



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

CLASIFICACIÓN PROYECTIVA DE CUÁDRICAS. ÍNDICE DE WITT.

Antón Seoane Torres

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

CLASIFICACIÓN PROYECTIVA DE CUÁDRICAS. ÍNDICE DE WITT.

Antón Seoane Torres

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Álgebra
Título: Clasificación proyectiva de cuádricas. Índice de Witt.
Breve descripción do contido
En este TFG y después de conversaciones con el profesor Manuel Pedreira, exploraré la geometría de las cuádricas proyectivas para entender geoméricamente el estudio de formas cuadráticas que se hace en el curso de Álgebra Lineal y Multilineal. Abordaré la clasificación proyectiva de cuádricas, indicaré de una manera ilustrativa cómo se obtiene de ella la clasificación afín y métrica estudiada en el curso de Geometría Lineal, introduciendo el concepto de índice de Witt y estudiaré al menos en el caso de las cuádricas \mathcal{Q}_2 y \mathcal{Q}_4 , las familias de subespacios lineales contenidos en ellas.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. El Espacio Proyectivo	1
1.1. Espacio Proyectivo asociado a un Espacio Vectorial	1
1.2. Introducción de Coordenadas en el Espacio Proyectivo	3
1.3. Visualización Geométrica de una Referencia Proyectiva	5
2. Cuádricas Proyectivas	7
2.1. Definición y puntos singulares	7
2.2. Teorema de estructura de las cuádricas proyectivas	9
2.3. Polaridad	12
2.4. Intersecciones de una recta con una cuádrica proyectiva	15
2.5. Clasificación proyectiva de cuádricas	19
2.5.1. Clasificación de formas cuadráticas	23
3. Teorema de Segre - Witt	29
3.1. Subespacios lineales maximales en una cuádrica lisa: Índice de Witt	35
3.1.1. Subespacios contenidos en una cuádrica proyectiva	41
Bibliografía	57

Agradecimientos

A mi tutor, Don Manuel Pedreira, por su dedicación y paciencia, por su confianza, y por transmitirme su pasión por las matemáticas.

A mi familia, por su apoyo incondicional. En especial a mis padres por estar ahí incluso en los momentos más bajos, y tener la paciencia suficiente para aguantarme durante estos cuatro años.

A mis amigos de toda la vida y a los que conocí a lo largo de esta etapa, por hacer de ésta la mejor de mi vida.

Resumen

El objetivo de este trabajo es explorar, desde un punto de vista geométrico, el comportamiento de las cuádricas proyectivas para poder así dar una clasificación consistente de las mismas. Comenzamos dando una introducción sobre el espacio proyectivo n -dimensional, que será donde trabajaremos a lo largo de toda la memoria. Se abordarán temas como la polaridad de una cuádrica y su relación con los puntos singulares de la misma, así como conceptos no vistos en el grado como puede ser el *Índice de Witt*, que surge de manera natural tras presentar el Teorema de Homogeneidad 3.6 y caracteriza por completo a una cuádrica en el caso complejo (y por tanto en el real). En particular se hará un estudio de las cuádricas \mathcal{Q}_2 y \mathcal{Q}_4 , y de las familias de subespacios lineales contenidos en ellas, que veremos están garantizados gracias al Segundo Teorema de Estructura 3.11.

Abstract

The objective of this work is to explore, from a geometric point of view, the behaviour of projective quadrics in order to give a consistent classification of them. We begin with an introduction to the n -dimensional projective space, where we will work throughout all the report. Topics such as the polarity of a quadric and its relationship with its singular points will be addressed, as well as concepts not seen in the degree, such as the *Witt Index*, which arises naturally after presenting the Homogeneity Theorem 3.6 and fully characterizes a quadric in the complex case (and, therefore, in the real one). In particular, we will make a study of the quadrics \mathcal{Q}_2 and \mathcal{Q}_4 , and of the families of linear subspaces contained in them, which we will see are guaranteed thanks to the Second Structure Theorem 3.11.

Introducción

En este TFG se introduce el estudio proyectivo de las formas cuadráticas. Un tema clásico que no forma parte de las programaciones de las materias del grado de matemáticas. Sin embargo, los conceptos de la materia ALXLEM del segundo curso son todos una formalización algebraica de resultados geométricos clásicos. Por ejemplo, la forma de Jordan fue descubierta independientemente por Corrado Segre que la utilizó para clasificar una proyectividad analizando su configuración de subespacios invariantes. Por otra parte el mismo Corrado Segre, a la edad de 20 años, abordó la clasificación proyectiva de las hipersuperficies cuádricas de un espacio proyectivo y, estudiando su geometría intrínseca, consiguió hacer una clasificación proyectiva y afín de las cuádricas. Esta clasificación afín de las cuádricas aparece en lenguaje de espacios vectoriales métricos en el capítulo *XII* del libro de F. Puerta [P76].

Una cuádrica proyectiva $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ es el lugar geométrico de los ceros de una forma cuadrática o polinomio homogéneo de grado dos Q . En lenguaje algebro-geométrico [EA57], la clasificación proyectiva de hipersuperficies cuádricas es equivalente a la clasificación ortogonal de Formas Cuadráticas. Para las cuádricas proyectivas reales, los invariantes que las clasifican son el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada. En el caso de cuádricas proyectivas complejas, el único invariante que clasifica es el rango. La pregunta inmediata es: qué ocurre con la signatura cuando pasamos de \mathbb{R} a \mathbb{C} . Uno piensa, algebraicamente, que simplemente en \mathbb{C} todo número complejo es un cuadrado y de este modo la signatura definida en el caso real, carece de sentido en \mathbb{C} . Sin embargo, cuando Corrado Segre hizo su clasificación proyectiva de todas las cuádricas proyectivas complejas, incluyendo las reales, lo que hoy conocemos como signatura de la forma cuadrática no fue utilizada por Segre ya que su visión era completamente geométrica, y el otro invariante además del rango era la dimensión maximal de los subespacios lineales contenidos en la cuádrica proyectiva, que posteriormente será conocida como índice de Witt. La manera en que en el caso real, la signatura y el índice de Witt están relacionados es relativamente fácil de entender. Por el teorema de Sylvester un espacio vectorial métrico ortogonal tiene una descomposición de la forma :

$$V = \text{Rad}_Q(V) \oplus W_+ \oplus W_- = \text{Rad}_Q(V) \oplus \langle u_1, \dots, u_p \rangle \oplus \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad (1)$$

de manera que en W_+ y en W_- la forma cuadrática Q es, respectivamente, definida positiva y negativa. Supongamos que $p = \min\{p, n\}$. La descomposición de Sylvester la rehacemos en la manera siguiente, para cada $i = 1, \dots, p$, consideramos el plano $\langle u_i, v_i \rangle$ y consideramos la descomposición:

$$V = \text{Rad}_Q(V) \oplus \langle u_1, \dots, u_p \rangle \oplus \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \text{Rad}_Q(V) \oplus \langle u_1, v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle u_p, v_p \rangle \oplus \langle v_{p+1}, \dots, v_n \rangle \quad (2)$$

Sucede que cada plano $\langle u_i, v_i \rangle$ es un plano de Lorentz. Normalizando, podemos suponer que tales vectores son unitarios de valores 1 y -1 respectivamente y que son ortogonales. Uno demuestra que equivalentemente existe una base para dicho plano formada por vectores $\langle \bar{u}_i, \bar{v}_i \rangle$, en donde ahora \bar{u}_i y \bar{v}_i son isótopos pero no son ortogonales. Esta nueva base se dice una pareja hiperbólica y el plano de Lorentz pasa a denominarse Plano Hiperbólico.

Lo importante de esta situación, ahora, es que en su parte no degenerada, la cuádrlica proyectiva contiene dos subespacios lineales, a saber las proyectivizaciones de los subespacios lineales $\langle \bar{u}_1 \dots \bar{u}_p \rangle$, y $\langle \bar{v}_1 \dots \bar{v}_p \rangle$ y claramente, como la descomposición de Sylvester es única y la parte $\langle v_{p+1}, \dots, v_n \rangle$ es completamente anisótropa, tal dimensión proyectiva es ciertamente maximal entre los subespacios proyectivos contenidos en la cuádrlica. Tal dimensión es esencialmente lo que hoy se conoce como índice de Witt.

El objetivo fundamental de este TFG es explicar dicha clasificación proyectiva de cuádrlicas de Segre usando sus argumentos geométricos pero formalizándolos con el álgebra. Esto, a mi conocimiento no aparece en libro alguno salvo con excepción en el de F. Puerta [P76], pero la exposición es, primero puramente algebraica y a partir de ella se centra más en cómo los rangos e índices de Witt de la cuádrlica proyectiva y la afín asociada permiten hacer una clasificación de cuádrlicas afines.

Los argumentos algebro-geométricos fueron introducidos por E. Artin [EA57]. Concretamente en su libro desarrolla un capítulo sobre Formas Cuadráticas haciendo un estudio algebraico exhaustivo de las simétricas y antisimétricas, que él denomina Geometría métrica Ortogonal y Simpléctica, respectivamente. Los teoremas fundamentales correspondientes a las simétricas proporcionan la clasificación proyectiva y afín de las cuádrlicas, e incluso la clasificación euclidea.

El punto de vista en este TFG es mayormente el recíproco. Destacamos que en particular, en lo que respecta a la demostración del Teorema de Witt exponemos un argumento puramente geométrico debido a C. Segre, y en los demás resultados razonamos geoméricamente y, como dijo Euler, ratificamos con el álgebra nuestra intuición geométrica. La demostración geométrica de El Teorema de Witt, o teorema de Segre-Witt se obtiene del llamado Teorema de Homogeneidad, debido a C. Segre y que esencialmente dice que cualesquiera dos puntos lisos de una cuádrlica

proyectiva son indistinguibles. Así la descomposición de Witt es indiferente de la aritmética del cuerpo base en el que se trabaja, bien sea real o complejo, y la existencia de los planos hiperbólicos corresponde a tomar rectas estrictamente bisecantes a la cuádrlica proyectiva. De hecho, los argumentos de C. Segre permiten explicitar las familias de subespacios lineales contenidos en una cuádrlica proyectiva y construirlos efectivamente a partir de las familias de una sección cuádrlica de codimensión dos.

Una vez resaltado lo más importante de este TFG, paso a comentar como están organizados los tres capítulos del TFG.

En el capítulo 1, se introducen las definiciones básicas de la geometría proyectiva analítica. El concepto de Espacio Proyectivo Analítico, Referencia Proyectiva y Proyectividad.

En el capítulo 2 se introduce el concepto de cuádrlica proyectiva en un espacio proyectivo y se define el concepto de punto singular de la cuádrlica. Se establece la equivalencia entre los puntos singulares y el concepto de radical para una forma cuadrática simétrica, probando que aquellos son la proyectivización del subespacio radical. Esto conduce a obtener la descomposición de un espacio métrico ortogonal como suma directa del radical y un subespacio no singular o no degenerado; pero, en nuestro caso, argumentando geoméricamente que una cuádrlica proyectiva en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ consiste en el cono de rectas que unen los puntos del lugar singular con los puntos de la sección cuádrlica genérica de la cuádrlica proyectiva por un subespacio proyectivo complementario de la proyectivización del subespacio radical.

A continuación relacionamos la ortogonalidad de una forma cuadrática con el concepto de polaridad para una cuádrlica proyectiva. De este modo surge el concepto de hiperplano polar desde un punto no perteneciente a la cuádrlica o perteneciente a ella. En el primer caso, geoméricamente se tiene un cono de vértice el punto y base la sección cuádrlica de la cuádrlica inicial por el hiperplano polar. Las generatrices de ese cono con tangentes a la cuádrlica en tales puntos de la sección cuádrlica. En el segundo caso, siendo el punto perteneciente a la cuádrlica, según sea singular o no singular, el subespacio polar respecto de un punto singular coincide con todo el espacio proyectivo y el hiperplano polar en el punto liso coincide con el plano tangente a la cuádrlica en el punto. Es decir, el lugar geométrico de todas las rectas que son tangentes a la cuádrlica en dicho punto. Obviamente es necesario realizar y hacemos un estudio de las intersecciones de una recta con una cuádrlica proyectiva. Con todos estos resultados uno puede enunciar el Teorema de Estructura de Cuádrlicas Proyectivas 2.17. Este capítulo termina explicitando la equivalencia de la clasificación proyectiva de cuádrlicas proyectivas con la clasificación de Formas Cuadráticas Simétricas mediante congruencia.

Finalmente el capítulo 3 es totalmente geométrico. En una primera sección se demuestran resultados que corresponden al concepto de polaridad en una cuádrlica. Se prueba esencialmente

el comportamiento del espacio tangente a un punto liso de una cuádrica con respecto a los subespacios lineales contenidos en ella y el de dos espacios tangentes en dos puntos dados según intersequen o no y su relación con el comportamiento de los puntos singulares.

En la segunda sección estudiamos la existencia de subespacios lineales maximales en una cuádrica proyectiva. Todo este estudio geométrico se debe a C. Segre. La idea de Segre es que en una cuádrica lisa, cualesquiera dos puntos lisos son indistinguibles y que todo subespacio lineal contenido en la cuádrica y pasando por un punto liso, yace en su espacio tangente. C. Segre prueba el Teorema de Homogeneidad y de aquí prueba que si una cuádrica proyectiva contiene un subespacio d -dimensional, entonces es unión de subespacios de dimensión $\geq d$. El resultado de clasificación proyectiva de cuádricas al que llegó Segre es el Teorema 3.11. En este resultado se obtiene la cota para los subespacios maximales contenidos en la cuádrica en función del rango de la cuádrica, y un hecho fundamental es que uno puede calcular tal dimensión maximal y construir tales subespacios maximales de manera inductiva a partir del conocimiento de los subespacios maximales en una sección genérica cuádrica de codimensión 2. En particular, el primer ejemplo a estudiar es la cuádrica lisa $\mathcal{Q}_2 \subset \mathbb{P}^3$ que posee dos familias distintas de rectas. Este ejemplo dió lugar al encaje de Segre en Geometría Algebraica. Como una buena y descriptiva ilustración del método expuesto, estudiamos en el ejemplo 3.12 cómo se obtienen las dos familias de planos de la cuádrica lisa $\mathcal{Q}_4 \subset \mathbb{P}^5$ a partir de las dos familias de rectas de $\mathcal{Q}_2 \subset \mathbb{P}^3$, ya que esta cuádrica es la sección genérica lisa de codimensión dos en $\mathcal{Q}_4 \subset \mathbb{P}^5$.

Finalizo la sección, el capítulo y este TFG con el Teorema de Witt en su forma algebraica, si bien se llega a él con una demostración completamente geométrica basada en los argumentos previos en torno al Teorema de Homogeneidad.

La primera exposición de la clasificación proyectiva y afín de las cuádricas en un lenguaje algebro-geométrico apareció en el libro de G. Castelnuovo [GC59], y la argumentación en el ejemplo 3.12 es una reformulación del estudio de subespacios lineales en cuádricas que aparece en [JH78]. Si bien he escrito la clasificación afín y euclídea de las cónicas a partir de la clasificación proyectiva, no ha sido posible incluirla en este TFG por razón de espacio.

Capítulo 1

El Espacio Projectivo

1.1. Espacio Projectivo asociado a un Espacio Vectorial

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ sobre un cuerpo K (\mathbb{R} ó \mathbb{C}). Definimos el *espacio projectivo* $\mathbb{P}(V)$ asociado como el conjunto de rectas vectoriales de V . De manera más precisa:

En $V \setminus \{0\}$, se considera la relación de equivalencia:

$$\vec{x} \sim \vec{y} : \iff \text{existe } \lambda \in K \setminus \{0\} = K^* \text{ tal que } \vec{x} = \lambda \vec{y}. \quad (1.1)$$

Si $\vec{x} \in V \setminus \{0\}$, equivalentemente, alguna coordenada x_i es no nula y su clase de equivalencia $[\vec{x}] = \{\lambda \vec{x} : \lambda \in K \setminus \{0\}\}$ son todos los puntos de la recta vectorial que genera, excluido el cero. Pues bien $\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / K^*$ y existe una aplicación canónica $V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$.

Ejemplo 1.2. Sea $V = \mathbb{R}^3$, entonces $[\vec{x}] = \{\lambda(x_0, x_1, x_2) : \text{algún } x_i \neq 0\} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

Los puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, dado que alguna coordenada es no nula, se pueden distribuir en tres subconjuntos:

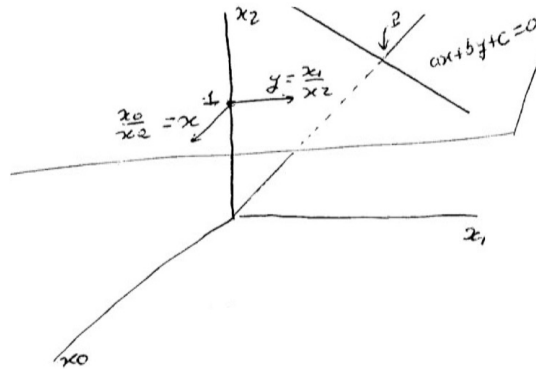
$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \ni [\vec{x}] = \{\lambda(x_0, x_1, x_2) : \text{algún } x_i \neq 0\} = \begin{cases} \{[\vec{x}] & \text{con } x_0 \neq 0\} \\ \{[\vec{x}] & \text{con } x_1 \neq 0\} \\ \{[\vec{x}] & \text{con } x_2 \neq 0\} \end{cases}$$

Tomemos \mathbb{R}^3 con coordenadas x_0, x_1, x_2 para visualizar $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Vamos a identificar un $[\vec{x}]$ con $x_2 \neq 0$, entonces un representante de $[\vec{x}]$ es (x_0, x_1, x_2) y también lo es $(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}, 1)$. Claramente: estos son los puntos del plano afín $x_2 = 1$ con coordenadas $x = \frac{x_0}{x_2}, y = \frac{x_1}{x_2}$; es decir: $\{[\vec{x}] \text{ con } x_2 \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^2_{\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}} \simeq \mathbb{R}^2_{x,y}$.

Los puntos que faltan a este plano afín para llevar todo el plano proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ son $\{[\bar{x}]$ con $x_2 = 0\}$; es decir, tomar el plano $x_2 = 0$ de \mathbb{R}^3 y considerar sus rectas vectoriales. Pero esto es considerar el subespacio \mathbb{R}_{x_0, x_1}^2 , establecer en $\mathbb{R}_{x_0, x_1}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la relación de equivalencia mencionada arriba y el resultado es $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ que es una recta proyectiva.

Así pues hemos demostrado, rigurosamente, usando la definición algebraica del plano proyectivo que:

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}_{\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}}^2 \cup \mathbb{P}(\mathbb{R}). \quad (1.2)$$



La ecuación de una recta en este plano es $ax + by + c = 0$. Visualicemos la recta en \mathbb{R}^3 : corresponde a tomar la imagen inversa de sus puntos proyectivo por la aplicación $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Es decir, a considerar $ax + by + c$ como lugar geométrico en coordenadas x_0, x_1, x_2 . Entonces:

$$\{ax + by + c = 0\} = \left\{a \frac{x_0}{x_2} + b \frac{x_1}{x_2} + c = 0\right\} \iff \{ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\} \quad (1.3)$$

Pero $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ es en \mathbb{R}^3 la ecuación de un plano pasando por el origen. Dicho plano es el menor subespacio que contiene a la recta de ecuaciones $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ y $x_2 = 1$ en \mathbb{R}^3 y cada recta uniendo un punto P en la recta dada, con el origen de \mathbb{R}^3 está definiendo un punto en el espacio proyectivo.

Notemos que en \mathbb{R}^3 dos subespacios se cortan en una recta. Así $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ y $x_2 = 0$ se cortan en una recta del plano $x_2 = 0$ que corresponde al punto del infinito de la recta $ax + by + c = 0$.

Así pues, en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ los puntos corresponden a rectas de \mathbb{R}^3 pasando por el origen y consiste en la unión disjunta de un plano afín con sus puntos del infinito. Existen rectas: están contenidas en el plano afín y tienen su punto del infinito en otra recta proyectiva. Además, estas rectas corresponden a planos de \mathbb{R}^3 pasando por el origen y su punto del infinito es el punto de corte correspondiente a la recta intersección del plano que define la recta con el plano $x_2 = 0$ que define los puntos del infinito o recta del infinito.

Esto motiva lo siguiente: dado V espacio vectorial de dimensión $n+1$ consideramos el espacio proyectivo asociado $V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$.

Ya hemos visto que si $V \simeq \mathbb{R}^3$, sus rectas vectoriales son puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, sus planos vectoriales son rectas de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ y \mathbb{R}^3 corresponde a un plano $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Así pues, en general: si tenemos $W \subset V$ subespacio vectorial de dimensión $k+1$, $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ define un espacio proyectivo que resulta de completar una variedad lineal que no pasa por el origen, de dimensión k , con sus puntos del infinito; luego $\mathbb{P}(W)$ es un espacio proyectivo de dimensión k . Nótese que (véase el modelo en la situación del plano proyectivo) tal variedad lineal satisface que el menor subespacio de W que la contiene es el propio W por lo que tal variedad lineal es la trasladada de un hiperplano.

Volvamos a la distribución de los puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Empleando el mismo argumento que en el primer caso, vemos que:

- $\{[\vec{x}] \text{ con } x_1 \neq 0\}$ es un $\mathbb{R}^2_{\substack{x_0, x_2 \\ x_1, x_1}}$ y se completa a $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ añadiendo los puntos del infinito $\{(x_0, x_1, x_2) \text{ con } x_1 = 0\}$ que es un plano de \mathbb{R}^3 , luego, una recta proyectiva en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.
- $\{[\vec{x}] \text{ con } x_0 \neq 0\}$ es un $\mathbb{R}^2_{\substack{x_1, x_2 \\ x_0, x_0}}$ y se completa con la recta proyectiva definida por el plano $x_0 = 0$.

Vemos que:

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2_{\substack{x_1, x_2 \\ x_0, x_0}} \cup \mathbb{R}^2_{\substack{x_0, x_1 \\ x_2, x_2}} \cup \mathbb{R}^2_{\substack{x_0, x_2 \\ x_1, x_1}} \quad (1.4)$$

Es decir, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ es la unión de tres planos afines, ya que todo punto P tiene alguna coordenada x_i distinta de 0. Además el complementario de cada uno de estos planos afines es una recta proyectiva y los puntos de ésta son los puntos del infinito del plano afín.

1.2. Introducción de Coordenadas en el Espacio Proyectivo

Recordemos que el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ se obtiene como el cociente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia: $\vec{x} \sim \vec{y} \iff$ existe $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{x} = \lambda \vec{y}$. En consecuencia un punto $P \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ es la clase de un vector no nulo $P = [\vec{x}]$ y cualquier $(x_0, x_1, x_2) \in \langle \vec{x} \rangle$ siendo alguna de x_0, x_1, x_2 no idénticamente nula, lo representa.

Es obvio que si fijamos una base cualquiera $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ en \mathbb{R}^{n+1} , cualquier punto $P = [\vec{x}] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ tiene una expresión única $\vec{x} = \sum_{i=0}^n x_i \vec{u}_i$. Además, si cambiamos $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ por $\{\lambda \vec{u}_0, \dots, \lambda \vec{u}_n\}$ con $\lambda \neq 0$, entonces $\sum_{i=0}^n x_i \lambda \vec{u}_i = \lambda \sum_{i=0}^n x_i \vec{u}_i = \lambda \vec{x}$ define el mismo punto proyectivo que el vector \vec{x} . Nos planteamos entonces la siguiente pregunta: ¿qué concepto en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ es el análogo de base en \mathbb{R}^{n+1} ?

En este punto es bueno establecer algunas definiciones:

Definición 1.3. Si $P = [\vec{x}]$ es un punto de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, un representante $(x_0 : \dots : x_n) \in P$ se dice un *conjunto de coordenadas homogéneas* de P . Si $(x_0 : \dots : x_n)$ son coordenadas homogéneas de P , también lo son $\lambda(x_0 : \dots : x_n)$ con $\lambda \neq 0$.

Llamaremos *sistema de coordenadas homogéneas* en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ a toda aplicación biunívoca entre los puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ y una clase de coordenadas homogéneas. Es decir: existe un criterio que asocia a cada punto P un conjunto de coordenadas homogéneas sin ambigüedad.

Definición 1.4. Un conjunto de puntos $\{P_i\}_{i \in I}$ en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ se dice *proyectivamente libre* (o independientes) cuando es imagen de una familia de vectores $\{\vec{x}_i\}_{i \in I}$ linealmente independientes. Tomando las imágenes de una base cualquiera de \mathbb{R}^{n+1} vemos que en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ existen $n + 1$ puntos proyectivamente independientes.

Ejemplo 1.5. En \mathbb{R}^{n+1} sea $\{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ la base canónica. Respecto de dicha base, los puntos: $[\vec{e}_0] = P_0 \dots, [\vec{e}_n] = P_n$ tienen coordenadas homogéneas $(1 : 0 : \dots : 0), \dots, (0 : \dots : 0 : 1)$ respectivamente. Sea P cualquier otro punto del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Sea \vec{x} vector no nulo con $[\vec{x}] = P$. Entonces P tiene coordenadas homogéneas $(x_0 : \dots : x_n)$ siendo $\vec{x} = \sum_{i=0}^n x_i \vec{e}_i$. Ya hemos visto al principio que las coordenadas homogéneas se mantienen si cambiamos $\{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ por $\{\lambda \vec{e}_0, \dots, \lambda \vec{e}_n\}$ con $\lambda \neq 0$.

¿Quiere decir esto que dar un sistema de coordenadas homogéneas es dar una base salvo multiplicar por un mismo λ todos sus vectores?. El problema bien planteado sería: dada una base de \mathbb{R}^{n+1} , por ejemplo la canónica, $\{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$, ¿llega con conocer la imagen de sus vectores para tener definidas las coordenadas homogéneas de cualquier punto proyectivo?. La respuesta es negativa: dado P_i imagen de \vec{e}_i también es imagen de $\alpha_i \vec{e}_i$ con $\alpha_i \neq 0$. Así pues, en general hay dos bases de naturaleza diferente aplicándose en P_0, \dots, P_n : la $\{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ y la $\{\alpha_0 \vec{e}_0, \dots, \alpha_n \vec{e}_n\}$. Para definir un sistema de coordenadas proyectivas se ha de llevar cualquier $\vec{x} \neq 0$ en el mismo punto $[\vec{x}] = P$.

Ahora bien: si $\vec{x} = \sum_{i=0}^n x_i \vec{e}_i$ en la base $\{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ entonces P admite como coordenadas homogéneas (x_0, \dots, x_n) . Y si $\vec{x} = \sum_{i=0}^n y_i \alpha_i \vec{e}_i$ en la base $\{\alpha_0 \vec{e}_0, \dots, \alpha_n \vec{e}_n\}$, admite como coordenadas homogéneas (y_0, \dots, y_n) . Para que ambas definan al mismo punto, existirá $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda x_i = y_i$. Por otra parte como el vector \vec{x} tiene expresiones $\vec{x} = \sum_{i=0}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=0}^n y_i \alpha_i \vec{e}_i$ vemos que para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, se tiene $y_i = \alpha_i^{-1} x_i$. Con lo cual $\lambda x_i = \alpha_i^{-1} x_i$ y $\lambda = \alpha_i^{-1}$. Es decir: entre las posibles bases que se aplican en P_0, \dots, P_n solo aquellas que se diferencian en una homotecia, dan lugar a un sistema de coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Claramente si esto es así $[\vec{e}_0 + \dots + \vec{e}_n] = [\lambda(\vec{e}_0 + \dots + \vec{e}_n)] = P_{n+1}$ y se tiene un punto más. Veamos que este punto P_{n+1} es independiente con n cualesquiera entre $\{P_0, \dots, P_n\}$. Pues bien, las coordenadas homogéneas de P_i son $(0, \dots, 1_i, \dots, 0)$ y las de $P_{n+1} = (1, \dots, 1)$. Es inmediato

ver que la matriz de coordenadas de $\{P_0, \dots, (P_{n+1})_i, \dots, P_n\}$ tiene determinante 1 (no nulo), luego:

Proposición 1.6. *Si se tiene un sistema de coordenadas homogéneas, se tienen $n + 2$ puntos $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ con la propiedad de que $n + 1$ cualesquiera entre ellos son proyectivamente independientes. Recíprocamente: Sean $n + 2$ puntos $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ tales que $n + 1$ cualesquiera son proyectivamente libres. Entonces existe una base $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ tal que $[\vec{u}_0] = P_0, \dots, [\vec{u}_n] = P_n$ y $[\vec{u}_0 + \dots + \vec{u}_n] = P_{n+1}$. Además, cualquier otra base con esta propiedad se obtiene de la anterior multiplicando todos sus vectores por un mismo $\lambda \neq 0$. En particular tales $n + 2$ puntos están definiendo un sistema de coordenadas homogéneas.*

Demostración. Usemos que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ es el conjunto cociente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y sea $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ la aplicación canónica. Dados $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$, los $n + 1$ primeros $\{P_0, \dots, P_n\}$ provienen de una base $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ con $p(\vec{u}_i) = P_i$. Ahora sea \vec{u} cualquier vector tal que $[\vec{u}] = p(\vec{u}) = P_{n+1}$. En la base $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ tiene unas componentes $\vec{u} = \sum_{i=0}^n \mu_i \vec{u}_i$. Entonces para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, $\mu_i \neq 0$. En efecto, si existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\mu_k = 0$, entonces $\vec{u} \in \langle \{\vec{u}_i : \vec{u}_i \neq \vec{u}_k\} \rangle$ y $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_k, \dots, \vec{u}_n\}$ son dependientes, luego los $n + 1$ puntos $\{P_0, \dots, (P_{n+1})_k, \dots, P_n\}$ no serán proyectivamente independientes.

Entonces P_0, \dots, P_n también provienen de $\{\mu_0 \vec{u}_0, \dots, \mu_n \vec{u}_n\}$ y $[\sum_{i=0}^n \mu_i \vec{u}_i] = P_{n+1}$. Sea $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_n\}$ otra base con $[\vec{v}_i] = P_i$, $[\vec{v}_0 + \dots + \vec{v}_n] = P_{n+1}$. En tal caso, existen $\beta_i \neq 0$ con $\vec{v}_i = \beta_i \vec{u}_i$, luego $[\beta_0 \vec{u}_0 + \dots + \beta_n \vec{u}_n] = [\vec{u}_0 + \dots + \vec{u}_n]$. Es decir, existe $\lambda \neq 0$ con $\lambda(\vec{u}_0 + \dots + \vec{u}_n) = \beta_0 \vec{u}_0 + \dots + \beta_n \vec{u}_n$, de donde $\lambda = \beta_i$ para todo i , luego $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_n\} = \{\lambda \vec{u}_0, \dots, \lambda \vec{u}_n\}$. \square

Comentario 1.7. Si $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ es una referencia projectiva, cualquier punto es el punto unido de un sistema de coordenadas homogéneas. Nótese que el punto unido $(1, 1, \dots, 1)$ y las coordenadas conónicas son exclusivas de la referencia projectiva definida por la base canónica.

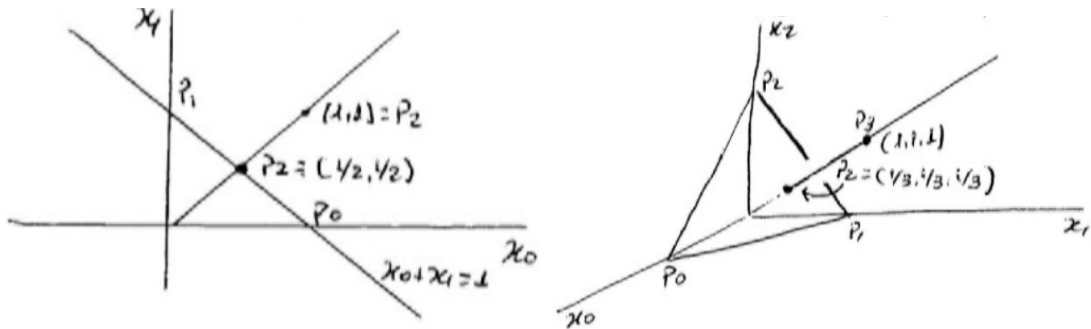
Además, si V es un espacio vectorial sobre K de dimensión $n + 1$ una base la forman $n + 1$ vectores; si $\mathbb{A}^n(K)$ es el espacio afín n -dimensional, un sistema de referencia afín lo forman $n + 1$ puntos $\{P_0, \dots, P_n\}$ tales que $\{P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0\}$ es una base de V ; por último, si $\mathbb{P}(V)$ es el espacio projectivo asociado a V , una referencia projectiva son $n + 2$ puntos $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ tales que $n + 1$ cualesquiera son proyectivamente independientes.

1.3. Visualización Geométrica de una Referencia Projectiva

Hemos probado que una referencia projectiva en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ la forman $n + 2$ puntos $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ tales que cualesquiera $n + 1$ de ellos son proyectivamente libres. También ha quedado claro, a partir del ejemplo anterior, que una referencia projectiva $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$, al proceder de una

base $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ con $[\vec{u}_i] = P_i$ y $[u_0 + \dots + u_n] = P_{n+1}$, admite coordenadas homogéneas $(1 : 0 : \dots : 0)$, \dots , $(0 : \dots : 0 : 1)$, $(1 : \dots : 1)$ cuando expresamos dichas coordenadas homogéneas en la base anterior.

Por lo tanto, en la recta projectiva $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, una referencia projectiva proviene de tres vectores dos a dos linealmente independientes; luego son tres puntos distintos dos a dos. Si usamos la identificación $P_0 = (1 : 0)$; $P_1 = (0 : 1)$; $P_2 = (1 : 1)$ tenemos dos posibles interpretaciones: Si $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \{x_0 = 1\} \cup \mathbb{P}(\{x_0 = 0\})$, entonces P_0 y P_2 son dos puntos propios y P_1 un punto en el infinito. Ahora bien: como la recta projectiva es esencialmente completar una recta afín con su punto del infinito, también puedo visualizar: $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \{x_0 + x_1 = 1\} \cup \{x_0 + x_1 = 0\}$. En esta interpretación P_0 , P_1 son los extremos de un segmento y P_2 es el punto correspondiente a su punto medio.



De manera análoga, una referencia projectiva en el plano $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ son cuatro puntos, tres cualesquiera linealmente independientes; es decir, tres cualesquiera dando una base de \mathbb{R}^3 . Fijémonos que si $P_0 = (1 : 0 : 0)$; $P_1 = (0 : 1 : 0)$; $P_2 = (0 : 0 : 1)$ y $P_3 = (1, 1, 1)$. Entonces $\{P_0, P_1, P_2\}$ definen un triángulo de referencia en el plano afín $x_0 + x_1 + x_2 = 1$ y $(1, 1, 1)$ es un punto fuera del triángulo. Análogamente, una referencia projectiva en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ serían los vértices de un tetraedro o pirámide y el punto unido, un punto fuera de la pirámide.

Concluimos con el concepto de proyectividad en un espacio projectivo n -dimensional.

Definición 1.8. Dado un espacio projectivo real o complejo \mathbb{P}^n llamaremos proyectividad $\varphi: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ a la aplicación inducida por un isomorfismo del espacio vectorial V de dimensión $n + 1$ tal que $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$.

Capítulo 2

Cuádricas Projectivas

2.1. Definición y puntos singulares

En primer lugar, presentamos la definición de cuádriga proyectiva.

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ provisto de una forma bilineal simétrica $F : V \times V \rightarrow K$ y sea $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ su forma cuadrática asociada. Una cuádriga proyectiva $Z(Q)$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{P}(V)$ que satisfacen la ecuación

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{2.1}$$

es decir, el conjunto

$$Z(Q) := \{P \in \mathbb{P}(V) \mid Q(P) = 0\} \subset \mathbb{P}(V) \tag{2.2}$$

Observemos que $Q(x_0, x_1, \dots, x_n)$ es un polinomio homogéneo de grado $m = 2$ y por tanto la condición $Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ la podemos escribir como

$$\sum_{i=0}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2a_{ij}x_ix_j = 0 \tag{2.3}$$

Dada una forma cuadrática $Q(x_0, x_1, \dots, x_n)$ y dada la cuádriga proyectiva que define $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ podemos hablar de puntos diferenciables o lisos en la cuádriga.

Definición 2.2. Un punto $A \in Z(Q)$ se dice singular precisamente si para todo $i = 0, \dots, n$ se tiene que

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i}(A) = 0. \tag{2.4}$$

En caso contrario un punto se dice liso.

Dada la forma bilineal $F : V \times V \rightarrow K$ vamos a definir el concepto de subespacio radical de V .

Definición 2.3. Sea (V, F) un espacio métrico (ortogonal). Se define el radical de V como el subespacio ortogonal a V por F , es decir,

$$Rad_F(V) := V^\perp = \{\vec{x} \in V \mid \forall \vec{y} \in V, F(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}. \quad (2.5)$$

Analicemos ahora más en detalle qué son los puntos singulares de una cuádrlica proyectiva $Z(Q)$. Es bien sabido que podemos expresar la ecuación de una forma cuadrática en forma matricial. Escribamos, entonces, ésta en su desarrollo matricial y como polinomio de grado 2:

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^t \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \vec{x} = \sum_{i=0}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2a_{ij}x_ix_j \quad (2.6)$$

Por otra parte, la expresión correspondiente a la derivada parcial de Q con respecto a x_i es:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 2a_{ii}x_i + \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} 2a_{ij}x_j = 2a_{i0}x_0 + \dots + 2a_{ii}x_i + \dots + 2a_{in}x_n \quad (2.7)$$

Sabemos que los puntos singulares de la cuádrlica proyectiva $Z(Q)$ son aquellos que satisfacen el sistema de ecuaciones lineal homogéneo $\{\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0, i = 0, \dots, n\}$. Reescribamos tal sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2 \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Es decir, $[\vec{x}]$ es un punto singular de la cuádrlica si, y sólo si, \vec{x} pertenece al radical de $Q(\vec{x})$. Con lo cual, en un espacio métrico (V, Q) , los puntos singulares de la cuádrlica corresponden a la proyectivización del radical.

2.2. Teorema de estructura de las cuádricas proyectivas

Vamos a establecer algebraicamente cuando dos formas bilineales simétricas son esencialmente la misma. Para ello, dada una forma bilineal simétrica, veamos cómo cambia cuando realizamos un cambio de base.

Sea $F : V \times V \longrightarrow K$ y supongamos que fijada la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ tenemos una expresión analítica

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t (F(\vec{e}_i, \vec{e}_j)) \vec{y} \quad (2.9)$$

donde $(F(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$ es la matriz que representa a F . Sea $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ una nueva base expresada en función de \mathcal{B}_1 . Con lo cual $I_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = P$ es la matriz de cambio de base. De este modo, en \mathcal{B}_2 la forma bilineal se expresa analíticamente como:

$$F(\vec{x}', \vec{y}') = \vec{x}'^t (F(\vec{u}_i, \vec{u}_j)) \vec{y}' = (P\vec{x})^t (F(\vec{u}_i, \vec{u}_j)) (P\vec{y}) \quad (2.10)$$

$$= \vec{x}^t P^t (F(\vec{u}_i, \vec{u}_j)) P \vec{y} = \vec{x}^t (F(\vec{e}_i, \vec{e}_j)) \vec{y} = F(\vec{x}, \vec{y}) \quad (2.11)$$

Con lo cual, encontramos una relación de congruencia entre las matrices asociadas a las formas bilineales,

$$P^t (F(\vec{u}_i, \vec{u}_j)) P = (F(\vec{e}_i, \vec{e}_j)) \quad (2.12)$$

Así pues, podemos dar un primer teorema de clasificación.

Teorema 2.4. *Dada una forma bilineal simétrica $F : V \times V \longrightarrow K$, existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_{r-1}, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ para F . En ella, la matriz asociada a F , $M_{\mathcal{B}}(F)$, es diagonal*

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \text{diag}(F(\vec{e}_0, \vec{e}_0), \dots, F(\vec{e}_{r-1}, \vec{e}_{r-1}), \dots, F(\vec{e}_n, \vec{e}_n)) \quad (2.13)$$

y $\text{Rad}_F(V) = \langle \vec{e}_r, \dots, \vec{e}_n \rangle$

Estudiemos ahora la contrapartida geométrica. Dadas dos cuádricas $Z(Q_1)$ y $Z(Q_2)$, ¿cuándo diremos que son isomorfas?. Claramente debemos explicitar qué entendemos por un isomorfismo en el espacio proyectivo. Vayamos a la definición del espacio proyectivo.

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \{0\} \subset V & \xrightarrow{\pi} & V \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{P}(V) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \mathbb{P}(\sigma) \\ V \setminus \{0\} \subset V & \xrightarrow{\pi} & V \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{P}(V) \end{array} \quad (2.14)$$

Un isomorfismo $\sigma : V \longrightarrow V$ induce una aplicación biunívoca $\mathbb{P}(\sigma) : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$. Esto es lo que se conoce como un isomorfismo proyectivo o, abreviadamente, una *proyectividad*.

Definición 2.5. Dos cuádricas proyectivas $Z(Q_1)$ y $Z(Q_2)$ se dicen isomorfas proyectivamente o proyectivamente equivalentes precisamente si existe una proyectividad

$$\mathbb{P}(\sigma) : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V) \quad (2.15)$$

tal que

$$\mathbb{P}(\sigma)[Z(Q_1)] = Z(Q_2) \quad (2.16)$$

Claramente, si consideramos la proyectividad

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma) : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ [\vec{v}] &\longmapsto \mathbb{P}(V)[\sigma] := [\sigma(\vec{v})] \end{aligned} \quad (2.17)$$

es fácil ver que $Q_1 = Q_2 \circ \sigma$. Además, si $P = M(\sigma^{-1})$ es la matriz del isomorfismo σ^{-1} y $M(Q_1)$ y $M(Q_2)$ las matrices asociadas a las formas cuadráticas, entonces $M(Q_2) = P^t M(Q_1) P$. Dicho de otro modo:

Teorema 2.6. *Dos cuádricas proyectivas $Z(Q_1)$ y $Z(Q_2)$ son proyectivamente equivalentes si, y sólo si, las formas cuadráticas son congruentes, si, y sólo si, $Z(Q_1)$ y $Z(Q_2)$ son dos representaciones isomorfas de los vectores isotropos de una forma bilineal simétrica respecto de bases diferentes.*

Definición 2.7. Una forma cuadrática $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *no degenerada* o *lisa* precisamente si su rango es igual a $\dim(V)$. En caso contrario diremos que la cuádrlica es degenerada.

El primer teorema de clasificación que vimos antes nos proporciona el Teorema de estructura de una cuádrlica proyectiva $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ de rango r .

Teorema 2.8 (De Estructura De Las Cuádricas Projectivas). *Sea $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ una cuádrlica proyectiva de rango r y consideremos la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_{r-1}, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ en donde $\text{Rad}_{F_Q}(V) = \langle \vec{e}_r, \dots, \vec{e}_n \rangle$, $W = \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{r-1} \rangle$ y $V = \text{Rad}_{F_Q}(V) \oplus W$. Entonces $Z(Q)$ es el cono de rectas uniendo los puntos del subespacio $\mathbb{P}(\text{Rad}_{F_Q}(V)) \simeq \mathbb{P}^{n+1-r}$ y de una cuádrlica lisa o de rango r , $Z(Q) \cap \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^{r-1}$. Por esta razón el subespacio $\mathbb{P}(\text{Rad}_{F_Q}(V))$ se dice el vértice de la cuádrlica, y lo denotaremos como $\text{Ver}(Z(Q))$.*

Un corolario inmediato de este teorema es que una cuádrlica proyectiva será lisa si, y solamente si, el radical de su forma cuadrática es únicamente el $\{\vec{0}\}$.

Hagamos ahora una interpretación analítica de todo esto. Nótese que como un vector $\vec{x} \in \text{Rad}_F(V)$ es ortogonal con todos los del espacio V , entonces, en particular, también lo es consigo mismo y por tanto $Q(\vec{x}) = 0$, es decir, los vectores del radical son puntos de la cuádrlica proyectiva $\mathbb{P}(\text{Rad}_F(V)) \subset Z(Q)$. Además el radical es un subespacio lineal, luego $\mathbb{P}(\text{Rad}_F(V)) \subset Z(Q)$

es un subespacio proyectivo. Calculemos el sistema lineal que define a $Rad_F(V)$: fijamos una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ y sea $(F(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$ la matriz asociada a la forma bilineal simétrica F . Por simplicidad escribiremos $(a_{ij}) := (F(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$ y la matriz será ahora (a_{ij}) . La ecuación de la cuádrica proyectiva es

$$Q(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_n) (a_{ij}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

de donde,

$$Q(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2a_{ij}x_i x_j = 0 \quad (2.19)$$

Por otra parte, dado que cualquier $\vec{x} \in V$ se escribe de forma única como combinación lineal de vectores de la base \mathcal{B} , es claro que

$$Rad_F(V) = \{\vec{x} \in V \mid F(\vec{e}_0, \vec{x}) = \dots = F(\vec{e}_n, \vec{x}) = 0\} \quad (2.20)$$

Con lo cual, las ecuaciones de $Rad_F(V)$ se traducen en el sistema

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_0(a_{ij})\vec{x} = 0 \\ \dots \\ \vec{e}_i(a_{ij})\vec{x} = 0 \\ \dots \\ \vec{e}_n(a_{ij})\vec{x} = 0 \end{array} \right\} &\iff \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a_{00}x_0 + \dots + a_{0n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n0}x_0 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \right\} S \end{aligned} \quad (2.21)$$

y nos damos cuenta que corresponde exactamente con el sistema lineal homogéneo definido por las ecuaciones

$$\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_0}(\vec{x}) = 0, \dots, \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_n}(\vec{x}) = 0 \right\} \quad (2.22)$$

Nos encontramos ahora en condiciones de estudiar el concepto de *polaridad*.

2.3. Polaridad

Sea $H(x_0, \dots, x_n)$ un polinomio homogéneo de grado d en $n + 1$ variables. Si \vec{A} es solución de $H(x_0, \dots, x_n) = 0$, entonces también lo es toda la recta vectorial que genera, $\langle \vec{A} \rangle$, por lo que podemos pasar al espacio proyectivo y considerar una hipersuperficie $Z(H) \subset \mathbb{P}(V)$ definida de forma natural como

$$Z(H) := \{P = [\vec{A}] \in \mathbb{P}(V) \mid H(P) = 0\} \quad (2.23)$$

y de esta forma podemos considerar las derivadas parciales $\frac{\partial H}{\partial x_i}$.

Vamos a definir el hiperplano polar de un punto $P \in \mathbb{P}(V)$.

Definición 2.9. Sea $P \in \mathbb{P}(V)$ perteneciente o no a la hipersuperficie $Z(H)$ y consideremos la ecuación

$$\frac{\partial H}{\partial x_0}(P)x_0 + \dots + \frac{\partial H}{\partial x_i}(P)x_i + \dots + \frac{\partial H}{\partial x_n}(P)x_n = 0. \quad (2.24)$$

El subespacio denotado $Polar(P)$ y definido por esta ecuación se dice *subespacio polar* del punto P respecto de la hipersuperficie $Z(H)$.

Pues bien, de esta definición podemos extraer dos conclusiones importantes:

- Resulta que si P es un punto liso de la hipersuperficie, entonces existe al menos un $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(P) \neq 0 \quad (2.25)$$

con lo cual, el subespacio polar de P con respecto a $Z(H)$ no es otro que el hiperplano tangente a la hipersuperficie y es el lugar geométrico de las rectas tangentes a $Z(H)$ pasando por P .

- Por otra parte, si $P \in Z(H)$ es un punto singular, todas las parciales serán nulas, y por lo tanto el subespacio polar de dicho punto con respecto a $Z(H)$ será todo el espacio $\mathbb{P}(V)$.

Hagamos una observación con respecto al hiperplano tangente de un punto liso $P \in Z(H)$. Que una recta l sea tangente en P quiere decir que es límite de rectas que, pasando por P , cortan a $Z(H)$ en un punto más, es decir, rectas bisecantes a $Z(H)$. Algebraicamente esto significa que la intersección $l \cap Z(H)$ contiene a P con multiplicidad mayor o igual a 2.

Volvamos al caso que nos interesa, el de las cuádricas proyectivas. Atendiendo al grado d de la hipersuperficie proyectiva $Z(H)$, el caso más elemental es el de un hiperplano ($d = 1$) y el siguiente caso ($d = 2$) es el que se corresponde con una cuádrica. Veamos cómo se corresponden los conceptos de punto singular, hiperplano tangente, hiperplano polar y polaridad en general con los de subespacio radical y ortogonalidad en el espacio métrico (V, F_Q) .

Proposición 2.10. *Dado el espacio métrico ortogonal (V, F_Q) o, equivalentemente, la cuádrica proyectiva $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$, se tiene*

$$\text{Sing}(Z(Q)) = \mathbb{P}(\text{Rad}_F(V)) \subset Z(Q) \quad (2.26)$$

Demostración. El sistema lineal (2.21) definiendo al $\text{Rad}_F(V)$ es el mismo que el sistema lineal homogéneo (2.8) definiendo los puntos singulares de la cuádrica. \square

Proposición 2.11. *Sea $P = [\vec{v}] \in \mathbb{P}(V)$ un punto proyectivo. Entonces, el hiperplano polar del punto P con respecto a la cuádrica $Z(Q)$ es precisamente $\langle \vec{v} \rangle^\perp$ en el espacio métrico (V, F_Q) .*

Demostración. Calculemos $\langle \vec{v} \rangle^\perp$ en una base conveniente $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ donde $\vec{v} = \vec{e}_0$ y veamos que la ecuación de $\langle \vec{v} \rangle^\perp$ es la del hiperplano polar.

Si $(F(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$ es la matriz asociada a la forma bilinear F entonces, las ecuaciones de $\langle \vec{v} \rangle^\perp$ vienen dadas por

$$(x_0, \dots, x_n) (F(\vec{e}_i, \vec{e}_j)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.27)$$

es decir,

$$(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} F(\vec{e}_0, \vec{e}_0) \\ F(\vec{e}_1, \vec{e}_0) \\ \vdots \\ F(\vec{e}_n, \vec{e}_0) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^n F(\vec{e}_i, \vec{e}_0) x_i = 0 \quad (2.28)$$

Con lo cual, para demostrar el resultado, basta probar que

$$2F(\vec{e}_k, \vec{e}_0) = \frac{\partial Q}{\partial x_k}(\vec{e}_0) \quad (2.29)$$

la expresión de $\frac{\partial Q}{\partial x_k}(\vec{e}_0)$ es

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(Q(x_0, \dots, x_n)) = 2F(\vec{e}_k, \vec{e}_k)x_k + 2 \sum_{i \neq k} F(\vec{e}_i, \vec{e}_k)x_i. \quad (2.30)$$

Teniendo en cuenta que $P = [\vec{v}] \equiv (1 : 0 : \dots : 0)$, encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(Q(x_0, \dots, x_n))|_P = \begin{cases} 2F(\vec{e}_0, \vec{e}_0) & \text{if } k = 0 \\ 2F(\vec{e}_0, \vec{e}_k) & \text{if } k \neq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

De este modo, la ecuación (2.28) del ortogonal de $\langle \vec{v} \rangle^\perp$ se escribe:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_0}(P)x_0 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_k}(P)x_k + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_n}(P)x_n = 0 \quad (2.32)$$

que es, en todo caso, la ecuación del hiperplano polar al punto P respecto de la cuádrlica proyectiva. \square

Observación 2.12. Con mayor generalidad, si $W \subset V$ es un subespacio lineal, entonces podemos calcular W^{\perp_F} , y, análogamente, $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ es un subespacio proyectivo para el cual $\mathbb{P}(W^\perp) = \mathbb{P}(W)^\perp$ es el subespacio polar de $\mathbb{P}(W)$, también llamado su conjugado.

Corolario 2.13. *Dada una cuádrlica proyectiva $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$. Para cualquier punto $P \in \mathbb{P}(V)$, su subespacio polar contiene al lugar de puntos singulares de la cuádrlica. Si $P \in Z(Q)$ es un punto singular, entonces su subespacio polar es todo el espacio $\mathbb{P}(V)$.*

Demostración. Si $P \in \mathbb{P}(V)$, su subespacio polar es $Polar(P) \equiv \mathbb{P}(\langle \vec{v} \rangle^\perp)$, en donde $P = [\vec{v}]$. Ahora bien, $\langle \vec{v} \rangle^\perp$ es el subespacio de todos los vectores ortogonales a \vec{v} , en particular todo vector en $Rad_F(V)$ es ortogonal. Con lo cual $\mathbb{P}(Rad_F(V)) = Sing(Z(Q)) \subset Polar(P)$. \square

Hasta ahora parece que cuanto hemos hecho ha sido mostrar que los conceptos de ortogonalidad para (V, F) son conceptos ya conocidos para una cuádrlica proyectiva $Z(Q)$, y así es. Pero lo que haremos ahora es ver como el hecho de que la ecuación de una cuádrlica sea un polinomio homogéneo de grado 2 que determina la forma bilineal $F_Q : V \times V \rightarrow K$ también tiene sus ventajas.

Veremos ahora como el formalismo de las formas bilineales nos permite obtener resultados geométricos y caracterizar el subespacio polar de un punto ahora ya como el hiperplano tangente: rectas que pasando por un punto son tangentes a la cuádrlica; o como el hiperplano tal que su intersección con la cuádrlica son los puntos de tangencia de las rectas que forman el cono tangente a la cuádrlica con vértice en el punto, que llamaremos polo del hiperplano. Esto se consigue mediante el estudio de las intersecciones de una recta con una cuádrlica, que es lo que haremos a continuación.

2.4. Intersecciones de una recta con una cuádrica proyectiva

El estudio que haremos ahora ilustrará aún más quién es el hiperplano polar de un punto con respecto a una cuádrica proyectiva, cuando el punto o bien es exterior a la cuádrica, o bien no singular. Algebraicamente esto corresponderá a calcular el subespacio ortogonal asociado a un subespacio 1-dimensional.

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ sobre un cuerpo $K (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ y sea $\mathbb{P}(V)$ el espacio proyectivo n -dimensional asociado. Recordemos que un subespacio lineal proyectivo k -dimensional $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ es la imagen de un subespacio vectorial $(k + 1)$ -dimensional $W \subset V$. En particular, dos puntos $R = [\vec{v}]$ y $P = [\vec{w}]$ determinan una recta en el espacio proyectivo, \overline{RP} , que es la imagen del subespacio 2-dimensional $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Es decir, $\mathbb{P}(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) = \overline{RP}$, y un punto en esta recta es de la forma $\alpha R + \beta P = [\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}]$.

Estudiemos, entonces, los puntos comunes a una recta \overline{RP} y una hipersuperficie cuádrica $Z(Q)$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$.

Se trata de resolver el sistema de ecuaciones homogéneas

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(\vec{x}) = 0 \\ \vec{x} = \alpha R + \beta P \end{array} \right\} \iff Q(\alpha R + \beta P) = 0 \quad (2.33)$$

Nótese que éste es un polinomio homogéneo de grado dos en las variables α y β :

$$0 = Q(\alpha R + \beta P) = F_Q(\alpha R + \beta P, \alpha R + \beta P) \quad (2.34)$$

$$= \alpha^2 F_Q(R, R) + 2\alpha\beta F_Q(R, P) + \beta^2 F_Q(P, P) \quad (2.35)$$

Vamos a distinguir dos casos:

CASO 1: En la ecuación (2.35), el polinomio homogéneo de grado 2 es idénticamente nulo. En ese caso, se tendría $F_Q(R, R) = Q(R) = 0$, $F_Q(R, P) = 0$ y $F_Q(P, P) = Q(P) = 0$. De este modo $Q(R) = Q(P) = Q(\alpha R + \beta P) = 0$ y como $\alpha R + \beta P$ es un punto arbitrario de la recta \overline{RP} y pertenece a la cuádrica, concluimos que $\overline{RP} \subset Z(Q)$, es decir, la recta está completamente contenida en la cuádrica.

CASO 2: El polinomio de la ecuación (2.35) es no idénticamente nulo, luego alguno de sus coeficientes es distinto de cero. En este caso, al tratarse de un polinomio de grado dos en dos variables, tiene a lo sumo dos raíces si $K = \mathbb{R}$ y exactamente dos si $K = \mathbb{C}$. Tales raíces pueden ser disjuntas o coincidentes. Si son disjuntas diremos que la recta \overline{RP} es bisecante a la cuádrica y si son coincidentes diremos que tal recta es tangente a la cuádrica en el punto solución.

Vamos a describir más detalladamente estas situaciones. Consideremos la cuádrlica $Z(Q) \subset P(V)$ y sea $R \in \mathbb{P}(V)$ un punto que no está en la cuádrlica, por lo que $Q(R) \neq 0$. De este modo, las rectas pasando por R no están contenidas en la cuádrlica y, por tanto, o son exteriores a esta (sólo si $K = \mathbb{R}$), o la cortan en dos puntos distintos o en uno solo con multiplicidad 2, es decir, son rectas bisecantes o tangentes a la cuádrlica.

Vamos a caracterizar las rectas que pasando por $R \notin Z(Q)$ son tangentes a $Z(Q)$. Sea entonces $R \notin Z(Q)$. Sea X un punto cualquiera en una recta cualquiera pasando por R , es decir, para cada $X \neq R$ en $\mathbb{P}(V)$ consideremos la recta \overline{XR} . Los puntos comunes a \overline{XR} y a $Z(Q)$ son las soluciones de

$$\alpha^2 F_Q(X, X) + 2\alpha\beta F_Q(X, R) + \beta^2 F_Q(R, R) = 0 \quad (2.36)$$

Podemos suponer $X \in Z(Q)$ y entonces la ecuación anterior se reduce a

$$2\alpha\beta F_Q(X, R) + \beta^2 F_Q(R, R) = 2\alpha\beta F_Q(X, R) + \beta^2 Q(R) = 0 \quad (2.37)$$

La solución $\beta = 0$ se corresponde con el punto X y se pueden dar dos situaciones:

2.1 La recta \overline{XR} corta la cuádrlica en otro punto distinto a X y, así, tal punto corresponde con la solución (α, β) satisfaciendo

$$2\alpha F_Q(X, R) + \beta F_Q(R, R) = 0 \quad (2.38)$$

2.2 La raíz $\beta = 0$ es solución doble de la ecuación (2.38) y como $\alpha \neq 0$ se tiene que $F_Q(X, R) = 0$ (nótese que $\alpha \neq 0$ pues si no fuese así, como la ecuación (2.38) es no idénticamente nula, $\beta = 0$, pero entonces $Q(R) = 0$ pero hemos tomado $R \notin Z(Q)$). Así pues, siendo $\alpha \neq 0$ la recta \overline{XR} corta a la cuádrlica en X con multiplicidad dos y además $F_Q(X, R) = 0$ significa que X yace en el hiperplano polar de R respecto a $Z(Q)$.

Aquí estamos diciendo muchas cosas:

2.2.1 Dado un punto R exterior a la cuádrlica, un punto $X \in Z(Q)$ pertenece a una recta \overline{XR} tangente a la cuádrlica en X precisamente si también pertenece al hiperplano polar de R con respecto a $Z(Q)$.

En esta situación encontramos un lugar geométrico interesante, el de las rectas que pasando por R son tangentes a la cuádrlica, es decir, el cono tangente a $Z(Q)$ con vértice $R \notin Z(Q)$. Obtengamos la ecuación de dicho cono. Volvamos a la ecuación (2.36), que proporciona las intersecciones de la recta \overline{XR} con la cuádrlica. Ya vimos que como $R \notin Z(Q)$, $\alpha \neq 0$ y podemos reescribir la ecuación como una en una sola variable $\lambda := \frac{\beta}{\alpha}$,

$$\lambda^2 Q(R) + 2\lambda F_Q(X, R) + Q(X) = 0 \quad (2.39)$$

que tiene dos raíces distintas o coincidentes, en función de que el discriminante

$$\Delta = 4F_Q(X, R)^2 - 4Q(R)Q(X) \quad (2.40)$$

$$= 4(X^t M_Q R)^2 - 4(X^t M_Q X)(R^t M_Q R) \quad (2.41)$$

sea cero o no (donde en (2.41) hemos usado la expresión matricial de la forma cuadrática).

Con lo cual, si X es un punto genérico en la recta \overline{XR} que es tangente a la cuádrica, entonces el discriminante anterior ha de ser nulo. Por tanto, el lugar geométrico de los puntos que yacen en las rectas \overline{XR} que son tangentes a $Z(Q)$ tiene ecuación:

$$(X^t M_Q R)^2 - (X^t M_Q X)(R^t M_Q R) = 0 \quad (2.42)$$

que claramente es la ecuación de una cuádrica y de hecho en este caso se trata de un cono (R es un punto singular para esta cuádrica).

2.3 El punto $R \in Z(Q)$ y X un punto arbitrario que supondremos no perteneciente a la cuádrica. En este caso, la ecuación (2.36) se escribe

$$\alpha^2 Q(X) + 2\alpha\beta F_Q(R, X) = 0 \quad (2.43)$$

La solución inmediata $\alpha = 0$ proviene del hecho de que $R \in Z(Q)$. Queda entonces resolver la ecuación

$$\alpha Q(X) + 2\beta F_Q(R, X) = 0 \quad (2.44)$$

En este caso, que $\alpha = 0$ vuelva a ser solución equivale a que la recta \overline{XR} sea tangente a la cuádrica en R , quedando la condición para X de que $F_Q(X, R) = 0$. Pero $\beta \neq 0$ ya que entonces $X \in Z(Q)$, lo cual hemos supuesto falso. Por tanto, el lugar geométrico de los puntos que yacen en las rectas tangentes a $Z(Q)$ pasando por R satisfacen la ecuación

$$F_Q(X, R) = X^t M_Q R = 0 \quad (2.45)$$

y forman un hiperplano: el polar a R respecto $Z(Q)$.

Continuemos el estudio de los hiperplanos tangentes. Geométricamente, respecto de una cuádrica proyectiva $Z(Q)$, diremos que dos subespacios proyectivos $\mathbb{P}(W_1)$ y $\mathbb{P}(W_2)$ son conjugados cuando para todo $x = [\vec{x}] \in \mathbb{P}(W_1)$ y para todo $y = [\vec{y}] \in \mathbb{P}(W_2)$ se tiene

$$\vec{x}^t M_Q \vec{y} = 0 \quad (2.46)$$

En el caso particular en que $W_1 = \langle \vec{x} \rangle$ y $W_2 = \langle \vec{y} \rangle$, decir que \vec{x} es ortogonal a \vec{y} equivale a que $\vec{x}^t M_Q \vec{y} = 0$, es decir, el punto $x = [\vec{x}]$ pertenece al hiperplano polar del punto $y = [\vec{y}]$ con respecto a la cuádrica $Z(Q)$.

Esta situación de puntos conjugados admite una versión dual:

Definición 2.14. Dada una cuádrlica proyectiva no degenerada, dos hiperplanos H_1 y H_2 se dicen conjugados precisamente si cada hiperplano contiene al polo del otro. Es decir, si $H_1 = \text{Polar}_Q(P_1)$ y $H_2 = \text{Polar}_Q(P_2)$, entonces: H_1 y H_2 son conjugados si, y solamente si, $P_2 \in H_1$ y $P_1 \in H_2$.

Vamos a concluir con un resultado muy importante.

Teorema 2.15. Sea $Z(Q)$ una cuádrlica no degenerada y sea H un hiperplano fijo. Podemos escribir $H = \text{Polar}_Q(P)$ siendo P el polo del hiperplano. Entonces, los hiperplanos polares respecto de todos los puntos de H pasan por el polo P . Es más, la intersección de todos ellos es precisamente P .

Demostración. Supongamos $\dim(V) = n + 1$ y $V = \langle \vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n \rangle$ y sea $H = \text{Polar}_Q(P)$. Si $P = [\vec{v}]$, entonces siendo $H = \mathbb{P}(W)$ se tiene que $W = \langle \vec{v} \rangle^\perp = \langle \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \rangle$. Por las propiedades del ortogonal,

$$W^\perp = \langle \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \rangle^\perp = \langle \vec{w}_1 \rangle^\perp \cap \dots \cap \langle \vec{w}_n \rangle^\perp. \quad (2.47)$$

Además,

$$W^\perp = (\langle \vec{v} \rangle^\perp)^\perp = \langle \vec{v} \rangle \quad (2.48)$$

De este modo, cada vector $\vec{w}_i \in W$ satisface $\langle \vec{v} \rangle = W^\perp \subset \langle \vec{w}_i \rangle$ luego, cada punto $P_i \in H$ es tal que su polar, $H_i = \text{Polar}_Q(P_i)$, contiene al punto P . Además, tomando la base $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ de W , tenemos que $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n = \text{Polar}_Q(P_1) \cap \text{Polar}_Q(P_2) \cap \dots \cap \text{Polar}_Q(P_n) = P$, luego hemos acabado. \square

2.5. Clasificación proyectiva de cuádricas

Vamos a enunciar y demostrar el Primer Teorema de Estructura para un espacio métrico ortogonal.

Teorema 2.16 (Primer Teorema de Estructura). *Sea (V, F) un espacio métrico ortogonal con F una forma bilineal no idénticamente nula. Entonces,*

1. Existe un vector no isótropo \vec{u}_1 de tal forma que $V = \langle \vec{u}_1 \rangle \oplus \langle \vec{u}_1 \rangle^\perp$.
2. Existe una base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$ ortogonal¹ para F , es decir, $F(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$ si $i \neq j$ y, por tanto, la matriz asociada respecto a tal base es diagonal

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \text{diag}(F(\vec{u}_1, \vec{u}_1), \dots, F(\vec{u}_r, \vec{u}_r), \dots, F(\vec{u}_n, \vec{u}_n)). \quad (2.49)$$

3. Para cualquier base como en 2., si r es el número de vectores no isótropos (es decir, si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ son no isótropos y $\{\vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$ son isótropos) entonces,

$$\text{Rad}_F(V) = \langle \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n \rangle \quad (2.50)$$

De este modo, el número de vectores no isótropos, r , en una base ortonormal es un invariante para el espacio métrico (V, F) y, de hecho, el radical de F está generado por los vectores isótropos de cualquier base ortonormal para (V, F) teniéndose,

$$\dim(\text{Rad}_F(V)) = \dim(V) - \text{rango}(F). \quad (2.51)$$

4. Dado $\text{Rad}_F(V) \subset V$, si W es cualquier espacio suplementario al radical, la descomposición en suma directa

$$V = \text{Rad}_F(V) \oplus W \quad (2.52)$$

es una suma ortogonal y el subespacio métrico $(W, F_W) \subset (V, F)$ es no degenerado.

Demostración. 4. Sabemos que $\text{Rad}_F(V) = \{\vec{y} \in V \mid F(\vec{y}, \vec{x}) = 0 \forall \vec{x} \in V\} \subset V$ es un subespacio. Como cualquier vector $\vec{y} \in \text{Rad}_F(V)$ es ortogonal con todo vector de V , en particular es ortogonal consigo mismo, con los demás vectores del radical y con cualquier vector de cualquier subespacio suplementario, por tanto se tiene

$$V = \text{Rad}_F(V) \oplus W \quad (2.53)$$

ortogonal. Probemos ahora que (W, F_W) es un subespacio no degenerado. Veamos que $\text{Rad}_{F_W}(W) = W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$. Para ello, sea $\vec{x} \in W \cap W^\perp$. Como $\vec{x} \in W^\perp$ la forma

¹Cuando en la base existen vectores isótropos se suele utilizar el término pseudoortogonal.

lineal $F(\vec{x}, -) : W \rightarrow \mathbb{R}$ es idénticamente nula. Como esta forma lineal es la restricción de la definida por \vec{x} en V , se tiene que $F(\vec{x}, -) : V \rightarrow \mathbb{R}$ se anula en W . Ahora bien, $\vec{x} \in W \subset V$, con lo cual cada $\vec{y} \in \text{Rad}_F(V)$ es ortogonal con \vec{x} . Por tanto, la forma lineal $F(\vec{x}, -) : W \oplus \text{Rad}_F(V) \rightarrow \mathbb{R}$ es idénticamente nula. Es decir, \vec{x} se anula como forma lineal tanto en W como en $\text{Rad}_F(V)$, luego $\vec{x} \in \text{Rad}_F(V)$. Como $W \cap \text{Rad}_F(V) = \{\vec{0}\}$ (por lo visto antes) necesariamente $\vec{x} = \vec{0}$. Por tanto, $\text{Rad}_{F_W}(W) = W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ y (W, F_W) es no degenerado.

1. Recordemos que

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}[Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})] \quad (2.54)$$

por tanto, F será idénticamente nula si, y sólo si, todo vector de V es isótropo. Sea F no idénticamente nula. Entonces existe al menos un vector no isótropo \vec{u}_1 . Veamos que para cualquier vector $\vec{v} \in V$ existen α y $\vec{v}_1 \in \langle \vec{u}_1 \rangle^\perp$ de tal forma que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \alpha\vec{u}_1$. Equivalentemente, probemos que existe α único tal que $\vec{v} - \alpha\vec{u}_1 \in \langle \vec{u}_1 \rangle^\perp$. La condición de ortogonalidad se escribe

$$0 = F(\vec{v} - \alpha\vec{u}_1, \vec{u}_1) = F(\vec{v}, \vec{u}_1) - \alpha F(\vec{u}_1, \vec{u}_1) \quad (2.55)$$

Como \vec{u}_1 es no isótropo, $Q(\vec{u}_1) = F(\vec{u}_1, \vec{u}_1) \neq 0$ y

$$\alpha = \frac{F(\vec{v}, \vec{u}_1)}{F(\vec{u}_1, \vec{u}_1)} \quad (2.56)$$

está perfectamente determinado de modo único. Con lo cual la descomposición

$$V = \langle \vec{u}_1 \rangle \oplus \langle \vec{u}_1 \rangle^\perp \quad (2.57)$$

es cierta.

2. Consideremos ahora el espacio métrico $(\langle \vec{u}_1 \rangle^\perp, F)$ y reiteremos el argumento de **1.**, o bien $F|_{\langle \vec{u}_1 \rangle^\perp}$ es idénticamente nula y ampliando $\{\vec{u}_1\}$ con cualquier base de $\langle \vec{u}_1 \rangle^\perp$ concluimos, o bien existe un segundo vector no isótropo \vec{u}_2 de tal forma que

$$\langle \vec{u}_1 \rangle^\perp = \langle \vec{u}_2 \rangle \oplus \langle \vec{u}_2 \rangle^\perp. \quad (2.58)$$

Como nos encontramos en dimensión finita, eventualmente este proceso finalizaría y habremos construido una base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$ ortogonal para F satisfaciendo 2.

3. Por último, sea $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s, \vec{u}_{s+1}, \dots, \vec{u}_n\}$ cualquier base ortogonal para (V, F) donde $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s\}$ son los vectores no isótropos de la base. En particular $\langle \vec{u}_{s+1}, \dots, \vec{u}_n \rangle \subset \text{Rad}_F(V)$. Probemos el contenido recíproco. Sea $\vec{y} \in V$ y escribámoslo en la base \mathcal{B}' :

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^s \alpha_i \vec{u}_i + \sum_{j=s+1}^n \alpha_j \vec{u}_j \quad (2.59)$$

Recordemos que $F(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$ si $i \neq j$ y $F(\vec{u}_j, \vec{u}_j) = 0$ si $j \in \{s+1, \dots, n\}$. Siendo $\vec{y} \in \text{Rad}_F(V)$ y teniendo en cuenta que

$$F(\vec{y}, \vec{u}_k) = \sum_{i=1}^s \alpha_i F(\vec{u}_i, \vec{u}_k) + \sum_{j=s+1}^n \alpha_j F(\vec{u}_j, \vec{u}_k) \quad (2.60)$$

si $k = s+1, \dots, n$ no obtenemos información ($0 = 0$). Sin embargo, si $k = 1, \dots, s$ se tiene

$$0 = \sum_{i=1}^s \alpha_i F(\vec{u}_i, \vec{u}_k) = \alpha_k \quad (2.61)$$

Con lo cual $\vec{y} = \sum_{j=s+1}^n \alpha_j \vec{u}_j \in \langle \vec{u}_{s+1}, \dots, \vec{u}_n \rangle$, es decir, $\text{Rad}_F(V) \subset \langle \vec{u}_{s+1}, \dots, \vec{u}_n \rangle$.

□

Expondremos a continuación el análogo geométrico del resultado anterior. En este caso pondremos especial énfasis en la descomposición

$$V = \text{Rad}_F(V) \oplus W. \quad (2.62)$$

Recordemos que $\mathbb{P}(\text{Rad}_F(V)) = \text{Sing}(Z(Q))$ es el subespacio lineal de puntos singulares de la cuádrica proyectiva $Z(Q)$.

Nótese que, como $\text{Rad}_F \cap W = \{\vec{0}\}$, pasando al espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, los subespacios $\mathbb{P}(\text{Rad}_F(V))$ y $\mathbb{P}(W)$ son disjuntos. Además, la restricción de la cuádrica a $\mathbb{P}(W)$ es

$$Z(Q) \cap \mathbb{P}(W) = Z(Q_W) \quad (2.63)$$

y, como Q_W es la forma cuadrática asociada al espacio métrico (W, F_W) que es no degenerado, resulta que la cuádrica proyectiva $Z(Q_W) \subset \mathbb{P}(W)$ es lisa o no degenerada.

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.17 (De Estructura de Cuádricas Proyectivas). *Sea $\mathbb{P}(V)$ el espacio proyectivo n -dimensional y sea $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva de rango r . Entonces, $\text{Sing}(Z(Q)) = \mathbb{P}(\text{Rad}_Q(V))$ es un subespacio de dimensión $n - r$. La cuádrica, o bien es lisa ($r = n + 1$), o bien es un cono formado por las rectas que unen los puntos singulares de la cuádrica con los puntos de una cuádrica lisa de rango r en un subespacio proyectivo $\mathbb{P}^{r-1} = \mathbb{P}(W)$ tal que $V = \text{Rad}_Q(V) \oplus W$. Además, existe una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_{r-1}, \vec{e}_r, \dots, \vec{e}_n\}$ respecto de la cual la ecuación de la cuádrica es $x_0^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$ y, en particular, la del lugar de los puntos singulares es $x_0 = \dots = x_{r-1} = 0$. Es decir,*

$$Z(Q) = \bigcup_{\substack{R \in \text{Sing}(Z(Q)) \\ T \in Z(Q_W)}} \overline{RT} \quad (2.64)$$

Demostración. El contenido recíproco \supset es inmediato: en efecto, para cada $R \in \mathbb{P}(\text{Rad}_Q(V))$ y cada $T \in Z(Q)$, un punto genérico en la recta \overline{RT} es de la forma $\alpha R + \beta T$. Como $R \in \mathbb{P}(\text{Rad}_Q(V))$ se tiene que R es ortogonal a T por Q . De hecho R es ortogonal a cualquier punto del espacio proyectivo. Por tanto,

$$Q(\alpha R + \beta T) = \alpha^2 Q(R) + 2\alpha\beta F_Q(R, T) + \beta^2 Q(T) = 0 \quad (2.65)$$

Veamos entonces que dado cualquier punto x de la cuádrica, este yace sobre una recta \overline{RT} con R un punto singular de $Z(Q)$ y $T \in Z(Q) \cap \mathbb{P}(W) = Z(Q_W)$.

Supongamos $x \notin \text{Sing}(Z(Q)) \cup Z(Q_W)$ y $x \in Z(Q)$, en caso contrario ya habríamos acabado. Pensando x como vector en V , se verifica que los subespacios $\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle$ y $W + \langle \vec{x} \rangle$ tienen dimensiones $\dim(\text{Rad}_Q(V)) + 1$ y $\dim(W) + 1$ respectivamente. Vamos a probar que $(\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle) \cap (W + \langle \vec{x} \rangle)$ es un subespacio 2-dimensional en V que contiene a $\langle \vec{x} \rangle$ y, por tanto, su proyectivizado es una recta. Veremos entonces que esta recta corta a $\text{Sing}(Z(Q))$ en un punto R y a $Z(Q_W)$ en un punto T . De este modo, $x \in \overline{RT}$, como queríamos demostrar. Pues bien, que $(\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle) \cap (W + \langle \vec{x} \rangle)$ tiene dimensión 2 es consecuencia de la fórmula de Grassmann. La suma de ambos subespacios es V , por tanto,

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim((\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle) \cap (W + \langle \vec{x} \rangle)) \\ &= \dim(\text{Rad}_Q(V)) + 1 + \dim(W) \\ &\quad + 1 - \dim((\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle) \cap (W + \langle \vec{x} \rangle)) \end{aligned}$$

Como $V = \text{Rad}_Q(V) \oplus W$, $\dim(V) = \dim(\text{Rad}_Q(V)) + \dim(W)$, teniéndose así que

$$\dim((\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle) \cap (W + \langle \vec{x} \rangle)) = 2 \quad (2.66)$$

como queríamos ver.

Por otra parte, claramente $\langle \vec{x} \rangle \in (\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle) \cap (W + \langle \vec{x} \rangle) = V_2$. Así, $\mathbb{P}(V_2)$ define una recta. Veamos que esta recta corta a $\text{Sing}(Z(Q))$ y a $Z(Q_W)$. Para ello, probemos que $V_2 \cap \text{Rad}_Q(V)$ y $V_2 \cap W$ son subespacios 1-dimensionales.

Trabajando en $\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle$ que contiene a V_2 y a $\text{Rad}_Q(V)$, y, como $\text{Rad}_Q(V) + V_2 = \text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle$, se tiene,

$$\dim(\text{Rad}_Q(V) \cap V_2) = \dim(\text{Rad}_Q(V)) + \dim(V_2) - \dim(\text{Rad}_Q(V) + \langle \vec{x} \rangle) \quad (2.67)$$

$$= \dim(\text{Rad}_Q(V)) + 2 - \dim(\text{Rad}_Q(V)) - 1 = 1 \quad (2.68)$$

Análogamente $W + \langle \vec{x} \rangle$ contiene a V_2 y a W y, como $W + \langle \vec{x} \rangle = W + V_2$, se tiene,

$$\dim(W \cap V_2) = \dim(W) + \dim(V_2) - \dim(W + \langle \vec{x} \rangle) \quad (2.69)$$

$$= \dim(W) + 2 - \dim(W) - 1 = 1 \quad (2.70)$$

Por tanto la recta $\mathbb{P}(V_2)$ corta a $Sing(Z(Q))$ en un punto R y a $Z(Q_W)$ en un punto T . Pero también tenemos que $\mathbb{P}(V_2) = \overline{RT} = \overline{Rx}$ y R y x son dos puntos de la cuádrica ortogonales. Con lo cual, con el mismo argumento usado para probar el contenido " \supset ", cada punto $\alpha x + \beta R$ de la recta $\mathbb{P}(V_2)$ yace en la cuádrica. Es decir, $\overline{RT} \subset Z(Q)$. Ahora, como $T \in \mathbb{P}(W) \cap Z(Q) = Z(Q_W)$ tenemos que ciertamente cada punto x de la cuádrica yace en una recta contenida en $Z(Q)$ que une un punto del espacio singular con otro de la sección cuádrica $\mathbb{P}(W) \cap Z(Q)$.

Finalmente, la ecuación de la cuádrica es la descrita porque podemos construir una base ortogonal donde Q diagonaliza y $\mathbb{P}(Rad_Q(V))$ es la parte totalmente isótropa. \square

2.5.1. Clasificación de formas cuadráticas

Llegados a este punto podemos plantearnos clasificar formas cuadráticas o, equivalentemente, estudiar cuándo dos cuádricas proyectivas son isomorfas.

Por una parte, dada una forma cuadrática sabemos que, cambiando de base, las distintas matrices asociadas son congruentes y tienen el mismo rango, y es el rango de la forma cuadrática. Este hecho se refleja en la existencia de una base ortonormal en la cual existen exactamente r vectores no isótropos y respecto de la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal.

Nos preguntamos ahora si el rango es el único invariante para clasificar una forma cuadrática o existen más. Claramente debe haber más, al menos en el caso real pues las formas cuadráticas $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ y $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ tienen el mismo rango y sin embargo la primera define la cónica proyectiva vacía y la segunda una cónica lisa. De este modo, pese a que ambas tienen rango 3, no existe una proyectividad $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ que aplique el vacío en un conjunto de puntos. Con lo cual el rango no es el único invariante para clasificar formas cuadráticas al menos en el caso real.

Recordemos que dos formas cuadráticas Q_1 y Q_2 son congruentes si existe un automorfismo $\sigma : V \rightarrow V$ de tal forma que $Q_1 \circ \sigma = Q_2$.

Geoméricamente está claro cuando dos cuádricas son proyectivamente equivalentes: $Z(Q_1)$ y $Z(Q_2)$ lo son precisamente si existe una proyectividad $\mathbb{P}(\sigma) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ de tal forma que $\mathbb{P}(\sigma)[Z(Q_1)] = Z(Q_2)$.

Como $\sigma : V \rightarrow V$ es tal que $Q_1 \circ \sigma = Q_2$, para cada $\vec{v} \in V$, se tiene $Q_2(\sigma(\vec{v})) = Q_1(\vec{v})$, y como la forma cuadrática determina la forma bilineal asociada, también podemos decir que dos formas bilineales F_{Q_1} y F_{Q_2} son congruentes si, y sólo si, existe un automorfismo $\sigma : V \rightarrow V$ de tal forma que para cualesquiera dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ se verifica,

$$F_{Q_1}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = F_{Q_2}(\sigma(\vec{v}_1), \sigma(\vec{v}_2)) \quad (2.71)$$

Con lo cual, de forma natural, definimos:

Definición 2.18. Dados dos espacios métricos (V, F_1) y (V, F_2) , diremos que son *isométricos* precisamente si existe un isomorfismo lineal $\sigma : V \rightarrow V$ tal que para todos $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, se verifica

$$F_1(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = F_2(\sigma(\vec{v}_1), \sigma(\vec{v}_2)) \quad (2.72)$$

Observación 2.19. Abreviadamente diremos que σ es una isometría: un isomorfismo que conserva la métrica.

Para un espacio métrico ortogonal cualquiera, el Primer Teorema de Estructura nos garantiza la existencia de una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ respecto la cual la matriz asociada es diagonal ($\text{diag}(F(\vec{e}_0, \vec{e}_0), \dots, F(\vec{e}_n, \vec{e}_n))$). Por tanto, ahora sí tenemos claro cuando dos formas cuadráticas son congruentes y definen el mismo espacio métrico.

Teorema 2.20 (De Clasificación de Formas Cuadráticas). Sean (V, F_{Q_1}) y (V, F_{Q_2}) dos espacios métricos ortogonales. Entonces, son equivalentes:

- (i) Las formas cuadráticas asociadas Q_1 y Q_2 son congruentes,
- (ii) los espacios métricos (V, F_{Q_1}) y (V, F_{Q_2}) son isométricos,
- (iii) existen bases \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 para Q_1 y Q_2 respectivamente, de tal modo que las matrices asociadas en dichas bases son las mismas.

Demostración. Supongamos $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_{r-1}, \vec{e}_r, \dots, \vec{e}_n\}$ con $Q(\vec{e}_i) \neq 0$ para $i = 1, \dots, r-1$ y sea $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_{r-1}, \vec{u}_r, \dots, \vec{u}_n\}$ con $Q(\vec{u}_i) \neq 0$ para $i = 1, \dots, r-1$. Entonces, Q_1 y Q_2 son congruentes si, y sólo si, $Q(\vec{e}_i) = Q(\vec{u}_i)$ para todo $i = 1, \dots, r-1$.

En tal caso, construimos el isomorfismo $\sigma : V \rightarrow V$ aplicando $\vec{e}_i \mapsto \vec{u}_i$. □

Veamos ahora que para clasificar, la aritmética del cuerpo K donde trabajamos parece jugar un papel clave.

Por ejemplo, si $K = \mathbb{R}$, en una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$, cada $Q(\vec{e}_i)$ puede ser mayor que cero, menor que cero, o cero. Lo que nos quiere decir esto es que el número de vectores no isotropos positivos (equivalentemente negativos) de cualquier base ortogonal debe ser constante. Probaremos que este número es un invariante y es lo que se conoce como el Teorema de Sylvester.

Por otra parte, cuando $K = \mathbb{C}$, lo que se tiene es que para cualquier base ortogonal, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$, la única condición para cada $Q(\vec{e}_i)$ es ser igual o distinto a cero. Con lo cual, en este

caso el rango es suficiente para clasificar las cuádricas. Dada la base \mathcal{B} , basta con sustituir cada vector por su normalizado, es decir, por

$$\vec{u}_i := \frac{1}{\sqrt{Q(\vec{e}_i)}} \cdot \vec{e}_i. \quad (2.73)$$

Entonces,

$$Q(\vec{u}_i) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{Q(\vec{e}_i)}} \cdot \vec{e}_i\right) = \frac{1}{Q(\vec{e}_i)} \cdot Q(\vec{e}_i) = 1 \quad (2.74)$$

y, por lo tanto, en la base $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ se tiene que la matriz asociada es

$$\text{diag}(1, \overbrace{\dots}^r, 1, 0, \dots, 0) \quad (2.75)$$

Llamaremos a esta matriz la *canónica* de la cuádrica. Por lo tanto: en \mathbb{C}^{n+1} o en $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ existen $n + 1$ cuádricas proyectivas caracterizadas por el rango, y sus ecuaciones canónicas son $x_0^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$ (siendo r el rango de la cuádrica).

Clasificación de cuádricas proyectivas reales

Ya hemos dicho que, en este caso, la referencia autopolar definida por la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$, con rango $r + 1$, podemos modificarla reordenando los vectores de forma que $\text{Rad}_Q(V) = \langle \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n \rangle$. Reordenemos ahora la base de manera que:

- para $1 \leq i \leq s$, $Q(\vec{e}_i) > 0$, y cambiamos \vec{e}_i por

$$\vec{u}_i := \frac{1}{\sqrt{Q(\vec{e}_i)}} \cdot \vec{e}_i, \quad (2.76)$$

- para $s + 1 \leq j \leq r$, $Q(\vec{e}_j) < 0$, y cambiamos \vec{e}_j por

$$\vec{u}_j := \frac{1}{\sqrt{-Q(\vec{e}_j)}} \cdot \vec{e}_j, \quad (2.77)$$

- y para $r + 1 \leq k \leq n$, $\vec{u}_k := \vec{e}_k$.

Con respecto a esta nueva base $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s, \vec{u}_{s+1}, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_n\}$, que llamaremos *normalizada*, la matriz asociada a la forma cuadrática es de la forma,

$$M_{\mathcal{B}'} = \text{diag}(1, \overbrace{\dots}^{s+1}, 1, -1, \underbrace{\dots}_{r-s}, -1, 0, \dots, 0) \quad (2.78)$$

Vamos a demostrar que, en efecto, el número de “+1” y “-1” es constante.

Teorema 2.21 (De Sylvester) (De Inercia). *Para una forma cuadrática real no degenerada, el número de “+1” y “-1” de una matriz diagonal es independiente de la base ortnormal escogida para construirla.*

Demostración. En primer lugar, obsérvese que hemos requerido que la forma cuadrática sea no degenerada porque la situación depende de la restricción de la forma a un subespacio suplementario al radical.

Sean entonces dos bases $\mathcal{B} = \{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_{s_1}, \dots, \vec{u}_r\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{s_2}, \dots, \vec{v}_r\}$ del suplementario del radical. Queremos ver que $s_1 = s_2$.

Veamos que $s_1 \leq s_2$. Consideremos los subespacios

$$L_1 := \langle \vec{u}_0, \dots, \vec{u}_{s_1} \rangle \quad y \quad L_2 := \langle \vec{v}_{s_2+1}, \dots, \vec{v}_r \rangle. \quad (2.79)$$

Claramente, la forma cuadrática Q restringida a L_1 es definida positiva ($Q(\vec{x}) > 0$ para cualquier $\vec{x} \in L_1 \setminus \{\vec{0}\}$), mientras que en L_2 es definida negativa ($Q(\vec{y}) < 0$ para cualquier $\vec{y} \in L_2 \setminus \{\vec{0}\}$), con lo cual, $L_1 \cap L_2 = \{\vec{0}\}$. Consideremos ahora,

$$L_1 + L_2 \subseteq \langle \vec{u}_0, \dots, \vec{u}_r \rangle = \langle \vec{v}_0, \dots, \vec{v}_r \rangle \quad (2.80)$$

tomando dimensiones,

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) = s_1 + 1 + r - s_2 \quad (2.81)$$

$$\leq \dim(\langle \vec{u}_0, \dots, \vec{u}_r \rangle) = r + 1 \quad (2.82)$$

de donde, $s_1 \leq s_2$. Cambiando los papeles se prueba que $s_2 \leq s_1$, luego $s_1 = s_2$, como queríamos probar. \square

Conviene reformular este Teorema de la siguiente forma,

Teorema 2.22 (De Inercia de Sylvester). *Sea (V, F) un espacio métrico, ortogonal y real, y $Q_F : V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática asociada. Entonces, existen subespacios V_+ , V_- y V_0 satisfaciendo:*

- (i) $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$, siendo la suma ortogonal,
- (ii) las restricciones $Q_- : V_- \rightarrow \mathbb{R}$ y $Q_+ : V_+ \rightarrow \mathbb{R}$ son respectivamente definidas positiva y negativa,
- (iii) el subespacio $V_0 \subset V$ es totalmente isótropo. Es decir, $Q(\vec{x}) = 0$ para cualquier $\vec{x} \in V_0$,
- (iv) para cualquier otra descomposición $V = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$ verificando (i), (ii) y (iii), se tiene

$$\dim(W_+) = \dim(V_+) \quad , \quad \dim(W_-) = \dim(V_-) \quad y \quad \dim(W_0) = \dim(V_0) \quad (2.83)$$

y, de hecho, $W_0 = V_0 = \text{Rad}_Q(V)$.

Por tanto, en el caso real, este Teorema es un verdadero teorema de clasificación de espacios métricos ortogonales.

Es claro que, siendo $s \neq r - s$, no es lo mismo un espacio vectorial con una descomposición bajo la cual $\dim(V_+) = s$ que otro donde $\dim(V_+) = r - s$. Sin embargo, para una forma cuadrática Q , esto sucede en el espacio métrico tan pronto como multipliquemos a Q por -1 . Por el contrario, las formas Q y $-Q$ definen la misma cuádrica proyectiva o cono isótropo ($\text{Rad}_Q(V) = \text{Rad}_{-Q}(V)$). Es por esto que vamos a distinguir entre dos conceptos: la *signatura métrica* y la *signatura proyectiva*.

Definición 2.23. Para un espacio métrico ortogonal real (V, F) y considerando una base ortogonal normalizada en donde la matriz asociada es de la forma $\text{diag}(1, \overbrace{\dots}^{s+1}, 1, -1, \underbrace{\dots}_{r-s}, -1, 0, \dots, 0)$, llamaremos *signatura métrica* del espacio a la diferencia entre el número de “+1” y el número de “-1”.

Llamaremos *signatura proyectiva* de una forma cuadrática al valor absoluto de la signatura métrica.

Por último, enunciemos un corolario del Teorema de Sylvester en su forma algebraica y geométrica.

Corolario 2.24.

1. *Dos formas cuadráticas reales definen el mismo espacio métrico ortogonal (o son congruentes) si, y solamente si, poseen el mismo rango y la misma signatura métrica.*
2. *Dos cuádricas proyectivas reales son proyectivamente equivalentes (o proyectivamente isomorfas) si, y solamente si, tienen el mismo rango y la misma signatura proyectiva.*

Capítulo 3

Teorema de Segre - Witt

Vamos a estudiar la geometría relacionada con una cuádrica proyectiva, fundamentalmente el caso en el que la cuádrica es lisa o no degenerada.

El concepto de ortogonalidad en la forma bilineal asociada es equivalente al de polaridad en la cuádrica. Ya hemos visto que para un punto $P \in \mathbb{P}(V)$, el subespacio $Polar_{Z(Q)}(P)$ es, o bien todo el espacio $\mathbb{P}(V)$ y ello sucede precisamente si P es un punto singular de la cuádrica, o bien es un hiperplano si P es no singular. En este último caso, si $P \in Z(Q)$, $P^\perp = Polar_{Z(Q)}(P) = T_P Z(Q)$ es el hiperplano tangente a $Z(Q)$ pasando por el punto P , y es el lugar geométrico de las rectas tangentes a la cuádrica en P , es decir, las rectas que, o bien están contenidas en $Z(Q)$ y pasan por P , o bien las rectas que no están contenidas en la cuádrica pero cortan a P con multiplicidad dos. Cuando $P \notin Z(Q)$, el hiperplano $Polar_{Z(Q)}(P)$ tiene la propiedad de que la sección cuádrica $Polar_{Z(Q)}(P) \cap Z(Q)$ es el lugar geométrico de los puntos de contacto de las rectas que forman el cono tangente circunscrito a la cuádrica con vértice en el punto P .

Vamos a estudiar más en profundidad el concepto geométrico de polaridad y damos la siguiente definición,

Definición 3.1. Sea $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva. Dado un subespacio $S = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$, llamamos *subespacio polar* de S respecto de la cuádrica, al subespacio

$$S^\perp := \mathbb{P}(W^\perp) = \{[\vec{v}] \in \mathbb{P}(V) \mid F_Q(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \forall [\vec{w}] \in S\} \quad (3.1)$$

Tan pronto como la cuádrica $Z(Q)$ sea degenerada, entonces para cualquier $P \in Sing(Z(Q))$ se tiene que $P^\perp = \mathbb{P}(V)$. Pero si $Z(Q)$ es no degenerada, la polaridad cumple:

1. Es una correspondencia biunívoca en el retículo de subespacios de $\mathbb{P}(V)$,
2. $dim(S^\perp) = dim(\mathbb{P}(V)) - dim(S) - 1$,

$$3. (S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp; (S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp; (S^\perp)^\perp = S$$

Definición 3.2. Llamaremos *sección cuádrlica* a la intersección de una cuádrlica $Z(Q)$ con un subespacio proyectivo $S = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$. Es claro que dicha sección $S \cap Z(Q) = \mathbb{P}(W) \cap Z(Q) = Z(Q_W)$ es otra cuádrlica. Las secciones más interesantes son las obtenidas con hiperplanos, en particular con los hiperplanos polares y tangentes.

Para estudiar las secciones cuádrlicas es importante la siguiente relación entre subespacios polares:

Lema 3.3. Sea $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y sea $W \subset V$ un subespacio al que podemos restringir la forma cuadrática, $Q_W : W \rightarrow \mathbb{R}$. Dado un tercer subespacio $L \subset W \subset V$, podemos considerar la polaridad de este subespacio con respecto a la cuádrlica inicial $Z(Q)$ y con respecto a la sección $Z(Q_W)$. Equivalentemente, esto corresponde con tomar el subespacio ortogonal a L respecto al espacio global V o al subespacio W ($L^{\perp W}$). Entonces, se verifica

$$L^{\perp W} = L^\perp \cap W \quad (3.2)$$

Demostración. Por definición, dado $L \subset W \subset V$,

$$L^{\perp W} := \{\vec{w} \in W \mid F(\vec{w}, \vec{v}) = 0 \forall \vec{v} \in L\} \quad (3.3)$$

$$= \{\vec{w} \in W \mid F(\vec{w}, -) : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ se anula en } L\} \quad (3.4)$$

$$= \{F(\vec{w}, -) : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ anulándose en } L, \vec{w} \in W\} \quad (3.5)$$

$$= L^\perp \cap W \quad (3.6)$$

□

Vayamos, entonces, con el estudio de los hiperplanos tangentes a una cuádrlica y las secciones cuádrlicas que definen.

Proposición 3.4. Sea $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ una cuádrlica no degenerada. Entonces:

1. La correspondencia que a cada punto $P = [p_0 : \dots : p_n] \in \mathbb{P}(V)$ le asocia las coordenadas de la forma lineal definiendo el hiperplano polar, P^\perp , es biunívoca e involutiva.
2. Los hiperplanos tangentes a la cuádrlica $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ están parametrizados por una cuádrlica $Z(Q^V) \subset \mathbb{P}(V^*)$ que llamaremos *cuádrlica dual asociada*.
3. Si $H \subset \mathbb{P}(V)$ es un hiperplano, entonces H es tangente a $Z(Q)$ si, y sólo si, la sección cuádrlica $Z(Q) \cap H$ es una cuádrlica degenerada.

Demostración. 1. Como $Z(Q)$ es no degenerada, $Rad_{F_Q}(V) = \{\vec{0}\}$. Equivalentemente, fijada una base \mathcal{B} de V , la matriz asociada a la forma bilineal, $M_{\mathcal{B}}(F_Q) = A$, es regular.

La forma bilineal induce el homomorfismo $\overline{F_Q}(\vec{v}, -) : V \rightarrow V^*$ que a cada vector $\vec{v} \in V$ le asocia la forma lineal $F_Q(\vec{v}, -) : V \rightarrow \mathbb{R}$. Como $Ker(F_Q) = Rad_{F_Q}(V) = \{\vec{0}\}$, F_Q es inyectivo, y en dimensión finita un isomorfismo. Por tanto, tenemos una aplicación biunívoca:

$$\begin{aligned} [\overline{F_Q}] : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V^*) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [F_Q(\vec{v}, -)] \end{aligned}$$

La forma lineal $F_Q(\vec{v}, -) : V \rightarrow \mathbb{R}$ tiene como núcleo el hiperplano

$$Ker(F_Q(\vec{v}, -)) = \{\vec{w} \in V \mid F_Q(\vec{v}, \vec{w}) = 0\} = \langle \vec{v} \rangle^\perp \quad (3.7)$$

Por tanto, nuestra aplicación no es otra que asociar a cada punto P su hiperplano polar respecto $Z(Q)$.

Analíticamente, si $A = M_{\mathcal{B}}(F_Q)$, entonces también $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^*}(\overline{F_Q})$, y si $P = [p_0 : \dots : p_n]$, el hiperplano polar está definido por la ecuación $P^t A \vec{x} = 0$. Es decir, $F_Q(\vec{v}, -) \equiv P^t A$, que es una forma lineal, $[F_Q(\vec{v}, -)] = [P^t A]$.

2. $\mathbb{P}(V^*)$ son los puntos $[(\alpha_0 : \dots : \alpha_n)]$ en donde $(\alpha_0 : \dots : \alpha_n)$ representa el hiperplano de ecuación $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ en $\mathbb{P}(V)$. Vamos a identificar en $\mathbb{P}(V^*)$ el lugar geométrico de los hiperplanos tangentes a $Z(Q)$.

Un hiperplano H de ecuación $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ es tangente a $Z(Q)$ precisamente si existe un punto $P \in Z(Q)$ tal que $P^\perp = H$. Es decir,

- a) Existe un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ tal que $P \in Z(Q)$ ($\iff P^t A P = 0$).
- b) Se tiene $P^\perp = H$, luego ambas, $P^t A \vec{x} = 0$ y $(\alpha_0 : \dots : \alpha_n) \vec{x} = 0$ son ecuaciones de H . Equivalentemente, existe $\lambda \neq 0$ tal que $P^t A = \lambda(\alpha_0 : \dots : \alpha_n)$.

Ahora se trata de eliminar P de entre las ecuaciones

$$P^t A P = 0 \quad \text{y} \quad P^t A = \lambda(\alpha_0 : \dots : \alpha_n) \quad (3.8)$$

para obtener una condición sobre los $(\alpha_0 : \dots : \alpha_n)$.

Como $Z(Q)$ es no degenerada, A es inversible y, por tanto, $P^t = \lambda(\alpha_0 : \dots : \alpha_n) A^{-1}$. Sustituyendo en $P^t A P = 0$ obtenemos:

$$0 = P^t A P = \lambda(\alpha_0 : \dots : \alpha_n) A^{-1} A (\lambda(\alpha_0 : \dots : \alpha_n) A^{-1})^t \quad (3.9)$$

$$= \lambda(\alpha_0 : \dots : \alpha_n) (A^{-1})^t \lambda(\alpha_0, \dots : \alpha_n)^t \quad (3.10)$$

$$= \lambda^2 ((\alpha_0 : \dots : \alpha_n) A^{-1} (\alpha_0 : \dots : \alpha_n)^t) \quad (3.11)$$

Donde hemos usado el hecho de que al ser A simétrica, $A = A^t$. Así pues, los hiperplanos tangentes que buscábamos son los $(\alpha_0 : \dots : \alpha_n) \in \mathbb{P}(V^*)$ que satisfacen la ecuación $\vec{y}^t A \vec{y} = 0$, la cual es la ecuación de una cuádrica proyectiva, como queríamos probar.

3. Veamos ambas implicaciones:

" \implies " Si H es un hiperplano tangente a $Z(Q)$, entonces existe un punto P de la cuádrica de tal forma que $H = P^\perp$. Con lo cual, con respecto a $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$, P es ortogonal con todos los puntos del hiperplano H .

Consideremos ahora la sección cuádrica generada por $H = P^\perp = T_P(Z(Q))$, $Z(Q) \cap H$. Es claro que P pertenece a esta cuádrica y, respecto a ella, $Z(Q)|_H \subset H$, P es ortogonal con todos los puntos del proyectivo ambiente, H . Así pues, $P = [\vec{v}]$ es tal que $\vec{v} \in \text{Rad}_{Q_H}(H)$, y la sección cuádrica es degenerada.

" \impliedby " Supongamos ahora que la sección $Z(Q) \cap H \in H$ es degenerada. Procedamos hacia atrás en el argumento previo. Por ser degenerada, existe al menos un punto $P \in Z(Q) \cap H$ singular, es decir, ortogonal con todos los puntos de H con respecto a la forma cuadrática $Q|_H$. Es decir, $P^\perp_{Z(Q) \cap H} = H \subset P^\perp$. Por el Lema 2.3, $P^\perp_{Z(Q) \cap H} = H \cap P^\perp = H \subset P^\perp$. Como, en particular, $P \in Z(Q)$, las posibilidades para P^\perp son: o bien ser todo el espacio $\mathbb{P}(V)$, o bien ser un hiperplano. El caso $P^\perp = \mathbb{P}(V)$ no es posible, pues P debería ser un punto singular y sin embargo $Z(Q)$ es lisa. Por tanto P^\perp es un hiperplano, y como contiene a H , no hay más opción que ser $H = P^\perp = T_P(Z(Q))$.

□

El siguiente resultado complementa al anterior en el caso de una cuádrica degenerada.

Proposición 3.5. *Sea $Z(Q) \in \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva y sea $P \in Z(Q)$ un punto liso. Entonces, se verifica:*

1. Si $S \subset \mathbb{P}(V)$ es un subespacio lineal y $P \in S \subset Z(Q)$, entonces $S \subset P^\perp = T_P(Z(Q))$.
2. Dada la sección cuádrica $P^\perp \cap Z(Q) = T_P(Z(Q)) \cap Z(Q)$, si R es un punto de ella, también la recta \overline{PR} pertenece a $Z(Q)$.
3. Sea $R \in Z(Q)$ y $R \neq P$ otro punto de la cuádrica proyectiva. Entonces, $R^\perp = P^\perp$ si, y sólo si, la recta \overline{RP} contiene puntos singulares.
4. $P + \text{Sing}(Z(Q)) \subset P^\perp$ y para todo $R \in P + \text{Sing}(Z(Q))$, es $R^\perp = P^\perp$. De hecho, para la sección cuádrica

$$P^\perp \cap Z(Q) = T_P(Z(Q)) \cap Z(Q) \quad (3.12)$$

se verifica,

$$\text{Sing}(P^\perp \cap Z(Q)) = P + \text{Sing}(Z(Q)) \quad (3.13)$$

Antes de pasar a la demostración, conviene visualizar e interpretar cada uno de estos apartados:

En relación con el apartado 1, un punto singular T es una clase de equivalencia $T = [\vec{v}]$ en donde $\vec{v} \perp_F V$. Esto significa que el espacio lineal de puntos singulares yace en todo hiperplano polar y, en particular, en todo espacio tangente a la cuádrica.

Además, cualquier espacio lineal contenido en $Z(Q)$ que contenga a un punto liso de la cuádrica yace en su hiperplano tangente. Esta propiedad es muy importante porque permite obtener familias de espacios lineales contenidos en una cuádrica ascendiendo desde secciones hiperplanas. En particular, obtendremos los de dimensión máxima, y esta dimensión es un invariante proyectivo para la cuádrica llamado *índice de Witt*.

En relación con el apartado 3, si en dos puntos distintos de una cuádrica, los hiperplanos tangentes coinciden, entonces necesariamente la cuádrica ha de ser degenerada. (Obsérvese que esto ya se encuentra implícito en los apartados 1 y 2 de la *Proposición 2.4*).

En relación con el apartado 4, recordemos que si $P \in Z(Q)$ es un punto liso, el espacio tangente a la cuádrica en P consiste en todas las rectas que pasando por P están contenidas en $Z(Q)$ o cortan a la cuádrica en P con multiplicidad 2. Como en cualquier caso los puntos singulares están contenidos en cualquier hiperplano tangente a la cuádrica, entre las rectas contenidas en la cuádrica y pasando por P , están las rectas \overline{PT} , siendo T un punto singular.

En relación con el apartado 2, ya vimos de la estructura geométrica de una cuádrica que toda recta \overline{RT} , siendo T un punto singular y $R \in Z(Q)$, yace en la cuádrica. Esto se debe a que toda recta pasando por un punto singular de la cuádrica ya corta en ese punto con multiplicidad mayor o igual que 2. Este apartado nos dice algo parecido para las rectas tangentes a la cuádrica en un punto $P \in Z(Q)$. O son estrictamente tangentes y no tienen más puntos en común con la cuádrica que P (con multiplicidad 2), o si tienen un tercer punto en común con la cuádrica, ésta yace contenida en la cuádrica.

Ahora sí, demostremos la proposición.

Demostración. 1. Sea $S = \mathbb{P}(W) \subset Z(Q)$, entonces $Q|_W : W \rightarrow \mathbb{R}$ es idénticamente nula, y también la forma bilineal asociada. Por tanto, para cualesquieran $P = [\vec{v}] \in S$ y $R = [\vec{w}] \in S$, se tiene

$$0 = F_Q(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}(Q(\vec{v} + \vec{w}) - Q(\vec{v}) - Q(\vec{w})) \quad (3.14)$$

ya que por ser S lineal, $\vec{v} + \vec{w} \in S$. En particular, todos los puntos de S son ortogonales

con P , con lo cual $S \subset P^\perp$.

2. Sean $P = [\vec{v}]$ y $R = [\vec{w}]$ puntos de la sección cuádrica $P^\perp \cap Z(Q)$. Entonces $Q(P) = Q(R) = 0$ y $F_Q(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ (por ser $R \in P^\perp$). Es decir, para cualquier punto $\alpha P + \beta R$ de la recta \overline{PR} , se tiene que

$$Q(\alpha P + \beta R) = \alpha^2 Q(P) + 2\alpha\beta F_Q(P, R) + \beta^2 Q(R) = 0 \quad (3.15)$$

por tanto la recta está contenida en la cuádrica.

3. Fijemos una base \mathcal{B} y sea $M_{\mathcal{B}}(Q) = M_Q$ la matriz asociada a la forma cuadrática con respecto a tal base. Si $P \neq R$, las ecuaciones de sus hiperplanos tangentes son $P^t M_Q \vec{x} = 0$ y $R^t M_Q \vec{x} = 0$, respectivamente. Con lo cual, si $R^\perp = P^\perp$, ambas ecuaciones han de ser proporcionales, es decir, existe $\lambda \neq 0$ tal que,

$$P^t M_Q = \lambda R^t M_Q \iff (P^t - \lambda R^t) M_Q = 0. \quad (3.16)$$

Ahora bien, claramente $P^t - \lambda R^t$ es un punto de la recta \overline{PR} que verifica que la forma lineal $F(P^t - \lambda R^t, -) \equiv (P^t - \lambda R^t) M_Q \equiv 0$ es idénticamente nula, es decir, $P^t - \lambda R^t$ es un punto singular.

4. La primera afirmación es trivial, consecuencia del apartado 3: claramente $Sing(Z(Q)) \subset P^\perp$ y como $Sing(Z(Q))$ es un subespacio lineal y $P \in P^\perp$, se tiene que $P + Sing(Z(Q)) \subset P^\perp$. Por otra parte, si $R \in P + Sing(Z(Q))$, $R \in \overline{PT}$ para algún $T \in Sing(Z(Q))$. Es decir, $\overline{PR} = \overline{PT}$ es una recta que contiene al menos un punto singular, y por el apartado 3, $P^\perp = R^\perp$.

Probemos la segunda afirmación. Ya vimos en la proposición 3.4 que $P \in Sing(P^\perp \cap Z(Q))$. Esto sucede ya que $P^\perp \cap Z(Q) \in P^\perp$ y P es ortogonal con todo punto $R \in P^\perp$ para la forma cuadrática restringida. Con lo cual, $P + Sing(Z(Q)) \subseteq Sing(P^\perp \cap Z(Q))$. Veamos que se da la igualdad.

Consideremos otro punto $R \neq P$ contenido en la sección cuádrica $P^\perp \cap Z(Q) \subset P^\perp$ y supongámoslo no singular. Entonces existe $T_R(Z(Q)) = R^\perp$. Supongamos que R sí es singular para la sección cuádrica $P^\perp \cap Z(Q)$, es decir, $R^{\perp P^\perp} = P^\perp = R^\perp \cap P^\perp \subset R^\perp$ (en la segunda igualdad hemos usado el *Lema 2.3*). Ahora bien, tanto P como R son lisos para $Z(Q)$, con lo cual P^\perp y R^\perp son hiperplanos. En consecuencia, tiene que ser $P^\perp = R^\perp$. Por el apartado anterior, la recta \overline{PR} corta al conjunto de puntos singulares, luego necesariamente ha de ser una de las rectas en $P + Sing(Z(Q))$.

□

3.1. Subespacios lineales maximales en una cuádrica lisa: Índice de Witt

Hasta ahora, hemos encontrado dos invariantes proyectivos en la clasificación de cuádricas proyectivas reales: el rango y la signatura. Para el caso complejo tales invariantes se reducen únicamente al rango.

Sin embargo, *Corrado Segre* obtuvo una clasificación proyectiva de las hipersuperficies cuádricas mucho más sutil geoméricamente hablando. Por supuesto el rango era un invariante, determina la parte lisa de la cuádrica. Pero una vez conseguido esto, *Segre* prueba que en una cuádrica, los puntos lisos son indistinguibles proyectivamente hablando, y prueba que lo que realmente distingue a una cuádrica son los subespacios lineales de dimensión máxima que ésta contiene. *Segre* construye tales subespacios de forma recurrente mediante un proceso geométrico que implica considerar secciones con el hiperplano tangente.

La reformulación algebraica de esta dimensión de subespacios maximales contenidos en una cuádrica corresponde a lo que se conoce hoy en día como *índice de Witt*. La llamada *descomposición de Witt* de un espacio métrico es una generalización de la bien conocida *descomposición de Sylvester*, la cual únicamente tiene sentido cuando el cuerpo base K se corresponde con el de los números reales, u otro cuadráticamente cerrado (i.e. si $a \in K$, entonces o bien $\sqrt{a} \in K$, o bien $\sqrt{-a} \in K$).

Para una cuádrica proyectiva $Z(Q)$, el rango y el índice de Witt son los invariantes proyectivos esenciales que la clasifican por completo. Incluso la clasificación afín de cuádricas depende de tales invariantes.

Nosotros vamos a introducir el índice de Witt de manera geométrica. Primero probaremos el llamado *Teorema de Homogeneidad* y después el *Segundo Teorema de Estructura* y la *descomposición o referencia proyectiva de Witt*.

Teorema 3.6 (De Homogeneidad). *Sea $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva y sean P y R dos puntos lisos. Entonces, existe una proyectividad $\pi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ que lleva P en R y deja invariante la cuádrica $Z(Q)$.*

Comentario 3.7. Antes de probar el Teorema de manera formal, vamos a motivarlo trabajando con el caso particular de la cuádrica lisa reglada en $\mathbb{P}^3(\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$. En el caso complejo, ya vimos que sólo hay una cuádrica lisa debido a que el único invariante es el rango. En el caso real encontramos dos: la de signatura 2 o la de signatura 3. La coyuntura que nos interesa es el de la cuádrica reglada que corresponde en ambos casos con la cuádrica de ecuación

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0. \quad (3.17)$$

Realizando el cambio de variable

$$y_0 = x_0 - x_2, \quad y_1 = x_3 - x_1, \quad y_2 = x_1 + x_3 \quad y \quad y_3 = x_0 + x_2 \quad (3.18)$$

obtenemos la ecuación

$$y_0 y_3 - y_1 y_2 = 0 \iff \begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.19)$$

Reinterpretando esto como dependencia lineal por columnas y por filas obtenemos dos familias de rectas contenidas en la cuádrica:

Familia \mathcal{F}_1 de rectas: Interpretamos (3.19) como dependencia en filas, es decir, (y_0, y_1) y (y_2, y_3) son linealmente dependientes. Entonces, existe $(\lambda : \mu) \neq (0, 0)$ tal que $\lambda(y_0, y_1) + \mu(y_2, y_3) = 0$. Esto nos proporciona el sistema lineal de rango 2 en $\mathbb{P}(y_0, y_1, y_2, y_3)$ definido por:

$$\left. \begin{aligned} \lambda y_0 + \mu y_2 &= 0 \\ \lambda y_1 + \mu y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \mathcal{L}(\lambda : \mu) \quad (3.20)$$

que define la recta $\mathcal{L}(\lambda : \mu)$. Cuando $[(\lambda : \mu)] \neq [(\lambda' : \mu')]$ las rectas $\mathcal{L}(\lambda : \mu)$ y $\mathcal{L}(\lambda' : \mu')$ son disjuntas. Entonces, con $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ obtenemos una familia 1-dimensional de rectas.

Familia \mathcal{F}_2 de rectas: Interpretando ahora (3.19) como dependencia entre columnas, (y_0, y_2) y (y_1, y_3) son linealmente dependientes, luego existe $(t : s) \neq (0, 0)$ tal que $t(y_0, y_2) + s(y_1, y_3) = 0$. Nuevamente obtenemos un sistema lineal de rango 2:

$$\left. \begin{aligned} t y_0 + s y_1 &= 0 \\ t y_2 + s y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \mathcal{M}(t : s) \quad (3.21)$$

definiendo la recta $\mathcal{M}(t : s)$ contenida en la cuádrica y cuando $[(t : s)] \neq [(t' : s')]$, las rectas $\mathcal{M}(t : s)$ y $\mathcal{M}(t' : s')$ son disjuntas. De este modo, con $(t : s) \in \mathbb{P}^1$ conseguimos la segunda familia 1-dimensional de rectas.

Encaje de Segre: Dados $(\lambda : \mu)$ y $(t : s)$, y considerando las rectas $\mathcal{L}(\lambda : \mu)$ y $\mathcal{M}(t : s)$, es fácil ver que el sistema lineal

$$\left. \begin{array}{rcl} \lambda y_0 & + & \mu y_2 & = & 0 \\ & \lambda y_1 & + & \mu y_3 & = & 0 \\ t y_0 & + & s y_1 & = & 0 \\ & t y_2 & + & s y_3 & = & 0 \end{array} \right\} \mathcal{L}(\lambda : \mu) \cap \mathcal{M}(t : s) = \mathcal{P}_{(\lambda:\mu) \times (t:s)}$$

tiene rango 3, definiendo un punto en la cuádrica $Z(Q) = \mathcal{Q}_2 \subset \mathbb{P}^3$, que corresponde con la solución del sistema

$$(y_0 : y_1 : y_2 : y_3) = (\lambda t : \lambda s : \mu t : \mu s). \tag{3.22}$$

De este modo, podemos construir una aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\nu_{1,1}} & \mathbb{P}^3 \\ ((\lambda : \mu) \times (t : s)) & \mapsto & (\lambda t : \lambda s : \mu t : \mu s) \end{array}$$

que es biunívoca en la imagen $Z(Q) = \mathcal{Q}_2 = \text{Im}(\nu_{1,1}) = Z(y_0 y_3 - y_1 y_2)$. La cuádrica corresponde con la ecuación $y_0 y_3 - y_1 y_2 = 0$, pero el isomorfismo nos da una forma de visualizarla geoméricamente.

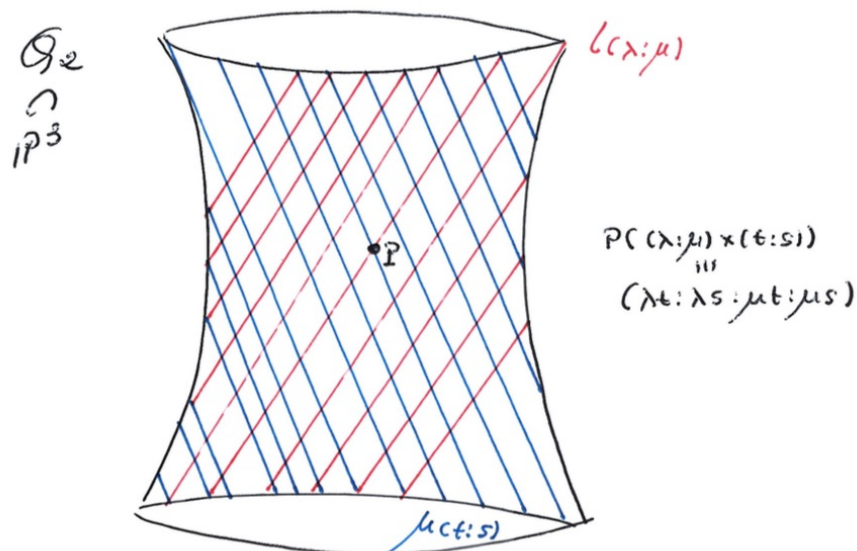
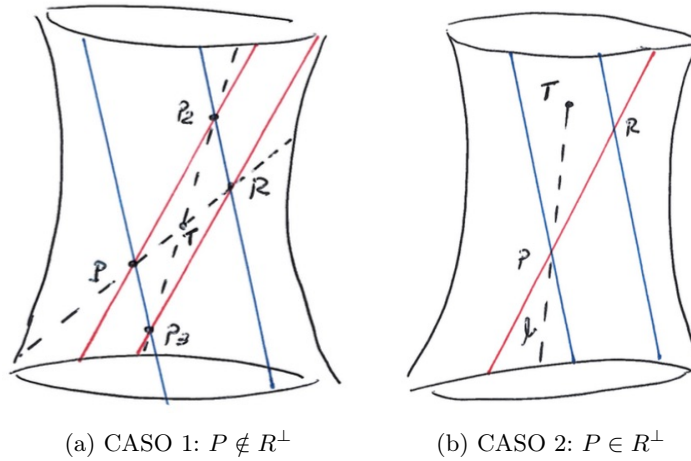


Figura 3.1: Visualización Geométrica de \mathcal{Q}_2 .

Es ilustrativo demostrar el Teorema de Homogeneidad para la cuádrica lisa de \mathbb{P}^3 . Por comodidad escribiremos $P^\perp = T_P(Q_2)$ y $R^\perp = T_R(Q_2)$. Se trata de encontrar una base en \mathbb{R}^4 o \mathbb{C}^4 y un automorfismo $\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4$ que deje invariante la cuádrica e intercambie los puntos P y R . Diferenciamos dos casos:



CASO 1. $P \notin R^\perp (\iff R \notin P^\perp)$:

Como $P \notin R^\perp$, P no se encuentra en recta alguna de las $T_R(Q_2) \cap Q_2$ y análogamente, R tampoco está en ninguna recta de $T_P(Q_2) \cap Q_2$. Con lo cual, por la proposición 3.5.2, la recta \overline{PR} no yace en la cuádrica, y es bisecante a ella. Además, los hiperplanos tangentes son disjuntos, pues si no fuese así, por la Proposición 3.5 cortarían a puntos singulares, pero la cuádrica es lisa.

Por lo tanto, haciendo uso de la fórmula de Grassmann, $\dim(P^\perp \cap R^\perp) = \dim(P^\perp) + \dim(R^\perp) - \dim(P^\perp + R^\perp) = 1$ (ya que $P^\perp + R^\perp = \mathbb{P}^3$), y $P^\perp \cap R^\perp$ es una recta. Esta recta, corta a la cuádrica en los puntos P_2 y P_3 correspondientes a los pares de rectas en familias distintas que yacen en cada plano tangente. Con lo cual, $\overline{P_2P_3} = T_P(Q_2) \cap T_R(Q_2)$. Claramente la recta es bisecante estricta, pues si contuviese un punto más de la cuádrica yacería en ella y en los planos tangentes, lo cual no puede ser. En efecto, en tal caso la recta $\overline{P_2P_3}$ en $T_P(Q_2)$ es una de las rectas pasando por P y también yace en $T_R(Q_2)$, luego $P \in \overline{P_2P_3} \subset T_R(Q_2)$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Veamos por último que las rectas \overline{PR} y $\overline{P_2P_3} = P^\perp \cap R^\perp$ no se cortan. Supongamos que si lo hacen, entonces $\overline{PR} \cap (P^\perp \cap R^\perp) = T$ y por tanto, las rectas $\overline{PT} = \overline{RT}$ y $\overline{P_2T} = \overline{P_3T}$ yacen en el mismo plano, el $\langle \overline{P_2P_3}, \overline{PT} \rangle$, que contiene una recta de la cuádrica pasando por P , la recta $\overline{PP_2}$. Necesariamente ha de contener una recta de la otra familia y como la recta $\overline{PT} = \overline{PR}$ se encuentra en dicho plano, debe de ser esta. Así, $T_P(Q_2) = \overline{PP_2} \cup \overline{PR}$. Pero entonces $R \in T_P(Q_2)$ contradiciendo nuestra hipótesis.

Análogamente, el plano $\langle \overline{P_2P_3}, \overline{RT} \rangle$ contiene la recta de la cuádrica $\overline{RP_2}$ y la recta $\overline{RP_3}$, obligando a que la recta \overline{PR} sea una de las dos, haciendo que $P \in \overline{PR} \subset T_R(\mathcal{Q}_2)$, lo cual no es posible por hipótesis.

De este modo, los puntos $\{P, R, P_1, P_2\} \subset \mathcal{Q}_2$ forman una referencia proyectiva, y los correspondientes vectores, una base del espacio vectorial. Así, podemos definir el automorfismo π de la siguiente manera,

$$\pi(\vec{v}_0) = \vec{v}_1, \quad \pi(\vec{v}_1) = \vec{v}_0, \quad \pi(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 \quad y \quad \pi(\vec{v}_3) = \vec{v}_3 \quad (3.23)$$

siendo $P = \vec{v}_0$, $R = \vec{v}_1$, $P_2 = \vec{v}_2$ y $P_3 = \vec{v}_3$.

CASO 2. $P \in R^\perp (\iff R \in P^\perp)$:

En este caso, haciendo uso de la Proposición 3.5, los planos tangentes $T_P(\mathcal{Q}_2)$ y $T_R(\mathcal{Q}_2)$ se cortan en una recta totalmente contenida en la cuádrica, la recta \overline{PR} . Como $P^\perp \cap R^\perp = \overline{PR}$, no podemos construir la referencia $\{P, R, P_1, P_2\}$.

Sin embargo, siempre podemos encontrar un punto $T \in \mathcal{Q}_2$ que no se encuentre en $T_P(\mathcal{Q}_2) \cup T_R(\mathcal{Q}_2)$. Con lo cual, podemos aplicar el Caso 1 a los puntos P y T (por ejemplo) y construir una primera proyectividad, para después volver a aplicar el Caso 1 a T y R y construir una segunda. La proyectividad buscada será la composición de ambas.

Pues bien, el automorfismo construido intercambia P con R y deja fijos los puntos P_2 y P_3 , intercambiando así las variables y_0 e y_1 y dejando fijas y_2 e y_3 . Con lo cual, esto no afecta a la ecuación de la cuádrica, que pasa de ser $y_0y_3 - y_1y_2 = 0$ a ser $y_1y_3 - y_0y_2 = 0$. Claramente la cuádrica queda invariante.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ \\ (\lambda : \mu) \times (t : s) & \longrightarrow & (\lambda t : \lambda s : \mu t : \mu s) & (y_0 : y_1 : y_2 : y_3) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ (\lambda : \mu) \times (t : s) & \longrightarrow & (\mu s : \lambda s : \mu t : \lambda t) & (y_1 : y_0 : y_2 : y_3) \\ \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

Pues bien, pasemos entonces a probar el resultado general. Recordemos su enunciado:

Teorema 3.8 (De Homogeneidad). *Sea $Z(Q) \in \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva y sean P y R dos puntos lisos de la misma. Entonces, existe una proyectividad $\pi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ que lleva P en R y deja invariante la cuádrica $Z(Q)$.*

Demostración. Sean entonces $P = [\vec{u}]$ y $R = [\vec{v}]$ dos puntos lisos de $Z(Q)$. Como en el ejemplo, vamos a diferenciar dos casos:

CASO 1. $P \notin R^\perp (\iff R \notin P^\perp)$:

En este caso, P^\perp y R^\perp son dos hiperplanos distintos definidos por formas lineales independientes, con lo cual, $\dim(P^\perp \cap R^\perp) = n - 2$. Veamos que $\overline{PR} \cap (P^\perp \cap R^\perp) = \emptyset$. Sea $T = [\vec{t}] \in \overline{PR} \cap (P^\perp \cap R^\perp)$ y escribamos $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Entonces, como en particular $T \in P^\perp$,

$$0 = F_Q(\vec{t}, \vec{u}) = \alpha F_Q(\vec{u}, \vec{u}) + \beta F_Q(\vec{v}, \vec{u}) = \beta F_Q(\vec{v}, \vec{u}) \quad (3.24)$$

Como por hipótesis $P \notin R^\perp$, β ha de ser necesariamente distinto de cero, pues en caso contrario se tendría $t = \alpha\vec{u}$, es decir, $P = T \in (P^\perp \cap R^\perp) \subset R^\perp$ lo cual es falso por hipótesis. Entonces, deducimos que $F_Q(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, pero esto también es imposible, pues por definición nos está diciendo que \vec{u} y \vec{v} son ortogonales, es decir, $P \in R^\perp$ y $R \in P^\perp$, que contradice nuestra hipótesis. Así pues, $\overline{PR} \cap (P^\perp \cap R^\perp) = \emptyset$.

De este modo, podemos construir una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_0 = \vec{u}, \vec{e}_1 = \vec{v}, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, siendo $(P^\perp \cap R^\perp) = \mathbb{P}(\langle \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle)$, la cual da lugar a una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0 = P = [\vec{u}], P_1 = R = [\vec{v}], P_2 = [\vec{e}_2], \dots, P_n = [\vec{e}_n]; u = P_0 + \dots + P_n\}$, con $(P^\perp \cap R^\perp) = \langle P_2, \dots, P_n \rangle$.

Obsérvese que la base construída es tal que $F_Q(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ y $F_Q(P_i, P) = F_Q(P_i, R) = 0$ para $i = 2, 3, \dots, n$. Con lo cual, en esta base la matriz asociada a la cuádrica $Z(Q)$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Ahora bien, si consideramos la proyectividad definida por:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ P_0 = P &\mapsto \pi(P_0) = P_1 = R \\ P_1 = R &\mapsto \pi(P_1) = P_0 = P \\ P_i &\mapsto \pi(P_i) = P_i \end{aligned} \quad (3.26)$$

con $i = 2, 3, \dots, n$. Tal proyectividad claramente lleva P en R y deja invariante la cuádrica. Considerando la descomposición ortogonal,

$$V = \langle P, R \rangle \oplus \langle P_2, P_3, \dots, P_n \rangle \quad (3.27)$$

la restricción $Z(Q) \cap \overline{PR} = \{P, R\}$, ya que es la intersección de la cuádrica con la recta bisecante definida por el plano $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. La restricción $Z(Q) \cap \mathbb{P}(\langle P_2, P_3, \dots, P_n \rangle)$ es una cuádrica, y la restricción de π la deja invariante.

CASO 2. $P \in R^\perp (\iff R \in P^\perp)$:

Como hemos visualizado, los hiperplanos P^\perp y R^\perp no han de ser necesariamente iguales, pero $\overline{PR} \subset P^\perp$ y $\overline{PR} \subset R^\perp$ y no podemos construir una referencia como la anterior. Sin embargo, vamos a ver que existe otro punto $T \in Z(Q)$ tal que $T \notin (P^\perp \cup R^\perp)$. Una vez tengamos esto, basta aplicar el caso 1 a los puntos $\{P, T\}$ y construir la proyectividad que intercambia P con T y deja invariante $Z(Q)$, y luego volver a aplicar el caso 1 a $\{T, R\}$ y construir otra proyectividad que intercambia T con R y deja invariante la cuádrica. La composición de ambas es la proyectividad buscada.

Pues bien, veamos que existe dicho T . En todo caso $(P^\perp \cup R^\perp) \subsetneq \mathbb{P}(V)$, con lo cual podemos escoger una recta l tal que $P \in l$ y no esté contenida en $(P^\perp \cup R^\perp)$.

Tal recta ni es exterior a $Z(Q)$ (ya que $P \in l$), ni es tangente a ella (pues $l \not\subset P^\perp$). Entonces, necesariamente corta a $Z(Q)$ en un segundo punto T , pues tiene que ser bisecante a la cuádrica. Ahora razonemos que dicho T es el que buscamos, es decir, $T \notin (P^\perp \cup R^\perp)$. En efecto, podemos escribir la recta l como $l = \overline{PT}$ y si T estuviese en P^\perp o en R^\perp , como P está en ambos, la recta $l = \overline{PT}$ yacería en alguno de los dos, en contra de la elección realizada.

Con lo cual, una vez encontrado el punto T , podemos construir la proyectividad como razonamos antes, y habremos terminado.

□

3.1.1. Subespacios contenidos en una cuádrica proyectiva

Vamos a analizar el caso 1 en el que $P \notin R^\perp (\iff R \notin P^\perp)$, que permite tomar una referencia proyectiva $\{P_0 = P, P_1 = R, P_2, \dots, P_n\}$ de tal forma que $\langle P_2, \dots, P_n \rangle = P^\perp \cap R^\perp$.

Consideremos entonces la descomposición $V = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \oplus \langle \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ y proyectivamente reiteremos el proceso para la sección cuádrica: $Z(Q) \cap \mathbb{P}(\langle \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle) = Z(Q) \cap \langle P_2, \dots, P_n \rangle$. Supongamos que de nuevo es posible elegir un P_2 y un P_3 de tal forma que $P_2 \notin P_3^\perp (\iff P_3 \notin P_2^\perp)$. De este modo, la recta $\overline{P_2 P_3}$ es estrictamente bisecante a la cuádrica y $P_2^\perp \cap P_3^\perp = \langle$

$P_4, \dots, P_n \rangle$. La matriz de la cuádrica es, en este caso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

y obtenemos otra descomposición ortogonal,

$$V = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \oplus \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle \oplus \langle \vec{e}_4, \dots, \vec{e}_n \rangle \quad (3.29)$$

Ahora bien, como \vec{u} es ortogonal con \vec{e}_2 y con \vec{e}_3 , las rectas $\overline{PP_2}$ y $\overline{PP_3}$ están contenidas en la cuádrica. Es más, el plano $\overline{PP_2} + \overline{PP_3}$ yace en la cuádrica. Análogamente, \vec{v} es ortogonal con \vec{e}_2 y con \vec{e}_3 , luego las rectas $\overline{RP_2}$ y $\overline{RP_3}$ están contenidas en la cuádrica y nuevamente, el plano $\overline{RP_2} + \overline{RP_3}$ también yace en la cuádrica.

Vemos así que, reiterando este proceso, podemos construir subespacios de dimensión maximal contenidos en una cuádrica. Es claro que este proceso nos permite calcular una base ortonormal constituida por vectores isótropos, es decir, una referencia proyectiva formada por puntos lisos de la misma cuádrica. Por tanto, observamos que si el rango de la cuádrica es r , la dimensión máxima de un subespacio contenido en ésta y construido por este método es menor o igual que $[r/2]$ (parte entera).

En cuanto ya no nos sea posible elegir dos puntos en el caso 1, sucederá que $P \in R^\perp$ ($\iff R \in P^\perp$) y pueden darse dos situaciones: $P^\perp = R^\perp$ ó $P^\perp \neq R^\perp$. Ya sabemos ésta segunda situación se da si, y sólo si, la recta \overline{PR} contiene puntos singulares, pero el lugar de los puntos singulares es un subespacio lineal, luego teniendo en cuenta el primer teorema de estructura de las cuádricas, $V = \text{Rad}_Q(V) \oplus W$, vemos que para localizar los subespacios maximales contenidos en la cuádrica, basta con encontrar los contenidos en la sección cuádrica lisa $Z(Q) \cap \mathbb{P}(W)$.

Podemos enunciar ya un primer resultado en relación con subespacios contenidos en una cuádrica. Se trata de un corolario del Teorema de Homogeneidad.

Corolario 3.9 (Corolario al Teorema de Homogeneidad). *Sea $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva. Si $Z(Q)$ contiene un subespacio S de dimensión d , la cuádrica es unión de subespacios de dimensión mayor o igual que d .*

Demostración. Supongamos $S \subset \text{Sing}(Z(Q))$. Entonces $\dim(\text{Sing}(Z(Q))) \geq d = \dim(S)$ y, con lo cual, para cada punto $R \in Z(Q) \setminus \text{Sing}(Z(Q))$, $R \in S + R$, que tiene dimensión $d + 1$ y está

contenido en $Z(Q)$. Por otra parte, si $R \in \text{Sing}(Z(Q))$ claramente $S + R \subset \text{Sing}(Z(Q)) \subset Z(Q)$ y tiene dimensión $d + 1$.

La parte no trivial es cuando $S \not\subset \text{Sing}(Z(Q))$. Consideremos entonces un punto $P \in S$ tal que P no es un punto singular. Tomemos la descomposición $V = \text{Rad}_Q(V) \oplus W$, siendo $Z(Q) \cap \mathbb{P}(W)$ una cuádrica lisa. Por tanto, para cualquier $R \in Z(Q) \cap \mathbb{P}(W)$ existe, gracias al Teorema de Homogeneidad, una proyectividad $\pi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ que lleva P en R . Mediante dicha proyectividad, el subespacio d -dimensional S se aplica en otro subespacio T también d -dimensional y tal que $R \in T$. Así, encontramos que $Z(Q)$ es unión de subespacios d -dimensionales de forma obvia. \square

Observación 3.10 (Planos Hiperbólicos). Una recta $\overline{PR} = \mathbb{P}(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)$ estrictamente bisecante a la cuádrica y, por tanto, tal que $F_Q(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ (de hecho, en nuestro caso $F_Q(\vec{u}, \vec{v}) = 1$) proviene de un subespacio lineal de dimensión 2, $V_2 = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, en donde la restricción de la forma cuadrática es la matriz,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Equivalentemente, podemos encontrar dos vectores no isotropos,

$$\vec{u}' := \frac{1}{2}(\vec{u} + 2\vec{v}) \quad y \quad \vec{v}' := \frac{1}{2}(\vec{u} - 2\vec{v}) \quad (3.31)$$

tales que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}', \vec{v}' \rangle$ y la matriz en esta segunda base es de la forma,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Este plano se dice *hiperbólico*.

Vamos a dar ahora un segundo teorema de estructura para las cuádricas proyectivas, que nos dará la dimensión máxima que pueden tener los subespacios contenidos en una cuádrica.

Teorema 3.11 (Segundo Teorema de Estructura de Cuádricas Proyectivas). *Sea $Z(Q)$ una cuádrica proyectiva y sean S_1 y S_2 dos subespacios contenidos en ella con dimensiones $d_1 = \dim(S_1) < \dim(S_2) = d_2$. Entonces:*

1. *Existe un subespacio T de dimensión d_2 que contiene a S_1 .*
2. *Todos los subespacios maximales contenidos en $Z(Q)$ tienen la misma dimensión y la cuádrica es la unión de tales subespacios.*
3. *Si r es el rango de la cuádrica, la dimensión de los subespacios maximales contenidos en $Z(Q)$ es menor o igual que $\lfloor (r - 2)/2 \rfloor$ y un tal subespacio maximal existe.*

Demostración. 1. Para demostrar este primer apartado distinguiremos dos casos según que alguno de los subespacios S_i esté contenido en el conjunto de puntos singulares de la cuádrica o no.

1.1. Supongamos que por ejemplo $S_1 \subset \text{Sing}(Z(Q))$. Escribamos $S_1 = \langle P_0, \dots, P_{d_1} \rangle$. Ampliando el conjunto $\{P_0, \dots, P_{d_1}\}$ a una referencia proyectiva de $S_1 + S_2$ encontramos un subespacio d_2 -dimensional tal que:

$$S_1 \subsetneq S \subsetneq S_1 + S_2 \subset Z(Q), \quad \dim(S) = d_2 \quad (3.33)$$

Esto es posible ya que por Grassmann se tiene:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) \quad (3.34)$$

además,

$$\dim(S_1 \cap S_2) \leq \dim(S_1) \iff 0 \leq \dim(S_1) - \dim(S_1 \cap S_2) \quad (3.35)$$

con lo cual $\dim(S_1 + S_2) \geq \dim(S_2) = d_2$. Ahora supongamos $S = \langle P_0, \dots, P_{d_1}, \dots, P_d \rangle$ y $S_2 = \langle P_0, \dots, P_{d_1}, \dots, P_d, \dots, P_{d_2} \rangle$. De este modo:

$$\langle P_0, \dots, P_{d_1} \rangle \subset \langle P_0, \dots, P_{d_1}, \dots, P_d \rangle \subset \langle P_0, \dots, P_{d_1}, \dots, P_d, \dots, P_{d_2} \rangle \quad (3.36)$$

Claramente, $S = S_1 + \langle P_{d+1}, \dots, P_d \rangle$, y como $S_1 \subset \text{Sing}(Z(Q))$, sabemos que siendo $P \in \langle P_{d+1}, \dots, P_d \rangle$, también $S_1 + P \subset Z(Q)$, con lo cual $S \subset Z(Q)$.

El razonamiento es el mismo si $S_2 \subset \text{Sing}(Z(Q))$.

1.2. Supongamos ahora que ni S_1 ni S_2 están contenidos en el lugar singular de la cuádrica, $\text{Sing}(Z(Q))$. Entonces, existen punto lisos $P \in S_1$ y $R \in S_2$ y por el Teorema de Homogeneidad, existe una proyectividad $\pi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ tal que $\pi(R) = P$ y deja invariante la cuádrica.

Dado el punto P , consideremos el hiperplano tangente P^\perp . Como $P \in S_1$, sabemos por la proposición 3.5.1 que $S_1 \subset P^\perp$. Análogamente, considerando R^\perp , $S_2 \subset R^\perp$. Mediante la proyectividad π , llamemos $T := \pi(S_2)$ al subespacio d_2 -dimensional contenido en R^\perp y que pasa por $P = \pi(R)$. Ahora la situación es la siguiente:

En el hiperplano tangente R^\perp tenemos dos subespacios que yacen en la sección cuádrica $Z(Q) \cap R^\perp$, S_1 y T , con dimensiones $d_1 < d_2$ respectivamente. Ahora hemos bajado una dimensión y podemos reiterar el argumento: o bien uno de los dos yace en $\text{Sing}(Z(Q) \cap R^\perp)$ y concluimos como antes, o bien no se da tal situación. En este segundo caso reiteramos este argumento. Claramente bajando la dimensión ambiente una unidad en cada paso, necesariamente existe un paso i para el cual $T_i := \pi(S_1) = R_i^\perp$, con lo cual $S_1 \subset T_i \subset Z(Q) \cap R_i^\perp \subset Z(Q)$ y queda demostrado 1.

2. Como consecuencia de 1, todos los subespacios maximales yaciendo en $Z(Q)$ son de la misma dimensión y queda probado el apartado 2.
3. Para demostrar este apartado, supongamos $Z(Q) \subset \mathbb{P}^{r-1}$ es una cuádrica de rango r . Siendo $S \subset Z(Q)$ un subespacio d -dimensional contenido en la cuádrica, para cada $P \in S$, se tiene $S \subset P^\perp$. No es necesario que P sea liso, pues si fuese singular entonces $P^\perp = \mathbb{P}^{r-1}$ y el contenido es trivial.

Supongamos ahora que $S = \langle P_0, \dots, P_d \rangle$, entonces $S \subset \bigcap_{i=0}^d P_i^\perp$. Ahora bien,

$$\bigcap_{i=0}^d P_i^\perp = \langle P_0, \dots, P_d \rangle^\perp \quad (3.37)$$

es el subespacio polar asociado, y la dimensión de éste es $r - (d + 1) - 1 = r - d - 2$. Por lo tanto,

$$\dim(S) = d \leq \dim(S^\perp) = r - d - 2 \iff d \leq \left\lfloor \frac{r-2}{2} \right\rfloor \quad (3.38)$$

Ahora probaremos que $Z(Q)$ realmente contiene subespacios de dimensión $\lfloor (r-2)/2 \rfloor$. El argumento que mostraremos es eminentemente geométrico y recursivo. Veamos primero algunos ejemplos conocidos:

- Si $\mathcal{Q}_1 \subset \mathbb{P}^2$ es la cónica lisa, entonces lo anterior nos dice que \mathcal{Q}_1 solo contiene subespacios de dimensión menor o igual que $\lfloor 1/2 \rfloor$, es decir, 0-dimensionales o puntos, lo cual es cierto.
- Si $\mathcal{Q}_2 \subset \mathbb{P}^3$ es la cuádrica lisa, lo anterior nos dice que solo contiene subespacios de dimensión menor o igual que $\lfloor (4-2)/2 \rfloor = 1$, lo cual es cierto, ya que hemos visto que \mathcal{Q}_2 contiene exactamente dos familias 1-dimensionales de rectas.
- Si $\mathcal{Q}_3 \subset \mathbb{P}^4$ la idea es la siguiente: sea $P \in \mathcal{Q}_3$ un punto liso y consideremos el tangente $P^\perp = T_P(\mathcal{Q}_3)$. Sabemos que ahora en la sección cuádrica $Z(Q) \cap P^\perp$, el punto P es singular (proposición 3.5). Tomando ahora un hiperplano $H = \mathbb{P}^3$ genérico que no pase por P , entonces $P^\perp \cap H \cap Z(Q)$ es una cuádrica lisa, luego una cónica contenida en un plano. La cuádrica \mathcal{Q}_3 contiene las rectas que unen P con dicha cónica lisa. Nótese que en este caso lo anterior nos dice que los subespacios contenidos en \mathcal{Q}_3 tienen como mucho dimensión $\lfloor (5-2)/2 \rfloor = 1$.

Ahora si, pasemos a demostrar 3. Sea $Z(Q) \subset \mathbb{P}^n$ una cuádrica lisa. Si $P \in Z(Q)$ consideramos el hiperplano tangente $P^\perp = T_P(Z(Q))$. Como vimos en el ejemplo, la sección $Z(Q) \cap P^\perp$ tiene a P como punto singular (proposición 3.4.3) y además, para todo subespacio lineal S conteniendo a P , se tiene $S \subset P^\perp$ (proposición 3.5.1).

Sea H un hiperplano genérico que no pasa por P . Entonces $H \cap P^\perp = S_{n-2}$ y claramente $T_P(Z(Q)) = P^\perp = P + S_{n-2}$. Esta suma corresponde a la descomposición $V_n = \langle \vec{v}_p \rangle \oplus W$

en donde $P^\perp = \mathbb{P}(V_n)$, $P = [\vec{v}_p]$ y W es un suplementario de $\langle \vec{v}_p \rangle = \text{Rad}_Q(V_n)$. Por tanto, $Z(Q) \cap P^\perp \subset P^\perp$ es un cono de vértice P con base la cuádrica no degenerada $Z(Q) \cap S_{n-2}$ ($S_{n-2} = \mathbb{P}(W)$) (Primer Teorema de Estructura de Cuádricas 2.8).

Supongamos ahora que $P \in S_h \subset Z(Q)$ un subespacio de dimensión maximal. Entonces $S_{h-1} := S_h \cap S_{n-2} \subset S_{n-2}$ es un subespacio de la cuádrica lisa $Z(Q) \cap S_{n-2}$ y es de dimensión maximal ya que si $T \supset S_{h-1}$ es un subespacio mayor contenido en $Z(Q) \cap S_{n-2}$, entonces $P + T \supset P + S_{h-1} = S_h$ es un subespacio de dimensión mayor que h contenido en $Z(Q)$ y pasando por P .

Por este mismo argumento, cada subespacio maximal $S_{h-1} \subset Z(Q) \cap S_{n-2}$ proporciona un subespacio maximal $S_{h-1} + P = S_h \subset Z(Q)$.

Así pues, encontramos una correspondencia biunívoca entre:

1. Los subespacios de dimensión maximal contenidos en $Z(Q)$ pasando por $P \in Z(Q)$.
2. Los subespacios de dimensión maxima en la sección cuádrica $Z(Q) \cap S_{n-2}$, siendo $P \notin S_{n-2}$.

Vamos a calcular ahora $h(n)$, que definimos como la dimensión de los subespacios maximales contenidos en una cuádrica lisa $Z(Q) \subset \mathbb{P}^n$.

Por el argumento previo, $h(n) = 1 + h(n-2)$. Supongamos entonces $n = 2p + 1$ impar, con lo que tendremos $p - 1$ igualdades:

$$h(2p + 1) = 1 + h(2p - 1) \quad (3.39)$$

$$h(2p - 1) = 1 + h(2p - 3) \quad (3.40)$$

\cdots ($p-2$)

$$h(5) = 1 + h(3) \quad (3.41)$$

$$h(3) = 1 \quad (3.42)$$

donde en la última igualdad hemos usado el hecho de que la cuádrica lisa $Z(Q) \subset \mathbb{P}^3$ es la cuádrica reglada ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$).

Sumando estas $p - 1$ igualdades obtenemos

$$h(n) = h(2p + 1) = p - 1 + h(3) = p - 1 + 1 = p = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad (3.43)$$

Tomando ahora $n = 2p$ par,

$$h(2p) = 1 + h(2p - 2) \quad (3.44)$$

$$h(2p - 2) = 1 + h(2p - 4) \quad (3.45)$$

\cdots ($p-2$)

$$h(4) = 1 + h(2) \quad (3.46)$$

$$h(2) = 0 \quad (3.47)$$

teniendo en cuenta ahora que $Z(Q) \subset \mathbb{P}^2$ es la cuádrica lisa que no contiene subespacios lineales de dimensión mayor que 0.

Sumando de nuevo,

$$h(2p) = p - 1 + h(2) = p - 1 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad (3.48)$$

Que tal subespacio maximal de tal dimensión existe es claro a partir del argumento previo.

□

Ejemplo 3.12 (Planos de la cuádrica $\mathcal{Q}_4 \subset \mathbb{P}^5$). Recordemos que una cuádrica $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^n$ es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo de grado 2, $Q : V \rightarrow \mathbb{C}$. Tal polinomio cuadrático es la forma cuadrática de una forma bilineal $Q_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, que, en virtud de la bilinealidad, existe una relación entre Q_0 y $Q(\vec{v}) := Q_0(\vec{v}, \vec{v})$:

$$Q_0(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}[Q(\vec{v} + \vec{w}) - Q(\vec{v}) - Q(\vec{w})]. \quad (3.49)$$

El rango de la cuádrica es el rango de la forma cuadrática que la define. Recordemos también que dada una forma bilineal Q_0 , podemos definir la aplicación lineal $\bar{Q}_0 : V \rightarrow V^*$ de tal forma que para $\vec{v} \in V$, $\bar{Q}_0 := Q_0(\vec{v}, -)$. De este modo, si $W \subset V$ es un subespacio,

$$\bar{Q}_0(W) = \{\bar{Q}(\vec{w}, -) : V \rightarrow W \mid \vec{w} \in W\} \quad (3.50)$$

que es un subespacio de V^* . Supongamos ahora que W es tal que $\mathbb{P}(W) \subset Q \subset P(V)$. En tal caso, cada elemento en $\bar{Q}_0(W)$ es tal que $Q(\vec{w}) \equiv 0$ en W . Dicho de otro modo, $\mathbb{P}(W) \subset Q \iff Q|_W \equiv 0$ para toda $\bar{Q} \in \bar{Q}_0(W)$. Pero esto significa que el subespacio $\bar{Q}(W)$ está contenido en el ortogonal de W . Supongamos ahora que la cuádrica Q es no degenerada. En este caso, $\bar{Q}_0 : V \rightarrow V^*$ es un isomorfismo, y en particular \bar{Q}_0 es inyectiva. Con lo cual

$$\dim(W) = \dim(\bar{Q}_0(W)) \leq \dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) \quad (3.51)$$

de donde $\dim(W) \leq \dim(V)/2$. Ahora bien, proyectivamente, $\dim(\mathbb{P}(W)) = \dim(W) - 1$ y la cuádrica es una hipersuperficie, luego $\dim(Q) = \dim(\mathbb{P}(V)) - 1 = \dim(V) - 2$. Por lo tanto se obtiene $2\dim(W) - 2 \leq \dim(V) - 2$ y si denotamos por $\Lambda = \mathbb{P}(W)$, $\dim(\Lambda) \leq \dim(Q)/2$. De hecho, la parte entera de $\dim(Q)/2$ es la dimensión máxima de los subespacios lineales contenidos en la cuádrica, y es lo que se conoce como “Índice de Witt-Segre”.

La formulación clásica del *Teorema de Witt* (que veremos a continuación) se debe a *Corrado Segre* y establece que toda cuádrica $\mathcal{Q} \subset P^n$ posee subespacios isótropos maximales, es decir, de dimensión $\lfloor \dim(Q)/2 \rfloor$.

Es posible construir tales subespacios de forma inductiva en Q a partir de los maximales contenidos en una cuádrica lisa $Q' \subset Q$ de codimensión 2. A tal efecto, vamos a identificar todos

los planos $\Lambda \subset \mathcal{Q}_4 \subset \mathbb{P}^5$. Nótese que una cuádrica de \mathcal{Q}_4 con codimensión 2 se obtiene cortando \mathcal{Q}_4 con un \mathbb{P}^3 genérico. Dicha cuádrica es lisa y corresponde a la cuádrica no degenerada de \mathbb{P}^3 .

Por nuestro argumento previo, la máxima dimensión de los subespacios contenidos en una cuádrica lisa $Q' \subset \mathbb{P}^3$ es $[\dim(Q')/2] = 1$, y de hecho, Q' contiene dos familias 1–dimensionales de rectas. Por otra parte, para $\mathcal{Q}_4 \subset \mathbb{P}^5$ dicha dimensión maximal es 2. Comencemos observando que si $\mathbb{P}(W) \subset Q$ es un subespacio contenido en una cuádrica lisa, para cualquier punto $P \in \mathbb{P}(W)$ se tiene $\mathbb{P}(W) \subset T_P(Q) \cap Q$ por la Proposición 3.5. Sea ahora $P \in \mathcal{Q}_4$ un punto y consideremos $P \in Q$. El espacio lineal $T_P(Q)$ es geoméricamente el espacio lineal generado por P y cualquier subespacio $\mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^5$ que no contenga a P , es decir, $T_P(Q) = \langle P, \mathbb{P}^r \rangle$. Vemos entonces que $\mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^5$ debe ser de codimensión 2 y por tanto un \mathbb{P}^3 . Siendo este subespacio genérico, la sección $\mathbb{P}^3 \cap \mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_2$ lisa.

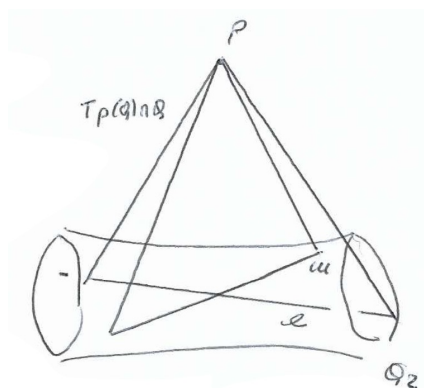


Figura 3.2: Visualización Geométrica.

\mathcal{Q}_2 contiene dos familias de rectas. El plano generado por una de estas rectas y el punto P es un plano contenido en la cuádrica. No puede haber más planos que estos, por lo tanto, en esencia existen dos familias de planos contenidos en \mathcal{Q}_4 . Recuérdese que todo plano yaciendo en \mathcal{Q}_4 , también yace en el hiperplano tangente de cualquiera de sus puntos de la cuádrica. Así pues, variando con continuidad en cada una de las dos familias de rectas de \mathcal{Q}_2 y fijado $P \in \mathcal{Q}_4$, hemos obtenido dos familias 1–dimensionales de planos contenidas en \mathcal{Q}_4 . Llegados a este punto, surgen dos preguntas muy naturales:

1. ¿Son las dos familias de planos anteriores las únicas familias contenidas en \mathcal{Q}_4 ?
2. ¿Cómo son las relaciones de intersección entre planos de familias distintas?

Comenzamos resolviendo la segunda pregunta y a partir de ella resolveremos la primera.

Sea la cuádrica \mathcal{Q}_4 y sean Λ y Λ' dos planos contenidos en \mathcal{Q}_4 . Por *teoría de intersección*, ambos planos se cortan, con lo cual, salvo que sean iguales, o bien se cortan en un punto o bien

en una recta. Si lo hacen en un punto P , ambos Λ y Λ' pertenecen a $T_P(Q_4) \simeq \mathbb{P}^4$ y como razonamos antes, cada uno de ellos consiste en $\Lambda = \langle P, l \rangle$ y $\Lambda' = \langle P, l' \rangle$. Por tanto, los planos se encuentran en la misma familia precisamente si las rectas l y l' lo están. Ahora bien, $l \cap l'$ es o bien vacía o bien de dimensión 0, con lo cual, la intersección de los planos debe tener dimensión $\dim(l \cap l') + 1 \geq 1$. Con lo cual, si Λ y Λ' pertenecen a la misma familia su intersección es el punto P (salvo que sean iguales). Si no lo son, entonces se cortan en una recta.

Por otra parte, veamos qué ocurre en el caso en que los planos $\Lambda, \Lambda' \subset Q_4$ sean disjuntos. En tal situación, razonamos de la siguiente manera: como los planos son disjuntos en $Q_4 \subset \mathbb{P}^5$, el espacio $\Lambda + \Lambda'$ tiene dimensión 5 ($2 + 2 + 1$), luego $\Lambda + \Lambda' = \mathbb{P}^5$. Consideremos un $\Phi \simeq \mathbb{P}^3$ tal que $\Lambda \subset \Phi$. Entonces, $\Phi \cap Q_4$ es una cuádrica en \mathbb{P}^3 que contiene un plano Λ , con lo cual dicha cuádrica es de rango a lo sumo 2. De hecho, es de rango exactamente 2 (lo razonaremos al final). De este modo, $\Phi \cap Q_4$ consiste en la unión de dos planos Λ y Λ'' cortándose a lo largo de una recta l . Esto ya nos asegura que Λ y Λ'' pertenecen a familias disjuntas. Veamos qué ocurre entonces con el plano Λ' disjunto de Λ : nos valdremos de la siguiente figura:

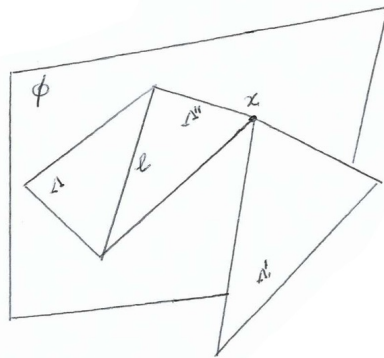


Figura 3.3: Φ, Λ, Λ' y Λ'' .

Tenemos que $\Phi \simeq \mathbb{P}^3$ contiene al plano Λ que es disjunto de Λ' , luego ambos no pueden estar contenidos en Φ simultáneamente ya que entonces su intersección tendría dimensión 1. Ahora bien, Φ y Λ' en \mathbb{P}^5 se cortan y $\mathbb{P}^5 = \langle \Lambda, \Lambda' \rangle$. En todo caso, la intersección $\Lambda \cap \Lambda'$ yace en $\Lambda \cup \Lambda' \subset \Phi$, y como Λ' es disjunto de Λ , Λ' corta a Φ en exactamente un punto del plano Λ'' que llamaremos X . Claramente Φ y Λ' no se pueden cortar en una recta, pues esta recta y el plano Λ se cortan y hemos supuesto Λ y Λ' disjuntos. Por tanto, por la discusión realizada en el argumento previo, ambos planos son de familias disjuntas. Por tanto:

Proposición 3.13. *En la cuádrica $Q_4 \subset \mathbb{P}^5$ se tiene:*

1. *Dos planos de la misma familia o coinciden o se cortan en exactamente un punto.*
2. *Dos planos de familias distintas o bien se cortan en una recta o bien son disjuntos.*

Ahora sí, estamos en condiciones de probar e ilustrar el siguiente Teorema:

Teorema 3.14 (De Descomposición de Witt). *Sea $Z(Q) \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ una cuádrica proyectiva de rango r en un espacio proyectivo n -dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$. Entonces, existe una referencia proyectiva (base ortonormal de V) respecto de la cual la matriz de la cuádrica es de la forma:*

$$M_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{2t} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

en donde t es el número de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

y es un entero satisfaciendo $0 \leq t \leq r/2$. Los $\{\alpha_{2t}, \dots, \alpha_r\}$ son elementos del cuerpo \mathbb{K} tales que

$$\sum_{i=2t}^r \alpha_i x_i^2 = 0 \iff x_i = 0, \quad i = 2t, \dots, r. \quad (3.54)$$

Comentario 3.15 (Interpretación). Antes de pasar a probar el Teorema, interpretémoslo:

Siendo t máximo tal que $0 \leq t \leq r/2$, tenemos una base en V , sea:

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{2t-2}, \vec{v}_{2t-1}, \vec{v}_{2t}, \dots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n\} \quad (3.55)$$

de forma que se tiene una descomposición

$$V = \Pi_1 \perp \Pi_2 \perp \dots \perp \Pi_t \perp \langle \vec{v}_{2t}, \dots, \vec{v}_r \rangle \perp \langle \vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n \rangle \quad (3.56)$$

donde $\Pi_i = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1} \rangle$ es un plano de *Lorentz* o plano hiperbólico, $\langle \vec{v}_{2t}, \dots, \vec{v}_r \rangle$ es un subespacio anisótropo¹ ($\iff Z(Q) \cap \mathbb{P}(\langle \vec{v}_{2t}, \dots, \vec{v}_r \rangle) = \emptyset$) y $\langle \vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n \rangle$ es el radical de la forma cuadrática. Además, $\mathbb{P}(\Pi_i)$ es una recta bisecante a la cuádrica lisa $Z(Q) \cap S$, siendo S tal que $S \oplus \text{Rad}_Q(V) = V$.

Demostración. Vamos a demostrar el Teorema por descripción explícita de la cuádrica e ilustrando en su caso cada situación.

- CASO 1. Supongamos $Z(Q) = \emptyset$. En tal caso, se tiene $r = n + 1$ y $t = 0$, con lo cual la matriz es la matriz diagonal en una base ortogonal. Esto sucede precisamente si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pues en el caso complejo siempre existe solución no nula. En tal caso, la forma cuadrática es $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$.
- CASO 2. Supongamos $Z(Q) = \emptyset$ pero $Z(Q) = \text{Ver}(Z(Q)) = \mathbb{P}(\text{Rad}_Q(V))$. En este caso, $\text{Rad}_Q(V) = \langle \vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n \rangle$ y dado un suplementario $S \subset V$, tenemos que $Z(Q) \cap \mathbb{P}(S) = \emptyset$. Con lo cual, la cuádrica restringida a $\mathbb{P}(S)$ es vacía y se encuentra en el caso 1, en consecuencia $t = 0$. Esto obliga a que $Z(Q) = \text{Ver}(Z(Q))$ sea un hiperplano doble; por ejemplo de ecuación $x_0^2 = 0$, y el suplementario es el punto $P_0 = [1 : 0 : \dots : 0] \notin Z(Q)$. Por tanto tenemos una descomposición $V = \text{Rad}_Q(V) \oplus \langle \vec{v}_0 \rangle$ y la matriz será $\text{diag}(1, 0, \dots, 0)$, con rango $r = 1$ y $t = 0$. Tenemos una cuádrica totalmente degenerada formada por puntos singulares: un hiperplano doble.
- CASO 3. (CASO GENERAL) Supongamos ahora $Z(Q) \neq \emptyset$ y $Z(Q) \neq \text{Ver}(Z(Q))$. Este es el caso correspondiente a una descomposición no trivial

$$V = S \oplus \text{Rad}_Q(V) \tag{3.57}$$

donde ahora $Z(Q) \cap \mathbb{P}(S)$ es una cuádrica no degenerada y la cuádrica consiste en el cono de vértice $\mathbb{P}(\text{Rad}_Q(V))$ formado por las rectas que unen los puntos del vértice con los puntos de la cuádrica lisa $Z(Q) \cap \mathbb{P}(S)$.

Comencemos ilustrando la situación con dos ejemplos, en los que es suficiente considerar el caso real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

EJEMPLO 1 Consideraremos una situación degenerada. Sea, entonces, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y en \mathbb{P}^3 consideremos la forma cuadrática dada por $x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$. Esta forma define un par de planos: $x_0 + x_1 = 0$ y $x_0 - x_1 = 0$ que se cortan en la recta $x_0 = x_1 = 0$. Esta recta es claramente el vértice de la cuádrica. Cualquier recta disjunta a ésta corta a cada plano en exactamente un punto, siendo así bisecante a la cuádrica y entonces

¹Un subespacio se dice anisótropo si no contiene ningún vector isotropo.

$Z(Q) \cap \mathbb{P}^1$ consta de dos puntos. Dicha recta corresponde a un plano hiperbólico, y, en este caso, la matriz de la cuádrica es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

En este caso el rango es $r = 2$ y $t = 1$. No existe parte anisótropa, es decir, $\alpha_{2t} = \alpha_r = 0$. De hecho, el radical da lugar a una recta, que es el vértice.

EJEMPLO 2 Vamos a tratar una situación más general. Nuevamente es suficiente $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y consideremos en \mathbb{P}^3 la cuádrica de ecuación $x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$, que se trata de un cono con vértice $E_3 = (0 : 0 : 0 : 1)$ sobre la cónica lisa en el plano $x_3 = 0$ de ecuación $x_1^2 = x_0^2 + x_2^2$.

En el plano $\mathbb{P}^2(x_3 = 0)$ consideremos una recta cualquiera no tangente a la cónica, por ejemplo la $x_2 = 0$, que es bisecante a la cónica y $(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$ proporciona los dos puntos de la cónica:

$$(1 : 1 : 0 : 0) = E_0 + E_1 = E_{01} \quad y \quad (1 : -1 : 0 : 0) = E_0 - E_1 = E_{0-1} \quad (3.59)$$

Es fácil comprobar que la recta tangente a la cónica lisa en $(1 : -1 : 0 : 0)$ es $x_0 + x_1 = 0$ (E_{0-1}^\perp) y en $(1 : 1 : 0 : 0)$, $x_0 - x_1 = 0$ (E_{01}^\perp).

Cada una de las rectas junto al punto generan los planos tangentes al cono en los puntos E_{01} y E_{0-1} , y si consideramos la recta $E_{01} \cap E_{0-1} = \{x_0 = x_1 = 0\}$ obtenemos una recta disjunta a la bisecante ($x_2 = x_3 = 0$) que contiene dos puntos: el vértice E_3 y el $E_2 = (0 : 0 : 1 : 0)$ que no están en la cónica lisa. Con estas dos rectas disjuntas en \mathbb{P}^3 generamos la referencia proyectiva:

$$P_0 = [\vec{v}_0] = (1 : -1 : 0 : 0) \quad P_1 = (1 : 1 : 0 : 0) \quad P_2 = (0 : 0 : 1 : 0) \quad P_3 = (0 : 0 : 0 : 1) \quad (3.60)$$

y la matriz de la cuádrica bajo esta referencia es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

teniéndose:

$$Q(P_0) = Q(P_1) = Q(P_3) = 0 \quad y \quad Q(P_2) = 1 \neq 0. \quad (3.62)$$

También, $Q(P_0, P_1) = 2$, luego necesitamos normalizar para que $Q(P_0, P_1) = 1$ y considerar:

$$P'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 : -1 : 0 : 0) \quad P'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 : 1 : 0 : 0) \quad P_2 = (0 : 0 : 1 : 0) \quad P_3 = (0 : 0 : 0 : 1) \quad (3.63)$$

Es decir, la caja

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

corresponde a la recta bisecante $E_{01} + E_{0-1}$ que corta a la cónica lisa en dos puntos; y la caja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

corresponde con la recta $E_{01}^\perp \cap E_{0-1}^\perp$, disjunta a la bisecante anterior y que pasa por el vértice del cono y no contiene más puntos del mismo.

En este ejemplo: $n = 4$, $r = 3$, $t = 1$, $\alpha_2 = 1$.

Ahora sí, veamos la demostración formal del caso 3.

Recordemos que nos encontramos en el caso donde $Z(Q) \neq \emptyset$ y $Z(Q) \neq Ver(Z(Q))$. Sea, entonces, $V = S \oplus Rad_q(V)$ y tenemos que $Z(Q) \cap \mathbb{P}(S)$ es no degenerada y no vacía.

Dada una tal cuádrica, una recta genérica la cortará en dos puntos. Sea $P_0 + P_1 = \overline{P_0 P_1}$ dicha recta. Usando el Teorema de Homogeneidad, podremos seguir construyendo la referencia proyectiva precisamente si $\overline{P_0 P_1} \cap (P_0^\perp \cap P_1^\perp) = \emptyset$, con lo cual, debemos garantizar esta situación.

Nuevamente, en el Teorema de Homogeneidad hemos argumentado que $\overline{P_0 P_1} \cap (P_0^\perp \cap P_1^\perp) = \emptyset$ se cumple precisamente si $P_0 \notin P_1^\perp$ ($\iff P_1 \notin P_0^\perp$). Comprobemos entonces que se verifica esta última condición. Si fuese lo contrario, es decir, si $P_0 \in P_1^\perp$, entonces $P_0 \in P_1^\perp \cap \mathbb{P}(S)$, esto es, P_0 pertenece al hiperplano tangente a la cuádrica lisa $Z(Q) \cap \mathbb{P}(S)$. Equivalentemente, en la cuádrica $Z(Q) \cap \mathbb{P}(S)$, $P_0 \in P_1^\perp \cap Z(Q) \cap \mathbb{P}(S)$ y por la proposición 3.5.2, la recta $\overline{P_0 P_1}$ está contenida en $Z(Q) \cap \mathbb{P}(S)$, lo cual contradice nuestra hipótesis². Por tanto $P_0 \notin P_1^\perp$.

Con lo cual, podemos tomar una referencia $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ con $\langle P_2, \dots, P_n \rangle = P_0^\perp \cap P_1^\perp$, y respecto de esta referencia tenemos para la cuádrica una matriz

$$diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right). \quad (3.66)$$

Ahora, reiteramos la argumentación anterior trabajando sobre la sección cuádrica $P_0^\perp \cap P_1^\perp \cap Z(Q)$. Como el vértice es $Ver(Z(Q)) = \mathbb{P}(Rad_Q(V))$, sabemos que para todo $P \in Z(Q)$, $Ver(Z(Q)) \subset P^\perp$, con lo que podemos volver a realizar el argumento razonando con respecto al vértice y buscando puntos de la cuádrica en el suplementario usando rectas bisecantes.

²Necesitamos que $\overline{P_0 P_1}$ sea bisecante porque si fuese tangente, $P_0^\perp = P_1^\perp$ y por la proposición 3.5.3 se tendría que $\overline{P_0 P_1}$ cortaría al lugar singular de $Z(Q) \cap \mathbb{P}(S)$, pero ello es imposible porque es lisa.

En cuanto no haya más puntos de $Z(Q)$ concluye la existencia de planos hiperbólicos y comienza a aparecer la parte anisótropa $(\alpha_{2t}, \dots, \alpha_r)$.

□

Visto lo anterior, podemos establecer una última definición, el ansiado *Índice de Witt*, y un último colorario:

Definición 3.16. El número de planos hiperbólicos que aparecen en la matriz de la cuádrlica $Z(Q)$ descritos en la descomposición de Witt del Teorema previo se llama *Índice de Witt* de la forma cuadrática Q o de la cuádrlica proyectiva $Z(Q)$. A veces se denomina a $\mathbb{P}(\langle \alpha_{2t}, \dots, \alpha_r \rangle)$ el *resto* o *residuo* de la cuádrlica $Z(Q)$.

Corolario 3.17. *El Índice de Witt de la cuádrlica $Z(Q) \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ menos una unidad es la dimensión de los subespacios maximales contenidos en la sección de la cuádrlica por un subespacio arbitrario suplementario del vértice de la cuádrlica. En consecuencia, es un invariante proyectivo.*

Demostración. Primero, observemos que siendo S_1 y S_2 dos subespacios suplementarios del radical $Rad_Q(V)$ o del vértice $Ver(Z(Q))$ de la cuádrlica, la perspectividad de centro el vértice³ transforma $S_1 \cap Z(Q)$ en $S_2 \cap Z(Q)$. Es decir, subespacios maximales en la sección cuádrlica $S_1 \cap Z(Q)$ se corresponden con subespacios maximales en la sección $S_2 \cap Z(Q)$ y tales subespacios maximales en una sección suplementaria de su vértice no dependen de la sección elegida. Así pues, podemos considerar la sección dada por la referencia proyectiva considerada en el Teorema de Descomposición de Witt.

En dicha referencia, la ecuación de la cuádrlica proyectiva es:

$$2x_0x_1 + 2x_2x_3 + \dots + 2x_{2(t-1)}x_{2t-2} + \alpha_{2t}x_{2t}^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 = 0 \quad (3.67)$$

Por tanto, está contenido en la cuádrlica el subespacio S de ecuación:

$$x_0 = x_2 = \dots = x_{2(t-1)} = x_{2t} = \dots = x_r = 0. \quad (3.68)$$

La dimensión de S puede ser calculada en el \mathbb{P}^{r-1} disjunto a $Ver(Z(Q))$ teniendo en cuenta que:

- (i) La dimensión de \mathbb{P}^{r-1} es el número de variables menos uno, es decir, $r - 1$.
- (ii) El número de ecuaciones independientes definiendo a S es precisamente, $t + r - 2t = r - t$.

³La perspectividad de centro $Ver(Z(Q))$ se define de modo obvio: si $P \in S_1$ entonces $Ver(Z(Q)) + P$ corta a S_2 en un punto P' , mientras que recíprocamente, $Ver(Z(Q)) + P'$ corta a S_1 precisamente en P .

Por tanto, $\dim(S) = r - 1 - (r - t) = t - 1$.

Queremos ver ahora que S es un subespacio maximal contenido en la cuádrica $Z(Q)$, es decir, no existe otro subespacio T en la sección cuádrica $Z(Q) \cap S_1$ tal que $S \subseteq T$. Por el Teorema de Homogeneidad, esto probaría que no existe otro subespacio $T \subset Z(Q)$ con dimensión mayor que $t - 1$.

Supongamos que $T \subset Z(Q)$ fuese otro subespacio conteniendo estrictamente a S . Entonces, por las ecuaciones que definen a S ; T ha de contener a los puntos de la referencia proyectiva en S definidos por:

$$E_1 = (0 : 1 : 0 : 0 : \dots : 0_{2t-2} : 0_{2t-1} : 0_{2t} : \dots : 0_r : 0_{r+1} : \dots : 0_n) \quad (3.69)$$

$$E_3 = (0 : 0 : 0 : 1 : \dots : 0_{2t-2} : 0_{2t-1} : 0_{2t} : \dots : 0_r : 0_{r+1} : \dots : 0_n) \quad (3.70)$$

...

$$E_{2i+1} = (0 : 0 : \dots : 0_{2i} : 1_{2i+1} : \dots : 0_{2t-2} : 0_{2t-1} : 0_{2t} : \dots : 0_r : 0_{r+1} : \dots : 0_n) \quad (3.71)$$

...

$$E_{2t-1} = (0 : 1 : \dots : 0_{2t-2} : 1_{2t-1} : 0_{2t} : \dots : 0_r : 0_{r+1} : \dots : 0_n) \quad (3.72)$$

Supongamos ahora que existe un punto $P \in T \setminus S$ tal que $P = (a_0, a_1, \dots, a_{2t-1}, a_{2t}, \dots, a_r)$. También es un punto de T el dado por:

$$P - \sum_{i=0}^{t-1} a_{2i+1} E_{2i+1} = (a_0 : 0 : a_1 : 0 : \dots : a_{2t-2} : 0 : a_{2t} : \dots : a_r) \quad (3.73)$$

y como $T \subset Z(Q)$, sus punto satisfacen la ecuación de la cuádrica,

$$2a_0 \cdot 0 + 2a_2 \cdot 0 + \dots + 2a_{2t-2} \cdot 0 + \alpha_{2t} a_{2t}^2 + \dots + \alpha_r a_r^2 = 0 \quad (3.74)$$

es decir,

$$\alpha_{2t} a_{2t}^2 + \dots + \alpha_r a_r^2 = 0 \quad (3.75)$$

y por elección de la referencia proyectiva, necesariamente $a_{2t} = \dots = a_r = 0$. Así pues, hemos encontrado en T un punto R con coordenadas

$$(a_0 : 0 : a_2 : 0 : \dots : a_{2t-2} : 0 : \dots : 0) \quad (3.76)$$

y como este punto no pertenece a S , necesariamente alguna de las coordenadas a_i ha de ser no nula. Supongamos, por ejemplo, que es $a_0 \neq 0$. Como el punto referencia E_1 pertenece a T , entonces también pertenecerá a $T \subset Z(Q)$ el punto dado por:

$$R + E_1 = (a_0 : 1 : a_2 : \dots : a_{2t-2} : 0 : \dots : 0). \quad (3.77)$$

Sin embargo, este punto no satisface la ecuación de la cuádrica, pues $2a_0 \neq 0$. Con lo cual no existe T tal que $S \subseteq T$, y S es maximal. \square

Bibliografía

- [EA57] Artin, E. (1957) *Geometric Algebra* , Interscience Publishers, Inc.
- [GC59] Castelnuovo, G. (1959) *Lecciones de Geometría Analítica* , Editorial Colomino, Mundo Científico. LA PLATA.
- [P76] Puerta, F. (1976) *Algebra lineal*, Marcombo. Boixareu Editores.
- [JH78] Griffiths, Phillip; Harris, Joe. (1978) *Principles of Algebraic Geometry*, Jonm Willey and Sons Interscience.
- [SR49] Semple, J. G. Roth, L. (1949) *Introduction to Algebraic Geometry* Clarendon Press. Oxford reprinted(1986).