UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISE MATEMÁTICA

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN PARA ECUACIÓNS FUNCIONAIS DISCONTINUAS CON ARGUMENTOS DESVIADOS

Rubén Figueroa Sestelo

2011

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISE MATEMÁTICA
FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Tese de doutoramento realizada polo alumno D. Rubén Figueroa Sestelo baixo a dirección do profesor D. Rodrigo López Pouso.

Santiago de Compostela, 30 de setembro de 2011.

O director da tese

Asdo: Rodrigo López Pouso

O doutorando

Asdo: Rubén Figueroa Sestelo

Aos meus pais, Rosa e Santiago, e a miña irmá Nerea

"...'cause nothing else matters..."

"Non podo abranguer o descoñecido se me aferro ao coñecido"
R. Fisher, *O cabaleiro da armadura oxidada.*

"O fracaso non é unha opción"
G. Kranz, director de voo da misión Apolo XIII.

Agradecementos

A elaboración desta tese de doutoramento non tería sido posible sen o apoio constante, o esforzo e a ilusión do meu director, Rodrigo López Pouso. A el lle agradezo, con aprecio e admiración, os coñecementos que me transmitiu, o seu gusto polo rigor e o traballo ben feito e tantas horas de grato traballo xuntos.

Tamén me gustaría dar as grazas a todos os profesores do departamento de Análise Matemática, e moi especialmente a Alberto Cabada e Juan José Nieto, pola súa constante atención e por darme todas as facilidades para que neste departamento me sentise como en casa.

Así mesmo, quero agradecer ao profesor Manuel Ladra a súa axuda no manexo do ordenador, especialmente á hora de confeccionar as ilustracións que se inclúen nesta memoria.

Co remate desta memoria poño punto e final á miña formación académica para dar comezo a unha nova vida. Parece, pois, un bo momento para dar as grazas tamén a todas esas persoas que me nutriron ao longo de tantos anos e que, dalgún xeito ou outro, xa me marcaron para sempre:

– A toda a miña familia, tanto a que vive ás beiras do Miño como a que vive ás beiras do Alvedosa. Cun recordo moi especial para os que xa non están: a miña avoa Esther, os meus avós Elías e Modesto e o meu tío César.

– Aos meus amigos de Salvaterra: Almudena, Anxo, Dani, Fran, Iris, Iván, Javi, Jose Ubeira, Lourdes, Maika, Marcelo, Marisol, Sergio, Víctor Carro e tantos outros cos que sempre podo contar.

– A todos os amigos que fixen durante os anos que vivín no CM Rodríguez Cadarso e na RU Monte da Condesa. Imposible nomealos a todos, como imposible é agradecer todo o que me aportaron e a aprendizaxe que deles me levo para o resto da miña vida.

– Aos meus compañeiros da promoción 2002–2007 de matemáticas, por tantas horas de camaradería.

– Ao meu sempiterno profesor, Andrés E. Cabana. Nunca saberei se a vida me tería levado polo mesmo camiño se non me tivese cruzado con el en plena adolescencia.

Índice xeral

Introdución

As ecuacións diferenciais representan un dos máis fortes elementos de conexión entre a matemática e a vida real. O emprego desta ferramenta matemática á hora de modelar múltiples procesos da medicina, enxeñería, física ou bioloxía é un feito clásico e cada vez máis estendido nas últimas décadas. Por este motivo, parece máis que xustificado que os matemáticos adiquen esforzos ao estudo das ecuacións diferenciais, tanto desde o punto de vista cualitativo (dinámica), como estratexias de resolución, así como resultados máis abstractos referentes á existencia e localización de solucións. É neste último punto onde engarza a memoria que presentamos a continuación. Máis concretamente, o noso obxectivo principal neste traballo será presentar novos resultados de existencia e localización de solucións para certos tipos de ecuacións diferenciais funcionais con argumentos desviados.

Unha *ecuación diferencial con argumento desviado* é aquela na que a derivada da solución depende non só do estado presente da función incógnita, senón tamén de estados pasados ou futuros. O exemplo máis coñecido deste tipo de dependencias é o das *ecuacións con atraso*, da forma

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \; t \in I = [t_0, t_0 + L], \tag{1}$$

onde $\tau > 0$ é un valor fixado. Obsérvese que para ter un problema ben plantexado debemos engadir á ecuación (1) non só unha condición inicial puntual, senón que debemos indicar cal é o valor da solución en todo o intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$. Isto é o que se denomina *función de arranque*. Permitir este tipo de dependencias é de gran utilidade á hora de mellorar modelos matemáticos da vida real, tal e como nos leva demostrado a experiencia práctica. Se por exemplo consideramos un modelo de crecemento poboacional e substituímos a condición clásica “a taxa de crecemento depende do número de individuos no instante actual” por “a taxa de crecemento depende do número de individuos en idade de procrear, isto é, dos nados hai τ unidades de tempo” estamos incluíndo unha condición de atraso que, de feito, é moito máis fidedigna co comportamento real.

Ao igual que falamos de dependencia da solución dos valores pasados, podemos falar tamén de dependencia dos valores futuros, isto é, considerar ecuacións da forma

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t+\tau)), \; t \in [t_0, t_0 + L], \tag{2}$$

con $\tau > 0$ fixado. Ecuacións do tipo (2) reciben o nome de *ecuacións con adianto* e, malia que a súa aplicabilidade non é tan clara coma no caso das ecuacións con atraso, é certo que as ecuacións con adianto teñen utilidade práctica. Por poñer algún exemplo, en [16] os autores estudan unha ecuación que modela a condución de impulsos nerviosos entre neuronas e que combina adiantos e atrasos; en problemas de control óptimo con atraso, a ecuación de Euler que determina a solución óptima involucra a miúdo sistemas de ecuacións con adianto [71]; tamén, en certos problemas de estatística aparecen ecuacións con adianto e con atraso [59]. De xeito análogo ao que ocorría no caso anterior, para ter un problema ben plantexado debemos proporcionar como dato o comportamento da solución no intervalo $[t_0 + L, t_0 + L + \tau]$.

Ecuacións máis xerais que as anteriores son aquelas que inclúen desvíos que, no canto de ser constantes, son funcións dependentes do tempo $\tau(t)$ ou, incluso, dependentes da incógnita $\tau(t, x)$, o cal se coñece como *desvíos dependentes do estado.*

As ecuacións diferenciais con argumentos desviados están sendo intensamente estudadas actualmente, e podemos citar artigos moi recentes como [24, 33, 55, 59, 75]. Neste traballo darémoslle atención especial á situación xeral na cal os desvíos dependen da incógnita, o cal é interesante desde o punto de vista da teoría e das aplicacións. Este tipo de problemas tamén leva recibido moita atención nos últimos anos, e podemos citar artigos como [22, 43, 79, 80, 85]. Tamén suxerimos o survey de Hartung *et al.* [39] e as referencias que alí se citan para aqueles lectores interesados en modelos matemáticos que usan desvíos dependentes da incógnita, así como para o estudo da teoría cualitativa básica deste tipo de problemas. Un exemplo de modelo que se describe alí é o seguinte.

Exemplo. *Consideremos un móbil que se despraza sobre unha liña horizontal na cal hai un obstáculo. O móbil regula a súa posición respecto do obstáculo emitindo un sinal que será reflectido por este último. Denotamos por $x(t)$ a posición do móbil no instante t ($t \in \mathbb{R}$), $-\omega < 0$ é a posición na que se localiza o obstáculo e 0 considérase a posición límite que pode acadar o móbil (isto é, permanecer a unha distancia maior que ω do obstáculo). A dificultade para o control radica en que o sinal toma un determinado tempo en regresar do obstáculo, e durante este tempo o móbil permanece en movemento. Co fin de modelar este feito, consideramos que o sinal se despraza a unha velocidade $c > 0$ e que pasan $s(t)$ unidades de tempo entre que o móbil emite o sinal no instante t e recibe o seu reflexo:*

$$cs(t) = |x(t - s(t)) + \omega| + |x(t) + \omega|.$$

Deste xeito obtense a distancia do móbil ao obxecto como

$$d = \frac{c}{2}s.$$

Agora, en función da distancia computada $d - \omega$, o móbil axusta a súa velocidade en módulo e sentido, cun tempo de reacción $r > 0$ que asumimos constante. Este mecanismo descríbese entón mediante a ecuación diferencial

$$x'(t) = v(d(t - r) - \omega),$$

onde $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *representa o* feedback *negativo con respecto á posición ideal* 0*, no sentido de que a desigualdade* $\delta v(\delta) < 0$ *cúmprese para todo* $\delta \neq 0$*. Obtemos deste xeito unha ecuación da forma*

$$x'(t) = v\left(\frac{c}{2}s(t-r) - \omega\right),$$

con

$$cs(t) = |x(t - s(t)) + \omega| + |x(t) + \omega|,$$

onde $c, \omega, r > 0$ *e* v *satisface a condición de feedback negativo mencionada anteriormente.*

A presente memoria está organizada do seguinte xeito: no primeiro capítulo incluímos diversas ferramentas e técnicas matemáticas previas que precisaremos para o desenvolvemento do noso traballo orixinal. No segundo capítulo proporciónase un novo resultado de existencia de solucións extremais entre sub e sobresolucións para problemas de valor inicial de primeira orde, e faise unha estensión deste resultado a diversos problemas funcionais. O terceiro e cuarto capítulos constitúen a parte máis importante desta memoria, na que se estudan en profundidade diversos problemas diferenciais con argumentos desviados: no capítulo 3 traballarase con problemas de primeira orde e no capítulo 4, problemas de segunda orde.

Capítulo 1

Preliminares

Comezamos a nosa memoria, tal e como adiantabamos na súa introdución, incluíndo algunhas ferramentas matemáticas que precisaremos no desenvolvemento dos capítulos seguintes. Estes preliminares inclúen nocións básicas sobre análise de funcións reais (propiedades das funcións absolutamente continuas e medibilidade superposicional), resultados de punto fixo e algunhas nocións sobre análise multivaluada, inclusións diferenciais e teoría da viabilidade.

1.1. Análise de funcións reais de variable real

1.1.1. Variación limitada e continuidade absoluta

Nesta epígrafe faremos unha recompilación breve de resultados básicos relativos a funcións de variación limitada e funcións absolutamente continuas, cuxas probas poden atoparse en [45] e [62]. A motivación principal para incluír estes resultados nesta memoria está en que as solucións dos problemas diferenciais que nos plantexaremos serán, en esencia, funcións absolutamente continuas para problemas de primeira orde e funcións con derivada absolutamente continua para problemas de segunda orde.

Comezamos introducindo a definición estendida de derivada, debida a Dini.

Definición 1.1.1. *Sexan $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $t_0 \in Dom(f)$. Defínense as derivadas de Dini de f en t_0 do seguinte xeito (e en canto os límites correspondentes teñan sentido):*

1. *Derivada inferior pola dereita de f en t_0:*

$$D_+f(t_0) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h};$$

2. *Derivada superior pola dereita de f en t_0:*

$$D^+f(t_0) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h};$$

3. Derivada inferior pola esquerda de f en t_0:

$$D_-f(t_0) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h};$$

4. Derivada superior pola esquerda de f en t_0:

$$D^-f(t_0) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}.$$

É claro a partir da definición anterior que as derivadas de Dini de f en t_0 existen sempre se, por exemplo, t_0 é un punto interior ao dominio de f, podendo ser os seus valores $\pm\infty$. Ademais, cúmprense as desigualdades

$$D_+f(t_0) \leq D^+f(t_0) \ \text{ e } D_-f(t_0) \leq D^-f(t_0).$$

Se

$$D_+f(t_0) = D^+f(t_0) \in \mathbb{R},$$

entón este valor común é a derivada lateral dereita de f no punto t_0, que se denota por $f'_+(t_0)$ e coincide coa definición usual. Analogamente, se

$$D_-f(t_0) = D^-f(t_0) \in \mathbb{R},$$

entón este valor común é a derivada lateral esquerda de f no punto t_0, denotada por $f'_-(t_0)$. Se as dúas derivadas laterais existen e o seu valor coincide entón dicimos que f é derivable en t_0 e escribimos $f'(t_0) = f'_-(t_0) = f'_+(t_0)$.

Presentamos a continuación algunhas nocións relativas a funcións de variación limitada e funcións absolutamente continuas.

Definición 1.1.2. *Sexan $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ unha partición do intervalo I. Definimos a variación de f relativa a P como*

$$V(P,f) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \in [0, +\infty),$$

e a variación total de f en I como

$$V_a^b(f) = \sup\{V(P,f) : P \textit{ partición de } I\} \in [0, +\infty].$$

Se $V_a^b(f) < \infty$ dise que f é unha función de variación limitada en I, e denótase $f \in BV(I)$.

Por exemplo, toda función monótona é de variación limitada, pois se tomamos unha partición arbitraria $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ de I e f é monótona en I, entón

$$V(P, f) = \text{máx}\{f(b) - f(a), f(a) - f(b)\} < \infty.$$

Sexa $I = [a, b]$ un intervalo compacto. As propiedades máis salientables das funcións de variación limitada son as seguintes:

Proposición 1.1.3. *Se $f \in BV(I)$, entón f é derivable en case todo punto (c.t.p.) de I e ademais $f' \in L^1(I)$.*

Proposición 1.1.4. *Se f é derivable en I e f' está limitada, entón $f \in BV(I)$.*

Proposición 1.1.5. *Se $f \in L^1(I)$ entón a función*

$$t \in I \longmapsto \int_a^t f(s)\, ds \tag{1.1}$$

é de variación limitada en I e, en consecuencia, é derivable en case todo punto.

Definición 1.1.6. *Unha función $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dise que é absolutamente continua en I se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal xeito que se $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ é unha familia de subintervalos de I que son disxuntos dous a dous e tal que*

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

entón

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Denotaremos por $AC(I)$ o conxunto de funcións absolutamente continuas en I.

As propiedades máis salientables das funcións absolutamente continuas en $I = [a, b]$ son as seguintes.

Proposición 1.1.7. *Se $f \in AC(I)$ entón f é uniformemente continua en I.*

Proposición 1.1.8. *Se $f \in AC(I)$ entón $f \in BV(I)$. En consecuencia, existe f' en c.t.p. de I e ademais $f' \in L^1(I)$.*

Sen embargo, a importancia das funcións absolutamente continuas no estudo das ecuacións diferenciais radica en que satisfacen a seguinte caracterización.

Teorema 1.1.9. (Teorema fundamental do cálculo) *Unha función $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente continua en I se e só se existe $f'(t)$ en case todo punto $t \in I$, $f' \in L^1(I)$ e ademais*

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds \text{ para todo } t \in I. \tag{1.2}$$

A igualdade (1.2) pode non ser certa aínda que $f \in BV(I) \cap \mathcal{C}(I)$. Un contraexemplo interesante é o seguinte: no intervalo $I = [0,1]$ definimos a función

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{máx}\{0, t_n - 1\}}{2^n} \text{ para } t \in [0,1), \quad f(1) = 1,$$

onde $t = 0, t_1\, t_2 \ldots t_n \ldots$ é a representación en base 3 de t, isto é, $t_n \in \{0,1,2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sen que exista ningún $N \in \mathbb{N}$ de tal xeito que $t_n = 2$ para $n \geq N$. Esta función é de variación limitada e continua en I e satisface que $f'(t) = 0$ en case todo punto de I, polo que

$$f(1) = 1 \neq f(0) + \int_0^1 f'(t)\, dt.$$

Observación 1.1.10. *O Teorema 1.1.9 permítenos debilitar a noción de solución dunha ecuación diferencial e dá pé á aparición dos métodos variacionais. Así por exemplo, dado o problema de valor inicial*

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ t \in I = [0,1], \quad x(0) = x_0, \tag{1.3}$$

no canto de buscar unha función $x \in \mathcal{C}^1(I)$ que cumpla (1.3) podemos buscar unha función $x \in AC(I)$ que satisfaga a ecuación integral equivalente

$$x'(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds, \tag{1.4}$$

e a formulación (1.4) é máis débil que (1.3).

Os conceptos vistos anteriormente esténdense sen dificultade a funcións vectoriais, do xeito que amosamos a continuación.

Definición 1.1.11. *Diremos que unha función $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é integrable en I, e escribiremos $f \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$, se cada unha das funcións compoñentes f_i, $i = 1, \ldots, n$, é integrable en I. Ademais, definimos*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\, dt \right).$$

Definición 1.1.12. *Diremos que $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de variación limitada en I, e denotaremos $f \in BV(I, \mathbb{R}^n)$, se cada función compoñente é de variación limitada en I, isto é, $f_i \in BV(I)$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Definición 1.1.13. *Diremos que $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é absolutamente continua en I, e escribiremos $f \in AC(I, \mathbb{R}^n)$, se cada función compoñente é absolutamente continua en I, isto é, $f_i \in AC(I)$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Teorema 1.1.14. (Teorema fundamental do cálculo) *Unha función $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é absolutamente continua en I se e só se existe $f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t))$ en case todo punto $t \in I$, $f' \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ e ademais se satisface a igualdade*

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds \text{ para todo } t \in I = [a,b].$$

1.1.2. Medibilidade superposicional

Unha das técnicas que máis usaremos ao longo desta memoria consistirá en reformular problemas diferenciais en termos de operadores integrais, na liña de como se explicaba na Observación 1.1.10. Ao realizar este proceso será necesario facer certas comprobacións técnicas co fin de garantir que esta nova formulación teña sentido. A este respecto, posiblemente o paso máis sutil sexa comprobar que o integrando é unha función medible. Co fin de que nos sirva de apoio neste punto, incluímos nesta sección algunhas disquisicións relativas a *medibilidade superposicional*, isto é, dados un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ e dúas funcións $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que sexan medibles, obter condicións suficientes sobre f que garantan que a composición $t \in I \longmapsto F\gamma(t) = f(t, \gamma(t)) \in \mathbb{R}$ tamén é medible. Esta condición non é en absoluto superflua, pois nin sequera se pode garantir cando f é unha función simple e γ é unha función continua. O que segue é unha adaptación dun exemplo dado en [5].

Exemplo 1.1.15. *Sexa $S \subset [0,1]$ un conxunto non medible.*
Consideramos a función $f : (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{se } t > x \text{ ou } t = x \in S, \\[2ex] 0, & \text{se } t < x \text{ ou } t = x \notin S. \end{cases}$$

Obsérvese agora que para $\gamma(t) = t$, $t \in [0,1]$, temos $f(t,\gamma(t)) = \dfrac{1}{2}$ se $t \in S$ e $f(t,\gamma(t)) = 0$ se $t \notin S$, polo que $f(\cdot,\gamma(\cdot))$ non é medible.

Aínda que todos os resultados desta sección están enunciados para o caso unidimensional, estes seguen sendo válidos en calquera dimensión finita. Para un estudo máis profundo do operador de superposición F recomendamos a monografía [2].

No que segue, I será un intervalo compacto de $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.16. *Unha función $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dise que é superposicionalmente medible se a composición*

$$t \in I \longmapsto f(t,\gamma(t))$$

é medible para toda función medible $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición 1.1.17. *Unha función $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dise que é unha función de Carathéodory se $f(\cdot,x)$ é medible para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(t,\cdot)$ é continua para case todo $t \in I$.*

Lema 1.1.18. (Teorema de composición medible [12]) *Se $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función de Carathéodory entón f é superposicionalmente medible.*

Á vista do resultado anterior, o lector podería preguntarse se as funcións de Carathéodory responden totalmente á cuestión da composición medible. É doado ver que a resposta, desafortunadamente, é negativa. En efecto, se $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha sucesión de funcións superposicionalmente medibles que converxe a f para case todo $t \in I$ e todo $x \in \mathbb{R}$, entón [2, Lema 1.4] f é superposicionalmente medible; sen embargo, o límite puntual de funcións de Carathéodory pode non ser unha función de Carathéodory, xa que, en xeral, o límite puntual de funcións continuas non é continuo.

Outra clase importante de funcións que satisfacen a propiedade de medibilidade superposicional son as funcións estándar ou, tamén, de Shragin.

Definición 1.1.19. *Unha función $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dise que é unha función de Shragin se existe un subconxunto $D_0 \subset I$ de medida nula e de tal xeito que para todo boreliano B o conxunto $f^{-1}(B) \backslash (D_0 \times \mathbb{R})$ é $(\mathcal{L} \bigotimes \mathcal{B})-$medible, onde $\mathcal{L}$ é a $\sigma-$álxebra de Lebesgue en I e $\mathcal{B}$ é a $\sigma-$álxebra de Borel en $\mathbb{R}$.*

Unha propiedade interesante é que o límite puntual de funcións de Shragin pertence a esta mesma clase, o cal implica que non toda Shragin é Carathéodory, aínda que o contido recíproco si que é certo [2, Teorema 1.1.1]. A dificultade de traballar coas funcións de Shragin radica en que a súa definición non é moi manexable na práctica, polo que cómpre dispor de criterios de medibilidade superposicional alternativos. Por este motivo, finalizamos esta sección presentando algúns resultados que poden ser de utilidade á hora de aplicar os resultados desta memoria, e que non precisan que a función sexa Carathéodory.

Proposición 1.1.20. [20, Proposición 3.2] *Sexa $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función que satisface as seguintes condicións:*

(1) *$f(\cdot, q)$ é medible para todo $q \in \mathbb{Q}$;*

(2) *Ou ben para case todo $t \in I$ e todo $x \in \mathbb{R}$ tense*

$$\text{mín}\left\{\limsup_{y \to x^-} f(t,y), \limsup_{y \to x^+} f(t,y)\right\} \leq f(t,x),$$

ou ben para case todo $t \in I$ e todo $x \in \mathbb{R}$ tense

$$f(t,x) \leq \text{máx}\left\{\liminf_{y \to x^-} f(t,y), \liminf_{y \to x^+} f(t,y)\right\};$$

(3) *Existen aplicacións $j_n : I_n \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, de tal xeito que para case todo $t \in I$ o conxunto de puntos de discontinuidade de $f(t, \cdot)$ é exactamente*

$$\bigcup_{n\,:\,t \in I_n} \{j_n(t)\}.$$

Ademais, as aplicacións j_n e $f(\cdot, j_n(\cdot))$ son medibles para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entón a función $t \in I \longmapsto f(t, x(t))$ é medible para toda $x \in \mathcal{C}(I)$.

O resultado anterior só garante a medibilidade de composicións con funcións continuas, polo que non é propiamente un resultado de composición medible. Se queremos probar un resultado de medibilidade de composicións con funcións medibles debemos reforzar as condicións sobre continuidade lateral.

Proposición 1.1.21. *Sexan $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funcións tales que*

(1) *γ é medible e para cada $q \in \mathbb{Q}$ a aplicación $t \in I \longmapsto f(t, q)$ é medible;*

(2) *O conxunto $\{t \in I \,:\, f(t, \cdot)$ é continua pola esquerda en $\gamma(t)\}$ é medible;*

(3) *Para case todo $t \in I$ a función $f(t, \cdot)$ é lateralmente continua en $\gamma(t)$.*

En tal caso, a composición $t \in I \longmapsto f(t, \gamma(t))$ é medible.

Proba. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n + 1\}$ construímos os seguintes subconxuntos medibles de I:

$$E_{n,0} = \gamma^{-1}((-\infty, -n)),$$

$$E_{n,k} = \gamma^{-1}\left(\left[-n + (k-1)\frac{n}{2^{n-1}}, -n + k\frac{n}{2^{n-1}}\right)\right), \ k = 1, 2, \dots, 2^n,$$

$$E_{n,2^n+1} = \gamma^{-1}([n, +\infty)).$$

Definimos unha sucesión de funcións simples medibles $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, con

$$S_n = \sum_{k=0}^{2^n+1} \alpha_k^n \chi_{E_{n,k}},$$

onde $\alpha_0^n = -n$ e $\alpha_k^n = -n + 2^{-n+1}n(k-1)$ para $k = 1, 2, \dots, 2^n + 1$. Obsérvese que $S_n(t) \in \mathbb{Q}$ para todo $t \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $t \in I$ existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $-n < \gamma(t) < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_t$; así pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_t$, existe $k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ tal que $t \in E_{n,k}$ e, polo tanto,

$$0 \leq \gamma(t) - S_n(t) < 2^{-n+1}n.$$

En consecuencia, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converxe puntualmente a γ en I pola esquerda. De xeito análogo construímos outra sucesión $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funcións simples medibles e con valores racionais que converxe a γ en I pola dereita.

Definimos agora os conxuntos

$$A = \{t \in I \,:\, f(t, \cdot) \ \text{é continua pola esquerda en } \gamma(t)\}, \quad B = I \backslash A,$$

e construímos a sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ é $T_n = S_n\chi_A + R_n\chi_B$.

Posto que T_n é simple, medible e toma soamente valores racionais, a hipótese (1) garante que a composición $t \in I \longmapsto f(t, T_n(t))$ é medible para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, se $t \in A$ entón tense que

$$f(t, \gamma(t)) = \lim_{n\to\infty} f(t, S_n(t)) = \lim_{n\to\infty} f(t, T_n(t)),$$

e para case todo $t \in B$ tense

$$f(t, \gamma(t)) = \lim_{n\to\infty} f(t, R_n(t)) = \lim_{n\to\infty} f(t, T_n(t)).$$

En consecuencia, en case todo punto $t \in I$ a aplicación $t \in I \longmapsto f(t, \gamma(t))$ é límite de funcións medibles e, polo tanto, medible. □

Observación 1.1.22. *O resultado anterior é válido tamén para funcións medibles $\gamma : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, con $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, que sexan finitas en case todo punto.*

1.2. Teoría de puntos fixos

A teoría de puntos fixos xoga un papel moi importante no estudo das ecuacións diferenciais ordinarias. Un dos métodos máis empregados á hora de probar resultados de existencia e/ou unicidade de solución para problemas con ecuacións diferenciais consiste en transformar o problema orixinal nun problema de punto fixo, isto é, atopar nun determinado espazo funcional un elemento x satifacendo $x = Tx$ para un operador axeitado T. Así por exemplo, a búsqueda de solución para o problema de valor inicial

$$x'(t) = f(t, x(t)), \;\; t \in I = [t_0, t_0 + L], \quad x(t_0) = x_0,$$

pode transformarse na búsqueda dun punto fixo para o operador $T : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$ que leva cada función continua x na función Tx definida como

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \text{ para todo } t \in I.$$

Posto que os resultados de existencia e unicidade de solución que se presentan neste traballo están baseados en teoremas de punto fixo, cómpre recompilar algunha información coñecida sobre este tema, tanto por completitude do traballo como por convenciencias técnicas posteriores. Tamén se inclúe algunha contribución orixinal, como é o Teorema 1.2.23 de existencia de puntos fixos acoplados extremais para operadores multivaluados.

1.2.1. Resultados de puntos fixos para operadores continuos

Comezaremos esta sección incluíndo dous resultados fundamentais de existencia e unicidade de puntos fixos para operadores definidos en espazos de Banach. O primeiro deles é o coñecido Teorema de Schauder, que é moi utilizado á hora de demostrar resultados de existencia para ecuacións diferenciais continuas.

Definición 1.2.1. *Sexan X un espazo de Banach e M un subconxunto non baleiro de X. Un operador $T : M \longrightarrow X$ dise que é completamente continuo se satisface as seguintes dúas condicións:*

(i) *T é continuo.*

(ii) *Se $D \subset M$ é limitado entón $T(D)$ é relativamente compacto en X.*

Teorema 1.2.2. [84, Teorema 2.A] (Teorema de Schauder) *Sexa M un subconxunto pechado, limitado, convexo e non baleiro dun espazo de Banach. Se $T : M \longrightarrow M$ é un operador completamente continuo entón o conxunto de puntos fixos de T é compacto e non baleiro.*

Un enunciado equivalente para este resultado é o seguinte.

Teorema 1.2.3. *Sexa M un subconxunto compacto, convexo e non baleiro dun espazo de Banach. Se $T : M \longrightarrow M$ é un operador continuo entón o conxunto de puntos fixos de T é compacto e non baleiro.*

Unha contribución interesante que permite deducir a existencia de puntos fixos extremais para operadores nas condicións do Teorema 1.2.2 foi feita por Cid en [17], e será tamén útil para nós nesta memoria. Está baseada na idea dos *conxuntos dirixidos.*

Definición 1.2.4. *Un subconxunto Y dun conxunto parcialmente ordenado X dise que é dirixido superiormente se para cada par de elementos $y_1, y_2 \in Y$ existe $y_3 \in Y$ de tal xeito que $y_1 \leq y_3$ e $y_2 \leq y_3$. Do mesmo xeito, dise que Y é dirixido inferiormente se para cada par $y_1, y_2 \in Y$ existe $y_3 \in Y$ de tal que $y_3 \leq y_1$ e $y_3 \leq y_2$.*

Teorema 1.2.5. [17, Teorema 2.1] *Sexan M un subconxunto limitado, pechado, convexo e non baleiro dun espazo normado ordenado X e $T : M \longrightarrow M$ un operador completamente continuo. Entón o conxunto de puntos fixos de T,*

$$P = \{x \in M \, : \, Tx = x\},$$

é compacto e non baleiro. Ademais, T ten un punto fixo máximo (respectivamente, mínimo) en M se e só se P é dirixido superiormente (respectivamente, inferiormente).

Outro resultado clásico que incluímos nesta epígrafe é o Teorema da Aplicación Contractiva de Banach, que garante a existencia e unicidade de puntos fixos para un operador contractivo. Este resultado é amplamente utilizado na literatura á hora de probar resultados de unicidade de solución para ecuacións diferenciais ordinarias baixo hipóteses de tipo lipschitziano.

Definición 1.2.6. *Sexa X un espazo de Banach e $M \subset X$ un subconxunto pechado. Un operador $T : M \longrightarrow X$ dise contractivo se existe $\lambda \in [0, 1)$ de tal xeito que*

$$\|Tx - Ty\| \leq \lambda \|x - y\|$$

para todo $x, y \in M$.

Teorema 1.2.7. (Teorema do punto fixo de Banach) *Sexan X un espazo de Banach e $M \subset X$ un subconxunto pechado. Se $T : M \longrightarrow M$ é un operador contractivo entón T ten un único punto fixo en M.*

1.2.2. Resultados de puntos fixos para operadores monótonos

Nesta epígrafe recollemos algúns resultados de punto fixo para operadores definidos en espazos parcialmente ordenados. A meirande parte deles están extraídos da monografía [42].

Dados un conxunto parcialmente ordenado X e dous elementos $a, b \in X$, defínense os intervalos

$$[a) = \{x \in X \,:\, a \leq x\},$$
$$(a] = \{x \in X \,:\, x \leq a\},$$
$$[a, b] = \{x \in X \,:\, a \leq x \leq b\}.$$

Definición 1.2.8. *Dados un conxunto parcialmente ordenado X e un subconxunto $Y \subset X$, definimos o supremo de Y en X como*

$$\sup Y = \min\{x \in X \,:\, x \geq y \textit{ para todo } y \in Y\},$$

sempre que o mínimo anterior exista. De xeito análogo, defínese o ínfimo de Y como

$$\inf Y = \max\{x \in X \,:\, x \leq y \textit{ para todo } y \in Y\},$$

sempre que o máximo anterior exista.

Definición 1.2.9. *Un conxunto parcialmente ordenado X dise que é un retículo se para cada dous elementos $x_1, x_2 \in X$ existen $\sup\{x_1, x_2\}$ e $\inf\{x_1, x_2\}$ en X. Un retículo X dise completo se cada subconxunto non baleiro de X posúe supremo e ínfimo.*

Definición 1.2.10. *Sexa X un conxunto parcialmente ordenado. Dise que $G : X \longrightarrow X$ é un operador crecente se $x, y \in X$, $x \leq y$, implica $Gx \leq Gy$. Pola contra, G dise decrecente se a relación $x \leq y$ implica $Gx \geq Gy$.*

O resultado máis coñecido de puntos fixos para operadores monótonos é o Teorema de Tarski, que recollemos a continuación.

Teorema 1.2.11. [78, Teorema 1] *Sexa $G : X \longrightarrow X$ un operador crecente nun retículo completo X. Entón G ten un punto fixo mínimo, x_*, e outro máximo, x^*, que ademais satisfacen*

$$x_* = \min\{x \in X \,:\, Gx \leq x\}, \quad x^* = \max\{x \in X \,:\, x \leq Gx\}.$$

Os puntos fixos máximo e mínimo que proporciona o teorema anterior reciben o nome xenérico de puntos fixos extremais de G.

Ao longo desta memoria traballaremos case que sempre sobre espazos de funcións dotados dunha certa métrica. Se definimos unha relación de orde parcial nestes espazos convén pedir algunha compatibilidade entre esta relación e a métrica. Con este fin introducimos a seguinte definición.

Definición 1.2.12. *Un espazo métrico X dise que é un espazo métrico ordenado se posúe unha relación de orde parcial $\leq$ de tal xeito que para todo $a \in X$ os conxuntos $[a)$ e $(a]$ son pechados.*

Os seguintes resultados xogan un papel esencial á hora de probar a existencia de solucións extremais para ecuacións diferenciais ordinarias.

Lema 1.2.13. [42, Proposición 1.2.2] *Sexa $P = [a, b]$ un intervalo nun espazo topolóxico ordenado X. Unha aplicación $G : P \longrightarrow P$ ten puntos fixos extremais en P se G é crecente e se satisface algunha das seguintes hipóteses:*

a) *$G(P)$ é relativamente compacto en P.*

b) *$\{Gx_n\}_{n=0}^{\infty}$ converxe en P para toda sucesión crecente $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset P$, onde $\overline{G(P)}$ é metrizable ou as súas cadeas son separables.*

Lema 1.2.14. [42, Teorema 1.2.2] *Sexa Y un subconxunto dun espazo métrico ordenado X, $[a, b]$ un intervalo non baleiro en Y e $G : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ un operador crecente. Se $\{Gx_n\}_{n=1}^{\infty}$ converxe en Y sempre que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é unha sucesión monótona en $[a, b]$, entón o operador G ten un punto fixo máximo, x^*, e outro mínimo, x_*, que ademais satisfacen as caracterizacións*

$$x_* = \text{mín}\{x \,:\, Gx \leq x\}, \quad x^* = \text{máx}\{x \,:\, x \leq Gx\}. \tag{1.5}$$

Se no lema anterior o espazo Y é o espazo das funcións absolutamente continuas entón podemos enunciar un resultado máis específico para este caso particular.

Lema 1.2.15. [42, Teorema 1.4.7] *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo pechado non baleiro e $[\alpha, \beta]$ un intervalo funcional non baleiro en $AC(I)$. Supoñamos que $G : [\alpha, \beta] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ é un operador crecente e que existe $v \in AC(I)$ de tal xeito que*

$$|Gx(s) - Gx(t)| \leq |v(s) - v(t)| \text{ para } x \in [\alpha, \beta],\ s, t \in I.$$

En tal caso, o operador G ten puntos fixos máximo, x^*, e mínimo, x_*, que ademais satisfacen (1.5).

Unha consecuencia inmediata do lema anterior é o seguinte.

Lema 1.2.16. [42, Proposición 1.4.4] *Sexan $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo pechado non baleiro e $[\alpha, \beta]$ un intervalo funcional non baleiro en $AC(I)$. Supoñamos que $G : [\alpha, \beta] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ é un operador crecente e que existe $\gamma \in L^1(I, [0, +\infty))$ de tal xeito que*

$$|(Gx)'(t)| \leq \gamma(t) \text{ para todo } x \in [\alpha, \beta] \text{ e case todo } t \in I.$$

En tal caso, G ten puntos fixos máximo, x^*, e mínimo, x_*, que ademais satisfacen (1.5).

1.2.3. Resultados de puntos fixos acoplados

A continuación incluímos algúns conceptos e resultados referentes a puntos fixos acoplados para operadores definidos nun espazo produto. Polo que nós sabemos, a noción de puntos fixos acoplados retrocede ata Jane Moore [63] e o estado actual da teoría de puntos fixos acoplados para operadores monótonos mixtos débelle moitos resultados a Guo e Laksmikantham, comezando por [36] e [37]. Á hora de traballar con ecuacións diferenciais, estes conceptos estarán intimamente relacionados coas cuasisolucións acopladas.

No que segue, P será sempre un subconxunto dun espazo métrico ordenado.

Definición 1.2.17. *Dado un operador $A : P \times P \longrightarrow P$, dise que $v, w \in P$ son puntos fixos acoplados de A se*

$$v = A(v, w) \quad e \quad w = A(w, v).$$

Dous puntos fixos acoplados $v_*, w^* \in P$ dise que son os extremais se $v_* \leq v$ e $w \leq w^*$ para todo par de puntos fixos acoplados $v, w \in P$.

Definición 1.2.18. *Un operador $A : P \times P \longrightarrow P$ dise limitado se existen $\underline{v}, \overline{w} \in P$ tales que $\underline{v} \leq A(v, w) \leq \overline{w}$ para todo $(v, w) \in P \times P$.*

Definición 1.2.19. *Un operador $A : P \times P \longrightarrow P$ dise monótono mixto se para cada $x \in P$ o operador $A(\cdot, x)$ é crecente e o operador $A(x, \cdot)$ é decrecente.*

Definición 1.2.20. *Diremos que $A : P \times P \longrightarrow P$ satisface a propiedade de converxencia monótona mixta se $\{A(v_j, w_j)\}_{j=1}^{\infty}$ converxe cando $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ e $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ son sucesións en P, unha crecente e a outra decrecente.*

Proposición 1.2.21. [42, Teorema 1.2.4] *Sexa $A : P \times P \longrightarrow P$ un operador limitado e monótono mixto que satisface a propiedade de converxencia monótona mixta. En tal caso, o operador A ten puntos fixos acoplados extremais.*

Presentamos a continuación unha contribución orixinal á teoría de puntos fixos acoplados para operadores multivaluados que, como veremos no Capítulo 3, ten aplicacións interesantes no ámbito das ecuacións diferenciais.

O que segue está publicado en [30].

Definición 1.2.22. *Sexa $\mathcal{A} : P \times P \longrightarrow 2^P \backslash \emptyset$ un operador multivaluado. Diremos que $v, w \in P$ son puntos fixos acoplados de $\mathcal{A}$ se*

$$v \in \mathcal{A}(v, w) \quad e \quad w \in \mathcal{A}(w, v). \tag{1.6}$$

Diremos que $v_*, w^* \in P$ son puntos fixos acoplados extremais de $\mathcal{A}$ se v_*, w^* satisfacen (1.6) e ademais

$$[v, w \in P \text{ satisfacen (1.6)}] \Rightarrow [v_* \leq v \text{ e } w \leq w^*]. \tag{1.7}$$

Obsérvese que se $v_*, w^* \in P$ son puntos fixos acoplados extremais de $\mathcal{A}$, entón a condición (1.7) implica en particular que $v_* \leq w^*$.

Teorema 1.2.23. [30, Teorema 2.1] *Sexan X un espazo métrico ordenado, Y un subconxunto non baleiro de X, $[\alpha, \beta]$ un intervalo pechado non dexenerado de Y e consideremos unha aplicación multivaluada $\mathcal{A} : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \longrightarrow 2^{[\alpha,\beta]} \backslash \emptyset$. Supoñamos que para cada $v, w \in [\alpha, \beta]$ están ben definidos os operadores univaluados*

$$A_-(v, w) = \text{mín}\, \mathcal{A}(v, w) \;\; e \;\; A_+(v, w) = \text{máx}\, \mathcal{A}(v, w) \tag{1.8}$$

e que estes operadores $A_\pm$ son monótonos mixtos e satisfacen a propiedade de converxencia monótona mixta. En tal caso, o operador multivaluado $\mathcal{A}$ ten puntos fixos acoplados extremais en $[\alpha, \beta]$.

Proba. No espazo métrico produto $X \times X$ consideramos a relación de orde $\preceq$ definida do seguinte xeito: dados dous pares $(v, w), (\overline{v}, \overline{w}) \in X \times X$, escribiremos $(v, w) \preceq (\overline{v}, \overline{w})$ se $v \leq \overline{v}$ e $w \geq \overline{w}$.

Sexan $a = (\alpha, \beta)$, $b = (\beta, \alpha)$ e consideremos o intervalo

$$[a, b] = \{(v, w) \in Y \times Y \, : \, a \preceq (v, w) \preceq b\}.$$

Contruímos o operador $G : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ que asocia cada par (v, w) con

$$G(v, w) = (A_-(v, w), A_+(w, v)),$$

e veremos que así definido o operador G satisface as condicións do Lema 1.2.14.

En efecto, sexan $(\gamma_1, \gamma_2), (\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2) \in [a, b]$ con $(\gamma_1, \gamma_2) \preceq (\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2)$. En virtude da monotonía mixta dos operadores univaluados $A_\pm$ tense que

$$A_-(\gamma_1, \gamma_2) \leq A_-(\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2})$$

e

$$A_+(\gamma_2, \gamma_1) \geq A_+(\overline{\gamma_2}, \overline{\gamma_1}),$$

polo que $G(\gamma_1, \gamma_2) \preceq G(\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2})$ e, en consecuencia, o operador G é crecente en $[a, b]$.

Por outra banda, sexa $\{(v_j, w_j)\}_{j=1}^\infty$ unha sucesión monótona en $[a, b]$, o cal significa que ou ben $v_j \leq v_{j+1}$ e $w_j \geq w_{j+1}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, ou ben $v_j \geq v_{j+1}$ e $w_j \leq w_{j+1}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Polo tanto, en virtude da monotonía mixta dos operadores $A_\pm$, obtemos que as sucesións $\{A_-(v_j, w_j)\}_{j=1}^\infty$ e $\{A_+(w_j, v_j)\}_{j=1}^\infty$ son monótonas e, ademais, unha delas é crecente e a outra decrecente. Polo tanto, $\{G(v_j, w_j)\}_{j=1}^\infty$ é unha sucesión monótona en $[a, b]$. Por último, a propiedade de converxencia monótona mixta garante que ámbalas dúas sucesións $\{A_-(v_j, w_j)\}_{j=1}^\infty$ e $\{A_+(w_j, v_j)\}_{j=1}^\infty$ teñen límite en $[\alpha, \beta]$ e, en consecuencia, tamén o ten

$\{G(v_j, w_j)\}_{j=1}^{\infty}$ en $[a, b]$.

Polo tanto, G satisface as condicións do Lema 1.2.14, polo que podemos concluír que este operador ten un menor punto fixo (v_*, w^*) en $[a, b]$, que ademais satisface

$$(v_*, w^*) = \min_{\preceq}\{(v, w) \,:\, G(v, w) \preceq (v, w)\}. \tag{1.9}$$

Agora, pola definición de G e por ser (v_*, w^*) punto fixo deste operador temos que

$$(v_*, w^*) = (A_-(v_*, w^*), A_+(w^*, v_*)),$$

e, en particular, $v_* \in \mathcal{A}(v_*, w^*)$ e $w^* \in \mathcal{A}(w^*, v_*)$, polo que v_* e w^* son puntos fixos acoplados de $\mathcal{A}$ en $[\alpha, \beta]$.

Sexan agora $v, w \in [\alpha, \beta]$ tales que v, w son puntos fixos acoplados de $\mathcal{A}$. En particular tense que $A_-(v, w) \leq v$ e $A_+(w, v) \geq w$, polo que $G(v, w) \preceq (v, w)$ e en virtude de (1.9) obtense que $(v_*, w^*) \preceq (v, w)$, isto é, $v_* \leq v$ e $w \geq w^*$, polo que v_*, w^* son os puntos fixos acoplados extremais de $\mathcal{A}$ en $[\alpha, \beta]$. $\square$

1.3. Inclusións diferenciais e teoría da viabilidade

Nesta sección recollemos algunhas nocións acerca de análise multivaluada e inclusións diferenciais que serán empregadas na Sección 2.1 para probar novos resultados de existencia de solucións extremais para problemas de valor inicial de primeira orde.

Unha inclusión diferencial de primeira orde é un problema da forma

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \;\; t \in I = [t_0, t_0 + L], \tag{1.10}$$

onde $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \backslash \emptyset$ é unha aplicación multivaluada. Diremos que $x \in AC(I, \mathbb{R}^n)$ é unha solución da inclusión (1.10) se x satisface (1.10), onde a condición sobre a derivada enténdese en case todo punto, e $AC(I, \mathbb{R}^n)$ é o conxunto das funcións absolutamente continuas de I en $\mathbb{R}^n$.

Obsérvese que unha ecuación diferencial do tipo

$$x'(t) = f(t, x(t)), \;\; t \in I, \tag{1.11}$$

pode ser considerado como un caso particular de (1.10), onde para cada $t \in I$ tomamos $F(t, x(t)) = \{f(t, x(t))\}$. Por outra banda, se $\{f(t, x(t))\} \subset F(t, x(t))$, entón unha solución de (1.11) é tamén unha solución de (1.10).

Estas consideracións suxiren un proceso de ‘ir da ecuación á inclusión e regresar’, de xeito que busquemos condicións que garantan que unha solución da inclusión diferencial (1.10) é tamén unha solución da ecuación diferencial (1.11). Para conseguir este propósito precisaremos unhas pequenas nocións de teoría da viabilidade.

1.3.1. Caso autónomo

Aínda que o noso principal interés está no estudo de problemas con dependencia espacial e temporal, comezaremos considerando o problema autónomo, co fin de explicar paso a paso cómo se obteñen os resultados para os casos máis xerais.

Definición 1.3.1. *Sexa K un subconxunto pechado non baleiro de $\mathbb{R}^n$. Diremos que unha traxectoria (asociada a algún problema diferencial) $t \in [t_0, t_0 + L) \longmapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ é viable para K se $x(t) \in K$ para todo $t \in I$.*

Observación 1.3.2. *Se K é como na definición previa e un certo problema diferencial está definido sobre K, entón fálase simplemente de traxectorias viables, sobreentendendo que son viables para K.*

Definición 1.3.3. *Sexa K un subconxunto pechado de $\mathbb{R}^n$. Definimos unha semidistancia d_K en $\mathbb{R}^n$ por medio da fórmula*

$$d_K(x) = \operatorname{ínf}\{d(x, y) \,:\, y \in K\},$$

onde d é a distancia euclidiana usual.

O seguinte resultado, debido a Nagumo, supuxo un dos grandes alicerces sobre os cales se asenta toda a teoría da viabilidade.

Teorema 1.3.4. *(Nagumo, 1942) Sexan K un subconxunto pechado non baleiro de $\mathbb{R}^n$ e $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ unha función continua e limitada. Condición necesaria e suficiente para que o problema de valor inicial $x'(t) = f(x(t)), \;\; x(0) = x_0$, teña unha solución viable para toda condición inicial $x_0 \in K$ é que*

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x + hf(x))}{h} = 0 \text{ para todo } x \in K. \tag{1.12}$$

Á vista do resultado precedente, parece natural definir o seguinte obxecto.

Definición 1.3.5. *Sexa K un subconxunto pechado non baleiro de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in K$, o conxunto*

$$T_K(x) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,:\, \liminf_{h \to 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0 \right\}$$

recibe o nome de cono continxente de Bouligand de K no punto x.

Observación 1.3.6. *Á vista da definición anterior é claro que para calquera subconxunto pechado K de $\mathbb{R}^n$ e calquera $x \in K$ resulta $T_K(x) \neq \emptyset$, pois $\overrightarrow{0} \in T_K(x)$. Ademais, tamén é claro que se $v \in T_K(x)$ entón $\lambda v \in T_K(x)$ para calquera $\lambda \geq 0$, de aí o nome de cono.*

A definición do cono continxente de Bouligand é certamente difícil de manexar. Por tal motivo, imos deternos un pouco en intentar comprender en qué consiste exactamente este obxecto e obtelo nalgún caso particular. Se observamos a Definición 1.3.5, o que se define como cono continxente de Bouligand é un conxunto de direccións nas cales existe, en certo sentido, unha derivada direccional, pois substituímos a distancia euclidiana pola correspondente d_K. En certo modo, o cono de Bouligand xeneraliza o concepto de espazo tanxente, pois se K é unha variedade mergullada en $\mathbb{R}^n$, entón $T_K(x)$ é o espazo tanxente a K en x. Neste caso, a condición (1.12) dinos que f debe ser un campo de vectores (tanxentes) sobre K.

Proposición 1.3.7. [4, Proposición 4.1.2] *Sexan K un subconxunto non baleiro de $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Entón $v \in T_K(x)$ se e só se existen dúas sucesións, $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ e $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, de tal xeito que*

$$i)\ \lim_{k\to\infty} u_k = v, \quad ii)\ \lim_{k\to\infty} h_k = 0, \quad e\ iii)\ x + h_k u_k \in K \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Obsérvese que se $x \in K$ é un punto illado, entón $T_K(x) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Na seguinte proposición dáse unha condición necesaria e suficiente para que un determinado conxunto de direccións pertenza ao cono continxente de Bouligand. Nela concrétase a relación intuitiva que dabamos antes entre cono continxente e "espazo tanxente".

Proposición 1.3.8. *Sexan K un subconxunto pechado de $\mathbb{R}^n$, $x \in K$ e $v \in \mathbb{R}^n$. As seguintes condicións son equivalentes:*

(*i*) $v \in T_K(x)$.

(*ii*) *Existen $J \subset [0,1)$, con $0 \in J \cap J'$, e unha curva $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en 0 de tal xeito que $\gamma(J) \subset K$, $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$.*

Proba.

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)

Sexan $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ as sucesións que proporciona a Proposición 1.3.7. Sen perda de xeneralidade podemos supoñer que $h_p \neq h_q$ se $p \neq q$. Tomamos $J = \{1/h_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ e construímos $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de tal xeito que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1/h_k) = x + h_k u_k$ para $k = 1, 2, ...$ Así construída, γ satisface (*ii*), pois

$$\gamma'(0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma\left(\dfrac{1}{h_k}\right) - \gamma(0)}{1/h_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{h_k} h_k u_k = v.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$

Por ser 0 un punto de acumulación de J existe unha sucesión $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset J \backslash \{0\}$ que converxe a 0. Agora, para $k = 1, 2, ...$ definimos $u_k = h_k^{-1}(\gamma(h_k) - x)$. Obsérvese que con estas eleccións tense que $x + h_k u_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ e

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma(h_k) - \gamma(0)}{h_k} = \gamma'(0) = v.$$

En virtude da Proposición 1.3.7, $v \in T_K(x)$. $\square$

Vexamos agora un exemplo de obtención do cono continxente de Bouligand.

Exemplo 1.3.9. *Consideremos en $\mathbb{R}^2$ o grafo da función valor absoluto, isto é,*

$$K = \{(x, |x|) \,:\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Vexamos que o cono continxente de Bouligand de K no punto $x = (0, 0)$ é

$$T_K(0, 0) = K.$$

En primeiro lugar, a Proposición 1.3.8 permítenos garantir que os vectores da forma $(-\lambda, \lambda)$, $\lambda \geq 0$, e (μ, μ), $\mu \geq 0$, pertencen ao cono buscado, pois todos eles son vectores tanxentes de curvas contidas en K con orixe en $(0, 0)$. Por outra banda, esta mesma proposición garante que estes vectores son os únicos que poden pertencer ao cono contixente, pois se γ é unha curva que satisface a condición (ii) entón necesariamente o vector $\gamma'(0)$ debe ser da forma $(-\lambda_k, \lambda_k)$ ou (μ_k, μ_k) para non negativos λ_k, μ_k. En consecuencia, $T_K(0, 0) = K$.

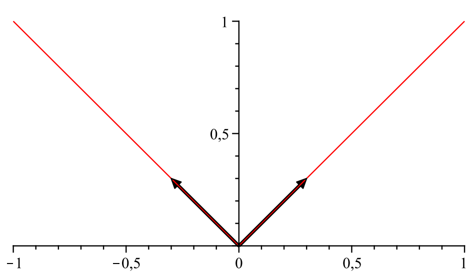


Figura 1.1: Cono continxente de Bouligand de K no punto $(0, 0)$.

Imos agora ver cómo se estende o Teorema 1.3.4 a inclusións diferenciais, isto é, cando F é unha aplicación multivaluada. Antes de poder facer isto precisamos unha definición previa.

Definición 1.3.10. *Unha aplicación multivaluada $F : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}\backslash\emptyset$ é semicontinua superiormente (u.s.c.) en $x_0 \in K$ se para cada aberto N que conteña a $F(x_0)$ existe unha veciñanza M de x_0 tal que $F(M) \subset N$. Diremos que F é u.s.c. en K se F é u.s.c. en cada punto $x_0 \in K$.*

O seguinte resultado é esencial e combina a condición de semicontinuidade superior co Teorema de Nagumo. É unha adaptación da Proposición 4.2.1 e o Teorema 4.2.1 de [4].

Teorema 1.3.11. *Sexan K un subconxunto localmente compacto de $\mathbb{R}^n$ e $F : K \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}\backslash\emptyset$ unha función u.s.c. con imaxes compactas e convexas. As seguintes condicións son equivalentes:*

1. *Para cada condición inicial $x_0 \in K$ existe $L > 0$ de tal xeito que a inclusión diferencial $x' \in F(x),\ x(t_0) = x_0$, ten unha traxectoria viable definida en $[t_0, t_0 + L)$;*
2. *A condición tanxencial*
$$F(x) \bigcap T_K(x) \neq \emptyset$$
satisfácese para todo $x \in K$.

1.3.2. Caso non autónomo

Nesta sección mostraremos cómo estender os resultados previos a inclusións diferenciais non autónomas, da forma $x' \in F(t, x)$. Neste caso, parece natural buscar traxectorias viables non autónomas, isto é, condicións da forma $x(t) \in K(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + L)$. Para conseguir este obxectivo debemos comezar adaptando a idea intuitiva da derivada dunha función ao caso multivaluado.

Definición 1.3.12. *O grafo dunha función multivaluada $K : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}\backslash\emptyset$ defínese como o conxunto $graf(K) = \{(t, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : x \in K(t)\}$.*

Definición 1.3.13. *Nas condicións da Definición 1.3.12, denotamos por $DK(t_0, x_0)$ a aplicación multivaluada que ten por grafo o cono continxente ao grafo de K no punto (t_0, x_0), isto é,*
$$v \in DK(t_0, x_0)(u) \Leftrightarrow (u, v) \in T_{graf(K)}(t_0, x_0).$$
Diremos que $DK(t_0, x_0)$ é a derivada continxente de K en $t_0 \in \Omega$ e $x_0 \in K(t_0)$. No caso no que K sexa univaluada escribiremos simplemente $DK(t_0)$.

O seguinte resultado mostra que a Definición 1.3.13 estende a noción clásica de aplicación diferencial.

Proposición 1.3.14. [4, Proposición 4.3.1] *Nos termos da Definición 1.3.13, se K é unha función univaluada e continuamente diferenciable nun aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, entón*

$$DK_{|\Omega}(t_0)(u) = \begin{cases} \{JK(t_0)\cdot u\}, & \textit{se } u \in T_\Omega(t_0), \\ \\ \emptyset, & \textit{se } u \notin T_\Omega(t_0), \end{cases}$$

onde $JK(t_0)\cdot u$ denota a matriz xacobiana de K aplicada sobre o vector u.

Tal e como fixemos antes co cono continxente de Bouligand, tamén é posible definir a derivada continxente en termos de funcións distancia. A seguinte caracterización é a Proposición 4.4.2 en [4].

Proposición 1.3.15. *Nos termos da Definición 1.3.13, tense que $v \in DK(t_0,x_0)(u)$ se e só se*

$$\liminf_{h\to 0^+,\ \overline{u}\to u} d\left(v, \frac{K(t_0+h\overline{u})-x_0}{h}\right) = 0.$$

Exemplo 1.3.16. *Consideremos a aplicación $K : t \in [0,+\infty) \longmapsto [0,t] \in 2^{\mathbb{R}}$ e calculemos o valor de $DK(t,x)(u)$ para calquera $(t,x) \in graf(K)$ e $u \in \mathbb{R}$.*

En primeiro lugar, observamos que $graf(K)$ é o triángulo

$$graf(K) = \{(t,x) \,:\, x \le t\} \subset \mathbb{R}^2,$$

e podemos achar o seu cono de Bouligand en calquera punto $(t,x) \in graf(K)$:

1) Se (t,x) é un punto interior ao triángulo entón é claro que o cono de Bouligand do grafo nese punto é todo $\mathbb{R}^2$.

2) Se consideramos un punto do eixo de abscisas que non sexa a orixe de coordenadas, entón en virtude das Proposicións 1.3.7 e 1.3.8 obtemos que o cono de Bouligand neste caso está constituído por todos os vectores con segunda compoñente non negativa, pois son as únicas posibles direccións de arranque para unha curva contida no triángulo e orixe no eixo. Razoamentos similares permítennos obter o cono continxente nos restantes casos, resultando

$$T_{graf(K)}(t,x) = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \textit{se } \ 0 < t < x, \\ \\ \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, v \ge 0\}, & \textit{se } \ 0 = x < t, \\ \\ \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, v \le u\}, & \textit{se } \ 0 < x = t, \\ \\ \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le v \le u\}, & \textit{se } \ t = x = 0. \end{cases}$$

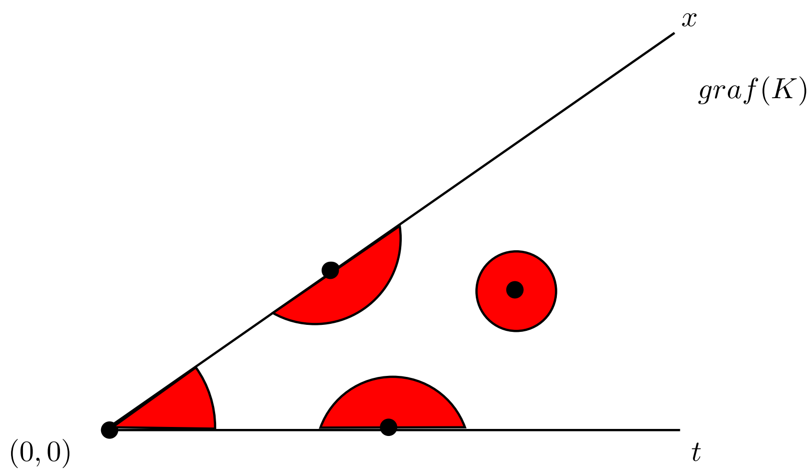


Figura 1.2: Representación do cono continxente de Boulingand nalgúns puntos de $graf(K)$.

Agora, tendo en conta a relación

$$v \in DK(t,x)(u) \Leftrightarrow (u,v) \in T_{graf(K)}(t,x),$$

basta realizar as correspondentes proxeccións para obter que

$$DK(t,x)(u) = \begin{cases} \mathbb{R}, & se \;\; 0 < t < x, \\ [0,+\infty)\,, & se \;\; 0 = x < t, \\ (-\infty,u], & se \;\; 0 < x = t, \\ [0,u]\,, & se \;\; t = x = 0. \end{cases}$$

Coa axuda desta nova ferramenta, o Teorema 1.3.11 pode ser agora estendido ao caso non autónomo.

Teorema 1.3.17. [4, Teorema 4.4.1] *Sexa $K : [0,+\infty) \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \backslash \emptyset$ unha aplicación multivaluada con grafo pechado e F unha función limitada e superiormente semicontinua de $graf(K)$ en $\mathbb{R}^n$ con imaxes compactas e convexas. As seguintes condicións son equivalentes:*

1. *Para todo $t_0 \geq 0$ e $x_0 \in K(t_0)$ existe $L > 0$ e unha traxectoria viable en $[t_0, t_0 + L)$ para a inclusión diferencial $x' \in F(t,x),\;\; x(t_0) = x_0$.*

2. *Para todo $t_0 \geq 0$ e todo $x \in K(t)$ tense*

$$F(t,x) \bigcap DK(t,x)(1) \neq \emptyset.$$

Con este resultado xa temos toda a bagaxe previa necesaria relativa a teoría da viabilidade; no seguinte capítulo veremos cómo poden ser aplicados estes conceptos á teoría das ecuacións e sistemas diferenciais ordinarios de primeira orde.

Capítulo 2

Problemas de primeira orde sen argumentos desviados

Antes de afrontar a parte principal desta memoria, a que está adicada ás ecuacións diferenciais con argumentos desviados, imos estudar neste capítulo algunhas condicións de existencia de solucións extremais para problemas de valor inicial. Estes resultados teñen moito interés matemático en si mesmos, pero ademais serán útiles para nós no desenvolvemento da Sección 3.3 como ferramenta para o tratamento de certos problemas auxiliares que alí se plantexarán. Este estudo dos problemas de valor inicial completarase despois proporcionando novos resultados para diversos problemas funcionais e para sistemas.

Os resultados orixinais incluídos neste capítulo están publicados en [27] e [28].

2.1. Problemas de valor inicial

2.1.1. Introdución

Desde que no século XIX se publicou o coñecido resultado de Peano [68] que garantía a existencia de solución para problemas de valor incial da forma

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

sempre que o segundo membro da ecuación fose continuo, numerosos autores publicaron novos resultados de existencia de solución para este problema e para outros máis complexos. O obxectivo común de todos eles era debilitar as condicións de Peano co fin de mellorar moitos modelos matemáticos nos cales interviñan problemas deste tipo. Por exemplo, é coñecido desde hai tempo tamén que se f é unha función de Carathéodory que ademais ten unha estimación uniforme en $L^1(I)$ entón tamén podemos garantir que (2.1) ten solución. Sen embargo, a condición de Carathéodory segue sendo demasiado forte para moitas clases de problemas.

Nos resultados obtidos nos últimos anos para (2.1) interveñen condicións como *cuasimonotonía* [6] ou *subfuncións* e *sobrefuncións* [34], [74]. No presente capítulo estudaremos cómo os conceptos vistos anteriormente acerca das inclusións diferenciais e a teoría da viabilidade nos permitirán visualizar o problema (2.1) desde un punto de vista novedoso e á súa vez permitir a existencia de conxuntos de discontinuidade realmente complicados.

2.1.2. Resultados coñecidos que empregan teoría da viabilidade

Consideremos un problema de valor inicial da forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ en c.t.p. } t \in I = [t_0, t_0 + L], \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.2}$$

onde a función $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser discontinua en calquera dos seus argumentos. Asociado ao problema (2.2) definimos a inclusión diferencial $x'(t) \in F(t, x)$, con

$$F : (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n \longmapsto F(t, x) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}} f(t, x + \varepsilon B), \tag{2.3}$$

onde B representa a bóla unidade centrada na orixe e $\overline{\text{co}}$ denota a envoltura convexa pechada. Non é difícil comprobar que $F(t, x)$ coincide exactamente co conxunto $\{f(t, x)\}$ se $f(t, \cdot)$ é continua en x. No caso escalar ($n = 1$) temos que

$$F(t, x) = \left[\text{mín} \left\{ f(t, x), \liminf_{y \to x} f(t, y) \right\}, \ \text{máx} \left\{ f(t, x), \limsup_{y \to x} f(t, y) \right\} \right].$$

Definición 2.1.1. *Dicimos que $x \in AC(I, \mathbb{R}^n)$ é unha solución de Krasovskij de (2.2) se x satisface*

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{en c.t.p. } t \in I, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.4}$$

onde F é a función multivaluada definida en (2.3).

Se $\mathcal{C}$ denota o conxunto de todas as solucións de Carathéodory de (2.2) e $\mathcal{K}$ denota o conxunto das súas solucións de Krasovskij, resulta claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$ por ser $\{f(t, x)\} \in F(t, x)$. Agora buscaremos condicións suficientes que garantan que $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ e así o noso traballo de 'ir da ecuación á inclusión e voltar' estará rematado. Polo que nós sabemos, o primeiro autor que empregou este método no caso autónomo foi S. Hu en [47]. Este labor foi continuado despois no caso non autónomo por Cid e Pouso en [19], e os seus resultados baséanse na idea de pedir aos conxuntos de discontinuidade de f que sexan, ou ben inviables, ou ben resolventes para a ecuación, nun sentido que especificaremos máis adiante. O resultado principal deste último artigo, que nos servirá a nós como punto de partida, é o que segue.

Teorema 2.1.2. [19, Lema 2.3] *Supoñamos que a función $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface as seguintes hipóteses:*

(*i*) *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ a aplicación $f(\cdot, x)$ é medible.*

(*ii*) *Existe* $\psi \in L^1(I)$ *tal que para case todo* $t \in I$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *tense que*

$$||f(t,x)|| \leq \psi(t)(1+||x||),$$

onde $||\cdot||$ *é unha norma en* $\mathbb{R}^n$.

(*iii*) *Para case todo* $t \in I$, f *é continua en* $\mathbb{R}^n$ *excepto, quizais, nun conxunto* $K(t)$ *que pode ser escrito na forma* $K(t) = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m(t)$, *con*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}} f(t, x+\varepsilon B) \bigcap DK_m(t,x)(1) \subset \{f(t,x)\} \tag{2.5}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in K_m(t)$.

Nestas condicións, $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$.

Imos deternos un pouco a analizar as hipóteses do Teorema 2.1.2. Nótese que se f é unha función de Carathéodory, entón a hipótese (i) é redundante e a hipótese (ii) é suficiente para garantir a existencia de solución. Polo tanto, a hipótese (iii) xoga un papel esencial no caso de que f sexa discontinua na variable espacial. Discutamos brevemente sobre ela:

Recordemos os conceptos do capítulo anterior e consideremos o conxunto de discontinuidades K como unha unión de grafos de aplicacións multivaluadas $K_m(t)$, $m = 1, 2, ...$ Entón, a condición (2.5) só permite dúas posibilidades:

1. A intersección en (2.5) é o conxunto $\{f(t,x)\}$. Entón, en particular, estamos nas hipóteses do Teorema 1.3.17, polo que o conxunto de discontinuidade K_m é agora viable para a inclusión diferencial. Ademais, o feito de que esa intersección sexa exactamente o conxunto $\{f(t,x)\}$ obriga á traxectoria $x(\cdot)$ a ser tamén unha solución do problema ordinario. Neste caso dicimos que o conxunto de discontinuidade K_m é resolvente para a ecuación.

2. A intersección en (2.5) é o conxunto baleiro. En tal caso, estamos pedindo que o conxunto de discontinuidade K_m sexa inviable para a inclusión diferencial $x'(t) \in F(t,x)$, polo que as solucións evitarán as discontinuidades, ben porque as cruzarán, ben porque a propia discontinuidade repelerá á solución.

Exemplo 2.1.3. *Sexa* $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a función definida por*

$$f(t,x) = \begin{cases} 1, & se \;\; x < 0, \\ \\ -1, & se \;\; x \geq 0. \end{cases}$$

O problema $x'(t) = f(t, x(t))$ *cunha condición inicial da forma* $(t_0, 0)$ *non ten solución para* $t \geq t_0$ *(véxase por exemplo [5] ou [40]). Obsérvese que neste caso sería*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}} f(t, 0+\varepsilon B) = [-1, 1]$$

e

$$K(t) = \{(t, 0) \,:\, t \in I\},$$

con

$$DK(t,0)(1) = \{0\} \quad \textit{para todo } t \in I,$$

polo que a condición (iii) *do Teorema 2.1.2 fallaría.*

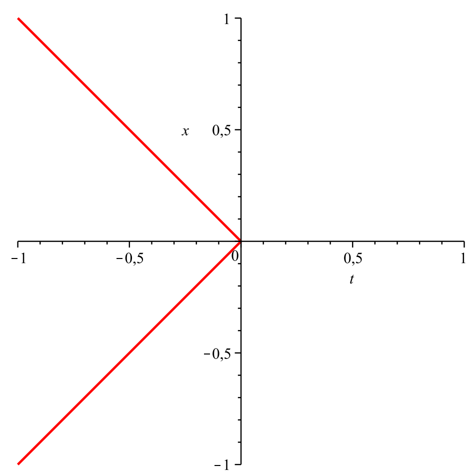


Figura 2.1: Non existe solución do problema coa condición inicial $(0, 0)$.

Redefinamos agora a función f *sobre o conxunto* $S = \{(t, x) \,:\, x \geq 0\}$ *e vexamos qué ocorre:*

1. *Supoñamos que* f *toma o valor* $\frac{1}{2}$ *en* S. *É claro que agora calquera problema de valor inicial con condición sobre o eixo de abscisas ten unha solución de Carathéodory. Nótese que agora tense que*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}} f(t, 0 + \varepsilon B) = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

e a intersección (2.5) é o conxunto baleiro, polo que a recta de discontinuidade é inviable para a inclusión (2.3) e se satisfacen as hipóteses do Teorema 2.1.2.

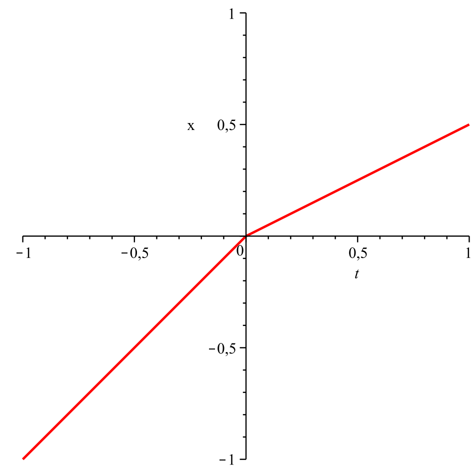


Figura 2.2: A discontinuidade é inviable para a inclusión.

2. *Supoñamos agora que f toma o valor 0 en S. Novamente, o problema (2.2) ten unha solución de Cathéodory para calquera condición inicial sobre o eixo, aínda que neste caso a solución solápase coa recta de discontinuidade. Obsérvese que agora temos*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}} f(t, 0 + \varepsilon B) = [0, 1],$$

polo que a intersección en (2.5) é exactamente o conxunto $\{f(t, 0)\}$, e estamos no caso en que o conxunto de discontinuidade é resolvente.

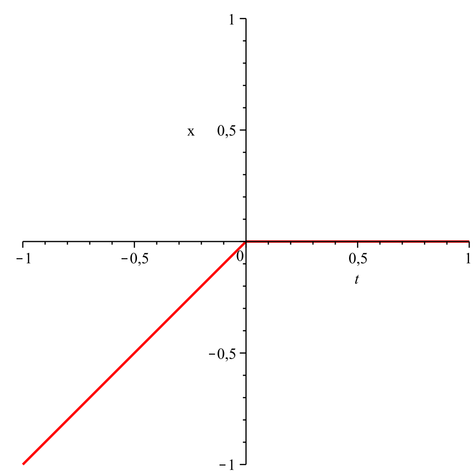


Figura 2.3: A discontinuidade é resolvente para a ecuación.

No caso escalar pode darse máis información sobre as solucións do problema (2.2). O seguinte resultado refírese á existencia de solucións extremais.

Teorema 2.1.4. [19, Teorema 2.4] *Nas condicións do Teorema 2.1.2, $\mathcal{C}$ é un subconxunto non baleiro, compacto e conexo de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Ademais, no caso escalar (n=1) $\mathcal{C}$ ten máximo, x^*, e mínimo, x_*, que se corresponden coas solucións extremais de (2.2). Para cada $t \in I$, estas solucións extremais poden escribirse como*

$$x^*(t) = \text{máx}\{v(t) \,:\, v \in AC(I),\ v'(s) \leq f(s, v(s))\ \textit{c.p.d.},\ v(t_0) \leq x_0\},$$

$$x_*(t) = \text{mín}\{v(t) \,:\, v \in AC(I),\ v'(s) \geq f(s, v(s))\ \textit{c.p.d.},\ v(t_0) \geq x_0\}.$$

Agora o noso propósito máis inmediato será dar un novo resultado para o problema (2.2) no caso escalar, combinando os Teoremas 2.1.2 e 2.1.4 coa existencia de sub e sobresolucións.

2.1.3. Novo resultado de existencia de solucións extremais

A utilización de sub e sobresolucións para probar a existencia de solución para o problema (2.2) retrotráese ata Peano. De feito, en [68] a proba do seu resultado de existencia para a ecuación con segundo membro continuo baséase en substituír a igualdade $x'(t) = f(t, x(t))$ pola desigualdade $x'(t) < f(t, x(t))$ e demostrar a continuación que a función

$$x^* = \sup\{x \in \mathcal{C}^1(I) \,:\, x'(t) < f(t, x(t)) \text{ en } I,\ x(t_0) = x_0\}$$

é unha solución do problema. Os elementos do conxunto anterior foron denominados *subfuncións*.

Goodman [34] estendeu o concepto de subfuncións aos elementos do conxunto

$$\{x \in AC(I) \,:\, x'(t) \leq f(t, x(t)) \text{ en } I,\ x(t_0) = x_0\}$$

(obsérvense as diferenzas co conxunto empregado por Peano), e estendeu o resultado orixinal a funcións satisfacendo a condición de Carathéodory, probando ademais que o supremo do conxunto anterior define a solución máxima do problema en I. O seu mesmo argumento serve para construír a solución mínima do problema como ínfimo do conxunto de *superfuncións*

$$\{x \in AC(I) \,:\, x'(t) \geq f(t, x(t)) \text{ en } I,\ x(t_0) = x_0\}.$$

Posteriormente, numerosos autores estudaron ata onde se podían debilitar as condicións de Goodman, véxase por exemplo [40] ou [74]. Cómpre advertir que a denominación de subfuncións e sobrefuncións non é estándar e moitas veces trócase pola de subsolucións e sobresolucións, que será a que nós empregaremos ao longo desta memoria.

Os resultados de Peano e Goodman precisan implicitamente que o conxunto de sub e sobresolucións do problema sexa non baleiro nas condicións plantexadas, como así proban nos seus respectivos traballos. O mesmo ocorre co Teorema 2.1.4 da sección anterior. Cabe preguntarse agora se esixir *a priori* que tales funcións existan pode permitirnos debilitar algunhas das condicións destes resultados. A resposta é afirmativa, tal e como mostraremos no seu momento.

No que segue traballaremos en dimensión $n = 1$.

Definición 2.1.5. *Dicimos que unha función $\alpha \in AC(I)$ é unha subsolución do problema (2.2) se a composición $t \in I \longmapsto f(t, \alpha(t))$ é medible e se satisfacen as desigualdades seguintes:*

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) \quad \text{para c.t.p. } t \in I, \quad \alpha(t_0) \leq x_0.$$

Analogamente, dicimos que $\beta \in AC(I)$ é unha sobresolución de (2.2) se a composición $t \in I \longmapsto f(t, \beta(t))$ é medible e se satisfacen as desigualdades:

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)) \quad \text{para c.t.p. } t \in I, \quad \beta(t_0) \geq x_0.$$

O noso novo resultado relativo a problemas de valor inicial en presenza de sub e sobresolucións é o seguinte.

Teorema 2.1.6. [27, Teorema 3.1] *Supoñamos que para $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se satisfacen as seguintes condicións:*

(H_1) *Existen $\alpha, \beta \in AC(I)$ que son, respectivamente, subsolución e sobresolución de (2.2), con $\alpha \leq \beta$ en I;*

(H_2) *Existe $\psi \in L^1(I)$ tal que para c.t.p. $t \in I$ e para todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ tense $|f(t,x)| \leq \psi(t)$;*

(H_3) *Para todo $x \in [\min_{t \in I} \alpha(t), \max_{t \in I} \beta(t)]$, a aplicación $f(\cdot, x)$ é medible;*

(H_4) *Para case todo $t \in I$, a función $f(t, \cdot)$ é continua en $[\alpha(t), \beta(t)] \backslash K(t)$, onde*

$$K(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n(t),$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in K_n(t)$ temos

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathrm{co}} f(t, x + \varepsilon B) \bigcap DK_n(t,x)(1) \subset \{f(t,x)\}.$$

Nestas condicións, o conxunto de solucións de Carathéodory entre α e β en I do problema (2.2) é un subconxunto non baleiro, compacto e conexo de $\mathcal{C}(I)$. Ademais, este conxunto ten máximo, x^*, e mínimo, x_*, que son as solucións extremais entre α e β de (2.2), e satisfacen

$$x^* = \max\{v \in AC(I) : v'(s) \leq f(s, v(s)) \text{ c.p.d.}, \, v(t_0) \leq x_0, \, \alpha \leq v \leq \beta \text{ en } I\}, \tag{2.6}$$

$$x_* = \min\{v \in AC(I) : v'(s) \geq f(s, v(s)) \text{ c.p.d.}, \, v(t_0) \geq x_0, \, \alpha \leq v \leq \beta \text{ en } I\}. \tag{2.7}$$

Proba. Consideremos o problema auxiliar

$$x'(t) = \widetilde{f}(t, x(t)) \quad \text{en c.t.p. } t \in I, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.8}$$

onde

$$\widetilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t, \alpha(t)), & \text{se } \ x < \alpha(t), \\ f(t,x), & \text{se } \ \alpha(t) \le x \le \beta(t), \\ f(t, \beta(t)), & \text{se } \ x > \beta(t). \end{cases}$$

Probemos que $\widetilde{f}$ satisface as condicións do Teorema 2.1.2.

As condicións (i) e (ii) dese teorema cúmprense en virtude das hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3). Vexamos agora que a condición (iii) do Teorema 2.1.2 se satisface cando f é substituída por $\widetilde{f}$.

Sexa $t \in I$ fixo e consideremos estes tres casos:

(a) Se $x > \beta(t)$ entón $\widetilde{f}$ satisface trivialmente (iii) no Teorema 2.1.2, pois

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}}\, \widetilde{f}(t, x + \varepsilon B) = \{f(t, \beta(t))\} = \{\widetilde{f}(t,x)\}.$$

De xeito similar ocorre se $x < \alpha(t)$.

(b) Se $x = \beta(t) > \alpha(t)$, temos

$$\begin{aligned} \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}}\, \widetilde{f}(t, x + \varepsilon B) = &\left[\text{mín} \left\{ \widetilde{f}(t,x), \liminf_{y \to x^-} \widetilde{f}(t,y), \liminf_{y \to x^+} \widetilde{f}(t,y) \right\}, \right. \\ &\left. \quad \text{máx} \left\{ \widetilde{f}(t,x), \limsup_{y \to x^-} \widetilde{f}(t,y), \limsup_{y \to x^+} \widetilde{f}(t,y) \right\} \right] \\ &\subset \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}}\, f(t, x + \varepsilon B), \end{aligned}$$

polo que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}} \widetilde{f}(t, x + \varepsilon B) \bigcap DK_n(t,x)(1) &\subset \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}} f(t, x + \varepsilon B) \bigcap DK_n(t,x)(1) \\ &\subset \{f(t,x)\} = \{\widetilde{f}(t,x)\}. \end{aligned}$$

O resultado análogo é valido cando $x = \alpha(t) < \beta(t)$.

(c) Se $x = \alpha(t) = \beta(t)$, temos

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}}\, \widetilde{f}(t, x + \varepsilon B) = \{f(t,x)\} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}}\, f(t, x + \varepsilon B).$$

Agora (a), (b), (c), e a hipótese (H_4) implican que a condición (iii) do Teorema 2.1.2 se satisface cando f é substituída por $\widetilde{f}$, e en consecuencia o mencionado teorema garante que o conxunto de solucións de Carathéodory do problema (2.8), $\widetilde{\mathcal{C}}$, é un subconxunto non baleiro, compacto e conexo de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Sexa agora $\mathcal{C}$ o conxunto de solucións de (2.2) que pertencen ao intervalo funcional

$$[\alpha, \beta] = \{\gamma \in AC(I) \,:\, \alpha(t) \le \gamma(t) \le \beta(t) \text{ para todo } t \in I\},$$

isto é,

$$\mathcal{C} = \{x \in [\alpha, \beta] \,:\; x'(t) = f(t, x(t)) \text{ en c.t.p. de } I,\, x(t_0) = x_0\},$$

e vexamos que $\mathcal{C} = \widetilde{\mathcal{C}}$. En realidade, sería suficiente probar que toda solución de (2.8) pertence a $[\alpha, \beta]$, pero por un interés técnico posterior, probaremos a seguinte afirmación máis xeral:

Afirmación: Toda subsolución de (2.8) é menor que ou igual a β en I, e toda sobresolución de (2.8) é maior que ou igual a α en I.– Para probar isto, tomemos $v \in AC(I)$ de tal xeito que $v'(t) \le \widetilde{f}(t, v(t))$ para case todo $t \in I$ e $v(t_0) \le x_0$, e vexamos que $v \le \beta$ en I. Supoñamos o contrario, isto é, que existe $t \in I$ tal que $v(t) > \beta(t)$; posto que v e β son continuas e $v(t_0) \le x_0 \le \beta(t_0)$, existen $\bar{t} \in I$ e $\varepsilon > 0$ de tal xeito que $v(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$ e $v(t) > \beta(t)$ para $t \in (\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon) \subset I$. Polo tanto,

$$v'(t) \le \widetilde{f}(t, v(t)) = f(t, \beta(t)) \le \beta'(t) \;\text{ en c.t.p. } t \in (\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon),$$

e, posto que $v(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$, temos $v(t) \le \beta(t)$ en $(\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon)$, o cal é unha contradición.

De xeito similar se probaría un resultado análogo para sobresolucións. Obviamente, esta afirmación implica que $\mathcal{C} = \widetilde{\mathcal{C}}$.

Por outra banda, o Teorema 2.1.4 garante que $\widetilde{\mathcal{C}}$ $(= \mathcal{C})$ ten máximo, x^*, e mínimo, x_*, que son, respectivamente, a maior e menor solución de (2.8), e que satisfacen

$$x^* = \text{máx}\{v \in AC(I) \,:\, v'(s) \le \widetilde{f}(s, v(s)) \text{ c.p.d., } v(t_0) \le x_0\},$$

$$x_* = \text{mín}\{v \in AC(I) \,:\, v'(s) \ge \widetilde{f}(s, v(s)) \text{ c.p.d., } v(t_0) \ge x_0\}.$$

A afirmación previa proporciona

$$x^* = \text{máx}\{v \in AC(I) \,:\, v'(s) \le \widetilde{f}(s, v(s)) \text{ c.p.d.,} v(t_0) \le x_0,\; v \le \beta \;\text{ en } I\}.$$

Ademais, $\alpha'(s) \leq \widetilde{f}(s, \alpha(s))$ c.p.d. en I, $\alpha(t_0) \leq x_0$ e $\alpha \leq \beta$ en I, polo que $x^* \geq \alpha$ en I e, en consecuencia,

$$x^* = \text{máx}\{v \in AC(I) \,:\, v'(s) \leq f(s, v(s)) \text{ c.p.d.},\ v(t_0) \leq x_0,\ \alpha \leq v \leq \beta\}.$$

Analogamente pódese probar que

$$x_* = \text{mín}\{v \in AC(I) \,:\, v'(s) \geq f(s, v(s)) \text{ c.p.d.},\ v(t_0) \geq x_0,\ \alpha \leq v \leq \beta\}.$$

□

Observación 2.1.7. *As hipóteses (H_2), (H_3) e (H_4) empréganse para garantir que a función $\widetilde{f}$ satisfaga as hipóteses do Teorema 2.1.2. Por este motivo, estas tres hipóteses poden ser substituídas por*

> $(H_2)'$ *A función $\widetilde{f}(t,x)$ satisface as hipóteses do Teorema 2.1.2.*

Deste xeito obteriamos un resultado máis xeral, aínda que con hipóteses menos claras.

Nótese que, tal e como adiantabamos na introdución desta sección, coñecer *a priori* a existencia dunha subsolución e unha sobresolución do problema dános certas vantaxes: por unha parte, condicións que eran moi esixentes e involucraban o comportamento global da función poden ser reducidas ao comportamento nun intervalo compacto, o cal é moito máis feble; por outra banda, obtemos unha localización de certas solucións do problema.

Finalizaremos esta sección mostrando un exemplo de aplicación do Teorema 2.1.6.

Exemplo 2.1.8. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, definimos $K(t) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} K_n(t)$, con*

$$K_n(t) = \left\{ 2\frac{n}{|n|} \left(t - \frac{1}{|n|} \right) \right\}, t \in [0,1],$$

e, para $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, definimos

$$g(t,x) = \begin{cases} \lambda (tx)^2 \cos(tx), & \text{se } x \notin K(t), \\ 1, & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

con $0 < \lambda \leq 1$.
Vexamos que o problema de valor inicial $x'(t) = g(t, x(t))$, $x(0) = 0$, está nas hipóteses do Teorema 2.1.6.

En primeiro lugar, é doado comprobar que as funcións

$$\alpha(t) = -t \text{ e } \beta(t) = t,\ t \in [0,1],$$

son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do noso problema. Por unha parte, para $0 \leq t \leq 1$ *e* $x \notin K(t)$ *temos*

$$\lambda(t(-t))^2 \cos(t(-t)) \geq 0 > -1 = \alpha'(t),$$

e

$$\lambda t^2 \cos(t^2) \leq \lambda \leq 1 = \beta'(t),$$

mentres que para $x \in K(t)$ *é* $\alpha'(t) < g(t, \alpha(t)) = 1 = \beta'(t)$. *Ademais, cúmprese* $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, *polo que, en efecto,* α *e* β *son unha subsolución e unha sobresolución do problema.*

Por outra banda, o conxunto de discontinuidades da función g *está constituído por unha unión numerable de rectas de pendente* ± 2 *que acumulan en dúas rectas límite. Sen embargo, pese á complexidade deste conxunto, a Proposición 1.3.14 dinos que se* $(t, x) \in K_n(t)$ *para algún* n, *entón*

$$DK_n(t, x)(1) = \{-2, 2\},$$

polo que se $|g| < 2$, *a hipótese* (H_4) *do Teorema (2.1.6) satisfácese (a discontinuidade sería neste caso inviable para a ecuación). Pero isto é certo, pois para* $t \in [0, 1]$ *e* $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ *é*

$$|g(t, x)| = \lambda(tx)^2 |\cos(tx)| \leq \lambda \leq 1 \text{ se } x \notin K(t) \quad \text{e} \quad |g(t, x)| = 1 \text{ se } x \in K(t),$$

e, en consecuencia, cúmprese (H_4).

Finalmente, as hipóteses (H_2) *e* (H_3) *cúmprense trivialmente: no primeiro caso, basta tomar por exemplo* $\psi(t) = t$, $t \in [0, 1]$, *e no segundo caso basta ter en conta que fixado* $x \in [\min_{t \in [0,1]} \alpha(t), \max_{t \in [0,1]} \beta(t)]$ *a función* $g(\cdot, x)$ *é continua salvo nun conxunto de medida nula.*

En consecuencia, o problema de valor inicial $x'(t) = g(t, x(t))$, $x(0) = 0$, *ten solucións extremais en* $[\alpha, \beta]$. *Nótese tamén que a función* g *non satisface a condición (ii) do Teorema 2.1.2.*

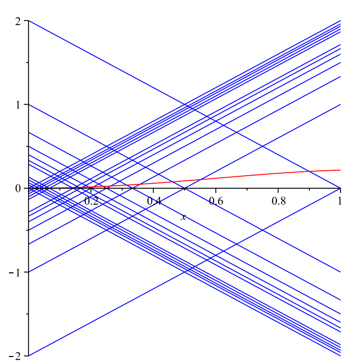


Figura 2.4: Conxunto de discontinuidades e $g(t, -1)$ (en vermello), con $\lambda = 0{,}4$.

2.2. Problemas con condicións funcionais

2.2.1. Introdución

No problema estudado na sección anterior, a taxa de cambio da función solución en cada instante dependía unicamente do valor da propia solución nese mesmo intre. Isto é, falando grosamente, o que se quere dicir a través da expresión

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{2.9}$$

Ao longo das últimas décadas, moitos autores estudaron outro tipo de ecuacións, máis xerais, nas cales se permitía que a taxa de cambio da solución dependera dos valores que esta tomaba noutros instantes, tanto pasados (ecuacións con atraso), como futuros (ecuacións con adianto) ou, incluso, que dependera do comportamento global da solución en todo o intervalo. A este último respecto, cabe citar a autores como Lakshmikantham [58], Nieto e Rodríguez–López [66] ou Cabada e Heikkilä [10]. Por outra parte, outros autores estudaron tamén problemas con ecuacións do tipo (2.9) pero con condicións iniciais que dependían do comportamento global da solución. Así por exemplo, Heikkïla estuda en [41] un problema con condición inicial da forma

$$L(x(0), x) = 0,$$

onde $L : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ademais do seu interés intrinsecamente matemático, as ecuacións diferenciais con dependencia funcional (tanto na propia ecuación como nas condicións iniciais ou de contorno) son de grande utilidade á hora de modelar procesos da vida real. Por exemplo, podemos estudar o crecemento dunha poboación prefixando o valor medio de individuos que debe haber no intervalo temporal de estudo, mediante a condición

$$\int_{t_0}^{t_0+L} x(s)\, ds = K,$$

con $K \geq 0$ fixo. Este é un exemplo de dependencia funcional nas condicións iniciais. Un exemplo de dependencia funcional na ecuación podería dárnolo a modelización dunha substancia radioactiva que en cada instante se desintegra ou se crea en función do valor medio da concentración existente ata ese momento:

$$x'(t) = \begin{cases} k_1 x(t), & \text{se } \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t x(s)\, ds < K, \\[2ex] -k_2 x(t), & \text{se } \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t x(s)\, ds \geq K, \end{cases}$$

con condición inicial $x(0) = x_0$ e $k_1, k_2, K > 0$ fixos.

Nesta sección estudaremos brevemente a existencia de solucións extremais para algúns problemas con condicións funcionais, con resultados que están baseados no obtido anteriormente para o problema de valor inicial (2.2). Concretamente, estudiaremos un problema con argumento funcional crecente, un problema con impulsos en instantes prefixados e remataremos cun problema multidimensional.

2.2.2. Problema con dependencia funcional crecente

O *método iterativo monótono*, coñecido tamén como *método das aproximacións sucesivas*, aparece por primeira vez nun artículo de Picard [70] do ano 1893 no cal o autor busca solucións para o problema de segunda orde

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0,\ t \in [a, b], \quad u(a) = u(b) = 0$$

baixo dúas hipóteses: que $u \equiv 0$ é solución e que a función $f(t, \cdot)$ é crecente. Con estas condicións, Picard proba a existencia dunha *primeira aproximación*, o que hoxe en día chamamos subsolución, isto é, unha función α_0 tal que

$$\alpha_0''(t) + f(t, \alpha(t)) > 0 \text{ en } (a, b), \quad \alpha(a) = \alpha(b) = 0.$$

A partir desta primeira aproximación α_0 o autor constrúe unha sucesión monótona crecente de funcións (*sucesión de aproximacións sucesivas*)

$$\alpha_0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots$$

que converxerán a unha solución do problema orixinal. En 1915 Perron [69] aplicou algunhas das ideas de Picard ao problema de Cauchy de primeira orde e desenvolveu un interesante método para atopar solucións máximas e mínimas entre sub e sobresolucións.

Nesta epígrafe usaremos técnicas iterativas xeneralizadas para obter un novo resultado de existencia de solucións extremais para o problema funcional seguinte:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x) \text{ en c.t.p. } t \in I = [t_0, t_0 + L], \\ \\ B(x(t_0), x) = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$, $L > 0$ e f e B poden ser discontinuas en calquera dos seus argumentos. Obsérvese que a xeneralidade coa que está plantexado (2.10) permite considerar dunha soa vez problemas de variada índole, como poden ser problemas con atraso, problemas con máximos, etc. Por exemplo, un caso particular interesante de (2.10) son os problemas integro–diferenciais periódicos da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f\left(t, x(t), \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+L} k(t,s)x(s)ds\right) \text{ en c.t.p. } t \in I, \\ \\ x(t_0) = x(t_0 + L). \end{cases}$$

De xeito análogo, a formulación que se fai en (2.10) da condición inicial permítenos estudar dun xeito unificado as condicións máis usuais, como condicións iniciais ou periódicas, así como condicións máis sofisticadas, como por exemplo condicións iniciais–integrais do tipo

$$x(0) = \int_{t_0}^{t_0+L} c(s)x(s)ds, \quad \text{con } c \geq 0 \text{ en case todo punto,}$$

ou condicións multipunto, da forma

$$x(0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x(t_n), \quad \text{onde } c_n \geq 0 \text{ e } t_n \in [t_0, t_0 + L] \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por outra parte, permitir a existencia de discontinuidades vai ocasionar que o método de iteracións sucesivas, tal e como o describimos máis arriba, falle nun momento crucial: para garantir que a sucesión de iterantes converxe a unha solución do problema precisamos a continuidade da función f nas variables espaciais, pois en caso contrario o límite pode non ser solución. Por este motivo, teremos que usar unha modificación do método, e usaremos o que se coñece como *método monótono xeneralizado*, no cal se substitúe a sucesión de iterantes por cadeas de iterantes dun operador monótono axeitado.

Antes de presentar o noso novo resultado para o problema (2.10) precisamos un lema que é unha xeneralización do Teorema de Bolzano e cuxa proba pode verse en [32].

Lema 2.2.1. [32, Lema 2.3] *Sexan $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función de tal xeito que $h(a) \leq 0 \leq h(b)$ e*

$$\liminf_{z \to x^-} h(z) \geq h(x) \geq \limsup_{z \to x^+} h(z) \quad \textit{para todo } x \in [a, b]. \tag{2.11}$$

Existen entón $c_1, c_2 \in [a, b]$ de tal xeito que $h(c_1) = 0 = h(c_2)$ e se $h(c) = 0$ para algún $c \in [a, b]$ entón $c_1 \leq c \leq c_2$, isto é, c_1 e c_2 son, respectivamente, o menor e o maior dos ceros de h en $[a, b]$.

Obsérvese que a condición (2.11) cúmprese no caso particular no que h pode ser expresada como a suma dunha función continua e unha función monótona decrecente, como a que se ilustra na Figura 2.5.

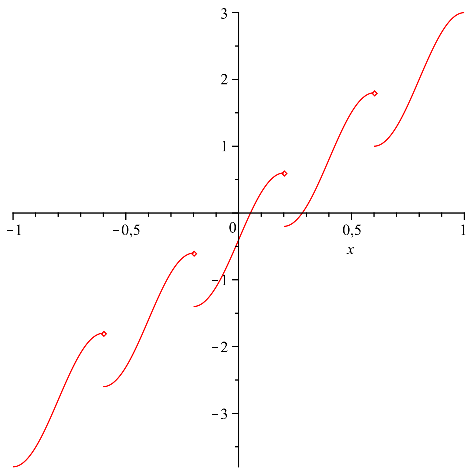


Figura 2.5: Lema 2.2.1: xeneralización do Teorema de Bolzano.

Como último paso previo antes de presentar o resultado principal deste capítulo introduciremos os conceptos de sub e sobresolución do problema (2.10).

Definición 2.2.2. *Diremos que $\alpha \in AC(I)$ é unha subsolución do problema (2.10) se a composición $t \in I \longmapsto f(t, \alpha(t), \alpha)$ é unha función medible e se satisfacen as seguintes desigualdades:*

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \alpha) \quad \text{en c.t.p. } t \in I, \quad B(\alpha(t_0), \alpha) \leq 0.$$

Á súa vez, diremos que $\beta \in AC(I)$ é unha sobresolución do problema (2.10) se a composición $t \in I \longmapsto f(t, \beta(t), \beta)$ é unha función medible e se satisfacen as desigualdades:

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \beta) \quad \text{en c.t.p. } t \in I, \quad B(\beta(t_0), \beta) \geq 0.$$

Estamos xa en condicións de enunciar e probar o noso novo resultado para o problema funcional.

Teorema 2.2.3. [27, Teorema 4.2] *Supoñamos que existen $\alpha, \beta \in AC(I)$ que son, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (2.10) e asumamos que se satisfacen as seguintes condicións:*

(H_1) *(Medibilidade e conxuntos de discontinuidade) As composicións $f(\cdot, \alpha(\cdot), \gamma)$ e $f(\cdot, \beta(\cdot), \gamma)$ son medibles para cada $\gamma \in [\alpha, \beta] := \{\xi \in AC(I) : \alpha \leq \xi \leq \beta \text{ en } I\}$, e a aplicación*

$$(t, x) \in I \times \mathbb{R} \longmapsto f_\gamma(t, x) := f(t, x, \gamma)$$

satisface as hipóteses (H_3) e (H_4) do Teorema 2.1.6;

(H_2) *(Estimación en L^1) Existe $\psi \in L^1(I)$ tal que para case todo $t \in I$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tense $|f(t, x, \gamma)| \leq \psi(t)$;*

(H_3) *(Dependencia funcional) Para case todo $t \in I$ e todo $x \in \mathbb{R}$ a aplicación $f(t,x,\cdot)$ é crecente en $[\alpha,\beta]$;*

(H_4) *(Condicións de fronteira) Para cada $\gamma \in [\alpha,\beta]$ e todo $x \in \mathbb{R}$ tense que*

$$\liminf_{y\to x^-} B(y,\gamma) \geq B(x,\gamma) \geq \limsup_{y\to x^+} B(y,\gamma),$$

e $B(x,\cdot)$ é decrecente en $[\alpha,\beta]$.

Entón o problema (2.10) ten solucións extremais entre α e β.

Proba. Fixemos $\gamma \in [\alpha,\beta]$ e definamos $G\gamma$ como a maior solución entre α e β do problema de valor inicial

$$x'(t) = f(t,x(t),\gamma) \quad \text{en c.t.p. } t \in I,\ x(t_0) = x_\gamma, \tag{2.12}$$

onde x_γ é a maior solución da ecuación alxebraica $B(x,\gamma)=0$ no intervalo $[\alpha(t_0),\beta(t_0)]$.

(i) A hipótese (H_4), relativa ás condicións de fronteira, garante, vía aplicación do Lema 2.2.1, que para cada $\gamma \in [\alpha,\beta]$ o número x_γ está ben definido en $[\alpha(t_0),\beta(t_0)]$. Basta ter en conta que por definición de sub e sobresolución é

$$B(\alpha(t_0),\alpha) \leq 0 \leq B(\beta(t_0),\beta),$$

e polo decrecemento na segunda variable da función B tense

$$B(\alpha(t_0),\gamma) \leq B(\alpha(t_0),\alpha) \leq 0 \leq B(\alpha(t_0),\beta) \leq B(\alpha(t_0),\gamma).$$

(ii) As hipóteses (H_1) e (H_2) garanten, vía aplicación do Teorema 2.1.6, que para cada $\gamma \in [\alpha,\beta]$ existen solucións extremais do problema (2.12) nese intervalo funcional. En particular, existe unha solución máxima e, en consecuencia, o operador G está ben definido e aplica o intervalo $[\alpha,\beta]$ en si mesmo.

(iii) O operador G é crecente. En efecto, sexan $\gamma_1,\gamma_2 \in [\alpha,\beta]$, con $\gamma_1 \leq \gamma_2$. Por definición é

$$\begin{cases} (G\gamma_1)'(t) = f_{\gamma_1}(t, G\gamma_1(t)) \ \text{ c.p.d. en } I, \\ \\ G\gamma_1(t_0) = x_{\gamma_1}. \end{cases}$$

O Teorema 2.1.6 dinos que

$$G\gamma_2(t) = \max\{v(t) \,:\, v \in AC(I), v'(s) \leq f_{\gamma_2}(s,v(s)) \text{ c.t.p. }, v(t_0) \leq x_{\gamma_2}, \alpha \leq v \leq \beta\}.$$

Polo tanto, se probamos que $f_{\gamma_1} \leq f_{\gamma_2}$ e que $x_{\gamma_1} \leq x_{\gamma_2}$ obteremos que $G\gamma_1 \leq G\gamma_2$.

O feito de que $f_{\gamma_1} \leq f_{\gamma_2}$ é consecuencia inmediata do carácter crecente da aplicación $f(t,x,\cdot)$ en $[\alpha,\beta]$. Por outra banda, o carácter decrecente da función $B(x,\cdot)$ en $[\alpha,\beta]$, xunto co feito de ser β unha sobresolución de (2.10) proporcionan

$$0 = B(x_{\gamma_1},\gamma_1) \geq B(x_{\gamma_1},\gamma_2) \text{ e}$$

$$B(\beta(t_0),\gamma_2) \geq B(\beta(t_0),\beta) \geq 0,$$

polo que aplicando novamente o Lema 2.2.1 obtense que $B(\cdot,\gamma_2)$ ten polo menos un cero en $[x_{\gamma_1},\beta]$, de onde $x_{\gamma_1} \leq x_{\gamma_2}$. En consecuencia, G é un operador crecente.

(iv) O operador G ten puntos fixos extremais. En efecto, o razoamento anterior, xunto coa hipótese (H_2), garanten que a aplicación G satisface as hipóteses do Lema 1.2.14 e, en consecuencia, ten puntos fixos extremais x_* e x^*, que ademais satisfacen

$$x_* = \text{mín}\{x \,:\, Gx \leq x\},\ \ x^* = \text{máx}\{x \,:\, x \leq Gx\}.$$

(v) O punto fixo x^* correspóndese coa maior das solucións do problema (2.10) en $[\alpha,\beta]$. En efecto, por ser punto fixo de G, x^* é trivialmente unha solución de (2.10). Sexa agora $\overline{x}$ outra solución de (2.10) en $[\alpha,\beta]$, é dicir, $\overline{x} \in [\alpha,\beta]$ satisface

$$\begin{cases} \overline{x}'(t) = f(t,\overline{x}(t),\overline{x}), \\ \\ B(\overline{x}(t_0),\overline{x}) = 0. \end{cases}$$

Por outra banda $G\overline{x}$ é, por definición, a maior solución en $[\alpha,\beta]$ do problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),\overline{x}), \\ \\ x(t_0) = x_{\overline{x}}, \end{cases}$$

onde $x_{\overline{x}}$ é a maior solución da ecuación $B(x,\overline{x}) = 0$.

En consecuencia, $\overline{x} \leq G\overline{x}$ e, polo tanto, $\overline{x} \leq x^*$ por ser $x^* = \text{máx}\{x \,:\, x \leq Gx\}$.

(vi) A proba de que o problema (2.10) ten unha solución mínima en $[\alpha,\beta]$ faríase de xeito análogo, redefinindo o operador G convenientemente. $\square$

Amosaremos agora un exemplo de aplicación do Teorema 2.2.3.

Exemplo 2.2.4. *Sexan K e g coma no Exemplo 2.1.8 e consideremos un operador*

$$h : [0,1] \times AC([0,1]) \to \mathbb{R}$$

tal que $h(\cdot,\gamma)$ é medible para toda $\gamma \in AC([0,1])$, $h(t,\cdot)$ é crecente para case todo $t \in [0,1]$ e existen c_1, c_2, $c_3 \in (0,+\infty)$ tales que para case todo $t \in [0,1]$ e todo $\gamma \in AC([0,1])$ temos

$$|h(t,\gamma)| \leq c_1 \left(\max_{t\in[0,1]} |\gamma(t)| \right)^{c_2} + c_3.$$

(Un caso particular e moi interesante é $h(t,\gamma) = \int_0^1 k(t,s)\gamma(s)ds$*, onde* k *é continuo e non negativo en* $[0,1]\times[0,1]$*.)*

Por último, sexa $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *crecente, continua e tal que* $\phi(0)=0$*, e consideremos o seguinte problema funcional discontinuo (*$[\cdot]$ *denota parte enteira):*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t),x) = g(t,x(t)) + h(t,x) \quad \text{en c.t.p. } t\in[0,1], \\ \\ B(x(0),x) = \phi\left(3x(0) - 2\displaystyle\int_0^1 x(s)\,ds\right) + \mu\,(x(0)-[x(0)]) = 0, \quad \mu\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Mostraremos que o Teorema 2.2.3 pode ser aplicado a este problema cando as constantes λ *(*λ *é a constante que aparece na definición de* g *no Exemplo 2.1.8),* c_1 *e* c_3 *son suficientemente pequenas, o cal implicará a existencia de solucións extremais entre sub e sobresolucións dadas. É moi salientable que este resultado non depende nin da elección de* ϕ *nin dos valores de* $c_2>0$ *e* $\mu\in\mathbb{R}$*. Obsérvese tamén que as partes non lineares do problema non están limitadas, cambian de signo e (dependendo de* h*) poden ser discontinuas en calquera dos seus argumentos.*

Definamos $\alpha(t) = -1-t = -\beta(t)$ *para* $t\in[0,1]$*. Nótese que*

$$\int_0^1 \alpha(s)\,ds = -3/2 = -\int_0^1 \beta(s)ds,$$

polo que $B(\alpha(0),\alpha) = B(\beta(0),\beta) = 0$*.*

Para cada $\gamma\in[\alpha,\beta]$ *e para case todo* $t\in[0,1]$*, temos*

$$-c_1 2^{c_2} - c_3 \le h(t,\alpha) \le h(t,\gamma) \le h(t,\beta) \le c_1 2^{c_2} + c_3,$$

polo que cálculos sinxelos proporcionan que α *e* β *son, respectivamente, sub e sobresolución de (2.13) para valores de* λ*,* c_1 *e* c_3 *suficientemente pequenos (máis concretamente, a estimación* $4\lambda + c_1 2^{c_2} + c_3 \le 1$ *é suficiente).*

Por outra banda, para todo $(t,x)\in[0,1]\times[-2,2]$ *temos* $|g(t,x)|\le \text{máx}\{4\lambda,1\}$*, polo que para case todo* $t\in[0,1]$*, toda* $\gamma\in[\alpha,\beta]$*, e para* $x\in K_n(t)$*,* $n\in\mathbb{Z}$*,* $n\neq 0$*, temos*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}} f(t,x+\varepsilon B,\gamma) \subset [-(\text{máx}\{4\lambda,1\} + c_1 2^{c_2} + c_3), \text{máx}\{4\lambda,1\} + c_1 2^{c_2} + c_3],$$

e $DK_n(t,x)(1) = \{2n/|n|\}$*, isto é,*

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}} f(t,x+\varepsilon B,\gamma) \bigcap DK_n(t,x)(1) = \emptyset$$

se λ*,* c_1 *e* c_3 *son suficientemente pequenos.*

Obsérvese que as discontinuidades respecto de $x(t)$ poden ocorrer tamén sobre os grafos de $K_{\pm\infty}(t) = \{\pm 2t\}$, $t \in [0,1]$, e un argumento similar mostra que para case todo $t \in [0,1]$ e todo $x \in K_{\pm\infty}(t)$ temos

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}} f(t, x+\varepsilon B, \gamma) \bigcap DK_{\pm\infty}(t,x)(1) = \emptyset$$

se λ, c_1 e c_3 son suficientemente pequenos.

Posto que o resto de condicións do Teorema 2.2.4 se cumplen trivialmente, podemos concluír que o problema (2.2.4) ten solucións extremais no intervalo funcional $[\alpha, \beta]$.

2.2.3. Problemas con impulsos

Nesta sección faremos unha breve incursión no que se coñece como *ecuacións diferenciais con impulsos*. Como o seu nome indica, e falando grosamente, este tipo de condicións introduce "pulos" na ecuación, provocando cambios abruptos no comportamento da solución. Estes cambios poden producirse en instantes fixos ou variables, o cal dará lugar tamén a diferentes tipos de plantexamentos matemáticos. Quizais un dos modelos da vida real máis representativo deste tipo de problemas é o comportamento da concentración en sangue dun certo medicamento que se vai administrando (ou inxectando) en intervalos regulares de tempo ata que os valores da droga se estabilizan entre un máximo e un mínimo desexado. Este é un exemplo de modelo con impulsos en instantes prefixados; véxase a Figura 2.6.

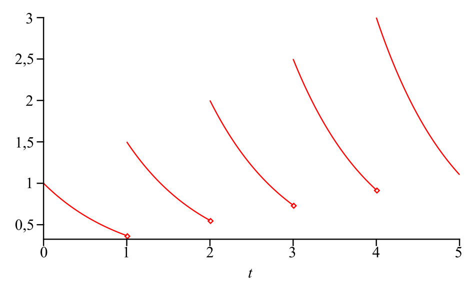


Figura 2.6: Exemplo de modelo con impulsos: evolución da concentración en sangue dun medicamento que se administra a intervalos regulares de tempo.

O noso obxectivo será tomar como base o resultado obtido na sección anterior, engadir unha cantidade finita de impulsos en instantes prefixados e obter condicións de existencia de solucións extremais para este novo problema.

Consideremos, pois, o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x) \text{ en c.t.p. } t \in J = [t_0, t_0 + L], \\ I_k(x(t_k^+), x) = 0, \ k = 1, 2, \dots, p, \\ B(x(t_0), x) = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

onde $t_0 < t_1 < \cdots < t_p < t_{p+1} = t_0 + L$ é unha partición fixa de J (O feito de cambiar a notación do intervalo I por J obedece simplemente a unha cuestión de evitar confusión coas funcións impulsivas I_k).

Obsérvese que todos os elementos en (2.14) dependen funcionalmente da incógnita. Ademais, facendo $I_0 = B$ podemos reescribir o problema (2.14) na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x) \text{ en c.t.p. } t \in J = [t_0, t_0 + L], \\ I_k(x(t_k^+), x) = 0, \ k = 0, 1, \dots, p, \end{cases} \tag{2.15}$$

isto é, consideramos as condicións impulsivas e as de fronteira do mesmo xeito.

O procedemento estándar para estudar este tipo de problemas consiste en "trocear" o intervalo polos puntos de impulso e resolver en cada subintervalo obtido un problema do tipo (2.10). Por este motivo precisamos considerar o espazo

$$\begin{aligned} PC(J) = \{ & x : J \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, x \text{ é continua en } J \setminus \{t_1, \dots, t_p\}, \quad \text{continua pola esquerda en} \\ & \{t_1, \dots, t_p\} \text{ e para todo } k \text{ os límites } x(t_k^+) \ \text{ existen}\}, \end{aligned}$$

que é un espazo de Banach se o dotamos da norma usual do supremo

$$||x|| = \sup_{t \in J} |x(t)|.$$

Poñamos $J_0 = [t_0, t_1]$ e para cada $k = 1, \dots, p$ sexa J_k o intervalo $(t_k, t_{k+1}]$. Definimos o seguinte subespazo de $PC(J)$:

$$\Omega = \{x \in PC(J) \,:\, x_{|J_k} \in AC(J_k), \ k = 0, 1, \dots, p\}.$$

A continuación redefiniremos convenientemente os conceptos de sub e sobresolución de xeito que nos permitan obter un resultado para o problema (2.15) na liña do obtido para o problema (2.10).

Definición 2.2.5. *Diremos que $\alpha \in \Omega$ é unha subsolución de (2.15) se a composición $t \in J \longmapsto f(t, \alpha(t), \alpha)$ é medible e se satisfacen as desigualdades*

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \alpha) \quad \textit{para case todo } t \in J,$$

$$I_k(\alpha(t_k^+), \alpha) \leq 0, \;\; k = 0, 1, \dots, p.$$

De xeito análogo, diremos que $\beta \in \Omega$ é unha sobresolución do problema (2.15) se a composición $t \in J \longmapsto f(t, \beta(t), \beta)$ é medible e se satisfacen as desigualdades

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \beta) \quad \textit{para case todo } t \in J,$$

$$I_k(\beta(t_k^+), \beta) \geq 0, \;\; k = 0, 1, \dots, p.$$

Como é habitual, na proba do noso novo resultado precisaremos un resultado de punto fixo. Neste caso empregaremos unha modificación do Lema 1.2.15 adaptada ao espazo Ω e cuxa proba pode atoparse en [32].

Lema 2.2.6. [32, Lema 2.5] *Sexan $\alpha, \beta \in \Omega$ tales que $\alpha \leq \beta$ e $G : [\alpha, \beta] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ unha aplicación crecente. Supoñamos ademais que existe $v \in \Omega$ de tal xeito que para todo $x \in [\alpha, \beta]$ se ten*

$$|Gx(s) - Gx(t)| \leq |v(s) - v(t)|, \quad s, t \in J_k, \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

En tal caso, G ten un menor punto fixo en $[\alpha, \beta]$, x_*, e un maior, x^*. Estes puntos fixos satisfacen ademais as seguintes caracterizacións:

$$x_* = \text{mín}\{x \in [\alpha, \beta] \, : \, Gx \leq x\}, \quad x^* = \text{máx}\{x \in [\alpha, \beta] \, : \, Gx \geq x\}.$$

O noso novo resultado para o problema con impulsos (2.15) é o seguinte.

Teorema 2.2.7. *Supoñamos que existen $\alpha, \beta \in AC(I)$ subsolución e sobresolución de (2.15) con $\alpha \leq \beta$ en I e asumamos que se satisfacen as seguintes condicións:*

(H_1) *(Medibilidade e discontinuidades) Para cada $\gamma \in [\alpha, \beta] = \{\xi \in \Omega \, : \, \alpha \leq \xi \leq \beta\}$ as composicións $f(\cdot, \alpha(\cdot), \gamma)$ e $f(\cdot, \beta(\cdot), \gamma)$ son medibles e a función*

$$(t, x) \in J \times \mathbb{R} \longmapsto f_\gamma(t, x) := f(t, x, \gamma)$$

satisface as condicións (H_3) e (H_4) do Teorema 2.1.6.

(H_2) *(Estimación en L^1) Existe $\psi \in L^1(J)$ de tal xeito que que para case todo $t \in J$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tense $|f(t, x, \gamma)| \leq \psi(t)$.*

(H_3) *(Dependencia funcional monótona) Para case todo $t \in J$ e todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, a función $f(t, x, \cdot)$ é monótona crecente en $[\alpha, \beta]$.*

(H_4) *(Condición sobre os impulsos) Para cada* $k \in \{0, \dots, p\}$ *e toda* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *tense*

$$\liminf_{y \to x^-} I_k(y, \gamma) \geq I_k(x, \gamma) \geq \limsup_{y \to x^+} I_k(y, \gamma) \quad \textit{para todo } x \in [\alpha(t_k^+), \beta(t_k^+)],$$

e para cada $x \in [\alpha(t_k^+), \beta(t_k^+)]$, *a función* $I_k(x, \cdot)$ *é decrecente en* $[\alpha, \beta]$.

Nestas condicións, o problema (2.15) ten solucións extremais en $[\alpha, \beta]$.

Proba. Definimos un operador $G : [\alpha, \beta] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ como segue: para cada $\gamma \in [\alpha, \beta]$, $G\gamma$ é a menor solución entre α e β do problema

$$(P\gamma) \begin{cases} x'(t) = f_\gamma(t, x(t)) \text{ en c.t.p. } t \in J \\ \\ x(t_k^+) = \tau_{\gamma,k}, \ k = 0, 2, \dots, p, \end{cases}$$

onde para cada $k = 0, 1, \dots, p$, $\tau_{\gamma,k}$ é a menor solución en $[\alpha(t_k^+), \beta(t_k^+)]$ da ecuación alxebraica implícita

$$I_k(\tau, \gamma) = 0.$$

Usando novamente a versión do Teorema de Bolzano que nos proporciona o Lema 2.2.1 podemos concluír que o número $\tau_{\gamma,k}$ existe. Agora, posto que en cada subintervalo J_k, $k = 0, 1, \dots, p$, temos un problema de valor inicial que satisface as condicións do Teorema 2.1.6, podemos aplicar este resultado para concluír que G é un operador ben definido.

Por outra banda, usando un argumento similar ao empregado na proba do Teorema 2.2.3 e a hipótese (H_3) obtemos que G é un operador crecente que leva o intervalo funcional $[\alpha, \beta]$ en si mesmo. Por último, en virtude da hipótese (H_2) sabemos que existe $\psi \in L^1(J)$ de tal xeito que

$$|(G\gamma)'(t)| = |f(t, G\gamma(t), \gamma)| \leq \psi(t) \quad \text{para case todo } t \in J \quad \text{e todo } \gamma \in [\alpha, \beta].$$

En consecuencia, aplicando o Lema 2.2.6 tomando $v(t) = \displaystyle\int_0^t \psi(s)\, ds$, $t \in J$, podemos concluír que G ten un menor punto fixo $x_* \in [\alpha, \beta]$ que ademais satisface

$$x_* = \min\{x \in [\alpha, \beta], : \, Gx \leq x\}.$$

Seguindo razoamentos análogos aos realizados na proba do Teorema 2.2.3 obtemos que x_* correspóndese coa menor solución en $[\alpha, \beta]$ do problema (2.15).

Para deducir a existencia dunha maior solución para o problema (2.15) en $[\alpha, \beta]$ basta con redefinir o operador G do xeito conveniente. $\square$

Amosaremos agora un resultado de aplicación do resultado precedente.

Exemplo 2.2.8. *Sexan K, f e B coma no Exemplo 2.2.4 e engadamos o impulso*

$$x\left(\frac{1}{2}^+\right) = \nu \int_0^1 x(s)\,ds, \quad con\ 0 \le \nu \le 1.$$

Deste xeito o noso problema convértese en

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x) \quad en\ c.t.p.\ t \in [0,1], \\ I\left(x\left(\frac{1}{2}^+\right), x\right) = 0, \\ 0 = B(x(0), x), \end{cases} \tag{2.16}$$

onde

$$I\left(x\left(\frac{1}{2}^+\right), x\right) = x\left(\frac{1}{2}^+\right) - \nu \int_0^1 x(s)\,ds.$$

É rutinario comprobar que as funcións $\alpha(t) = -1 - t = -\beta(t)$, que eran sub e sobresolución do problema sen impulsos, seguen sendo sub e sobresolución deste novo problema. En efecto, no que se refire ás condicións de impulso tense para cada $t \in [0,1]$ que

$$I\left(\alpha\left(\frac{1}{2}^+\right), \alpha\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\nu \le 0$$

e

$$I\left(\beta\left(\frac{1}{2}^+\right), \beta\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\nu \ge 0.$$

Por outra banda, as condicións $(H_2), (H_3)$ e (H_4) do Teorema 2.2.7 satisfácense, pois son as mesmas que para o problema funcional. En consecuencia, resta comprobar se se satisface a hipótese (H_5), o cal resulta obvio en virtude da continuidade da función $I(\cdot, \gamma)$ para toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$ e do carácter decrecente de $I(x, \cdot)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En consecuencia, o problema (2.16) ten solucións extremais no intervalo funcional $[\alpha, \beta]$.

2.2.4. Estensión ao caso multidimensional

Remataremos esta epígrafe dedicada a problemas funcionais mostrando cómo se pode estender o Teorema 2.2.3 ao caso multidimensional.

Sexa, pois, M un conxunto de índices con máis dun elemento e consideremos un intervalo compacto $I = [t_0, t_0 + L] \subset \mathbb{R}$ e dúas funcións

$$f = (f_\nu)_{\nu \in M} : I \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^M) \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

e

$$B = (B_\nu)_{\nu \in M} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^M) \longrightarrow \mathbb{R}^M.$$

Buscaremos condicións suficientes sobre f e B que garantan a existencia de solucións extremais para o problema de contorno multidimensional

$$\begin{cases} x'_\nu(t) = f_\nu(t, x_\nu(t), x) \text{ c.p.d. en } I, \\ \\ B_\nu(x_\nu(t_0), x) = 0 \text{ para todo } \nu \in M. \end{cases} \tag{2.17}$$

Coma sempre, necesitamos adaptar os conceptos de sub e sobresolución ao problema que estamos considerando.

Definición 2.2.9. *Dicimos que $\alpha = (\alpha_\nu)_{\nu\in M} \in AC(I, \mathbb{R}^M)$ é unha subsolución de (2.17) se para cada $\nu \in M$ a composición $t \in I \longmapsto f_\nu(t, \alpha_\nu(t), \alpha)$ é medible e se satisfacen as desigualdades*

$$\begin{cases} \alpha'_\nu(t) \le f_\nu(t, \alpha_\nu(t), \alpha) \text{ para case todo } t \in I, \\ \\ B_\nu(\alpha_\nu(t_0), \alpha) \le 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Analogamente, diremos que $\beta = (\beta_\nu)_{\nu\in M} \in AC(I, \mathbb{R}^M)$ é unha sobresolución de (2.17) se para cada $\nu \in M$ a composición $t \in I \longmapsto f_\nu(t, \beta_\nu(t), \beta)$ é medible e se satisfacen as desigualdades

$$\begin{cases} \beta'_\nu(t) \ge f_\nu(t, \beta_\nu(t), \beta) \text{ para case todo } t \in I, \\ \\ B_\nu(\beta_\nu(t_0), \beta) \ge 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

O noso novo resultado para o caso multidimensional é o que segue.

Teorema 2.2.10. *Supoñamos que existen $\alpha, \beta \in AC(I, \mathbb{R}^M)$, con $\alpha_\nu \le \beta_\nu$ en I para todo ν, que son, respectivamente, subsolución e sobresolución para o problema (2.17) e asumamos que se satisfacen as seguintes condicións:*

(H_1) *Para cada $\xi \in [\alpha, \beta] = \{\xi = (\xi_\nu) \in AC(I, \mathbb{R}^M) : \alpha_\nu \le \xi_\nu \le \beta_\nu$ en I para todo $\nu \in M\}$ e todo $\nu \in M$ as composicións $f_\nu(\cdot, \alpha_\nu(\cdot), \xi)$ e $f_\nu(\cdot, \beta_\nu(\cdot), \xi)$ son medibles e a aplicación $(t, x) \in I \times \mathbb{R} \longmapsto f_\nu(t, x, \xi)$ satisface as condicións (H_3) e (H_4) do Teorema 2.1.6;*

(H_2) *Para cada $\nu \in M$ e cada $\xi \in [\alpha, \beta]$ existe unha función integrable ψ_ν de tal xeito que $|f_\nu(t, \xi_\nu(t), \xi)| \le \psi_\nu(t)$ para case todo $t \in I$;*

(H_3) *Para cada $\nu \in M$, case todo $t \in I$ e todo $x \in \mathbb{R}^M$ a aplicación $f_\nu(t, x_\nu, \cdot)$ é monótona crecente en $[\alpha, \beta]$, isto é, se $y, \overline{y} \in [\alpha, \beta]$ son tales que $y_\nu(t) \le \overline{y}_\nu(t)$ para todo $\nu \in M$ e todo $t \in I$, entón $f_\nu(t, x_\nu, y) \le f_\nu(t, x_\nu, \overline{y})$.*

(H_4) *Para cada $\nu \in M$ a aplicación B_ν satisface a hipótese (H_4) do Teorema 2.2.3.*

En tal caso, o problema (2.17) ten solucións extremais no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Proba. Para este caso empregaremos como resultado de punto fixo o Lema 1.2.13. Definimos, pois, o operador $G : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^M)$ tal que para cada $\xi \in [\alpha, \beta]$, $G\xi_\nu$ é a maior solución entre α_ν e β_ν do problema de valor inicial unidimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} z'(t) = f_\nu^\xi(t, z(t)) = f_\nu(t, z(t), \xi), \ t \in I, \\ \\ z(t_0) = z_\nu^\xi, \end{array} \right. \tag{2.20}$$

onde z_ν^ξ é a maior solución en $[\alpha_\nu(t_0), \beta_\nu(t_0)]$ da ecuación alxebraica $B_\nu(z, \xi) = 0$.

De xeito análogo a como se fixo na proba do Teorema 2.2.3 próbase que o operador G está ben definido, é crecente e leva o intervalo $[\alpha, \beta]$ en si mesmo. Logo, G satisface a primeira hipótese do Lema 1.2.13, onde neste caso X é o espazo topolóxico $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^M)$ dotado da orde parcial

$$x \leq y \Leftrightarrow x_\nu(t) \leq y_\nu(t) \text{ para todo } t \in I \text{ e todo } \nu \in M,$$

e P é o intervalo $[\alpha, \beta]$.

Por último, para aplicar o Lema 1.2.13 resta ver que $\overline{G([\alpha, \beta])}$ é un subconxunto compacto de $[\alpha, \beta]$. En efecto, posto que os espazos $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^M)$ e $\mathcal{C}(I)^M$ son isomorfos, basta ver, en virtude do Teorema de Tychonov, que para cada $\nu \in M$ o subconxunto $G_\nu([\alpha, \beta])$ é relativamente compacto en $\mathcal{C}(I)$. Pero isto é consecuencia directa da hipótese (H_2), por aplicación do Teorema de Áscoli–Arzelà.

Logo, G ten un punto fixo máximo x^* en $[\alpha, \beta]$. A comprobación de que x^* é a maior solución de (2.17) é a mesma que a feita na proba do Teorema 2.2.3.

A existencia dunha solución mínima do problema (2.17) en $[\alpha, \beta]$ próbase de xeito análogo, redefinindo o operador G axeitadamente. $\square$

Exemplo 2.2.11. *Unha aplicación teórica interesante do resultado anterior é a redución de orde dun sistema de ecuacións sen necesidade de aumentar a dimensión do problema. É ben coñecido que unha ecuación diferencial ordinaria de orde n pode transformarse mediante cambios de variable nun sistema de n ecuacións diferenciais de primeira orde e, dun xeito máis xeral, un sistema de m ecuacións diferenciais de ordes $n_1, \ldots, n_m$ respectivamente pode ser transformado nun sistema de $m \sum_{i=1}^m n_i$ ecuacións de orde 1.*

No que segue preténdese amosar cómo o feito de admitir dependencias funcionais nos vai permitir reducir a orde das ecuacións que conforman un sistema sen ter que aumentar a súa dimensión.

Consideremos por exemplo un sistema de segunda orde da forma

$$\begin{cases} u_1''(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t), u_1'(t), u_2'(t)), \; t \in I = [0, L], \\ u_1(0) = \phi_1(u_1', u_2'), \\ B_1(u_1'(0), u_1') = 0; \\ u_2''(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t), u_1'(t), u_2'(t)), \; t \in I, \\ u_2(0) = \phi_2(u_1', u_2'), \\ B_2(u_2'(0), u_2') = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

onde $\phi_i : \mathcal{C}(I)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *é crecente en ámbalas dúas variables e* B_i *satisface a condición* (H_4) *do Teorema 2.2.3* $(i = 1, 2)$.

Seguindo a técnica usual, facemos un cambio de variable $x_i = u_i'$, $i = 1, 2$. *Agora, tendo en conta que para* $i = 1, 2$ *se ten*

$$u_i(t) = u_i(0) + \int_0^t u_i'(s)\, ds = \phi_i(x_1, x_2) + \int_0^t x_i(s)\, ds,$$

obtemos que (x_1, x_2) *é solución do sistema funcional de primeira orde*

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1\left(t, \phi_1(x_1, x_2) + \int_0^t x_1(s)\, ds, \phi_2(x_1, x_2) + \int_0^t x_2(s)\, ds, x_1, x_2\right), \; t \in I, \\ B_1(x_1(0), x_1) = 0; \\ x_2'(t) = f_2\left(t, \phi_1(x_1, x_2) + \int_0^t x_1(s)\, ds, \phi_2(x_1, x_2) + \int_0^t x_2(s)\, ds, x_1, x_2\right), \; t \in I, \\ B_2(x_2(0), x_2) = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

En consecuencia, conseguimos un novo sistema de orde 1 *sen necesidade de aumentar a dimensión do problema orixinal. Por outra banda, o problema (2.22) pode ser estudado co Teorema 2.2.10 sempre que atopemos unha sub e unha sobresolución do problema ben ordenadas e as funcións* f_1 *e* f_2 *satisfagan as seguintes condicións:*

(F_1) *Para case todo* $t \in I$ *a función* f_1 *é crecente respecto das* $2, 3$ *e* 5 *variables;*

(F_2) *Para case todo* $t \in I$ *a función* f_2 *é crecente respecto das* $2, 3$ *e* 4 *variables.*

Obsérvese que a monotonía esixida ás funcións f_i, $i = 1, 2$, permítenos considerar todas as dependencias funcionais como unha soa, é dicir, podemos escribir o problema (2.22) na forma

$$x_i'(t) = \widetilde{f}_i(t, x_i(t), x), \ \ t \in I; \quad B_i(x_i(0), x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.23}$$

onde $\widetilde{f}_i(t, x_i(t), x) = f_i\left(t, \phi_1(x_1, x_2) + \int_0^t x_1(s)\,ds, \phi_2(x_1, x_2) + \int_0^t x_2(s)\,ds, x_1, x_2\right)$.

Deste xeito, se para cada $i = 1, 2$ a función $\widetilde{f}_i$ satisface as condicións (H_1) e (H_2) do Teorema 2.2.10 entón temos garantida a existencia de solucións extremais no intervalo $[\alpha, \beta]$ do problema (2.22) (e, polo tanto, tamén do problema (2.17)).

Obsérvese que en particular as funcións f_1 e f_2 poden non ser continuas en ningunha das súas variables.

Capítulo 3

Problemas de primeira orde con argumentos desviados

Comezamos agora o noso estudo das ecuacións diferenciais con argumentos desviados, estudo que como se indicou na introdución estará dividido en dous capítulos. Nesta primeira parte traballaremos con diversos problemas xerais de primeira orde; máis concretamente, consideraremos ecuacións diferenciais con argumentos desviados dependentes do estado, estudando por separado o caso no que a función que define a ecuación é Carathéodory do caso no que non o é.

Aínda que a conexión máis forte entre os problemas diferenciais e a modelaxe de procesos da vida real radique quizais en ecuacións de segunda orde, a utilidade das ecuacións de primeira orde para este fin tamén é amplamente aceptada, e abarca temas tan variados como modelos de desintegración radioactiva, leis de enfriamento, sistemas de control (como o exemplo que se presentaba na introdución desta memoria), ou modelos de crecemento poboacional. A este último grupo pertence a ecuación que describiremos a continuación, e que nos permitirá amosar a conveniencia da introdución de argumentos desviados para obter modelos máis fidedignos co comportamento real. As disquisicións que seguen foron extraídas na súa meirande parte do artigo divulgativo de Liz [60].

É ben coñecida a ecuación loxística introducida por Verhulst en 1886,

$$p'(t) = rp(t)\left(1 - \frac{p(t)}{K}\right), \ p > 0, \tag{3.1}$$

que modela o comportamento dunha poboación cuxa taxa de natalidade depende linealmente do seu tamaño e que inclúe, ademais, un valor de saturación K, de xeito que a poboación non pode crecer máis alá desa constante. O cambio de variable $x = p/K$ transforma a ecuación (3.1) en

$$x'(t) = rx(t)(1 - x(t)), \ x > 0. \tag{3.2}$$

As solucións de (3.2) son todas monótonas e converxen asintóticamente ao equilibrio $x = 1$

ou a $x = 0$, dependendo das condicións iniciais e de se $r > 0$ ou $r < 0$, tal e como se pode ver na Figura 3.1.

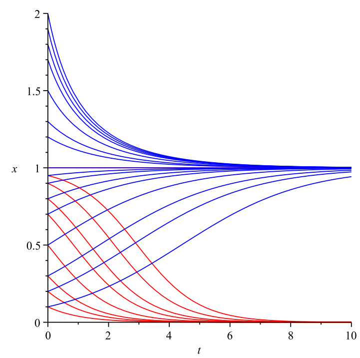


Figura 3.1: Representación dalgunhas solucións da ecuación loxística, para $r = -1$ (en vermello) e $r = 0{,}5$ (en azul).

Sen embargo, existen exemplos reais nos que non se observa este comportamento monótono, senón que se dán outro tipo de fenómenos, como que a poboación creza en certos momentos por enriba do valor K para despois volver baixar, ou incluso que evolucione periódicamente. Co fin de explicar matematicamente estes fenómenos, Hutchinson [48] propuxo en 1948 a introdución dun atraso na ecuación loxística:

$$p'(t) = rp(t)\left(1 - \frac{p(t-\tau)}{K}\right), \tag{3.3}$$

onde $\tau \geq 0$ representa a idade de maior capacidade reproductiva da especie. Así, por exemplo, o entomólogo A. J. Nicholson publicou un estudo [64] da evolución da mosca *Lucilia cuprina* na que se comprobaba que o crecemento desta poboación seguía o modelo (3.3), e máis concretamente, con $r\tau \approx 2{,}1$, segundo amosou May en [61]. Deste libro de May está extraída a Figura 3.2, na que se observa o comportamento das solucións da ecuación (3.3) para diversos valores de $r\tau$.

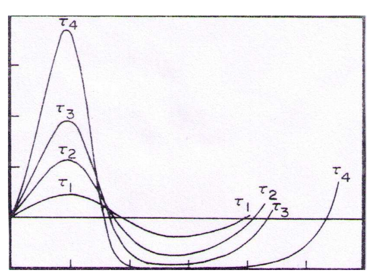


Figura 3.2: Solucións de (3.3) para $\tau_1 = 1{,}6$; $\tau_2 = 1{,}75$; $\tau_3 = 2$ e $\tau_4 = 2{,}5$, onde cada τ_i representa un valor de $r\tau$. A liña horizontal é o equilibrio $x = 1$.

A organización deste capítulo vén determinada principalmente polo tipo de condicións que se estudan en cada unha das súas partes, e cada un destes casos requerirá, como é obvio, de técnicas e hipóteses particulares. Como diciamos anteriormente, comezaremos estudando o caso Carathéodory, caso para o cal probaremos a existencia de solucións maximais e minimais en presenza de sub e sobresolucións empregando, entre outras ferramentas, o Teorema 1.2.2. A continuación veremos que se o desvío non depende do estado e engadimos certas condicións de monotonía, entón poderemos garantir a existencia de solucións extremais entre a sub e a sobresolución. Finalmente, estudaremos o caso xeral non necesariamente continuo, empregando agora un método monótono xeneralizado, e en particular, o Teorema 1.2.23, para garantir baixo hipóteses de monotonía a existencia de cuasisolucións extremais (solucións únicas posteriormente, baixo condicións máis fortes) entre sub e sobresolucións.

3.1. Problema xeral con condicións Carathéodory

3.1.1. Introdución

Comezaremos este capítulo dedicado a problemas de primeira orde con argumentos desviados estudando unha ecuación diferencial con parte non lineal nas condicións de Carathéodory. Máis concretamente, estudaremos a existencia de solucións para o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t, x))) \text{ en case todo punto } t \in I_0 = [t_0, t_0 + L], \\ \\ x(t) = \Lambda(x) + k(t) \text{ para todo } t \in I_- = [t_0 - r, t_0], \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $r \geq 0$ e as funcións que interveñen no plantexamento anterior satisfacen, *grosso modo*, o seguinte: (denotamos $I = I_- \cup I_0$)

(*i*) $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\tau : I_0 \times \mathcal{C}(I) \longrightarrow I$ son funcións de Carathéodory;

(*ii*) $\Lambda : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ é un operador;

(*iii*) $k : I_- \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función de arranque continua.

O noso resultado principal nesta sección proporcionará condicións suficientes para garantir a existencia de solucións minimais e maximais para o problema (3.4) entre sub e sobresolucións. Veremos ademais que, con algunha hipótese adicional, poderemos garantir tamén a existencia de solucións extremais. Como principais novidades con respecto a traballos xa existentes na literatura e que estudan problemas deste tipo podemos destacar o seguinte:

(1) O argumento desviante τ depende en cada instante t do comportamento global da solución, e non só dos valores que esta toma no instante t.

(2) Os problemas con atraso clásicos, constituídos por unha ecuación da forma

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r))$$

xunto cunha función de arranque, están incluídas dentro do plantexamento xeral do problema (3.4). Isto non se permitía, por exemplo, en [24], [25], [51] ou [52].

(3) Non se esixirá ningunha condición de monotonía sobre as funcións f e τ. Ademais, tampouco se lles esixirá continuidade na primeira variable.

Os resultados desta sección están enviados para publicación, atopándose actualmente en proceso de revisión [31].

3.1.2. Existencia de solucións minimais e maximais

Comezaremos introducindo a definición de solución para o problema (3.4) e o que entendemos por solucións maximais e minimais nun determinado subconxunto.

Definición 3.1.1. *Diremos que $x \in \mathcal{C}(I)$ é unha solución do problema (3.4) se $x_{|I_0} \in AC(I_0)$ e x satisface (3.4). Dado un subconxunto $Y \subset \mathcal{C}(I)$, diremos que x é unha solución maximal (respectivamente, minimal) de (3.4) en Y se para calquera solución $\hat{x} \in Y$ a relación $x \leq \hat{x}$ implica $x = \hat{x}$ (respectivamente, a relación $x \geq \hat{x}$ implica $x = \hat{x}$).*

O noso método para probar a existencia de solucións para o problema (3.4) baséase na existencia de subsolucións e sobresolucións. Cómpre sinalar que a definición "usual" non funciona ben neste caso, tal e como concretaremos máis adiante, polo que debemos empregar unha construción un pouco máis sutil, que é a que introduciremos a continuación. Nela emprégase implicitamente o feito de que, por ser limitado o percorrido da función $\tau(t,\cdot)$, están ben definidas as funcións

$$t \in I_0 \longmapsto \tau_*(t) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}(I)} \tau(t,\gamma)$$

e

$$t \in I_0 \longmapsto \tau^*(t) = \sup_{\gamma \in \mathcal{C}(I)} \tau(t,\gamma).$$

Definición 3.1.2. *Diremos que $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$, con $\alpha \leq \beta$ en I, son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.4) se $\alpha_{|I_0}, \beta_{|I_0} \in AC(I_0)$ e se satisfacen as seguintes desigualdades:*

$$\alpha'(t) \leq \min_{\xi \in E(t)} f(t,\alpha(t),\xi) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \quad \alpha \leq \inf_{\gamma \in [\alpha,\beta]} \Lambda(\gamma) + k \text{ en } I_-, \tag{3.5}$$

$$\beta'(t) \geq \max_{\xi \in E(t)} f(t,\beta(t),\xi) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \quad \beta \geq \sup_{\gamma \in [\alpha,\beta]} \Lambda(\gamma) + k \text{ en } I_-, \tag{3.6}$$

onde

$$E(t) = \left[\min_{s \in [\tau_*(t),\tau^*(t)]} \alpha(s), \max_{s \in [\tau_*(t),\tau^*(t)]} \beta(s) \right], \quad t \in I_0, \tag{3.7}$$

e $[\alpha,\beta] = \{\gamma \in \mathcal{C}(I) \,:\, \alpha \leq \gamma \leq \beta \text{ en } I\}$.

Obsérvese que a Definición 3.1.2 require implicitamente que o operador Λ estea limitado en $[\alpha, \beta]$. Por outra banda, os valores

$$\min_{\xi \in E(t)} f(t, \alpha(t), \xi) \quad \text{e} \quad \max_{\xi \in E(t)} f(t, \beta(t), \xi),$$

alcánzanse realmente para case todo $t \in I_0$ fixado, en virtude da continuidade das funcións $f(t, \alpha(t), \cdot)$ e $f(t, \beta(t), \cdot)$ no subconxunto compacto $E(t)$. Cómpre sinalar tamén que a subsolución e a sobresolución aparecen acopladas na Definición 3.1.2.

Podemos presentar xa o noso resultado principal para o problema (3.4).

Teorema 3.1.3. *Supoñamos que existen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$ que son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.4), e asumamos as seguintes condicións:*

(H_1) *(Condicións de Carathéodory)*

$(H_1)-(a)$ *Para todo $x, y \in [\min_{t\in I} \alpha(t), \max_{t\in I} \beta(t)]$ a función $f(\cdot, x, y)$ é medible, e para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todo $y \in E(t)$ (sendo $E(t)$ como en (3.7)) as funcións $f(t, \cdot, y)$ e $f(t, x, \cdot)$ son continuas.*

$(H_1)-(b)$ *Para toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$ a función $\tau(\cdot, \gamma)$ é medible, e para case todo $t \in I_0$ o operador $\tau(t, \cdot)$ é continuo en $\mathcal{C}(I)$ (equipado coa topoloxía usual da converxencia uniforme).*

$(H_1)-(c)$ *O operador $\Lambda : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ é continuo.*

(H_2) *(Estimacións en L^1) Existe $\psi \in L^1(I_0)$ de tal xeito que para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todo $y \in E(t)$ tense*

$$|f(t, x, y)| \leq \psi(t).$$

En tal caso, o problema (3.4) ten solucións maximais e minimais en $[\alpha, \beta]$.

Proba. Para demostrar o enunciado anterior usaremos unha técnica bastante estándar (véxase [21]), que consiste en substituír o problema orixinal por outro auxiliar no cal a parte non linear estea limitada. Para este fin, introducimos a función de truncamento

$$p(t, x) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } x < \alpha(t), \\ x, & \text{se } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ \beta(t), & \text{se } x > \beta(t), \end{cases}$$

e consideramos o problema auxiliar

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, p(t, x(t)), p(\tau(t,x), x(\tau(t,x)))) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \\ \\ x(t) = \Lambda(p(\cdot, x(\cdot))) + k(t) \text{ para todo } t \in I_-. \end{cases} \tag{3.8}$$

Afirmación 1: O problema (3.8) posúe cando menos unha solución.– Consideremos o operador

$$T : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$$

que asocia cada $\gamma \in \mathcal{C}(I)$ coa función continua $T\gamma$ definida para cada $t \in I_-$ como

$$T\gamma(t) = \Lambda(p(\cdot, \gamma(\cdot))) + k(t),$$

e para cada $t \in I_0$ como

$$T\gamma(t) = \Lambda(p(\cdot, \gamma(\cdot))) + k(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, p(s, \gamma(s)), p(\tau(s,\gamma), \gamma(\tau(s,\gamma))))ds.$$

É unha comprobación estándar que, en virtude das hipóteses (H_1) e (H_2), T define un operador completamente continuo. En consecuencia, o Teorema 1.2.2 garante que T posúe un conxunto compacto non baleiro de puntos fixos, que se corresponden trivialmente coas solucións do problema (3.8).

Afirmación 2: Toda solución x de (3.8) satisface $\alpha \le x \le \beta$ en I e, en consecuencia, é unha solución do problema (3.4) en $[\alpha, \beta]$.– En primeiro lugar, obsérvese que se x é unha solución de (3.8) entón $p(\cdot, x(\cdot)) \in [\alpha, \beta]$. Polo tanto, a definición de subsolución do problema (3.4) implica que para cada $t \in I_-$ se ten

$$\alpha(t) \le \Lambda(p(\cdot, x(\cdot))) + k(t) = x(t).$$

Vexamos agora que $\alpha(t) \le x(t)$ para todo $t \in I_0$. Para iso, supoñamos, razoando por redución ao absurdo, que $x \ngeq \alpha$ en I_0. En tal caso, podemos atopar $\hat{t}_0 \in [t_0, t_0 + L]$ e $\varepsilon > 0$ de tal xeito que $\alpha(\hat{t}_0) = x(\hat{t}_0)$ e

$$\alpha(t) > x(t) \text{ para todo } t \in (\hat{t}_0, \hat{t}_0 + \varepsilon]. \tag{3.9}$$

Así, para todo $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_0 + \varepsilon]$ tense que $p(t, x(t)) = \alpha(t)$ e

$$p(\tau(t,x), x(\tau(t,x))) \in [\alpha(\tau(t,x)), \beta(\tau(t,x))] \subset E(t),$$

sendo $E(t)$ o conxunto definido en (3.7). Polo tanto, para case todo $s \in [\hat{t}_0, \hat{t}_0 + \varepsilon]$ temos

$$\alpha'(s) \le f(s, p(s, x(s)), p(\tau(s,x), x(\tau(s,x)))).$$

En consecuencia, para $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_0 + \varepsilon]$ tense

$$\alpha(t) - x(t) = \int_{\hat{t}_0}^{t} \alpha'(s)\, ds - \int_{\hat{t}_0}^{t} f(s, p(s, x(s)), p(\tau(s,x), x(\tau(s,x))))\, ds \le 0,$$

o cal contradí (3.9).

Un argumento similar permite probar que $x \leq \beta$ en I.

Afirmación 3: O conxunto de solucións do problema (3.4) en $[\alpha, \beta]$ *posúe elementos maximais e minimais.*– Consideremos o conxunto

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{C}(I) \,:\, x \text{ é unha solución de (3.4)} \ , \ x \in [\alpha, \beta]\},$$

que é un subconxunto compacto e non baleiro de $\mathcal{C}(I)$ por corresponderse co conxunto de puntos fixos do operador T. Entón, a función real continua

$$x \in \mathcal{S} \longmapsto \mathcal{I}(x) = \int_{t_0}^{t_0+L} x(s)\, ds$$

alcanza o seu máximo e o seu mínimo, isto é, existen $x^*, x_* \in \mathcal{S}$ de tal xeito que

$$\mathcal{I}(x^*) = \text{máx}\{\mathcal{I}(x) \,:\, x \in \mathcal{S}\}, \quad \mathcal{I}(x_*) = \text{mín}\{\mathcal{I}(x) \,:\, x \in \mathcal{S}\}. \tag{3.10}$$

Agora, se $x \in \mathcal{S}$ é tal que $x \geq x^*$ en I, entón tense que $\mathcal{I}(x) \geq \mathcal{I}(x^*)$ e, en virtude de (3.10), $\mathcal{I}(x) \leq \mathcal{I}(x^*)$. Polo tanto, podemos concluír que $\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(x^*)$ o cal, xunto co feito de que $x \geq x^*$, implica que $x = x^*$ en I. En consecuencia, x^* é un elemento maximal de $\mathcal{S}$.

De xeito análogo probariamos que x_* é un elemento minimal. □

Ao comezo desta epígrafe insinuabamos o feito de que a definición "usual" de sub e sobresolución non funcionaba ben para o problema (3.4), e será isto o que tentaremos concretar a continuación. En efecto, a definición natural que a un se lle ocorrería empregar nun primeiro momento esixiría as desigualdades

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \alpha(\tau(t,\alpha))) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \quad \alpha(t) \leq \Lambda(\alpha) + k(t) \text{ en } I_- \tag{3.11}$$

e

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \beta(\tau(t,\beta))) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \quad \beta(t) \geq \Lambda(\beta) + k(t) \text{ en } I_-, \tag{3.12}$$

no canto de (3.5)–(3.6). Sen embargo, amosaremos no seguinte exemplo que estas definicións non serían axeitadas para asegurar a existencia de solucións para o problema (3.4).

Exemplo 3.1.4. *Consideremos o seguinte problema con atraso*

$$x'(t) = -x(t-1) \text{ en c.t.p. } t \in [0,1], \quad x(t) = k(t) = -t \text{ para } t \in [-1,0]. \tag{3.13}$$

En primeiro lugar, as funcións $\alpha(t) = 0$ *e* $\beta(t) = 1$, $t \in [-1,1]$, *son, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (3.13) no sentido (3.11)–(3.12). En efecto, para cada* $t \in [-1,0]$ *tense* $0 = \alpha(t) \leq -t \leq \beta(t) = 1$, *e para* $t \in [0,1]$ *tense*

$$\alpha'(t) = 0 = -\alpha(t-1), \quad \beta'(t) = 0 \geq -\beta(t-1) = -1.$$

Sen embargo, se x é unha solución de (3.13) entón para case todo $t \in [0,1]$ tense

$$x'(t) = -x(t-1) = -k(t-1) = t-1,$$

polo que para $t \in [0,1]$ podemos integrar directamente para obter

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (s-1)\, ds = \frac{t^2}{2} - t,$$

de onde se deduce que $x(t) < \alpha(t)$ para todo $t \in [0,1]$. En consecuencia, o problema (3.13) non ten ningunha solución entre α e β.

Obsérvese que as desigualdades (3.5)–(3.6) implican (3.11)–(3.12), polo que sub e sobresolucións no sentido da Definición 3.1.2 son tamén sub e sobresolucións non sentido usual; sen embargo, a implicación recíproca é falsa en xeral. A Definición 3.1.2 é probablemente a mellor posible para o problema (3.4), pois redúcese a algunhas definicións habituais que un pode atopar na literatura en conexión con casos particulares de (3.4). Máis aínda, cando a función τ non depende da segunda variable entón para $t \in I_0$ tense que $E(t) = [\alpha(\tau(t)), \beta(\tau(t))]$ na Definición 3.1.2, polo que se f é monótona crecente con respecto á terceira variable entón a Definición 3.1.2 e a definición usual coinciden sobre o intervalo I_0 (feito que será posteriormente empregado na proba do Teorema 3.1.6). Se, pola contra, a función f é monótona decrecente respecto da terceira variable, entón sobre o intervalo I_0 a Definición 3.1.2 correspóndese coa definición usual de subsolución e sobresolución acopladas (véxase por exemplo [51]).

Outra reflexión interesante é que, en xeral, nas condicións do Teorema 3.1.3 non podemos agardar que o problema (3.4) teña solución extremais en $[\alpha, \beta]$, no sentido de que atopemos unha solución maior que todas as demais ou outra menor. Amosamos este feito con outro exemplo.

Exemplo 3.1.5. *Consideremos o problema*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))) \text{ en c.t.p. } t \in I_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{3.14}$$

onde

$$f(t,x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y < -1, \\ -y, & \text{se } -1 \le y \le 1, \\ -1, & \text{se } y > 1, \end{cases}$$

e $\tau(t) = \frac{\pi}{2} - t$.

En primeiro lugar comprobaremos que as funcións $\alpha(t) = -t - \frac{\pi}{2} = -\beta(t)$, $t \in I_0$, son, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (3.14). En efecto, a definición de f implica que para todo $(t,x,y) \in I_0 \times \mathbb{R}^2$ é $|f(t,x,y)| \le 1$, polo que para todo $t \in I_0$ tense

$$\min_{\xi \in E(t)} f(t, \alpha(t), \xi) \ge -1 = \alpha'(t) \text{ e } \max_{\xi \in E(t)} f(t, \beta(t), \xi) \le 1 = \beta'(t),$$

onde, de acordo con (3.7),

$$E(t) = \left[\alpha\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \beta\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = [t - \pi, \pi - t].$$

Ademais, $\alpha(-\frac{\pi}{2}) = \beta(-\frac{\pi}{2}) = 0$*, polo que* α *e* β *son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución de (3.14).*

As condicións (H_1) *e* (H_2) *do Teorema 3.1.3 cúmprense trivialmente (basta tomar por exemplo* $\psi \equiv 1$ *para* (H_2)*), polo que o problema (3.14) ten solucións maximais e minimais en* $[\alpha, \beta]$*. Sen embargo, amosaremos agora que este problema non ten solucións extremais entre* α *e* β*.*

A familia $x_\lambda(t) = \lambda \cos t$*,* $t \in I_0$*, con* $\lambda \in [-1, 1]$*, define un conxunto de solucións do problema (3.14) tales que* $\alpha \leq x_\lambda \leq \beta$ *para cada* $\lambda \in [-1, 1]$*. Obsérvese que a solución idénticamente cero pertence á familia anterior e non é nin máxima nin mínima en* $[\alpha, \beta]$*.*

Sexa agora $\hat{x} \in [\alpha, \beta]$ *unha solución arbitraria do problema (3.14) e vexamos que* $\hat{x}$ *non pode ser tampouco unha solución máxima nin unha solución mínima de (3.14) en* $[\alpha, \beta]$*. En primeiro lugar, se* $\hat{x}$ *cambia signo en* I_0 *entón* $\hat{x}$ *non pode ser unha solución extremal de (3.14), pois non podería ser comparada coa solución* $x \equiv 0$*. Se, por outra banda, fose* $\hat{x} \geq 0$ *en* I_0*, entón a ecuación diferencial proporciona que* $\hat{x}' \leq 0$ *c.p.d. en* I_0*, o cal implica, tendo en conta a condición inicial* $\hat{x}(-\frac{\pi}{2}) = 0$*, que* $\hat{x}(t) = 0$ *para todo* $t \in I_0$*. Razoando do mesmo xeito probariamos que* $\hat{x} \leq 0$ *en* I_0 *tamén implicaría* $\hat{x} \equiv 0$*. En consecuencia, o problema (3.14) non pode ter solucións extremais en* $[\alpha, \beta]$*.*

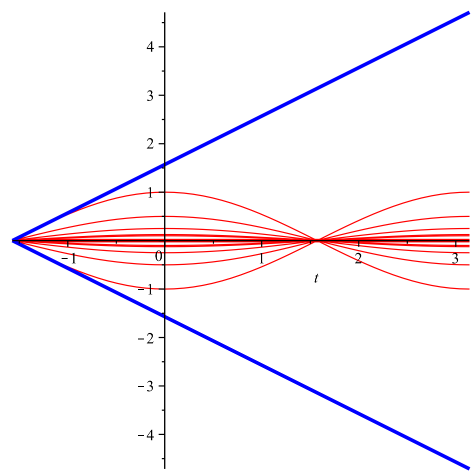


Figura 3.3: Familia de solucións $\{x_\lambda\}$ entre α e β.

O noso próximo obxectivo será probar que, a pesar do exposto anteriormente, en certas condicións particulares si que é posible garantir a existencia de solucións extremais para o problema (3.4) entre α e β. Estas condicións particulares redúcense, *grosso modo*, a eliminar a dependencia do estado no argumento desviante τ e a esixir certas monotonías ás funcións f e Λ. Concretámolo no seguinte resultado.

Teorema 3.1.6. *Consideremos o problema*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \\ \\ x(t) = \Lambda(x) + k(t) \text{ para todo } t \in I_-. \end{cases} \tag{3.15}$$

Asumamos que para (3.15) se satisfacen as condicións do Teorema 3.1.3 e supoñamos a maiores que se cumpren as seguintes hipóteses de monotonía:

(M_1) *Para case todo $t \in I_0$ e todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ a función $f(t, x, \cdot)$ é monótona crecente no intervalo $[\alpha(\tau(t)), \beta(\tau(t))]$;*

(M_2) *O operador Λ é monótono crecente en $[\alpha, \beta]$.*

En tal caso, o problema (3.15) ten solucións extremais entre α e β.

Proba. En primeiro lugar, o Teorema 3.1.3 garántenos que o problema (3.15) posúe un conxunto non baleiro de solucións entre α e β. Deduciremos a existencia de elementos extremais a partir de probar que este conxunto é dirixido e aplicar o Teorema 1.2.5. Con este fin, xogará agora un papel relevante o feito de que grazas ás condicións de monotonía e a que τ non depende da incógnita a definición de subsolución e sobresolución que estamos manexando, isto é, segundo as desigualdades (3.5)–(3.6), é equivalente á definición usual, isto é, segundo as desigualdades (3.11)–(3.12).

Sexan, pois, $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ dúas solucións do problema (3.15) e vexamos que existe outra solución $x_3 \in [\alpha, \beta]$ de tal xeito que $x_1 \leq x_3$ e $x_2 \leq x_3$, o que nos amosará que o conxunto de solucións entre α e β é dirixido superiormente. Para iso, consideremos a función

$$\hat{x}(t) = \text{máx}\{x_1(t), x_2(t)\}, \ t \in I,$$

cuxa restrición $\hat{x}_{|I_0}$ é absolutamente continua en I_0. Así definida, para case todo $t \in I_0$ tense, ou ben

$$\hat{x}'(t) = f(t, \hat{x}(t), x_1(\tau(t))),$$

ou ben

$$\hat{x}'(t) = f(t, \hat{x}(t), x_2(\tau(t))),$$

e posto que f é crecente na súa terceira variable obtense, en calquera caso, que

$$\hat{x}'(t) \leq f(t, \hat{x}(t), \hat{x}(\tau(t))).$$

Por outra banda, da monotonía do operador Λ dedúcese que $\hat{x}(t) \leq \Lambda(\hat{x}) + k(t)$, polo que $\hat{x}$ é unha subsolución do problema (3.15). En consecuencia, podemos aplicar novamente o Teorema

3.1.3 para asegurar que existe cando menos unha solución de (3.15) $x_3 \in [\hat{x}, \beta]$, solución que, de xeito obvio, satisface $x_1 \le x_3$ e $x_2 \le x_3$. Queda probado entón que o conxunto de solucións de (3.15) é dirixido superiormente, polo que en virtude do Teorema 1.2.5 posúe un elemento máximo.

De xeito análogo probariamos que este conxunto é dirixido inferiormente e, polo tanto, posúe un elemento mínimo. □

Amosaremos cun exemplo a aplicabilidade do resultado anterior.

Exemplo 3.1.7. *Fixemos $L > 0$ e consideremos a seguinte ecuación diferencial con argumento de reflexión e singularidade en $x = 0$:*

$$x'(t) = \frac{-t}{x(-t)}, \ t \in [0, L], \quad x(t) = k(t) = t\cos t - 3t, \ t \in [-L, 0]. \tag{3.16}$$

Neste caso a ecuación vén definida pola función $f(t, y) = t/y$.

En primeiro lugar, as funcións

$$\alpha(t) = \begin{cases} -2t, & se\ t < 0, \\ -\dfrac{1}{2}t, & se\ 0 \le t \le L, \end{cases}$$

e

$$\beta(t) = \begin{cases} -4t, & se\ t < 0, \\ 0, & se\ 0 \le t \le L, \end{cases}$$

definen, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.16). En efecto, para $t \in [-L, 0]$ tense

$$\alpha(t) = -2t \le k(t) \le -4t = \beta(t),$$

e para case todo $t \in I_0$ cúmprese

$$f(t, \alpha(-t)) = -\frac{1}{2} = \alpha'(t), \quad f(t, \beta(-t)) = -\frac{1}{4} < \beta'(t).$$

Por outra banda, para case todo $t \in I_0$ e todo $y \in [\alpha(-t), \beta(-t)] = [2t, 4t]$ tense

$$|f(t, y)| = \frac{t}{y} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],$$

polo que o problema (3.16) posúe solucións extremais entre α e β. Obsérvese que para todo $t \in (0, L]$ a función $f(t, \cdot)$ é monótona crecente no intervalo $[\alpha(-t), \beta(-t)]$, polo que pode ser aplicado o Teorema 3.1.6.

De feito, podemos resolver explicitamente o problema (3.16), pois a ecuación diferencial xunto coa función de arranque conducen ao problema de valor inicial

$$x'(t) = \frac{1}{\cos t - 3} \text{ para todo } t \in [0, L], \quad x(0) = 0,$$

que ten unha solución única dada pola expresión

$$x(t) = \int_0^t \frac{dr}{\cos r - 3}, \; t \in [0, L].$$

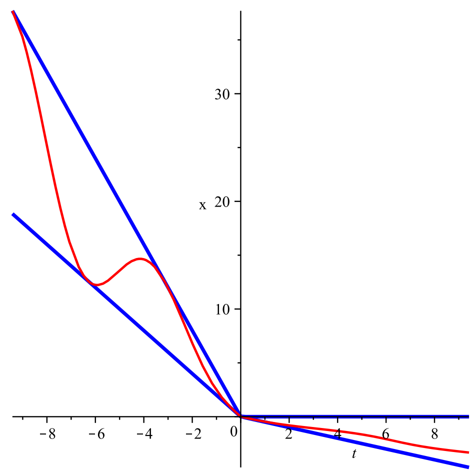


Figura 3.4: Solución do problema (3.16), flanqueada pola sub e a sobresolución.

3.1.3. Construción de sub e sobresolucións

Como norma xeral, cando se dá un resultado na liña dos Teoremas 3.1.3 ou 3.1.6, a existencia dunha subsolución e unha sobresolución acostuma ser a hipótese máis dificil de comprobar na práctica. Por este motivo, incluímos nesta epígrafe algúns resultados que proporcionan condicións suficientes para garantir a existencia de subsolucións e sobresolucións lineares para o problema (3.4) en casos particulares.

Comezamos considerando un problema da forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(\tau(t,x))) \text{ en c.t.p. } t \in I_0 = [t_0, t_0 + L], \\ \\ x(t) = k(t) \text{ para todo } t \in I_- = [t_0 - r, t_0], \end{cases} \tag{3.17}$$

con $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathcal{C}(I_-)$. Por abreviar, denotamos

$$\varphi_* = \min_{t \in I_-} k(t), \quad \varphi^* = \max_{t \in I_-} k(t). \tag{3.18}$$

Proposición 3.1.8. *Supoñamos que f é unha función continua que ademais satisface as seguintes condicións:*

$$\lim_{y\to+\infty} f(y) = +\infty; \tag{3.19}$$

$$\lim_{y\to-\infty} f(y) = -\infty; \tag{3.20}$$

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{f(y)}{y} < \frac{1}{L}. \tag{3.21}$$

Entón existen $m, \overline{m} > 0$ de tal xeito que as funcións

$$\alpha(t) = \begin{cases} \varphi_*, & \text{se } t < t_0, \\ m(t_0 - t) + \varphi_*, & \text{se } t \geq t_0, \end{cases} \tag{3.22}$$

e

$$\beta(t) = \begin{cases} \varphi^*, & \text{se } t < t_0, \\ \overline{m}(t - t_0) + \varphi^*, & \text{se } t \geq t_0, \end{cases} \tag{3.23}$$

definen, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.17).

En particular, o problema (3.17) posúe solucións maximais e minimais entre α e β, e isto non depende da elección de τ.

Proba. As condicións (3.20) e (3.21) implican que

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{y - \varphi_*}{f(y)} > L,$$

polo que existe $y_1 < \min\{0, \varphi_*\}$ de tal xeito que

$$0 > f(y) > \frac{y - \varphi_*}{L} \text{ se } y \leq y_1. \tag{3.24}$$

Por outra banda, a condición (3.19) implica que existe $y_2 > 0$ tal que

$$f(y) > 0 \text{ se } y \geq y_2. \tag{3.25}$$

Sexa $\lambda = \min\{f(y) \,:\, y_1 \leq y \leq y_2\}$. En virtude de (3.20) e da continuidade da función f, existe $y_3 \leq y_1$ de tal xeito que

$$f(y_3) = \lambda \text{ e } f(y) \geq \lambda \text{ para todo } y \in [y_3, y_1], \tag{3.26}$$

e esta elección de y_3 tamén proporciona que

$$f(y_3) \leq f(y) \text{ para todo } y \geq y_3, \tag{3.27}$$

e, en virtude da desigualdade (3.24),

$$f(y_3) > \frac{y_3 - \varphi_*}{L}. \tag{3.28}$$

Agora, definamos α como en (3.22), con $m = \frac{\varphi_* - y_3}{L}$. Así definida, tense que $\alpha(t) \leq k(t)$ para todo $t \in I_-$, $\alpha'(t) = \frac{y_3 - \varphi_*}{L}$ para todo $t \in I_0$ e

$$\min_{t \in I} \alpha(t) = \alpha(t_0 + L) = -mL + \varphi_* = y_3,$$

polo que deducimos das desigualdades (3.27) e (3.28) que para todo $t \in I_0$ cúmprese

$$\alpha'(t) = -m < f(y_3) = \min_{y \geq \min_I \alpha(t)} f(y). \tag{3.29}$$

Do mesmo xeito, podemos atopar $\overline{y}_3 \geq \max\{0, \varphi^*\}$ de tal xeito que a función β definida en (3.23), con $\overline{m} = \frac{\varphi^* - \overline{y}_3}{L}$, satisface $\beta(t) \geq k(t)$ para todo $t \in I_-$ e

$$\beta'(t) = \overline{m} \geq \max_{y \leq \max_I \beta(t)} f(y) \text{ para todo } t \in I_0. \tag{3.30}$$

En consecuencia, α e β definen, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución para o problema (3.17). $\square$

Exemplo 3.1.9. *A función*

$$f(y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(y) \log |y|, & \textit{se } y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \\ \\ \operatorname{sen}(\pi y), & \textit{se } y \in [-1, 1], \end{cases}$$

satisface todas as condicións da Proposición 3.1.8. En consecuencia, o problema (3.17) asociado á función f ten cando menos unha solución para calquera elección de $k \in \mathcal{C}(I_-)$ e $\tau \in \mathcal{C}(I, I)$ (e dos intervalos I_- e I_0).

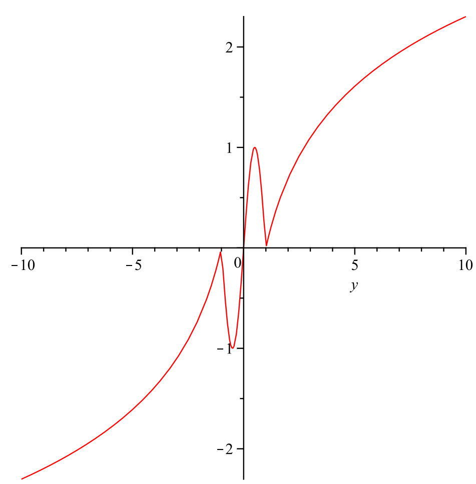


Figura 3.5: Grafo da función f no intervalo $[-10, 10]$.

Agora usaremos as ideas da Proposición 3.1.8 para construír sub e sobresolucións para o problema xeral (3.4).

Proposición 3.1.10. *Sexa $k \in \mathcal{C}(I_0)$ e sexa $f : I_0 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función de Carathéodory. Supoñamos que existen $F_\alpha, F_\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ de tal xeito que para case todo $t \in I_0$ e todo $y \in \mathbb{R}$ cúmprese*

$$f(t,x,y) \geq F_\alpha(y) \text{ para todo } x \leq \varphi_* \tag{3.31}$$

e

$$f(t,x,y) \leq F_\beta(y) \text{ para todo } x \geq \varphi^*, \tag{3.32}$$

con φ_* e φ^* como en (3.18).

Ademais, asumamos que se satisface o seguinte grupo de condicións relativas a F_α e F_β:

$$\lim_{y \to -\infty} F_\alpha(y) = -\infty, \tag{3.33}$$

$$F_\alpha \text{ está limitada inferiormente en } [0, +\infty), \tag{3.34}$$

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{F_\alpha(y)}{y} < \frac{1}{L}, \tag{3.35}$$

$$\lim_{y \to +\infty} F_\beta(y) = +\infty, \tag{3.36}$$

$$F_\beta \text{ está limitada superiormente en } (-\infty, 0], \tag{3.37}$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{F_\beta(y)}{y} < \frac{1}{L}. \tag{3.38}$$

Entón existen $m, \overline{m} \geq 0$ de tal xeito que α e β construídas como en (3.22)–(3.23) definen, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución para o problema (3.4), e isto non depende da elección de τ.

Proba. Razoando do mesmo xeito que como se fixo na proba da Proposición 3.1.8 obtemos que existe $m \geq 0$ de tal xeito que $\alpha(t) \leq \varphi_*$ para todo $t \in I_-$ e

$$\alpha'(t) = -m \leq \min_{y \geq \min_I \alpha} F_\alpha(y) \text{ para case todo } t \in I_0.$$

Posto que $\alpha(t) \leq \varphi_*$ para todo $t \in I$, obtemos a partir da desigualdade (3.31) que

$$\alpha'(t) \leq \min_{y \geq \min_I \alpha} f(t, \alpha(t), y) \text{ en c.t.p. } t \in I_0.$$

De xeito análogo, existe $\overline{m} \geq 0$ tal que $\beta(t) \geq \varphi^*$ para todo $t \in I_-$ e

$$\beta'(t) = \overline{m} \geq \max_{y \leq \max_I \beta} f(t, \beta(t), y) \text{ en c.t.p. } t \in I_0.$$

En consecuencia, α e β son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.4). $\square$

Exemplo 3.1.11. *Sexa f a función definida no Exemplo 3.1.9 e consideremos o problema*

$$\begin{cases} x'(t) = -(x+\pi)|x+\pi|^{\gamma} g(t,x) + f(\tau(t,x)) \text{ en c.t.p. } t \in [0,L], \\ \\ x(t) = -t\cos t \text{ para todo } t \in [-\pi, 0], \end{cases} \tag{3.39}$$

onde $\gamma \geq 0$, $L > 0$ e g é unha función de Carathéodory non negativa.

É doado comprobar que neste caso tense $\varphi_* = -\pi$ e $\varphi^* \approx 0{,}5611$, e que a función $F(t,x,y)$ que define a ecuación diferencial en (3.39) satisface

$$F(t,x,y) \geq f(y) \text{ se } x \leq -\pi \quad \text{e } F(t,x,y) \leq f(y) \text{ se } x \geq -\pi,$$

polo que en particular cúmprense as condicións (3.31) e (3.32).

Por outra banda, as condicións (3.33)–(3.38) cúmprense en virtude das comprobacións feitas no Exemplo 3.1.9, polo que existen $m, \overline{m} > 0$ de tal xeito que α e β construídas como en (3.22)–(3.23) definen unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.39) para calquera elección de τ. En particular, se existe $\psi \in L^1(I_0)$ tal que para case todo $t \in I_0$ e todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ tense $g(t,x) \leq \psi(t)$, entón o problema (3.39) posúe solucións maximais e minimais entre α e β, por aplicación do Teorema 3.1.3.

Observación 3.1.12. *A subsolución e a sobresolución obtidas tanto na Proposición 3.1.8 como na Proposición 3.1.10 satisfacen unha condición lixeiramente máis forte que a que se require na Definición 3.1.2.*

3.2. Problemas con adianto ou con atraso

3.2.1. Introdución

Nesta sección estudaremos un problema que pode ser visto como un caso particular de (3.15), problema para o cal o Teorema 3.1.6 nos garantía a existencia de solucións extremais supoñendo, entre outras hipóteses, que a función f era Carathéodory e monótona crecente respecto da terceira variable. O que faremos nesta sección será ver que nun caso particular, pero interesante, podemos prescindir da continuidade e debilitar a hipótese de monotonía. Concretamente, estudaremos o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))) \text{ en c.t.p. } t \in I = [t_0, t_0 + L], \\ \\ B(x(c), x) = 0, \end{cases} \tag{3.40}$$

onde $c \in \{t_0, t_0 + L\}$ e o argumento desviante τ é unha función medible tal que $\tau(I) \subset I$ e satisface unha das dúas condicións seguintes: ou ben $\tau(t) \leq t$ en c.t.p. $t \in I$, isto é, τ é un argumento de atraso, ou ben $t \leq \tau(t)$ en c.t.p. $t \in I$, en cuxo caso τ sería un argumento de adianto. Ademais, as funcións $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $B : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ poden ser discontinuas en calquera dos seus argumentos. No que se refire á condición de contorno, tomaremos $c = t_0$ no caso de ecuacións con atraso e $c = t_0 + L$ para ecuacións con adianto.

O problema (3.40) foi estudado por Jankowski en [49] e [50], e neses artigos proporciónanse resultados de existencia de solucións extremais para o problema anterior (en [49] para ecuacións con adianto e en [50] para ecuacións con atraso) con f e τ funcións de Carathéodory e condicións de contorno da forma $B(x(t_0), x(t_0 + L)) = 0$, con B unha función continua nas dúas variables. Polo tanto, os nosos resultados xeneralizan os que se obteñen nos citados traballos.

3.2.2. Existencia de solución única

Na proba do noso resultado principal de existencia de solucións para o problema (3.40) precisaremos poder garantir que certos problemas auxiliares teñan solución única. A este fin presentamos un resultado para o problema

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau(t))) \text{ en c.t.p. } t \in I, \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.41}$$

Teorema 3.2.1. *Sexa $\tau : I \longrightarrow I$ unha función medible tal que $\tau(t) \le t$ en c.t.p. $t \in I$ e supoñamos que se satisface o seguinte grupo de condicións:*

(H_1) *(Medibilidade) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ a función $g(\cdot, x, y)$ é medible;*

(H_2) *(Estimación en L^1) Para cada subconxunto compacto $R \subset \mathbb{R}^2$, existe $\psi_R \in L^1(I)$ de tal xeito que para case todo $t \in I$ e todo $(x, y) \in R$ tense $|g(t, x, y)| \le \psi_R(t)$.*

(H_3) *(Condición de Lipschitz forte) Existen funcións $L_1, L_2 \in L^1(I, [0, +\infty))$ de tal xeito que para case todo $t \in I$ temos que*

$$|g(t, x, y) - g(t, \overline{x}, \overline{y})| \le L_1(t)|x - \overline{x}| + L_2(t)|y - \overline{y}|$$

para todos $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$.

En tal caso, o problema (3.41) ten unha única solución en $AC(I)$.

Proba. As solucións do problema (3.41) correspóndense cos puntos fixos do operador

$$A : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$$

definido mediante a expresión

$$Ax(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s), x(\tau(s)))\, ds, \;\; t \in I, \;\; x \in \mathcal{C}(I).$$

Obsérvese que a condición (H_3) implica en particular que a función g é continua nas variables espaciais, polo que g é unha función de Carathédory. Por outra parte, para calquera

$x \in \mathcal{C}(I)$ a composición $x \circ \tau$ é medible e, polo tanto, $g(\cdot, x(\cdot), x(\tau(\cdot)))$ é tamén medible. Por outra banda, a condición (H_2) garante que para cada $x \in \mathcal{C}(I)$ a integral anterior existe e, en consecuencia, o operador A está ben definido.

O que faremos a continuación será probar que A ten un único punto fixo, como aplicación do Teorema 1.2.7 (Teorema do punto fixo de Banach).

No espazo $\mathcal{C}(I)$ consideramos a norma de tipo Bielecki

$$||x||_* = \max_{t \in I} \mathrm{e}^{-\lambda(t)}|x(t)|, \text{ onde } \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} (L_1(s) + L_2(s))\, ds.$$

Equipado con esta norma, $\mathcal{C}(I)$ ten estrutura de espazo métrico completo.

Sexan agora $u, v \in \mathcal{C}(I)$. En virtude da condición de Lipschitz (H_3) obtemos a seguinte cadea de desigualdades:

$$\begin{aligned}
||Au - Av||_* &\leq \max_{t \in I} \left\{ \mathrm{e}^{-\lambda(t)} \int_{t_0}^{t} |g(s, u(s), u(\tau(s))) - g(s, v(s), v(\tau(s)))|\, ds \right\} \\
&\leq \max_{t \in I} \left\{ \mathrm{e}^{-\lambda(t)} \int_{t_0}^{t} [L_1(s)|u(s) - v(s)| + L_2(s)|u(\tau(s)) - v(\tau(s))|]\ ds \right\} \\
&\leq ||u - v||_* \max_{t \in I} \left\{ \mathrm{e}^{-\lambda(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(s)} (L_1(s) + L_2(s))\, ds \right\} \\
&\leq ||u - v||_* \max_{t \in I} \left\{ \mathrm{e}^{-\lambda(t)} \left(\mathrm{e}^{\lambda(t)} - 1 \right) \right\} \\
&= ||u - v||_* \max_{t \in I} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t)} \right) = q||u - v||_*,
\end{aligned}$$

onde $q = 1 - \mathrm{e}^{-||L_1 + L_2||_{L^1(I)}} < 1$.

En consecuencia, o operador A satisface as condicións do Teorema 1.2.7 e, polo tanto, posúe un único punto fixo que se corresponde coa única solución do problema (3.41). $\square$

Observación 3.2.2. *O resultado anterior segue sendo válido se substituímos o argumento de atraso por un argumento de adianto e consideramos o problema final no canto do problema de valor inicial. En efecto, sexa $\tau : I \longrightarrow I$ de tal xeito que $\tau(t) \geq t$ en c.t.p. $t \in I$ e consideremos o problema*

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau(t))) \text{ en c.t.p. } t \in I, \quad x(t_0 + L) = x_L. \tag{3.42}$$

Entón $x \in AC(I)$ é unha solución do problema (3.42) se e só se a función $y(t) = x(-t)$ é unha solución do problema

$$y'(t) = h(t, y(t), y(\hat{\tau}(t))) \text{ en c.t.p. } t \in [-t_0 - L, -t_0], \quad y(-t_0 - L) = x_L,$$

onde $h(t,y,z) = -g(t,y,z)$ *e* $\hat{\tau}(t) = -\tau(-t)$*, que é un problema da forma (3.41).*

3.2.3. Existencia de solucións extremais

Á hora de aplicar un método monótono para garantir a existencia de solucións extremais para o problema (3.40) precisaremos facer uso dun determinado principio de comparación, técnica que por outra banda é habitual neste tipo de resultados. Máis concretamente, precisaremos dous lemas que están incluídos en [49] e [50] e que están referidos, respectivamente, ao problema con atraso e ao problema con adianto.

Lema 3.2.3. [50, Lema 2.2] (Principio de comparación para o problema con atraso) *Sexa* $\tau : I \longrightarrow I$ *unha función medible e tal que* $\tau(t) \leq t$ *c.p.d. en* I*. Sexa* $p \in AC(I)$ *e supoñamos que existen funcións integrables* K *e* L*, con* $L \geq 0$ *c.p.d. en* I*, de tal xeito que se satisfacen as seguintes desigualdades:*

$$\begin{cases} p'(t) \leq -K(t)p(t) - L(t)p(\tau(t)) \text{ en c.t.p. } t \in I, \\ \\ p(t_0) \leq 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Se ademais se cumpre que

$$\int_{t_0}^{t_0+L} L(t)\mathrm{e}^{\int_{\tau(t)}^{t} K(s)\,ds} dt \leq 1, \tag{3.44}$$

entón $p \leq 0$ *en* I*.*

Lema 3.2.4. [49, Lema 2.1] (Principio de comparación para o problema con adianto) *Sexa* $\tau : I \longrightarrow I$ *unha función medible e tal que* $\tau(t) \geq t$ *c.p.d. en* I*. Sexa* $p \in AC(I)$ *e supoñamos que existen funcións integrables* K *e* L*, con* $L \geq 0$ *c.p.d. en* I*, de tal xeito que se satisfacen as seguintes desigualdades:*

$$\begin{cases} p'(t) \geq K(t)p(t) + L(t)p(\tau(t)) \text{ en c.t.p. } t \in I, \\ \\ p(t_0 + L) \leq 0. \end{cases} \tag{3.45}$$

Se ademais se cumpre que

$$\int_{t_0}^{t_0+L} L(t)\mathrm{e}^{\int_{t}^{\tau(t)} K(s)\,ds} dt \leq 1, \tag{3.46}$$

entón $p \leq 0$ *en* I*.*

Nos artigos orixinais, os lemas anteriores están enunciados coa hipótese de que as funcións τ e K son continuas; sen embargo, a mesma proba que alí se fai segue sendo válida pedindo unicamente a medibilidade de τ e o carácter integrable de K, tal e como establecimos nos nosos enunciados.

Antes de presentar os resultados principais desta sección introduciremos a definición de subsolución e sobresolución para o problema (3.40) que, como era de esperar, é a translación natural da definición que se emprega no Teorema 3.1.6.

Definición 3.2.5. *Diremos que $\alpha, \beta \in AC(I)$ son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.40) se as composicións $f(\cdot, \alpha(\cdot), \alpha(\tau(\cdot)))$ e $f(\cdot, \beta(\cdot), \beta(\tau(\cdot)))$ son medibles e se satisfacen as seguintes desigualdades:*

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \alpha(\tau(t))) \text{ en c.t.p. } t \in I, \quad B(\alpha(c), \alpha) \leq 0; \tag{3.47}$$

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \beta(\tau(t))) \text{ en c.t.p. } t \in I, \quad B(\beta(c), \beta) \geq 0. \tag{3.48}$$

Os nosos resultados de existencia de solución para o problema (3.40) son os que seguen.

Teorema 3.2.6. *Poñamos $c = t_0$. Sexa $\tau : I \longrightarrow I$ unha función medible e tal que $\tau(t) \leq t$ c.p.d. en I. Supoñamos que existen $\alpha, \beta \in AC(I)$ que son, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (3.40), con $\alpha \leq \beta$ en I, e denotemos*

$$[\alpha, \beta] = \{\xi \in AC(I) \, : \, \alpha(t) \leq \xi(t) \leq \beta(t) \text{ en } I\}.$$

Asumamos ademais que se satisface o seguinte grupo de condicións:

(H_1) *(Medibilidade) Para toda $\xi \in [\alpha, \beta]$, é medible a composición*

$$t \in I \longmapsto f(t, \xi(t), \xi(\tau(t)));$$

(H_2) *(Estimación en L^1) Existe $\psi \in L^1(I)$ tal que para case todo $t \in I$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todo $y \in [\alpha(\tau(t)), \beta(\tau(t))]$ tense*

$$|f(t, x, y)| \leq \psi(t);$$

(H_3) *(Condición de Lipschitz lateral) Existen funcións integrables K, L, con $L \geq 0$ c.p.d. en I, que satisfacen a desigualdade (3.44) e de tal xeito que*

$$f(t, x, y) - f(t, \overline{x}, \overline{y}) \leq K(t)(\overline{x} - x) + L(t)(\overline{y} - y)$$

se $\alpha(t) \leq x \leq \overline{x} \leq \beta(t)$ e $\alpha(\tau(t)) \leq y \leq \overline{y} \leq \beta(\tau(t))$;

(H_4) *(Condicións de contorno)*

$(H_4) - (a)$ *(Discontinuidades admisibles) Para todo $\xi \in [\alpha, \beta]$ e todo $x \in \mathbb{R}$ tense que*

$$\liminf_{y \to x^-} B(y, \xi) \geq B(x, \xi) \geq \limsup_{y \to x^+} B(y, \xi);$$

$(H_4) - (b)$ *(Monotonía) Para todo $x \in \mathbb{R}$ a función $B(x, \cdot)$ é monótona decrecente en $[\alpha, \beta]$.*

En tal caso, o problema (3.40) ten solucións extremais no intervalo funcional $[\alpha, \beta]$.

Proba. Consideremos o operador $G : [\alpha, \beta] \longrightarrow AC(I)$ definido do seguinte xeito: para cada $\xi \in [\alpha, \beta]$, $G\xi$ é a única solución do problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(t, \xi(t), \xi(\tau(t))) - K(t)[x(t) - \xi(t)] - L(t)[x(\tau(t)) - \xi(\tau(t))], \\ \\ x(t_0) = x_\xi, \end{array} \right. \tag{3.49}$$

sendo x_ξ a maior solución no intervalo $[\text{mín}_{t\in I} \alpha(t), \text{máx}_{t\in I} \beta(t)]$ da ecuación $B(x, \xi) = 0$.

Afirmación 1: O operador G está ben definido.– En primeiro lugar, para cada $\xi \in [\alpha, \beta]$ o número x_ξ está ben definido en virtude da hipótese $(H_4)-(a)$ e en aplicación do Lema 2.2.1. Por outra banda, as hipóteses $(H_1), (H_2)$ e (H_3) garanten que o problema (3.49) está nas hipóteses do Teorema 3.2.1 e, en consecuencia, posúe unha única solución en $AC(I)$.

Afirmación 2: G é un operador crecente que leva o intervalo $[\alpha, \beta]$ en si mesmo.– Sexan $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$ tales que $\xi_1 \leq \xi_2$. En primeiro lugar, (H_4) implica que $G\xi_1(t_0) \leq G\xi_2(t_0)$. En efecto, por definición tense que $G\xi_1(t_0) = x_{\xi_1}$ e $G\xi_2(t_0) = x_{\xi_2}$, e a monotonía da función B na súa segunda variable implica que

$$0 = B(x_{\xi_1}, \xi_1) \geq B(x_{\xi_1}, \xi_2) \ \text{ e}$$

$$B(\beta(a), \xi_2) \geq B(\beta(a), \beta) \geq 0,$$

polo que por aplicación do Lema 2.2.1 obtense que a función $B(\cdot, \xi_2)$ ten cando menos un cero no intervalo $[x_{\xi_1}, \beta]$, polo que $x_{\xi_1} \leq x_{\xi_2}$.

Por outra banda, a hipótese (H_3) implica que para case todo $t \in I$ se satisface a desigualdade

$$(G\xi_1 - G\xi_2)'(t) \leq -K(t)[G\xi_1(t) - G\xi_2(t)] - L(t)[G\xi_1(\tau(t)) - G\xi_2(\tau(t))].$$

En consecuencia, podemos aplicar o Lema 3.2.3 para garantir que $G\xi_1 \leq G\xi_2$ e, polo tanto, o operador G é crecente.

Un argumento análogo amosa que $G\alpha \geq \alpha$ e $G\beta \leq \beta$ por seren α e β, respectivamente, sub e sobresolución do problema (3.40). En consecuencia $G([\alpha, \beta]) \subset [\alpha, \beta]$.

Afirmación 3: O operador G posúe puntos fixos extremais, que se corresponden coas solucións extremais do problema (3.40) en $[\alpha, \beta]$.– Xa vimos no apartado anterior que G é crecente. Ademais, para $\xi \in [\alpha, \beta]$ tense que

$$|G\xi'(t)| \leq \psi(t) + (|K(t)| + L(t))(\max_{t\in I} \beta(t) - \min_{t\in I} \alpha(t)),$$

onde a función que aparece no lado dereito da desigualdade anterior é integrable en I. Polo tanto, por aplicación do Lema 1.2.16, podemos garantir que G ten puntos fixos extremais máximo, x^*, e mínimo, x_*, caracterizados mediante as expresións

$$x^* = \text{máx}\{x \in [\alpha, \beta] \, : \, x \leq Gx\}, \quad x_* = \text{mín}\{x \in [\alpha, \beta] \, : \, Gx \leq x\}. \tag{3.50}$$

Por unha parte, é claro en virtude da definición de G que todo punto fixo de G se corresponde cunha solución do problema (3.40). Reciprocamente, se $\zeta \in [\alpha, \beta]$ é unha solución de (3.40) entón $\zeta \leq G\zeta$ e, en virtude de (3.50), tense que $\zeta \leq x^*$. En consecuencia, x^* é a maior solución de (3.40) en $[\alpha, \beta]$.

A proba de que (3.40) ten unha menor solución en $[\alpha, \beta]$ faríase de xeito similar, redefinindo o operador G convenientemente. $\square$

Observación 3.2.7. *A condición (H_3) do Teorema 3.2.6 cúmprese, en particular, se a función f é monotona crecente nas variables espaciais, xa que entón abonda tomar $K = L = 0$.*

O seguinte resultado é a versión análoga ao Teorema 3.2.6 para o caso de problemas con adianto.

Teorema 3.2.8. *Poñamos $c = t_0 + L$. Sexa $\tau : I \longrightarrow I$ unha función medible e tal que $\tau(t) \geq t$ c.p.d. en I. Supoñamos que existen $\alpha, \beta \in AC(I)$ que son, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (3.40), con $\alpha \leq \beta$ en I. Asumamos ademais que se satisface o seguinte grupo de condicións:*

(H_1) *(Medibilidade) Para toda $\xi \in [\alpha, \beta]$, é medible a composición*

$$t \in I \longmapsto f(t, \xi(t), \xi(\tau(t)));$$

(H_2) *(Estimación en L^1) Existe $\psi \in L^1(I)$ tal que para case todo $t \in I$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todo $y \in [\alpha(\tau(t)), \beta(\tau(t))]$ tense*

$$|f(t, x, y)| \leq \psi(t);$$

(H_3) *(Condición de Lipschitz lateral) Existen funcións integrables K, L, con $L \geq 0$ c.p.d. en I, que satisfacen a desigualdade (3.46) e de tal xeito que*

$$f(t, x, y) - f(t, \overline{x}, \overline{y}) \geq -K(t)(\overline{x} - x) - L(t)(\overline{y} - y)$$

se $\alpha(t) \leq x \leq \overline{x} \leq \beta(t)$ e $\alpha(\tau(t)) \leq y \leq \overline{y} \leq \beta(\tau(t))$;

(H_4) *(Condicións de contorno)*

$(H_4) - (a)$ *(Discontinuidades admisibles) Para todo $\xi \in [\alpha, \beta]$ e todo $x \in \mathbb{R}$ tense que*

$$\liminf_{y \to x^-} B(y, \xi) \geq B(x, \xi) \geq \limsup_{y \to x^+} B(y, \xi);$$

$(H_4) - (b)$ *(Monotonía) Para todo $x \in \mathbb{R}$ a función $B(x, \cdot)$ é monótona decrecente en $[\alpha, \beta]$.*

En tal caso, o problema (3.40) ten soluciόns extremais no intervalo funcional $[\alpha, \beta]$.

Proba. É análoga á feita para o Teorema 3.2.6, considerando agora o problema auxiliar

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, \xi(t), \xi(\tau(t))) + K(t)[x(t) - \xi(t)] + L(t)[x(\tau(t)) - \xi(\tau(t))], \\ \\ x(t_0 + L) = x_\xi, \end{cases}$$

e aplicando o Lema 3.2.4 no canto do Lema 3.2.3. □

Observación 3.2.9. *A condición* (H_3) *do Teorema 3.2.8 cúmprese no caso particular no que a función* f *sexa decrecente respecto das variables espaciais.*

Vexamos a continuación un exemplo de aplicación dos resultados anteriores.

Exemplo 3.2.10. *Consideremos o seguinte problema de contorno con adianto:*

$$\begin{cases} x'(t) = \phi(x(t)) + x(\sqrt{t}) \operatorname{sen} t \equiv f(t, x(t), x(\sqrt{t})) \text{ en c.t.p. } t \in I = [0, 1], \\ \\ x(1) - x(0) = \lambda, \end{cases} \tag{3.51}$$

con $0 < \lambda < 1$ *e*

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}x - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right), & \text{se } x \in \left[1 - \dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n+1}\right), \; n = 1, 2, ... \\ \\ 1, & \text{noutro caso }. \end{cases}$$

Obsérvese que a condición de contorno pode reescribirse na forma

$$B(x(1), x) = x(1) - x(0) - \lambda = 0.$$

As funcións $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = t, t \in I$, *definen, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.51). En efecto, cúmprese que*

$$f(t, \alpha(t), \alpha(\sqrt{t})) = 0 = \alpha'(t) \text{ c.p.d. en } I; \quad B(\alpha(1), \alpha) = -\lambda < 0$$

e

$$f(t, \beta(t), \beta(\sqrt{t})) \leq \frac{1}{10} + \operatorname{sen}(1) < 1 = \beta'(t) \text{ c.p.d. en } I; \quad B(\beta(1), \beta) = 1 - \lambda > 0,$$

polo que α *e* β *son sub e sobresolución para o problema (3.51), con* $\alpha \leq \beta$ *en* I.

Por outra banda, a condición (H_2) *do Teorema 3.2.8 cúmprese con* $\psi \equiv 1$ *e a hipótese* (H_3) *satisfácese con* $K \equiv \dfrac{1}{10}$ *e* $L(t) = \operatorname{sen} t$. *Obsérvese que neste caso tense*

$$\int_0^1 L(t) \mathrm{e}^{\int_t^{\sqrt{t}} K(s)\, ds} dt \approx 0{,}466 \leq 1.$$

Por último, a función B que define as condicións de contorno é continua respecto da variable real e decrecente respecto da variable funcional, polo que a condición (H_4) do Teorema 3.2.8 tamén se satisface.

En consecuencia, o problema (3.51) ten solucións extremais entre α e β.

3.2.4. Construción de sub e sobresolucións

O noso propósito nesta sección será proporcionar un método para a obtención explícita de sub e sobresolucións para (3.40) baixo certas hipóteses sobre as funcións que definen o problema.

Proposición 3.2.11. *No plantexamento do problema (3.40) supoñamos que:*

(C_1) *τ é un argumento de atraso, isto é, $\tau(t) \leq t$ para c.t.p. $t \in I$;*

(C_2) *Para case todo $t \in I$ e todo $x \in \mathbb{R}$ a función $f(t,x,\cdot)$ é monótona crecente;*

(C_3) *Existe un funcional linear crecente $\phi : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal xeito que*

$$B(x(t_0),x) = x(t_0) - \phi(x) \quad \textit{para toda } x \in \mathcal{C}(I);$$

(C_4) *Para case todo $t \in I$ e todos $x,y \in \mathbb{R}$ tense*

$$|f(t,x,y)| \leq p(t)h(|x|,|y|),$$

onde $p \in L^1(I,[0,+\infty))$, $h : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é unha función crecente nas dúas variables e

$$\int_0^\infty \frac{du}{h(u,u)} = \infty.$$

Unha condición suficiente para garantir a existencia de subsolucións e sobresolucións para o problema (3.40) é que existan constantes non negativas m, n_α, n_β, con $n_i \leq m,\ i = \alpha,\beta$, de tal xeito que

$$m - \phi(w) \geq n_i(1-\phi(1)),\ \ i = \alpha,\beta, \tag{3.52}$$

onde w é a única solución do problema de valor inicial

$$w'(t) = p(t)h(w(t),w(t)),\ \ t \in I, \quad w(t_0) = m. \tag{3.53}$$

En tal caso, as funcións

$$\alpha(t) = -w(t) + n_\alpha,$$

$$\beta(t) = w(t) - n_\beta$$

definen, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución para o problema (3.40), que ademais satisfacen $\alpha \leq \beta$ en I.

Proba. Amosaremos que α é unha subsolución para (3.40).

Para case todo $t \in I$ tense

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= -w'(t) = -p(t)h(w(t), w(t)) \leq -p(t)h(w(t) - n_\alpha, w(t) - n_\alpha) \\ &= -p(t)h(-\alpha(t), -\alpha(t)) \leq f(t, \alpha(t), \alpha(t)) \leq f(t, \alpha(t), \alpha(\tau(t))). \qquad (3.54)\end{aligned}$$

Obsérvese que a última desigualdade é certa por ser α decrecente e $t \geq \tau(t)$ para case todo $t \in I$.

Por outra banda, por ser ϕ linear temos que

$$B(\alpha(t_0), \alpha) = -w(t_0) + n_\alpha + \phi(w - n_\alpha) = -w(t_0) + n_\alpha + \phi(w) - n_\alpha \phi(1),$$

polo que a condición $B(\alpha(t_0), \alpha) \leq 0$ equivale a (3.52) con $i = \alpha$.

En consecuencia, α é unha subsolución do problema (3.40).

De xeito análogo probaríase que β é unha sobresolución. O feito de que $n_i \leq m,\ i = \alpha, \beta$, garantiza que $\alpha \leq \beta$ en I. □

Observación 3.2.12. *A Proposición 3.2.11 é válida para problemas con adianto, substituíndo a condición inicial en (3.53) pola condición final $w(t_0 + L) = m$ e a condición (C_2) por*

$(C_2)'$ *Para case todo $t \in I$ e todo $x \in \mathbb{R}$ a función $f(t, x, \cdot)$ é monótona decrecente.*

Exemplo 3.2.13. *Consideremos un problema con atraso da forma*

$$\begin{cases} x'(t) = x(\tau(t)) + \dfrac{\tanh[x(t)] + 1}{2} \quad \text{en c.t.p. } t \in I = [0,1], \\[2ex] x(0) = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 k(t,s) x(s)\, ds\, dt, \end{cases} \qquad (3.55)$$

onde $0 \leq \tau(t) \leq t$ para case todo $t \in I$, k é un núcleo integral non negativo tal que

$$\int_0^1 \int_0^1 k(t,s)\, ds\, dt = K = \frac{1}{8}$$

e, como é habitual, $[\cdot]$ denota a función parte enteira.

Neste caso, a función que define a ecuación diferencial satisface as desigualdades

$$y - 1 \leq f(t, x, y) \leq y + 1,$$

polo que a condición (C_4) na Proposición 3.2.11 cúmprese con $p \equiv 1$ e $h(x,y) = y+1$. Agora, se resolvemos o problema de valor inicial (3.53) obtemos $w(t) = (m+1)\mathrm{e}^t - 1$, e a condición (3.52) dinos que precisamos tres constantes m, n_i, $i = \alpha, \beta$, de tal xeito que $m \geq n_i$ e

$$m - \int_0^1 \int_0^1 k(t,s)[(m+1)\mathrm{e}^s - 1]\, ds\, dt \geq n_i(1-K). \tag{3.56}$$

Posto que

$$\int_0^1 \int_0^1 k(t,s)[(m+1)\mathrm{e}^s - 1] \leq [(m+1)\mathrm{e} - 1]K$$

e $K = \dfrac{1}{8}$, *a desigualdade (3.56) cúmprese se*

$$m - \frac{(m+1)\mathrm{e} - 1}{8} \geq n_i \left(\frac{7}{8}\right).$$

En particular, podemos tomar $m = 3$ e $n_i = 1$, $i = \alpha, \beta$, polo que

$$\alpha(t) = 2 - 4\mathrm{e}^t \quad \text{e } \beta(t) = 4\mathrm{e}^t - 2,\ t \in I,$$

definen, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (3.55).

Finalmente, as hipóteses (H_2) e (H_3) do Teorema 3.2.6 cúmprense con $\psi(t) = 4\mathrm{e}^t - 1$ e $L \equiv 0$ e para comprobar (H_4) basta ver que a condición de contorno ten a forma

$$B(x(0), x) = x(0) - \int_0^1 \int_0^1 k(t,s)x(s)\, ds\, dt,$$

que é unha función continua na variable real e monótona decrecente na variable funcional.

En consecuencia, o problema (3.55) posúe solucións extremais entre α e β, independentemente de τ.

3.3. Problema xeral con argumentos discontinuos

3.3.1. Introdución

Nesta epígrafe estudaremos unha ecuación diferencial cun plantexamento moi xeral e non necesariamente continua, na cal se esixirán, entre outras hipóteses, certas condicións de monotonía para poder garantir a existencia de solucións.

En concreto, estudaremos o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t, x(t), x)), x) & \text{en c.t.p. } t \in I_0 = [t_0, t_0 + L], \\[2ex] x(t) = \Lambda(x) + k(t) & \text{para todo } t \in I_- = [t_0 - r, t_0], \end{cases} \tag{3.57}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$, $L > 0$, $r \geq 0$ e k é unha función de arranque continua (ou unha constante se $r = 0$). Denotaremos $I = I_- \cup I_0$. No plantexamento deste problema, ademais do arranque k, interveñen tres funcións:

$$f : Dom(f) \subset I_0 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\tau : Dom(f) \subset I_0 \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I) \longrightarrow I,$$

$$\Lambda : Dom(\Lambda) \subset \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R},$$

e ningunha delas precisará ser, en principio, continua con respecto a ningún dos seus argumentos. Como contrapartida será preciso esixir certas condicións de monotonía e, como veremos máis adiante, nalgún resultado de unicidade de solución esixiranse condicións fortes que, en particular, implicarán a continuidade nalgunha das variables espaciais. Obsérvese que a función desvío τ pode asumir en calquera instante valores pasados ou futuros.

O noso punto de partida para o estudo do problema (3.57) é o traballo de Jankowski [51], onde se estuda un problema da forma

$$x'(t) = f(t, x(\tau(t, x(t)))) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \quad x(t_0) = \lambda x(t_0 + L) + k \quad (\lambda, k \in \mathbb{R}), \tag{3.58}$$

onde as función f e τ son continuas nas dúas variables e monótonas nas variables espaciais. Nese artigo, o autor emprega un método monótono en presenza de sub e sobresolucións acopladas co fin de obter a existencia de cuasisolucións extremais para o problema (3.58). A continuación, úsase un principio do máximo para garantir que, baixo certas hipóteses de tipo lipschitziano, as dúas cuasisolucións extremais son a mesma función, definindo deste xeito unha solución do problema.

O noso obxectivo nesta epígrafe será estender os resultados de Jankowski ao problema máis xeral (3.57). As principais novedades do noso traballo con respecto a [51] son as seguintes:

1. En [51] engádese a condición $f \geq 0$ entre a sub e a sobresolución. Mostraremos que para o problema (3.58) esta condición pode omitirse, así como a monotonía da función f respecto de $x(\tau)$;

2. As ecuacións diferenciais con atraso están incluídas no marco do problema (3.57). En [51] estes problemas non se consideran, pois non se permite que a función τ tome valores fóra do intervalo I_0;

3. Nin a función f nin τ precisan de ser continuas en ningún dos seus argumentos para garantir a existencia de cuasisolucións. Ademais, estas funcións poden ser discontinuas respecto das variables t e $x(t)$ e garantirse a existencia de solucións;

4. Para garantir a existencia de solución para o problema completo (3.57) pediremos que a función f sexa decrecente na terceira variable. A parte non lineal da ecuación diferencial en (3.57) inclúe unha dependencia funcional crecente na cuarta variable, o cal fará que

a condición de monotonía citada anteriormente non sexa tan esixente, tal e como se mostrará. Ademais, isto permítenos ter un marco unificado para o estudo de moitos outros tipos de ecuacións diferencias funcionais (ecuacións integro–diferenciais, ecuacións con máximo, etc.);

5. A función de desvío τ depende en cada momento t do comportamento global da solución, e non só dos valores que esta solución toma no instante t. Ademais, τ non será necesariamente monótona respecto de $x(t)$;

6. Permítese que as condicións de arranque sexan non lineais, e ademais involucran o comportamento global da solución, e non só os valores que esta toma nos puntos t_0 e $t_0 + L$.

Os nosos resultados para o problema (3.57) fan uso do teorema de existencia de puntos fixos acoplados extremais, Teorema 1.2.23, así como do resultado de existencia de solucións extremais para o problema de valor inicial, Teorema 2.1.6. Por razóns técnicas, estudaremos o problema completo (3.57) distinguindo dous casos: en primeiro lugar, o caso no cal a función τ é decrecente na terceira variable e a continuación o caso no que esta función é crecente. No que segue, e co fin de abreviar a escritura, usaremos moitas veces a notación $\tau_{t,x(t),x}$ no canto de $\tau(t, x(t), x)$.

Os resultados desta sección atópanse publicados en [30].

3.3.2. Función desvío decrecente respecto da incógnita

Nesta epígrafe estudaremos o problema (3.57) para o caso no cal a función desvío τ é decrecente respecto da variable funcional.

En primeiro lugar introducimos a definición de cuasisolucións e sub e sobresolucións acopladas.

Definición 3.3.1. *Diremos que $v, w \in \mathcal{C}(I)$ son cuasisolucións (acopladas) de (3.57) se as restricións $v_{|I_0}, w_{|I_0}$ son absolutamente continuas en I_0 e se satisfacen as igualdades*

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t), w(\tau_{t,v(t),v}), v) \text{ c.p.d. en } I_0, \quad v(t) = \Lambda(v) + k(t) \text{ en } I_-, \\ \\ w'(t) = f(t, w(t), v(\tau_{t,w(t),w}), w) \text{ c.p.d. en } I_0, \; w(t) = \Lambda(w) + k(t) \text{ en } I_-. \end{cases}$$

Diremos que dúas funcións $v_*, w^* \in Y \subset \mathcal{C}(I)$ son cuasisolucións extremais de (3.57) no subconxunto Y se son cuasisolucións e se satisface que $v_* \leq v$ e $w \leq w^*$ para calquera par de cuasisolucións $v, w \in Y$.

Definición 3.3.2. *Diremos que $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$ son sub e sobresolución (acopladas) do problema (3.57) se as restricións $\alpha_{|I_0}, \beta_{|I_0}$ son absolutamente continuas en I_0 e se satisfacen as desigualdades*

$$\begin{cases} \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \beta(\tau_{t,\alpha(t),\alpha}), \alpha) \text{ c.p.d. en } I_0, \quad \alpha(t) \leq \Lambda(\alpha) + k(t) \text{ en } I_-, \\ \\ \beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \alpha(\tau_{t,\beta(t),\beta}), \beta) \text{ c.p.d. en } I_0, \quad \beta(t) \geq \Lambda(\beta) + k(t) \text{ en } I_-. \end{cases}$$

A continuación enunciamos e probamos o noso resultado principal sobre existencia de cuasisolucións extremais para o problema (3.57) no caso no que τ é decrecente na terceira variable.

Teorema 3.3.3. *Supoñamos que, ou ben $r = 0$ e k é un número real fixado, ou ben $r > 0$ e $k : I_- \longrightarrow \mathbb{R}$ é continua en I_- e crecente en $[t_0 - \hat{r}, t_0]$ para algún $\hat{r} \in [0, r]$.*

Asumamos:

(H_1) *(Sub e sobresolucións) Existen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$ sub e sobresolución do problema (3.57) tales que $\alpha \leq \beta$ en I e α, β son crecentes en $[t_0 - \hat{r}, t_0 + L]$;*

(H_2) *(Estimación en L^1) Existen $\psi_m, \psi_M \in L^1(I_0)$ de tal xeito que para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, tense que*

$$0 \leq \psi_m(t) \leq f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_1)), \gamma_1) \leq \psi_M(t).$$

Consideremos o conxunto

$$[\alpha, \beta]^+ = \{\gamma \in [\alpha, \beta] \ : \gamma_{|I_0} \in AC(I_0), \ \psi_m \leq \gamma' \leq \psi_M \quad c.p.d. \text{ en } I_0 \\ e\ \gamma \text{ é crecente en } [t_0 - \hat{r}, t_0 + L]\},$$

e supoñamos que se satisfacen:

(H_3) *(Dependencias non monótonas respecto de t e $x(t)$)*

(a) *(Medibilidade respecto de t) Para todo $x \in [\alpha(t_0), \beta(t_0 + L)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, son medibles as composicións*
$t \in \{s \in I_0 \,:\, \alpha(s) \leq x \leq \beta(s)\} \longmapsto f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_1)), \gamma_1)$,

$t \in I_0 \longmapsto f(t, \alpha(t), \gamma_2(\tau(t, \alpha(t), \gamma_1)), \gamma_1)$, *e*

$t \in I_0 \longmapsto f(t, \beta(t), \gamma_2(\tau(t, \beta(t), \gamma_1)), \gamma_1)$;

(b) *(Discontinuidades admisibles respecto de $x(t)$) Para case todo $t \in I_0$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, a función $f(t, \cdot, \gamma_2(\tau(t, \cdot, \gamma_1)), \gamma_1)$ é continua en $[\alpha(t), \beta(t)] \backslash K(t)$, onde $K(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n(t)$ pode depender da elección de γ_i, $i = 1, 2$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in K_n(t)$ tense*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}} f(t, x+\varepsilon B, \gamma_2(\tau(t, x+\varepsilon B, \gamma_1)), \gamma_1) \bigcap DK_n(t, x)(1) \subset \{f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_1)), \gamma_1)\}.$$

(H_4) *(Dependencias funcionais monótonas)*

(a) *Para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]^+$ a función $f(t, x, \cdot, \gamma)$ é decrecente en $[\alpha(t_0 - \hat{r}), \beta(t_0 + L)]$; e para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todo $y \in [\alpha(t_0 - \hat{r}), \beta(t_0 + L)]$ o operador $f(t, x, y, \cdot)$ é crecente en $[\alpha, \beta]^+$, isto é, para $\gamma_1, \gamma_2 \in [\alpha, \beta]^+$ a relación $\gamma_1 \leq \gamma_2$ en I implica $f(t, x, y, \gamma_1) \leq f(t, x, y, \gamma_2)$;*

(*b*) *A función* $\tau(t,x,\cdot):[\alpha,\beta]^+ \longrightarrow [t_0-\hat{r},t_0+L]$ *é decrecente para case todo* $t\in I_0$ *e todo* $x\in[\alpha(t),\beta(t)]$*, isto é, para* $\gamma_1,\gamma_2\in[\alpha,\beta]^+$ *a relación* $\gamma_1\leq\gamma_2$ *en* I *implica*

$$t_0-\hat{r}\leq\tau(t,x,\gamma_2)\leq\tau(t,x,\gamma_1)\leq t_0+L;$$

(*c*) Λ *é crecente en* $[\alpha,\beta]^+$.

En tal caso, o problema (3.57) ten cuasisolucións extremais $v_*,w^*\in[\alpha,\beta]^+$*, que ademais satisfacen*

$$(v_*,w^*)=\min_{\preceq}\{(v,w)\,:\,w,v \text{ son, respectivamente, sub e sobresolución en } [\alpha,\beta]^+ \text{ para (3.57)}\},\tag{3.59}$$

onde $\preceq$ *é a orde parcial definida na proba do Teorema 1.2.23, con* $X=\mathcal{C}(I)$.

Proba. A idea da proba consiste en reducir o noso problema á obtención de puntos fixos acoplados extremais para un operador multivaluado axeitado. Así, e coa idea de aplicar posteriormente o Teorema 1.2.23, consideramos o espazo $X=\mathcal{C}(I)$ equipado coa súa metrica e ordenamento habituais. No subconxunto

$$Y=\{\gamma\in X\,:\gamma_{|I_0}\in AC(I_0),\,\psi_m\leq\gamma'\leq\psi_M \text{ c.p.d. en } I_0,\\ \text{e } \gamma \text{ é crecente } [t_0-\hat{r},t_0+L]\}$$

consideramos o intervalo ordenado $[\alpha,\beta]^+$ introducido no enunciado.

Definimos o operador multivaluado $\mathcal{A}:[\alpha,\beta]^+\times[\alpha,\beta]^+\longrightarrow 2^{[\alpha,\beta]^+}\backslash\emptyset$ do seguinte xeito: para cada par $(\gamma_1,\gamma_2)\in[\alpha,\beta]^+\times[\alpha,\beta]^+$ definimos $\mathcal{A}(\gamma_1,\gamma_2)$ como o conxunto de solucións en $[\alpha,\beta]^+$ do problema de valor inicial

$$P_{(\gamma_1,\gamma_2)}\begin{cases} z'(t)=f(t,z(t),\gamma_2(\tau_{t,z(t),\gamma_1}),\gamma_1) \text{ c.p.d. en } I_0,\\ \\ z(t)=\Lambda(\gamma_1)+k(t) \text{ en } I_-.\end{cases}\tag{3.60}$$

As hipóteses (H_1), (H_2) e (H_3) garanten, por aplicación do Teorema 2.1.6, que o problema $P_{(\gamma_1,\gamma_2)}$ ten solucións extremais en $[\alpha,\beta]^+$, o cal en particular implica que $\mathcal{A}(\gamma_1,\gamma_2)\neq\emptyset$ para cada $(\gamma_1,\gamma_2)\in[\alpha,\beta]^+\times[\alpha,\beta]^+$ e que están ben definidos os operadores $A_+(\cdot,\cdot)=\max\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ e $A_-=\min\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$.

Afirmación 1: Os operadores $A_\pm$ *son monótonos mixtos.–* Sexan $\gamma_1,\overline{\gamma}_1,\gamma_2\in[\alpha,\beta]^+$ de tal xeito que $\gamma_1\leq\overline{\gamma}_1$, e poñamos $\xi=A_+(\gamma_1,\gamma_2)$, $\overline{\xi}=A_+(\overline{\gamma}_1,\gamma_2)$. A condición $(H_4)-(c)$ asegura que $\xi(t)\leq\Lambda(\overline{\gamma}_{1|I_0})+k(t)$ para todo $t\in I_-$. Por outra banda, as condicións $(H_4)-(a)$ e $(H_4)-(b)$ xunto coa monotonía de γ_2 no intervalo $[t_0-\hat{r},t_0+L]$ implican que

$$\xi'(t)=f(t,\xi(t),\gamma_2(\tau_{t,\xi(t),\gamma_1}),\gamma_1)\leq f(t,\xi(t),\gamma_2(\tau_{t,\xi(t),\overline{\gamma}_1}),\overline{\gamma}_1) \text{ c.p.d. en } I_0.\tag{3.61}$$

En consecuencia, ξ é unha subsolución en $[\alpha,\beta]^+$ para o problema $P_{(\overline{\gamma}_1,\gamma_2)}$. Posto que $\overline{\xi}$ é a maior solución deste problema en $[\alpha,\beta]^+$ obtemos en virtude da caracterización (2.6) que $\xi \le \overline{\xi}$ en I. Deste xeito obtemos que o operador $A_+(\cdot,\gamma_2)$ é crecente. Con argumentos similares próbase que $A_-(\cdot,\gamma_2)$ é crecente e que $A_\pm(\gamma_1,\cdot)$ son decrecentes. En consecuencia, os operadores $A_\pm$ son monótonos mixtos.

Afirmación 2: Os operadores $A_\pm$ satisfacen a propiedade de converxencia monótona mixta.– Sexan $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ e $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ sucesións en $[\alpha,\beta]^+$, de xeito que unha delas é crecente e a outra, decrecente. A monotonía mixta dos operadores $A_\pm$ garante que $\{z_j\}_{j=1}^\infty=\{A_\pm(v_j,w_j)\}_{j=1}^\infty$ é unha sucesión monótona. Posto que $\{z_j\}$ está limitada (superiormente por β e inferiormente por α), existe o límite puntual, z.

Debemos probar agora que $z\in[\alpha,\beta]^+$ (para o cal basta ver que $z\in Y$ por ser $[\alpha,\beta]^+$ un pechado de Y) e que $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ converxe uniformemente en I: para $s,t\in I_0$, $s<t$ e $j\in\mathbb{N}$ a condición (H_2) proporciona

$$\int_s^t \psi_m(r)\,dr \le z_j(t)-z_j(s)=\int_s^t f(r,z_j(r),w_j(\tau_{r,z_j(r),v_j}),v_j)\,dr \le \int_s^t \psi_M(r)\,dr,$$

e tomando límites cando j tende a infinito obtemos

$$\int_s^t \psi_m(r)\,dr \le z(t)-z(s) \le \int_s^t \psi_M(r)\,dr,$$

o cal implica que $z_{|I_0}\in AC(I_0)$ e $\psi_m\le z'(t)\le\psi_M$ para case todo $t\in I_0$.

Por outra banda, para todo $t\in I_-$ tense

$$z(t)=\lim_{j\to\infty} z_j(t)=\lim_{j\to\infty}\Lambda(v_j)+k(t),$$

polo que $z_{|I_-}$ é continua en I_- e crecente en $[t_0-\hat{r},t_0]$. En consecuencia, $z\in Y$. Finalmente, a converxencia monótona da sucesión $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ á función continua z implica que esta converxencia é uniforme en Y, por aplicación do Teorema de Dini.

Afirmación 3: O problema (3.57) ten cuasisolucións extremais en $[\alpha,\beta]^+$.– O Teorema 1.2.23 garante agora que o operador multivaluado $\mathcal{A}$ ten puntos fixos acoplados extremais, v_*,w^*. Pola construción de $\mathcal{A}$ é claro que v_*,w^* son tamén cuasisolucións do problema (3.57) no intervalo $[\alpha,\beta]^+$. Por outra banda, se $v,w\in[\alpha,\beta]^+$ son cuasisolucións de (3.57) entón v,w son puntos fixos acoplados de $\mathcal{A}$ e, en consecuencia, $v_*\le v$ e $w\le w^*$. Polo tanto, v_*,w^* son cuasisolucións extremais de (3.57) en $[\alpha,\beta]^+$.

Afirmación 4: As cuasisolucións extremais v_*,w^* satisfacen a caracterización (3.59).– A caracterización (1.9) que proporciona o Teorema 1.2.23 dinos que

$$(v_*,w^*)=\min_{\preceq}\{(v,w)\in[\alpha,\beta]^+\times[\alpha,\beta]^+ \,:\, A_-(v,w)\le v,\ w\le A_+(w,v)\}, \tag{3.62}$$

polo que o noso último propósito será comprobar que as expresións (3.59) e (3.62) son equivalentes.

Poñamos

$$S = \{(v,w) \,:\, w,v \text{ son, respectivamente sub e sobresolución en } [\alpha,\beta]^+ \text{ do problema (3.57)}\},$$

$$\hat{S} = \{(v,w) \in [\alpha,\beta]^+ \times [\alpha,\beta]^+ \,:\, A_-(v,w) \le v,\ w \le A_+(w,v)\}.$$

Sexa $(v,w) \in S$ e denotemos $x = A_-(v,w)$, que é a menor solución en $[\alpha,\beta]^+$ do problema

$$x'(t) = f(t,x(t),w(\tau_{t,x(t),v}),v) \ \text{ c.p.d. en } I_0, \quad x(t) = \Lambda(v) + k(t) \ \text{ en } I_-, \tag{3.63}$$

polo que (2.7) implica que $x \le v$ por ser v unha sobresolución de (3.63). De xeito análogo, $w \le A_+(w,v)$ e, polo tanto, $S \subset \hat{S}$. En consecuencia, $\text{mín}_{\preceq} \hat{S} \preceq \text{mín}_{\preceq} S$.

Por outra banda, dado $(\overline{v},\overline{w}) \in \hat{S}$, as funcións $v = A_-(\overline{v},\overline{w})$ e $w = A_+(\overline{w},\overline{v})$ satisfacen que $(v,w) \preceq (\overline{v},\overline{w})$, e pola condición (H_4) son, respectivamente, sobresolución e subsolución en $[\alpha,\beta]^+$ do problema (3.57). En consecuencia, dado un elemento $(\overline{v},\overline{w}) \in \hat{S}$, existe $(v,w) \in S$ de tal xeito que $(v,w) \preceq (\overline{v},\overline{w})$ e, en consecuencia, $\text{mín}_{\preceq} S \preceq \text{mín}_{\preceq} \hat{S}$. □

Agora que temos condicións suficientes para garantir a existencia de cuasisolucións extremais para o problema (3.57), o noso seguinte obxectivo será mostrar que, baixo certas hipóteses adicionais, estas cuasisolucións definen a mesma función, que será polo tanto unha solución de (3.57) única no intervalo $[\alpha,\beta]^+$.

Para levar isto a cabo comezaremos probando un principio do máximo, que é unha xeneralización de [51, Lema 1].

Lema 3.3.4. *Sexan $p \in \mathcal{C}(I)$, $\psi \in L^1(I_0,[0,\infty))$ e $\lambda \in [0,1)$. Supoñamos que $p_{|I_0} \in AC(I_0)$ e que se satisfacen as desigualdades*

$$p'(t) \le \psi(t) \max_{s\in I} p(s) \quad \textit{c.p.d. en } I_0; \tag{3.64}$$

$$p(t) \le \lambda \max_{s\in I} p(s) \quad \textit{para todo } t \in I_-; \tag{3.65}$$

$$\lambda + \int_{t_0}^{t_0+L} \psi(s)\,ds < 1. \tag{3.66}$$

En tal caso, $p(t) \le 0$ para todo $t \in I$.

Proba. Sexa $t_1 \in I$ de tal xeito que

$$p(t_1) = \max_{s\in I} p(s),$$

e asumamos, razoando por redución ao absurdo, que $p(t_1) > 0$.

Por unha parte, se $t_1 \leq t_0$ entón a condición (3.65) proporciona

$$p(t_1) \leq \lambda\, p(t_1) < p(t_1),$$

unha contradición.

Por outra banda, se $t_1 > t_0$ entón integrando a expresión (3.64) entre t_0 e t_1 e usando (3.65) para $t = t_0$ obtemos

$$p(t_1) \leq p(t_0) + p(t_1) \int_{t_0}^{t_0+L} \Psi(s)ds \leq p(t_1) \left(\lambda + \int_{t_0}^{t_0+L} \Psi(s)ds \right),$$

o cal é outra contradición como consecuencia de (3.66). $\square$

Axudándonos do resultado que acabamos de probar, podemos agora dar condicións suficientes para garantir a existencia de solución para o problema (3.57).

Teorema 3.3.5. *Supoñamos que se satisfacen as hipóteses $(H_1) - (H_4)$ do Teorema 3.3.3 e que existe $\hat{\psi} \in L^1(t_0 - \hat{r}, t_0)$ de tal xeito que para $s, t \in [t_0 - \hat{r}, t_0]$, $s \leq t$, temos*

$$k(t) - k(s) \leq \int_s^t \hat{\psi}(r)dr. \tag{3.67}$$

Ademais, asumamos que se satiface o seguinte grupo de condicións:

(H_5) (Condición de Lipschitz lateral na variable funcional)

(a) Existen $L_1, L_2 \in L^1(I_0, [0, \infty))$ de tal xeito que para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, as relacións

$$\alpha(\tau_{t,x,\beta}) \leq u \leq v \leq \beta(\tau_{t,x,\alpha}) \quad e \quad \gamma_1 \leq \gamma_2$$

implican

$$f(t, x, u, \gamma_2) - f(t, x, v, \gamma_1) \leq L_1(t)(v - u) + L_2(t) \max_{s \in I}(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)); \tag{3.68}$$

(b) Existe $L_3 \in L^1(I_0, [0, \infty))$ de tal xeito que $L_1 L_3 \in L^1(I_0, [0, \infty))$ e para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, tales que $\gamma_1 \leq \gamma_2$, temos

$$\int_{\tau_{t,x,\gamma_2}}^{\tau_{t,x,\gamma_1}} \tilde{\psi}(s)ds \leq L_3(t) \max_{s \in I}(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)), \tag{3.69}$$

onde $\tilde{\psi} = \hat{\psi}$ c.p.d. en $[t_0 - \hat{r}, t_0]$ ($\hat{\psi}$ como en (3.67)) e $\tilde{\psi} = \psi_M$ c.p.d. en I_0 (ψ_M como en (H_2));

(c) Existe $\lambda \in [0,1)$ *tal que para* $\gamma_i \in [\alpha,\beta]^+$, $i=1,2$, *con* $\gamma_1 \le \gamma_2$, *temos*

$$\Lambda(\gamma_2) - \Lambda(\gamma_1) \le \lambda \max_{s\in I}(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)).$$

(H_6) *(Condición de Lipschitz lateral con respecto a* $x(t)$*)*
Existe $L_4 \in L^1(I_0,[0,\infty))$ *tal que para case todo* $t \in I_0$ *e toda* $\gamma_i \in [\alpha,\beta]^+$ *con* $\gamma_i = c_i + k$ *en* I_- *para algunhas constantes* $c_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2$, *a relación* $\alpha(t) \le x \le y \le \beta(t)$ *implica*

$$f(t,y,\gamma_2(\tau(t,y,\gamma_1)),\gamma_1) - f(t,x,\gamma_2(\tau(t,x,\gamma_1)),\gamma_1) \le L_4(t)(y-x). \tag{3.70}$$

Nestas condicións, o problema (3.57) ten unha única solución no intervalo $[\alpha,\beta]^+$ *sempre que*

$$\lambda + \int_{t_0}^{t_0+L} L_1(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+L} L_2(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+L} L_1(s)L_3(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+L} L_4(s)ds < 1. \tag{3.71}$$

Proba. Por aplicación do Teorema 3.3.3 sabemos que o problema (3.57) ten cuasisolucións extremais v_*, w^* en $[\alpha,\beta]^+$, con $v_* \le w^*$ en I_0. Probaremos agora que coas condicións adicionais (H_5) e (H_6) temos que $w^* \le v_*$ en I_0. Para facelo, definimos $p = w^* - v_*$ e usamos as nosas hipóteses sobre f e τ para establecer as seguintes desigualdades para case todo $t \in I_0$:

$$\begin{aligned}
p'(t) &= f(t,w^*(t),v_*(\tau_{t,w^*(t),w^*}),w^*) - f(t,v_*(t),v_*(\tau_{t,v_*(t),w^*}),w^*)\\
&\quad + f(t,v_*(t),v_*(\tau_{t,v_*(t),w^*}),w^*) - f(t,v_*(t),w^*(\tau_{t,v_*(t),v_*}),v_*)\\
&\le L_4(t)(w^*(t)-v_*(t)) + L_1(t)(w^*(\tau_{t,v_*(t),v_*}) - v_*(\tau_{t,v_*(t),w^*})) + L_2(t)\max_{s\in I} p(s)\\
&\le (L_2(t)+L_4(t))\max_{s\in I} p(s) + L_1(t)p(\tau_{t,v_*(t),v_*})\\
&\quad + L_1(t)(v_*(\tau_{t,v_*(t),v_*}) - v_*(\tau_{t,v_*(t),w^*}))\\
&\le (L_1(t)+L_2(t)+L_4(t))\max_{s\in I} p(s) + L_1(t)\int_{\tau_{t,v_*(t),w^*}}^{\tau_{t,v_*(t),v_*}} \tilde{\psi}(s)ds\\
&\le (L_1(t)+L_2(t)+L_1(t)L_3(t)+L_4(t))\max_{s\in I} p(s).
\end{aligned}$$

Por outra parte, para todo $t \in I_-$ tense

$$p(t) = \Lambda(w^*) - \Lambda(v_*) \le \lambda \max_{s\in I} p(s),$$

polo que o Lema 3.3.4 e a condición (3.71) implican que $p \le 0$ en I. En consecuencia, $v_* = w^*$ en I e polo tanto v_* é unha solución de (3.57) en $[\alpha,\beta]^+$.

Finalmente, supoñamos que $y \in [\alpha,\beta]^+$ é outra solución de (3.57). En tal caso, y, y son cuasisolucións do problema, e por ser v_*, w^* cuasisolucións extremais temos que $v_* \le y \le w^* = v_*$, polo que $y = v_*$. □

Vexamos agora un exemplo de aplicación dos resultados anteriores.

Un exemplo de aplicación

En primeiro lugar, sexa $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ unha enumeración dos números racionais no intervalo $[0,\infty)$, tomada de tal xeito que $q_1 = 6$, e consideremos a función

$$x \in [0,+\infty) \longmapsto \phi_1(x) = 1 - \sum_{\{m\,:\,q_m<x\}} 2^{-m},$$

que é decrecente, continua exactamente no conxunto dos números irracionais en $[0,\infty)$, e satiface $0 < \phi_1 \le 1$ en $[0,\infty)$. Nótese que a elección $q_1 = 6$ implica que $\phi_1(5) \ge 1/2$, feito que usaremos máis adiante na nosa argumentación.

Agora, tomemos o intervalo $I_0 = [0,1]$ e fixemos $\rho \in (0,1)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ definimos os conxuntos

$$K_{m,n}(t) = \left\{3\frac{n}{|n|}t + \rho m - \frac{1}{|n|}\right\}, \quad t \in I_0,$$

e para cada $(t,x) \in I_0 \times [0,+\infty)$ sexa

$$\phi_2(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K(t) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} K_{m,n}(t), \\ \left(\frac{1}{5}tx\right)^{\mu} \cos x, & \text{se } x \notin K(t), \end{cases}$$

onde μ é unha constante positiva. Obsérvese que para cada $t \in I_0$ a función $\phi_2(t,\cdot)$ é continua en $[0,+\infty) \setminus K(t)$, pero non é nin monótona nin limitada en $[0,\infty)$ se $t > 0$. Nótese tamén que cada punto da forma $x = \pm 3t + \rho m$, $m \in \mathbb{N}$, é un punto de acumulación de $K(t)$.

Consideramos o problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma_1(t)\,\phi_1(x(t)) + \sigma_2(t)\,\phi_2(t,x(t)) - \varepsilon(t)\,x\left(\frac{1-x(0)\,|\operatorname{sen} x(t)|\,t}{2}\right), \ t \in I_0, \\ x(t) = \int_I \omega(s)x(s)\,ds + \cos t, \ t \in I_- = [-1,0]. \end{cases} \tag{3.72}$$

O problema (3.72) transfórmase nun caso particular de (3.57) tomando

$$\tau_{t,x,\gamma} = \frac{1-\gamma(0)\,|\operatorname{sen} x|\,t}{2} \quad \text{para todo } (t,x,\gamma) \in I_0 \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I),$$

$$f(t,x,y) = \sigma_1(t)\,\phi_1(x) + \sigma_2(t)\,\phi_2(t,x) - \varepsilon(t)\,y \quad \text{para todo } (t,x,y) \in I_0 \times \mathbb{R}^2,$$

$\Lambda(\gamma) = \int_I \omega(s)\gamma(s)\,ds$ para todo $\gamma \in \mathcal{C}(I)$, e $k(t) = \cos t$ para $t \in I_-$.

Asumamos que:

(1) ε, $\sigma_i \in L^\infty(I_0, [0, +\infty))$, $i = 1, 2$,

(2) ω é unha función integrable e c.p.d. non negativa,

(3) existen $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 \in (0, 3)$ tales que $\|\sigma_1 + \sigma_2\|_\infty \leq 3 - \delta_2$, e ademais para case todo $t \in I_0$ tense:

$$\sigma_1(t) \geq \left(2 + \frac{3 - \delta_2}{2}\right) \varepsilon(t), \tag{3.73}$$

$$\sigma_1(t) \geq 2 \left(\delta_1 + \sigma_2(t) \left(\frac{5 - \delta_2}{5}\right)^\mu + \varepsilon(t)(5 - \delta_2)\right), \tag{3.74}$$

e

$$\|\omega\|_1 \leq (5 - \delta_2)^{-1}. \tag{3.75}$$

Consideremos agora dúas funcións $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$\alpha(t) = 0 \;\text{ e }\; \beta(t) = 2 + \chi_{[0,1]}(t)(3 - \delta_2)t, \;\; t \in I,$$

e vexamos que baixo certas hipóteses, α e β son, respectivamente, subsolución e sobresolución para o problema (3.72). En efecto, para $t \in I_0$ temos

$$f(t, \alpha(t), \beta(\tau_{t,\alpha(t),\alpha})) = \sigma_1(t) - \varepsilon(t) \left(2 + \frac{3 - \delta_2}{2}\right),$$

polo que por (3.73) obtemos que $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \beta(\tau_{t,\alpha(t),\alpha}))$ para $t \in I_0$. Ademais, para $t \in I_-$ temos $0 = \alpha(t) \leq \cos t$.

Por outra banda, para case todo $t \in I_0$ tense $\phi_1(\beta(t)) \leq 1$ e $\phi_2(t, \beta(t)) \leq 1$, e entón

$$f(t, \beta(t), \alpha(\tau_{t,\beta(t),\beta})) \leq \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \leq 3 - \delta_2 = \beta'(t).$$

Finalmente, para $t \in I_-$, e en virtude de (3.75), temos

$$\int_I \omega(s)\beta(s)\, ds + \cos t \leq (5 - \delta_2)\|\omega\|_1 + \cos t \leq 2 = \beta(t).$$

Veremos agora que este problema ten cuasisolucións extremais entre α e β.

Nótese que para case todo $t \in I_0$ e todo $x \leq \beta(t)$ temos $x \leq 5$, polo que $\phi_1(x) \geq \phi_1(5) \geq 1/2$, e

$$\phi_2(t, x) \geq -\left(\frac{5 - \delta_2}{5}\right)^\mu,$$

de onde para case todo $t \in I_0$ e x, y tales que $0 \leq x \leq \beta(t)$ e $0 \leq y \leq 5 - \delta_2$ temos $f(t, x, y) \geq \delta_1$ en virtude de (3.74). En consecuencia, a condición (H_2) do Teorema 3.3.3 cúmprese (tómese por exemplo $\psi_m = \delta_1$ e $\psi_M = \sigma_1 + \sigma_2$). As condicións de monotonía (H_4) cúmprense tamén, polo que só precisamos comprobar as hipóteses $(H_3) - (a)$ e $(H_3) - (b)$.

Para comprobar as condicións de medibilidade faremos uso, entre outras propiedades, da Proposición 1.1.20. A este fin, tomemos ξ_i, $i = 1, 2, 3$, funcións absolutamente continuas en I_0, con $\xi_1 \geq 0$. A aplicación

$$t \in \{s \in I_0 \,:\, \alpha(s) \leq \xi_1(s) \leq \beta(s)\} \longmapsto f(t, \xi_1(t), \xi_2(\tau(t, \xi_1(t), \xi_3)))$$

pode ser escrita como

$$f(\cdot, \xi_1(\cdot), \xi_2(\tau(\cdot, \xi_1(\cdot), \xi_3))) = \sigma_1(\cdot)\widetilde{\phi_1}(\cdot) + \sigma_2(\cdot)\widetilde{\phi_2}(\cdot) - \varepsilon(\cdot)\widetilde{\phi_3}(\cdot),$$

onde σ_1, σ_2 e ε son medibles por hipótese e:

1. $\widetilde{\phi_1} = \phi_1 \circ \xi_1$ é monótona, e polo tanto medible;
2. ϕ_2 satisface as condicións da Proposición 1.1.20, polo que $\widetilde{\phi_2}(\cdot) = \phi_2(\cdot, \xi_1(\cdot))$ é medible;
3. $\widetilde{\phi_3}(\cdot) = \xi_2(\tau(\cdot, \xi_1(\cdot), \xi_3))$ é continua, polo tanto medible.

En consecuencia, cúmprense as condicións de medibilidade requeridas en $(H_3) - (a)$.

En último lugar, estudemos as condicións de continuidade: as discontinuidades respecto de $x(t)$ son debidas ás funcións ϕ_1 e ϕ_2. No primeiro caso, o conxunto de discontiuidade pode ser escrito como unión numerable de liñas horizontais, e no segundo caso este conxunto pode ser escrito como unión numerable de rectas de pendente ± 3. En consecuencia, a condición $(H_3)-(b)$ no Teorema 3.3.3 satisfácese, xa que entre α e β cúmprese que $0 < \delta_1 \leq f \leq 3 - \delta_2 < 3$.

En conclusión, por aplicación do Teorema 3.3.3, obtemos que o problema (3.72) ten cuasisolucións extremais entre α e β.

Desafortunadamente, así plantexado non podemos aplicar o Teorema 3.3.5 para garantir a existencia dunha solución do problema (3.72) entre α e β porque a función ϕ_2 non satisface as condicións de Lipschitz que require a hipótese (H_6). Sen embargo, imos mostrar que se eliminamos este termo, isto é, se facemos $\sigma_2 \equiv 0$, entón podemos aplicar o Teorema 3.3.5.

En primeiro lugar, para case todo $t \in I_0$ e todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ temos

$$f(t, x, u) - f(t, x, v) = \varepsilon(t)(v - u)$$

sempre que $\alpha(\tau_{t,x,\beta}) \leq u \leq v \leq \beta(\tau_{t,x,\alpha})$, polo que a condición $(H_5) - (a)$ cúmprese con $L_1 = \varepsilon$ e $L_2 = 0$.

En segundo lugar, para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, e todas $\gamma_1, \gamma_2 \in [\alpha, \beta]^+$ con $\gamma_1 \leq \gamma_2$ temos

$$\int_{\tau_{t,x,\gamma_2}}^{\tau_{t,x,\gamma_1}} \widetilde{\psi}(s)\, ds \leq \frac{t \text{ máx}\{1, \|\sigma_1\|_\infty\}}{2} (\gamma_2(0) - \gamma_1(0)),$$

onde $\widetilde{\psi}(t) = -\operatorname{sen} t$, $t \in I_-$, e $\widetilde{\psi} = \sigma_1$ en I_0. Polo tanto, a condición $(H_5) - (b)$ cúmprese con

$$L_3(t) = \frac{t \text{ máx}\{1, \|\sigma_1\|_\infty\}}{2}.$$

En terceiro lugar, para $\gamma_1, \gamma_2 \in [\alpha, \beta]^+$ con $\gamma_1 \leq \gamma_2$ temos

$$\Lambda(\gamma_2) - \Lambda(\gamma_1) \leq \|\omega\|_1 \max_{s \in I} (\gamma_2(s) - \gamma_1(s)),$$

polo que a condición $(H_5) - (c)$ satisfácese con $\lambda = \|\omega\|_1$.

Finalmente, para case todo $t \in I_0$, todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, e x, y con $\alpha(t) \leq x \leq y \leq \beta(t)$ tense que

$$\begin{aligned} f(t, y, \gamma_1(\tau_{t,y,\gamma_2})) - f(t, x, \gamma_1(\tau_{t,x,\gamma_2})) &\leq \varepsilon(t)(\gamma_1(\tau_{t,x,\gamma_2}) - \gamma_1(\tau_{t,y,\gamma_2})) \\ &\leq \varepsilon(t)\|\sigma_1\|_\infty \frac{1}{2}\gamma_2(0) t \, ||\operatorname{sen} x| - |\operatorname{sen} y|| \\ &\leq \varepsilon(t)\|\sigma_1\|_\infty \, t(y - x), \end{aligned}$$

polo que a condición (H_6) satifácese con $L_4(t) = \varepsilon(t)\|\sigma_1\|_\infty t$, $t \in I_0$.

En consecuencia, o problema (3.72) con $\sigma_2 \equiv 0$ ten unha única solución en $[\alpha, \beta]^+$ sempre que as funcións L_i, $i = 1, 2, 3, 4$, e λ satisfagan a condición (3.71), o cal é certo, en particular, se

$$\|\omega\|_1 + \|\varepsilon\|_\infty \left(1 + \frac{3 \text{ máx}\{1, \|\sigma_1\|_\infty\}}{4}\right) < 1.$$

3.3.3. Función desvío crecente respecto da incógnita

Nesta sección buscaremos resultados de existencia de cuasisolucións e solucións para o problema (3.57) no caso no que a función τ é crecente na terceira variable. Este cambio oblíganos a facer pequenas modificacións nas definicións de cuasisolucións e sub e sobresolucións.

Definición 3.3.6. *Diremos que $v, w \in \mathcal{C}(I)$ son cuasisolucións (acopladas) de (3.57) se as restricións $v_{|I_0}, w_{|I_0}$ son absolutamente continuas en I_0 e se satisfacen as igualdades*

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t), w(\tau_{t,v(t),w}), v) \text{ c.p.d. en } I_0, \quad v(t) = \Lambda(v) + k(t) \text{ en } I_-, \\ \\ w'(t) = f(t, w(t), v(\tau_{t,w(t),v}), w) \text{ c.p.d. en } I_0, \; w(t) = \Lambda(w) + k(t) \text{ en } I_-. \end{cases}$$

Diremos que dúas funcións $v_*, w^* \in Y \subset \mathcal{C}(I)$ son cuasisolucións extremais de (3.57) no subconxunto Y se son cuasisolucións e se satisface que $v_* \leq v$ e $w \leq w^*$ para calquera par de cuasisolucións $v, w \in Y$.

Definición 3.3.7. *Diremos que $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$ son sub e sobresolución (acopladas) do problema (3.57) se as restricións $\alpha_{|I_0}, \beta_{|I_0}$ son absolutamente continuas en I_0 e se satisfacen as desigualdades*

$$\begin{cases} \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \beta(\tau_{t,\alpha(t),\beta}), \alpha) \text{ c.p.d. en } I_0, & \alpha(t) \leq \Lambda(\alpha) + k(t) \text{ en } I_-, \\ \\ \beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \alpha(\tau_{t,\beta(t),\alpha}), \beta) \text{ c.p.d. en } I_0, & \beta(t) \geq \Lambda(\beta) + k(t) \text{ en } I_-. \end{cases}$$

O seguinte resultado é o análogo do Teorema 3.3.3 para o caso no que τ é crecente na terceira variable.

Teorema 3.3.8. *Supoñamos que, ou ben $r = 0$ e k é un número real fixado, ou ben $r > 0$ e $k : I_- \longrightarrow \mathbb{R}$ é continua en I_- e crecente en $[t_0 - \hat{r}, t_0]$ para algún $\hat{r} \in [0, r]$.*

Asumamos:

(H_1) *(Sub e sobresolucións) Existen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$ sub e sobresolución do problema (3.57) (segundo a Definición 3.3.7) tales que $\alpha \leq \beta$ en I e α, β son crecentes en $[t_0 - \hat{r}, t_0 + L]$;*

(H_2) *(Estimación en L^1) Existen $\psi_m, \psi_M \in L^1(I_0)$ de tal xeito que para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, tense que*

$$0 \leq \psi_m(t) \leq f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_2)), \gamma_1) \leq \psi_M(t).$$

Consideremos o conxunto $[\alpha, \beta]^+$ definido como no Teorema 3.3.3 e supoñamos que se satisfacen:

(H_3) *(Dependencias non monótonas respecto de t e $x(t)$)*

(a) *(Medibilidade respecto de t) Para todo $x \in [\alpha(t_0), \beta(t_0 + L)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, son medibles as composicións*
$t \in \{s \in I_0 \,:\, \alpha(s) \leq x \leq \beta(s)\} \longmapsto f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_2)), \gamma_1)$,

$t \in I_0 \longmapsto f(t, \alpha(t), \gamma_2(\tau(t, \alpha(t), \gamma_2)), \gamma_1)$, *e*

$t \in I_0 \longmapsto f(t, \beta(t), \gamma_2(\tau(t, \beta(t), \gamma_2)), \gamma_1)$;

(b) *(Discontinuidades admisibles respecto de $x(t)$) Para case todo $t \in I_0$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, a función $f(t, \cdot, \gamma_2(\tau(t, \cdot, \gamma_2)), \gamma_1)$ é continua en $[\alpha(t), \beta(t)] \backslash K(t)$, onde $K(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n(t)$ pode depender da elección de γ_i, $i = 1, 2$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in K_n(t)$ tense*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}} f(t, x + \varepsilon B, \gamma_2(\tau(t, x + \varepsilon B, \gamma_2)), \gamma_1) \bigcap DK_n(t, x)(1) \subset \{f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_2)), \gamma_1)\}.$$

(H_4) *(Dependencias funcionais monótonas)*

(a) *Para case todo* $t \in I_0$*, todo* $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ *e toda* $\gamma \in [\alpha, \beta]^+$ *a función* $f(t, x, \cdot, \gamma)$ *é decrecente en* $[\alpha(t_0 - \hat{r}), \beta(t_0 + L)]$*; e para case todo* $t \in I_0$*, todo* $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ *e todo* $y \in [\alpha(t_0 - \hat{r}), \beta(t_0 + L)]$ *o operador* $f(t, x, y, \cdot)$ *é crecente en* $[\alpha, \beta]^+$*;*

(b) *Para case todo* $t \in I_0$ *e todo* $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$*, a función*

$$\tau(t, x, \cdot) : [\alpha, \beta]^+ \longrightarrow [t_0 - \hat{r}, t_0 + L]$$

é crecente, isto é, para $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$*,* $i = 1, 2$*, a relación* $\gamma_1 \le \gamma_2$ *implica*

$$t_0 - \hat{r} \le \tau(t, x, \gamma_1) \le \tau(t, x, \gamma_2) \le t_0 + L.$$

(c) Λ *é crecente en* $[\alpha, \beta]^+$*.*

En tal caso, o problema (3.57) ten cuasisolucións extremais $v_*, w^* \in [\alpha, \beta]^+$ *(segundo a Definición 3.3.6), que ademais satisfacen a caracterización (3.59).*

Proba. Basta repetir paso por paso a proba do Teorema 3.3.3, substituíndo o operador multivaluado $\mathcal{A}$ que alí se empregaba por

$$\widetilde{\mathcal{A}} : [\alpha, \beta]^+ \times [\alpha, \beta]^+ \longrightarrow 2^{[\alpha,\beta]^+} \backslash \emptyset,$$

onde para cada $(\gamma_1, \gamma_2) \in [\alpha, \beta]^+ \times [\alpha, \beta]^+$, $\widetilde{\mathcal{A}}(\gamma_1, \gamma_2)$ é o conxunto de solucións en $[\alpha, \beta]^+$ do problema de valor inicial

$$\widetilde{P}_{(\gamma_1,\gamma_2)} \begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \gamma_2(\tau_{t,z(t),\gamma_2}), \gamma_1) \text{ c.p.d. en } I_0, \\ \\ z(t) = \Lambda(\gamma_1) + k(t) \text{ en } I_-. \end{cases} \tag{3.76}$$

$\square$

Como consecuencia do Teorema 3.3.8 e do Lema 3.3.4 obtemos o seguinte resultado de unicidade de solución en $[\alpha, \beta]^+$.

Teorema 3.3.9. *Supoñamos que se satisfacen as hipóteses* $(H_1) - (H_4)$ *do Teorema 3.3.8 e que existe* $\hat{\psi} \in L^1(t_0 - \hat{r}, t_0)$ *de tal xeito que para* $s, t \in [t_0 - \hat{r}, t_0]$*,* $s \le t$*, temos (3.67). Ademais, asumamos que se satiface o seguinte grupo de condicións:*

(H_5) *(Condición de Lipschitz lateral na variable funcional)*

(a) *Existen* $L_1, L_2 \in L^1(I_0, [0, \infty))$ *de tal xeito que para case todo* $t \in I_0$*, todo* $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$*, e todas* $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$*,* $i = 1, 2$*, as relacións*

$$\alpha(\tau_{t,x,\alpha}) \le u \le v \le \beta(\tau_{t,x,\beta}) \quad e \quad \gamma_1 \le \gamma_2$$

implican

$$f(t, x, u, \gamma_2) - f(t, x, v, \gamma_1) \le L_1(t)(v - u) + L_2(t) \max_{s \in I}(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)); \tag{3.77}$$

(b) *Existe* $L_3 \in L^1(I_0, [0,\infty))$ *de tal xeito que* $L_1 L_3 \in L^1(I_0, [0,\infty))$ *e para case todo* $t \in I_0$, *todo* $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ *e todas* $\gamma_i \in [\alpha,\beta]^+$, $i = 1,2$, *tales que* $\gamma_1 \le \gamma_2$, *temos*

$$\int_{\tau_{t,x,\gamma_1}}^{\tau_{t,x,\gamma_2}} \tilde{\psi}(s)ds \le L_3(t) \max_{s\in I}(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)). \tag{3.78}$$

onde $\tilde{\psi} = \hat{\psi}$ *c.p.d. en* $[t_0 - \hat{r}, t_0]$ *(*$\hat{\psi}$ *como en (3.67)) e* $\tilde{\psi} = \psi_M$ *c.p.d. en* I_0 *(*ψ_M *como en* (H_2)*);*

(c) *Existe* $\lambda \in [0,1)$ *tal que para* $\gamma_i \in [\alpha,\beta]^+$, $i = 1,2$, *con* $\gamma_1 \le \gamma_2$, *temos*

$$\Lambda(\gamma_2) - \Lambda(\gamma_1) \le \lambda \max_{s\in I}(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)).$$

(H_6) *(Condición de Lipschitz lateral con respecto a* $x(t)$*)*

Existe $L_4 \in L^1(I_0, [0,\infty))$ *tal que para case todo* $t \in I_0$ *e toda* $\gamma_i \in [\alpha,\beta]^+$ *con* $\gamma_i = c_i + k$ *en* I_- *para algunhas constantes* $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, *a relación* $\alpha(t) \le x \le y \le \beta(t)$ *implica*

$$f(t, y, \gamma_2(\tau(t,y,\gamma_2)), \gamma_1) - f(t, x, \gamma_2(\tau(t,x,\gamma_2)), \gamma_1) \le L_4(t)(y - x). \tag{3.79}$$

Nestas condicións, o problema (3.57) ten unha única solución no intervalo $[\alpha,\beta]^+$ *sempre que*

$$\lambda + \int_{t_0}^{t_0+L} L_1(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+L} L_2(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+L} L_1(s)L_3(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+L} L_4(s)ds < 1. \tag{3.80}$$

Proba. Basta repetir paso por paso a proba do Teorema 3.3.5, sendo agora v_*, w^* as cuasisolucións extremais que nos proporciona o Teorema 3.3.8. □

3.3.4. Reflexión sobre as hipóteses

O noso obxectivo nesta epígrafe será facer uns breves comentarios acerca de cada unha das hipóteses que interveñen nos resultados principais das seccións anteriores, co fin de clarificar o seu significado e analizar cómo poden ser comprobadas cada unha delas na práctica.

Hipótese (H_1) – A existencia de sub e sobresolucións é probablemente a hipótese máis difícil de comprobar na práctica. Por este motivo incluímos na Sección 3.3.5 algúns resultados sobre construción de sub e sobresolucións en casos particulares.

Hipótese (H_2) – Pedir este tipo de estimacións integrables é unha condición habitual neste tipo de resultados de existencia de solución, e retrotráese ata o propio Carathéodory [12]. Obsérvese que (H_2) cúmprese trivialmente se a parte non lineal é continua e non negativa, en virtude da limitación en subconxuntos compactos.

Por outra banda, se se toman as funcións ψ_m e ψ_M suficientemente próximas entón o conxunto $[\alpha,\beta]^*$ é máis pequeno, o cal pode ser de axuda á hora de comprobar as restantes hipóteses.

Este é o único motivo polo que introducimos a función ψ_m no enunciado da hipótese (H_2), pois para garantir a existencia de solución dos problemas auxiliares (3.60) e (3.76) bastaría con pedir, respectivamente,

$$0 \leq f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_1)), \gamma_1) \leq \psi_M(t)$$

e

$$0 \leq f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_2)), \gamma_1) \leq \psi_M(t).$$

É aínda un problema aberto para nós estudar se os resultados previos permancecen válidos substituíndo a estimación global en L^1 por estimacións localmente integrables, tal e como se fai en [7], así como estudar o caso no que a parte non lineal ten signo non constante. Este último problema resólvese parcialmente na Sección 3.3.6, onde se dá un resultado de existencia de solución no caso no que a función τ só depende de $(t, x(t))$ e que permite que a función f cambie signo.

Hipótese $(H_3) - (a)$ – A medibilidade das composicións é unha hipótese moi feble; sen embargo non sempre é doada de comprobar, e remitimos ao lector á Sección 1.1.2 para un estudo máis profundo deste problema. De todos xeitos, construír exemplos de funcións f e τ que non satisfagan $(H_3) - (a)$ precisa necesariamente facer uso do axioma de elección, e semella, polo tanto, quedar fóra do eido das aplicacións.

Hipótese $(H_3) - (b)$ – Esta condición permite moitos tipos de discontinuidades respecto de $x(t)$, polo menos en subconxuntos do plano (t, x) con comportamento suficientemente bo. Unha consecuencia interesante da hipótese $(H_3) - (b)$ é que permite discontinuidades de salto "cara abaixo" con respecto de $x(t)$, feito que era explicitamente evitado ata hai poucos anos na literatura referente a existencia de solucións de Carathéodory para ecuacións diferenciais discontinuas de primeira orde, véxase [6, 8, 40, 42]. É interesante salientar tamén que $(H_3) - (b)$ non implica continuidade respecto de $x(t)$ cando se combina coa hipótese (H_6), polo que tanto f como τ poden ser discontinuas respecto de t e $x(t)$ nos Teoremas 3.3.5 e 3.3.9, de existencia de solución única en $[\alpha, \beta]^+$.

As condicións (H_3) empréganse unicamente para garantir que os problemas auxiliares (3.60) e (3.76) caen dentro das hipóteses do Teorema 2.1.6, garantindo así a existencia de solucións extremais para estes problemas, e que ademais satisfacen as caracterizacións (2.6) e (2.7). Por este motivo, as nosas argumentacións seguirían sendo válidas se suprimimos (H_3) e asumimos directamente que os problemas auxiliares (2.6) e (2.7) teñen solucións extremais que satisfacen (2.6) e (2.7), na liña do que se fai en [17]. Noutros termos, os nosos resultados seguen sendo válidos se no canto do Teorema 2.1.6 empregamos outro resultado de existencia para problemas de valor inicial e modificamos (H_3) do xeito conveniente. Algúns exemplos doutros resultados de existencia de solución para problemas de valor incial que tamén permiten discontinuidades de salto "cara abaixo" son [7, Teorema 3.1], [13, Teorema 2.1.4], [19, Teorema 3.1] ou [20, Teorema 3.6].

Hipótese (H_4) – As condicións de monotonía xogan un papel esencial nas nosas argumentacións, toda vez que estas baséanse en resultados abstractos para operadores monótonos. Este, dalgún xeito, é o prezo que pagamos por eliminar a continuidade da listaxe de hipóteses. Sen embargo, o feito de considerar un termo funcional crecente na cuarta variable en (3.57) vai permitir que os nosos resultados non estean tan limitados pola monotonía como podería parecer nun primeiro momento. En efecto, consideremos unha ecuación do tipo

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau_{t,x(t)})) \quad \text{para case todo } t \in I_0, \tag{3.81}$$

onde a función $g : I_0 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que para case todo $t \in I_0$ e todo $x \in \mathbb{R}$ a aplicación $g(t, x, \cdot)$ ten variación limitada en subconxuntos compactos (por exemplo, se $g(t, x, \cdot)$ é localmente lipschitziana). Entón existen dúas funcións $g_1, g_2 : I_0 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal xeito que $g_1(t, x, \cdot)$ é crecente, $g_2(t, x, \cdot)$ é decrecente e $g(t, x, \cdot) = g_1(t, x, \cdot) + g_2(t, x, \cdot)$. Deste xeito, a ecuación (3.81) pode ser reescrita como

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\tau_{t,x(t)}), x) \quad \text{para case todo } t \in I_0, \tag{3.82}$$

onde $f(t, x, y, \gamma) = g_1(t, x, \gamma(\tau_{t,x})) + g_2(t, x, y)$ satisface as condicións de monotonía requeridas en $(H_4) - (a)$. Deste xeito, a ecuación (3.81) entra no marco dos nosos resultados, alomenos no que ás condicións de monotonía se refire. Obsérvese tamén que as nocións de sub e sobresolucións dependen da descomposición $g = g_1 + g_2$; máis concretamente, α e β serán sub e sobresolucións sempre que para case todo $t \in I_0$ se teña

$$\alpha'(t) \leq g_1(t, \alpha(t), \alpha(\tau_{t,\alpha(t)})) + g_2(t, \alpha(t), \beta(\tau_{t,\alpha(t)}))$$

e

$$\beta'(t) \geq g_1(t, \beta(t), \beta(\tau_{t,\beta(t)})) + g_2(t, \beta(t), \alpha(\tau_{t,\beta(t)})).$$

Reformulacións como a que acabamos de realizar son tamén útiles con outros propósitos. Agora amosaremos cómo se pode evitar comprobar a condición $(H_3) - (b)$ para algúns tipos de discontinuidades, nominalmente, para aquelas debidas a termos crecentes.

Consideremos novamente a ecuación (3.81) e supoñamos que para case todo $t \in I_0$ e todo $y \in \mathbb{R}$ a aplicación $g(t, \cdot, y)$ é de variación limitada en subconxuntos compactos. Entón, $g(t, \cdot, y) = g_1(t, \cdot, y) + g_2(t, \cdot, y)$, onde $g_1(t, \cdot, y)$ é crecente e $g_2(t, \cdot, y)$ é decrecente. Deste xeito, a ecuación (3.81) pode ser reescrita como (3.82), con $f(t, x, y, \gamma) = g_1(t, \gamma(t), y) + g_2(t, x, y)$, e agora as discontinuidades debidas a $g_1(t, \cdot, y)$ poden ocorrer en subconxuntos arbitrarios, no sentido de que non é preciso comprobar $(H_3) - (b)$ nesas discontinuidades á hora de aplicar os Teoremas 3.3.3 ou 3.3.8.

Obsérvese tamén que f é decrecente con respecto a x, incluso cando g non o é, o cal, en certo sentido, podería simplificar a obtención de sub e sobresolucións tendo en conta os resultados que se amosarán na Sección 3.3.5, así como facer máis simple de comprobar a condición (H_6), tal e como amosaremos no correspondente parágrafo.

Condición (3.67) – O Lema 4.2 en [73] garante que a condición (3.67) é equivalente a supoñer:

1. a función k é de variación limitada en $[t_0-\hat{r},t_0]$,
2. $k=k_a+k_s$, con k_a é absolutamente continua en $[t_0-\hat{r},t_0]$, k_s é decrecente en $[t_0-\hat{r},t_0]$ e $k_s'=0$ en case todo punto,
3. $k_a'(t)\le\hat{\psi}(t)$ para case todo $t\in[t_0-\hat{r},t_0]$.

Obviamente, se k é absolutamente continua en $[t_0-\hat{r},t_0]$ entón a condición (3.67) cúmprese con "$\le$" substituído por "$=$" e $\hat{\psi}$ substituído por k'.

Hipótese (H_5) – A condición de Lipschitz lateral que se require en (H_5) convértese en condición de Lipschitz usual cando se combina con (H_4). En consecuencia, e falando *grosso modo*, nas condicións dos Teorema 3.3.5, Λ é unha contracción e para case todo $t\in I_+$, todo $x\in[\alpha(t),\beta(t)]$ e toda $\gamma\in[\alpha,\beta]^+$ as funcións

$$y\in[\alpha(\tau_{t,x,\beta}),\beta(\tau_{t,x,\alpha})]\longmapsto f(t,x,y,\gamma),$$

$$\gamma\in[\alpha,\beta]^+\longmapsto f(t,x,y,\gamma),$$

e

$$\gamma\in[\alpha,\beta]^+\longmapsto\int_{t_0}^{\tau(t,x,\gamma)}\psi_M(s)\,ds$$

son lipschitzianas. O mesmo ocorre nas condicións do Teorema 3.3.9, substituíndo a primeira das funcións anteriores por

$$y\in[\alpha(\tau_{t,x,\alpha}),\beta(\tau_{t,x,\beta})]\longmapsto f(t,x,y,\gamma).$$

Obsérvese tamén que as condicións (3.69)–(3.78) cúmprense se ψ_M é esencialmente limitada e $\tau(t,x,\cdot)$ é lipschitziana en $[\alpha,\beta]^+$.

Hipótese (H_6) – A condición (H_6) no Teorema 3.3.5 cúmprese, en particular, se a aplicación

$$x\in[\alpha(t),\beta(t)]\longmapsto f(t,x,\gamma_2(\tau(t,x,\gamma_1)),\gamma_1)$$

é decrecente. Pola súa parte, isto cúmprese se (e só se se eliminamos a dependencia en $x(t)$ na función f) $f(t,x(t),y,\gamma)$ é decrecente en y (o cal xa é requerido en $(H_4)-(a)$) e en $x(t)$ e $\tau(t,x(t),x)$ é crecente en $x(t)$. Deste xeito, a condición (H_6) pode cumprirse aínda que f ou τ sexan discontinuas respecto de $x(t)$. O mesmo ocorre no caso do Teorema 3.3.9, considerando a aplicación

$$x\in[\alpha(t),\beta(t)]\longmapsto f(t,x,\gamma_2(\tau(t,x,\gamma_2)),\gamma_1).$$

Por outra banda, a condición (H_6) do Teorema 3.3.5 vén implicada pola correspondente $(H_5)-(a)$ se engadimos estas dúas condicións:

(1) para case todo $t \in I_0$ e toda $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$ que satisfaga $\psi_m \leq \gamma' \leq \psi_M$ en case todo punto de I_0 (ψ_m e ψ_M son as funcións que proporciona (H_3)) e $\gamma_i = c_i + k$ en I_- para algunhas constantes $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, a composición

$$x \in [\alpha(t), \beta(t)] \longmapsto \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_1)) \tag{3.83}$$

é lipschitziana. Isto ocorre, en particular, se ψ_M é constante, k é lipschitziana en I_- e $\tau(t, \cdot, \gamma_2)$ é lipschitziana en $[\alpha(t), \beta(t)]$;

(2) existe $L \in L^1(I_0)$ tal que para todo $u \in [\text{mín}_{t \in I_\pm} \alpha(t), \text{máx}_{t \in I_\pm} \beta(t)]$, case todo $t \in I_0$, e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]^+$ tense

$$f(t, x, u, \gamma) - f(t, y, u, \gamma) \leq L(t)(y - x) \quad \text{sempre que } \alpha(t) \leq x \leq y \leq \beta(t).$$

O mesmo ocorre coa hipótese (H_6) do Teorema 3.3.9, substituíndo a composición (3.83) por

$$x \in [\alpha(t), \beta(t)] \longmapsto \gamma_2(\tau(t, x, \gamma_2)). \tag{3.84}$$

Isto mostra que nin f nin τ teñen que ser monótonas respecto de $x(t)$ para que se cumpra (H_6).

3.3.5. Construción de sub e sobresolucións

Tal e como sinalabamos na sección anterior, probar a existencia de sub e sobresolucións para o problema (3.57) e, máis aínda, obter a súa expresión explícita, é probablemente a parte máis complexa á hora de aplicar os teoremas de existencia probados nas Seccións 3.3.2 e 3.3.3. Por este motivo, incluímos a continuación unha serie de resultados que proporcionan condicións suficientes sobre as funcións dato para garantir a existencia de sub e sobresolucións, así como as súas expresións explícitas. Consideraremos separadamente dous casos: o primeiro deles, o caso no que a parte non lineal está limitada; a continuación, o caso no que permitimos segundos membros non limitados.

Sub e sobresolucións para problemas limitados

Comezaremos con un resultado de construción de sub e sobresolucións para o caso no que a parte non lineal está limitada en subconxuntos axeitados.

Proposición 3.3.10. *Supoñamos que $f : I_0 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ é decrecente na terceira variable e crecente na cuarta. Supoñamos ademais que*

(1) *existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de tal xeito que $\lambda_1 \leq \Lambda(\gamma) \leq \lambda_2$ para toda $\gamma \in \mathcal{C}(I)$, e poñamos*

$$c_1 = \lambda_1 + \min_{s \in I_-} k(s),$$

e

$$c_2 = \lambda_2 + \max_{s \in I_-} k(s),$$

(2) *existe* $\psi \in L^1(I_0)$ *tal que para case todo* $t \in I_0$, *todo* $x \geq c_2$ *e toda* $\gamma \in \mathcal{C}(I)$ *con* $\gamma \geq c_2$ *en* I *se ten*

$$f(t, x, c_1, \gamma) \leq \psi(t), \tag{3.85}$$

e para case todo $t \in I_+$ *temos*

$$0 \leq f(t, c_1, c_2 + \|\psi\|_1, c_1). \tag{3.86}$$

Entón as funcións

$$\alpha(t) = c_1, \quad t \in I,$$

e

$$\beta(t) = \begin{cases} c_2, & t \in I_-, \\ c_2 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \psi(s)\, ds, & t \in I_0, \end{cases}$$

son, respectivamente, subsolución e sobresolución para o problema (3.57) segundo as dúas definicións 3.3.2 e 3.3.7, e ademais $\alpha \leq \beta$ *en* I.

Proba. Por unha parte, para $t \in I_-$ temos que

$$\Lambda(\alpha) + k(t) \geq \lambda_1 + \min_{s \in I_-} k(s) = c_1 = \alpha(t)$$

e

$$\Lambda(\beta) + k(t) \leq \lambda_2 + \max_{s \in I_-} k(s) = c_2 = \beta(t).$$

Por outra banda, para case todo $t \in I_0$ e $\omega \in \{\alpha, \beta\}$ tense que

$$f(t, c_1, \beta(\tau_{t,\alpha(t),\omega}), c_1) \geq f(t, c_1, c_2 + \|\psi\|_1, c_1) \geq 0 = \alpha'(t), \quad \text{en virtude de (3.85)},$$

e

$$f\left(t, c_2 + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\, ds, c_1, \beta\right) \leq \psi(t) = \beta'(t), \quad \text{en virtude de (3.86)}.$$

En consecuencia, α e β son sub e sobresolución para o problema (3.57), independientemente da elección da función τ. Ademais, $\alpha \leq \beta$ en I. □

Sub e sobresolucións lineares para o caso non limitado

Nesta epígrafe pretendemos salientar os seguintes feitos:

1. Aínda que atopar sub e sobresolucións acopladas non é, en xeral, unha tarefa fácil e moitas veces precisa de gran cantidade de experiencia matemática, tamén é certo, como amosaremos, que unha gran cantidade de problemas interesantes poden ser estudados simplemente con sub e sobresolucións lineares.

2. Os resultados das Seccións 3.3.2 e 3.3.3 son válidos para problemas con singularidades, isto é, ecuacións nas que o segundo membro en (3.57) pode *explotar* para certos valores de x. Esta é unha consecuencia interesante de que as nosas hipóteses só teñen que satisfacerse nos intervalos determinados polas sub e sobresolucións.

Así pois, consideremos o problema (3.57) e supoñamos que se satisface o seguinte conxunto de hipóteses:

(A_1) $0 < r \leq L$ e $k : I_- \to \mathbb{R}$ é continua e crecente.

(A_2) Para a función $\tau : I_0 \times [k(t_0), \infty) \times \mathcal{C}(I) \to I$ existe $\overline{r} \in (0, r]$ de tal xeito que para todo $x \in [k(t_0), \infty)$, toda $\gamma \in \mathcal{C}(I)$, e case todo $t \in I_0$ temos

$$\delta(t) = \text{mín}\{t_0 - \overline{r}, t - r\} \leq \tau_{t,x,\gamma} \leq t_0 + L. \tag{3.87}$$

(A_3) Sexa $\Omega = \{\gamma \in \mathcal{C}(I) \, : \, \gamma \geq k(t_0 - r) \text{ en } I\}$, e supoñamos que

$$f : Dom(f) \subset I_0 \times [k(t_0), \infty) \times (k(t_0 - r), \infty) \times \Omega \longrightarrow [0, \infty)$$

é decrecente respecto da segunda e a terceira variables e crecente respecto da cuarta. Ademais, supoñamos que, ou ben

$$Dom(f) = I_0 \times [k(t_0), \infty) \times (k(t_0 - r), \infty) \times \Omega$$

ou

$$Dom(f) = I_0 \times (k(t_0), \infty) \times (k(t_0 - r), \infty) \times \Omega.$$

(A_4) O operador $\Lambda : \mathcal{C}(I) \longrightarrow [0, \infty)$ é crecente.

A primeira desigualdade en (3.87) evita que o argumento desviado $\tau_{t,x,\gamma}$ tome o valor $t_0 - r$ se $t \neq t_0$, permitindo así que a solución tome valores singulares en $t_0 - r$. Isto quedará máis claro nun exemplo posterior.

Pola conveniencia do lector, resaltamos que a función δ definida en (3.87) pode ser descrita a cachos como

$$\delta(t) = \begin{cases} t - r, & \text{para } t \in [t_0, t_0 + r - \bar{r}], \\ \\ t_0 - \bar{r}, & \text{para } t \in [t_0 + r - \bar{r}, t_0 + L], \end{cases}$$

e $\delta(t) \in I_-$ para todo $t \in I_0$.

A continuación presentaremos o resultado principal desta epígrafe, no cal se establecen condicións suficientes para que o seguinte par de funcións sexan, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (3.57):

$$\alpha(t) = \begin{cases} k(t), & \text{para } t \in I_-, \\ \\ m_\alpha(t-t_0) + k(t_0), & \text{para } t \in I_0; \end{cases} \tag{3.88}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} k(t) + n_\beta, & \text{para } t \in I_-, \\ \\ m_\beta(t-t_0) + k(t_0) + n_\beta, & \text{para } t \in I_0. \end{cases} \tag{3.89}$$

Proposición 3.3.11. *Supoñamos que se satisfacen as condicións $(A_1)-(A_4)$, e asumamos que existen $m_\alpha, m_\beta, n_\beta \in [0,\infty)$ de tal xeito que $m_\alpha \le m_\beta$ e se cumplen as seguintes condicións:*

$$\Lambda(m_\beta L + k(t_0) + n_\beta) \le n_\beta; \tag{3.90}$$

$$f(t, k(t_0) + n_\beta, k(\delta(t)), m_\beta L + k(t_0) + n_\beta) \le m_\beta \quad \textit{para c.t.p. } t \in I_0\ ; \tag{3.91}$$

$$m_\alpha \le f(t, m_\alpha L + k(t_0), m_\beta L + k(t_0) + n_\beta, k(t_0 - r)) \quad \textit{para c.t.p. } t \in I_0. \tag{3.92}$$

En tal caso as funcións α e β definidas en (3.88) e (3.89) son, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (3.57), segundo as dúas definicións 3.3.2 e 3.3.7.

En particular, se se cumpren as condicións (H_2), (H_3), e (H_4) no Teorema 3.3.3 entón (3.57) ten cuasisolucións extremais en $[\alpha,\beta]^+$, e se se cumpren as restantes condicións no Teorema 3.3.5, entón (3.57) ten unha única solución en $[\alpha,\beta]^+$ (e o mesmo é certo se se satisfacen as condicións dos teorema 3.3.8 e 3.3.9).

Proba. Consideraremos só a Definición de sub e sobresolución 3.3.2, pois a proba é análoga para a Definición 3.3.7. Mostraremos que β é unha sobresolución (cando se acopla con α).

En primeiro lugar, para todo $t \in I_0$ temos

$$\alpha(\tau_{t,\beta(t),\beta}) \ge \alpha(\delta(t)) = k(\delta(t)),$$

polo que para case todo $t \in I_0$ tense que

$$f(t, \beta(t), \alpha(\tau_{t,\beta(t),\beta}), \beta) \le f(t, k(t_0) + n_\beta, k(\delta(t)), m_\beta L + k(t_0) + n_\beta) \le m_\beta = \beta'(t),$$

en virtude de (3.91).

En segundo lugar, a desigualdade (3.90) garante para todo $s \in I_-$ que

$$\Lambda(\beta) + k(s) \le \Lambda(m_\beta L + k(t_0) + n_\beta) + k(s) \le n_\beta + k(s) = \beta(s).$$

Argumentos similares empregando (3.92) mostran que α é unha subsolución (acoplada con β). □

As seguintes proposicións proporciónannos un xeito sinxelo de comprobar que existen sub e sobresolucións lineares. A súa proba é sinxela, e polo tanto omitímola.

Proposición 3.3.12. *(Sobresolucións) Supoñamos que se cumplen $(A_1)-(A_4)$. Se*

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{f(t,k(t_0)+z,k(\delta(t)),z\,L+k(t_0)+z)}{z} < 1 \quad \textit{case uniformemente en } t \in I_0 \tag{3.93}$$

e

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{\Lambda(zL+k(t_0)+z)}{z} < 1, \tag{3.94}$$

entón (3.90) e (3.91) cúmprense para algún $m_\beta > 0$ e $n_\beta = m_\beta$.

Proposición 3.3.13. *(Subsolucións) Supoñamos que se cumplen $(A_1)-(A_4)$ e que (3.90) e (3.91) se satisfacen para algún $m_\beta > 0$ e $n_\beta \geq 0$.*

Entón (3.92) cúmprese con $m_\alpha = 0$ se $Dom(f) = I_0 \times [k(t_0),\infty) \times (k(t_0)-r,\infty)$, ou con algún $m_\alpha \in (0,m_\beta)$ se

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{f(t,zL+k(t_0),m_\beta L+k(t_0)+n_\beta,k(t_0-r))}{z} > 1 \quad \textit{case uniformemente en } I_0. \tag{3.95}$$

Un exemplo

Sexa $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha enumeración dos números racionais en $[0,\infty)$ e consideremos a función

$$\phi(x) = 1 - \sum_{\{n\in\mathbb{N}\,:\,q_n\leq x\}} 2^{-n}, \quad x \in [0,\infty),$$

que, como ocorría coa función ϕ_1 do exemplo da Sección 3.3.2, é decrecente, continua exactamente en cada número irracional do intervalo $[0,\infty)$, e satisface que $0<\phi\leq 1$ en $[0,+\infty)$.

Consideramos o seguinte problema xeral con argumentos desviados dependentes funcionalmente da incógnita, singularidades posibles en $x=0$ e $x=1/2$, e discontinuidades respecto de todos os seus argumentos (os corchetes $[\cdot]$ significan parte enteira):

$$\begin{aligned} x'(t) &= \varepsilon + f_1(t) + f_2(t)\phi(t+x(t)) + f_3(t)\left[\frac{1}{(x(t)-1/2)^\mu}\right] \\ &\quad + \frac{f_4(t)}{x^\nu\left(t+\sigma_1(x(t))+\sigma_2\left(x(0)+x(t)+x(1)\right)\right)} \\ &\quad + f_5(t)g\left(x\left(t+\sigma_1(x(t))+\sigma_2\left(x(0)+x(t)+x(1)\right)\right)\right),\ t\in I_0=[0,1], \end{aligned} \tag{3.96}$$

$$x(t) = \varphi\left(\int_{-1/2}^{1} \omega(s)\,x(s)ds\right) + t + 1/2 \quad \text{para todo } t \in I_- = [-1/2,0]. \tag{3.97}$$

Mostramos na seguinte proposición algunhas condicións que implican a existencia de sub e sobresolucións lineares para o problema (3.96)–(3.97).

Proposición 3.3.14. *O problema (3.96)–(3.97) ten sub e sobresolucións acopladas dadas polas expresións (3.88) e (3.89) con $m_\beta = n_\beta$ se se cumplen as seguintes condicións:*

(B_1) *$\varepsilon, \mu, \nu \in (0,\infty)$;*

(B_2) *$f_i \in L^{\infty}(I_0,[0,\infty))$, $i=1,\dots,5$;*

(B_3) *$\sigma_i : [0,\infty) \to [-1/4,0]$, $i=1,2$;*

(B_4) *$g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é decrecente;*

(B_5) *ω é non negativa e integrable en I;*

(B_6) *$\varphi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ é crecente e*

$$\text{ou ben } \omega = 0 \text{ c.p.d. en } I \text{ ou ben } \lim_{z\to+\infty} \frac{\varphi(z)}{z} < \frac{1}{3\int_I \omega}. \tag{3.98}$$

Proba. O problema (3.96)–(3.97) é un caso particular de (3.57). Para ver isto, consideramos $r=1/2$ e $k(t)=t+1/2$ para todo $t \in I_-$, e definimos τ, f e Λ como segue: para todo $(t,x,\gamma) \in I_0 \times [0,\infty) \times \mathcal{C}(I)$ poñemos

$$\tau(t,x,\gamma) = t + \sigma_1(x) + \sigma_2\left(\gamma(0)+\gamma(t)+\gamma(1)\right), \tag{3.99}$$

para $(t,x,y) \in I_0 \times (1/2,\infty) \times (0,\infty)$ definimos

$$f(t,x,y) = \varepsilon + f_1(t) + f_2(t)\phi(t+x) + f_3(t)\left[\frac{1}{(x-1/2)^{\mu}}\right] + \frac{f_4(t)}{y} + f_5(t)g\left(y\right),$$

e, finalmente, $\Lambda(\gamma) = \varphi\left(\int_I \omega(s)\gamma(s)ds\right)$ para todo $\gamma \in \mathcal{C}(I)$.

Obsérvese que $\tau(t,x,\gamma) \in [t-1/2,t]$ para todo $(t,x,\gamma) \in I_0 \times [0,\infty) \times \mathcal{C}(I)$, $f(t,x,y) \geq \varepsilon$ para todo $(t,x,y) \in I_0 \times (1/2,\infty) \times (0,\infty)$, e $\Lambda(\gamma) \geq 0$ para todo $\gamma \in \mathcal{C}(I)$.

As condicións sobre σ_i $(i=1,2)$ garanten que (3.87) satisfácese, por exemplo, para $\bar{r}=1/4$, e entón $k(\delta(t)) = \text{mín}\{t,1/4\}$ para $t \in I_0$. As restantes condicións en (A_1)–(A_4) son consecuencias inmediatas das hipóteses $(B_1)-(B_6)$.

Agora mostraremos que as condicións da Proposición 3.3.12 se cumplen. Primeiro, nótese que existe $c>0$ tal que para case todo $t \in I_0$ e todo $z>0$ tense que

$$\frac{f(t,z+1/2,k(\delta(t)))}{z} \leq \frac{c}{z} + c\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z^{\mu}}\right] + \frac{c}{zk(\delta(t))} + \frac{c\,g\left(k(\delta(t))\right)}{z},$$

polo que existe $d>0$ tal que para case todo $t \in I_0$ e todo $z>0$ tense que

$$0 \leq \frac{f(t,z+1/2,k(\delta(t)))}{z} \leq \frac{d}{z} + d\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z^{\mu}}\right],$$

o cal implica (3.93). Á súa vez, se $z > 1/2$ e $\omega > 0$ nun conxunto de medida positiva de I temos

$$0 \leq \frac{\Lambda(2z+1/2)}{z} \leq \frac{\Lambda(3z)}{z} = \frac{\varphi(3z \int_I \omega)}{3z \int_I \omega} 3 \int_I \omega,$$

polo que (3.94) séguese de (3.98). En consecuencia, a Proposición 3.3.12 garante que existe $m_\beta > 0$ tal que (3.90) e (3.91) cúmplense con $n_\beta = m_\beta$. Agora é suficiente con fixar $m_\alpha \in (0, \varepsilon)$ para que (3.92) se satisfaga, e entón podemos aplicar a Proposición 4.26. (Obsérvese que aínda non se fixo ningunha suposición sobre a continuidade ou a monotonía das funcións σ_i.) $\square$

Agora imos aplicar o Teorema 3.3.3 para probar a existencia de cuasisolucións extremais para o noso problema, cuasisolucións que estarán localizadas entre a sub e a sobresolución cuxa existencia acabamos de probar. Para facelo, escollemos $\hat{r} = 1/2$ para definir $[\alpha, \beta]^+$ e impoñemos as seguintes hipóteses adicionais:

Proposición 3.3.15. *Asumamos* $(B_1) - (B_6)$ *e*

(B_7) *A función*

$$t \in I_0 \longmapsto (m_\alpha t)^{-\mu} f_3(t) + \max\{t^{-\nu}, 2^\nu\} f_4(t)$$

é integrable en I_0*,* σ_1 *é crecente e* σ_2 *é decrecente.*

Entón o problema (3.96)–(3.97) ten cuasisolucións extremais en $[\alpha, \beta]^+$*.*

Proba. *Afirmación 1– Cúmprese* (H_2). Para $t \in (0,1]$ e $x \geq \alpha(t) = m_\alpha t + 1/2$, temos

$$\left[\frac{1}{(x-1/2)^\mu}\right] \leq \frac{1}{(x-1/2)^\mu} \leq m_\alpha^{-\mu} t^{-\mu}, \tag{3.100}$$

e para todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, temos

$$\gamma_1(\tau(t, x, \gamma_2)) \geq \gamma_1(t - 1/2) \geq \alpha(t - 1/2) \geq \min\{t, 1/2\},$$

polo que

$$(\gamma_1(\tau(t, x, \gamma_2)))^{-\nu} \leq \max\{t^{-\nu}, 2^\nu\}. \tag{3.101}$$

Deducimos de (3.100), (3.101), e das propiedades das funcións ϕ e g, que para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, temos

$$0 \leq \varepsilon \leq f(t, x, \gamma_1(\tau(t, x, \gamma_2)) \leq \psi(t),$$

onde para case todo $t \in I_0$

$$\psi(t) = \varepsilon + f_1(t) + f_2(t) + m_\alpha^{-\mu} t^{-\mu} f_3(t) + \max\{t^{-\nu}, 2^\nu\} f_4(t) + g(0) f_5(t). \tag{3.102}$$

Resumindo, a condición (H_2) cúmprese como consecuencia de (B_7).

Afirmación 2 – Cúmprese $(H_3)-(a)$. Temos que probar que para todo $x \in [\alpha(0), \beta(1)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, a composición

$$t \in \{t \in I_0 \,:\, \alpha(t) \le x \le \beta(t)\} \longmapsto f(t, x, \gamma_1(\tau(t, x, \gamma_2))),$$

é medible. É trivial para $x = \alpha(0)$ ou $x = \beta(1)$, xa que os correspondentes dominios son conxuntos de medida nula, polo que nos ocuparemos do caso $x \in (\alpha(0), \beta(1))$. Lembramos que as funcións monótonas son Borel–medibles, e que a suma ou composición de funcións Borel–medibles é Borel–medible. Para $t \in (0, 1]$ temos

$$\gamma_1(\tau(t, x, \gamma_2)) \ge \gamma_1(t - 1/2) > 0,$$

e en consecuencia as aplicacións

$$t \longmapsto \frac{1}{{\gamma_1}^{\nu}\left(t + \sigma_1(x) + \sigma_2\left(\gamma_2(0) + \gamma_2(t) + \gamma_2(1)\right)\right)}$$

e

$$t \longmapsto g\left(\gamma_1\left(t + \sigma_1(x) + \sigma_2\left(\gamma_2(0) + \gamma_2(t) + \gamma_2(1)\right)\right)\right)$$

son Borel–medibles, o cal garante que

$$\begin{aligned} f(t, x, \gamma_1(\tau_{t,x,\gamma_2})) \quad &= \quad \varepsilon + f_1(t) + f_2(t)\phi(t + x) + f_3(t)\left[\frac{1}{(x - 1/2)^{\mu}}\right] \\ &\quad + \frac{f_4(t)}{{\gamma_1}^{\nu}\left(\tau_{t,x,\gamma_2}\right)} + f_5(t) g\left(\gamma_1\left(\tau_{t,x,\gamma_2}\right)\right), \end{aligned}$$

é medible no dominio $\{t \in I_0 \,:\, \alpha(t) \le x \le \beta(t)\}$.

Afirmación 3 – Cúmprese $(H_3)-(b)$. Para case todo $t \in I_0$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, a aplicación

$$x \in [\alpha(t), \beta(t)] \longmapsto f(t, x, \gamma_1(\tau(t, x, \gamma_2))),$$

é continua en $[\alpha(t), \beta(t)]$ excepto, ao sumo, en

1. $x = q_n - t$ para algún $n \in \mathbb{N}$;
2. $x = n^{-1/\mu} + 1/2$ para algún $n \in \mathbb{N}$; ou
3. $x = v_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, onde $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucesión de todos os puntos de discontinuidade de σ_1; ou
4. $x = w_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, onde $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucesión de todos os puntos de discontinuidade da función decrecente

$$x \in [0, \infty) \longmapsto g(\gamma_1(t + \sigma_1(x) + \sigma_2(\gamma_2(0) + \gamma_2(t) + \gamma_2(1)))).$$

En consecuencia, todos os posibles puntos de discontinuidade de $f(t,\cdot,\gamma_1(\tau(t,\cdot,\gamma_2)))$ caen sobre unha unión numerable de rectas do plano (t,x) con pendente non positiva. Por outra banda sabemos que $f \geq \varepsilon > 0$ no seu dominio, e polo tanto a condición $(H_3)-(b)$ satisfácese.

Obsérvese que (H_4) tamén se cumpre en virtude de (B_4), (B_6) e (B_7), polo que podemos aplicar o Teorema 3.3.3 para asegurar que o noso problema ten cuasisolucións extremais en $[\alpha,\beta]^+$. $\square$

Finalmente, imos dar condicións adicionais para que o noso problema cumpla as hipóteses do Teorema 3.3.8, asegurando así a existencia dunha solución única no intervalo $[\alpha,\beta]^+$.

Proposición 3.3.16. *Asumimos* $(B_1)-(B_7)$ *e*

(B_8) *A función*

$$t \in I_0 \longmapsto t^{-\nu-1}f_4(t)$$

é integrable en I_0*;*

(B_9) *Existe* $L_g \geq 0$ *tal que para* $0 \leq u \leq v$ *temos*

$$g(u)-g(v) \leq L_g(v-u);$$

(B_{10}) *A función* ψ *dada en (3.102) é esencialmente acotada;*

(B_{11}) *Existe* $L_{\sigma_2} \geq 0$ *tal que para* $0 \leq x \leq y$ *temos*

$$\sigma_2(x)-\sigma_2(y) \leq L_{\sigma_2}(y-x);$$

(B_{12}) *Existe* $L_\varphi \geq 0$ *tal que para* $0 \leq x \leq y$ *temos*

$$\varphi(y)-\varphi(x) \leq L_\varphi(y-x).$$

Entón o problema (3.96)–(3.97) ten unha solución única en $[\alpha,\beta]^+$ *sempre que*

$$L_\varphi \int_{-1/2}^{1} \omega(s)ds + (1+3\|\tilde{\psi}\|_\infty L_{\sigma_2}) \int_0^1 \left(\nu \max\{s^{-1-\nu}2^{1+\nu}\}f_4(s)+L_g f_5(s)\right) ds < 1, \quad (3.103)$$

onde $\tilde{\psi}=1$ *en* I_- *e* $\tilde{\psi}=\psi$ *en* I_0*, con* ψ *dada en (3.102).*

Proba. *Afirmación 1 – Cúmprese* $(H_5)-(a)$. Obsérvese que para todo $t \in (0,1]$ e todo $x \in [\alpha(t),\beta(t)]$ temos $0 < \alpha(t-1/2) \leq \alpha(\tau(t,x,\beta))$, así que aplicando o Teorema do Valor Medio para u,v tales que $\alpha(\tau(t,x,\beta)) \leq u \leq v \leq \beta(\tau(t,x,\alpha))$ temos que existe $z \in [u,v]$ de tal xeito que

$$u^{-\nu}-v^{-\nu} = \nu z^{-1-\nu}(v-u) \leq \nu\alpha^{-1-\nu}(t-1/2).$$

Ademais, para todo $t \in (0,1/2]$ temos $\alpha(t-1/2)=t$, e para todo $t \in [1/2,1]$ temos

$$\alpha(t-1/2) = m_\alpha(t-1/2)+1/2 \geq 1/2,$$

polo que se $t \in (0,1]$ entón

$$\alpha^{-1-\nu}(t-1/2) \leq \max\{t^{-1-\nu}, 2^{1+\nu}\}.$$

En consecuencia, para todo $t \in (0,1]$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e

$$\alpha(\tau(t,x,\beta)) \leq u \leq v \leq \beta(\tau(t,x,\alpha)),$$

temos

$$f(t,x,u) - f(t,x,v) \leq (\nu \max\{t^{-1-\nu}2^{1+\nu}\}f_4(t) + L_g f_5(t))(v-u),$$

e polo tanto $(H_5)-(a)$ cúmprese como consecuencia de $(B_8)-(B_{12})$ e escollendo

$$L_1(t) = \nu \max\{t^{-1-\nu}2^{1+\nu}\}f_4(t) + L_g f_5(t) \quad \text{para case todo } t \in I_0.$$

Afirmación 2 – Cúmprese $(H_5)-(b)$. Seguindo o enunciado do Teorema 3.3.8 podemos definir $\tilde{\psi} = 1$ en I_-, e $\tilde{\psi} = \psi$ en I_0, onde ψ é a dada en (3.102). As condicións $(B_8)-(B_{12})$ garanten que $\tilde{\psi} \in L^\infty(I)$. Agora, para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]^+$, $i = 1, 2$, con $\gamma_1 \leq \gamma_2$ en I temos

$$\begin{aligned}\int_{\tau_{t,x,\gamma_2}}^{\tau_{t,x,\gamma_1}} \tilde{\psi}(s)ds &\leq \|\tilde{\psi}\|_\infty(\sigma_2(\gamma_1(0)+\gamma_1(t)+\gamma_1(1)) - \sigma_2(\gamma_2(0)+\gamma_2(t)+\gamma_2(1))) \\ &\leq 3\|\tilde{\psi}\|_\infty L_{\sigma_2} \max_{s\in I}(\gamma_2(s)-\gamma_1(s)),\end{aligned}$$

polo que $(H_5)-(b)$ cúmprese con $L_3(t) = 3\|\tilde{\psi}\|_\infty L_{\sigma_2}$ en I_0.

$(H_5)-(c)$ satisfácese con λ substituído por $L_\varphi \int_I \omega$, e as propiedades de monotonía das funcións que interveñen implican que (H_6) cúmprese con $L_4 = 0$.

O Teorema 3.3.8 asegura agora que o problema (3.96)–(3.97) ten unha única solución en $[\alpha, \beta]^+$ sempre que se satisfaga (3.103). □

Remarcamos o feito de que σ_i, $i = 1, 2$, poden ser discontinuas en subconxuntos densos de $[0, \infty)$, e que a forma específica das dependencias funcionais no noso problema, isto é,

$$x(0) + x(t) + x(1) \quad \text{e} \quad \int_{-1/2}^{1} \omega(s)x(s)ds,$$

non é esencial, pois a única característica importante é o feito de que sexan crecentes con respecto de $x(\cdot)$.

Os resultados desta sección son moi xerais, polo que imos rematar mostrando un exemplo de caso particular do problema (3.96)–(3.97) que satisface as condicións da Proposición 3.3.16.

Exemplo 3.3.17. *Para $i = 1, \ldots, 5$ sexan $C_i \subset [0,1]$ conxuntos de tipo Cantor con medidas de Lebesgue $M_i > 0$, e denotemos por χ_i as respectivas funcións características destes conxuntos.*

Por simplicidade de cálculo, supoñemos que $C_4 \subset [0,1/2]$.

Se $\sigma : [0,\infty) \longrightarrow \left[\frac{-1}{2}, 0\right]$ *é crecente e* $M_4 + M_5 < 1$, *entón o seguinte problema con discontinuidades, singularidades e argumentos desviados dependentes da incógnita ten unha única solución entre certas sub e sobresolucións lineares:*

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 + \chi_1(t) + \chi_2(t)\phi(t + x(t)) + t^3\chi_3(t)\left[\frac{1}{(x(t)-1/2)^2}\right] \\ &\quad + \frac{t^5\chi_4(t)}{4x^4\left(t+\sigma(x(t))\right)} + \frac{\chi_5(t)}{x\left(t+\sigma(x(t))\right)+1}, \quad t \in I_0 = [0,1], \end{aligned} \tag{3.104}$$

$$x(t) = t + 1/2 \quad \textit{para todo } t \in I_- = [-1/2, 0]. \tag{3.105}$$

Obsérvese que a ecuación diferencial é singular en $x = 1/2$ *(debido ao cuarto termo no segundo membro de (3.104)), e tamén é singular en* $x = 0$ *sempre que* $\sigma(1/2) = -1/2$ *(debido ao quinto termo). A condición inicial (3.105) forza á solución única a tomar o valor singular* $x(0) = 1/2$. *Tamén pode ser* $x(t+\sigma(x(t))) = 0$ *para* $t = 0$ *se* σ *é constantemente igual a* $-1/2$, *o que fai que a solución acade o valor singular debido ao quinto sumando en (3.104).*

3.3.6. Nonlinearidades con signo non constante

O obxectivo desta sección será mostrar que eliminando a dependencia funcional da función desviante τ podemos considerar ecuacións diferenciais con parte non linear de signo non constante e condicións iniciais e sub e sobresolucións non necesariamente monótonas.

Así pois, consideremos o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x(t), x(\tau_{t,x(t)}), x) \quad \text{en c.t.p. } t \in I_0 = [t_0, t_0 + L], \\ \\ x(t) = \Lambda(x) + k(t) \quad \text{para todo } t \in I_- = [t_0 - r, t_0]. \end{array} \right. \tag{3.106}$$

É importante sinalar que as definicións previas de cuasisolucións dadas en 3.3.1 e 3.3.6 coinciden cando se adaptan ao caso particular do problema (3.106), e o mesmo ocorre coas dúas nocións de sub e sobresolucións introducidas nas definicións 3.3.2 e 3.3.7.

En primeiro lugar mostraremos o noso novo resultado de existencia de cuasisolucións extremais para o problema (3.106).

Teorema 3.3.18. *Supoñamos que, ou ben* $r = 0$ *e* k *é un número real fixo, ou ben* $r > 0$ *e* $k : I_- \longrightarrow \mathbb{R}$ *é continua en* I_-.

Asumimos as seguintes hipóteses:

($\hat{H}_1$) *(Sub e sobresolucións) Existen α e β que son, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (3.106), con $\alpha \leq \beta$ en I.*

($\hat{H}_2$) *(Estimación en L^1) Existe $\psi \in L^1(I_0)$ de tal xeito que para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, e toda $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ en I, tense*

$$|f(t, x, \gamma(\tau(t, x)), \gamma)| \leq \psi(t),$$

e poñamos

$$[\alpha, \beta] = \{\gamma \in \mathcal{C}(I) \,:\, \alpha \leq \gamma \leq \beta \text{ en } I,\ \gamma_{|I_0} \in AC(I_0),\ e\ |\gamma'| \leq \psi \text{ c.p.d. en } I_0\}.$$

($\hat{H}_3$) *(Dependencias respecto de t e $x(t)$)*

(a) *(Medibilidade respecto de t) Para todo $x \in [\min_{t \in I_0} \alpha(t), \max_{t \in I_0} \beta(t)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, son medibles as composicións*

$$t \in \{s \in I_0 \,:\, \alpha(s) \leq x \leq \beta(s)\} \longmapsto f(t, x, \gamma_1(\tau(t, x)), \gamma_2)$$

e

$$t \in I_0 \longmapsto f(t, \gamma_2(t), \gamma_1(\tau(t, \gamma_2(t))), \gamma_2);$$

(b) *(Discontinuidades admisibles respecto de $x(t)$) Para case todo punto $t \in I_0$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, a función $f(t, \cdot, \gamma_2(\tau(t, \cdot)), \gamma_1)$ é continua en $[\alpha(t), \beta(t)] \setminus K(t)$, onde $K(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n(t)$ e pode depender da elección de γ_i, e para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in K_n(t)$ tense*

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}} f(t, x + \varepsilon B, \gamma_2(\tau_{t, x+\varepsilon B}), \gamma_1) \bigcap DK_n(t, x)(1) \subset \{f(t, x, \gamma_2(\tau_{t,x}), \gamma_1)\},$$

onde B e $\overline{\text{co}}$ son como en (2.3).

($\hat{H}_4$) *(Dependencias funcionais monótonas)*

(a) *Para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$ a función $f(t, x, \cdot, \gamma)$ é decrecente en $[\min_{t \in I} \alpha(t), \max_{t \in I} \beta(t)]$; e para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todo $y \in [\min_{t \in I} \alpha(t), \max_{t \in I} \beta(t)]$ o operador $f(t, x, y, \cdot)$ é crecente en $[\alpha, \beta]$, isto é, para $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, a relación $\gamma_1 \leq \gamma_2$ en I implica $f(t, x, y, \gamma_1) \leq f(t, x, y, \gamma_2)$;*

(b) *Λ é crecente en $[\alpha, \beta]$.*

Entón o problema (3.106) ten cuasisolucións extremais $v_*, w^* \in [\alpha, \beta]$, que ademais satisfacen

$$(v_*, w^*) = \min_{\preceq} \{(v, w) \,:\, (w, v) \text{ son sub e sobresolucións en } [\alpha, \beta] \text{ para (3.106)}\}.$$

Proba. Basta con repetir paso por paso a proba do Teorema 3.3.3, considerando o espazo $X = \mathcal{C}(I)$ equipado coa súa orde parcial usual, o subconxunto

$$\hat{Y} = \{\gamma \in X \, : \, \gamma_{|I_+} \in AC(I_+), \; |\gamma'| \leq \psi \text{ c.p.d.}\},$$

e o intervalo $[\alpha, \beta]$ introducido no enunciado. Agora, consideramos o operador multivaluado $\mathcal{A} : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \longrightarrow 2^{[\alpha,\beta]} \setminus \emptyset$ definido do seguinte xeito: para cada par $(\gamma_1, \gamma_2) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$, $\mathcal{A}(\gamma_1, \gamma_2)$ será o conxunto de solucións en $[\alpha, \beta]$ do problema de valor inicial

$$z'(t) = f(t, z(t), \gamma_2(\tau_{t,z(t)}), \gamma_1) \text{ c.p.d. en } I_0, \quad z(t) = \Lambda(\gamma_1) + k(t) \text{ en } I_-. \tag{3.107}$$

A diferenza máis salientable con respecto á proba do Teorema 3.3.3 é que agora para probar a monotonía mixta dos operadores $A_\pm$ non precisamos da monotonía das funcións de $[\alpha, \beta]$. En efecto, se $\gamma_1, \overline{\gamma}_1, \gamma_2 \in [\alpha, \beta]^+$ son de tal xeito que $\gamma_1 \leq \overline{\gamma}_1$, poñemos $\xi = A_+(\gamma_1, \gamma_2)$, $\overline{\xi} = A_+(\overline{\gamma}_1, \gamma_2)$ e reescribimos agora (3.61), obtemos

$$\xi'(t) = f(t, \xi(t), \gamma_2(\tau_{t,\xi(t)}), \gamma_1) \leq f(t, \xi(t), \gamma_2(\tau_{t,\xi(t)}, \gamma_2) \;\; \text{c.p.d. en } I_0. \tag{3.108}$$

É dicir, obtemos a misma conclusión que en (3.61), coa salvedade de que agora só empregamos a monotonía da función f e non precisamos ningunha monotonía na función γ_2. $\square$

A continuación daremos un resultado de unicidade de solución en $[\alpha, \beta]$ para o problema (3.106).

Teorema 3.3.19. *Asumamos que se cumplen as hipóteses do Teorema 3.3.18, e supoñamos que se satisface o seguinte grupo de condicións:*

$(\hat{H}_5)$ *(Condicións de Lipschitz laterais para as dependencias funcionais)*

(a) Existen L_1, $L_2 \in L^1(I_0, [0, \infty))$ tales que para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, as relacións $\alpha(\tau_{t,x}) \leq u \leq v \leq \beta(\tau_{t,x})$ e $\gamma_1 \leq \gamma_2$ en I implican

$$f(t, x, u, \gamma_2) - f(t, x, v, \gamma_1) \leq L_1(t)(v - u) + L_2(t) \max_{s \in I}(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)); \tag{3.109}$$

(b) Existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que para $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, con $\gamma_1 \leq \gamma_2$ en I, tense

$$\Lambda(\gamma_2) - \Lambda(\gamma_1) \leq \lambda \max_{s \in I}(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)).$$

$(\hat{H}_6)$ *(Condición de Lipschitz lateral con respecto de $x(t)$)*

Existe $L_3 \in L^1(I_0, [0, \infty))$ tal que para case todo $t \in I_0$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, con $\gamma_i = c_i + k$ en I_- para algunhas constantes $c_i \in \mathbb{R}$, a relación $\alpha(t) \leq x \leq y \leq \beta(t)$ implica que

$$f(t, y, \gamma_2(\tau(t, y)), \gamma_1) - f(t, x, \gamma_2(\tau(t, x)), \gamma_1) \leq L_3(t)(y - x). \tag{3.110}$$

En tal caso, o problema (3.106) ten unha única solución en $[\alpha, \beta]$ sempre que

$$\lambda + \int_{t_0}^{t_0+L} L_1(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+L} L_2(s)ds + \int_{t_0}^{t_0+L} L_3(s)ds < 1. \tag{3.111}$$

Proba. Basta con repetir paso por paso a proba do Teorema 3.3.5 e observar que os cálculos feitos alí resultan máis sinxelos neste caso e non dependen da monotonía de v_* ou w^*. En efecto, para case todo $t \in I_0$ temos

$$\begin{aligned}
p'(t) &= f(t, w^*(t), v_*(\tau_{t,w^*(t)}), w^*) - f(t, v_*(t), v_*(\tau_{t,v_*(t)}), w^*) \\
&\quad + f(t, v_*(t), v_*(\tau_{t,v_*(t)}), w^*) - f(t, v_*(t), w^*(\tau_{t,v_*(t)}), v_*) \\
&\leq L_3(t)(w^*(t) - v_*(t)) + L_1(t)(w^*(\tau_{t,v_*(t)}) - v_*(\tau_{t,v_*(t)})) + L_2(t) \max_{s \in I} p(s) \\
&\leq (L_1(t) + L_2(t) + L_3(t)) \max_{s \in I} p(s).
\end{aligned}$$

□

Observación 3.3.20. *Os Teoremas 3.3.18 e 3.3.19 melloran os resultados dados en [51], incluso para o caso continuo, porque, a diferencia do que ocorre no artigo citado, os nosos resultados permiten que f cambie de signo e que $\tau(t, \cdot)$ non sexa monótona.*

Remataremos esta sección cun exemplo que, ata o que nós sabemos, non está cuberto por ningún resultado da literatura.

Exemplo 3.3.21. *Consideremos o problema*

$$\begin{cases} x'(t) = -f_1(t) x^n (\operatorname{sen}(t^{-1} + f_2(t)x)) \ \textit{para c.t.p. } t \in I_0 = [0,1], \\[2ex] x(t) = k(t) \ \textit{para } t \in I_- = [-1, 0], \end{cases} \tag{3.112}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, f_1 é unha función integrable e non negativa con $\|f_1\|_1 \leq 1$, f_2 e $f_1 f_2$ son integrables e

$$k(t) = \begin{cases} t^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{t}\right), & \textit{se } -1 \leq t < 0, \\[2ex] 0, & \textit{se } t = 0. \end{cases}$$

Finalmente, asumimos que a aplicación

$$t \in [0,1] \longmapsto \left(\int_0^t f_1(s)\, ds \right)^n$$

é lipschitziana.

Obsérvese que neste exemplo tanto a función de arranque como a función que define a ecuación cambian signo.

Caso 1– n impar. É sinxelo comprobar que as condicións $(\hat{H}_1) - (\hat{H}_6)$ cúmprense con

1. $\alpha(t) = -\int_0^t f_1(s)\,ds = -\beta(t)$, *para* $t \in [0,1]$, *e* $\alpha = \beta = k$ *en* $[-1,0]$;

2. $\psi = f_1$;

3. $L_1 = n f_1$, $L_2 = 0$, $L_3 = \|(\beta^n)'\|_\infty f_1 |f_2|$ *e* $\lambda = 0$.

Así, o Teorema 3.3.19 garante que o problema (3.112) ten unha única solución no intervalo $[\alpha, \beta]$ *sempre que*

$$n\|f_1\|_1 + \|(\beta^n)'\|_\infty \|f_1 f_2\|_1 < 1.$$

Por conveniencia do lector comprobaremos a hipótese $(\hat{H}_6)$: *para case todo* $t \in I_0$, *toda* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *con* $\gamma = k$ *en* I_-, *e* x, y *tales que* $\alpha(t) \le x \le y \le \beta(t)$ *temos*

$$f_1(t)[\gamma^n(\operatorname{sen}(t^{-1} + f_2(t)x)) - \gamma^n(\operatorname{sen}(t^{-1} + f_2(t)y))] = f_1(t) \int_{\operatorname{sen}(t^{-1}+f_2(t)y)}^{\operatorname{sen}(t^{-1}+f_2(t)x)} (\gamma^n)'(s)\,ds,$$

onde $(\gamma^n)' = (k^n)' = (\beta^n)'$ *c.p.d. en* $[-1,0]$ *e para case todo* $s \in [0,1]$ *temos*

$$(\gamma^n)'(s) = n(\gamma^{n-1})'(s)\gamma'(s) \le (\beta^n)'(s).$$

En consecuencia, para case todo $t \in I$, *toda* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *con* $\gamma = k$ *en* I_-, *e* x, y *tales que* $\alpha(t) \le x \le y \le \beta(t)$ *temos*

$$f_1(t)[\gamma^n(\operatorname{sen}(t^{-1} + f_2(t)x)) - \gamma^n(\operatorname{sen}(t^{-1} + f_2(t)y))] \le \|(\beta^n)'\|_\infty f_1(t)|f_2(t)|(y - x),$$

probando así que $(\hat{H}_6)$ *cúmprese con* $L_3 = \|(\beta^n)'\|_\infty f_1 |f_2|$.

Caso 2 – n par. Neste caso a ecuación diferencial non é monótona con respecto ao argumento funcional, polo que temos que reescribila dun xeito conveniente para poder aplicar os nosos resultados. Para iso seguimos algunhas das ideas descritas na Sección 3.3.4 e escribimos

$$z \in \mathbb{R} \longmapsto z^n = g_1(z) + g_2(z),$$

onde $g_1(z) = z^n \chi_{(-\infty,0)}(z)$ *é decrecente e* $g_2(z) = z^n \chi_{[0,\infty)}(z)$ *é crecente.*

Agora para $(t, x, y, \gamma) \in (0,1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{C}[-1,1]$ *definimos*

$$\tau(t,x) = \operatorname{sen}(t^{-1} + f_2(t)x),$$

e

$$f(t,x,y,\gamma) = -f_1(t)\left(g_1(\gamma(\tau_{t,x})) + g_2(y)\right),$$

polo que a ecuación diferencial de (3.112) convértese en

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\tau_{t,x}), x) \quad \text{para c.t.p. } t \in I_0.$$

Probemos agora que as funcións $\alpha(t) = -\int_0^t f_1(s)\,ds = -\beta(t)$*, para* $t \in [0,1]$*, e* $\alpha = \beta = k$ *en* $[-1,0]$*, definen, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución para o problema sempre que* $\|f_1\|_1 \leq 2^{-1/n}$*. En efecto, para case todo* $t \in [0,1]$ *tal que* $\tau_{t,\alpha(t)} > 0$ *tense*

$$g_1(\alpha(\tau_{t,\alpha(t)})) + g_2(\beta(\tau_{t,\alpha(t)})) = \alpha^n(\tau_{t,\alpha(t)}) + \beta^n(\tau_{t,\alpha(t)}) \leq 2\|f_1\|_1^n \leq 1,$$

e se $\tau_{t,\alpha(t)} \leq 0$ *entón* $g_1(\alpha(\tau_{t,\alpha(t)}))+g_2(\beta(\tau_{t,\alpha(t)})) = k^n(\tau_{t,\alpha(t)}) \leq 1$*. Así, para case todo* $t \in [0,1]$ *temos*

$$\alpha'(t) = -f_1(t) \leq f(t, \alpha(t), \beta(\tau_{t,\alpha(t)}), \alpha).$$

Dun xeito análogo pódese probar que $\beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \alpha(\tau_{t,\beta(t)}), \beta)$ *en c.t.p.* $t \in [0,1]$*. Polo tanto, cúmprense as hipóteses* $(\hat{H}_1) - (\hat{H}_6)$ *do Teorema 3.3.19, con*

1. $\psi = f_1$;

2. $L_1 = L_2 = nf_1$, $\; L_3 = 2\|(\beta^n)'\|_\infty f_1|f_2|$ *e* $\lambda = 0$.

En consecuencia, o problema (3.112) ten unha única solución en $[\alpha, \beta]$ *sempre que*

$$n\|f_1\|_1 + \|(\beta^n)'\|_\infty \|f_1 f_2\|_1 < \frac{1}{2}.$$

Capítulo 4

Problemas de segunda orde con argumentos desviados

O obxectivo do presente capítulo será estudar a existencia e localización de solucións para problemas diferenciais de segunda orde con argumentos desviados. É un feito ben coñecido que os problemas de segunda orde son probablemente os que máis teñen sido estudados na literatura matemática relativa a ecuacións diferenciais, e isto é debido principalmente á idoneidade das ecuacións de orde dúas para a modelaxe de procesos da vida real. Un exemplo disto pode ser o seguinte, no que amosamos tamén a conveniencia de introducir argumentos desviados na formulación inicial.

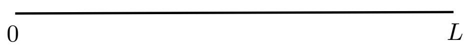
Lembremos que unha modelaxe sinxela da distribución estacionaria de temperaturas sobre un aramio rectilíneo de lonxitude $L > 0$ vén dado pola ecuación diferencial ordinaria de segunda orde

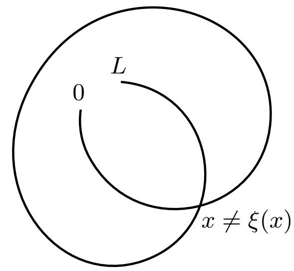
$$u''(x) = f(x, u(x)), \ x \in (0, L), \tag{4.1}$$

xunto con condicións de contorno axeitadas. Agora imaxinemos que retorcemos o aramio de xeito que en certos puntos se produzan solapamentos. Parece razoable entón supoñer que nos puntos de solapamento as temperaturas respectivas inflúan entre si. Isto suxírenos unha revisión da ecuación (4.1) da forma

$$u''(x) = f(x, u(x)) + |x - \xi(x)|\, g(\xi(x), u(\xi(x))), \ x \in (0, L), \tag{4.2}$$

onde $\xi(x)$ representa o punto que solapa ao punto x, no caso de que un tal solapamento exista, ou $\xi(x) = x$ en caso contrario.





Obsérvese que ξ non é, de xeito xeral, unha función continua (o cal implica que o segundo membro en (4.2) non ten porqué ser continuo respecto da variable independente x) e que teremos $\xi(x) < x$ nalgúns puntos e $\xi(x) > x$ noutros, polo que o argumento desviante non é, en xeral, nin un atraso nin un adianto, senón que terá unha forma máis xeral.

Este capítulo está dividido en dúas seccións ben diferenciadas. Na primeira delas estúdiase unha ecuación diferencial que vén definida por unha función de Carathéodory e que inclúe argumentos desviantes tanto no estado como na derivada; o resultado principal para este problema proporcionará a existencia de solucións maximais e minimais en presencia de sub e sobresolucións, usando para este fin técnicas habituais que inclúen a reformulación do problema en termos dun operador completamente continuo e a aplicación posterior do Teorema 1.2.2. Na segunda parte do capítulo permitirase que a función que define a ecuación non sexa continua con respecto aos argumentos nos cales interveñen os desvíos, impoñendo como compensación diversas condicións de monotonía. Os resultados principais para este problema proporcionarán a existencia de cuasisolucions e solucións extremais en presencia de sub e sobresolucións, empregando como técnica a aplicación dun método monótono xeneralizado.

Os resultados orixinais da sección 4.1 están publicados en [29], e os da sección 4.2, en [26].

4.1. Caso Carathéodory

4.1.1. Introdución

Sexan $a, b, r_-, r_+ \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $r_\mp \geq 0$ e consideremos os intervalos

$$I_- = [a - r_-, a], \quad I_0 = [a, b], \quad I_+ = [b, b + r_+],$$

e $I = I_- \cup I_0 \cup I_+$. Nesta sección consideraremos a existencia de solucións para o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(t) = f(t, u(t), u'(t), u(\tau(t, u(t), u'(t))), u'(\sigma(t, u(t), u'(t)))) \ \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \\ \\ u(t) = \phi_-(t) \ \text{ para todo } t \in I_-, \quad u(t) = \phi_+(t) \ \text{ para todo } t \in I_+, \end{array} \right. \tag{4.3}$$

onde $f : I_0 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\tau, \sigma : I_0 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow I$ son funcións Carathédodory e ϕ_- e ϕ_+ son funcións que representan, respectivamente, o estado inicial e o estado final do sistema. Obsérvese que se

$r_{\mp} = 0$, entón $\phi_{\mp}$ son constantes e as condicións de contorno do problema (4.3) convértense en condicións Dirichlet usuais, do tipo $u(a) = A$, $u(b) = B$.

Co fin de simplificar a notación, ao longo desta sección empregaremos moitas veces as notacións $\tau_{t,u,u'}$ e $\sigma_{t,u,u'}$ no canto de $\tau(t, u(t), u'(t))$ e $\sigma(t, u(t), u'(t))$, respectivamente.

O plantexamento do problema (4.3) é bastante xeral, o que nos permitirá tratar de forma conxunta diversos problemas que teñen sido estudados de xeito separado na literatura e que veñen recibindo gran atención nos últimos anos. Algúns destes son os seguintes:

(1) As ecuacións con atraso (isto é, da forma $\tau_{t,u,u'} = t - r$ para algún $r > 0$) son probablemente o exemplo máis paradigmático dos problemas que poden ser expresados dentro da formulación (4.3). A súa xeneralización a ecuacións con atraso dependente do estado (da forma $\tau_{t,u,u'} = t - r(u)$) está sendo amplamente estudada nos últimos anos, e podemos citar artigos como [14, 22, 35, 43, 44], así como o xa citado survey [39].

(2) As ecuacións con adianto (da forma $\tau_{t,u,u'} = t + r$ ou, máis xeral, $\tau_{t,u,u'} = t + r(u)$) tamén se inclúen dentro de (4.3). Algúns artigos recentes nos que se estudan este tipo de problemas son [53, 56, 83].

(3) O feito de incluír no noso plantexamento unha función de arranque, ϕ_-, e outra final, ϕ_+, permítenos considerar conxuntamente o caso de ecuacións con atraso e con adianto. Este tipo de formulacións pode atoparse en [33] ou [54].

(4) As ecuacións con reflexión, isto é, aquelas nas que I_0 é un intervalo centrado na orixe e $\tau(t) = -t$, foron consideradas recentemente en [67] e tamén poden ser estudadas dentro do marco do problema (4.3). Outras referencias máis antigas que tratan esta cuestión son [1] e [38].

O noso resultado principal para o problema (4.3) será un teorema de existencia de solucións maximais e minimais en presenza de sub e sobresolucións, impoñendo adicionalmente unha condición de Nagumo que regulará o crecemento da parte non lineal da ecuación con respecto da derivada da solución. Este método é ben coñecido e bastante estándar para este tipo de problemas, pode atoparse por exemplo nos surveys [9], [21]; sen embargo, no noso caso particular aparecen certas dificultades técnicas que iremos resolvendo ao longo desta sección, así como algunhas diferencias teóricas con respecto a problemas sen argumentos desviados. Entre as principais novidades que presenta o noso resultado con respecto a anteriores podemos salientar as seguintes:

(1) Polo que nós sabemos, este é o primeiro resultado que considera argumentos desviados dependentes da derivada da solución ou partes non lineares dependentes da derivada evaluada en argumentos desviados.

(2) A xeneralización obvia da definición de subsolución como unha función α que satisface a desigualdade

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t), \alpha(\tau_{t,\alpha,\alpha'}), \alpha'(\sigma_{t,\alpha,\alpha'})),$$

non é válida, como ocorría para o problema (3.57), para garantir a a existencia de solución entre sub e sobresolucións, tal e como amosaremos mediante un exemplo. Como consecuencia, introduciremos novas definicións de sub e sobresolucións, que necesariamente deberán ser máis esixentes.

(3) Se eliminamos os argumentos desviantes en (4.3) obtemos un problema Dirichlet ordinario, que posúe solucións extremais entre sub e sobresolucións dadas sempre que asumamos unha condición de Nagumo (véxase por exemplo [11, 15, 21]). Amosaremos que esta conclusión non é certa en xeral cando consideramos o problema (4.3) na súa versión completa.

(4) Probaremos, sen embargo, que o problema (4.3) ten solucións maximais e minimais con respecto á relación de orde parcial "punto a punto", e farémolo sen empregar o Lema de Zorn.

(5) Os resultados que obteremos a continuación permanecen válidos se introducimos en (4.3) máis argumentos desviados, ou se substituímos $u''(t)$ por outro operador, por exemplo un $p-$Laplaciano. Restrinxiremos a nosa atención a (4.3) por simplicidade e para salientar as nosas principais contribucións e as diferenzas con respecto ao caso non desviado.

4.1.2. Existencia de solucións minimais e maximais

Definición 4.1.1. *Diremos que $u \in \mathcal{C}(I)$ é unha solución do problema (4.3) se $u_{|I_0} \in W^{2,1}(I_0)$ e u satisface (4.3).*

Definición 4.1.2. *Dado un subconxunto $Y \subset \mathcal{C}(I)$, diremos que unha solución $u_* \in Y$ de (4.3) é minimal en Y se a relación $u \leq u_*$ implica $u = u_*$ para toda solución $u \in Y$ de (4.3). Diremos que unha solución $u^* \in Y$ de (4.3) é maximal en Y se a relación $u^* \leq u$ implica $u = u^*$ para toda solución $u \in Y$ de (4.3).*

Antes de presentar os nosos novos resultados para (4.3), introduciremos a definición de sub e sobresolución para este problema, definición que como adiantabamos na introdución require ser máis esixente que a habitual.

Definición 4.1.3. *Diremos que $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$, $\alpha \leq \beta$ en I, son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (4.3) se*

$$\alpha \leq \phi_{\mp} \leq \beta \quad \text{en } I_{\mp},$$

e α (respectivamente, β) é tal que para cada $t_0 \in (a, b)$ se satisface unha das seguintes condicións:

(a) $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$ (respectivamente, $D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$), onde $D_-\alpha(t_0)$ representa a derivada inferior de Dini pola esquerda de α en t_0 e $D^+\alpha(t_0)$ representa a derivada superior pola dereita.

(b) *Existe un intervalo aberto* $J_0 \subset (a,b)$ *de tal xeito que* $t_0 \in J_0$, $\alpha \in W^{2,1}(J_0)$ *(respectivamente,* $\beta \in W^{2,1}(J_0)$*) e para case todo* $t \in J_0$ *tense*

$$\alpha''(t) \geq \sup_{(\xi,\nu)\in E} f(t,\alpha(t),\alpha'(t),\xi,\nu) \tag{4.4}$$

$$\left(\text{respectivamente, } \beta''(t) \leq \inf_{(\xi,\nu)\in E} f(t,\beta(t),\beta'(t),\xi,\nu)\right), \tag{4.5}$$

onde

$$E = \left[\min_{t\in I} \alpha(t), \max_{t\in I} \beta(t)\right] \times \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

O noso novo resultado de existencia de solución para o problema (4.3) é o que segue. Na súa proba seguimos as ideas e notacións de [21].

Teorema 4.1.4. *Supoñamos que existen* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I)$ *que son, respectivamente, subsolución e sobresolución do problema (4.3). Definamos* $A \subset I_0$ *(respectivamente,* $B \subset I_0$*) como o conxunto dos puntos nos cales* α *(respectivamente,* β*) é derivable, poñamos* E *como en (4.6) e asumamos que se satisfacen as seguintes condicións:*

(H_1) *(Condicións de Carathéodory)*

$(H_1)-(a)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $(\xi,\nu) \in E$ *as aplicacións* $t \in I_0 \longmapsto f(t,x,y,\xi,\nu)$, $t \in I_0 \longmapsto \tau(t,x,y)$ *e* $t \in I_0 \longmapsto \sigma(t,x,y)$ *son medibles;*

$(H_1)-(b)$ *para case todo* $t \in I_0$ *as aplicacións* $f(t,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, $\tau(t,\cdot,\cdot)$ *e* $\sigma(t,\cdot,\cdot)$ *son continuas nos seus respectivos dominios.*

(H_2) *Existe* $N \in L^1(I_0,(0,+\infty))$ *de tal xeito que para case todo* $t \in A$ *(respectivamente, para case todo* $t \in B$*) e todo* $(\xi,\nu) \in E$ *tense*

$$f(t,\alpha(t),\alpha'(t),\xi,\nu) \geq -N(t) \quad (\text{respectivamente, } f(t,\beta(t),\beta'(t),\xi,\nu) \leq N(t)).$$

(H_3) *(Condición de Nagumo) Existen* $\psi \in L^1(I_0,[0,+\infty))$ *e* $\varphi \in \mathcal{C}([0,+\infty),(0,+\infty))$ *de tal xeito que*

$(H_3)-(a)$ *para case todo* $t \in I_0$, *todo* $x \in [\alpha(t),\beta(t)]$, *todo* $y \in \mathbb{R}$ *e todo* $(\xi,\nu) \in E$ *satisfácese a desigualdade*

$$|f(t,x,y,\xi,\nu)| \leq \psi(t)\varphi(|y|);$$

$(H_3)-(b)$

$$\int_r^\infty \frac{ds}{\varphi(s)} > \|\psi\|_{L^1(I_0)}, \tag{4.7}$$

onde

$$r = \max\left\{\frac{\beta(a)-\alpha(b)}{b-a}, \frac{\beta(b)-\alpha(a)}{b-a}\right\}.$$

(H_4) *(Restrición sobre o conxunto $\sigma^{-1}(\{a,b\})$) Para cada $u \in \mathcal{C}^1(I_0)$ o conxunto*

$$\{t \in I_0 \,:\, \sigma(t,u(t),u'(t)) \in \{a,b\}\}$$

ten medida de Lebesgue cero.

En tal caso, o problema (4.3) ten cando menos unha solución u satisfacendo $\alpha \le u \le \beta$ en I. Ademais, existe $R>0$ de tal xeito que toda solución de (4.3) entre α e β satisface $|u'(t)|<R$ para todo $t\in[a,b]$.

Proba. *Etapa 1: O problema modificado.* En virtude da condición $(H_3)-(b)$, podemos escoller $R>0$ suficientemente grande, de xeito que

$$\int_r^R \frac{ds}{\varphi(s)} > \|\psi\|_{L^1(I_0)}.$$

Do mesmo xeito, a continuidade de f nas súas variables espaciais permítenos asumir que a función N que proporciona a hipótese (H_2) é suficientemente grande, de xeito que

$$|f(t,x,y,\xi,\nu)| \le N(t)$$

para case todo $t\in I_0$, todo $x\in[\alpha(t),\beta(t)]$, todo $(\xi,\nu)\in E$ e $|y|\le R$.

Como é habitual neste tipo de probas, consideramos o truncamento

$$p(t,x)=\begin{cases} \alpha(t), & \text{se } x<\alpha(t),\\[2ex] x, & \text{se } \alpha(t)\le x\le\beta(t),\\[2ex] \beta(t), & \text{se } \beta(t)<x,\end{cases}$$

e definimos as funcións auxiliares

$$\bar f(t,x,y,\xi,\nu)=\text{máx}\{\text{mín}\{f(t,p(t,x),y,p(\tau_{t,x,y},\xi),\nu),N(t)\},-N(t)\},$$

$$\omega_1(t,\delta,\xi,\nu)=\chi_A(t)\left(\max_{|v|\le\delta}\bar f(t,\alpha(t),\alpha'(t)+v,\xi,\nu)-\bar f(t,\alpha(t),\alpha'(t),\xi,\nu)\right),$$

$$\omega_2(t,\delta,\xi,\nu)=\chi_B(t)\left(\bar f(t,\beta(t),\beta'(t),\xi,\nu)-\min_{|v|\le\delta}\bar f(t,\beta(t),\beta'(t)+v,\xi,\nu)\right),$$

e

$$\omega(t,x,\xi,\nu)=\begin{cases} \omega_1(t,\alpha(t)-x,\xi,\nu), & \text{se } x<\alpha(t),\\[2ex] 0, & \text{se } \alpha(t)\le x\le\beta(t),\\[2ex] \omega_2(t,x-\beta(t),\xi,\nu), & \text{se } \beta(t)<x.\end{cases}$$

Obsérvese que as funcións ω_i son Carathéodory, pois o é a función $\bar{f}$ e os conxuntos A e B son Lebesgue medibles. Para probar esta última afirmación basta ter en conta que as derivadas de Dini dunha función continua son funcións Lebesgue medibles [46, Teorema 401] e que se pode expresar o conxunto complementario de A (respectivamente, de B) como

$$I_0 \backslash A = (D_- \alpha - D^+ \alpha)^{-1}(-\infty, 0)$$

$$\big(\text{respectivamente, } I_0 \backslash B = (D^- \beta - D_+ \beta)^{-1}(0, +\infty)\big)\,.$$

Finalmente, consideramos o problema modificado

$$\begin{cases} u''(t) &= \bar{f}(t, u(t), u'(t), u(\tau_{t,u,u'}), u'(\sigma_{t,u,u'})) - \omega(t, u(t), u(\tau_{t,u,u'}), u'(\sigma_{t,u,u'})) \\ & \quad \text{c.p.d. en } I_0, \\ u_{|I_\mp} &= \Phi_\mp \quad \text{en } I_\mp. \end{cases} \tag{4.8}$$

Etapa 2: O problema modificado ten cando menos unha solución. Consideremos o conxunto

$$\mathcal{X} = \{u \in \mathcal{C}(I) \,:\, u_{|I_\mp} \in \mathcal{C}^1(I_\mp),\ u_{|I_0} \in \mathcal{C}^1(I_0)\},$$

que é un espazo de Banach cando se equipa coa norma

$$\|u\| = \|u_{|I_-}\|_{\mathcal{C}^1(I_-)} + \|u_{|I_0}\|_{\mathcal{C}^1(I_0)} + \|u_{|I_+}\|_{\mathcal{C}^1(I_+)}.$$

Obsérvese que os elementos de $\mathcal{X}$ son funcións continuas en a e b, pero non necesariamente diferenciables neses puntos.

Construímos agora un operador $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ do seguinte xeito: para $u \in \mathcal{X}$, Tu é a función definida por

$$Tu\,(t) = \begin{cases} \Phi_-(t), & \text{se } t \in I_-, \\ \displaystyle\int_a^b G(t,s) F_u(s)\, ds + \lambda(t), & \text{se } t \in I_0, \\ \Phi_+(t), & \text{se } t \in I_+, \end{cases}$$

onde para case todo $t \in I_0$ denotamos

$$F_u(t) = \bar{f}(t, u(t), u'(t), u(\tau_{t,u,u'}), u'(\sigma_{t,u,u'})) - \omega(t, u(t), u(\tau_{t,u,u'}), u'(\sigma_{t,u,u'})), \tag{4.9}$$

o núcleo integral $G(t,s)$ é a función de Green asociada ao problema de Dirichlet

$$u'' = 0 \quad \text{c.p.d. en } I_0, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

e

$$\lambda(t) = \frac{\phi_+(b) - \phi_-(a)}{b-a} t + \frac{b\,\phi_-(a) - a\,\phi_+(b)}{b-a} \quad \text{para todo } t \in I_0.$$

É doado comprobar que as solucións do problema modificado (4.8) correspóndense cos puntos fixos do operador T, polo que probaremos que T ten cando menos un punto fixo. Para isto faremos uso do Teorema 1.2.2, así que debemos ver que T é un operador completamente continuo de $\mathcal{X}$ en si mesmo.

A comprobación de que o operador T é completamente continuo é un proceso bastante estándar, polo que aquí omitiremos algúns pasos, centrándonos unicamente, por conveniencia do lector, nas partes que son máis novedosas no problema que nos ocupa, isto é, aquelas nas que os argumentos desviados xogan un papel especial.

Sexa, pois, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ unha sucesión en $\mathcal{X}$ que converxe a u en $\mathcal{X}$. Comezamos coa seguinte afirmación.

Afirmación: A sucesión $\{F_{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tende a F_u c.p.d. en I_0.

Sexa Γ_∞ o subconxunto daqueles $t \in I_0$ tales que

$$\sigma_{t,u,u'} = \sigma(t, u(t), u'(t)) \in \{a, b\},$$

e sexa Γ_n o subconxunto daqueles $t \in I_0$ tales que

$$\sigma_{t,u_n,u_n'} \in \{a, b\}.$$

O conxunto $\Gamma = \Gamma_\infty \cup (\cup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n)$ ten medida de Lebesgue cero, como consecuencia de (H_4).

Agora, para case todo $t \in (a, b) \backslash \Gamma$ tense

$$\begin{aligned} |u_n'(\sigma_{t,u_n,u_n'}) - u'(\sigma_{t,u,u'})| \leq & |u_n'(\sigma_{t,u_n,u_n'}) - u'(\sigma_{t,u_n,u_n'})| + |u'(\sigma_{t,u_n,u_n'}) - u'(\sigma_{t,u,u'})| \\ \leq & \|u_n - u\| + |u'(\sigma_{t,u_n,u_n'}) - u'(\sigma_{t,u,u'})|, \end{aligned}$$

polo que $\{u_n'(\sigma_{t,u_n,u_n'})\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende a $u'(\sigma_{t,u,u'})$ para case todo $t \in I_0$.
Argumentos similares, pero máis simples, proban que $\{u_n(\tau_{t,u_n,u_n'})\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende a $u(\tau_{t,u,u'})$ para case todo $t \in I_0$, polo que a continuidade de $\bar{f}$ e ω nas variables espaciais garantiza que a afirmación é certa.

Agora, o Teorema de Converxencia Dominada permítenos probar que $\{Tu_n\}_{n=1}^{\infty}$ converxe a Tu en $\mathcal{X}$. Finalmente, para todo $u \in \mathcal{X}$ tense que $|(Tu)''| \leq 3N(t)$ para case todo $t \in I_0$, o que nos permite probar que $T\mathcal{X}$ é relativamente compacto e, en consecuencia, T é completamente continuo. O Teorema 1.2.2 garante entón que o conxunto de puntos fixos de T e, polo tanto, o conxunto de solucións de (4.8), é compacto e non baleiro.

Etapa 3: Se u é unha solución de (4.8), entón $\alpha \leq u \leq \beta$ en I. Nos subintervalos $I_\mp$ non hai nada que probar en virtude de ser α e β sub e sobresolución de (4.3). Razoemos, pois, por redución ao absurdo: supoñamos que $\alpha \not\leq u$ en I_0 e fixemos

$$t_0 = \sup \left\{ t \,:\, u(t) - \alpha(t) = \min_{s \in I_0} (u(s) - \alpha(s)) \right\}.$$

Esta elección de t_0 implica que $t_0 \in \mathring{I}_0$, $u(t_0) - \alpha(t_0) < 0$ e $D_-\alpha(t_0) \geq D^+\alpha(t_0)$, polo que existe un intervalo aberto $J_0 \subset \mathring{I}_0$ que contén a t_0 e de tal xeito que $\alpha \in W^{2,1}(J_0)$ e para case todo $t \in J_0$ é

$$\alpha''(t) \geq \sup_E f(t, \alpha(t), \alpha'(t), \xi, \nu).$$

A condición (H_2) proporciona, para case todo $t \in J_0$, que

$$\alpha''(t) \geq \sup_E \bar{f}(t, \alpha(t), \alpha'(t), \xi, \nu),$$

e polo tanto tense, para case todo $t \in J_0$, que

$$\begin{aligned} u''(t) - \alpha''(t) \leq\ & \bar{f}(t, \alpha(t), u'(t), p(\tau_{t,u,u'}, u(\tau_{t,u,u'})), u'(\sigma_{t,u,u'})) \\ & - \omega_1(t, \alpha(t) - u(t), p(\tau_{t,u,u'}, u(\tau_{t,u,u'})), u'(\sigma_{t,u,u'})) \\ & - \bar{f}(t, \alpha(t), \alpha'(t), p(\tau_{t,u,u'}, u(\tau_{t,u,u'})), u'(\sigma_{t,u,u'})) \\ =\ & \bar{f}(t, \alpha(t), u'(t), p(\tau_{t,u,u'}, u(\tau_{t,u,u'})), u'(\sigma_{t,u,u'})) \\ & - \max_{|v| \leq \alpha(t) - u(t)} \bar{f}(t, \alpha(t), \alpha'(t) + v, p(\tau_{t,u,u'}, u(\tau_{t,u,u'})), u'(\sigma_{t,u,u'})). \end{aligned}$$

Posto que $u'(t_0) - \alpha'(t_0) = 0$ e $\alpha(t_0) - u(t_0) > 0$, deducimos pola continuidade de $u' - \alpha'$ e $\alpha - u$ en t_0 que para todo $s \in J_0$ suficientemente próximo a t_0 tense que

$$|u'(s) - \alpha'(s)| \leq \alpha(s) - u(s). \tag{4.10}$$

A definición de t_0 asegura que podemos atopar $t_1 > t_0$ de tal xeito que $u'(t_1) - \alpha'(t_1) > 0$, con t_1 tan próximo a t_0 como queiramos. Fixemos agora un deses $t_1 \in J_0$ tales que para todo $s \in [t_0, t_1]$ se satisface (4.10). Agora, para todo $s \in [t_0, t_1]$ tense $u'(s) = \alpha'(s) \pm v_s$ para algún $v_s \in [0, \alpha(s) - u(s)]$, e entón obtemos a contradición

$$0 < u'(t_1) - \alpha'(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} (u''(s) - \alpha''(s))\, ds \leq 0.$$

De xeito similar probariamos que $u \leq \beta$ en I_0.

Etapa 4: se u é unha solución de (4.8) entón $|u'(t)| < R$ para todo $t \in I_0$. A proba é estándar, e segue o razoamento que se fai en [21, Proposición I-4.7]. En primeiro lugar, debemos ter en conta que para case todo $t \in I_0$, todo $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, todo $y \in \mathbb{R}$ e todo $(\xi, \nu) \in E$ tense que

$$|\bar{f}(t, x, y, \xi, \nu) - \omega(t, x, \xi, \nu)| = |\bar{f}(t, x, y, \xi, \nu)| \leq f(t, x, y, \xi, \nu) \leq \psi(t)\varphi(|y|),$$

é dicir, a parte non linear da ecuación diferencial do problema modificado (4.8) tamén satisface a condición de Nagumo. Agora, razoemos por redución ao absurdo e supoñamos que u é unha solución de (4.8) e $\hat{t} \in I_0$ é tal que $|u'(\hat{t})| \geq R$. En virtude do Teorema do Valor Medio do cálculo diferencial, existe $t_0 \in I_0$ tal que $u'(t_0) = r$; e por continuidade de u' podemos escoller $t_1 \in I_0$ de tal xeito que $u'(t_1) = R$ e $r \leq u'(t) \leq R$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Integrando entre r e R e facendo un cambio de variable obtemos

$$\int_r^R \frac{ds}{\varphi(s)} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u''(s)}{\varphi(u'(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F_u(s)}{\varphi(u'(s))}\, ds \leq \left| \int_{t_0}^{t_1} \psi(s)\, ds \right| \leq ||\psi||_{L^1(I_0)},$$

o cal contradí a hipótese $(H_3) - (b)$.

En consecuencia, a información obtida nas etapas anteriores proporciona que toda solución u do problema modificado (4.8) é unha solución do problema orixinal (4.3) que ademais satisface $\alpha \leq u \leq \beta$ e $|u'| \leq R$. Posto que o conxunto de solucións de (4.8) é non baleiro, queda probado o teorema. □

Observación 4.1.5. *Obsérvese que se $\alpha_{|I_0}, \beta_{|I_0} \in W^{1,\infty}(I_0)$ entón a condición $(H_3) - (a)$ implica (H_2).*

Nas condicións do Teorema 4.1.4 non podemos agardar que o problema (4.3) teña solucións extremais, isto é, unha meirande e unha máis pequena, entre α e β. Para xustificar esta afirmación presentamos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1.6. *Consideremos o problema con reflexión*

$$u''(t) = f(u(-t)) \quad \text{en c.t.p. } t \in [-\pi, \pi], \quad u(-\pi) = u(\pi) = 0, \tag{4.11}$$

onde

$$f(u) = \begin{cases} -1, & \text{se } \; u < -1, \\ u, & \text{se } \; -1 \leq u \leq 1, \\ 1, & \text{se } \; 1 < u. \end{cases}$$

Todas as condicións do Teorema 4.1.4 se cumpren con sub e sobresolucións dadas por

$$\alpha(t) = t^2 - \pi^2 = -\beta(t), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

polo que o problema (4.11) ten cando menos unha solución entre α e β. Obsérvese que as funcións $\pm v(t) = \pm \operatorname{sen} t$ son dúas desas solucións.

Agora amosaremos que (4.11) non ten solucións extremais entre α e β. En primeiro lugar, obsérvese que se w é unha solución de (4.11) entón w non pode ser positiva en $(-\pi, \pi)$, pois nese caso teríase $w''(t) = f(w(-t)) > 0$ en $(-\pi, \pi)$ e $w(-\pi) = w(\pi) = 0$, polo que $w \leq 0$ en $[-\pi, \pi]$, unha contradición. En conclusión, dedúcese que toda solución é menor que v ou menor que $-v$ nalgúns puntos e, en consecuencia, non existe unha solución meirande entre α e β. De xeito similar probariamos que non existe unha solución máis pequena.

Malia o dito nas disquisicións anteriores, as condicións do Teorema 4.1.4 permítennos garantir a existencia de elementos maximais e minimais no conxunto de solucións do problema (4.3) que están entre α e β. É o que probamos no seguinte resultado.

Teorema 4.1.7. *Supoñamos que se satisfacen todas as hipóteses do Teorema 4.1.4, e denotemos por S o conxunto de solucións de (4.3) entre α e β. Entón o conxunto S ten elementos maximais e minimais, isto é, existe cando menos unha solución $u^* \in S$ de tal xeito que para toda solución $v \in S$ a relación $u^* \leq v$ en I implica $u^* = v$; e existe cando menos outra solución $u_* \in S$ de tal xeito que para toda solución $v \in S$ a relación $u_* \geq v$ en I implica $u_* = v$.*

Proba. Tal e como deducimos na proba do Teorema 4.1.4, o conxunto S é compacto en $\mathcal{C}(I)$. Posto que a aplicación

$$u \in S \longmapsto \mathcal{I}(u) = \int_a^b u(t)\, dt$$

é continua, existen entón $u^*, u_* \in S$ de tal xeito que

$$\mathcal{I}(u^*) = \max\{\mathcal{I}(u) \, : \, u \in S\} \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(u_*) = \min\{\mathcal{I}(u) \, : \, u \in S\}.$$

Agora, se $v \in S$ é tal que $u^* \leq v$ en I entón tense que $\mathcal{I}(u^*) \leq \mathcal{I}(v) \leq \mathcal{I}(u^*)$, polo que $u^* = v$ en I e, en consecuencia, u^* é un elemento maximal en S.

De xeito similar probariamos que u_* é un elemento minimal en S. □

Observación 4.1.8. *Obsérvese que nas condicións do Teorema 4.1.7 pode ocorrer que $u^* = u_*$, o cal ademais non implica que $u^* = u_*$ sexa a única solución do problema entre α e β. De feito hai problemas que teñen infinitas solucións, todas elas maximais e minimais ao tempo, como por exemplo o problema de Dirichlet*

$$u''(t) = -u(t), \quad u(0) = u(2\pi) = 0,$$

que ten por solucións exactamente as funcións $u(t) = \lambda \operatorname{sen} t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.1.3. Comentarios sobre sub e sobresolucións

Nesta epígrafe faremos algúns comentarios interesantes referentes aos conceptos de sub e sobresolucións introducidos na Definición 4.1.3.

(I) Os resultados obtidos na epígrafe 4.2.2 non son certos se substituímos as desigualdades (4.4)–(4.5) por

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t), \alpha(\tau_{t,\alpha,\alpha'}), \alpha'(\sigma_{t,\alpha,\alpha})), \tag{4.12}$$

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t), \beta(\tau_{t,\beta,\beta'}), \beta'(\sigma_{t,\beta,\beta})). \tag{4.13}$$

En efecto, $\alpha(t) = -1 = -\beta(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, son sub e sobresolucións no sentido (4.12)–(4.13) para o problema de Dirichlet

$$u''(t) = u(-t) + \operatorname{sen} t,\ t \in [-\pi, \pi], \quad u(-\pi) = 0 = u(\pi). \tag{4.14}$$

Sen embargo, o problema (4.14) non ten ningunha solución. En efecto, supoñamos que $u = u(t)$ é unha solución de (4.14) e multipliquemos a ecuación por $\operatorname{sen} t$. Integrando dúas veces por partes no primeiro membro obteriamos

$$\int_{-\pi}^{\pi} u''(t) \operatorname{sen} t \, dt = -\int_{-\pi}^{\pi} u(t) \operatorname{sen} t \, dt,$$

e facendo o cambio de variable $s = -t$ no segundo membro obteriamos

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(-t) \operatorname{sen} t \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt = -\int_{-\pi}^{\pi} u(s) \operatorname{sen} s \, ds + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt,$$

de onde

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(t) \, dt,$$

unha contradición.

(II) As desigualdades esixidas na Definición 4.1.3 poden ser simplificadas nalgúns casos importantes.

(i) Se $f(t, x, y, \xi, \nu) = g(t, x, y, \xi)$ entón (4.4)–(4.5) redúcense a

$$\alpha''(t) \geq \max_{\min_I \alpha \leq \xi \leq \max_I \beta} g(t, \alpha(t), \alpha'(t), \xi), \tag{4.15}$$

$$\beta''(t) \leq \min_{\min_I \alpha \leq \xi \leq \max_I \beta} g(t, \beta(t), \beta'(t), \xi). \tag{4.16}$$

Se ademais $g(t, x, y, \cdot)$ é monótona no intervalo $[\min_I \alpha, \max_I \beta]$ entón (4.15)–(4.16) simplifícanse aínda máis, e resultan:

$$\alpha''(t) \geq g(t, \alpha(t), \alpha'(t), \max_{t \in I} \beta(t)), \quad \beta''(t) \leq g(t, \beta(t), \beta'(t), \min_{t \in I} \alpha(t)), \tag{4.17}$$

no caso de que $g(t, \alpha(t), \alpha'(t), \cdot)$ e $g(t, \beta(t), \beta'(t), \cdot)$ sexan crecentes;

$$\alpha''(t) \geq g(t, \alpha(t), \alpha'(t), \min_{t \in I} \alpha(t)), \quad \beta''(t) \leq g(t, \beta(t), \beta'(t), \max_{t \in I} \beta(t)), \tag{4.18}$$

no caso de que $g(t, \alpha(t), \alpha'(t), \cdot)$ e $g(t, \beta(t), \beta'(t), \cdot)$ sexan decrecentes.

Obsérvese que neste último caso no que $g(t, x, y, \cdot)$ é decrecente a subsolución e a sobresolución aparecen desacopladas.

(*ii*) Se $f(t,x,y,\xi,\nu) = g(t,x,y,\xi)$ e $\tau(t,x,y) = \widetilde{\tau}(t)$, entón na Etapa 3 da proba do Teorema 4.1.4 podemos substituír (4.4) por

$$\alpha''(t) \geq \max_{\alpha(\tilde{\tau}(t)) \leq \xi \leq \beta(\tilde{\tau}(t))} g(t,\alpha(t),\alpha'(t),\xi), \tag{4.19}$$

e analogamente para β. En particular, se $g(t,\alpha(t),\alpha'(t),\cdot)$ é decrecente no intervalo $[\alpha(\tilde{\tau}(t)),\beta(\tilde{\tau}(t))]$ entón (4.19) convértese en

$$\alpha''(t) \geq g(t,\alpha(t),\alpha'(t),\alpha(\tilde{\tau}(t))), \tag{4.20}$$

e as definicións de sub e sobresolución aparecen así desacopladas e coinciden coas definicións habituais (compárese co Exemplo 4.1.6, onde estas definicións non serven debido a que a correspondente función é crecente respecto de $u(\widetilde{\tau}(t))$).

4.1.4. Construción de sub e sobresolucións: exemplos

Nesta sección daremos algúns resultados que proporcionan condicións suficientes de existencia de sub e sobresolucións para o problema (4.3), así como exemplos da súa construción e de aplicación dos Teoremas 4.1.4 e 4.1.7.

Proposición 4.1.9. *Sexan $\Phi_\pm \in \mathcal{C}^1(I_\pm)$ e $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e supoñamos que*

$$\lim_{\xi\to-\infty} F(\xi) = +\infty, \tag{4.21}$$

$$\lim_{\xi\to+\infty} F(\xi) = -\infty, \tag{4.22}$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{F(\xi)}{\xi} > -\frac{8}{L^2}, \quad \text{onde } L = b-a+r_+ + r_-. \tag{4.23}$$

Entón para cada $A \leq \min\{\min_{I_-}\Phi_-, \min_{I_+}\Phi_+\}$ e cada $B \geq \max\{\max_{I_-}\Phi_-, \max_{I_+}\Phi_+\}$ existen $\lambda > 0$ e $\mu < 0$ de tal xeito que as funcións

$$\alpha(t) = A + \frac{\lambda}{2}(t-a+r_-)(t-a+r_- - L), \quad t \in I, \tag{4.24}$$

$$\beta(t) = B + \frac{\mu}{2}(t-a+r_-)(t-a+r_- - L), \quad t \in I, \tag{4.25}$$

son sub e sobresolución para o problema

$$u''(t) = F(u(\tau_{t,u,u'})) \quad \text{en c.t.p. } t \in I_0, \tag{4.26}$$

$$u_{|I_\pm} = \Phi_\pm \quad \text{en } I_\pm, \tag{4.27}$$

independientemente da función de Carathéodory $\tau : I_0 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow I$.

En particular, o problema (4.26)–(4.27) ten solucións minimais e maximais entre α e β, e isto non depende da elección de τ.

Proba. Obsérvese que (4.23) implica que

$$\lim_{\xi \to -\infty} \frac{-\xi}{F(\xi)} > \frac{L^2}{8},$$

e entón deducimos de (4.21) que para cada $A \leq \min\{\min_{I_-} \Phi_-, \min_{I_+} \Phi_+\}$ tense

$$\lim_{\xi \to -\infty} \frac{A-\xi}{F(\xi)} > \frac{L^2}{8}. \tag{4.28}$$

Agora, (4.22) asegura que podemos atopar $\xi_1 > 0$ tal que

$$F(\xi) < 0 \quad \text{para todo } \xi \geq \xi_1,$$

e (4.21) e (4.28) garanten que podemos atopar $\xi_2 < \min\{0, A\}$ de tal xeito que

$$F(\xi) < \frac{8}{L^2}(A-\xi) \quad \text{para todo } \xi \leq \xi_2. \tag{4.29}$$

Poñamos $C = \max\{F(\xi) \, : \, \xi_2 \leq \xi \leq \xi_1\}$. En virtude da condición (4.21) e da continuidade de F, existe $\xi_3 \leq \xi_2$ tal que

$$F(\xi_3) = C \quad \text{e } F(\xi) \leq C \text{ para todo } \xi \in [\xi_3, \xi_2].$$

Esta elección de ξ_3 garante que

$$F(\xi_3) \geq F(\xi) \quad \text{para todo } \xi \geq \xi_3, \tag{4.30}$$

e, por (4.29),

$$F(\xi_3) < \frac{8}{L^2}(A-\xi_3). \tag{4.31}$$

Sexa agora α definida como en (4.24) para $\lambda = \dfrac{8(A-\xi_3)}{L^2}$. Obsérvese que $\alpha''(t) = \lambda > 0$ en I e $\alpha(a-r_-) = A = \alpha(b+r_+)$, polo que $\alpha \leq A$ en I. En particular, $\alpha \leq \phi_\pm$ en $I_\pm$.

Ademais, tense que

$$\min_{t \in I} \alpha(t) = \alpha\left(\frac{b+r_+ + a - r_-}{2}\right) = A - \lambda \frac{L^2}{8} = \xi_3,$$

e deducimos entón de (4.31) e (4.30) que para todo $t \in I_0$ temos

$$\alpha''(t) = \lambda > F(\xi_3) = \max_{\xi \geq \min_I \alpha} F(\xi). \tag{4.32}$$

Argumentos similares proban que para cada $B \geq \max\{\max_{I_-} \Phi_-, \max_{I_+} \Phi_+\}$ existe $\mu < 0$ de tal xeito que (4.25) define unha función tal que $\beta \geq \Phi_\pm$ en $I_\pm$ e

$$\beta''(t) = \mu < \min_{\xi \leq \max_I \beta} F(\xi). \tag{4.33}$$

En particular, deducimos de (4.32) e (4.33) que para todo $t \in I_0$ tense

$$\alpha''(t) > \max_{\min_I \alpha \leq \xi \leq \max_I \beta} F(\xi),$$

e

$$\beta''(t) < \min_{\min_I \alpha \leq \xi \leq \max_I \beta} F(\xi),$$

polo que α e β son sub e sobresolución para o problema (4.26)–(4.27). $\square$

Exemplo 4.1.10. *A función $F(\xi) = -\sqrt[3]{\xi}\cos(1/\xi)$ para $\xi \neq 0$, e $F(0) = 0$, satisface as condicións da Proposición 4.1.9. En consecuencia, o problema correspondente (4.26)–(4.27) ten cando menos unha solución para calquera elección de $\Phi_\pm$ e τ.*

A continuación empregaremos as ideas da Proposición 4.1.9 para construír exemplos máis xerais.

Proposición 4.1.11. *Consideremos funcións $\Phi_\pm \in \mathcal{C}^1(I_\pm)$ e sexa $f : I_0 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función de Carathéodory.*

Supoñamos que existen $c \geq 0$ e F_α, $F_\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ de tal xeito que para case todo $t \in I_0$ e todos $\xi, \nu \in \mathbb{R}$ tense

$$f(t, x, \xi, \nu) \leq F_\alpha(\xi) \quad \text{para todo } x \leq -c, \tag{4.34}$$

e

$$F_\beta(\xi) \leq f(t, x, \xi, \nu) \quad \text{para todo } x \geq c. \tag{4.35}$$

Ademais, supoñamos que se satisfacen as seguintes condicións:

$$\lim_{\xi \to -\infty} F_\alpha(\xi) = +\infty, \tag{4.36}$$

$$F_\alpha \text{ está limitada superiormente en } [0, +\infty), \tag{4.37}$$

$$\lim_{\xi \to -\infty} \frac{F_\alpha(\xi)}{\xi} > -\frac{8}{L^2}, \quad \text{onde } L = b - a + r_+ + r_-, \tag{4.38}$$

$$F_\beta \text{ está limitada inferiormente en } (-\infty, 0], \tag{4.39}$$

$$\lim_{\xi \to +\infty} F_\beta(\xi) = -\infty, \tag{4.40}$$

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{F_\beta(\xi)}{\xi} > -\frac{8}{L^2}. \tag{4.41}$$

En tal caso o problema

$$u''(t) = f(t, u(t), u(\tau_{t,u,u'}), u'(\sigma_{t,u,u'})) \quad \text{en c.t.p. } t \in I_0, \tag{4.42}$$

$$u_{|I_\pm} = \Phi_\pm \quad \text{en } I_\pm, \tag{4.43}$$

ten solucións minimais e maximais entre certas sub e sobresolucións, e este resultado non depende da elección das funcións de Carathéodory τ, $\sigma : I_0 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow I$, sempre que σ satisfaga a condición (H_4) do Teorema 4.1.4.

Proba. Un argumento similar ao empregado na proba da Proposición 4.1.9 amosa que (4.36), (4.37), e (4.38) garanten que para cada $A \leq -c$ tal que $A \leq \min\{\min_{I_-} \Phi_-, \min_{I_+} \Phi_+\}$ podemos atopar $\lambda > 0$ de tal xeito que a función definida en (4.24) satisface

$$\alpha''(t) = \lambda > \max_{\xi \geq \min_I \alpha} F_\alpha(\xi) \quad \text{para todo } t \in I_0.$$

Ademais tamén se ten que $\alpha(t) \leq -c$ para todo $t \in I$, polo que deducimos de (4.34) que

$$\alpha''(t) > \sup_{\nu \in \mathbb{R},\, \xi \geq \min_I \alpha} f(t, \alpha(t), \xi, \nu) \quad \text{en c.t.p. } t \in I_0.$$

De xeito análogo, para $B \geq c$ tal que $B \geq \max\{\max_{I_-} \Phi_-, \max_{I_+} \Phi_+\}$ existe $\mu < 0$ de tal xeito que a función definida en (4.25) satisface

$$\beta''(t) < \inf_{\nu \in \mathbb{R},\, \xi \leq \max_I \beta} f(t, \beta(t), \xi, \nu) \quad \text{en c.t.p. } t \in I_0,$$

e, en consecuencia, α e β son sub e sobresolucións para o problema (4.42)–(4.43). $\square$

Exemplo 4.1.12. *Sexa F a función do Exemplo 4.1.10. Sexan $a \in L^\infty(I_0)$, a_1, a_2, $\gamma > 0$, e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función continua e limitada.*

A aplicación $f(t, x, \xi, \nu) = a(t) + a_1\, x|x|^\gamma + a_2 F(\xi) + g(\nu)$ satisface as condicións da Proposición 4.1.11 para $c = 0$.

4.2. Caso monótono

4.2.1. Introdución

Despois de estudar o caso Carathéodory na sección anterior, o noso obxectivo agora será substituír a continuidade nas variables nas que interviñan os argumentos desviados por diversas condicións de monotonía, na liña do que se facía na Sección 3.3 cos problemas de primeira orde.

Así pois, sexan $I_\mp, I_0$ e I os intervalos considerados na sección anterior e construamos o espazo

$$\mathcal{X} = \{\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, \gamma_{|I_0} \in \mathcal{C}(I_0),\ \gamma_{|I_\mp} \text{ limitada}\}.$$

Obsérvese que $\mathcal{X} = \mathcal{C}(I_0)$ cando $r_- = r_+ = 0$.

estudaremos a existencia de cuasisolucións e solucións para o problema funcional

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t), u_{|I_0}, u, u) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \\[2ex] B_-(t, u(t), u_{|I_0}, u, u) = 0 \text{ para todo } t \in I_-, \\[2ex] B_+(t, u(t), u_{|I_0}, u, u) = 0 \text{ para todo } t \in I_+, \end{cases} \tag{4.44}$$

onde $f : I_0 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{C}(I_0) \times \mathcal{X}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ será, *grosso modo*, unha función de Carathéodory con respecto das variables reais e monótona con respecto das variables funcionais, e $B_\mp : I_0 \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I_0) \times \mathcal{X}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cumprirán certas condicións de monotonía respecto das súas variables funcionais.

A formulación (4.44) é bastante xeral, polo que dentro do seu marco poden ser considerados problemas de moi diversos tipos. Algúns deles son os seguintes:

(1) Problemas con argumentos desviados da forma $\tau : I_0 \longrightarrow I_0$, incluíndo atrasos ($\tau(t) \le t$), adiantos ($\tau(t) \ge t$) ou unha combinación de ámbolos dous casos; problemas todos eles que foron moi estudados na literatura. Artigos recentes como [53, 54, 56, 57] son un bo exemplo.

(2) Cando $r_-^2 + r_+^2 > 0$ a solución ten un dominio de definición máis grande que aquel no que está definida a ecuación diferencial. Ademais, dúas das dependencias funcionais en (4.44) consideran o comportamento da solución neste intervalo ampliado. A aplicación máis natural deste tipo de problemas son as ecuacións con atraso e con adiantos no sentido clásico, que tamén estaban incluídas no marco do problema (4.3) da sección anterior. Neste caso, como é habitual, debemos proporcionar información adicional sobre os estados inicial e final da solución. Este tipo de problemas foron estudados, por exemplo, en [81] ou [82].

(3) Problemas con dependencias funcionais máis xerais, do tipo

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t), p[u](t)), \tag{4.45}$$

onde p é unha aplicación entre certos espazos funcionais, poden ser estudados cos nosos resultados para o problema (4.44) cando f é unha función de variación limitada na súa cuarta variable. A ecuación (4.45) foi previamente estudada por Nieto e Rodríguez López en [66].

O resultado principal desta sección proporciona condicións suficientes para a garantir a existencia de cuasisolucións extremais para o problema (4.44), nun sentido que definiremos máis adiante, e que como tamén veremos serán solucións extremais se eliminamos unha das variables da ecuación. Para probar este resultado usaremos o Teorema 1.2.23, na liña de como se fixo nas Seccións 3.3.2 e 3.3.3 para ecuacións de primeira orde.

4.2.2. Existencia de cuasisolucións e solucións únicas

Antes de establecer os nosos resultados principais para o problema (4.44) precisamos introducir as definicións de cuasisolucións e sub e sobresolucións para este problema.

Definición 4.2.1. *Diremos que $v, w \in \mathcal{X}$ son cuasisolucións (acopladas) do problema (4.44) se $v_{|I_0}, w_{|I_0} \in W^{2,1}(I_0)$ e*

$$\begin{cases} v''(t) = f(t, v(t), v'(t), v_{|I_0}, v, w) \ \text{c.p.d. en } I_0, \\[2ex] B_\mp(t, v(t), v_{|I_0}, v, w) = 0 \ \text{en } I_\mp; \end{cases}$$

$$\begin{cases} w''(t) = f(t, w(t), w'(t), w_{|I_0}, w, v) \text{ c.p.d. en } I_0, \\ \\ B_{\mp}(t, w(t), w_{|I_0}, w, v) = 0 \text{ en } I_{\mp}. \end{cases}$$

Diremos que dúas cuasisolucións v_* e w^* son extremais nun subconxunto $Y \subset \mathcal{X}$ se $v_* \leq v$ e $w \leq w^*$ para todo par v, w de cuasisolucións en Y.

Definición 4.2.2. *Diremos que $\alpha, \beta \in \mathcal{X}$ son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución (que estarán, ademais, acopladas entre si) do problema (4.44) se para todo $t \in I_{\mp}$ tense*

$$B_{\mp}(t, \alpha(t), \alpha_{|I_0}, \alpha, \beta) \leq 0, \quad B_{\mp}(t, \beta(t), \beta_{|I_0}, \beta, \alpha) \geq 0,$$

e para cada $t_0 \in (a, b)$ cúmprese unha das seguintes condicións:

(a) $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$ *(respectivamente, $D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$).*

(b) Existe un intervalo aberto $J_0 \subset (a, b)$ de tal xeito que $t_0 \in J_0$, $\alpha_{|J_0} \in W^{2,1}(J_0)$ (respectivamente, $\beta_{|J_0} \in W^{2,1}(J_0)$) e para case todo $t \in J_0$ tense

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t), \alpha_{|I_0}, \alpha, \beta)$$

(respectivamente,

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t), \beta_{|I_0}, \beta, \alpha)).$$

O noso resultado de existencia para o problema (4.44) é o que segue.

Teorema 4.2.3. *Supoñamos que existen $\alpha, \beta \in \mathcal{X}$ subsolución e sobresolución do problema (4.44) con $\alpha \leq \beta$ en I, poñamos*

$$[\alpha, \beta] = \{\xi \in \mathcal{X} \,:\, \alpha(t) \leq \xi(t) \leq \beta(t) \text{ para todo } t \in I\},$$

sexa $J = [\min_{t \in I_0} \alpha(t), \max_{t \in I_0} \beta(t)]$, e asumamos que se cumpren as seguintes condicións:

(H_1) *(Condicións de Carathéodory)*

$(H_1) - (a)$ *(Medibilidade) Para todo $u \in J$, todo $v \in \mathbb{R}$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, a función $f(\cdot, u, v, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2)$ é medible.*

$(H_1) - (b)$ *(Continuidade) Para case todo $t \in I_0$, todo $u \in [\alpha(t), \beta(t)]$, todo $v \in \mathbb{R}$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, as funcións $f(t, \cdot, v, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2)$ e $f(t, u, \cdot, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2)$ son continuas.*

(H_2) *(Estimación en L^1 e condición de Nagumo) Existen dúas funcións, $\psi : I_0 \longrightarrow [0, +\infty)$ e $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$, con $\psi \in L^1(I_0)$ e φ continua, de tal xeito que para case todo $t \in I_0$, todo $u \in [\alpha(t), \beta(t)]$, todo $v \in \mathbb{R}$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, tense que*

$$|f(t, u, v, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2)| \leq \psi(t)\varphi(|v|),$$

con
$$\int_r^R \frac{dv}{\varphi(v)} > \|\psi\|_{L^1(I_0)} \text{ para algún } R > r,$$
onde $r = \max\left\{\frac{\beta(a)-\alpha(b)}{b-a}, \frac{\beta(b)-\alpha(a)}{b-a}\right\}$.

(H_3) *(Monotonía) Para case todo* $t \in I_0$, *todo* $u \in [\alpha(t), \beta(t)]$, *todo* $v \in \mathbb{R}$ *e todas* $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, *as funcións* $f(t, u, v, \cdot, \gamma_1, \gamma_2)$ *e* $f(t, u, v, \gamma_{1|I_0}, \cdot, \gamma_2)$ *son decrecentes e a función* $f(t, u, v, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \cdot)$ *é crecente.*

(H_4) *(Condicións de contorno)*

$(H_4)-(a)$ *(Medibilidade respecto da variable independente) Para todo* $u \in J$ *e todas* $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, *as funcións* $B_\mp(\cdot, u, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2)$ *son medibles.*

$(H_4)-(b)$ *(Discontinuidades admisibles respecto de* $u(t)$*) Para case todo* $t \in I_\mp$ *e todas* $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, *tense*

$$\begin{aligned} \liminf_{w \to u^-} B_\mp(t, w, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2) &\geq B_\mp(t, u, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2) \\ &\geq \limsup_{w \to u^+} B_\mp(t, w, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

$(H_4)-(c)$ *(Monotonía) Para case todo* $t \in I_\mp$, *todo* $u \in J$ *e todas* $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, *as funcións* $B_\mp(t, u, \cdot, \gamma_1, \gamma_2)$ *e* $B_\mp(t, u, \gamma_{1|I_0}, \cdot, \gamma_2)$ *son decrecentes e as funcións* $B_\mp(t, u, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \cdot)$ *son crecentes.*

En tales condicións, o problema (4.44) ten cuasisolucións extremais en $[\alpha, \beta]$.

Proba. Co fin de poder aplicar o Teorema 1.2.23, poñamos $X = Y = \mathcal{X}$ e consideremos o operador multivaluado
$$\mathcal{A} : [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \subset Y \times Y \longrightarrow 2^{[\alpha, \beta]} \backslash \emptyset$$
que fai corresponder cada par (γ_1, γ_2) co conxunto de solucións do problema de Dirichlet

$$(P_{\gamma_1,\gamma_2}) \begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t), \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2) \text{ en c.t.p. } t \in I_0, \\ u(t) = \phi_-(t) \text{ para todo } t \in I_-, \\ u(t) = \phi_+(t) \text{ para todo } t \in I_+, \end{cases} \tag{4.46}$$

onde para cada $t \in I_\mp$, o número $\phi_\mp(t)$ defínese como a menor solución $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ da ecuación alxebraica
$$B_\mp(t, x, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2) = 0.$$

Afirmación 1: O operador $\mathcal{A}$ está ben definido e existen A_- e A_+, na notación do Teorema 1.2.23.– En primeiro lugar, a condición $(H_4)-(b)$, proporciona, por aplicación do Lema 2.2.1, que para cada $t \in I_{\mp}$ o número $\phi_{\mp}(t)$ está ben definido. Agora, as condicións (H_1) e (H_2) garanten que o problema auxiliar (P_{γ_1,γ_2}) ten solucións extremais en $[\alpha,\beta]$. Este é un resultado ben coñecido, e pode atoparse por exemplo en [21, Teorema II.2.6]. Estas solucións extremais correspóndense con $A_-(\gamma_1,\gamma_2)$ e $A_+(\gamma_1,\gamma_2)$. Ademais, o resultado citado garante que toda solución u de (P_{γ_1,γ_2}) entre α e β satisface $\|u'\|_\infty < R$, feito que será usado posteriormente nas nosas argumentacións.

Afirmación 2: Os operadores A_- e A_+ son monótonos mixtos.– Tomemos $\gamma_1, \overline{\gamma}_1, \gamma_2 \in [\alpha,\beta]$ con $\gamma_1 \le \overline{\gamma}_1$, e poñamos $u = A_-(\gamma_1,\gamma_2)$ e $\overline{u} = A_-(\overline{\gamma}_1,\gamma_2)$. As condicións de monotonía (H_3) e $(H_4)-(c)$ proporcionan, respectivamente,

$$\overline{u}''(t) = f(t,\overline{u}(t),\overline{u}'(t),\overline{\gamma}_{1|I_0},\overline{\gamma_1},\gamma_2) \le f(t,\overline{u}(t),\overline{u}'(t),\gamma_{1|I_0},\gamma_1,\gamma_2) \text{ c.p.d. en } I_0, \tag{4.47}$$

e

$$0 = B_{\mp}(t,\overline{u}(t),\overline{\gamma}_{1|I_0},\overline{\gamma_1},\gamma_2) \le B_{\mp}(t,\overline{u}(t),\gamma_{1|I_0},\gamma_1,\gamma_2) \text{ para todo } t \in I_{\mp}. \tag{4.48}$$

Por outra banda, posto que

$$0 \ge B_{\mp}(t,\alpha(t),\alpha_{|I_0},\alpha,\beta) \ge B_{\mp}(t,\alpha(t),\gamma_{1|I_0},\gamma_1,\gamma_2) \text{ para todo } t \in I_{\mp}, \tag{4.49}$$

podemos empregar o Lema 2.2.1 xunto con (4.48) e (4.49) para garantir que a ecuación alxebraica

$$B_{\mp}(t,x,\gamma_{1|I_0},\gamma_1,\gamma_2) = 0$$

ten unha solución no intervalo $[\alpha(t),\overline{u}(t)]$, de onde se deduce que $u(t) \le \overline{u}(t)$ en $I_{\mp}$. Isto, xunto coa desigualdade (4.47), proporciona que $\overline{u}$ é unha sobresolución para o problema (P_{γ_1,γ_2}), cuxa menor solución en $[\alpha,\beta]$ é u. En consecuencia, $u \le \overline{u}$, pois en caso contrario existiría outra solución do problema (P_{γ_1,γ_2}) en $[\alpha,u]$. Queda así probado que o operador $A_-(\cdot,\gamma_2)$ é crecente.

De xeito análogo probariamos que para cada $\gamma \in [\alpha,\beta]$ o operador $A_+(\cdot,\gamma)$ é crecente e que $A_-(\gamma,\cdot)$ e $A_+(\gamma,\cdot)$ son decrecentes. Polo tanto, os operadores A_- e A_+ son monótonos mixtos.

Afirmación 3: Os operadores A_- e A_+ satisfacen a propiedade de converxencia monótona mixta.– Sexan $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ dúas sucesións en $[\alpha,\beta]$, unha delas crecente e a outra decrecente. En virtude da monotonía mixta de A_- e A_+ tense que

$$\{z_{*n}\}_{n=1}^\infty = \{A_-(v_n,w_n)\}_{n=1}^\infty$$

e

$$\{z_n^*\}_{n=1}^\infty = \{A_+(v_n,w_n)\}_{n=1}^\infty$$

son sucesións monótonas en $[\alpha,\beta]$ e que, polo tanto, teñen cadanseu límite puntual, poñamos z_* e z^*, respectivamente.

Por unha parte, posto que z_* e z^* están entre α e β obtemos trivialmente que $z_{*|I_\mp}$ e $z^*_{|I_\mp}$ están limitadas. Por outra banda, dados $s, t \in I_0$, $s < t$, tense que

$$|z_n^*(t) - z_n^*(s)| \leq \int_s^t |f(r, z_n^*(r), z_n^{*\prime}(r), v_{n|I_0}, v_n, w_n)|\, dr \leq K \int_s^t \psi(r)\, dr, \tag{4.50}$$

sendo $K = \max\{\varphi(v) : 0 \leq v \leq R\}$. Así, tomando límite cando $n \to \infty$ obtemos que $z^* \in AC(I_0)$ e, en particular, $z^* \in Y$. Do mesmo xeito, $z_* \in Y$. Obsérvese que o feito de coñecer unha estimación *a priori* sobre a derivada das solucións dos problemas auxiliares xoga un papel esencial na segunda desigualdade en (4.50).

Afirmación 4: O operador $\mathcal{A}$ ten puntos fixos acoplados extremais, que se corresponden coas cuasisolucións extremais do problema (4.44) en $[\alpha, \beta]$.– As afirmacións probadas anteriormente permítennos aplicar o Teorema 1.2.23 para garantir que $\mathcal{A}$ posúe puntos fixos acoplados extremais v_*, w^*. En virtude da construción do operador $\mathcal{A}$, é claro que v_*, w^* son cuasisolucións do problema (4.44). Para comprobar que estas cuasisolucións son extremais en $[\alpha, \beta]$, tomemos outro par de cuasisolucións $v, w \in [\alpha, \beta]$. Entón, pola definición de $\mathcal{A}$, tense que $v \in \mathcal{A}(v, w)$ e $w \in \mathcal{A}(w, v)$, polo que v e w satisfacen (1.6). Posto que v_* e w^* satisfacen (1.7) deducimos que $v_* \leq v$ e $w \leq w^*$, de onde se obtén que v_* e w^* son cuasisolucións extremais de (4.44) en $[\alpha, \beta]$. □

É importante sinalar que as condicións do Teorema 4.2.3 permiten que as cuasisolucións do problema (4.44) sexan discontinuas nos intervalos $I_\mp$. Se queremos garantir que estas cuasisolucións sexan continuas en todo o intervalo I, debemos impoñer hipóteses máis esixentes nas condicións de contorno. Isto é o que se concreta no seguinte resultado.

Teorema 4.2.4. *Nas condicións do Teorema 4.2.3, substituamos $(H_4)-(a)$ e $(H_4)-(b)$ por*

$(H_4)-(a)'$ Para case todo $t \in I_\mp$, todo $u \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, as funcións $B_\mp(t, \cdot, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2)$ e $B_\mp(\cdot, u, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2)$ son continuas.

Asumamos ademais que se satisface

$(H_4)-(d)$ Para todo $t \in I_\mp$ e todas $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, as funcións $B_\mp(t, \cdot, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2)$ son estrictamente monótonas (crecentes ou decrecentes).

En tal caso, o problema (4.44) ten cuasisolucións extremais en $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{C}(I)$.

Proba. Posto que se satisfacen as hipóteses do Teorema 4.2.3, só temos que probar que as cuasisolucións extremais que proporciona ese resultado son continuas en $I_\mp$. Polo tanto, fixemos $\gamma_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, e consideremos a aplicación

$$t \in I_\mp \longmapsto \phi_\mp(t) \in [\alpha(t), \beta(t)],$$

onde para cada $t \in I_{\mp}$, $\phi_{\mp}(t)$ é a menor solución en $[\alpha(t), \beta(t)]$ da ecuación alxebraica

$$B_{\mp}(t, x, \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2) = 0.$$

Obsérvese que, en virtude da condición $(H_4) - (d)$ esta solución menor é, de feito, a única solución.

Para estudar a continuidade das funcións $\phi_{\mp}$, tomemos unha sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $I_{\mp}$ que converxe a un elemento $t \in I_{\mp}$. Supoñamos en primeiro lugar que existe o límite $\lim_{n\to\infty} \phi_{\mp}(t_n)$. En tal caso, a condición $(H_4) - (a)'$ proporciona

$$B_{\mp}(t_n, \phi_{\mp}(t_n), \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2) \longrightarrow B_{\mp}(t, \lim_{n\to\infty} \phi_{\mp}(t_n), \gamma_{1|I_0}, \gamma_1, \gamma_2),$$

e posto que todos os elementos desta sucesión son 0, o mesmo ocorre co seu límite. Polo tanto, obtivemos que se a sucesión $\{\phi_{\mp}(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converxe entón

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\mp}(t_n) = \phi_{\mp}(t).$$

Finalmente, para comprobar que $\{\phi_{\mp}(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ realmente converxe, observemos que esta sucesión está limitada, polo que posúe cando menos unha subsucesión converxente, poñamos $\{\phi_{\mp}(t_{n_k})\}$. Razoando como fixemos antes obtemos que

$$\lim_{k\to\infty} \phi_{\mp}(t_{n_k}) = \phi_{\mp}(t).$$

En consecuencia, todas as subsucesións converxentes de $\{\phi_{\mp}(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ teñen o mesmo límite, e polo tanto concluímos que esta sucesión converxe. $\square$

4.2.3. Existencia de solucións extremais

Unha consecuencia directa importante dos resultados obtidos anteriormente é que se eliminamos no plantexamento do problema (4.44) as dependencias respecto da variable funcional crecente, entón os Teoremas 4.2.3 e 4.2.4 proporcionan a existencia de solucións extremais para o problema

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t), u_{|I_0}, u) \quad \text{en c.t.p. } t \in I_0, \\ \\ B_{\mp}(t, u(t), u_{|I_0}, u) = 0 \quad \text{para todo } t \in I_{\mp}. \end{cases} \tag{4.51}$$

Nesta epígrafe concretaremos esta idea en dous resultados cuxas probas, por seren consecuencia directa dos Teoremas 4.2.3 e 4.2.4, xa non incluímos.

Definición 4.2.5. *Diremos que $\alpha, \beta \in \mathcal{X}$ son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (4.51) se para todo $t \in I_{\mp}$ tense*

$$B_{\mp}(t, \alpha(t), \alpha_{|I_0}, \alpha) \leq 0, \quad B_{\mp}(t, \beta(t), \beta_{|I_0}, \beta) \geq 0,$$

e para cada $t_0 \in (a, b)$ cúmprese unha das seguintes condicións:

(a) $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$ *(respectivamente, $D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$).*

(b) *Existe un intervalo aberto $J_0 \subset (a,b)$ de tal xeito que $t_0 \in J_0$, $\alpha_{|J_0} \in W^{2,1}(J_0)$ (respectivamente, $\beta_{|J_0} \in W^{2,1}(J_0)$) e para case todo $t \in J_0$ tense*

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t), \alpha_{|I_0}, \alpha)$$

(respectivamente,

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t), \beta_{|I_0}, \beta)).$$

Observación 4.2.6. *Obsérvese que a subsolución e a sobresolución xa non aparecen acopladas na Definición 4.2.5.*

Teorema 4.2.7. *Supoñamos que existen $\alpha, \beta \in \mathcal{X}$ que son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (4.51) con $\alpha \leq \beta$ en I, poñamos $J = [\text{mín}_{t\in I_0} \alpha(t), \text{máx}_{t\in I_0} \beta(t)]$ e asumamos que se satisfacen as seguintes hipóteses:*

(H_1) *(Condicións de Carathéodory)*

$(H_1)-(a)$ *(Medibilidade) Para todo $u \in J$, todo $v \in \mathbb{R}$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, a función $f(\cdot, u, v, \gamma_{|I_0}, \gamma)$ é medible.*

$(H_1)-(b)$ *(Continuidade) Para case todo $t \in I_0$, todo $u \in [\alpha(t), \beta(t)]$, todo $v \in \mathbb{R}$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, as funcións $f(t, \cdot, v, \gamma_{|I_0}, \gamma)$ e $f(t, u, \cdot, \gamma_{|I_0}, \gamma)$ son continuas.*

(H_2) *(Estimación en L^1 e condición de Nagumo) Existen dúas funcións, $\psi : I_0 \longrightarrow [0, +\infty)$ e $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$, con $\psi \in L^1(I_0)$ e φ continua, de tal xeito que para case todo $t \in I_0$, todo $u \in [\alpha(t), \beta(t)]$, todo $v \in \mathbb{R}$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, tense que*

$$|f(t, u, v, \gamma_{|I_0}, \gamma)| \leq \psi(t)\varphi(|v|),$$

con

$$\int_r^R \frac{dv}{\varphi(v)} > \|\psi\|_{L^1(I_0)} \text{ para algún } R > r,$$

onde $r = \text{máx}\left\{\dfrac{\beta(a) - \alpha(b)}{b-a}, \dfrac{\beta(b) - \alpha(a)}{b-a}\right\}.$

(H_3) *(Monotonía) Para case todo $t \in I_0$, todo $u \in [\alpha(t), \beta(t)]$, todo $v \in \mathbb{R}$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, as funcións $f(t, u, v, \cdot, \gamma)$ e $f(t, u, v, \gamma_{|I_0}, \cdot)$ son decrecentes.*

(H_4) *(Condicións de contorno)*

$(H_4)-(a)$ *(Medibilidade respecto da variable independente) Para todo $u \in J$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, as funcións $B_{\mp}(\cdot, u, \gamma_{|I_0}, \gamma)$ son medibles.*

$(H_4)-(b)$ (Discontinuidades admisibles respecto de $u(t)$) Para case todo $t \in I_\mp$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, tense

$$\begin{aligned} \liminf_{w \to u^-} B_\mp(t, w, \gamma_{|I_0}, \gamma) &\geq B_\mp(t, u, \gamma_{|I_0}, \gamma) \\ &\geq \limsup_{w \to u^+} B_\mp(t, w, \gamma_{|I_0}, \gamma). \end{aligned}$$

$(H_4)-(c)$ (Monotonía) Para case todo $t \in I_\mp$, todo $u \in J$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, as funcións $B_\mp(t, u, \cdot, \gamma)$ e $B_\mp(t, u, \gamma_{|I_0}, \cdot)$ son decrecentes.

En tal caso, o problema (4.51) ten solucións extremais no intervalo funcional $[\alpha, \beta]$.

Teorema 4.2.8. *Nas condicións do Teorema 4.2.7, substituamos $(H_4)-(a)$ e $(H_4)-(b)$ por*

$(H_4)-(a)'$ Para case todo $t \in I_\mp$, todo $u \in [\alpha(t), \beta(t)]$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, as funcións $B_\mp(t, \cdot, \gamma_{|I_0}, \gamma)$ e $B_\mp(\cdot, , u, \gamma_{|I_0}, \gamma)$ son continuas.

Asumamos ademais que se satisface

$(H_4)-(d)$ Para todo $t \in I_\mp$ e toda $\gamma \in [\alpha, \beta]$, as funcións $B_\mp(t, \cdot, \gamma_{|I_0}, \gamma)$ son estrictamente monótonas (crecentes ou decrecentes).

En tal caso, o problema (4.51) ten solucións extremais en $[\alpha, \beta] \cap \mathcal{C}(I)$.

4.2.4. Exemplos de aplicación

Remataremos esta sección incluíndo algúns exemplos particulares de aplicación dos resultados anteriores.

Consideremos un problema da forma

$$\begin{cases} u''(t) = f(u(\tau(t)), u(t - r_-), u(t + r_+)) \text{ en c.t.p. } t \in I_0 = [0, 1], \\ u(t) = \Phi_-(t) + \Lambda_-(u) \text{ para todo } t \in I_- = [-r_-, 0], \\ u(t) = \Phi_+(t) + \Lambda_+(u) \text{ para todo } t \in I_+ = [1, 1 + r_+], \end{cases} \tag{4.52}$$

onde $r_\mp \geq 0$, $\tau : I_0 \longrightarrow I_0$ é unha función medible, $\Phi_\mp : I_\mp \longrightarrow \mathbb{R}$ son funcións continuas e $\Lambda_\mp : \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funcionais lineares monótonos.

Obsérvese que o problema (4.52) inclúe un argumento de atraso, un argumento de adianto e información sobre os estados pasados e futuros da solución. Considérase o intervalo $[0, 1]$ só por simplicidade nos cálculos, pero pode ser substituído por un intervalo $[a, b]$ arbitrario.

Proposición 4.2.9. *Supoñamos que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función decrecente respecto da primeira e segunda variables e crecente respecto da terceira. Ademais, supoñamos que se satisfacen as seguintes condicións:*

(i) Para todo $z \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(-x,-x,z)}{x} < 1;$$

(ii) Para todo $z \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x,x,z)}{x} > -1;$$

(iii) Os funcionais $\Lambda_{\mp}$ son monótonos e satisfacen que $0 \leq \Lambda_{\mp}(1) < 1$.

Entón existen $\lambda, \overline{\lambda}, c, \overline{c} \geq 0$ de tal xeito que

$$\alpha(t) = \begin{cases} -c, & \text{se } t \in I_{\mp}, \\ \dfrac{\lambda}{2}\, t\,(t-1) - c, & \text{se } t \in I_0, \end{cases} \tag{4.53}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \overline{c}, & \text{se } t \in I_{\mp}, \\ \overline{c} - \dfrac{\overline{\lambda}}{2}\, t\,(t-1), & \text{se } t \in I_0, \end{cases} \tag{4.54}$$

son, respectivamente, unha subsolución e unha sobresolución do problema (4.52). En consecuencia, este problema ten cuasisolucións extremais no intervalo funcional $[\alpha,\beta] \bigcap \mathcal{C}(I)$.

Proba. Tomemos
$$c \geq \frac{-\operatorname{mín}_{t \in I_{\mp}} \phi_{\mp}(t)}{1 - \Lambda(1)}, \tag{4.55}$$
onde $\Lambda(1) = \operatorname{mín}\{\Lambda_-(1), \Lambda_+(1)\}$.

En virtude da condición (i) podemos escoller $\mu > 0$ suficientemente grande, $\mu \geq \dfrac{8}{7}c$, de xeito que se cumpra a desigualdade

$$f(-\mu,-\mu,-c) < \mu. \tag{4.56}$$

Tomando agora $\lambda = 8(\mu - c)$ resulta

$$f\left(\frac{-\lambda}{8} - c, \frac{-\lambda}{8} - c, -c\right) \leq \frac{\lambda}{8} + c, \tag{4.57}$$

e ademais
$$\frac{\lambda}{8} + c \leq \lambda \tag{4.58}$$

por ser $\mu \geq \dfrac{8}{7}c$.

Amosaremos agora que a función α definida en (4.53) é unha subsolución para o problema (4.52).

En primeiro lugar, para $t \in I_{\mp}$ tense que

$$\Phi_{\mp}(t) + \Lambda_{\mp}(\alpha) \geq \min_{t\in I_{\mp}} \Phi_{\mp}(t) - c\,\Lambda(1), \tag{4.59}$$

polo que a condición (4.55) implica $\alpha(t) \leq \phi_{\mp}(t) + \Lambda_{\mp}(\alpha)$ en $I_{\mp}$. Por outra banda, a monotonía de f e as desigualdades (4.57)–(4.58) implican que

$$f(\alpha(\tau(t)), \alpha(t-r_-), \alpha(t+r_+)) \leq f\left(\frac{-\lambda}{8} - c, \frac{-\lambda}{8} - c, -c\right) \leq \lambda = \alpha''(t)$$

para case todo $t \in I_0$, polo que queda probado que α é unha subsolución para o problema (4.52).

A construción dunha sobresolución β faise de xeito similar, tomando

$$\overline{c} \geq \frac{\max_{t\in I_{\mp}} \phi_{\mp}(t)}{1-\overline{\Lambda}(1)}, \tag{4.60}$$

onde $\overline{\Lambda}(1) = \max\{\Lambda_-(1), \Lambda_+(1)\}$, e

$$\overline{\lambda} \geq -f\left(\overline{c} + \frac{\overline{\lambda}}{8}, \overline{c} + \frac{\overline{\lambda}}{8}, \overline{c}\right), \quad \overline{\lambda} \geq \frac{8}{7}\overline{c}. \tag{4.61}$$

Obsérvese que o número $\overline{\lambda}$ satisfacendo (4.61) pode ser escollido en virtude da condición (ii) e da monotonía de f respecto das súas primeira e segunda variables.

En consecuencia, por aplicación do Teorema 4.2.4, podemos concluír que o problema (4.52) ten cuasisolucións extremais continuas entre α e β. □

Observación 4.2.10. *No problema (4.52) pode ser permutado o papel das variables segunda e terceira na función f, isto é, a parte non lineal podería ser crecente respecto da variable con atraso e crecente respecto da variable con adianto. Os razoamentos feitos seguirían sendo válidos mutatis mutandis.*

Exemplo 4.2.11. *Sexa $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ unha enumeración dos números racionais do intervalo $(-\infty, 0]$ e definamos a función*

$$\varphi(x) = 1 - \sum_{x \geq q_n} 2^{-n},$$

que é decrecente e discontinua en cada número racional de $(-\infty, 0]$.

O problema con atraso

$$\begin{cases} u''(t) = f\left(u\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right) \text{ en c.t.p. } t \in [0,1], \\ u(t) = \operatorname{sen}(4\pi t) + \displaystyle\int_{-1/2}^{1} k(s)u(s)\,ds \text{ para } t \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right], \\ u(1) = \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \tag{4.62}$$

con

$$f(y) = \begin{cases} \varphi(y), & \text{se } y \le 0, \\ -\sqrt{y}, & \text{se } y > 0, \end{cases}$$

e k é integrable e non negativa, satisface as condicións da Proposición 4.2.9 sempre que se cumpra a desigualdade

$$\|k\|_{L^1(-\frac{1}{2},1)} < 1.$$

En consecuencia, o problema (4.62) ten cuasisolucións extremais en $[\alpha, \beta] \bigcap \mathcal{C}(I)$, onde α e β poden construírse segundo se fai na proba da Proposición 4.2.9. Así, basta tomar

$$\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{1 - \displaystyle\int_{-1/2}^{1} k(s)\,ds}, & \text{se } t \in [-1/2, 0], \\[2ex] \dfrac{1}{2}t(t-1) - \dfrac{1}{1 - \displaystyle\int_{-1/2}^{1} k(s)\,ds}, & \text{se } t \in [0,1], \end{cases}$$

e

$$\beta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \displaystyle\int_{-1/2}^{1} k(s)\,ds}, & \text{se } t \in [-1/2, 0], \\[2ex] \left(1 - \dfrac{8}{7}t(t-1)\right) \dfrac{1}{1 - \displaystyle\int_{-1/2}^{1} k(s)\,ds}, & \text{se } t \in [0,1]. \end{cases}$$

(Para obter os valores de λ e $\overline{\lambda}$ satisfacendo (4.57) e (4.61) tívose en conta, respectivamente, que $f(y) \le 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e $-f(y) \le y$ para $y \ge 1$.)

Ademais, posto que a variable crecente non aparece no plantexamento do problema (4.62), as cuasisolucións extremais son, de feito, solucións extremais.

Bibliografía

[1] A. R. Aftabizadeh, Y. K. Huang e J. Wiener, *Bounded solutions for differential equations with reflection of the argument,* J. Math. Anal. Appl. **135** (1988), 1, 31–37.

[2] J. Appell e P. Zabrejko, "Nonlinear superposition operators", Cambridge University Press, 1990.

[3] J. P. Aubin, "Viability Theory", Birkhäuser, Boston, 1991.

[4] J. P. Aubin e A. Cellina, "Differential Inclusions", Springer–Verlag, Berlín Heidelberg, 1984.

[5] D. C. Biles, *Existence of solutions for discontinuous differential equations*, Differential Integral Equations **8** (1995), 6, 1525-1532.

[6] D. C. Biles e P. A. Binding, *On Carathéodory's conditions for the initial value problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 5, 1371–1376.

[7] D. C. Biles e R. López Pouso, *First–order singular and discontinuous differential equations,* Bound. Value Probl. (2009), Art. ID 507671, 25 pp.

[8] D. C. Biles e E. Schechter, *Solvability of a finite or infinite system of discontinuous quasimonotone differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (2000), 3349–3360.

[9] A. Cabada, *An overview of the lower and upper solutions method with nonlinear boundary value conditions,* Bound. Value Probl. (2011), Art. ID 893753, 18 pp.

[10] A. Cabada e S. Heikkilä, *Existence results for discontinuous functional differential systems,* Appl. Math. Comput. **188** (2007), 2, 1251–1259.

[11] A. Cabada e R. L. Pouso, *Extremal solutions of strongly nonlinear discontinuous second–order equations with nonlinear functional boundary conditions,* Nonlinear Anal. **42** (2000), 8, 1377–1396.

[12] C. Carathéodory, "Vorlesungen über reelle Funktionen", Chelsea Publishing Co., New York 1968.

[13] S. Carl e S. Heikkilä, "Nonlinear Differential Equations in Ordered Spaces", Chapman & Hall/CRC, 2000.

[14] Y. K. Chang, M. M. Arjunan e V. Kavitha, *Existence results for a second order impulsive functional differential equation with state–dependent delay,* Differ. Equ. Appl. **1** (2009), 3, 325–339.

[15] M. Cherpion, C. De Coster e P. Habets, *Monotone iterative methods for boundary value problems*, Diff. Int. Eqns. **12**, 3 (1999), 309–338.

[16] H. Chi, J. Bell e B. Hassard, *Numerical solution of a nonlinear advance–delay–differential equation from nerve conduction theory,* J. Math. Biol. **24** (1986), 583–601.

[17] J. Á. Cid, *On extremal fixed points in Schauder's theorem with applications to differential equations*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **11** (2004), 1, 15–20.

[18] J. Á. Cid, *On extending existence theory from scalar ordinary differential equations to infinite quasimonotone systems of functional equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 9, 2661–2670.

[19] J. Á. Cid e R. L. Pouso, *On first–order ordinary differential equations with nonnegative right–hand sides*, Nonlinear Anal. **52** (2003), 8, 1961–1977.

[20] J. Á. Cid e R. L. Pouso, *Ordinary differential equations and systems with time–dependent discontinuity sets*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **134** (2004), 4, 617–637.

[21] C. De Coster e P. Habets, "Two–point boundary value problems: lower and upper solutions", Mathematics in Science and Engineering, **205**, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

[22] M. A. Darwish e S. K. Ntouyas, *Semilinear functional differential equations of fractional order with state–dependent delay*', Electron. J. Differential Equations **38** (2009), 10 pp.

[23] K. Deimling, "Multivalued differential equations", Walter de Gruyter, Nova Iorque, 1992.

[24] A. Dyki, *Boundary value problems for differential equations with deviated arguments which depend on the unknown solution,* Appl. Math. Comput. **215** (2009), 5, 1895–1899.

[25] A. Dyki e T. Jankowski, *Boundary value problems for ordinary differential equations with deviated arguments*, J. Optim. Theory Appl. **135** (2007), 2, 257–269.

[26] R. Figueroa, *Second–order functional differential equations with past, present and future dependence*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 18, 7448–7454.

[27] R. Figueroa e R. L. Pouso, *Discontinuous first–order functional boundary value problems*, Nonlinear Anal. **69** (2008), 7, 2142–2149.

[28] R. Figueroa e R. L. Pouso, *Viability theory applied to discontinuous ordinary differential equations*, Actas do congreso internacional *Mathematical models in engineering, biology and medicine, BVP 2008*, American Institute of Physics, 2009.

[29] R. Figueroa e R. López Pouso, *Minimal and maximal solutions to second–order boundary value problems with state-dependent deviating arguments*, Bull. London Math. Soc. **43** (2011), 1, 164–174.

[30] R. Figueroa e R. López Pouso, *Coupled fixed points of multivalued operators and first–order ODEs with state-dependent deviating arguments,* Nonlinear Anal. **74** (2011), 6876–6889.

[31] R. Figueroa e R. López Pouso, *Minimal and maximal solutions to first–order differential equations with state–dependent deviated arguments*, arXiv:1104.5604, enviado para publicación.

[32] D. Franco e R. L. Pouso, *Nonresonance conditions and extremal solutions for first–order impulsive problems under weak assumptions*, ANZIAM J. **44** (2003), 3, 393–407.

[33] F. Gao, S. Lu e W. Zhang, *Existence and uniqueness of periodic solutions for a p–Laplacian Duffing equation with a deviating argument*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 10, 3567–3574.

[34] G. S. Goodman, *Subfunctions and the initial–value problem for differential equations satisfying Carathéodory's hypotheses*, J. Differential Equations **7** (1970), 232–242.

[35] C. Guo e Z. Guo, *Existence of multiple periodic solutions for a class of second–order delay differential equations,* Nonlinear Anal. Real World Appl. **10** (2009), 5, 3285–3297.

[36] D. Guo e V. Lakshmikantham, *Coupled fixed points of nonlinear operators with applications*, Nonlinear Anal. **11** (1987), 5, 623–632.

[37] D. Guo e V. Lakshmikantham, "Nonlinear problems in abstract cones", Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering **5** Academic Press, Boston, 1988.

[38] D. D. Hai, *Two point boundary value problem for differential equations with reflection of argument,* J. Math. Anal. Appl. **144** (1989), 2, 313–321.

[39] F. Hartung, T. Krisztin, H. O. Walther e J. Wu, *Functional differential equations with state–dependent delays: theory and applications,* "Handbook of differential equations: ordinary differential equations", Vol. III, 435–545, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006.

[40] E. R. Hassan e W. Rzymowski, *Extremal solutions of a discontinuous scalar differential equation,* Nonlinear Anal. **37** (1999), 8, 997–1017.

[41] S. Heikkilä, *First-order discontinuous differential equations with functional boundary conditions,* Advances in nonlinear dynamics, 273–281, Stability Control Theory Methods Appl., 5, Gordon and Breach, Amsterdam, 1997.

[42] S. Heikkilä e V. Lakshmikantham, "Monotone iterative techniques for discontinuous nonlinear differential equations", Marcel Dekker, Nova Iorque, 1994.

[43] E. Hernández Morales, M. A. McKibben e H. R. Henríquez, *Existence results for partial neutral functional differential equations with state-dependent delay*, Math. Comput. Modelling **49** (2009), 5–6, 1260–1267.

[44] E. Hernández M., H. R. Henríquez e M. A. McKibben, *Existence results for abstract impulsive second-order neutral functional differential equations,* Nonlinear Anal. **70** (2009), 7, 2736–2751.

[45] E. Hewitt e K. Stromberg, "Real and Abstract Analysis", Springer–Verlag, Nova York; Terceira Edición (1975).

[46] E. W. Hobson, "The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series" Vol. 1, Cambridge University Press, 1921.

[47] S. Hu, *Differential equations with discontinuous right–hand sides*, J. Math. Anal. Appl. **154** (1991), 2, 377–390.

[48] G. E. Hutchinson, *Circular causal systems in ecology,* Ann. New York Acad. Sci. **50** (1948), 221–248.

[49] T. Jankowski, *Advanced differential equations with nonlinear boundary conditions*, J. Math. Anal. App. **304** (2005), 490–503.

[50] T. Jankowski, *On delay differential equations with nonlinear boundary conditions*, Bound. Value. Probl. **2** (2005), 201–214.

[51] T. Jankowski, *Existence of solutions of boundary value problems for differential equations in which deviated arguments depend on the unknown solution,* Comput. Math. Appl. **54** (2007), 3, 357–363.

[52] T. Jankowski, *Monotone method to Volterra and Fredholm integral equations with deviating arguments,* Integral Transforms Spec. Funct. **19** (2008), 1–2, 95–104.

[53] T. Jankowski, *Positive solutions of three-point boundary value problems for second order impulsive differential equations with advanced arguments,* Appl. Math. Comput. **197** (2008), 179–189.

[54] T. Jankowski, *Existence of positive solutions to second order four–point impulsive differential problems with deviating arguments,* Comput. Math. Appl. **58** (2009), 4, 805–817.

[55] T. Jankowski, *On dynamic equations with deviating arguments*, Appl. Math. Comput. **208** (2009), 2, 423–426.

[56] T. Jankowski, *Positive solutions for three–point one-dimensional p–Laplacian boundary value problems with advanced arguments,* Appl. Math. Comput. **215** (2009), 1, 125–131.

[57] T. Jankowski e W. Szatanik, *Second–order differential equations with deviating arguments,* Bound. Value Probl. (2006), Art. ID 23092, 15 pp.

[58] V. Lakshmikantham, *Some results in functional differential equations,* Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A **34** (1964), 299–306.

[59] H. Leeb, *On a differential equation with advanced and retarded arguments,* Comm. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 4, 77–86.

[60] E. Liz, *Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos,* Materials Matemàtics (2006), Universitat Autònoma de Barcelona, **24** Art. 17.

[61] R. M. May, "Stability and complexity in model ecosystems", Princeton University Press, 1975.

[62] E.J. McShane, "Integration", Princeton University Press, Princeton (1967).

[63] J. Moore, *Existence of multiple quasifixed points of mixed monotone operators by iterative techniques*, Appl. Math. Comput. **9** (1981), 2, 135–141.

[64] A. J. Nicholson, *The self–adjustment of populations to change,* Cold Spring Harbor Symposia of Quantitative Biology, **22** (1957), 153–173.

[65] J. J. Nieto e R. Rodríguez–López, *Monotone method for first–order functional differential equations,* Comput. Math. Appl. **52** (2006), 3–4, 471–484.

[66] J. J. Nieto e R. Rodríguez–López, *Comparison results and approximation of extremal solutions for second-order functional differential equations*, J. Nonlinear Funct. Anal. Differ. Equ. **1** (2007), 1, 67–102.

[67] D. O'Regan e M. Zima, *Leggett–Williams norm–type fixed point theorems for multivalued mappings,* Appl. Math. Comput. **187** (2007), 1238–1249.

[68] G. Peano, *Sull'integrabilitá delle equazione differenziali de primo ordine,* Atti R. Accad. Torino **21** (1885–86), 677–685.

[69] O. Perron, *Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$, Math. Ann. **76** (1915), 4, 471–484.

[70] E. Picard, *Sur l'aplication des méthodes d'approximations succesives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires,* J. de Math. **9** (1893), 217–271.

[71] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mishchenko, "The mathematical theory of optimal processes", John Wiley & Sons, Inc., California, 1965.

[72] R. L. Pouso, "Problemas de frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias discontinuas", (Tesis Doctoral) Universidade de Santiago de Compostela, 1999.

[73] R. L. Pouso, *Nonordered discontinuous upper and lower solutions for first–order ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. **45** (2001), 4, 391–406.

[74] R. L. Pouso, *Necessary conditions for solving initial value problems with infima of superfunctions*, Math. Inequal. Appl. **8** (2005), 4, 633–641.

[75] I. A. Rus e V. Darzu–Ilea, *First order functional–differential equations with both advanced and retarded arguments,* Fixed Point Theory **5** (2004), 1, 103–115.

[76] G. F. Simmons, "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas", McGraw–Hill, Madrid, 1993.

[77] A. Tamasan, *Extremal solutions for the discontinuous delay–equations*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. **41** (1996), 4, 107–112.

[78] A. Tarski, *A lattice–theoretical fixpoint theorem and its applications,* Pacific J. Math. **5**, (1955), 2, 285–309.

[79] H. O. Walther, *A periodic solution of a differential equation with state–dependent delay*, J. Differential Equations **244** (2008), 8, 1910–1945.

[80] H. O. Walther, *Algebraic–delay differential systems, state–dependent delay, and temporal order of reactions*, J. Dynam. Differential Equations **21** (2009), 1, 195–232.

[81] W. Wang, B. Weibing e J. Shen, *Positive solutions to a multi–point boundary value problem with delay*, Appl. Math. Comput. **188** (2007), 1, 96–102.

[82] F. H. Wong, S. P. Wang e T. G. Chen, *Existence of positive solutions for second order functional differential equations,* Comput. Math. Appl. **56** (2008), 10, 2580–2587.

[83] C. Yang, C. Zhai e J. Yan, *Positive solutions of the three–point boundary value problem for second order differential equations with an advanced argument,* Nonlinear Anal. **65** (2006), 2013–2023.

[84] E. Zeidler, "Nonlinear functional analysis and its applications I. Fixed–point theorems", Springer–Verlag, 1993.

[85] Z. Zeng e Z. Zhou, *Multiple positive periodic solutions for a class of state–dependent delay functional differential equations with feedback control*, Appl. Math. Comput. **197** (2008), 1, 306–316.