir das súas propiedades analíticas e topolóxicas. Para finalizar esta sección e capítulo, enunciaremos os resultados introducidos na Sección 3.1 para problemas diferenciais con condicións iniciais e de fronteira lineares.

No Capítulo 4 introduciremos unha serie de resultados propios que xeneralizan os enunciados de existencia de [9, 26] para condicións iniciais e de fronteira non lineares. Veremos de que maneira os ditos resultados engloban aos métodos anteriores e presentaremos un exemplo ilustrativo no cal non é aplicable ningún dos teoremas de existencia vistos nos capítulos precedentes.

Para concluír este traballo dispoñemos dun capítulo final no que aportaremos a nosa opinión acerca dos problemas abertos relativos á teoría das rexións solución. Falaremos daquelas cuestións que estamos a estudar actualmente e exporemos que aspectos deberían de ser abordados nun futuro.

2. Conceptos previos

Para dar comezo ao presente traballo imos dar conta dunha serie de conceptos que precisaremos para movernos con comodidade dentro da teoría das rexións solución.

Veremos primeiramente como funciona o grao topolóxico, parte fundamental en todas as demostracións que aparecerán neste documento. Logo diso, faremos un percorrido bibliográfico a través do cal falaremos do método das sub e sobresolucións e das solucións tubo. Deste xeito asentaremos a base que nos permitirá contextualizar o método das rexións solución, así como comprender o funcionamento e as características de ditas rexións.

2.1. O grao topolóxico

Nesta sección imos introducir a teoría do grao topolóxico, unha ferramenta primordial para o estudo da existencia de solución de ecuacións diferenciais non lineares. En esencia, o grao asigna a unha determinada aplicación, f , un enteiro que reflicte o número de voltas que tanto f coma aquelas aplicacións suficientemente próximas a esta dan arredor dun punto.

Antes de seguir, debemos de resaltar que só empregaremos o grao topolóxico como ferramenta para demostrar outros resultados. Así, a introdución que imos facer de contado do mesmo será moi liviá, pois só repararemos nos seus aspectos básicos e nas propiedades que nos poidan facer falla. Algunhas referencias que o lector pode consultar se estiver interesado son [8, 12, 14].

Comezaremos, pois, desenvolvendo a teoría do grao en \mathbb{R}^n , introducindo o que se coñece como grao de Brouwer, para logo pasar a espazos máis abstractos de dimensión infinita, chegando finalmente ao grao de Leray-Schauder.

Sexan entón $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o espazo das aplicacións $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ k veces diferenciables tal que ditas funcións e as súas derivadas se poden estender continuamente a $\overline{\Omega}$, xunto coa norma do supremo, $\|\cdot\|_\infty$. De aquí en adiante, denotaremos por sign a *función signo*, que a cada número real distinto de 0 o leva en -1 , se este é negativo, ou en 1 , en caso contrario. Ademais, dada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, chamaremos J_f á matriz xacobiana de f . Comecemos introducindo algúns conceptos.

Definición 2.1. Sexan $C, D \subset \mathbb{R}^n$. Definimos a *distancia do punto x ao conxunto C* como

$$d_C(x) := \inf\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

Analogamente, definimos a *distancia entre C e D* como

$$d(C, D) := \inf\{\|x - y\| : x \in C, y \in D\}.$$

Ademais, se C é convexo, denotamos por $P_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ a *proxección* sobre C . Recordemos que P_C é unha función continua [13, páx. 108].

Definición 2.2. Sexa $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable.

- (1) Diremos que $x \in \Omega$ é un *punto crítico* de f se o rango de $J_f(x)$ é menor ca m . Diremos que $x \in \Omega$ é un *punto regular* de f se non é un punto crítico de f .
- (2) Diremos que $y \in \mathbb{R}^m$ é un *valor crítico* de f se existe un punto crítico $x \in \Omega$ de f tal que $f(x) = y$. Noutro caso, y será un *valor regular* de f .

Denotaremos por S_f o conxunto de puntos críticos de f .

Definición 2.3. Sexan $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(S_f) \cup f(\partial\Omega)$. Daquela, definimos o *grao* de f en Ω respecto de b como

$$g(f, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } f^{-1}(b) = \emptyset, \\ \sum_{x \in f^{-1}(b)} \text{sign}(\det(J_f(x))), & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Observemos que a definición anterior ten sentido, pois para $x \in f^{-1}(b)$, temos que $\det(J_f(x)) \neq 0$. Así, en virtude do Teorema da Función Inversa e dada a compacidade de $\bar{\Omega}$, deducimos que $f^{-1}(b)$ é un conxunto finito e, así, que $\sum_{x \in f^{-1}(b)} \text{sign}(\det(J_f(x)))$ é finita. Logo $g(f, \Omega, b)$ está ben definido.

Reparemos tamén en que, por unha parte, estamos a introducir unha ferramenta topolóxica, e por outra, pedimos diferenciability ás aplicacións e temos en conta puntos críticos. Pois ben, a continuación imos ver que a Definición 2.3 é susceptible de ser xeneralizada de tal xeito que o grao poida ser calculado para aplicacións continuas con respecto a calquera punto $b \notin \partial\Omega$. Para iso precisamos os dous resultados que seguen de contado.

Proposición 2.4 ([14, páx. 40, Proposición 2.1.2]). Sexan $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $d_0 = d_{f(\partial\Omega)}(b)$. Sexa ademais $b_i \in B(b, d_0)$, $i = 1, 2$. Entón, se $b_i \notin f(S_f)$, temos que

$$g(f, \Omega, b_1) = g(f, \Omega, b_2).$$

Teorema 2.5 (Teorema de Sard, [8, páx. 9, Lema 1.4]). Sexa $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Entón, $f(S_f)$ é un conxunto de medida cero.

Daquela, se $b \notin f(\partial\Omega)$, dado que o Teorema 2.5 e a Proposición 2.4 nos garanten a existencia de valores regulares en $B(b, d_0)$ con idéntico grao, podemos xeneralizar a Definición 2.3 para valores críticos, tal como se mostra no seguinte enunciado.

Definición 2.6. Sexan $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $d_0 = d_{f(\partial\Omega)}(b)$. Daquela, definimos o *grao* de f en Ω respecto de b como

$$g(f, \Omega, b) = g(f, \Omega, b'),$$

onde b' é calquera valor regular en $B(b, d_0)$.

Como se pode apreciar, a diferenza esencial entre a Definición 2.3 e a Definición 2.6 é que na segunda podemos calcular o grao con respecto a puntos críticos da función dada. Observemos agora o que ocorre coa regularidade das funcións.

Proposición 2.7 ([14, páx. 42, Proposición 2.1.3]). *Sexan $f, g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Daquela, existe $\varepsilon = \varepsilon(f, g, \Omega)$ tal que, para $0 < |t| < \varepsilon$, se ten que*

$$g(f + tg, \Omega, b) = g(f, \Omega, b).$$

Grazas á Proposición 2.7 podemos reescribir a Definición 2.6 para aplicacións continuas, tal como veremos de contado.

Definición 2.8. *Sexan $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $d_0 = d_{f(\partial\Omega)}(b)$. Daquela, definimos o grao de Brouwer de f en Ω respecto de b como*

$$g(f, \Omega, b) = g(g, \Omega, b),$$

para calquera $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_\infty < \frac{d_0}{2}$.

Imos ver agora algunhas das propiedades máis importantes do grao topolóxico.

Teorema 2.9 ([14, páx. 45, Teorema 2.2.1]).

(1) *Sexan $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Daquela,*

$$g(f, \Omega, b) = g(f - b, \Omega, 0).$$

(2) **Continuidade respecto da función:** *Sexan $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Daquela, existe unha veciñanza U de f tal que, se $g \in U$, se ten que*

$$g(g, \Omega, b) = g(f, \Omega, b).$$

(3) **Invarianza de homotopía:** *Sexa $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $b \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$. Entón $g(H(t, \cdot), \Omega, b)$ é independente de t .*

(4) *O grao respecto de b é constante en cada compoñente conexas de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.*

(5) **Aditividade:** *Sexa $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ e $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$. Daquela,*

$$g(f, \Omega, b) = g(f, \Omega_1, b) + g(f, \Omega_2, b).$$

(6) **Escisión:** *Sexa $F \subset \overline{\Omega}$ pechado. Sexa ademais $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(F)$. Entón $g(f, \Omega, b) = g(f, \Omega \setminus F, b)$.*

Como consecuencia do Teorema 2.9, obtemos os seguintes resultados, de grande utilidade para os nosos propósitos.

Proposición 2.10 ([14, páx. 47, Proposición 2.2.1]). *Sexa $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(\overline{\Omega})$. Daquela, se $g(f, \Omega, b) \neq 0$, entón existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = b$.*

Proposición 2.11 ([14, páx. 49, Corolario 2.2.2]). Sexan $f, g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Supoñamos que existe $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times \partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ de xeito que H nunca toma o valor b e tal que $H(0, \cdot) = f|_{\partial\Omega}$ e $H(1, \cdot) = g|_{\partial\Omega}$. Entón

$$g(f, \Omega, b) = g(g, \Omega, b).$$

A teoría ata aquí desenvolta resulta de grande interese, se ben, de cara aos nosos obxectivos, precisamos adaptala a espazos máis xerais ca \mathbb{R}^n . Sexa entón $(X, \|\cdot\|_X)$ un espazo de Banach real. De aquí en adiante suporemos todos os operadores con dominio X continuos e *limitados*, isto é, que levan conxuntos limitados en conxuntos limitados, e denotaremos por Id o operador identidade. Comecemos introducindo algúns conceptos.

Definición 2.12. Sexan X e Y espazos de Banach, $\Omega \subset X$ aberto e $T : \overline{\Omega} \rightarrow Y$ continuo. Diremos que T é *compacto* se leva conxuntos limitados (en X) en conxuntos relativamente compactos (en Y).

Definición 2.13. Sexa $T : \overline{\Omega} \rightarrow Y$ compacto. O operador $\varphi = \text{Id} - T$ denomínase unha *perturbación compacta da identidade*.

Resulta moi doado de probar que as perturbacións compactas da identidade son *pechadas* (levan conxuntos pechados en conxuntos pechados) e *propias* (as preimaxes de compactos son compactas) [14, páx. 70, Proposición 3.1.1]. Imos ver agora dous enunciados necesarios para a definición do grao en espazos de Banach.

Lema 2.14 ([14, páx. 71, Lema 3.1.1]). Sexa $K \subset X$ compacto. Daquela, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe un subespazo de dimensión finita $V_\varepsilon \subset X$ e unha aplicación $g_\varepsilon : K \rightarrow V_\varepsilon$ tal que, para todo $x \in K$, se ten que

$$\|g_\varepsilon(x) - x\|_X < \varepsilon.$$

Definición 2.15. Sexan $\Omega \subset X$ aberto e limitado e $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$ un operador de rango finito. Daquela, se $\varphi = \text{Id} - T$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, definimos

$$g(\varphi, \Omega, b) = g(\varphi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

onde $F \subset X$ é un subespazo de dimensión finita que contén a $T(\overline{\Omega})$ e a b .

Notemos que a Definición 2.15 é independente da elección do subespazo de dimensión finita F . Chegamos así ao grao de Leray-Schauder.

Definición 2.16. Sexan $\Omega \subset X$ aberto e limitado, $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow X$ unha perturbación compacta da identidade e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Sexan ademais $d_0 = d_{\varphi(\partial\Omega)}(b)$ e $\widehat{T} : \overline{\Omega} \rightarrow X$ un operador de rango finito tal que $\|(\text{Id} - \varphi)x - \widehat{T}x\|_X < \frac{d_0}{2}$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Definimos entón o *grao de Leray-Schauder* de φ en Ω respecto de b como

$$g(\varphi, \Omega, b) = g(\widehat{\varphi}, \Omega, b),$$

onde $\widehat{\varphi} = \text{Id} - \widehat{T}$.

Observación 2.17. Notemos que a distancia d empregada na Definición 2.16 se define do mesmo xeito que na Definición 2.1 tomando a norma $\|\cdot\|_X$.

Para rematar, veremos de contado algunhas das propiedades máis importantes do grao de Leray-Schauder. De aquí en adiante denotaremos por $\mathcal{Q}(\overline{\Omega}, X)$ o espazo dos operadores compactos con dominio $\overline{\Omega}$ e codominio X .

Teorema 2.18 ([14, páx. 75, Teorema 3.3.1]).

(1) **Continuidade respecto da función:** Sexan $T \in \mathcal{Q}(\overline{\Omega}, X)$ e $b \notin (\text{Id}-T)(\partial\Omega)$. Daquela, existe unha veciñanza U de T tal que, para todo $S \in U$, se ten que $b \notin (\text{Id}-S)(\partial\Omega)$ e que

$$g(\text{Id}-S, \Omega, b) = g(\text{Id}-T, \Omega, b).$$

(2) **Invarianza de homotopía:** Sexa $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times \overline{\Omega}, X)$ definido como $H(t, x) = x - S(t, x)$, onde $S \in \mathcal{Q}([0, 1] \times \overline{\Omega}, X)$. Se $b \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$, entón $g(H(t, \cdot), \Omega, b)$ é independente de t .

(3) O grao respecto de b é constante en cada compoñente conexas de $X \setminus (\text{Id}-T)(\partial\Omega)$.

(4) **Aditividade:** Sexa $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\varphi = \text{Id}-T$ unha perturbación compacta da identidade e $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$, onde $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Daquela,

$$g(\varphi, \Omega, b) = g(\varphi, \Omega_1, b) + g(\varphi, \Omega_2, b).$$

(5) **Escisión:** Sexan $F \subset \Omega$ pechado, $\varphi = \text{Id}-T$ unha perturbación compacta da identidade e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(F)$. Entón $g(\varphi, \Omega, b) = g(\varphi, \Omega \setminus F, b)$.

A partir do Teorema 2.18 obtemos os seguintes enunciados, de grande importancia nas vindeiras seccións do presente traballo.

Proposición 2.19 ([14, páx. 77, Proposición 3.3.3]). Sexan $S, T \in \mathcal{Q}(\overline{\Omega}, X)$ tal que $S = T$ en $\partial\Omega$. Daquela, se $b \notin \varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$, onde $\varphi = \text{Id}-T$ e $\psi = \text{Id}-S$, entón

$$g(\varphi, \Omega, b) = g(\psi, \Omega, b).$$

Proposición 2.20 ([14, páx. 78, Exercício 3.3.1]). Sexa $T \in \mathcal{Q}(\overline{\Omega}, X)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, con $\varphi = \text{Id}-T$. Daquela, se $g(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, entón existe $x \in \Omega$ tal que $T(x) = b$.

Teorema 2.21 (Teorema do Punto Fixo de Schauder [14, páx. 79, Teorema 3.4.1]). Sexa X un espazo de Banach e $K \subset X$ un subconxunto convexo e compacto. Daquela, se $f : K \rightarrow K$ é continua, entón f ten un punto fixo.

Como podemos observar, as propiedades do grao de Leray-Schauder son idénticas ás vistas para o grao en espazos euclidianos. Isto é natural, se temos en conta que a Definición 2.16 ten lugar a partir da Definición 2.8 e da aproximación de operadores compactos por operadores de rango finito [14, páx. 71].

Para rematar esta sección imos introducir un concepto estreitamente relacionado ao de grao topolóxico, o índice de punto fixo. Farémolo directamente para o grao de Leray-Schauder, pois será o que empregaremos ao longo deste traballo.

Definición 2.22. Sexan $T \in \mathcal{Q}(\overline{\Omega}, X)$ e $\varphi = \text{Id} - T$ unha perturbación compacta da identidade. Daquela, se $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$, definimos o *índice de punto fixo* de T como

$$\text{Ind}(T, \Omega) = g(\varphi, \Omega, 0).$$

Así, a través da Definición 2.22 podemos ver claramente a relación entre a teoría do grao topolóxico e a teoría do índice. Debemos de resaltar que, tal como está definido, o índice ten propiedades análogas ás do grao. Dado que nas vindeiras seccións precisaremos de ditas propiedades, imos recollelas no seguinte resultado.

Teorema 2.23 ([12, páx. 317, Teorema 6.2]). Sexan $T \in \mathcal{Q}(\overline{\Omega}, X)$ e $\varphi = \text{Id} - T$ unha perturbación compacta da identidade. Supoñamos que $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$. Entón cúmprense as seguintes afirmacións.

- (1) **Normalización:** Se T toma un valor constante c , entón $\text{Ind}(T, \Omega) = 1$ se, e só se, $c \in \Omega$.
- (2) **Existencia:** se $\text{Ind}(T, \Omega) \neq 0$, entón T ten un punto fixo en Ω .
- (3) **Homotopía:** Se $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times \overline{\Omega}, X)$ é un operador continuo e compacto e $H(t, x) \neq x$ para todo $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$, entón $\text{Ind}(H(t, \cdot), \Omega)$ non depende de t .
- (4) **Aditividade:** Se Ω_1 e Ω_2 son dous conxuntos disxuntos de Ω tales que $0 \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, daquela

$$\text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(T, \Omega_1) + \text{Ind}(T, \Omega_2).$$

- (5) **Escisión:** Se V é un subconxunto aberto de Ω e T non ten puntos fixos en $\Omega \setminus V$, entón $\text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(T, V)$.
- (6) **Contracción:** Se E é un subconxunto pechado de X tal que $T(\overline{\Omega}) \subset E$, daquela $\text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(T|_{\overline{\Omega \cap E}}, E)$.
- (7) **Localización:** Sexan Ω_1 e Ω_2 dous conxuntos disxuntos de Ω tales que $0 \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Se $\text{Ind}(T, \Omega) \neq 0$ e $\text{Ind}(T, \Omega_1) = 0$, daquela T ten un punto fixo en Ω_2 .
- (8) **Multiplicidade:** Sexan Ω_1 e Ω_2 dous conxuntos disxuntos de Ω tales que $0 \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Se $\text{Ind}(T, \Omega) = 0$ e $\text{Ind}(T, \Omega_1) \neq 0$, entón T ten un punto fixo en Ω_1 e outro en Ω_2 .

Algunhas referencias onde se desenvolven os pormenores da relación entre o grao topolóxico e o índice de punto fixo e nas que se recollen diversos exemplos aplicando ambos conceptos ás ecuacións diferenciais son as xa mencionadas ao comezo da sección [8, 12, 14].

Como xa dixemos, a teoría do grao topolóxico resulta moi útil para o estudo da existencia de solución de ecuacións diferenciais non lineares. Na Sección 2.2 presentaremos un primeiro exemplo, o método das sub e sobresolucións, no que o uso de dita ferramenta é fundamental.

2.2. Subsoluciones e sobresoluciones

Tal como indicamos ao principio deste traballo, existe unha serie de métodos orientados ao estudo da existencia de solución de ecuacións diferenciais consistentes en procurar zonas óptimas onde poder atopar ditas solucións. Así, o primeiro deles que apareceu na literatura, e sobre o que se sustentan os demais, é o método das subsoluciones e sobresoluciones, que veremos de contado.

Este método, que introduciu Dragoni en [6] para condicións de fronteira tipo Dirichlet, foi empregado por primeira vez para obter resultados de existencia para o problema periódico por Sergio Moretto, considerando funcións localmente lipschitzianas pola dereita [20]. A partir deste punto, foron aparecendo distintas xeneralizacións, entre as que destacan a de Jean L. Mawhin para aplicacións continuas [18] e a de Marius N. Nkashama para funcións Carathéodory, na cal as sub e sobresoluciones son aplicacións absolutamente continuas [22]. Tamén son destacables os traballos de Rodrigo López Pouso [17] e de Frigon e Donal O'Regan [11], onde as sub e sobresoluciones poden ser de variación limitada.

Resaltemos antes de comezar que imos considerar directamente os resultados relativos ás funcións Carathéodory, se ben o lector pode atopar resultados análogos para funcións continuas e problemas de orde dous en [5, 16, 18].

De aquí en adiante denotaremos $I := [0, T]$, con $T \in \mathbb{R}^+$. No que segue traballaremos cos espazos de funcións $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$, $L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ e $L^1(I, \mathbb{R}^n)$, equipados os tres primeiros coa norma $\|\cdot\|_\infty$ e coa norma $\|\cdot\|_{L^1}$ o último. A maiores, tamén consideraremos os seguintes conxuntos de aplicacións localmente absolutamente continuas

$$W_{\text{loc}}^{1,1}(J, \mathbb{R}) = \{u : J \rightarrow \mathbb{R} : u \in W^{1,1}([t_0, t_1], \mathbb{R}), \text{ para todo } [t_0, t_1] \subset J\},$$

con $J \subset I$, xunto coa norma $\|\cdot\|_\infty$. Ademais, se $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e dado $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, denotaremos

$$A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in A\},$$

e

$$A^x := \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in A\}.$$

Así, se consideramos as inclusións naturais $i_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $i^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tal que $i_t(x) = i^x(t) = (t, x)$, entón temos que $A_t = (i_t)^{-1}(A)$ e $A^x = (i^x)^{-1}(A)$. Do mesmo xeito, tamén empregaremos as proxeccións naturais $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\pi_1(t, x) = t$ e $\pi_2(t, x) = x$. Vexamos logo o que é unha función Carathéodory.

Definición 2.24. Sexa $D \subset I \times \mathbb{R}^n$. Unha aplicación $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ dise unha *función L^1 -Carathéodory* se

- (1) $f(t, \cdot)$ é continua en D_t , para case todo $t \in I$;
- (2) $f(\cdot, x)$ é medible, para todo $x \in \pi_2(D)$;
- (3) para todo $k \in \mathbb{R}^+$, existe $\psi_k \in L^1(I, \mathbb{R})$ tal que $\|f(t, x)\| \leq \psi_k(t)$ para case todo t e todo x , tal que $\|x\| \leq k$ e $(t, x) \in D$.

Unha aplicación $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ dise *localmente* L^1 -Carathéodory se $f|_A$ é unha función L^1 -Carathéodory para todo subconxunto compacto $A \subset D$.

De aquí en adiante, cando falemos de funcións Carathéodory estaremos a referir a aplicacións L^1 -Carathéodory.

Un resultado que nos fará falla un pouco máis tarde é o seguinte.

Lema 2.25 ([19, Proposición 2.3]). *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e $N_f : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ o operador definido por*

$$N_f(u)(t) = \int_0^t f(s, u(s)) \, ds, \quad (2.1)$$

onde a integral anterior se entende como a integral en cada compoñente do vector $f(s, u(s))$. Daquela, N_f é continuo e compacto. Ademais, se $u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, entón $N_f(u) \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$.

Demostración. Vexamos primeiro que N_f está ben definido. Para iso temos que demostrar que, se $u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, entón a función $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$.

En efecto, como f é unha función Carathéodory e I é compacto, temos que os elementos de $u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ son funcións limitadas e, polo tanto, que o operador $u \rightarrow f(\cdot, u(\cdot))$, coñecido polo nome de *operador de superposición* ou *operador de Nemytskij*, leva elementos de $L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ en elementos de $L^1(I, \mathbb{R}^n)$ [1, páx. 67, Teorema 3.1], logo N_f está ben definido.

Como consecuencia do anterior, se $u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, entón, empregando o Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue [2, Teorema 4.4.3], deducimos tamén que $N_f(u) \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$.

Agora comprobemos que N_f é continuo. Sexa $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ unha sucesión tal que $u_n \rightarrow u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ en $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Dado que f é Carathéodory, temos que a sucesión $\{f(t, u_n(t))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converxe a $f(t, u(t))$ para case todo $t \in I$ e que existe unha función $h \in L^1(I, [0, \infty))$ de xeito que

$$\|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| \leq h(t),$$

para case todo $t \in I$. Notemos que a desigualdade anterior é posible grazas a que a sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é converxente e, polo tanto, limitada, e á condición (3) da Definición 2.24.

Logo, en virtude do Teorema da Convergencia Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_\infty \leq \int_0^T \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| \, ds \rightarrow 0,$$

do que se deduce que N_f é continuo.

Probemos agora que N_f é compacto. Por unha parte temos que N_f é limitado, pois, para todo $u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, temos que

$$\|N_f(u)\|_\infty \leq \int_0^T \|f(t, u(t))\| \, dt \leq \int_0^T h(t) \, dt < \infty.$$

Por outra banda, para todo $t \leq \tilde{t}$, $t, \tilde{t} \in I$, temos que

$$\|N_f(u)(\tilde{t}) - N_f(u)(t)\| \leq \int_t^{\tilde{t}} \|f(s, u(s))\| ds \leq \int_t^{\tilde{t}} h(s) ds,$$

para todo $u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Logo, dado que a integral é absolutamente continua respecto da medida de Lebesgue, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, se $|\tilde{t} - t| < \delta$, se ten que

$$\int_t^{\tilde{t}} h(s) ds < \varepsilon.$$

Así, deducimos que, se $A \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ é un subconxunto limitado, entón $N_f(A)$ é uniformemente equicontinuo.

Estamos logo nas condicións do Teorema de Arzelà-Ascoli [21, páx. 278, Teorema 45.4], resultado que nos garante que N_f é compacto, tal como queríamos probar. ■

Como podemos ver, o Lema 2.25 móstranos que toda función Carathéodory ten un operador asociado con propiedades moi boas que nos será moi útil. Observemos que o operador de superposición asociado a N_f resulta de compoñer unha función continua cunha medible e non ao revés, polo que non é para nada inmediato que N_f estea ben definido. Por este motivo decidimos incluír aquí a demostración anterior.

Estamos xa en condicións de introducirmos o método das sub e sobresolucións. Consideremos entón o problema de valor inicial

$$u'(t) = f(t, u(t)) \text{ c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = u_0, \quad (2.2)$$

onde I é un intervalo non dexenerado e $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función Carathéodory. Vexamos que entendemos por sub e sobresolucións do problema (2.2).

Definición 2.26.

(1) Unha función $\alpha \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ dise unha *subsolución* de (2.2) se

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \text{ c.t.p. } t \in I \text{ e } \alpha(0) \leq u_0.$$

(2) Unha función $\beta \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ dise unha *sobresolución* de (2.2) se

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)) \text{ c.t.p. } t \in I \text{ e } \beta(0) \geq u_0.$$

O seguinte resultado móstranos a existencia de solución de (2.2) a través do que se coñece como o método das sub e sobresolucións. Este consiste en empregar α e β sub e sobresolucións de (2.2) para construír un novo problema asociado ao de partida, no cal a función que substitúe a f é limitada. Logo diso aplícase a teoría do grao para garantir existencia de solución do problema modificado e, finalmente, próbase que dita solución tamén é solución de (2.2). Cabe resaltar que a demostración do resultado que imos presentar é propia, pois na maioría das referencias consultadas os problemas tratados son lixeiramente distintos a (2.2) [5, 18].

Teorema 2.27. Sexan α e β sub e sobresoluciones de (2.2) tales que $\alpha \leq \beta$,

$$E := \{(t, x) \in I \times \mathbb{R} : \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}$$

e $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función Carathéodory. Daquela, o problema (2.2) ten polo menos unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ tal que, para todo $t \in I$,

$$(t, u(t)) \in E.$$

Demostración. Consideremos o problema modificado

$$u'(t) = \tilde{f}(t, u(t)) \quad \text{c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = u_0, \quad (2.3)$$

onde $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ vén dada por

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, \alpha(t)) & \text{se } x < \alpha(t), \\ f(t, x) & \text{se } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ f(t, \beta(t)) & \text{se } \beta(t) < x. \end{cases}$$

Tal como está definida, é evidente que a función \tilde{f} tamén é Carathéodory.

Primeiramente vexamos que o problema (2.3) ten polo menos unha solución. Para iso, abonda con reescribir (2.3) como unha ecuación integral,

$$u(t) = u_0 + N_{\tilde{f}}(u)(t).$$

Daquela, dado que o Lema 2.25 nos garante que $N_{\tilde{f}}$ é continuo e compacto, o operador asociado $T : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, definido como

$$T(u)(t) = u_0 + N_{\tilde{f}}(u)(t),$$

tamén é continuo e compacto. Dese xeito, podemos empregar o Teorema 2.21, obtendo así un punto fixo de T . Así, como o Lema 2.25 tamén nos garante que $N_{\tilde{f}}(u) \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$, empregando o Teorema Fundamental do Calculo para a integral de Lebesgue obtemos que dito punto fixo é solución de (2.3).

Para rematar, vexamos que toda solución u de (2.3) satisfai que

$$\alpha(t) \leq u(t),$$

para todo $t \in I$.

Sexa entón $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ solución de (2.3) e supoñamos que existe $t_1 \in I$ tal que $\alpha(t_1) > u(t_1)$. Como $u(0) = u_0 \geq \alpha(0)$, o Teorema de Bolzano garántenos que existe $t_0 \in [0, t_1)$ tal que

$$u(t_0) = \alpha(t_0) \quad \text{e} \quad u(t) < \alpha(t),$$

para todo $t \in (t_0, t_1)$. Logo, para $t \in (t_0, t_1)$, temos que

$$u'(t) = \tilde{f}(t, u(t)) = f(t, \alpha(t))$$

e, por ser α subsolución, que

$$f(t, \alpha(t)) \geq \alpha'(t).$$

Pero entón $\alpha'(t) \leq u'(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, con $u(t_0) = \alpha(t_0)$, do que deducimos que $u \geq \alpha$ en (t_0, t_1) , o cal é unha contradición.

Analogamente podemos probar que $u(t) \leq \beta(t)$, para todo $t \in I$, co cal obtemos que

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t),$$

para todo $t \in I$. Deste xeito queda probado que toda solución de (2.3) é solución de (2.2), co que concluímos a demostración. ■

Á vista da demostración anterior, debemos de destacar que a chave da proba se atopa no xeito en que transformamos o problema (2.2) nun problema limitado. Por unha parte, proxectamos o dominio de f sobre a rexión comprendida entre α e β para definirmos a función \tilde{f} . Por outra banda, tamén empregamos as condicións $\alpha(0) \leq u_0$ e $\beta(0) \geq u_0$ para proxectarmos as condicións iniciais do problema de partida. Unha vez que isto ocorre, o que temos que facer é empregar toda a ferramenta relativa ao grao topolóxico que temos ao noso dispor e aproveitar o feito de que \tilde{f} é limitada. Así, unha vez que obtemos a solución relativa ao problema modificado, o que resta é comprobar que esta se atopa no lugar axeitado. Na Figura 2.1 ilustramos o proceso seguido.

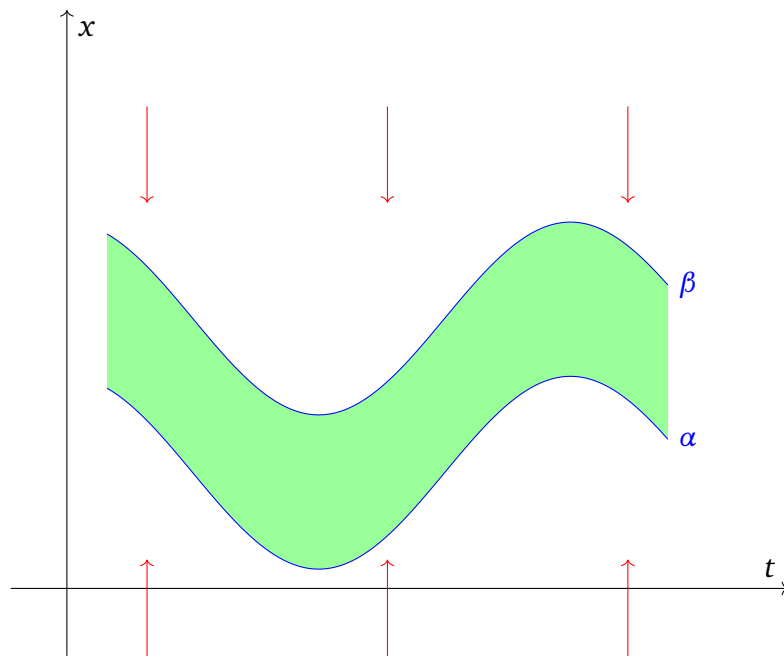


Fig. 2.1. Ao definirmos \tilde{f} estamos a comprimir o problema (2.2) proxectando na dirección que indican as frechas e procurando solucións na área sombreada comprendida entre α e β .

Como cabería esperar, todo o feito ata este punto tamén se pode levar a cabo tendo en conta condicións de fronteira. Nese caso, de considerarmos o problema de fronteira periódico

$$u'(t) = f(t, u(t)) \text{ c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = u(T), \quad (2.4)$$

onde I é un intervalo non dexenerado e $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función Carathéodory, debemos de modificar a definición de sub e sobresolución, tal como segue.

Definición 2.28.

- (1) Unha función $\alpha \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ dise unha *subsolución* de (2.4) se

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \text{ c.t.p. } t \in I \text{ e } \alpha(0) \leq \alpha(T).$$

- (2) Unha función $\beta \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ dise unha *sobresolución* de (2.4) se

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)) \text{ c.t.p. } t \in I \text{ e } \beta(0) \geq \beta(T).$$

Deste xeito, obtemos un resultado similar ao Teorema 2.27 para o problema (2.4), que pode consultarse en [22, Teorema 2.2].

Se nos fixamos, moitas das xeneralizacións do método das sub e sobresolucións que xurdiron a partir de [20] teñen que ver coa regularidade da función f relativa ao problema en cuestión. Porén, algunhas delas atenden a unha cuestión de carácter máis xeométrico, isto é, apuntan cara ás características da rexión na que procurar solucións. Este foi o caso do que se coñece como método das sub e sobresolucións estritas, nado a partir de considerarmos de forma estrita algunha das desigualdades que aparecen nas Definicións 2.26 e 2.28 [18].

Vexamos entón como se definen as sub e sobresolucións estritas. Con ánimo de brevidade, presentaremos de forma conxunta os conceptos para o problema de valor inicial e para o problema de fronteira.

Definición 2.29.

- (1) Unha función $\alpha \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ dise unha *subsolución estrita* de (2.2) (respectivamente, de (2.4)) se, para todo $t_0 \in I$, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e unha veciñanza U_{t_0} de t_0 en I , tal que

$$\alpha'(t) \leq f(t, x) \text{ c.t.p. } t \in U_{t_0},$$

para todo $x \in [\alpha(t), \alpha(t) + \varepsilon]$, e ademais

$$\alpha(0) < u_0 \text{ (respectivamente, } \alpha(0) < \alpha(T)).$$

- (2) Unha función $\beta \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ dise unha *sobresolución estrita* de (2.2) (respectivamente, de (2.4)) se, para todo $t_0 \in I$, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e unha veciñanza U_{t_0} de t_0 en I , tal que

$$\beta'(t) \geq f(t, x) \text{ c.t.p. } t \in U_{t_0},$$

para todo $x \in [\beta(t) - \varepsilon, \beta(t)]$, e ademais

$$\beta(0) > u_0 \text{ (respectivamente, } \beta(0) > \beta(T)).$$

Atendendo á Definición 2.29, podemos ver que o método das sub e sobresolucións estritas permite limitar un pouco máis a rexión de procura de solución do problema diferencial considerado. Cabe comentar ademais que, se ben existe unha gran cantidade de bibliografía na que poder consultar o método das sub e sobresolucións, o caso estrito non está tan expandido na literatura, dada a súa dificultade. Así, das referencias xa mencionadas neste traballo, tan só se tratan sub e sobresolucións estritas en [18], onde se estuda o problema periódico con f unha función continua. Para obter resultados similares ao Teorema 2.27 vía o método estrito con f unha aplicación Carathéodory, debemos de consultar o excelente traballo feito por Noha El Khattabi, Frigon e Nourredine Ayyadi [7], no que se estuda tanto o problema de valor inicial como o de fronteira periódico.

Outra forma de xeneralizar o método das sub e sobresolucións é considerarmos condicións iniciais ou de fronteira lineares, non lineares ou funcionais. Con respecto a este tema, son destacables os traballos de Alberto Cabada [3] e de Cabada e Pouso [4] onde se consideran condicións do tipo $a_0u(0) - b_0u(T) = \lambda_0$, do tipo $L(u(0), u(T)) = 0$, con $L \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ non decrecente nalgunha das súas variables, ou condicións do estilo $L(u(a), u(b), u'(a), u'(b), u)$, onde L é un operador continuo.

Cabe resaltar que en [3, 4] a forma na que se proxectan as condicións iniciais e de fronteira para obtermos un problema limitado é distinta á vista na demostración do Teorema 2.27. No Capítulo 3 veremos un método similar ao empregado por ditos autores na proba dos Teoremas 3.17 e 3.18.

Debemos de comentar tamén que, asociado ás sub e sobresolucións, existe o que se coñece como *método monótono*, unha técnica iterativa que nos permite obter solucións a partir de límites de sucesións monótonas de sub e sobresolucións. Máis concretamente, se o problema (2.2) ten sub e sobresolucións α e β e existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que a función f satisfai

$$f(t, x) - f(t, y) \leq M(x - y),$$

para case todo $t \in I$ con $\alpha(t) \leq y \leq x \leq \beta(t)$, daquela existen dúas sucesións $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ non decrecente e non crecente, respectivamente, converxentes en $L^1(I, \mathbb{R})$ ás solucións extremas de (2.2) en $[\alpha, \beta]$. Este método pode consultarse tanto en [3] como en [4].

Para concluír esta sección, é preciso repararmos en que no método das sub e sobresolucións, ao igual que no caso estrito, o feito de procurar unha rexión onde buscar solucións ao problema diferencial dado está directamente ligado á existencia das sub e sobresolucións asociadas e a que saibamos explicitamente cales son estas. Todo isto fixo que xurdiran algunhas liñas de investigación centradas en proporcionar rexións deste tipo tentando reducir na medida do posible a cantidade de elementos iniciais a empregar. Na seguinte sección veremos como isto se consegue a través do que se coñece como método dos tubos solución.

2.3. Tubos solución

Como podemos ver na Sección 2.2, o que acontece cando aplicamos o método das sub e sobresolucións é que estamos a empregar dúas funcións auxiliares, α, β , con certas propiedades que determinan unha rexión na cal poder atopar unha solución ao problema (2.2). Algo interesante que xa comentamos con anterioridade é que a xeometría de dita rexión queda completamente determinada polo par α, β . Esta forma de proceder pódese xeneralizar un pouco máis, no sentido de que é posible dar dúas aplicacións, v, M , que determinen zonas máis xenéricas, se ben con propiedades xeométricas semellantes, nas que procurar solucións de (2.2). Chegamos así ao que se coñece como o método dos tubos solución.

O concepto de tubo solución foi introducido por primeira vez por Mirandette no seu Traballo Fin de Mestrado [19]. Observemos que non abundan as referencias nas que consultar sobre o método dos tubos solución. Con respecto a iso, é destacable o estudo de existencia de problemas diferenciais levado a cabo por Frigon e Maryam Lotfipour en [10] empregando dita noción.

Nesta sección seguiremos a considerar os espazos de funcións $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$, $W_{\text{loc}}^{1,1}(J, \mathbb{R})$, $L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ e $L^1(I, \mathbb{R}^n)$. Lembremos tamén que estamos a denotar $I := [0, T]$, con $T \in \mathbb{R}^+$. Vexamos entón o que é un tubo solución.

Definición 2.30. Sexan $v \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ e $M \in W^{1,1}(I, [0, \infty))$. Diremos que o par (v, M) é un *tubo solución* do problema (2.2) se

- (1) $\langle x - v(t), f(t, x) - v'(t) \rangle \leq M(t)M'(t)$ para case todo $t \in I$ e todo x tal que $\|x - v(t)\| = M(t)$;
- (2) $v'(t) = f(t, v(t))$ para case todo $t \in \{s \in I : M(s) = 0\}$;
- (3) $\|v(0) - u_0\| \leq M(0)$.

De querermos dar unha interpretación xeométrica á Definición 2.30, o que temos é que, a partir dunha aplicación “fibra”, v , e dunha función “distancia”, M , se define unha rexión tubular, onde a parede do tubo en cuestión vén dada polos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x - v(t)\| = M(t)$, tal como vemos na Figura 2.2.

O método dos tubos solución consistirá, pois, en atopar solución a un problema diferencial dado con par (v, M) asociado, de xeito que dita solución se atope dentro do tubo en cuestión. Debemos de decatarnos de que dito método xeneraliza ao das sub e sobresolucións. En efecto, dadas α e β sub e sobresolucións, abonda con tomar v e M definidas como

$$v(t) = \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{2}, \quad \text{e} \quad M(t) = \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{2},$$

para todo $t \in I$. Así, para cada $t \in I$, a fibra do tubo virá dada polo punto medio entre $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, e as paredes do mesmo poderémolas definir a partir do vector que vai desde $v(t)$ ata $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, respectivamente. Na Figura 2.3 podemos observar con detalle o anterior.

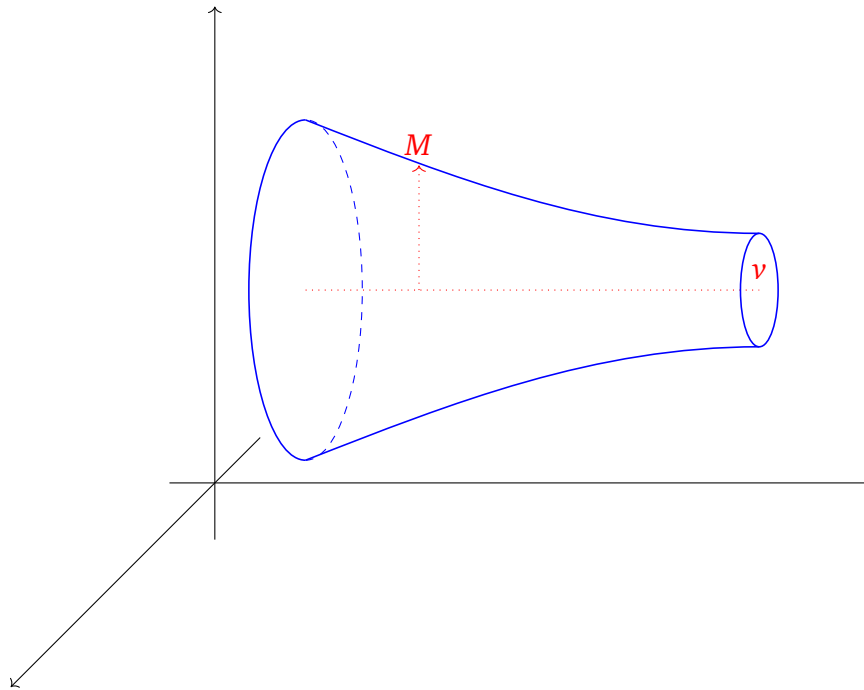


Fig. 2.2. O par (v, M) , con liñas punteadas na imaxe, determina as paredes da sección tubular.

Así, de xeito análogo ao método das sub e sobresolucións, probaremos a existencia de solución do problema (2.2) empregando a teoría do grao e procurando puntos fixos dun determinado operador. Dito operador estará asociado a un problema que obteremos modificando (2.2) a través do par (v, M) . Dado que agora gozamos de máis xeneralidade que coas sub e sobresolucións, precisaremos dos seguintes dous resultados.

Lema 2.31 ([19, Lema 1.10]). *Sexa $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función absolutamente continua. Daquela, o conxunto $\{t \in I : u(t) = 0; u'(t) \neq 0\}$ ten medida cero.*

Lema 2.32 ([19, Corolario 1.12]). *Sexa $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ e $M \in W^{1,1}(I, [0, \infty))$ tales que*

$$\langle u(t), u'(t) \rangle - M'(t) \|u(t)\| \leq 0,$$

para case todo $t \in \{s \in I : \|u(s)\| > M(s)\}$. Daquela, se $\|u(0)\| \leq M(0)$, entón $\|u(t)\| \leq M(t)$, para todo $t \in I$.

Vexamos entón o enunciado que garante a existencia de solución de (2.2) a través do método dos tubos solución.

Teorema 2.33 ([19, Teorema 2.2]). *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e supoñamos que existe un tubo solución (v, M) de (2.2). Daquela, o problema (2.2) ten*

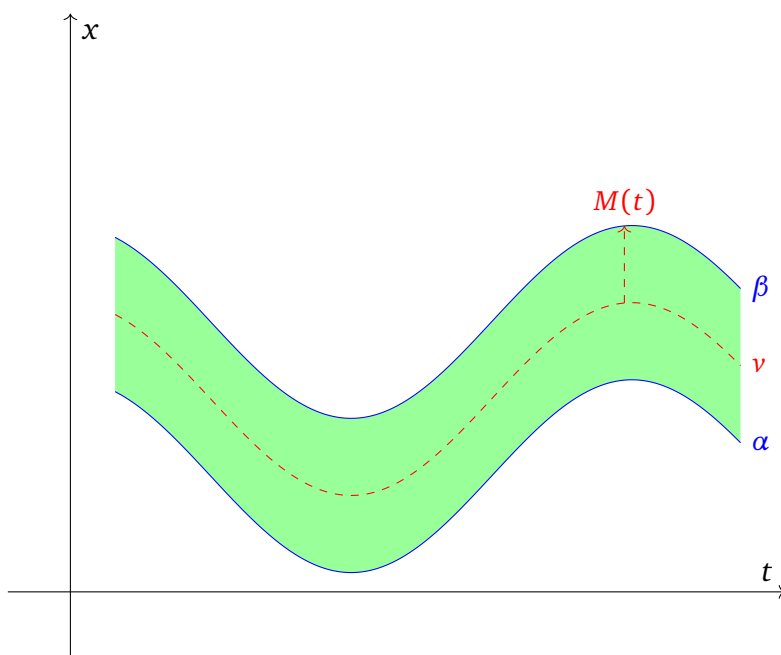


Fig. 2.3. Con líneas a trazos podemos ver como se determina o par (v, M) a partir das sub e sobresoluciones α e β .

polo menos unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq M(t),$$

para todo $t \in I$.

Demostración. Sexa (v, M) un tubo solución de (2.2). Para $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$, definimos

$$\tilde{x}(t, x) = \begin{cases} \frac{M(t)(x - v(t))}{\|x - v(t)\|} + v(t), & \text{se } \|x - v(t)\| > M(t), \\ x, & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Consideremos agora o problema modificado

$$u'(t) = \tilde{f}(t, x) \text{ c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = u_0, \quad (2.5)$$

onde $\tilde{f}(t, x) = f(t, \tilde{x}(t, x))$.

Observemos que unha unha solución u de (2.5) é un punto fixo do operador

$$L_0^{-1} \circ N_{\tilde{f}} : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n),$$

onde $L_0 : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, definido como $L_0(u)(t) = u(t) - u(0)$, é un operador continuo e invertible. Dado que, por hipótese, f é unha función Carathéodory, \tilde{f} tamén

é Carathéodory, o cal implica, xunto co Lema 2.25, que $N_{\tilde{f}}$ é continuo e compacto. Deducimos entón que o operador $L_0^{-1} \circ N_{\tilde{f}}$ tamén é continuo e compacto. Empregando agora o Teorema 2.21, obtemos a existencia dun punto fixo de $L_0^{-1} \circ N_{\tilde{f}}$ e, polo tanto, da existencia dunha solución u do problema (2.5).

Para rematar, vexamos que unha solución u de (2.5) é solución do problema (2.2). Para iso, chega con demostrar que $\|u(t) - v(t)\| \leq M(t)$, para todo $t \in I$. Así, se

$$t \in \{s \in I : \|u(s) - v(s)\| > M(s)\},$$

grazas á condición (1) da Definición 2.30 e ao Lema 2.31, temos que

$$\begin{aligned} & \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t) \rangle - M'(t) \|u(t) - v(t)\| \\ &= \begin{cases} \frac{\|u(t) - v(t)\| \langle \tilde{x}(t, x(t)) - v(t), f(t, \tilde{x}(t, x(t))) - v'(t) \rangle}{M(t)} & \text{se } M(t) > 0, \\ -M'(t) \|u(t) - v(t)\|, & \\ \langle u(t) - v(t), f(t, u(t)) - v'(t) \rangle - M'(t) \|u(t) - v(t)\|, & \text{se } M(t) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

do que se segue que

$$\langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t) \rangle - M'(t) \|u(t) - v(t)\| \leq 0.$$

Daquela, se $s = u - v$, empregando o Lema 2.32 obtemos que $\|u(t) - v(t)\| \leq M(t)$, para todo $t \in I$, co cal concluímos a proba. ■

Tal como ocorreu na demostración do Teorema 2.27, o feito esencial que posibilita a proba do Teorema 2.33 é a proxección que se fai dos puntos exteriores ao tubo sobre a fronteira do mesmo para definir \tilde{f} , de xeito que esta sexa limitada. A partir dese punto, as demostracións dos Teoremas 2.27 e 2.33 só se diferencian na forma de ver que a solución está comprendida na rexión axeitada.

Resulta de grande interese comentarmos que o método das sub e sobresolucións e dos tubos solución comparten moitas das súas características máis importantes. Entre as súas analoxías, cabe destacar o feito de podermos definir tubos solución para o problema periódico (2.4) [10, Definición 3.7], obtendo un resultado análogo ao Teorema 2.33 [10, Teorema 3.9].

Tamén é posible falar do método dos tubos solución estritos, tanto para o problema inicial [10, Definición 5.2] como para o periódico [10, Definición 3.10]. Con respecto a estas nocións, debemos de destacar que tamén temos resultados de existencia e multiplicidade de solución para os problemas (2.2) e (2.4) [10, Teoremas 5.3 e 3.14].

No que respecta á xeometría da rexión na que procurar solucións, tanto no método dos tubos solución coma nos vistos na Sección 2.2 esta queda completamente determinada polo par (v, M) . A diferenza existente con respecto ao método das sub e sobresolucións consiste en como se empregan as funcións en cuestión para chegar ata a mencionada rexión.

Unha última observación coa que daremos por finalizada esta sección é que nas demostracións dos Teoremas 2.27 e 2.33 a proxección do exterior da rexión considerada sobre a fronteira da mesma resulta de vital importancia para que os métodos funcionen. Tendo en conta este feito, cabe preguntarse ata que punto é posible considerar rexións máis abstractas que permitan seguir aplicando este proceso. No vindeiro capítulo veremos como se resolve esta cuestión a través das denominadas rexións solución.

3. O método das rexións solución

Neste capítulo explotaremos a estratexia empregada nos métodos xa introducidos, isto é, procurar rexións nas que buscar solucións dun problema diferencial dado a partir dun conxunto de aplicacións cunhas determinadas propiedades. Introduciremos, así, o concepto de rexión solución. A diferenza principal do método que veremos de contado coas sub e sobresolucións e cos tubos solución é que a xeometría das rexións solución pode ser moito máis abstracta. Isto será froito da xeneralización levada a cabo sobre as funcións que determinan ditas rexións.

3.1. Rexións solución

O concepto de rexión solución apareceu por primeira vez da man de Frigon en [9]. Seguindo na liña dos tubos solución, a idea que dita autora tivo foi considerar rexións o máis xenéricas posible ás que se lles poida asociar un par de aplicacións. Este par, ao xeito dos métodos vistos con anterioridade, terá que ser tal que unha das funcións se encargue da xeometría de ditas rexións e outra se ocupe directamente da proxección dos puntos exteriores sobre as fronteiras das mesmas.

Imos ver logo o que é unha rexión solución. A diferenza de ocasións anteriores, agora precisaremos de máis conceptos e resultados previos para chegar ata dita noción.

Tal como fixemos nas seccións anteriores, os espazos de funcións considerados serán $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$, $W_{\text{loc}}^{1,1}(J, \mathbb{R})$, $L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ e $L^1(I, \mathbb{R}^n)$, e denotaremos $I := [0, T]$, con $T \in \mathbb{R}^+$. Ademais, recordemos que, se $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e dado $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, denotaremos

$$A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in A\},$$

e

$$A^x := \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in A\}.$$

Así, se consideramos as inclusións naturais $i_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $i^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tal que $i_t(x) = i^x(t) = (t, x)$, entón temos que $A_t = (i_t)^{-1}(A)$ e $A^x = (i^x)^{-1}(A)$. Do mesmo xeito, tamén traballaremos coas proxeccións naturais $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\pi_1(t, x) = t$ e $\pi_2(t, x) = x$. Denotaremos tamén por $\frac{\partial f}{\partial t}$ a derivada parcial de f con respecto da variable t e por $\nabla_x f$ o vector de derivadas parciais de f con respecto de $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Comecemos considerando o problema

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{c.t.p. } t \in I, \quad u \in \mathcal{B}, \quad (3.1)$$

onde $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é unha función Carathéodory e \mathcal{B} denota as condicións de valor inicial, isto é,

$$\mathcal{B} = \{u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n) : u(0) = r\}, \quad (3.2)$$

ou as condicións de fronteira periódicas,

$$\mathcal{B} = \{u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n) : u(0) = u(T)\}. \quad (3.3)$$

Resaltemos que, tanto no método das sub e sobresolucións como no dos tubos solución, só demostramos os resultados relativos aos problemas de valor inicial, co fin de ilustrarmos sucintamente a natureza e os procedementos a seguir en ditos métodos. Agora, dado que as rexións solución conforman o tema principal do presente traballo, contemplaremos tanto condicións de valor inicial como de fronteira, aportando dese xeito a maior completude posible ao documento*.

Tal como fixemos nas Seccións 2.2 e 2.3, empregaremos a teoría do grao para procurar puntos fixos dun determinado operador e así demostrar a existencia de solución do problema (3.1). Para iso seranos de grande utilidade o Lema 2.25 visto na Sección 2.3.

O noso obxectivo non é só probar a existencia de solución do problema (3.1), senón tamén garantir que esta se atopa nunha determinada zona. O seguinte resultado seranos de moita axuda para iso.

Lema 3.1 ([9, Lema 2.3]). *Sexa $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ unha aplicación continua e $J = \{t \in I : 0 < w(t)\}$. Supoñamos que*

- (1) $w \in W_{\text{loc}}^{1,1}(J, \mathbb{R})$;
- (2) $w'(t) \leq 0$ c.t.p. $t \in J$;
- (3) unha das seguintes condicións se satisfai:
 - a) $w(a) \leq 0$;
 - b) $w(a) \leq w(b)$.

Daquela, $w(t) \leq 0$, para todo $t \in I$, ou existe $k > 0$ tal que $w(t) = k$, para todo $t \in I$.

Imos introducir a continuación a definición de rexión admisible. Este concepto será de vital importancia nos vindeiros resultados, pois ditos conxuntos serán os candidatos a ser rexións solución.

Definición 3.2. Diremos que un conxunto $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ é unha *rexión admisible* se existen dúas aplicacións continuas $h : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $p = (p_1, p_2) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow I \times \mathbb{R}^n$ satisfacendo as seguintes condicións:

- (H1) $R = \{(t, x) : h(t, x) \leq 0\}$ está limitado e, para todo $t \in I$, $R_t \neq \emptyset$;
- (H2) a aplicación h ten derivadas parciais en (t, x) para case todo t e todo x con $(t, x) \in R^c := (I \times \mathbb{R}^n) \setminus R$, e $\frac{\partial h}{\partial t}, \nabla_x h$ son aplicacións localmente Carathéodory en R^c ;

*Cando no Capítulo 4 presentemos os resultados propios comentados na introdución, non exporemos as súas demostracións por ser esencialmente as mesmas que as deste apartado.

(H3) p está limitada, $p(t, x) = (t, x)$, para todo $(t, x) \in R$, e o conxunto

$$\{t \in I : \langle \nabla_x h(t, x), p_2(t, x) - x \rangle \geq 0 \text{ para algún } x \in R_t\}$$

ten medida cero.

Ao par (h, p) chamáremolo *par admisible* asociado a R .

Observación 3.3. A desigualdade relativa á condición (H3) da Definición 3.5 aparece escrita en [9] da seguinte maneira:

$$\langle \nabla_x h(t, x), p_2(t, x) - x \rangle < 0 \quad \text{c.t.p. } t \text{ e para todo } x, \text{ con } (t, x) \in R^c.$$

Ámbalas dúas desigualdades son equivalentes, se ben nos decantamos pola súa formulación en termos de medida por ser esta máis clara e cómoda.

Observación 3.4. Convén aclararmos tamén que unha rexión admisible pode admitir máis dun par admisible.

O noso interese agora é dar condicións que aseguren a existencia de solución de (3.1) nunha rexión admisible axeitada. Con este fin, imos introducir de contado a noción de rexión solución de (3.1).

Definición 3.5. Un conxunto $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ dise unha *rexión solución* de (3.1) se é unha rexión admisible con par asociado (h, p) satisfacendo:

(1) o conxunto

$$\left\{ t \in I : \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla_x h(t, x), f(p(t, x)) \rangle > 0 \text{ para algún } x \text{ con } (t, x) \in R \right\} \quad (3.4)$$

ten medida cero.

e unha das seguintes condicións:

(2) se \mathcal{B} denota (3.2), entón $h(0, r) \leq 0$;

(2') se \mathcal{B} denota (3.3), daquela $h(0, x) \leq h(T, x)$, para todo x tal que $(0, x) \notin R$.

Como é de esperar, a rexión comprendida entre un par de sub e sobresolucións ou a definida por un tubo solución son rexións solución [9, Exemplos 4.2 e 4.3]. Non obstante, xa podemos apreciar, á vista da Definición 3.5, que a xeometría das rexións solución pode ser moito máis libre ca nos casos previos. Na Figura 3.1 podemos ver unha posible rexión solución que non pode ser descrita por tubos ou sub e sobresolucións.

Vexamos entón que se existe unha rexión solución R asociada ao problema (3.1), daquela poderemos atopar unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ de forma que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$. O procedemento a seguir será moi similar ao que se levou a cabo para demostrar os Teoremas 2.27 e 2.33. Primeiro precisaremos modificar o problema (3.1), para logo procurar puntos fixos dun certo operador e finalmente demostrar que a solución atopada se encontra dentro da rexión.

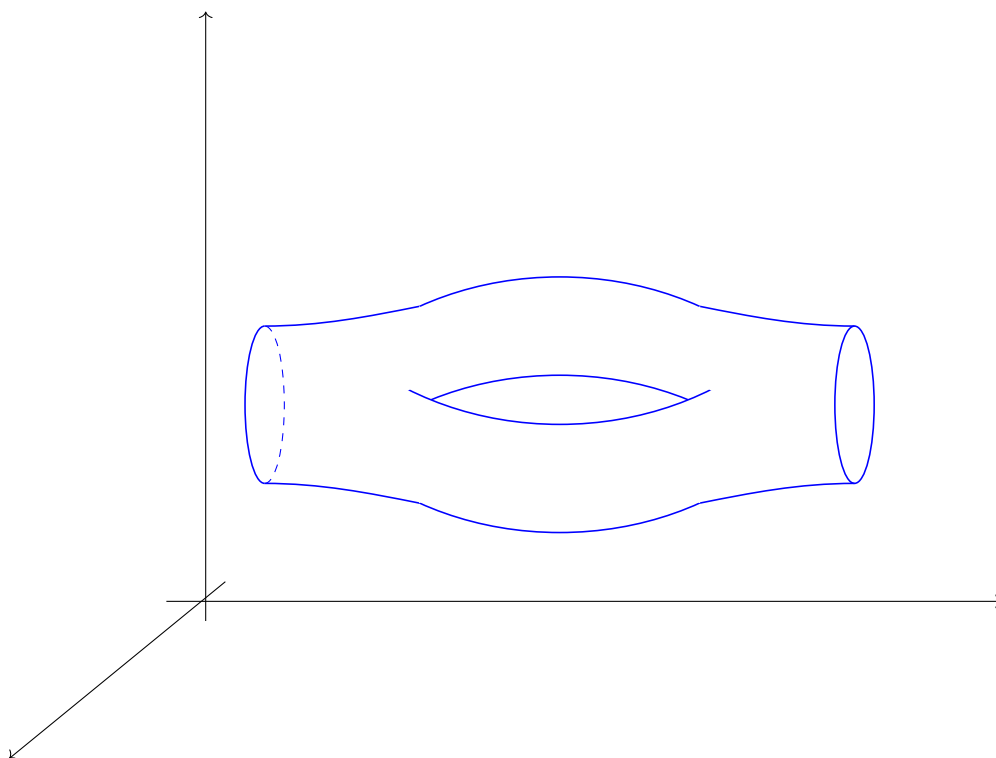


Fig. 3.1. Exemplo de conxunto que non pode ser descrito por un tubo (v, M) nin por un par de sub e sobresolucións α e β .

Dada a complexidade adquirida a través da xeneralidade das rexións solución, imos ver xa as modificacións do problema (3.1) para o caso de valor inicial e o de fronteira, e desta forma non facer demasiado extensa a demostración que presentaremos de contado.

Sexa pois R unha rexión admisible de (3.1) e (h, p) un par asociado. Para cada $\lambda \in [0, 1]$, consideremos as seguintes familias de problemas:

$$u'(t) = \lambda f_R(t, u(t)) \quad \text{c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = r, \quad (3.5)$$

se \mathcal{B} denota (3.2), e

$$u'(t) = \lambda f_R(t, u(t)) + \frac{1-\lambda}{T} \int_0^T f_R(t, u(t)) dt \quad \text{c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = u(T), \quad (3.6)$$

se \mathcal{B} denota (3.3), onde $f_R : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define como

$$\begin{cases} f(t, x) & \text{se } (t, x) \in R, \\ f(p(t, x)) - c(t)(x - p_2(t, x)) & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

con $c \in L^1(I, \mathbb{R})$ escollida de tal xeito que

$$c(t) > \|f(p(t, x))\|,$$

para case todo $t \in I$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Os problemas (3.5) e (3.6) terán asociados cadanseu operador $\mathcal{J}, \mathcal{P} : [0, 1] \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, definidos por

$$\mathcal{J}(\lambda, u) = r + \lambda N_{f_R}(u)$$

e

$$\mathcal{P}(\lambda, u)(t) = u(0) - \frac{1 + \lambda t}{T} N_{f_R}(u)(T) + \lambda N_{f_R}(u)(T), \quad (3.7)$$

respectivamente, onde N_{f_R} é o operador asociado a f_R definido no Lema 2.25. Debemos de remarcar que a xeneralidade do par (h, p) tamén provoca que os operadores correspondentes a cada problema non sexan tan elementais coma os das seccións anteriores. Este é o motivo polo que decidimos definilos fóra das demostracións.

Vexamos entón os dous resultados que nos garanten a existencia de solución dos problemas (3.5) e (3.6).

Proposición 3.6 ([9, Proposición 5.2]). *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e (h, p) un par admisible asociado a unha rexión solución R do problema (3.1), con \mathcal{B} denotando (3.3). Daquela, para todo $\lambda \in [0, 1]$, o problema (3.6) ten polo menos unha solución. Ademais, existe*

$$M > \max\{\|x\| : (t, x) \in R, \text{ para algún } t \in I\}$$

tal que o índice de punto fixo

$$\text{Ind}(\mathcal{P}(\lambda, \cdot), \mathcal{U}) = (-1)^n,$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$, con $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) : \|u\|_\infty < M\}$.

Demostración. Primeiramente observemos que o feito de que f sexa unha función Carathéodory e a condición (3) da Definición 3.2 implican que f_R tamén é unha función Carathéodory. Daquela, en virtude do Lema 2.25, obtemos que \mathcal{P} é un operador continuo e compacto. Vexamos entón que os puntos fixos de \mathcal{P} son solucións de (3.6). Así, se $u = \mathcal{P}(\lambda, u)$,

$$u(t) = u(0) - \frac{1 + \lambda t}{T} \int_0^T f_R(s, u(s)) ds + \lambda \int_0^t f_R(s, u(s)) ds, \quad (3.8)$$

para todo $t \in I$. En particular, para $t = 0$ e $t = T$ temos que

$$u(0) = u(0) - \frac{1}{T} \int_0^T f_R(s, u(s)) ds = u(T),$$

e, polo tanto, que

$$N_{f_R}(u)(T) = \int_0^T f_R(s, u(s)) ds = 0. \quad (3.9)$$

Logo, a partir de (3.8) e de (3.9) obtemos que, para case todo $t \in I$,

$$u'(t) = \lambda \left(f_R(t, u(t)) - \frac{1}{T} \int_0^T f_R(s, u(s)) ds \right) = \lambda f_R(t, u(t)) + \frac{1-\lambda}{T} \int_0^T f_R(s, u(s)) ds,$$

polo que u é solución de (3.6).

Sexa agora $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$M > 1 + \max\{\|p_2(t, x)\| : (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n\}.$$

Imos ver que $\|u\|_\infty < M$ para calquera solución u do problema (3.6). Sexa m tal que

$$M > m > 1 + \max\{\|p_2(t, x)\| : (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n\}$$

e u unha solución de (3.6) para algún $\lambda \in [0, 1]$. Por unha parte, se $\lambda = 0$ e

$$\{t \in I : \|u(t)\| > m\} \neq \emptyset,$$

dada a elección de m e por (3.9), deducimos que $u \equiv k$, con $\|k\| > m$, e

$$0 = \int_0^T f_R(s, u(s)) ds = \int_0^T [f(p(s, k)) + c(s)(p_2(s, k) - k)] ds.$$

Pero da igualdade anterior séguese que

$$\|k\| \|c\|_{L^1} \leq \int_0^T c(s) (\|p_2(s, k)\| + 1) ds < m \|c\|_{L^1},$$

o cal é unha contradición.

Por outra banda, se $\lambda \in (0, 1]$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|' &= \left\langle \frac{u(t)}{\|u(t)\|}, u'(t) \right\rangle = \left\langle \frac{u(t)}{\|u(t)\|}, f_R(t, u(t)) \right\rangle \\ &= \lambda \left\langle \frac{u(t)}{\|u(t)\|}, f(p(t, u(t))) - c(t)(u(t) - p_2(t, u(t))) \right\rangle \\ &\leq \lambda c(t) (1 + \|p_2(t, u(t))\| - \|u(t)\|) < 0, \end{aligned}$$

para case todo punto de $\{t \in I : \|u(t)\| > m\}$. Logo, en virtude do Lema 3.1, obtemos que $\|u(t)\| < m < M$, para todo $t \in I$, tal como queríamos probar.

Para rematar, sexa

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) : \|u\|_\infty < M\}.$$

Empregando a propiedade de homotopía do índice (afirmación (3) do Teorema 2.23) e o feito de que para toda solución u do problema (3.6), $\|u\|_\infty < M$, deducimos que

$$\text{Ind}(\mathcal{P}(\lambda, \cdot), \mathcal{U}) = \text{Ind}(\mathcal{P}(0, \cdot), \mathcal{U}),$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Notemos ademais que

$$\mathcal{P}(0, u) = u(0) - \frac{1}{T} \int_0^T f_R(s, u(s)) \, ds \in \mathbb{R}^n$$

e que $\mathcal{U} \cap \mathbb{R}^n = B(0, M)$, entendendo $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ como o conxunto das funcións constantes. Logo, pola propiedade de contracción do índice de punto fixo (afirmación (6) do Teorema 2.23), temos que

$$\text{Ind}(\mathcal{P}(0, \cdot), \mathcal{U}) = \text{Ind}(\mathcal{P}(0, \cdot), B(0, M)).$$

Definamos entón $\mathcal{P}_0 : [0, 1] \times \overline{B(0, M)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\mathcal{P}_0(\lambda, x) = \lambda \mathcal{P}(0, x) + (1 - \lambda)2x.$$

Imos probar que $\mathcal{P}_0(\lambda, x) \neq x$, para todo $(\lambda, x) \in [0, 1] \times \overline{B(0, M)}$. doutro xeito, se existise $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| = M$ e $\mathcal{P}_0(\lambda, x) = x$, dada a definición de f_R e a escolla da función c e da constante M , teríamos que

$$\begin{aligned} x = \mathcal{P}_0(\lambda, x) &= 2(1 - \lambda)x + \lambda \left(x - \frac{1}{T} \int_0^T f_R(s, x) \, ds \right) \\ &= 2(1 - \lambda)x + \lambda \left(x - \frac{1}{T} \int_0^T f(p(s, x)) + c(t)(p_2(s, x) - x) \, ds \right) \\ &= \left(2 - \lambda + \frac{\lambda \|c\|_{L^1}}{T} \right) x - \frac{\lambda}{T} \int_0^T f(p(s, x)) + c(t)p_2(s, x) \, ds. \end{aligned}$$

Pero entón,

$$\begin{aligned} M \left(1 - \lambda + \frac{\lambda \|c\|_{L^1}}{T} \right) &= \left(1 - \lambda + \frac{\lambda \|c\|_{L^1}}{T} \right) \|x\| = \left\| \frac{\lambda}{T} \int_0^T f(p(s, x)) + c(t)p_2(s, x) \, ds \right\| \\ &< \frac{\lambda}{T} \int_0^T c(t) + c(t)(M - 1) \, ds = \frac{M\lambda \|c\|_{L^1}}{T}, \end{aligned}$$

o cal é unha contradición. Logo podemos empregar a propiedade de homotopía do índice, e obtemos que

$$\text{Ind}(\mathcal{P}(1, \cdot), B(0, M)) = \text{Ind}(\mathcal{P}(0, \cdot), B(0, M)) = \text{Ind}(2\text{Id}, B(0, M)) = (-1)^n,$$

e, consecuentemente, que

$$\text{Ind}(\mathcal{P}(\lambda, \cdot), \mathcal{U}) = (-1)^n,$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$. Daquela, $\mathcal{P}(\lambda, \cdot)$ ten un punto fixo para todo $\lambda \in [0, 1]$ e, polo tanto, o problema (3.6) ten solución para todo $\lambda \in [0, 1]$. ■

Como se pode observar, a parte da demostración anterior correspondente a probar existencia de solución de (3.6) é análoga á dos Teoremas 2.27 e 2.33. Simplemente consiste en aproveitar o feito de que f_R é limitada e procurar puntos fixos do operador (3.7). De novo, resaltemos que o feito fundamental para que o anterior funcione consiste na forma en que a aplicación p proxecta os puntos que están no “exterior” da rexión sobre a fronteira da mesma.

Por outra parte, notemos que a Proposición 3.6 só garante a existencia de solución do problema modificado (3.6), pero non asegura que dita solución se atope dentro da rexión R . Porén, si que se proban unha serie de propiedades técnicas relativas ao índice de punto fixo que máis adiante empregaremos para demostrar tal cousa.

Con respecto ao anterior, cabe dicir tamén que a xeneralidade das rexións solución obriga a empregar ferramentas do grao topolóxico e do índice máis sutís, como poden ser as propiedades de contracción e homotopía. Tal cousa débese a que xa non se pode abordar o problema de forma tan xeométrica coma no caso das sub e sobresolucións ou dos tubos solución, sendo así precisos argumentos de tipo topolóxico.

Un resultado similar para o problema (3.5) é o que segue, que non probaremos por analogía co anterior.

Proposición 3.7 ([9, Proposición 5.3]). *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e (h, p) un par admisible asociado a unha rexión solución R do problema (3.1), con \mathcal{B} denotando (3.2). Daquela, para todo $\lambda \in [0, 1]$, o problema (3.5) ten polo menos unha solución. Ademais, existe*

$$M > \max\{\|x\| : (t, x) \in R \text{ para algún } t \in I\}$$

tal que o índice de punto fixo

$$\text{Ind}(\mathcal{P}(\lambda, \cdot), \mathcal{U}) = 1,$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$, con $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) : \|u\|_\infty < M\}$.

Pois ben, grazas ás Proposicións 3.6 e 3.7 demostraremos de forma moi breve e elegante o seguinte teorema, obtendo así un resultado para rexións solución análogo aos Teoremas 2.27 e 2.33 para sub e sobresolucións e tubos, respectivamente.

Teorema 3.8 ([9, Teorema 5.1]). *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e supoñamos que existe unha rexión solución R do problema (3.1). Daquela existe $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ solución de (3.1) de tal xeito que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.*

Demostración. Consideremos primeiro o caso no que \mathcal{B} denota as condicións (3.3). Como xa vimos con anterioridade, a Proposición 3.6 garántenos a existencia de solución de (3.6) para $\lambda = 1$. Logo, a partir das Definicións 3.2 e 3.4, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[h(t, u(t))] &= \frac{\partial h}{\partial t}(t, u(t)) + \langle \nabla_x h(t, u(t)), u'(t) \rangle \\ &= \frac{\partial h}{\partial t}(t, u(t)) + \langle \nabla_x h(t, u(t)), f(p(t, u(t))) + c(t)(p_2(t, u(t)) - u(t)) \rangle \\ &< 0. \end{aligned}$$

Como $u(0) = u(T)$, a desigualdade anterior, xunto co Lema 3.1 e coa Definición 3.5, garántenos que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$. Daquela, u é solución de (3.1), dado que $p = \text{Id}$ en R .

O caso no que \mathcal{B} denota as condicións iniciais (3.2) é análogo ao anterior, co cal podemos concluír a proba. ■

Chegados a este punto, podemos facernos diversas preguntas. A primeira delas trata sobre a natureza analítica e topolóxica das rexións admisibles. Sería de grande interese podermos caracterizar ditas rexións dalgunha forma a partir das propiedades que estas poidan ter. Tal como se presenta a teoría das rexións solución ata o de agora, parece que non podemos saber se un conxunto é rexión admisible a menos que coñezamos o par admisible axeitado, e isto pode ser moi restritivo.

Outra cuestión que pode xurdir de forma natural é se se pode, ao igual que vimos na Sección 2.2, considerar problemas iniciais e de fronteira máis xerais. Pois ben, na seguinte sección veremos que ámbalas dúas preguntas teñen resposta positiva. Ollaremos de que xeito podemos caracterizar unha rexión admisible e ademais trataremos problemas con condicións iniciais e de fronteira lineares.

3.2. Condicións lineares

Tal e como dixemos ao remate da sección anterior, resultaría de grande interese poder ampliarmos o método das rexións solución, de xeito que as rexións admisibles poidan ser caracterizadas a partir dalgunha das súas propiedades e considerando problemas con condicións iniciais e de contorno máis abstractas.

A teoría das rexións solución vista na Sección 3.1 foi xeneralizada por Tojo en [26] atendendo a varios aspectos, entre os cales podemos destacar as propiedades analíticas e topolóxicas das rexións admisibles e a consideración de condicións iniciais e de fronteira máis xerais.

De novo, trataremos cos mesmos espazos de funcións que na Sección 3.1. Lembremos tamén que por I estamos a denotar o intervalo $[0, T]$, con $T \in \mathbb{R}^+$.

De aquí en adiante, trataremos condicións lineares xerais do tipo

$$\Gamma(u - u(0)) = r, \tag{3.10}$$

onde $r \in \mathbb{R}$ e $\Gamma : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é un funcional linear (que pode ser pensado como $\Gamma : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ actuando sobre cada compoñente) tal que $K := \Gamma(1) \neq 0$ (1 entendido como a función constante 1 en I). Notemos que, polo Teorema de Representación de Riesz-Markov-Kakutani [2, Teorema 7.2.4], existe unha única medida de Borel regular μ en I tal que $\Gamma u = \int u \, d\mu$ para todo $u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Ademais, as condicións (3.10) xeneralizan as condicións (3.3). Para ver isto, chega con tomar $r = 0$ e $\Gamma u = u(T)$ (observemos que $\Gamma(1) = 1 \neq 0$).

Tamén traballaremos con condicións do tipo

$$\Gamma u = r. \quad (3.11)$$

É obvio que as condicións (3.11) xeneralizan as condicións (3.2) definindo Γ como no caso anterior. Unha observación importante é que as condicións (3.10) e (3.11), aínda que se superpoñen nalgúns casos, non son equivalentes entre si.

Para comezar, vexamos a xeneralización da Definición 3.5 da que falamos ao comezo da sección.

Definición 3.9. Diremos que un conxunto $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ é unha *rexión admisible feble* se existen dúas aplicacións $h : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $p = (p_1, p_2) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow I \times \mathbb{R}^n$ satisfacendo (H1) e (H2) da Definición 3.2 e

(H3') p está limitada, $p(t, x) = (t, x)$, para todo $(t, x) \in R$, e o conxunto

$$\{t \in I : \langle \nabla_x h(t, x), p_2(t, x) - x \rangle > 0 \text{ para algún } x \in R_t\}$$

ten medida cero.

Diremos que (h, p) é un *par admisible feble* asociado a R .

Observación 3.10. Como consecuencia da definición anterior, podemos facer as seguintes consideracións:

- (1) se (h, p) é un par admisible feble e $\beta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^+)$, daquela (\tilde{h}, p) tamén é un par admisible feble, onde $\tilde{h}(t, x) = \beta(t)h(t, x)$. Entón, se $h(t, R_t)$ está limitada para todo $t \in I$, tomando β tal que $\beta(t) < 1/\sup \|h(t, R_t)\|$, obtemos que \tilde{h} , definida coma antes, está limitada;
- (2) se (h_k, p) é un par admisible feble para $k = 1, 2$, entón $(h_1 + h_2, p)$ tamén é un par admisible feble.

Tamén debemos de apreciar que a Definición 3.2 presentada en [9] é máis restritiva que a Definición 3.9, dado que a desigualdade relativa á condición (H3') non é estrita no primeiro caso (recordemos que estamos a expresar as desigualdades en termos de medida). Máis adiante veremos que tal restrición non é precisa para chegar aos resultados vistos na Sección 3.1, sempre que engadamos unha condición a maiores, (H4), que veremos máis tarde.

Imos ver agora algúns resultados precisos para poder caracterizar as rexións admisibles febles de acordo ás propiedades analíticas e topolóxicas das mesmas. Antes de comezar, cabe resaltar que en [26] non se fala de rexións admisibles febles, senón de rexións admisibles, definidas polo autor como subconxuntos compactos de $I \times \mathbb{R}^n$ tales que a súa proxección sobre I é distinta do baleiro [26, Definición 2.3]. Logo diso, próbase que toda rexión admisible feble admite un par admisible feble [26, Teorema 2.10], quedando así estas perfectamente caracterizadas. A presentación dos resultados que imos facer aquí difire da feita en [26], se ben, como veremos no Teorema 3.14, ambas son equivalentes.

Como xa comentamos na Definición 2.1 vista na Sección 2.1, se $C \subset \mathbb{R}^n$ é un conxunto convexo, entón P_C é unha función continua. Ademais, cando estamos a traballar con subconxuntos convexos de \mathbb{R}^n (en xeral, dun espazo de Hilbert), d e P gardan unha relación moi interesante que nos será de grande axuda. Esta queda recollida no seguinte enunciado.

Teorema 3.11 ([13, páx. 63]). *Sexa C un subconxunto convexo e pechado dun espazo de Hilbert H , e sexa $\varphi(x) := \frac{1}{2}d_C(x)^2$ para todo $x \in H$. Daquela, φ é unha función convexa e \mathcal{C}^1 en H e $\nabla\varphi(x) = x - P_C(x)$.*

Tamén nos será moi útil o seguinte resultado, que afirma que todo subconxunto pechado de \mathbb{R}^n é a preimaxe do cero dunha determinada aplicación.

Proposición 3.12 ([15, Proposición 3.3.6]). *Sexa $R \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto pechado. Entón existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$ tal que $\varphi^{-1}(0) = R$.*

Observación 3.13. Notemos que na Proposición 3.12, como φ alcanza o seu mínimo absoluto en cada punto de R , entón $\nabla\varphi(x) = 0$, para todo $x \in R$.

Con todos estes ingredientes chegamos a un dos resultados principais de [26], no cal se caracterizan as rexións admisibles febles.

Teorema 3.14 ([26, Teorema 2.10]). *Sexa $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ un conxunto compacto tal que a proxección de R sobre I é sobrexectiva. Entón R ten un par admisible feble (h, p) .*

Demostración. Sexa $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\pi_2(R) \subset C := B[0, r]$. Sexa $D := B(0, r + 1)$ e $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ a función dada pola Proposición 3.12 para $R \cup (I \times (\mathbb{R}^n \setminus D))$. Definimos

$$h(t, x) := \begin{cases} \varphi(t, x), & (t, x) \in I \times C, \\ [1 - d_C(x)^2]\varphi(t, x) + \frac{1}{2}d_C(x)^2, & (t, x) \in I \times (D \setminus C), \\ \frac{1}{2}d_C(x)^2, & (t, x) \in I \times (\mathbb{R}^n \setminus D). \end{cases}$$

h é de clase \mathcal{C}^1 e $R = h^{-1}((-\infty, 0])$, logo xa temos que se satisfán as condicións (H1) e (H2). De feito,

$$\nabla_x h(t, x) = \begin{cases} \nabla_x \varphi(t, x), & (t, x) \in I \times C, \\ [1 - d_C(x)^2]\nabla_x \varphi(t, x) + [1 - 2\varphi(t, x)][x - P_C(x)], & (t, x) \in I \times (D \setminus C), \\ x - P_C(x), & (t, x) \in I \times (\mathbb{R}^n \setminus D). \end{cases}$$

Ademais, $\nabla_x h(t, x) = 0$ para todo $(t, x) \in R$ (véxase a Observación 3.13).

Sexa agora $p = (p_1, p_2) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow I \times \mathbb{R}^n$, con $p_1(t, x) := t$ e $p_2(t, x) := x - \nabla_x h(t, x) =$

$$\begin{cases} x - \nabla_x \varphi(t, x), & (t, x) \in I \times C, \\ 2[x - P_C(x)]\varphi(t, x) - [1 - d_C(x)^2]\nabla_x \varphi(t, x) + P_C(x), & (t, x) \in I \times (D \setminus C), \\ P_C(x), & (t, x) \in I \times (\mathbb{R}^n \setminus D). \end{cases}$$

p é continua, limitada e $p(t, x) = (t, x)$, para todo $(t, x) \in R$. Ademais,

$$\langle \nabla_x h(t, x), p_2(t, x) - x \rangle = -\|\nabla_x h(t, x)\|^2 \leq 0,$$

logo (H3') tamén se satisfai. ■

Visto o resultado anterior, debemos de resaltar que a definición de rexión admisible dada en [9] non require que esta sexa un conxunto compacto, se ben é unha consecuencia directa das condicións (H1)-(H3). Tamén é importante observar que en [9] se mostra, a través de diversos exemplos, a liberdade xeométrica que unha rexión admisible pode ter. Nese aspecto, o Teorema 3.14 permite contemplar esa xeneralidade de forma moito máis directa.

Podemos apreciar tamén que a aplicación p goza do carácter “proyectivo” necesario para empregar as técnicas xa vistas en seccións anteriores. Isto débese a que está construída a partir dunha proxección como tal. Un detalle a ter en conta sobre isto é que precisamos de conxuntos convexos para podermos empregar o Teorema 3.11 e definirmos así h e p tal e como facemos.

Unha vez xa caracterizadas as rexións admisibles febles, imos introducir o concepto de C -rexión solución.

Definición 3.15. Sexa $C \in \mathbb{R}^+$. Diremos que o par $(R, (h, p))$, onde $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ é unha rexión admisible feble e (h, p) é un par admisible feble asociado a R , é unha C -rexión solución do problema (3.1), se se cumpre que:

(1) O conxunto

$$\left\{ t \in I : \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla_x h(t, x), f(p(t, x)) \rangle > 0 \text{ para algún } x \text{ con } (t, x) \in R \right\}$$

ten medida cero;

(2) $h(0, u(0)) \leq 0$ ou $h(0, u(0)) \leq h(T, u(T))$ para todo $u \in \mathcal{B}$, con \mathcal{B} denotando as condicións (3.11) ou (3.10), respectivamente, e tal que $\|u\|_\infty \leq C$.

Notemos que en [9] se fala de rexións solución e non de C -rexións solución. Isto débese a que tal concepto é necesario para levar a cabo todos os resultados presentados en [26].

Como xa dixemos, en [9] a desigualdade relativa á condición (H3) da Definición 3.5 non é estrita. Logo, para poder obter os mesmos resultados ca en [9] precisaremos da seguinte condición, a maiores das xa vistas.

(H4) Sexa $(R, (h, p))$ unha rexión solución do problema (3.1). Daquela existe \hat{h} tal que $(R, (\hat{h}, p))$ é unha rexión solución de (3.1) e existen $t_1, t_2 \in I$ tal que $\hat{h}(t_1, x) = h(t_1, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{h}(t_2, x) \neq h(t_2, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus R_{t_2}$.

Vista a Observación 3.10, a condición (H4) non é tan restritiva como puidera parecer. Así, a través do seguinte resultado veremos unha condición suficiente para que se cumpra (H4).

Lema 3.16 ([26, Lema 3.5]). *Sexa $(R, (h, p))$ unha rexión solución do problema (3.1). Supoñamos que h está limitada e que (h, p) satisfai*

(1') existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ e $t_0 \in \text{Int}(I)$ tal que $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset \text{Int}(I)$ e

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla_x h(t, x), f(p(t, x)) \rangle \leq -\varepsilon,$$

para case todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e todo x con $(t, x) \notin R$.

Entón cúmprese (H4).

Con todo o anterior ao noso dispor, imos ver os resultados principais de existencia de solución do problema (3.1) presentados en [26].

Teorema 3.17 ([26, Teorema 4.5]). *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e (h, p) un par admisible feble asociado a unha rexión admisible feble R tal que $(R, (h, p))$ é unha C -rexión solución de (3.1). Supoñamos que (H4) se satisfai e sexa $M \in \mathbb{R}^+$. Daquela, o problema (3.1), con \mathcal{B} denotando (3.10), admite unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.*

Teorema 3.18 ([26, Teorema 4.9]). *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e (h, p) un par admisible feble asociado a unha rexión admisible feble R tal que $(R, (h, p))$ é unha C -rexión solución de (3.1). Supoñamos que (H4) se satisfai e sexa $M \in \mathbb{R}^+$. Daquela, o problema (3.1), con \mathcal{B} denotando (3.11), admite unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.*

A demostración dos Teoremas 3.17 e 3.18 é análoga á do Teorema 3.8 visto na Sección 3.1. A única diferenza radica na elección dos operadores asociados aos problemas modificados, pois estes veñen determinados polas condicións iniciais ou de contorno consideradas.

Se ben en [26] se presentan numerosas xeneralizacións que supoñen un avance considerable con respecto á teoría das rexións solución introducida en [9], nós* propuxémonos ir un paso máis alá e abordar algunhas das conxecturas que se recollen ao final de [26]. Así, no vindeiro capítulo estenderemos os resultados vistos nas Seccións 3.1 e 3.2 para tratar condicións iniciais e de contorno non lineares.

*Os profesores Frigon, Tojo e o autor.

4. Rexións solución e condicións non lineares

De acordo ao que comentamos ao remate do Capítulo 3, imos introducir agora unha serie de resultados propios non recollidos na literatura, mediante os que ampliaremos os enunciados de existencia de [9, 26] para condicións non lineares.

Os espazos de funcións cos que traballaremos neste capítulo seguirán a ser $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$, $W_{\text{loc}}^{1,1}(J, \mathbb{R})$, $L^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ e $L^1(I, \mathbb{R}^n)$, e denotaremos de novo $I := [0, T]$, con $T \in \mathbb{R}^+$. Consideremos entón problemas diferenciais do tipo

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{c.t.p. } t \in I, \quad u \in \mathcal{B},$$

onde \mathcal{B} denotará agora unha das seguintes condicións de fronteira:

$$L(u(0), u(T), u) = 0, \tag{4.1}$$

$$L(u(0), u(T), u) = u(T) - u(0), \tag{4.2}$$

con $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e $L : \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operador continuo pero non necesariamente linear. Observemos antes de comezar que, aínda que as condicións tratadas son de fronteira, as condicións (4.1)-(4.2) xeneralizan a todas as que se consideran en [9].

Do mesmo xeito que nas Seccións 3.1 e 3.2, o que pretendemos é dar condicións que garantan a existencia de solución de (3.1) nunha rexión admisible feble axeitada. Dado que agora as condicións de fronteira son un pouco máis reviradas, recordemos primeiro a definición de rexión solución de (3.1) adaptada a ditas condicións.

Definición 4.1. Un conxunto $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ dise unha *rexión solución* de (3.1) se é unha rexión admisible feble con par admisible feble asociado (h, p) satisfacendo as seguintes condicións:

(1) o conxunto

$$\left\{ t \in I : \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla_x h(t, x), f(p(t, x)) \rangle > 0 \text{ para algún } x \text{ con } (t, x) \in R \right\} \tag{4.3}$$

ten medida cero;

e, ademais, unha das seguintes condicións:

(2) se \mathcal{B} denota (4.1),

(a) $h(0, u(0)) \leq 0$ para todo $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$u(0) = p_2(0, u(0) - L(u(0), u(T), u));$$

(b) $L(u(0), u(T), u) = 0$ para todo $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$, e $u(0) = p_2(0, u(0) - L(u(0), u(T), u))$.

(2') se \mathcal{B} denota (4.2),

(a) $h(0, u(0)) \leq h(T, u(T))$ para todo $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(0, u(0)) \notin R$ e $u(T) - u(0) = \frac{t}{T} L((u(0), u(T), u))$, para algún $t \in [0, 1]$;

(b) a desigualdade en (2')(a) é estricta ou existe un conxunto medible $S \subset I$ tal que unha das desigualdades en (H3') ou (3.4) non é estricta en S .

O seguinte resultado, análogo aos Teoremas 3.8, 3.17 e 3.18, garántenos que a existencia dunha rexión solución asociada ao problema (3.1) asegura a existencia de solución de (3.1).

Teorema 4.2. *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory. Supoñamos que existe unha rexión solución, R , de (3.1). Daquela, o problema (3.1) ten unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.*

A demostración do resultado anterior é idéntica á do Teorema 3.8, escollendo os respectivos operadores axeitados ás condicións de fronteira consideradas nesta sección. Así, se \mathcal{B} denota (4.1), o operador correspondente será $\mathcal{J} : [0, 1] \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, definido como

$$\mathcal{J}(\lambda, u) = p_2(0, u(0) - L(u(0), u(T), u)) + \lambda N_{f_R}(u).$$

Noutro caso, se \mathcal{B} denota (4.2), o operador que tomaremos será $\mathcal{D} : [0, 1] \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, definido como

$$\mathcal{D}(\lambda, u)(t) = u(0) + \lambda N_{f_R}(u)(t) - \frac{(1 + \lambda t)}{T} (N_{f_R}(u)(T) - L_R(u(0), u(T), u)).$$

Dada a similitude das probas dos Teoremas 3.8 e 4.2, no canto de amosarmos a demostración do Teorema 4.2, imos ver unha serie de corolarios que nos mostrarán como tal resultado xeneraliza a outros enunciados vistos con anterioridade.

Corolario 4.3. *Sexa $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ unha rexión admisible feble, $r \in \mathbb{R}^n$ e $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory. Supoñamos que existe (h, p) un par admisible feble de R satisfacendo (1) da Definición 3.9 e*

$$h(0, r) \leq 0. \tag{4.4}$$

Daquela, (3.1), (4.1), con $L(x, y, u) = x - r$, ten unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.

Demostración. O resultado obtense do Teorema 4.2 se R é unha rexión solución de (3.1), con \mathcal{B} denotando (4.1), e $L(x, y, u) = x - r$. Así, o único que temos que comprobar é a condición (2) da Definición 4.1. Observemos que

$$p_2(0, x - L(x, y, u)) = p_2(0, x - (x - r)) = p_2(0, r).$$

Por hipótese, $h(0, r) \leq 0$. Logo, $(0, r) \in R$ e $p(0, r) = (0, r)$, co cal concluímos a demostración. ■

A través do Corolario 4.3 obtemos entón o resultado de existencia establecido en [9] para o problema (3.1) con condicións de valor inicial. Ademais diso, o Teorema 4.2 tamén xeneraliza o resultado de existencia para unha ecuación diferencial de primeira orde con condicións de fronteira non lineares vía o método de sub e sobresolucións, como veremos de contado.

Corolario 4.4. *Sexa $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función Carathéodory, $L : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ continuo e $\alpha, \beta \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ tal que*

- (1) $\alpha(t) \leq \beta(t)$, para todo $t \in I$;
- (2) $f(t, \beta(t)) \leq \beta'(t)$, para case todo $t \in I$, e $L(\beta(0), \beta(T), \beta) \geq 0$;
- (3) $f(t, \alpha(t)) \geq \alpha'(t)$, para case todo $t \in I$, e $L(\alpha(0), \alpha(T), \alpha) \leq 0$;
- (4) L é non decrecente con respecto de todas as súas variables (en particular, se $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ son tal que $u(t) \leq v(t)$ para todo $t \in I$, entón $L(x, y, u) \geq L(x, y, v)$).

Entón, (3.1), (4.1) ten unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$, con

$$R = \{(t, x) \in I \times \mathbb{R} : \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\}.$$

Demostración. Tal como se pode ver en [9] (Exemplos 3.2 e 4.2), o par (h, p) , con

$$h(t, x) = \left| x - \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{2} \right| + \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{2},$$

e

$$p(t, x) = \begin{cases} (t, x), & \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ (t, \beta(t)), & x > \beta(t), \\ (t, \alpha(t)), & x < \alpha(t), \end{cases}$$

é un par admisible de R que satisfai (1) da Definición 4.1.

Notemos que $p_2(0, x) \in [\alpha(0), \beta(0)]$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entón,

$$h(0, p_2(0, u(0) - L(u(0), u(T), u))) \leq 0,$$

para todo $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$. Logo, (2)(a) da Definición 4.1 satisfaise.

Sexa $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R})$ tal que $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$, para todo $t \in I$, e supoñamos que

$$u(0) - L(u(0), u(T), u) < \alpha(0).$$

Daquela,

$$\alpha(0) \leq u(0) < \alpha(0) + L(u(0), u(T), u) \leq \alpha(0) + L(\alpha(0), \alpha(T), \alpha) \leq \alpha(0),$$

o cal é unha contradición. De xeito similar, chegamos a outra contradición se supoñemos $u(0) - L(u(0), u(T), u) > \beta(0)$. Obtemos así que $u(0) - L(u(0), u(T), u) \in [\alpha(0), \beta(0)]$ e, polo tanto,

$$p_2(0, u(0) - L(u(0), u(T), u)) = u(0) - L(u(0), u(T), u).$$

Daquela, a condición (2)(b) da Definición 4.1 tamén se satisfai.

Chegamos entón a que R é unha rexión solución de (3.1), (4.1), polo que, a partir do Teorema 4.2, podemos concluír a proba. ■

O seguinte resultado tamén resulta de grande interese.

Corolario 4.5. *Sexa $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ unha rexión admisible feble, $\Gamma : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo e $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory. Supoñamos que existe un par admisible feble (h, p) de R satisfacendo (1) da Definición 3.9 e*

$$h(0, p_2(0, x)) \leq 0, \quad (4.5)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Daquela, (3.1), (4.1) ten unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$, con

$$L(x, y, u) = L(x, u) = x - p_2(0, \Gamma u + x).$$

Demostración. Probaremos o resultado empregando o Teorema 4.2. Para iso veremos que R é unha rexión solución de (3.1), (4.1). Sexa $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $u(0) = p_2(0, u(0) - L(u(0), u))$. Daquela,

$$u(0) = p_2(0, u(0) - L(u(0), u)) = p_2(0, p_2(0, \Gamma u + u(0))).$$

Logo, en virtude de (4.5), $h(0, u(0)) = h(0, p_2(0, u(0) - L(u(0), u))) \leq 0$, polo que a condición (2)(a) da Definición 4.1 se satisfai. Ademais, tamén por (4.5), se ten que $(0, p_2(0, x)) \in R$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, logo

$$u(0) = p_2(0, p_2(0, \Gamma u + u(0))) = p_2(0, \Gamma u + u(0)).$$

Así,

$$L(u(0), u) = u(0) - p_2(0, \Gamma u + u(0)) = 0.$$

Queda probado entón que R é unha rexión solución de (3.1), (4.1), con $L(x, y, u) = x - p_2(0, \Gamma u + x)$, co que podemos concluír a demostración. ■

Para rematar, vexamos un último corolario do Teorema 4.2 a través do cal obtemos os resultados de existencia de solución de (3.1), (4.1) que xeneralizan aos presentados en [9, 26] para condicións de fronteira periódicas.

Corolario 4.6. *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory e $R \subset I \times \mathbb{R}^n$ unha rexión admisible feble cun par admisible feble asociado (h, p) satisfacendo (1) da Definición 3.9 e*

(2) $h(0, x) \leq h(T, x)$, para todo x tal que $(0, x) \notin R$;

(3) $h(0, p_2(0, x)) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Daquela, (3.1), (4.1) con $L(x, y, u) = x - y$ ten unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.

Demostración. Precisaremos verificar a condición (2) da Definición 4.1. Observemos que

$$p_2(0, x - L(x, y, u)) = p_2(0, x - (x - y)) = p_2(0, y).$$

Entón, por (3), $h(0, p_2(0, u(0) - L(u(0), u(T), u))) \leq 0$, para todo $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$. Para $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$, $p(T, u(T)) = (T, u(T))$ e $h(T, u(T)) \leq 0$. Por (2), $h(0, u(T)) \leq 0$ e, polo tanto, $(0, u(T)) \in R$ e $p(0, u(T)) = (0, u(T))$. Logo,

$$p_2(0, u(0) - L(u(0), u(T), u)) = p_2(0, u(T)) = u(T) = u(0) - L(u(0), u(T), u).$$

Así, R é unha rexión solución de (3.1), (4.1), con $L(x, y, u) = x - y$, co cal, a partir do Teorema 4.2 concluímos a demostración. ■

Observación 4.7. Á vista dos dous resultados anteriores, debemos de facer dúas breves anotacións. A primeira delas é que, se $p(0, \cdot)$ é a proxección sobre $\{0\} \times R_0$, entón as condicións (2) no Corolario 4.5 e (3) no Corolario 4.6 satisfáanse.

A outra das cousas que debemos de resaltar é que, para $L(x, y, u) = x - y$, o último resultado non recolle os enunciados presentados en [9] para o problema periódico pola condición (3).

Outra forma de abordarmos as condicións de fronteira é a través do seguinte teorema, que nos mostrará que (3) do Corolario 4.6 non é precisa se R é unha rexión admisible ou se a desigualdade na condición (1) da Definición 4.1 non é estrita.

Teorema 4.8. *Sexa $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ unha función Carathéodory. Supoñamos que existe unha rexión solución, R , de (3.1) con condicións de fronteira periódicas (4.2). Daquela, o problema (3.1), (4.2) ten unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.*

Como podemos observar, os Teoremas 4.2 e 4.8 permítenos presentar moitos dos resultados vistos en capítulos anteriores como casos particulares dos mesmos. O único que precisamos é adaptarmos as condicións iniciais ou de fronteira de cada caso particular de acordo coas presentadas ao comezo deste capítulo.

Tendo en conta o anterior, é entón neste punto onde debemos de introducir un exemplo concreto que non poida ser abarcado por outros enunciados que non sexan os mencionados.

Exemplo 4.9. Sexa $I := [0, 1]$ e consideremos o problema

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t)e^{y(t)}, & \int_0^1 x^2(s) ds &= 1, \\ y'(t) &= -y(t)e^{x(t)}, & \int_0^1 y^2(s) ds &= 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

para case todo $t \in I$.

Imos empregar entón o método das rexións solución para resolver o problema (4.6). Como rexión admisible feble tomaremos $R := B[0, 2]$, e o par admisible feble que consideraremos será $h(t, x, y) = \frac{1}{2}d_R^2(t, x, y)$ e

$$p(t, x, y) := (t, x, y) - \nabla h(t, x, y) = P_R(t, x, y),$$

para $(t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^2$.

Por unha parte temos que $f(t, x, y) := (-2xe^y, -ye^x)$. Por outra banda, o operador $\Gamma : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Gamma u = \int_I u^2$, é un operador continuo. Daquela, se tomamos $r = (1, 1)$ e definimos o operador L como

$$L(s, l, u) = L(s, u) = s - p_2(0, \Gamma u + s - r),$$

é doado de ver que nos atopamos con condicións do tipo (4.1). En efecto, se $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ é solución do problema (4.6), tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$, entón

$$L(u(0), u(T), u) = L(u(0), u) = u(0) - \Gamma u - u(0) + r = 0.$$

Vexamos logo que o problema (4.6) ten unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.

Primeiro comprobaremos as condicións (H1), (H2) e (H3') da Definición 3.9.

(H1) $R = h^{-1}((-\infty, 0])$.

(H2) A aplicación h é continuamente diferenciable (Teorema 3.11).

(H3') p está limitada e ademais $p(t, x, y) = (t, x, y)$, para todo $(t, x, y) \in R$, e

$$\begin{aligned} & \langle \pi_2(\nabla h(t, x, y)), \pi_2(p(t, x, y) - (t, x, y)) \rangle = -\|\pi_2(\nabla h(t, x, y))\| \\ & = \begin{cases} 0, & (t, x, y) \in R, \\ -\frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{t^2 + x^2 + y^2} - 2)^2}{t^2 + x^2 + y^2}, & (t, x, y) \notin R, \end{cases} \end{aligned}$$

polo que é menor ou igual ca cero para $(t, x, y) \in (I \times \mathbb{R}^2) \setminus R$.

Agora comprobaremos as condicións (1) e (2) da Definición 4.1.

(1) Temos que probar que $\frac{\partial h}{\partial t}(t, x, y) + \langle \nabla_{(x,y)} h(t, x, y), f(p(t, x, y)) \rangle \leq 0$ para case todo t e todo (x, y) con $(t, x, y) \notin R$. Como

$$f(p(t, x, y)) = \begin{cases} (-2xe^{-y}, -ye^{-x}), & (t, x, y) \in R, \\ \left(-\frac{4xe^{-\frac{2y}{\sqrt{t^2+x^2+y^2}}}}{\sqrt{t^2+x^2+y^2}}, -\frac{2ye^{-\frac{2x}{\sqrt{t^2+x^2+y^2}}}}{\sqrt{t^2+x^2+y^2}} \right), & (t, x, y) \notin R, \end{cases}$$

temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t}(t, x, y) + \langle \nabla_{(x,y)} h(t, x, y), f(p(t, x, y)) \rangle \\ &= -\frac{e^{-\frac{2(x+y)}{\sqrt{t^2+x^2+y^2}}} (\sqrt{t^2+x^2+y^2} - 2)}{(t^2+x^2+y^2)^{3/2}} \\ & \cdot \left(4x^2 e^{\frac{2x}{\sqrt{t^2+x^2+y^2}}} \sqrt{t^2+x^2+y^2} - t e^{\frac{2(x+y)}{\sqrt{t^2+x^2+y^2}}} (t^2+x^2+y^2) + 2y^2 e^{\frac{2y}{\sqrt{t^2+x^2+y^2}}} \sqrt{t^2+x^2+y^2} \right) \\ & < 0, \end{aligned}$$

para case todo t e todo (x, y) con $(t, x, y) \notin R$.

(2) Dado que \mathcal{B} denota as condicións (4.1), isto é, $L(u(0), u(T), u) = 0$, de acordo coa Definición 4.1, debemos de comprobar dúas cousas.

(a) Temos que ver que $h(0, u(0)) \leq 0$ para todo $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $u(0) = p_2(0, u(0) - L(u(0), u))$.

$$h(0, u(0)) = h(0, p_2(0, u(0) - L(u(0), u)) = h(0, p_2(0, \Gamma u + u(0) - r)) \leq 0.$$

Isto equivale a probar que $\|p_2(0, \Gamma u + u(0) - r)\| \leq 2$, o cal é certo, dado quen son R e p .

(b) Agora temos que probar que $L(u(0), u) = 0$ para todo $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$, e $u(0) = p_2(0, u(0) - L(u(0), u))$. Debido á escolla de R e p , deducimos que $(0, p_2(0, x, y)) \in R$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo,

$$\begin{aligned} L(u(0), u) &= u(0) - p_2(0, \Gamma u + u(0) - r) \\ &= p_2(0, u(0) - L(u(0), u)) - p_2(0, \Gamma u + u(0) - r) \\ &= p_2(0, p_2(0, \Gamma u + u(0) - r)) - p_2(0, \Gamma u + u(0) - r) \\ &= p_2(0, \Gamma u + u(0) - r) - p_2(0, \Gamma u + u(0) - r) = 0. \end{aligned}$$

Estamos, pois, nas condicións do Teorema 4.2, polo que o problema (4.6) admite polo menos unha solución $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{R}^n)$ tal que $(t, u(t)) \in R$, para todo $t \in I$.

Antes de dar por finalizado este exemplo, resaltemos, ao igual que se fai en [26, Observación 3.3], que a condición (1) da Definición 3.5 pode ser reescrita como

$$\langle \nabla h(t, x), \tilde{f}(p(t, x)) \rangle \leq 0,$$

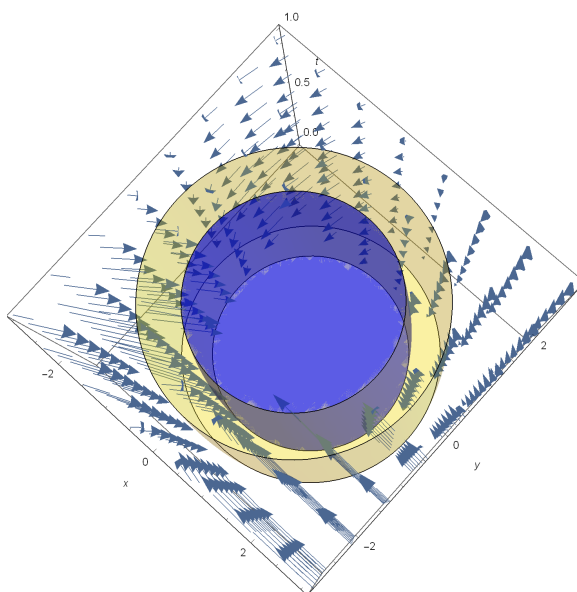


Fig. 4.1. A superficie interior é a fronteira da rexión R (onde $h = 0$), a superficie exterior é o conxunto de nivel $h = 1/2$ e o campo vectorial a aplicación $\tilde{f} = (1, f)$ [26, Figura 4.1].

para case todo t e todo x . Así, na Figura 4.1 podemos observar como, para cada $c \in \mathbb{R}^+$, o campo \tilde{f} en cada punto $h^{-1}(c)$ apunta na dirección de decrecemento do valor c .

Para dar fin a este capítulo resaltaremos de novo a dificultade das condicións (2) e (2') recollidas na Definición 4.1, así como o complicados que se volven os operadores empregados na demostración dos Teoremas 4.2 e 4.8.

A simple vista, puidera parecer que os resultados presentados nesta parte do traballo se seguen sen moita dificultade dos xa vistos en [26], se ben o feito de non termos linealidade nos problemas de valor inicial e de fronteira fai que as ferramentas precisas para replicar os teoremas de existencia presentados no Capítulo 3 non sexan nada doadas de atopar.

Tamén debemos de pór énfase na versatilidade dos Teoremas 4.2 e 4.8, pois, como xa amosamos, é posible recoller con eles gran parte dos resultados presentados ao longo deste traballo. Tal feito é un bo indicador de que os enunciados aquí presentados para condicións non lineares conforman unha boa xeneralización do método das rexións solución para este tipo de condicións.

No vindeiro capítulo recolleremos algunha conclusión máis sobre o anterior xunto con outras consideracións, co que daremos por finalizado este traballo.

5. Conclusións

Con este capítulo remataremos o noso traballo. Nel presentaremos unha serie de reflexións obtidas sobre o estado actual e os problemas abertos no eido das rexións solución.

Unha das tarefas sen resolver atopámola se ollamos para a coexistencia entre as rexións admisibles e as rexións admisibles febles. A intención inicial de Tojo en [26] era relaxar a desigualdade relativa á condición (H3) da Definición 3.2, se ben despois se viu obrigado a introducir novas hipóteses para chegar a resultados similares aos presentados en [9].

Con todo, á vista da proba de existencia de pares admisibles febles, parece evidente que ditas hipóteses adicionais non son precisas, sempre e cando se mellore o Teorema 3.14. Tal cousa xa é comentada por Tojo en [26, sec. 6], onde indica ademais que xeneralizar dito resultado non é un proceso carente de dificultade.

O ideal sería probar que existe unha función que se anule no pechado que nós queiramos e que teña unha cantidade “razoable” de puntos críticos. O gran problema consiste precisamente no control de dita cantidade de puntos críticos. Cabe comentarmos que o estudo da relación entre os puntos críticos dunha función e a topoloxía do dominio da mesma é abarcado pola Teoría de Morse, se ben polo momento non atopamos ningún resultado válido para o noso caso.

O anterior impulsounos a levar a cabo numerosas tentativas empregando descomposicións de Whitney [15, Proposición 3.3.6], unha técnica que permite descompoñer un aberto como unha unión infinita de pechados con certas propiedades. Deste xeito, a través de métodos similares ás particións da unidade, podemos definir unha función a partir da suma de funcións auxiliares definidas en cada pechado que só se anule no complementario do aberto que estamos a descompoñer.

Porén, as funcións que obtivemos a través deste procedemento resultaron ser moi complicadas, a pesar de escollermos aplicacións auxiliares o máis simples posible. A día de hoxe estamos intentando empregar argumentos de regularidade para ver se podemos chegar a algún tipo de contradición coa existencia de puntos críticos.

De conseguirmos probar a existencia dunha función con tales características, cousa que aínda cremos posible, os conceptos de rexión admisible e de rexión admisible feble serían equivalentes, quedando así unha teoría moito máis compacta e elegante.

Do anterior deriva outro dos problemas abertos existentes, consistente no estudo das propiedades topolóxicas das rexións admisibles en termos de invariantes topolóxicos como poden ser os grupos de homoloxía, a característica de Euler ou os números de Betti.

Como dixemos anteriormente, a Teoría de Morse comprende unha análise exhaustiva entre os puntos críticos dunha función e a topoloxía do dominio da mesma. Tentando resolver a equivalencia entre rexións admisibles e rexións admisibles febles, fomos empurrados cara a algunhas referencias nas que se estudan relacións entre tales invariantes topolóxicos e puntos críticos. Afondando neste tema, quizais sexa posible atopar novas caracterizacións das rexións admisibles en función das súas características topolóxicas.

Outro problema estudado en [9, 26] é a multiplicidade de solucións. Tanto Frigon como Tojo probaron resultados de multiplicidade para problemas diferenciais con condicións iniciais e de fronteira xa vistas no Capítulo 3. Sería desexable replicar tales enunciados para problemas con condicións non lineares.

Á vista do comentado neste capítulo, cremos que os desenvolvementos futuros no eido da teoría das rexións solución deben de pasar primeiramente por resolver os problemas abertos aquí comentados. Deste xeito, conseguiríamos maior completude para o método das rexións solución e, se cadra, poderíamos establecer pontes entre esta teoría e resultados topolóxicos existentes sobre puntos críticos de grande interese.

Bibliografía

- [1] Appell, J., Zabrejko, P.P.: *Nonlinear Superposition Operators*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press (1990)
- [2] Benedetto, J.J., Czaja, W.: *Integration and modern analysis*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (2009)
- [3] Cabada, A.: *The monotone method for first-order problems with linear and nonlinear boundary conditions*. *Applied Mathematics and Computation* **63**(2), 163–186 (1994)
- [4] Cabada, A., López Pouso, R.: *Extremal solutions of strongly nonlinear discontinuous second-order equations with nonlinear functional boundary conditions*. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* **42**(8), 1377–1396 (2000)
- [5] De Coster, C., Habets, P.: *Two-point boundary value problems: lower and upper solutions*, vol. 205. Elsevier (2006)
- [6] Dragoni, G.S.: *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine*. *Mathematische Annalen* **105**(1), 133–143 (1931)
- [7] El Khattabi, N., Frigon, M., Ayyadi, N.: *Multiple solutions of problems with nonlinear first-order differential operators*. *Journal of Fixed Point Theory and Applications* **17**(1), 23–42 (2015)
- [8] Fonseca, I., Gangbo, W.: *Degree Theory in Analysis and Applications*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Oxford University Press (1995)
- [9] Frigon, M.: *Existence and Multiplicity Results for Systems of First-Order Differential Equations via the Method of Solution-Regions*. *Advanced Nonlinear Studies* (2018)
- [10] Frigon, M., Lotfipour, M.: *Multiplicity results for systems of first order differential inclusions*. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* **16**, 1025–1040 (2015)
- [11] Frigon, M., O'Regan, D.: *Existence results for some initial and boundary value problems without growth restriction*. *Proceedings of the American Mathematical Society* **123**(1), 207–216 (1995)
- [12] Granas, A., Dugundji, J.: *Fixed point theory*. Springer Verlag, New York (2003)
- [13] Holmes, R.B.: *A course on optimization and best approximation*, vol. 257. Springer (2006)
- [14] Kesavan, S.: *Nonlinear Functional analysis: A first course*. Springer (2004)

- [15] Krantz, S., Parks, H.: A primer of real-analytic functions. Birkhauser Verlag (1992)
- [16] Lakshmikantham, V., Leela, S.: *Existence and monotone method for periodic solutions of first-order differential equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **91**(1), 237–243 (1983)
- [17] López Pouso, R.: *Nonordered discontinuous upper and lower solutions for first-order ordinary differential equations*. Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications **45**(4), 391–406 (2001)
- [18] Mawhin, J.: *First order ordinary differential equations with several periodic solutions*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP **38**(2), 257–265 (1987)
- [19] Mirandette, B.: *Résultats d'existence pour des systèmes d'équations différentielles du premier ordre avec tube-solution*. Thèse (M.Sc.)–Université de Montréal (1996)
- [20] Moretto, S.: *Sull'esistenza di soluzioni periodiche per l'equazione $y' = f(x, y)$* . Annali Dell'universita' Di Ferrara **8**, 61–67 (1958)
- [21] Munkres, J.R.: Topology. Prentice Hall (1975)
- [22] Nkashama, M.: *A generalized upper and lower solutions method and multiplicity results for nonlinear first-order ordinary differential equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **140**(2), 381–395 (1989)
- [23] Peano, G.: *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine*. Atti della Accademia delle Scienze di Torino **21**, 677–685 (1886)
- [24] Picard, E.: *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*. Journal de Mathématiques pures et appliquées **6**, 145–210 (1890)
- [25] Picard, E.: *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **9**, 217–272 (1893)
- [26] Tojo, F.A.F.: *A constructive approach towards the method of solution-regions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **472**(2), 1803–1819 (2019)
- [27] Walter, J.: *On Elementary Proofs of Peano's Existence Theorems*. The American Mathematical Monthly **80**(3), 282–286 (1973)

Índice alfabético

D

distancia
 dun punto a un conxunto, 5
 entre conxuntos, 5

F

función
 Carathéodory, 11
 localmente Carathéodory, 12
 signo, 5

G

grao
 de Brouwer, 7
 de Leray-Schauder, 8

I

índice de punto fixo, 10

M

método montono, 17

O

operador
 compacto, 8
 de Nemytskij, 12
 de superposición, 12
 limitado, 8

P

par
 admisible, 25
 admisible feble, 32
perturbación compacta da identidade, 8
 pechada, 8
 propia, 8
proxección, 6
punto
 crítico, 6
 regular, 6

R

rexión

admisible, 24
admisible feble, 32
C-solución, 34
solución, 25, 37

S

sobresolución, 13, 16
 estrita, 16
subsolución, 13, 16
 estrita, 16

T

tubo solución, 18

V

valor
 crítico, 6
 regular, 6