



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

La Teoría de Números de los Elementos de Euclides

Ricardo Vega González

Celso Rodríguez Fernández

2022-2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Grado

La Teoría de Números de los Elementos de Euclides

Ricardo Vega González
Celso Rodríguez Fernández

julio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Álgebra
Título: La Teoría de Números de los Elementos de Euclides
Breve descripción del contenido
Se estudiarán los métodos seguidos en el Libro VIII de “Elementos” de Euclides, haciendo demostraciones análogas pero en un lenguaje actual.
Recomendaciones
Estar familiarizado con los volúmenes previos de los Elementos de Euclides, especialmente con el volumen VIII. Se incluyen resultados de libros anteriores.
Otras observaciones

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Volúmenes V y VI	1
1.1. Volumen V	1
1.1.1. Definiciones relevantes	1
1.1.2. Proposiciones relevantes	2
1.2. Volumen VI	3
1.2.1. Definiciones relevantes	3
1.2.2. Proposiciones relevantes	3
2. Volumen VII	5
2.1. Definiciones relevantes	5
2.2. Proposiciones relevantes	6
3. Volumen VIII	9
3.1. Proposiciones del libro	9
A. Agradecimientos	51
Bibliografía	53

Resumen

En esta publicación se abordarán desde el punto de vista de las matemáticas contemporáneas, los razonamientos y las conclusiones desarrolladas por Euclides en el octavo capítulo de “Elementos”. Una vez introducidos ciertos resultados previos imprescindibles para el desarrollo de la materia estudiada, se expondrán punto por punto cada una de las 27 proposiciones que el heleno probó *circa* S. III a.C.

Abstract

This paper will develop from contemporary mathematics' point of view, the arguments and conclusions reached by Euclid in the eight chapter of “Elements”. Once previous results needed for the basic understanding of the matter at hand have been introduced, all 27 propositions included in this eighth volume by the hellene *circa* cent. III BC, will be approached under modern procedures.

Introducción

El objetivo de este documento es visitar el octavo libro de los “Elementos” de Euclides adaptándolo a un lenguaje matemático actualizado y más riguroso.

Sobre Elementos

Los Elementos de Euclides es el segundo libro del que más ediciones se han publicado, solo superado por la Biblia. Se utilizó como libro de texto, como paradigma de los métodos matemáticos, como fuente de problemas para la investigación matemática y, muchas veces, como fuente de inspiración para creaciones artísticas, filosóficas o literarias. [4, 5]

Lo poco que sabemos sobre Euclides es debido a Proclo que muestra que este tampoco tenía conocimiento sobre el lugar de nacimiento de Euclides, o las fechas de su nacimiento y fallecimiento. Aun así, Proclo deduce, sabiendo que era más joven que los primeros pupilos de Platón y que debido a una mención de Arquímedes sobre Euclides en Sobre la Esfera y el Cilindro, que debió de haber nacido sobre el año 300 A.C. Proclo piensa que Euclides pudo haber sido un platónico, aunque no hay evidencia de esto. Lo que sí sabemos es que enseñó y fundó una escuela en Alejandría, gracias a Pappus que dice que Apolonio pasó mucho tiempo con los pupilos de Euclides en Alejandría.

Muy poco se sabe de Euclides y algunos, incluso barajan las hipótesis de que no fuera quien escribió los elementos sino el líder de un grupo de matemáticos que trabajaban en Alejandría y escribían con su nombre (al igual que ocurrió en el siglo XX con el grupo Bourbaki) o, inclusive, un grupo de matemáticos que adoptó este nombre por el filósofo Euclides de Mégara, quien habría vivido aproximadamente 100 años antes. [5]

Cuando se habla de los Elementos, generalmente se piensa en la geometría, pero los Elementos no son solo geometría. Los cuatro primeros libros se dedican al estudio de la geometría plana y los tres últimos al de la geometría del espacio, pero los libros V y VI tratan de la teoría de la proporción, el VII, VIII e IX están dedicados a la aritmética y el libro X, conocido como la cruz de los matemáticos, se dedica al estudio de la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad y a la clasificación de distintos tipos de rectas.

Son muchas las traducciones al castellano de los 4 primeros libros, varias de los seis primeros libros y algunas llegaron hasta el libro IX. También hay varias traducciones de los tres últimos libros de geometría del espacio, pero la primera traducción al castellano del libro X es la de M. L. Puertas Castaños, Elementos, vols. I-III, Madrid 1991-1996. [6] En 2013 aparece la primera traducción completa de los Elementos de Euclides al Gallego, a partir del texto griego fijado en la edición crítica de J. L. Heiberg y H. Menge, Euclidis Opera omnia, vols. I-IV, Leipzig 1883-86, [7] realizada por Ana Gloria Rodríguez Alonso y Celso Rodríguez Fernández y, publicado por la Universidade de Santiago de Compostela dentro de la colección Clásicos del Pensamiento Universal.[3]

Los Libros VII, VIII y IX forman el bloque de la teoría de números de los Elementos, un bloque independiente al resto que son los únicos que tratan de aritmética como tal. En estos libros sobre aritmética, Euclides, sigue usando el lenguaje geométrico, representa los números como segmentos de recta y habla de que un número mide a otro número cuando es un divisor. Los conceptos geométricos inundan todas las proposiciones, pero sus argumentaciones no dependen para nada de la geometría, estando esta solo como ayuda para la comprensión.

El libro VIII prosigue con la teoría de números, tratando sobre todo las progresiones geométricas que, para Euclides, son conjuntos de números en proporción continua. A partir de la proposición 14 se dedica al estudio de los números planos (producto de dos números) y cuadrados, sólidos (producto de tres números) y cubos, con una traslación evidente al estudio de la semejanza entre rectángulos y cuadrados, prismas de base rectangular y cubos. Incluye el estudio de la proporción entre las áreas (volúmenes) de rectángulos y cuadrados (prismas de base rectangular y cubos) en función de la proporción entre sus lados.

Sobre el documento

Este documento ha sido redactado siguiendo el método constructivo usado por Euclides, manteniendo sus razonamientos en las demostraciones y actualizando el lenguaje.

Para ello nos hemos basado, principalmente, en los textos de Heath [1, 2] y el de Rodríguez *et al.* [3]

La estructura del documento es la siguiente:

Dos primeros capítulos introductorios que contienen todas las definiciones y proposiciones de capítulos previos que son usadas en el octavo tomo de “Elementos”. El primero de estos contiene los resultados de los volúmenes V y VI, pertenecientes a la teoría de la proporción. El capítulo dos, por otra parte, contiene aquellos resultados del volumen VII de “Elementos” que son necesarios para el desarrollo de este documento, ya del bloque de teoría de números.

El tercer capítulo contiene el trabajo en sí: las 27 proposiciones del libro VIII.

Cada uno de estos capítulos está estructurado de la siguiente forma: primero las definiciones del capítulo y luego las proposiciones de este (Euclides no incluyó definiciones en el capítulo VIII).

En cuanto al Capítulo 3, cada una de las 27 proposiciones sigue el siguiente formato:

- El enunciado de la proposición traducido al castellano manteniendo, en la medida de lo posible, las definiciones y el lenguaje usado por Euclides, reforzando la rigurosidad del mismo.
Cada uno de estos enunciados va seguido de un recuadro que contiene el enunciado del texto de Heath[1, 2] sin traducir.
- La demostración del enunciado, manteniendo una vez más, en la medida de lo posible, las definiciones y la notación de Euclides (en proporción continua, mide a, número plano...) sin alterar el método ni los razonamientos presentes en su obra con un lenguaje actualizado.
- Un recuadro con la demostración reeditada, citando los resultados usados, utilizando matemáticas modernas esta vez: se usa notación y conceptos más actuales (en progresión geométrica, es divisor de, natural producto de dos naturales...), manteniendo la idea de la demostración. Como excepción, las **Proposiciones VIII, 16 y 17**, no incluyen esta reedición de la demostración por su sencillez (son los contrarrecíprocos de las dos proposiciones previas).
- Además, las **Proposiciones VIII, 11, 12, 14, 15, 18 y 19** incluyen figuras para facilitar la visualización geométrica de estas.

Como se menciona en párrafos anteriores, el capítulo VIII de “Elementos” trata de teoría de números, esto es, principalmente, razones entre naturales. Cabe mencionar que, para Euclides, una razón entre dos naturales, $A:B$, no es un racional (*i.e.* una cantidad o un número en el sentido actual) con el que se pueda operar. es por esto que, cuando utilicemos la notación de Euclides, *i.e.* en la primera demostración que se incluye, no usaremos el símbolo “=” para decir que dos razones entre números distintos son iguales. Reservaremos esta notación para expresar la igualdad de las diferentes formas de expresar una misma razón entre dos naturales, $A:B$, de en función de las expresiones equivalentes de A y de B y para la síntesis posterior de la demostración. En su lugar usaremos la notación “::”.

Capítulo 1

Volúmenes V y VI

1.1. Volumen V

1.1.1. Definiciones relevantes

Definición V, 5. *Dos magnitudes, A y B, están en la misma razón que otras, Ψ y Ω ,¹ si, al tomar unos múltiplos iguales de A y Ψ y otros múltiplos iguales de B y Ω , el múltiplo de A supera, iguala o es superado por el de B cuando y solo cuando el múltiplo de Ψ hace lo mismo con el de Ω . Viz. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{l} nA = mB \wedge n\Psi = m\Omega \\ \vee \\ nA < mB \wedge n\Psi < m\Omega \\ \vee \\ nA > mB \wedge n\Psi > m\Omega \end{array} \right.$$

Notación 1.1. Lo denotamos:

$$A : B :: \Psi : \Omega$$

Definición V, 6. *Las magnitudes que guardan la misma razón se llaman **proporcionales**.*

Notación 1.2. Denotamos A y B proporcionales a Γ y Δ , i.e. A y B están en la misma razón que

¹En notación moderna esto equivale a:

$$\frac{B}{A} = \frac{\Omega}{\Psi} = r \in \mathbb{R}$$

Similar a la notación que utilizamos con la diferencia principal de que, Euclides, no se preocupa por el valor numérico de la razón, sino que las concibe como “relaciones con respecto al tamaño” (Heath, 1956, pp. 116-119) de dos números.

Γ y Δ , de la siguiente forma:

$$A : B :: \Gamma : \Delta$$

Dos conjuntos ordenados de números del mismo tamaño, $\{\Lambda_i\}_{i=1}^n$ y $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$, son proporcionales si, cogidos sus números sucesivos de dos en dos, estos son proporcionales. *I.e.*:

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}; \Lambda_i : \Lambda_{i+1} :: \Phi_i : \Phi_{i+1}.$$

Lo denotamos:

$$\Lambda_1 : \Lambda_2 : \dots : \Lambda_n :: \Phi_1 : \Phi_2 : \dots : \Phi_n$$

Definición V, 9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera con la tercera guarda una **razón duplicada** de la que guarda con la segunda.²

Definición V, 10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera con la cuarta guarda una **razón triplicada** de la que guarda con la segunda o, lo que es lo mismo, el cubo de la razón. En general esta definición es válida para el caso enésimo.³

Definición V, 17. Sean dos conjuntos de magnitudes $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ proporcionales. Esto es, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}; A_i : A_{i+1} :: B_i : B_{i+1}$.

Decimos que entre ambos conjuntos hay **razón por igualdad** o que, **ex aequali**⁴, están en la misma razón, si la primera magnitud de A es a la enésima, como la primera de B a su última; *i.e.* $A_1 : A_n :: B_1 : B_n$.

1.1.2. Proposiciones relevantes

Proposición V, 22. Sean dos conjuntos de magnitudes $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ de igual cardinal tales que, al ser cogidas de dos en dos, estén en la misma razón. Esto es, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}; A_i : A_{i+1} :: B_i : B_{i+1}$.

²Sean tres magnitudes proporcionales A, Γ y B . En notación contemporánea:

$$A : \Gamma :: \Gamma : B \iff \frac{\Gamma}{A} = \frac{B}{\Gamma} = r \implies \frac{B}{A} = \frac{\Gamma}{A} \frac{B}{\Gamma} = r^2$$

Por lo que, en el sentido numérico, una determinada razón duplicada se corresponde con el cuadrado de la razón.

³Sean cuatro magnitudes proporcionales A, Γ, Δ y B . En notación moderna:

$$A : \Gamma :: \Gamma : \Delta :: \Delta : B \iff \frac{\Gamma}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{B}{\Delta} = r \implies \frac{B}{A} = \frac{\Gamma}{A} \frac{\Delta}{\Gamma} \frac{B}{\Delta} = r^3$$

Por lo que, en el sentido numérico, una determinada razón duplicada se corresponde con el cuadrado de la razón.

⁴*Ex aequali*, expresión latina. *Ex* significa “de” o “fuera de”, *Aequali* significa “igual a” o “comparable con”. Aparentemente quiere decir *ex aequali distantia*: a la misma distancia o intervalo, *i.e.* después del mismo número de términos intermedios. La definición es meramente verbal pues esto ocurriría para cualesquiera magnitudes que verifiquen la primera condición, hecho se prueba en la **Proposición V, 22**.

Entonces estos dos conjuntos, **ex aequali**, estarán en la misma razón (o estarán en la **misma razón por igualdad**)⁵, i.e. $A_1 : A_n :: B_1 : B_n$.

1.2. Volumen VI

1.2.1. Definiciones relevantes

Definición VI, 5. *Se dice que una razón está compuesta de varias razones, cuando el valor de la primera es el producto de los valores de las últimas.*⁶⁷

1.2.2. Proposiciones relevantes

Proposición VI, 23. *Los paralelogramos de ángulos iguales (sc. sus superficies) guardan entre ellos la razón compuesta de la razón de los lados. Aplicable a números planos.*

⁵**Definición V, 17**

⁶**Heath [1, 2]:** “A ratio is said to be compounded of ratios when the sizes ($\pi\nu\lambda\iota\kappa\acute{o}\tau\nu\tau\epsilon\varsigma$) of the ratios multiplied together make some (?ratio, or size).” (p. 189)

⁷En esta definición el concepto de razón, claramente no tiene nada que ver con la idea de Euclides, que nunca hace referencia al “valor de una razón”, ya que él no las concibe como magnitudes. Sin embargo, este enunciado sí tiene sentido con la idea actual de razón:

Sean A, Γ y B, la razón de A con B es el producto de las razones de A con Γ y de este último con B. *I.e.:*

$$\frac{B}{A} = \frac{\Gamma}{A} \frac{B}{\Gamma}$$

Además describe una operación desconocida para la geometría, el producto de razones. Se considera, por tanto, una interpolación de alguna traducción posterior. Seguramente Euclides nunca definió este término a pesar de usarlo en su obra.

Según **Heath [1, 2]:** “-it is beyond doubt that this definition is interpolated.- There is no reference to the definition in the place where compound ratio is mentioned for the first time (VI, 23), nor anywhere else in Euclid; neither is it ever referred to by the other great geometers- Moreover the content of the definition is in itself suspicious. It speaks of “the sizes of ratios being multiplied together (literally, into themselves),” an operation unknown to geometry.” (pp. 189-190)

Podemos proponer dos definiciones más acordes a Euclides:

Definición VI, 5(II): Sean los números $\{\Lambda_i\}_{i=1}^n$. Se dice que la razón $\Lambda_i : \Lambda_j, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j$ está compuesta de las razones $\{\Lambda_k : \Lambda_{k+1}\}_{k=i}^{j-1}$.

Alternativamente, se podría entender de la siguiente forma:

Definición VI, 5(III): Sean los números $\{\Lambda_i\}_{i=1}^n$ y $\{K_i\}_{i=1}^n$. Sean $A = \prod_{i=1}^n \Lambda_i$ y $B = \prod_{i=1}^n K_i$.

Se dice que la razón $A:B$ está compuesta de las razones $\{\Lambda_i : K_i\}_{i=1}^n$.

Sin embargo, es más probable que Euclides lo viese de la primera manera ya que, esta última formulación de la definición, coincide con la **Proposición VIII, 5** para $k=2$. Lo cual es un poco redundante.

Capítulo 2

Volumen VII

2.1. Definiciones relevantes

Definiciones VII, 1 y 2. *Euclides denomina **unidad** al uno y **número** al resto de naturales positivos.*

Definición VII, 15. *Se dice que un número, A , **multiplica** a otro, B , cuando el multiplicado es sumado tantas veces como unidades haya en el otro. El resultado es un número llamado **producto** que denotamos AB .*

Definiciones VII, 16 y 17. *Al multiplicarse dos (tres) números entre sí, al producto se le llama **plano** (**sólido**) y a los números multiplicados, **lados**.*

Definiciones VII, 18 y 19. *Un número **cuadrado** (**cubo**) es el producto de dos (tres) números iguales.*

Definición VII, 20. *Cuatro números, A , B , Γ y Δ , son **proporcionales** cuando la razón entre los dos primeros equivale a la razón entre el tercero y el cuarto;¹, es decir, el primero mide o es parte o partes del segundo tantas veces como el tercero al cuarto:*

$$\left\{ \begin{array}{l} nA = mB \wedge n\Gamma = m\Delta \\ \vee \\ nA < mB \wedge n\Gamma < m\Delta \\ \vee \\ nA > mB \wedge n\Gamma > m\Delta \end{array} \right.$$

¹Esta definición es la restricción de la **Definición V, 5** a números.

Notación 2.1. Ya que los números son magnitudes, mantenemos la notación:

$$A : B :: \Gamma : \Delta^2$$

Definición VII, 21. Para números planos o sólidos se dice que dos son semejantes si sus lados son proporcionales. I.e.:

- Sean A y B planos semejantes; sean Λ_A^1, Λ_A^2 y Λ_B^1, Λ_B^2 sus respectivos lados:

$$\Lambda_A^1 : \Lambda_B^1 :: \Lambda_A^2 : \Lambda_B^2 \iff {}^3\Lambda_A^1 : \Lambda_A^2 :: \Lambda_B^1 : \Lambda_B^2 \quad (2.1)$$

- Sean A y B sólidos semejantes; sean $\Lambda_A^1, \Lambda_A^2, \Lambda_A^3$ y $\Lambda_B^1, \Lambda_B^2, \Lambda_B^3$, sus respectivos lados:

$$\Lambda_A^1 : \Lambda_A^2 : \Lambda_A^3 :: \Lambda_B^1 : \Lambda_B^2 : \Lambda_B^3 \iff {}^4\Lambda_A^1 : \Lambda_B^1 :: \Lambda_A^2 : \Lambda_B^2 :: \Lambda_A^3 : \Lambda_B^3 \quad (2.2)$$

2.2. Proposiciones relevantes

Proposición VII, 13. Si dos números son proporcionales a otros dos, también serán **proporcionales por alternancia**. Es decir:

$$A : B :: \Gamma : \Delta \iff A : \Gamma :: B : \Delta$$

Proposición VII, 14.⁵ Sean dos conjuntos de números $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ y $B=\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ de igual cardinal tales que, al ser cogidos de dos en dos, estén en la misma razón. Esto es, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}; A_i : A_{i+1} :: B_i : B_{i+1}$.

Entonces estos dos conjuntos, **ex aequali**, también estarán en la misma razón (o estarán en la misma razón por igualdad)⁶, i.e. $A_1 : A_n :: B_1 : B_n$.

Proposición VII, 16. En una multiplicación de dos números, el orden de los factores no altera el producto. Es decir $\forall A, B$ números; $AB=BA$.

Proposición VII, 17. Dos números A y B , mantienen la misma razón al ser multiplicados por un tercero, Γ . Expresaremos esta relación como sigue:

$$\Gamma A : \Gamma B :: A : B$$

²En notación moderna esto equivale a:

$$\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma} = r \in \mathbb{Q}$$

N.B., ahora r es un racional cuando, en el resultado homólogo para magnitudes, era real.

³**Proposición VII, 13**

⁴**Proposición VII, 13**

⁵Esta Proposición es la restricción de la **Proposición V, 22** de magnitudes a números

⁶**Definición V, 17**

Proposición VII, 18. *Si dos números A y B , multiplican a otro número Γ ; los dos productos, $A\Gamma$ y $B\Gamma$, guardan la misma razón entre ellos que los que multiplicaron al primero. Lo denotamos:*

$$A\Gamma : B\Gamma :: A : B$$

Obsevación: En virtud de la **Proposición VII, 16**, se tiene que las dos proposiciones anteriores son equivalentes.

Proposición VII, 19. *Sean cuatro números A , B , Γ y Δ . Estos son proporcionales, sí y solo sí, el producto del primero por el cuarto es igual al producto del segundo por el tercero. I.e:*

$$A : B :: \Gamma : \Delta \iff A\Delta = B\Gamma$$

Proposición VII, 20. *Sean cuatro números proporcionales, A , B , Γ y Δ , tales que los dos primeros son los menores números en su razón. El menor de la primera pareja mide (es divisor de) tantas veces al menor de la segunda como el mayor de la primera al mayor de la segunda. I.e., cuando A y B son los menores números en su razón:*

$$A : B :: \Gamma : \Delta \implies \exists E \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} \Gamma = EA \\ \Delta = EB \end{cases}$$

Proposiciones VII, 21 y 22. *Dos números son primos entre sí, si y solo si, son los menores en su razón.*

Proposición VII, 27. *Si dos números son primos entre sí, entonces los números cuadrados (cubos)⁷ de los que son lados, también son coprimos.*

Proposición VII, 33. *Dados varios números, hallar los menores de los que están en su misma razón.⁸*

Proposición VII, 34. *Para dos números A y B , hallar su mínimo común múltiplo, $m.c.m.(A,B)$.*

Proposición VII, 35. *Si dos números, A y B , son divisores de un tercero, el mínimo común múltiplo de los dos primeros, $m.c.m.(A, B)$, también será un divisor del tercero.*

⁷Definiciones VII, 18 y 19

⁸Si varios números dados son divididos entre su máximo común divisor, los nuevos números obtenidos guardan la misma razón que los primeros y, además, son los menores de entre todos los que guardan esa razón (sc. son primos entre sí).

Capítulo 3

Volumen VIII

3.1. Proposiciones del libro

Proposición VIII, 1. *Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales¹ y sus extremos son primos entre sí, entonces estos serán los menores de entre todos los que estén en su misma razón.*

Heath [1, 2]: *“If there be as many numbers as we please in continued proportion, and the extremes of them be prime to one another, the numbers are the least of those which have the same ratio with them.”* (p. 345)

Demostración: Sean A, Γ, Δ y B números en proporción continua tales que A y B sean primos entre sí; veamos que son los menores en esta proporción:

Supongamos pues E, Z, H, Θ en la misma razón que A, Γ, Δ y B y menores que ellos. Luego, por igualdad; la razón entre A y B coincide con la de E y Θ :

$$A : B :: {}^2E : \Theta$$

Ahora bien, por ser A y B coprimos y según la **Proposición VII, 21**, son los menores números en su razón.

¹Se dice que n números son continuamente proporcionales (o que están en proporción continua) si componen una progresión geométrica. De esta forma, una sucesión de números continuamente proporcionales $\{\Lambda_i\}_{i=1}^n$, en la razón de A y B es tal que:

$$A : B :: \Lambda_i : \Lambda_{i+1}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$$

Exempli gratia:

$$\{X_i\}_{i \in 1,2,3,4} = \left\{8\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right\}_{n \in 1,2,3,4} = \{8, 12, 18, 27\}$$

²**Proposición VII, 14**

Por último, la **Proposición VII, 20** asegura que, por ser A y B los números menores en su razón, medirán a (*i.e.* son divisores de) todas las parejas de números proporcionales. En particular, A medirá a E tantas veces como B a Θ .

Absurdo, con E, Z, H y Θ menores que A, Γ , Δ y B; A no puede medir a E y B no puede medir a Θ . Luego no están en la misma razón, *sc.* cuatro números menores que A, Γ , Δ y B no pueden ser proporcionales a estos. \square

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, naturales en progresión geométrica y sean a_1 y a_n coprimos (*I.e.* $\text{m.c.d.}(a_1, a_n)=1$). Supongamos ahora $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ proporcionales a a_1, a_2, \dots, a_n y menores que estos últimos:

Por igualdad: [VII, 14]

$$a_1 : a_n = b_1 : b_n$$

Pero a_1 y a_n son coprimos \implies [VII, 21] a_1 y a_n son los menores naturales en su razón.

Por ser a_1 y a_n los menores naturales en su razón: [VII, 20]

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_n}{a_n} \in \mathbb{N}$$

Pero ya que b_1, b_2, \dots, b_n son naturales menores que a_1, a_2, \dots, a_n se tiene que:

$$0 < \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_n}{a_n} < 1 \notin \mathbb{N}$$

Absurdo, ya que no se verifica la tesis de [VII, 20], por tanto, su hipótesis ha de ser falsa y, como habíamos supuesto que b_1 y b_n son naturales menores que a_1 y a_n , se tiene que no pueden ser proporcionales. Esto implica que b_1, \dots, b_n tampoco están en la misma razón que a_1, \dots, a_n .

Es decir, n números menores que a_1, \dots, a_n no serán proporcionales a estos, con lo cual, son los menores en su razón. \square

Proposición VIII, 2. *Existen n números continuamente proporcionales tales que son los menores en la razón dada.*

Heath [1, 2]: “*To find numbers in continued proportion, as many as may be prescribed, the least that are in a given ratio.*” (p. 346)

Demostración: En efecto, la razón dada se puede expresar como la razón $A:B^3$, siendo A y B los menores números en esta razón.

Sean ahora, $\Gamma=AA$, $\Delta=AB$ y $E=BB$. Como Γ y Δ son el resultado respectivo de multiplicar A y B por A, la **Proposición VII, 17** nos garantiza que estarán en la misma razón que A y B:

$$\Gamma : \Delta = AA : AB :: A : B$$

³Proposición VII, 33

Por ser Δ y E el resultado de multiplicar B por A y B , la **Proposición VII, 18** asegura que estos últimos estarán en la razón de Δ y E . Así:

$$\Delta : E = AB : BB :: A : B$$

Definamos ahora $X = A\Gamma = AAA$, $\Psi = A\Delta = AAB$, $\Omega = AE = ABB$, $T = BE = BBB$. Usando los mismos resultados que antes:

$$X : \Psi = A\Gamma : A\Delta :: \Gamma : \Delta :: A : B$$

$$\Psi : \Omega = A\Delta : AE :: \Delta : E :: A : B$$

$$\Omega : T = AE : BE :: A : B$$

Por tanto acabamos de hallar cuatro números proporcionales en la razón de A y B . Además A y B son los números menores en su razón, por lo tanto serán coprimos⁴.

Por ser A y B coprimos, sus cubos, X y T , lo serán también.⁵ Lo mismo ocurre con sus cuadrados, Γ y E .⁶

Finalmente, si varios números continuamente proporcionales verifican que sus extremos son primos entre sí, serán los menores en esa razón y cantidad⁷. Este es el caso de X , Ψ , Ω y T . También el de Γ , Δ y E .

□

Hallemos los n menores naturales en progresión geométrica según cierta razón:
 Existen dos naturales a y b tales que son los menores en la razón dada,
 la cual denotaremos $a:b$. [VII, 33]
 Entonces $a^{n-1}, a^{n-2}b, a^{n-3}b^2, \dots, ab^{n-2}, b^{n-1}$ son una progresión geométrica de n
 naturales en la razón $a:b$. [VII, 17] [VII, 18]
 Veamos ahora que son los menores naturales en su razón:
 Por ser a y b los menores en su razón, son coprimos. [VII, 22]
 Pero sus potencias también, en particular a^{n-1} y b^{n-1} . [VII, 27]
 Luego por [VIII, 1] los n números son los menores en su razón. □

Porisma VIII, 1. *Los extremos de los tres menores números continuamente proporcionales en cierta razón, son cuadrados. Los de los cuatro menores, son cubos. En general, se tiene que los*

⁴Proposición VII, 22

⁵Proposición VII, 27

⁶Definiciones VII, 18 y 19

⁷Proposición VIII, 1

extremos de los n menores números continuamente proporcionales, serán potencias $(n-1)$ -ésimas de números coprimos.^{8, 9}

Heath [1, 2]: “From this it is manifest that, if three numbers in continued proportion be the least of those which have the same ratio with them, the extremes of them are squares, and if four numbers, cubes.” (p. 348)

Proposición VIII, 3. Si n números continuamente proporcionales son los menores de entre todos los conjuntos de n números en esa razón, los extremos serán primos entre sí.

Heath [1, 2]: “If as many numbers as we please in continued proportion be the least of those which have the same ratio with them, the extremes of them are prime to one another” (p. 348)

Demostración: Sean A, B, Γ y Δ los menores números en cierta proporción continua y veamos que A y Δ son primos entre sí. Sean Φ e X los dos números menores en la razón de los primeros.¹⁰ I.e., $\Phi, X \in \mathbb{N}$ |

$$\Phi : X = A : B = B : \Gamma = \Gamma : \Delta$$

Ahora nos apoyaremos en el resultado anterior para continuar con la demostración de Euclides. Sean Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 y Ψ_4 los cuatro menores números en la razón $\Phi:X$, obtenidos procediendo como

⁸En la demostración no solo se halla la forma de los extremos. Sean A y B los números menores en su razón. Los tres números menores en la razón $A:B$ son:

$$\begin{cases} X_1 = A A \\ X_2 = A B \\ X_3 = B B \end{cases}$$

Los cuatro números menores en la razón $A:B$ son:

$$\begin{cases} \Psi_1 = A A A \\ \Psi_2 = A A B \\ \Psi_3 = A B B \\ \Psi_4 = B B B \end{cases}$$

En general, los n números menores en la razón $A:B$ son:

$$\begin{cases} \Omega_1 = A^n \\ \Omega_2 = A^{n-1}B \\ \Omega_3 = A^{n-2}B^2 \\ \dots \\ \Omega_{n-1} = A B^{n-1} \\ \Omega_n = B^n \end{cases}$$

⁹Según **Heath [1, 2]:** “The porism observes that, if there are n terms in the series, their extremes are $(n-1)^{th}$ power” [El porisma muestra que, si hay n términos en la serie, sus extremos son potencias $(n-1)$ -ésimas]

¹⁰**Proposición VII, 33**

en la demostración de la **Proposición VIII, 2**. Esto equivale a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \Phi \Phi \Phi \\ \Psi_2 = \Phi \Phi X \\ \Psi_3 = \Phi X X \\ \Psi_4 = X X X \end{array} \right.$$

Volviendo a Φ e X , por ser los números menores en su razón, serán coprimos.¹¹

Por ser coprimos, sus potencias, en particular Ψ_1 y Ψ_4 ,¹² también serán números primos entre sí.¹³

En resumen; Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 y Ψ_4 son los cuatro números menores en la razón $\Phi: X$. *I.e.:*

$$\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\} = \{A, B, \Gamma, \Delta\}$$

Luego A y B son primos entre sí. □

Sean los n menores naturales en la progresión geométrica dada por cierta razón en sus números menores α y β , $\alpha : \beta$:

[VII, 33]

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$$

Según el resultado anterior, nuestros naturales iniciales verificarán:

[VIII, 2]

$$a_i = \alpha^{n-i} \beta^{i-1} \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Recordando que α y β son los menores naturales en su razón, se tiene que son coprimos y, por tanto, también sus potencias.

[VII, 22][VII, 27]

En particular, $a_1 = \alpha^{n-1}$ y $a_n = \beta^{n-1}$ serán coprimos. □

¹¹Proposición VII, 22

¹²Si no hubiéramos calculado previamente la expresión de Ψ_1 y Ψ_4 en función de Φ e X , lo garantizaría el Porisma de la Proposición VIII, 2.

¹³Proposición VII, 27

Observación: Para mantener la rigurosidad, en la siguiente proposición hemos de modificar una definición ya introducida debido a que Euclides destinó el mismo término para dos conceptos distintos.

Hasta ahora, habíamos definido lo que es una serie de números en proporción continua como una progresión geométrica. También ha sido descrito el procedimiento para hallar el conjunto de los n menores números en la proporción continua dada por cierta razón. Surge ahora la cuestión análoga para cualquier conjunto ordenado de n números, ¿Es posible calcular el conjunto ordenado de n números más pequeños, tales que estén en la misma razón dos a dos que los de el primer conjunto?

La **Proposición VIII, 4** describe cómo hallar dicha sucesión de números.

El problema es que Euclides usa el mismo término para referirse a las progresiones geométricas y al resto de conjuntos ordenados de números.

Esto nos lleva a redefinir el concepto de “en proporción continua” para no perder fidelidad con el método de Euclides y, a la vez, mantener rigurosidad.

Definición 3.1. Diremos que una colección ordenada de n números, $\{\Lambda_k\}_{k=1}^n$, está en la proporción continua dada por la sucesión de $n-1$ razones (o que es continuamente proporcional en las $n-1$ razones), $\{A_k : B_k\}_{k=1}^{n-1}$, si se verifica que:

$$\Lambda_k : \Lambda_{k+1} :: A_k : B_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$$

Diremos simplemente que $\{\Lambda_k\}_{k=1}^n$ está en la proporción continua dada en sus números menores $A:B$, si:

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \Lambda_k : \Lambda_{k+1} = A : B$$

Observación: Este último caso coincide con la definición previa de proporcionalidad continua y se tiene que $\{\Lambda_k\}_{k=1}^n$ es una progresión geométrica.

Proposición VIII, 4. *Encontrar los menores números $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{n+1}$ en la proporción continua dada por ciertas razones $\{A_k : B_k\}_{k=1}^n$ en sus números menores. I.e.:*

$$\Lambda_k : \Lambda_{k+1} :: A_k : B_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Heath [1, 2]: “Given as many ratios as we please in least numbers, to find numbers in continued proportion which are the least in the given ratios” (p. 350)

Demostración: Sean nuestras razones $\{A_k : B_k\}_{k=1}^3$; busquemos $\{\Lambda_k\}_{k=1}^4$, los números menores en la proporción continua dada por nuestras razones.

Sea ahora $M_1 = m.c.m.(B_1, A_2)$ el mínimo común múltiplo de B_1 y A_2 ¹⁴ y sean también Ξ y N los números que verifican:

$$M_1 = \Xi B_1 = N A_2$$

Definamos ahora Π como el número que es medido por A_1 tantas veces como M_1 por B_1 y P como el número medido por B_2 tantas veces como M_1 por A_2 :

$$\Pi = \Xi A_1$$

$$P = N B_2$$

Se dan ahora dos posibilidades: o bien A_3 es parte de P o bien es partes; *sc.* A_3 solo puede medir a P o no medirlo.

- Veamos el primer supuesto, A_3 es divisor de P :

Ya que A_3 mide a P , podemos definir un Σ que sea medido tantas veces por B_3 como P lo es por A_3 . *Id est:*

$$\exists O \mid P = O A_3$$

$$\Sigma = O B_3$$

Ahora bien, como M_1 es medido por B_1 tantas veces como Π por A_1 , la **Definición VII, 20** nos asegura:

$$A_1 : \Xi A_1 = A_1 : \Pi :: B_1 : M_1 = B_1 : \Xi B_1$$

Y por alternancia¹⁵:

$$A_1 : B_1 :: \Pi : M_1$$

Haciendo un uso análogo de la **Definición VII, 20** para M_1 y P y para P y Σ obtenemos:

$$A_2 : M_1 :: B_2 : P \iff {}^{16}A_2 : B_2 :: M_1 : P$$

¹⁴Proposición VII, 34

¹⁵Proposición VII, 13

¹⁶Proposición VII, 13

$$A_3 : P :: B_3 : \Sigma \iff {}^{17}A_3 : B_3 :: P : \Sigma$$

¹⁸ Claramente, $\{\Pi, M_1, P, \Sigma\}$ están en las razones pedidas. Falta pues, ver que son los menores. En caso contrario, los números buscados, $\{\Lambda_k\}_{k=1}^4$, en particular cumplen que:

$$A_1 : B_1 :: \Lambda_1 : \Lambda_2$$

$$A_2 : B_2 :: \Lambda_2 : \Lambda_3$$

Ahora bien, A_1 y B_1 son los números menores en su razón; luego A_1 mide tantas veces a Λ_1 como B_1 a Λ_2 .¹⁹ Análogamente se obtiene que A_2 mide tantas veces a Λ_2 como B_2 a Λ_3 . En particular, B_1 y A_2 miden a Λ_2 .

Esto último implica que el mínimo común múltiplo de B_1 y A_2 , $m.c.m.(B_1, A_2)$, medirá a Λ_2 .²⁰ Pero $M_1 = m.c.m.(B_1, A_2)$, es decir, M_1 mide a Λ_2 .

Absurdo, pues habíamos supuesto que $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{n+1}$ eran los números menores en las mismas razones que $\{\Pi, M_1, P, \Sigma\}$; *sc.* M_1 no podría medir a Λ_2 por ser supuestamente mayor.

- Supongamos que A_3 no es divisor de P y sea $M_2 = m.c.m.(A_3, P)$ el menor número que mide a A_3 y P . Se deduce que existe un número Θ tal que:

$$M_2 = \Theta A_3$$

Y otro número H que verifica:

$$M_2 = HP = HNB_2$$

Definamos Γ y Δ como los números que son medidos respectivamente tantas veces por Π y por M_1 , como M_2 lo es por P :

$$\Gamma = H\Pi = H\Xi A_1$$

$$\Delta = HM_1 = H\Xi B_1 = HNA_2$$

Por último definiremos el número E como el número que es medido tantas veces por B_3 , como M_2 lo es por A_3 :

$$E = \Theta B_3$$

¹⁷**Proposición VII, 13**

¹⁸Fijémonos ahora en que el conjunto $\{\Pi, M_1, P, \Sigma\}$ verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi : M_1 = \Xi A_1 : \Xi B_1 ::^\heartsuit A_1 : B_1 \\ M_1 : P = NA_2 : NB_2 ::^\heartsuit A_2 : B_2 \\ P : \Sigma = OA_3 : OB_3 ::^\heartsuit A_3 : B_3 \end{array} \right.$$

Usando la **Proposición VII, 17** en \heartsuit , se podría haber demostrado el resultado quizás de forma más sencilla.

¹⁹**Proposición VII, 20**

²⁰**Proposición VII, 35**

Tenemos finalmente, y procediendo como en el caso anterior, que el conjunto ordenado $\{\Gamma, \Delta, M_2, E\}$ cumple:

$$\begin{aligned} A_1 : \Gamma = A_1 : H\Xi A_1 :: {}^{21}B_1 : H\Xi B_1 = B_1 : \Delta &\iff {}^{22}A_1 : B_1 :: \Gamma : \Delta \\ A_2 : \Delta = A_2 : HNA_2 :: {}^{23}B_2 : HNB_2 = B_2 : M_2 &\iff {}^{24}A_2 : B_2 :: \Delta : M_2 \\ A_3 : M_2 = A_3 : \Theta A_3 :: {}^{25}B_3 : \Theta B_3 = B_3 : E &\iff {}^{26}A_3 : B_3 :: M_2 : E \end{aligned}$$

Queda probado que $\{\Gamma, \Delta, M_2, E\}$ están en las razones pedidas. Veamos ahora que son los menores: Una vez más, de no ser así, los números buscados, $\{\Lambda_k\}_{k=1}^4$, verificarán en particular:

$$\begin{cases} A_1 : B_1 :: \Lambda_1 : \Lambda_2 \\ A_2 : B_2 :: \Lambda_2 : \Lambda_3 \\ A_3 : B_3 :: \Lambda_3 : \Lambda_4 \end{cases}$$

Y como, A_1 y B_1 son los números menores en su razón, A_1 mide tantas veces a Λ_1 como B_1 a Λ_2 ²⁷. Análogamente se obtiene que A_2 mide tantas veces a Λ_2 como B_2 a Λ_3 . En particular, B_1 y A_2 miden a Λ_2 .

Esto último implica que el mínimo común múltiplo de B_1 y A_2 , m.c.m.(B_1, A_2), medirá a Λ_2 ²⁸. Sabemos que:

$$\begin{aligned} A_2 : B_2 :: \Lambda_2 : \Lambda_3 \\ A_2 : B_2 :: M_1 : P \end{aligned}$$

Luego:

$$M_1 : P :: \Lambda_2 : \Lambda_3 \iff {}^{29}M_1 : \Lambda_2 :: P : \Lambda_3$$

Y como M_1 mide a Λ_2 , P mide a Λ_3 . Pero de la siguiente expresión se deduce que A_3 mide a Λ_3 :

$$A_3 : B_3 :: \Lambda_3 : \Lambda_4$$

Entonces $M_2 = \text{m.c.m.}(P, A_3)$ mide a Λ_3 .

Absurdo, pues habíamos supuesto que $\{\Lambda_k\}_{k=1}^4$ eran los números menores en las mismas razones que $\{\Gamma, \Delta, M_2, E\}$; *sc.* M_2 no podría medir a Λ_3 por ser supuestamente mayor.

Cabe destacar que el segundo procedimiento aplicado al primer caso es el primer procedimiento. □

²¹Definiéonn VII, 20

²²Proposición VII, 13

²³Definiéonn VII, 20

²⁴Proposición VII, 13

²⁵Definiéonn VII, 20

²⁶Proposición VII, 13

²⁷Proposición VII, 20

²⁸Proposición VII, 35

²⁹Por alternancia, Proposición VII, 13

Sean $a:b$, $c:d$, $e:f$ las razones dadas en sus números menores; busquemos los cuatro menores naturales en dichas razones.

Sea $l_1 = \text{m.c.m.}(b,c)$, *i.e.*:

$$\exists m, n \in \mathbb{N} \mid l_1 = mb = nc$$

Claramente, los naturales ma , $l_1 = mb = nc$, nd están en las dos primeras razones.

[VII, 17]

Sea ahora $l_2 = \text{m.c.m.}(nd,e)$, *i.e.*:

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \mid l_2 = pnd = qe$$

Definamos los siguientes naturales:

$$pma, pmb = pnc = pl_1, pnd = qe = l_2, qf$$

Una vez más, no es complicado ver que estos cuatro naturales están en las razones pedidas.

[VII, 17]

Veamos, por último, que son los menores en dichas razones. Sean x, y, z, t en las razones dadas y menores que los números previamente obtenidos.

Bien, por ser los menores naturales en su razón, a y b , son divisores respectivos de x e y ya que:

[VII, 20]

$$a : b = x : y$$

Del mismo modo, c y d , son divisores respectivos de y y de z

[VII, 20]

Y, como b y c son divisores de y , su mínimo común múltiplo, l_1 , también lo será.

[VII, 35]

Además $l_1 : nd = c : d = y : z$ o lo que es lo mismo:

[VII, 13]

$$l_1 : y = nd : z$$

Luego, por ser l_1 divisor de y , nd lo es de z .

[Def. VII, 20]

Pero $e : f = z : t$, luego e es divisor de z .

[VII, 20]

Y también lo es l_2 , el mínimo común múltiplo de e y nd :

[VII, 35]

$$\frac{z}{l_2} \in \mathbb{N}$$

Absurdo, ya que habíamos supuesto x, y, z, t menores que pma, pl_1, l_2, qf . □

Proposición VIII, 5. *Los números planos³⁰ guardan entre sí la razón compuesta³¹ de las razones de sus lados.*

Heath [1, 2]: “Plane numbers have to one another the ratio compounded of the ratios of their sides” (p. 354)

Demostración: Sean A y B nuestros números planos. Sean X e Ψ los lados de A y sean Ω y T los de B³². Equivalentemente:

$$A = X\Psi$$

$$B = \Omega T$$

Ahora definamos Γ , E y Δ como los números menores en proporción continua en las razones de X y Ω y de Ψ y T³³:

$$X : \Omega :: \Gamma : E \tag{3.1}$$

$$\Psi : T :: E : \Delta \tag{3.2}$$

Definamos por último I como el producto de Ψ y Ω :

$$I = \Psi\Omega = \Omega\Psi$$

Por lo que:

$$A : I = X\Psi : \Psi\Omega = {}^{34}\Psi X : \Psi\Omega :: {}^{35}X : \Omega :: {}^{3,1}\Gamma : E$$

Y análogamente:

$$I : B = \Psi\Omega : \Omega T = \Omega\Psi : \Omega T :: \Psi : T :: {}^{3,2}E : \Delta$$

Por tanto A, I y B están en la misma razón que Γ , E y Δ . Entonces, por igualdad, A y B están en la misma razón que Γ y Δ ³⁶, que justamente es la razón compuesta de las razones de los lados³⁷; *viz.* el producto de ambas razones³⁸. □

³⁰Definición VII, 16

³¹Definición VII,

³²Definición VII, 16

³³Proposición VIII, 4

³⁴Proposición VII, 16

³⁵Proposición VII, 17

³⁶Proposición VII, 14

³⁷Proposición VI, 23

³⁸Definición VI, 5

Sean $a=a_1a_2$ y $b=b_1b_2$, con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$.	
Veamos que $a:b$ está compuesta de $a_1 : b_1$ y $a_2 : b_2$:	(I)
Sea $m=m.c.m.(a_2, b_1)$, se tienen entonces $x, y \in \mathbb{N}$	
$a_2x = m = b_1y$	
Sean también los tres menores naturales en las razones de (I):	[VIII, 4]
$ya_1, yb_1 = xa_2, xb_2$	
Se tiene que:	[VII, 17]
$a : a_2b_1 = a_2a_1 : a_2b_1 = a_1 : b_1 = ya_1 : yb_1$	
Además:	[VII, 17]
$b_1a_2 : b = b_1a_2 : b_1b_2 = a_2 : b_2 = xa_2 : xb_2$	
Es decir:	
$a : b_1a_2 : b = ya_1 : m : xb_2$	
= <i>Ex aequali</i> :	[VII, 14]
$a : b = ya_1 : xb_2$	
Esto es que $a:b$ está compuesta de $a_1 : b_1$ y $a_2 : b_2$.	□

Proposición VIII, 6. Sean n números continuamente proporcionales. Si el primero no mide al segundo, entonces ninguno de estos números será divisor de otro posterior.³⁹

Heath [1, 2]: “If there be as many numbers as we please in continued proportion, and the first do not measure the second, neither will any other measure other.” (p. 355)

Demostración: Sean A, B, Γ, Δ, E en proporción continua y supongamos que A es el menor. De no ser así, por la definición de números **continuamente proporcionales** se tiene que cada pareja de números consecutivos están en la misma razón. Y, por estar en la misma razón, todos los antecedentes serán simultáneamente menores, iguales o mayores que los consecuentes en cada una de estas parejas. *I.e.* se tiene uno de los tres siguientes casos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A < B < \Gamma < \Delta < E \\ A = B = \Gamma = \Delta = E \\ A > B > \Gamma > \Delta > E \end{array} \right.$$

³⁹Se podría hacer una pequeña modificación al enunciado para hacerlo más general ya que, en cualquier conjunto de números en proporción continua decreciente, el primero no medirá al segundo, pero uno de los últimos puede medir a un predecesor, luego la tesis de Euclides es técnicamente incorrecta (“ningún otro número medirá a otro”). *E.g.*: $\{8, 4, 2\}$, el 8 no mide a 4 pero el 2 mide a los demás (y el 4 al 8).

El resultado podría ser:

“Sean n números continuamente proporcionales. Si el menor no mide al segundo más pequeño, entonces ninguno de estos números será divisor de otro.”

De donde podemos descartar trivialmente el segundo caso, ya que no se cumple la hipótesis de que el primero no mida al segundo. El tercer caso es también trivial, pues un número no puede medir a otro número menor.

Luego podemos suponer que A, B, Γ, Δ, E conforman una proporción continua creciente donde A no mide a B . Y ya que A no mide a B , y los números sucesivos de este conjunto están en la misma razón que A y B ; ninguno de estos números será divisor de su consecuente.^{40, 41}

Tomemos A, B y Δ y los números menores en su razón; Z, H y Θ ⁴².

$$A : B : \Delta :: Z : H : \Theta$$

Trivialmente A y B son proporcionales a Z y H . Como A no mide a B , Z no mide a H ⁴³ y concluimos que Z no es la unidad. De que A, B y Δ están en la misma razón que Z, H y Θ ; se sigue que, *ex aequali*, A es a Δ como Z a Θ ⁴⁴.

$$A : \Delta :: Z : \Theta$$

Finalmente, la **Proposición VIII, 3** certifica que Z y Θ son coprimos. Esto implica que A no mide a Δ ya que, si lo hiciera, la **Definición VII, 20** nos asegura una vez más que Z mediría a Θ . Absurdo cuando tenemos en cuenta que Z y Θ son primos entre sí y que Z es distinto de la unidad. □

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ en progresión geométrica creciente tales que a_1 no es divisor de a_2 y supongamos que lo es de a_n :

$$a_1 \nmid a_2 \qquad a_1 \mid a_n$$

Sean ahora $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ los menores naturales proporcionales a a_1, a_2, \dots, a_n : [VII, 33]

$$a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \\ a_1 \nmid a_2 \end{array} \right\} \implies b_1 \nmid b_2 \implies b_1 \neq 1 \qquad \text{[Def. VII, 20]}$$

Ex aequali: [VII, 14]

$$a_1 : a_n = b_1 : b_n$$

Pero b_1 y b_n son coprimos, luego $b_1 \nmid b_n$ y $a_1 \nmid a_n$. [VIII, 3]

Reciclando el razonamiento anterior, se sigue que $a_1 \nmid a_n$. [Def. VII, 20]

También se puede probar que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j, a_i \nmid a_j$, tomando la serie a_i, a_{i+1}, \dots, a_j y teniendo en cuenta que $a_1 : a_n :: a_i : a_{i+1} \implies a_i \nmid a_{i+1}$ por [Def. VII, 20]. □

⁴⁰Definición VII, 20

⁴¹Heath [1, 2]: "Now it is manifest that- los números- do not measure one another in order. For A does not even measure B ." (p. 355)

⁴²Proposición VII, 33

⁴³Definición VII, 20

⁴⁴Proposición VII, 14

Proposición VIII, 7. Sean n números en proporción continua. Si el primero es divisor del último, también lo será del segundo.⁴⁵

Heath [1, 2]: “If there be as many numbers as we please in continued proportion, and the first measure the last, it will measure the second also.” (p. 356)

Demostración: Sean A, B, Γ, Δ en proporción continua y supongamos una vez más que A es el menor.⁴⁶ Supongamos que A mide a Δ , pero no a B :

En virtud del resultado anterior,⁴⁷ como A no mide B , no medirá a ningún otro. Absurdo, ya que A mide a Δ por hipótesis. Luego A ha de medir a B .⁴⁸ □

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ en progresión geométrica creciente tales que a_1 es divisor de a_n , $a_1 \mid a_n$.

Supongamos que no lo es de a_2 , entonces por [VIII, 6] tampoco mide a a_n , absurdo. □

Proposición VIII, 8. Si entre dos números, A y B , caen n números en proporción continua con ellos, entonces caerán también n números en proporción continua entre los que estén en la misma razón que A y B .

Heath [1, 2]: “If between two numbers there fall numbers in continued proportion with them, then, however many numbers fall between them in continued proportion, so many will also fall in continued proportion between the numbers that have the same ratio with the original numbers.” (p. 357)

Demostración: Sean A y B dos números y caigan entre ellos Γ y Δ en proporción continua. Veamos que si K y N son proporcionales a A y B , entre K y N caen tantos números como entre

⁴⁵Se puede demostrar que este resultado es el contrarrecíproco de **Proposición VIII, 6**. Sea A un número del conjunto que mide a otro número del conjunto, B . Tomemos estos números junto a los números del conjunto que están entre ellos. Bien, estos números son continuamente proporcionales y el primero mide al último, luego también ha de medir al segundo por el resultado que acabamos de mencionar. Además si el primero mide al segundo, mide a todos por la definición de proporcionalidad y por ser números continuamente proporcionales.

⁴⁶De no ser así, del mismo modo que en la **Proposición VIII, 6**, la progresión geométrica será constante o decreciente. Cabe destacar que, en el caso de que todos los números sean iguales, ahora sí se verifica la hipótesis aunque el resultado es trivial y que, si la sucesión de números es decreciente, la hipótesis no se puede verificar.

También proponemos un enunciado más general:

”Sean n números en proporción continua. Si el menor es divisor del mayor, también lo será del segundo más pequeño.“

⁴⁷**Proposición VIII,6**

⁴⁸**Heath:** “An obvious proof by *reductio ad absurdum* from VIII. 6”

A y B:

$$A : B :: K : N$$

$$A : \Gamma :: \Gamma : \Delta :: \Delta : B$$

Sean Φ , X , Ψ y Ω los menores números proporcionales a A , Γ , Δ y B .⁴⁹ Por ser los menores en su razón la **Proposición VIII, 3** nos garantiza que Φ y Ω son primos entre sí. Además, por igualdad,⁵⁰ se tiene que:

$$A : B :: \Phi : \Omega$$

Pero Φ y Ω son coprimos, luego son los menores en su razón.⁵¹ Por ser los menores en su razón, la **Proposición VII, 20** asegura que medirán a todas las parejas de números en su razón que, por otra parte, es la de A con B . Luego, si K y N están en la razón de A y B :

$$K : N :: A : B :: \Phi : \Omega \iff \exists E \in \mathbb{N} \mid K = E\Phi \wedge N = E\Omega$$

Definimos ahora los siguientes números en función del número E :

$$\begin{cases} \Lambda = EX \\ M = E\Psi \end{cases}$$

Aplicando la definición de números proporcionales⁵² y teniendo en cuenta que K , Λ , M y N son el resultado de multiplicar los números Φ , X , Ψ y Ω por el número E :

$$\Phi : E\Phi :: X : EX :: \Psi : E\Psi :: \Omega : E\Omega \iff \Phi : K :: X : \Lambda :: \Psi : M :: \Omega : N$$

Y, por alternancia:⁵³

$$\begin{cases} \Phi : K :: X : \Lambda \iff \Phi : X :: K : \Lambda \\ X : \Lambda :: \Psi : M \iff X : \Psi :: \Lambda : M \\ \Psi : M :: \Omega : N \iff \Psi : \Omega :: M : N \end{cases}$$

Esto quiere decir que K , Λ , M y N son proporcionales a Φ , X , Ψ y Ω ; que a su vez están en la razón de A , Γ , Δ y B . Y, estos últimos, son continuamente proporcionales. Luego, entre K y N , caen tantos números en proporción continua como entre A y B . \square

⁴⁹**Proposición VII, 33**

⁵⁰**Proposición VII, 14**

⁵¹**Proposición VII, 21**

⁵²**Definición VII, 20**

⁵³**Proposición VII, 13**

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ en progresión geométrica y sean $x, z \in \mathbb{N} \mid a_1 : a_n = x : z$. Veamos que entre x y z caen tantos números en progresión geométrica como entre a_1 y a_n :

Sean $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ los menores naturales en la razón de [VII, 33]
 a_1, a_2, \dots, a_n .

Entonces b_1 y b_n son coprimos y, por tanto, los menores en su [VIII, 3],[VII, 21]
razón.

Además, por igualdad: [VII, 14]

$$b_1 : b_n = a_1 : a_n = x : z$$

Y, como b_1 y b_n son los menores en su razón, serán divisores de [VII, 20]
aquellos que estén en dicha razón, en particular de x y de z :

$$\exists k \in \mathbb{N} \mid x = kb_1, z = kb_n$$

Sean pues los naturales $kb_1, kb_2, \dots, kb_n \in \mathbb{N}$, claramente están en la misma razón que a_1, a_2, \dots, a_n . Es decir, entre $x=kb_1$ y $z=kb_n$ caen tantos números en progresión geométrica como entre a_1 y a_n . □

Proposición VIII, 9. *Si dos números son primos entre sí y entre ellos caen n números en proporción continua, se verifica que entre los primos y la unidad caen también n números en proporción continua.*⁵⁴

Heath [1, 2]: “If two numbers be prime to one another, and numbers fall between them in continued proportion, then, however many numbers fall between them in continued proportion, so many will fall between each of them and an unit in continued proportion.” (p. 358)

Demostración: Sean A y B coprimos y caigan en proporción continua entre ellos Γ y Δ :

Ya que A y B son coprimos; A, Γ, Δ y B son los números menores en su razón.⁵⁵ Sean ahora Φ y X los números menores en la razón de A y Γ :⁵⁶

$$\Phi : X :: A : \Gamma :: \Gamma : \Delta :: \Delta : B$$

⁵⁴Realmente el resultado podría ser:

Si dos números son primos entre sí y entre ellos caen n números en proporción continua, para cualesquiera dos números en la misma proporción que los primos, se verifica que entre estos números y la unidad caen también n números en proporción continua.

Por la **Proposición VII, 20**, otros números que estén en la misma razón que nuestros primos, serán el producto de estos con un número E . Luego, el producto de E por los números que confirman una progresión geométrica entre la unidad y ambos primos; es una progresión geométrica desde la unidad a estos otros números (**Proposición VII, 17**). Además por la **Proposición VIII, 8** entre los primos caen tantos números en proporción continua como entre los otros números y en la misma razón, lo que completa el resultado.

⁵⁵**Proposición VIII, 1**

⁵⁶**Proposición VII, 33**

Y como A, Γ, Δ y B son los números menores en la razón de Φ con X , la cual está expresada en números menores:⁵⁷

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \Phi \Phi \Phi \\ \Gamma = \Phi \Phi X \\ \Delta = \Phi X X \\ B = X X X \end{array} \right.$$

El anterior resultado también nos da los tres menores números proporcionales en la razón de Φ con X :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \Phi \Phi \\ \Psi_2 = \Phi X \\ \Psi_3 = X X \end{array} \right.$$

Denotemos por $\mathbf{1}$ a la unidad.⁵⁸ Por la definición⁵⁹ de números proporcionales es evidente que $\mathbf{1}$ es a Φ , como Φ es a Ψ_1 y como este último es a A :

$$\mathbf{1} : \Phi :: \Phi : \Phi\Phi :: \Phi\Phi : \Phi\Phi\Phi \iff \mathbf{1} : \Phi :: \Phi : \Psi_1 :: \Psi_1 : A$$

Luego $\mathbf{1}, \Phi, \Psi_1$ y A son continuamente proporcionales. Es decir, entre A y B caen tantos números en proporción continua como entre $\mathbf{1}$ y A .

Análogamente se obtiene que:

$$\mathbf{1} : X :: X : XX :: XX : XXX \iff \mathbf{1} : X :: X : \Psi_3 :: \Psi_3 : B$$

Luego $\mathbf{1}, X, \Psi_3$ y B son continuamente proporcionales. Es decir, entre A y B caen tantos números en proporción continua como entre $\mathbf{1}$ y B . □

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ coprimos y hayan entre ellos n naturales, c_1, c_2, \dots, c_n que sean medias geométricas. Veamos que entre la unidad y cada uno de ellos caen también naturales en progresión geométrica.

Por ser a y b coprimos; a, c_1, c_2, \dots, c_n y b son los menores en su razón. [VIII, 1]

Por ser los menores en su razón, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}$

[Por. VIII, 2]

$$a = \alpha^{n+1}, b = \beta^{n+1}, c_i = \alpha^{n+1-i}\beta^i \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Donde $\alpha : \beta$ es la razón que guarda la progresión geométrica $a, c_1, c_2, \dots, c_n, b$ expresada en los menores naturales.

Tomemos las siguientes sucesiones de naturales:

$$\mathbf{1}, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, a = \alpha^{n+1}$$

$$\mathbf{1}, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n, b = \beta^{n+1}$$

Son dos progresiones geométricas en las respectivas razones $\mathbf{1} : \alpha, \mathbf{1} : \beta$. □

⁵⁷Proposición VIII, 2 y su Porisma

⁵⁸Definición VII, 15

⁵⁹Definición VII, 20

Proposición VIII, 10. *Sean dos números, A y B, tales que, entre cada uno de ellos y la unidad, caen n números en proporción continua. Se verifica que entre los A y B caen también n números en proporción continua.*

Heath [1, 2]: “If numbers fall between each of two numbers and an unit in continued proportion, however many numbers fall between each of them and an unit in continued proportion, so many will also fall between the numbers themselves in continued proportion.” (p. 360)

Demostración: Este resultado es el cotrarrecíproco del anterior. Sean A y B dos números. Sea **1** la unidad. Sean A_1 y A_2 en proporción continua entre **1** y A. Sean B_1 y B_2 en proporción continua entre **1** y B:

$$1 : A_1 :: A_1 : A_2 :: A_2 : A$$

$$1 : B_1 :: B_1 : B_2 :: B_2 : B$$

Pero la unidad mide a todo número y, en particular, a A_1 y a B_1 . La definición de números proporcionales⁶⁰ afirmaba que:

$$m1 = nA_1 \iff mA_1 = nA_2 \iff mA_2 = nA$$

Luego para $m=A_1$, $n=1$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} A_2 = A_1 A_1 \\ A = A_2 A_1 = A_1 A_1 A_1 \end{cases}$$

Análogamente:

$$\begin{cases} B_2 = B_1 B_1 \\ B = B_2 B_1 = B_1 B_1 B_1 \end{cases}$$

Definamos ahora los siguientes números:

$$\begin{cases} \Gamma = A_1 B_1 \\ \Delta_1 = A_1 A_1 B_1 = A_1 \Gamma \\ \Delta_2 = A_1 B_1 B_1 = {}^{61}B_1 A_1 B_1 = B_1 \Gamma \end{cases}$$

Operando:

$$A_2 : \Gamma = A_1 A_1 : A_1 B_1 :: {}^{62}A_1 : B_1 :: {}^{63}A_1 B_1 : B_1 B_1 = \Gamma : B_2$$

⁶⁰Definición VII, 20

⁶²Proposición VII, 17

⁶³Proposición VII, 18

Luego A_2 , Γ y B_2 son continuamente proporcionales en la razón de A_1 con B_1 . Operando de forma similar:

$$\begin{cases} A : \Delta_1 &= (A_1 A_1) A_1 : (A_1 A_1) B_1 :: {}^{64}A_1 : B_1 \\ \Delta_1 : \Delta_2 &= A_1 \Gamma : B_1 \Gamma :: {}^{65}A_1 : B_1 \\ \Delta_2 : B &= A_1 (B_1 B_1) : B_1 (B_1 B_1) :: {}^{66}A_1 : B_1 \end{cases}$$

Es decir, A , Δ_1 , Δ_2 y B son continuamente proporcionales en la razón de A_1 con B_1 . Y, por lo tanto, entre A y B caen tantos números en proporción continua como entre cada uno de los números A y B y la unidad. \square

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ entre $\mathbf{1}$ y cada uno de ellos haya n naturales en progresión geométrica. Veamos que entre a y b también hay n medias geométricas:

Sea $\{x_i\}_{i=1}^n$ una progresión geométrica de naturales, $\exists r \in \mathbb{Q} \mid x_i = x_1 r^{i-1}$.

Además si $x_1 = \mathbf{1}$, $x_2 \in \mathbb{N} \iff r \in \mathbb{N}$, (ya que $x_2 = r$).

Es decir, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ las progresiones geométricas dadas son de la forma:

$$\begin{aligned} a &= \alpha^{n+1}, \alpha^n, \dots, \alpha^2, \alpha, \mathbf{1} \\ \mathbf{1}, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n, b &= \beta^{n+1} \end{aligned}$$

Multipliquémoslas término a término para obtener la siguiente sucesión:

$$a = \alpha^{n+1}, \alpha^n \beta, \alpha^{n-1} \beta^2, \dots, \alpha^2 \beta^{n+1}, \alpha \beta^n, b = \beta^{n+1}$$

Que es la progresión geométrica buscada. \square

Proposición VIII, 11. *Entre dos números cuadrados⁶⁷ hay un número que es media proporcional⁶⁸ y los números cuadrados están en la razón duplicada⁶⁹ de la de sus lados⁷⁰.*

Heath [1, 2]: “Between two square numbers there is one mean proportional number, and the square has to the square the ratio duplicate of that which the side has to the side.” (p. 363)

Demostración: Sean A y B dichos cuadrados y Λ_A y Λ_B sus respectivos lados. Veamos que entre A y B cae un número que es su media proporcional y que A guarda con B la razón que guarda

⁶⁷**Definición VII, 18**

⁶⁸Se dice que un número X es **media proporcional** de los números A y B , si es media geométrica. *I.e.*, si A , X y B son continuamente proporcionales en la razón de A con X :

$$A : X :: X : B$$

En notación moderna, esto equivale a que $\{A, X, B\}$ sea una progresión geométrica o:

$$\frac{X}{A} = \frac{B}{X} = r \in \mathbb{Q} \iff X^2 = AB$$

⁶⁹**Definición V, 9**

⁷⁰**Definición VII, 16**

Λ_A con Λ_B duplicada:

$$A = \Lambda_A \Lambda_A$$

$$B = \Lambda_B \Lambda_B$$

Sea Ω el producto de los lados:

$$\Omega = \Lambda_A \Lambda_B$$

Apliquemos ahora la **Proposición VII, 17** en \star y la **Proposición VII, 18** en \clubsuit :

$$A : \Omega = \Lambda_A \Lambda_A : \Lambda_A \Lambda_B :: \star \Lambda_A : \Lambda_B$$

$$\Omega : B = \Lambda_A \Lambda_B : \Lambda_B \Lambda_B :: \clubsuit \Lambda_A : \Lambda_B$$

Es decir:

$$A : \Omega :: \Omega : B :: \Lambda_A : \Lambda_B$$

Por lo que Ω es claramente media proporcional de A y B . Además como A , Ω y B son proporcionales, A guarda con B la razón que guarda con Ω duplicada. Pero $A : \Omega :: \Lambda_A : \Lambda_B$, así que A y B guardan la razón duplicada de la de sus lados. \square

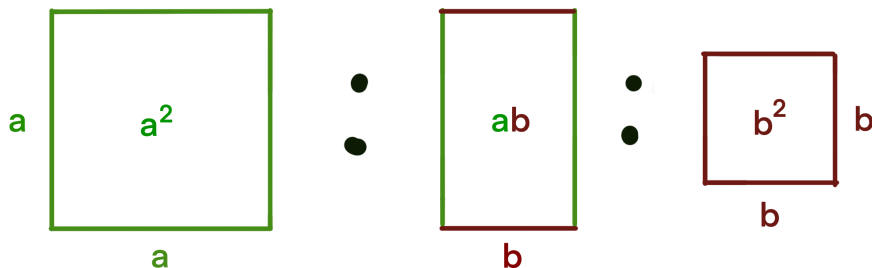
Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Veamos que entre a^2 y b^2 hay un natural, x , que es su media geométrica y que los cuadrados guardan la razón duplicada de la que guardan sus lados:

Sea $x=ab$, claramente a^2 , x , b^2 son proporcionales: [VII, 17], [VII, 18]

$$a^2 : ab = a : b = ab : b^2$$

Equivalentemente, a^2 guarda con b^2 la razón duplicada de sus lados ($a:b$). [Def. V, 9]

\square



Proposición VIII, 12. *Entre dos números cubos⁷¹ hay dos números que son medias proporcionales⁷² y los números cubos están en la razón triplicada de la de sus lados.⁷³*

Heath [1, 2]: “Between two cube numbers there are two mean proportional numbers, and the cube has to the cube the ratio triplicate of that which the side has to the side.” (p. 364)

Demostración: Sean A y B dichos cubos y Λ_A y Λ_B sus respectivos lados. Veamos que entre A y B cae dos número que son su media proporcional y que A guarda con B la razón que guarda Λ_A con Λ_B triplicada:

$$A = \Lambda_A \Lambda_A \Lambda_A$$

$$B = \Lambda_B \Lambda_B \Lambda_B$$

Sean Ψ y Ω definidos como sigue:

$$\Psi = \Lambda_A \Lambda_A \Lambda_B$$

$$\Omega = \Lambda_B \Lambda_A \Lambda_B = {}^{74}\Lambda_B \Lambda_B \Lambda_A$$

Apliquemos ahora la **Proposición VII, 17** en \star y la **Proposición VII, 18** en \clubsuit :

$$A : \Psi = (\Lambda_A \Lambda_A) \Lambda_A : (\Lambda_A \Lambda_A) \Lambda_B :: \star \Lambda_A : \Lambda_B$$

$$\Psi : \Omega = \Lambda_A (\Lambda_A \Lambda_B) : \Lambda_B (\Lambda_A \Lambda_B) :: \clubsuit \Lambda_A : \Lambda_B$$

$$\Omega : B = (\Lambda_B \Lambda_B) \Lambda_A : (\Lambda_B \Lambda_B) \Lambda_B :: \star \Lambda_A : \Lambda_B$$

Es decir:

$$A : \Psi :: \Psi : \Omega :: \Omega : B :: \Lambda_A : \Lambda_B$$

Por lo que Ψ y Ω son claramente medias proporcionales de A y B. Además como A, Ψ , Ω y B son continuamente proporcionales en la razón de A y Ψ , A guarda con B la razón que guarda

⁷¹**Definición VII, 19**

⁷²Se dice que dos números X e Ψ son **medias proporcionales** de los números A y B, si son su medias geométricas. *I.e.*, si A, X, Ψ y B son continuamente proporcionales en la razón de A con X:

$$A : X :: X : \Psi :: \Psi : B$$

En notación moderna, esto equivale a que $\{A, X, \Psi, B\}$ sea una progresión geométrica:

$$\frac{X}{A} = \frac{\Psi}{X} = \frac{B}{\Psi} = r \in \mathbb{Q}$$

En general n números, $\{\Lambda_k\}_{k=1}^n$, son medias proporcionales de los números A y B, si son sun medias geométricas, *i.e.*:

$$A : \Lambda_1 :: \Lambda_1 : \Lambda_2 :: \dots :: \Lambda_{n-1} : \Lambda_n :: \Lambda_n : B$$

⁷³**Definición V, 10**

⁷⁴**Proposición VII, 16**

con Ψ triplicada. Pero $A : \Psi :: \Lambda_A : \Lambda_B$, así que A y B guardan la razón triplicada de la de sus lados. \square

Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Veamos que entre a^3 y b^3 hay dos naturales, x e y que son sus medias geométricas y que los cubos guardan la razón triplicada de la que guardan sus lados:

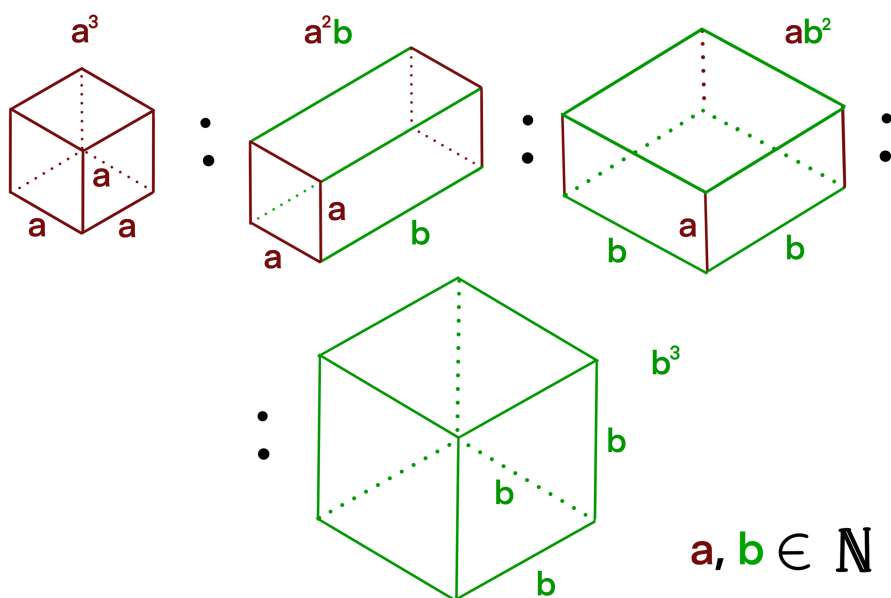
Sea $x = a^2b$ e $y = ab^2$, claramente a^2, x, y, b^2 son proporcionales: [VII, 17], [VII, 18]

$$\mathbf{a^3 : x} = a^3 : a^2b = a : b$$

$$\mathbf{x : y} = a^2b : ab^2 = a : b$$

$$\mathbf{y : b^3} = ab^2 : b^3 = a : b$$

Equivalentemente, a^3 guarda con b^3 la razón triplicada de sus lados ($a:b$). [Def. V, 10] \square



Proposición VIII, 13. *Si n números son continuamente proporcionales, los números cuadrados de los que son lados también serán continuamente proporcionales; y también los números cubos⁷⁵ cuyos lados son los números iniciales.⁷⁶*

⁷⁵Definición VII, 19

⁷⁶Heath [1, 2]: “Heiberg brackets the words added to the enunciation which extend the theorem to any power. The words are “and this always occurs with the extremes”- There is no allusion to them in the proof, much less any proof of the extension.” (p. 367)

Heath comenta que en la versión de Heiberg hay un añadido que extiende el resultado a la enésima potencia, sin embargo no parece ser original, pues no se hace ninguna alusión a este en la demostración .

Heath [1, 2]: “*If there be as many numbers as we please in continued proportion, and each by multiplying itself make some number, the products will be proportional; and if the original numbers by multiplying the products make certain numbers, the latter will also be proportional.*” (p. 365)

Demostración: Sean A, Γ y B en proporción continua. Sean H, Θ e I sus cuadrados; Υ , Φ y X, sus cubos. Veamos que, tanto H, Θ e I como Υ , Φ y X, están en proporción continua:

$$\begin{array}{l} \blacksquare \left\{ \begin{array}{l} H = AA \\ \Theta = \Gamma\Gamma \\ I = BB \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \blacktriangle \left\{ \begin{array}{l} \Upsilon = AAA \\ \Phi = \Gamma\Gamma\Gamma \\ X = BBB \end{array} \right. \end{array}$$

(■) Sean:

$$\left\{ \begin{array}{l} K = A\Gamma \\ \Lambda = \Gamma B \end{array} \right.$$

Y, volviendo a la **Proposición VIII, 11**, se tiene que entre los cuadrados H y Θ , cae exactamente un número que es media proporcional. Bien, este número no es otro que K, el producto de los lados de los cuadrados H y Θ . Luego H, K y Θ son proporcionales en la razón de A y Γ . Es decir H y Θ guardan una razón duplicada de la que guardan sus lados (o H y K). Como curiosidad, esta razón es A:B, ya que A, Γ y B son proporcionales. Análogamente, entre los cuadrados Θ e I, cae Λ en media proporcional. Y de la misma forma, Θ , Λ e I son proporcionales en la razón de los lados de Θ e I; *i.e.* Γ :B. Además, de que A, Γ y B sean proporcionales se deduce que:

$$A : \Gamma :: \Gamma : B$$

Es decir, Θ e I guardan la razón duplicada de A con Γ , por lo que:

$$H : \Theta :: \Theta : I$$

Y H, Θ e I son continuamente proporcionales en la razón duplicada de la que guardan los lados A y Γ ; A:B.

(▲) Sean:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \Gamma AA \\ N = \Gamma\Gamma A \\ \Xi = B\Gamma\Gamma \\ O = BB\Gamma \end{array} \right.$$

Por ser Υ y Φ cubos, la **Proposición VIII, 12** nos asegura que entre ellos caen dos números en media proporcional. Estos números son, precisamente, M y N. Operando como antes, se tiene que Υ , M, N y Φ Son continuamente proporcionales en la razón A: Γ . Esto

implica que Υ y Φ están en la razón A: Γ triplicada.

Siguiendo el mismo procedimiento, obtenemos que, entre Φ y X, caen, exactamente, Ξ y O en media proporcional. *I.e.*:

$$\Phi : \Xi :: \Xi : O :: O : X$$

Luego Φ , Ξ , O y X están en la proporción continua dada por $\Phi:\Xi$. Y, como A, Γ y B son proporcionales:

$$A : \Gamma :: \Gamma : B :: {}^{77}\Gamma\Gamma\Gamma : B\Gamma\Gamma = \Phi : \Xi$$

Luego, Φ y X están exactamente en la misma razón que Υ y Φ ; la razón A: Γ triplicada.

□

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ en progresión geométrica. Veamos que las siguientes sucesiones también son progresiones geométricas:

$$a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Tomemos ahora para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ los términos a_i^k, a_{i+1}^k .

La siguiente sucesión de naturales es una progresión geométrica: [VII, 17], [VII, 18]

$$a_i^k, a_i^{k-1}a_{i+1}, a_i^{k-2}a_{i+1}^2, \dots, a_i^2a_{i+1}^{k-2}, a_i a_{i+1}^{k-1}, a_{i+1}^k$$

Además, esta progresión está en la razón dada por $a_i : a_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

Y como a_1, a_2, \dots, a_n es otra progresión geométrica:

$$a_i : a_{i+1} = a_j : a_{j+1} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}, i \neq j$$

Esto implica:

$$a_i^k : a_i^{k-1}a_{i+1} : \dots : a_i a_{i+1}^{k-1} : a_{i+1}^k :: a_j^k : a_j^{k-1}a_{j+1} : \dots : a_j a_{j+1}^{k-1} : a_{j+1}^k \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}$$

Ex Aequali:

$$a_i^k : a_{i+1}^k :: a_j^k : a_{j+1}^k \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}$$

[VII, 14]

□

Proposición VIII, 14. *Un número cuadrado⁷⁸ mide a otro número cuadrado, si y solo si, también el lado⁷⁹ del primero mide al lado del último.*

Heath [1, 2]: “If a square number measure a square number, the side will also measure the side; and, if the side measure the side, the square will also measure the square.” (p. 367)

Demostración: Sean A y B nuestros cuadrados y Λ_A y Λ_B , sus respectivos lados, *i.e.*:

$$A = \Lambda_A \Lambda_A$$

⁷⁷Proposición VII, 18

⁷⁸Definición VII, 18

⁷⁹Definición VII, 16

$$B = \Lambda_B \Lambda_B$$

Definimos Ω como el producto de los lados de A y B:

$$\Omega = \Lambda_A \Lambda_B$$

“ \implies ” Veamos que si A mide a B, Λ_A mide a Λ_B :

Claramente A, Ω y B son continuamente proporcionales en la razón $\Lambda_A : \Lambda_B$.⁸⁰ Y como A mide a B y A, Ω y B son proporcionales, A también medirá a Ω .⁸¹ Ahora bien:

$$A : \Omega = \Lambda_A \Lambda_A : \Lambda_A \Lambda_B :: \Lambda_A : \Lambda_B$$

Y como A divide a Ω , la **Definición VII, 20** nos asegura que Λ_A también mide Λ_B por ser los cuatro números proporcionales.

“ \impliedby ” Veamos ahora que si Λ_A mide a Λ_B , A mide a B: Una vez más, se tiene que A, Ω y B son continuamente proporcionales en la razón de Λ_A y Λ_B .⁸² Del mismo modo, se sigue cumpliendo que:

$$A : \Omega :: \Lambda_A : \Lambda_B$$

Y como Λ_A divide a Λ_B , la **Definición VII, 20** nos asegura que A también mide a Ω por ser los cuatro números proporcionales. Y como A es a Ω , Ω es a B. Luego A es divisor de Ω , que es divisor de B. A divide a B.

□

Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Veamos que $a|b \iff a^2|b^2$:

“ \implies ” Si $a|b$ entonces $a^2|ab$. Además a^2, ab, b^2 son proporcionales en la razón $a : b$.

Esto implica que $ab|b^2$. [Def. VII, 20]

Y por ser la divisibilidad entre naturales una relación de orden parcial,

$a^2|b^2$.

“ \impliedby ” Se tiene $a^2|b^2$. Además a^2, ab, b^2 son proporcionales en la razón $a : b$.

Luego: [VIII, 7]

$$a^2|ab$$

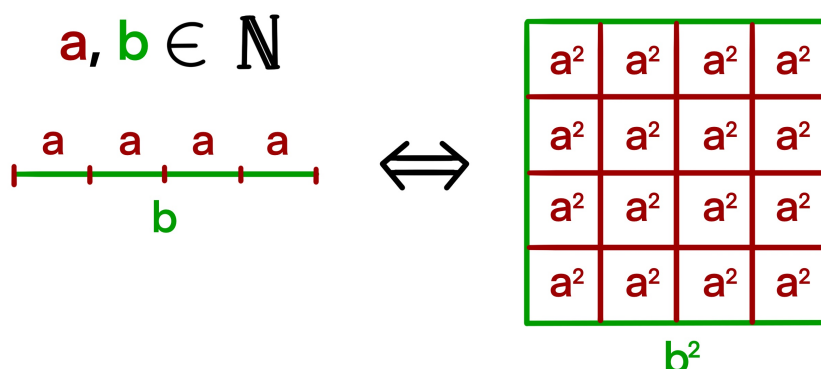
Pero $a^2 : ab = a : b \implies a|b$ [Def. VII, 20]

□

⁸⁰Proposición VIII, 11

⁸¹Proposición VIII, 7

⁸²Proposición VIII, 11



Proposición VIII, 15. *Un número cubo⁸³ mide a otro número cubo, si y solo si, el lado⁸⁴ del primero mide al lado del segundo.*

Heath [1, 2]: “If a cube number measure a cube number, the side will also measure the side; and, if the side measure the side, the cube will also measure the cube.” (p. 368)

Demostración: Sean A y B nuestros cubos y Λ_A y Λ_B , sus respectivos lados, *i.e.*:

$$A = \Lambda_A \Lambda_A \Lambda_A$$

$$B = \Lambda_B \Lambda_B \Lambda_B$$

Definamos ahora los siguientes números:

$$\Psi = \Lambda_A \Lambda_A \Lambda_B$$

$$\Omega = \Lambda_A \Lambda_B \Lambda_B$$

Trivialmente A, Ψ , Ω y B están en la proporción continua de Λ_A y Λ_B ,⁸⁵

“ \implies ” Veamos que si A mide a B, Λ_A mide a Λ_B :

Como señalábamos previamente; A, Ψ , Ω y B son continuamente proporcionales en la razón $\Lambda_A : \Lambda_B$. Si a esto le añadimos que A mide a B, la **Proposición VIII, 7** asegura que A mide también y, en particular, a Ψ . Y como A mide a Ψ y A es a Ψ como Λ_A es a Λ_B ; Λ_A mide también a Λ_B .⁸⁶

⁸³Definición VII, 19

⁸⁴Definición VII, 17

⁸⁵Ver **Proposición VIII, 2** y su porisma

⁸⁶**Proposición VII, 20**

“ \Leftarrow ” Veamos ahora que si Λ_A mide a Λ_B , A mide a B: Una vez más, se tiene que A, Ψ , Ω y B son continuamente proporcionales en la razón de Λ_A y Λ_B .⁸⁷ Del mismo modo, se sigue cumpliendo que:

$$A : \Psi :: \Lambda_A : \Lambda_B$$

Y como Λ_A divide a Λ_B , la **Definición VII, 20** nos asegura que A también mide a Ψ por ser los cuatro números proporcionales. Y como A es a Ψ , Ψ es a Ω y Ω es a B. Luego A es divisor de Ψ , que es divisor de Ω , que es divisor de B. A divide a B.

□

Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Veamos que $a|b \iff a^3|b^3$:

“ \implies ” Si $a|b$ entonces $a^3|a^2b$. Además a^3, a^2b, ab^2, b^3 son proporcionales en la razón $a : b$.

Esto implica que cada término de la sucesión será divisor de su sucesor. [Def. VII, 20]

Y por ser la divisibilidad entre naturales una relación de orden parcial, $a^3|b^3$.

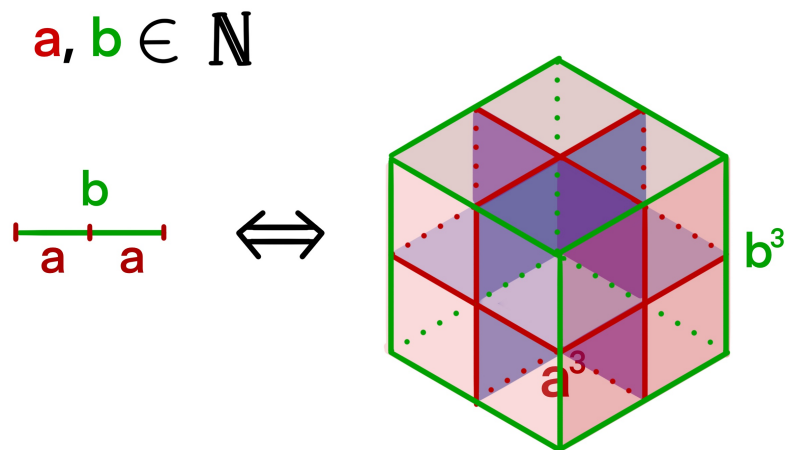
“ \Leftarrow ” Se tiene $a^3|b^3$. Además a^3, a^2b, ab^2, b^3 son proporcionales en la razón $a : b$.

Luego: [VIII, 7]

$$a^3|a^2b$$

Pero $a^3 : a^2b = a : b \implies a|b$ [Def. VII, 20]

□



⁸⁷Proposición VIII, 11

Proposición VIII, 16. *Un número cuadrado⁸⁸ no mide a un segundo número cuadrado, si y solo si, tampoco el lado⁸⁹ del primero mide al del segundo.*

Heath [1, 2]: “*If a square number do not measure a square number, neither will the side measure the side; and, if the side do not measure the side, neither will the square measure the square.*” (p. 370)

Demostración: Las dos implicaciones de este resultado son los contrarrecíprocos de las dos implicaciones de la **Proposición VIII, 14** □

Proposición VIII, 17. *Un número cubo⁹⁰ no mide a otro cubo, si y solo si, el lado⁹¹ del primero tampoco mide al lado del segundo.*

Heath [1, 2]: “*If a cube number do not measure a cube number, neither will the side measure the side; and, if the side do not measure the side, neither will the cube measure the cube.*” (p. 370)

Demostración: Las dos implicaciones de este resultado son los contrarrecíprocos de las dos implicaciones de la **Proposición VIII, 15** □

Proposición VIII, 18. *Entre dos números planos⁹² semejantes⁹³ hay un número que es media proporcional; y el número plano guarda con el número plano una razón duplicada de la que guardan sus lados.*

Heath [1, 2]: “*Between two similar plane numbers; there is one mean proportional number: and, the plane number has to the plane number the ratio duplicate of that which the corresponding side has to the corresponding side.*” (p. 371)

Demostración: Sean A y B números planos semejantes. Sean Γ_A y Δ_A los lados de A y sean Γ_B y Δ_B los de B:

$$\begin{cases} A = \Gamma_A \Delta_A = {}^{94} \Delta_A \Gamma_A \\ B = \Gamma_B \Delta_B = {}^{95} \Delta_B \Gamma_B \end{cases}$$

$$\Gamma_A : \Delta_A :: \Gamma_B : \Delta_B$$

⁸⁸Definición VII, 18

⁸⁹Definición VII, 16

⁹⁰Definición VII, 19

⁹¹Definición VII, 17

⁹²Definición VII, 16

⁹³Definición VII, 21

Veamos que existe un Λ que es media proporcional de A y B, y, que estos, están en la razón duplicada de la que guardan los lados:

Por alternancia⁹⁶ tendremos que:

$$\Gamma_A : \Delta_A :: \Gamma_B : \Delta_B \iff \Gamma_A : \Gamma_B :: \Delta_A : \Delta_B$$

Sea ahora Λ el producto de Δ_A y Γ_B :⁹⁷

$$\Lambda = \Delta_A \Gamma_B$$

Operando:

$$A : \Lambda = \Delta_A \Gamma_A : \Delta_A \Gamma_B :: {}^{98}\Gamma_A : \Gamma_B$$

$$\Lambda : B = \Delta_A \Gamma_B : \Delta_B \Gamma_B :: {}^{99}\Delta_A : \Delta_B :: \Gamma_A : \Gamma_B$$

Es decir, A, Λ y B son proporcionales en la razón de los lados. Es inmediato que A y B están en la razón duplicada de los lados. \square

Sean $a, c, d, b \in \mathbb{N} \mid a:b=c:d \iff a:c=b:d$, veamos que entre ab y cd hay un natural que es su media geométrica y que guardan entre la razón duplicada que guardan sus respectivos lados.

Bien, por ser semejantes se tiene:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = r \in \mathbb{Q} \iff \frac{c}{a} = \frac{d}{b} = r' \in \mathbb{Q}$$

Equivalentemente:

$$ad=bc=x \in \mathbb{N} \quad \text{[VII, 19]}$$

De hecho, x es la media geométrica de ab y cd , ya que, por alternancia: [VII, 13]

$$a:c=b:d$$

Luego: [VII, 17]

$$ab:x=ab:ad=b:d=a:c=ad:cd=x:cd$$

Es decir, x es media geométrica de ab y cd y, además, estos últimos están en la razón duplicada de sus lados ($a:c=b:d$). \square

⁹⁶**Proposición VII, 13**

⁹⁷Parece que hay ambigüedad en la definición de Λ , ya que cualquiera de los dos lados de A podría ser Δ_A y cualquiera de los lados de B podría ser Γ_B . Sin embargo, si recurrimos a notación más actual vemos que:

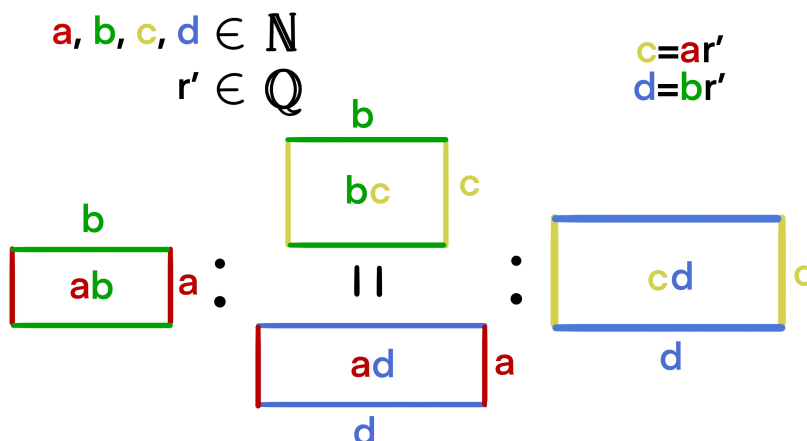
$$\Gamma_A : \Delta_A :: \Gamma_B : \Delta_B \iff \frac{\Delta_A}{\Gamma_A} = \frac{\Delta_B}{\Gamma_B} \iff \Delta_A \Gamma_B = \Delta_B \Gamma_A = \Lambda$$

Además, aunque Euclides no lo menciona, esto lo garantiza la **Proposición VII, 19** ya que:

$$\Gamma_A : \Delta_A :: \Gamma_B : \Delta_B$$

⁹⁸**Proposición VII, 17**

⁹⁹**Proposición VII, 18**



Proposición VIII, 19. *Entre dos números sólidos¹⁰⁰ semejantes¹⁰¹ caen dos números que son medias proporcionales; y el número sólido guarda con el número sólido semejante una razón triplicada de la que el lado correspondiente guarda con el lado correspondiente.*

Heath [1, 2]: “Between two similar solid numbers; there are two mean proportional numbers: and, the solid number has to the solid number the ratio triplicate of that which the corresponding side has to the corresponding side.” (p. 373)

Demostración: Sean A y B números sólidos semejantes. Sean Γ_A, Δ_A y E_A los lados de A y sean Γ_B, Δ_B y E_B los de B:

$$\begin{cases} A = \Gamma_A \Delta_A E_A = {}^{102} \Delta_A \Gamma_A \\ B = \Gamma_B \Delta_B E_B = {}^{103} \Delta_B \Gamma_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_A : \Delta_A :: \Gamma_B : \Delta_B \\ \Delta_A : E_A :: \Delta_B : E_B \end{cases}$$

Veamos que existen un M y un N tales que son media proporcional de A y B y, que estos, están en la razón duplicada de la que guardan los lados:

Por alternancia¹⁰⁴ en \blacktriangledown tendremos:

¹⁰⁰Definición VII, 17

¹⁰¹Definición VII, 21

¹⁰⁴Proposición VII, 13

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_A : \Delta_A :: \Gamma_B : \Delta_B \iff \blacktriangledown \Gamma_A : \Gamma_B :: \Delta_A : \Delta_B \\ \Delta_A : E_A :: \Delta_B : E_B \iff \blacktriangledown \Delta_A : \Delta_B :: E_A : E_B \end{array} \right\} \implies \Gamma_A : \Gamma_B :: \Delta_A : \Delta_B :: E_A : E_B \ominus$$

Definamos dos nuevos números \bar{A} y \bar{B} :

$$\bar{A} = \Gamma_A \Delta_A$$

$$\bar{B} = \Gamma_B \Delta_B$$

Tal y como hemos definido estos números, no es difícil ver que son planos semejantes, ya que sus lados son proporcionales.¹⁰⁵ Podemos entonces aplicar el resultado anterior a \bar{A} y \bar{B} . Y es que, a la luz de la **Proposición VIII, 18** se tiene que entre estos números caerá otro que es media proporcional. Sea ahora Λ dicho número, *i.e.* el producto de Δ_A y Γ_B :

$$\Lambda = \Delta_A \Gamma_B$$

Operando:

$$\bar{A} : \Lambda = \Delta_A \Gamma_A : \Delta_A \Gamma_B :: {}^{106} \Gamma_A : \Gamma_B \quad \odot$$

$$\Lambda : \bar{B} = \Delta_A \Gamma_B : \Delta_B \Gamma_B :: {}^{107} \Delta_A : \Delta_B \quad \otimes$$

Es decir, \bar{A} , Λ y \bar{B} son proporcionales en la razón de los lados. Es inmediato que \bar{A} y \bar{B} están en la razón duplicada de los lados.

Sean también M y N los siguientes números:

$$M = E_A \Lambda$$

$$N = E_B \Lambda$$

Operando una vez más:

$$A : M = E_A \bar{A} : E_A \Lambda :: {}^{108} \bar{A} : \Lambda :: \odot \Gamma_A : \Gamma_B$$

$$M : N = E_A \Lambda : E_B \Lambda :: {}^{109} E_A : E_B$$

$$N : B = E_B \Lambda : E_B \bar{B} :: {}^{110} \Lambda : \bar{B} :: \otimes \Delta_A : \Delta_B$$

Y por \odot se tiene que A , M , N y B son continuamente proporcionales en la razón de los lados o, lo que es igual, M y N son medias proporcionales (*i.e.* geométricas) de A y B . \square

¹⁰⁵ **Definición VII, 21**

¹⁰⁶ **Proposición VII, 17**

¹⁰⁷ **Proposición VII, 18**

¹⁰⁸ **Proposición VII, 17**

¹⁰⁹ **Proposición VII, 18**

¹¹⁰ **Proposición VII, 17**

Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ | $a:b:c=d:e:f$, veamos que entre abc y def hay dos naturales que son sus media geométricas. También se verifica que:

$$\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} = r \in \mathbb{Q}$$

Tomemos primero los naturales ab y de , son planos semejantes. Basándonos en el resultado anterior, podemos asegurar que entre ellos está $ae=bd \in \mathbb{N}$, su media proporcional.

Además ab y de están en la razón duplicada de sus lados. [VIII, 18]

Definamos ahora los siguientes naturales:

$$x = cbd = cae, y = fbd = fae$$

Es fácil comprobar que estos dos números son las medias geométricas pedidas:

$$abc:x = abc:bdc = ab:bd = a:d$$

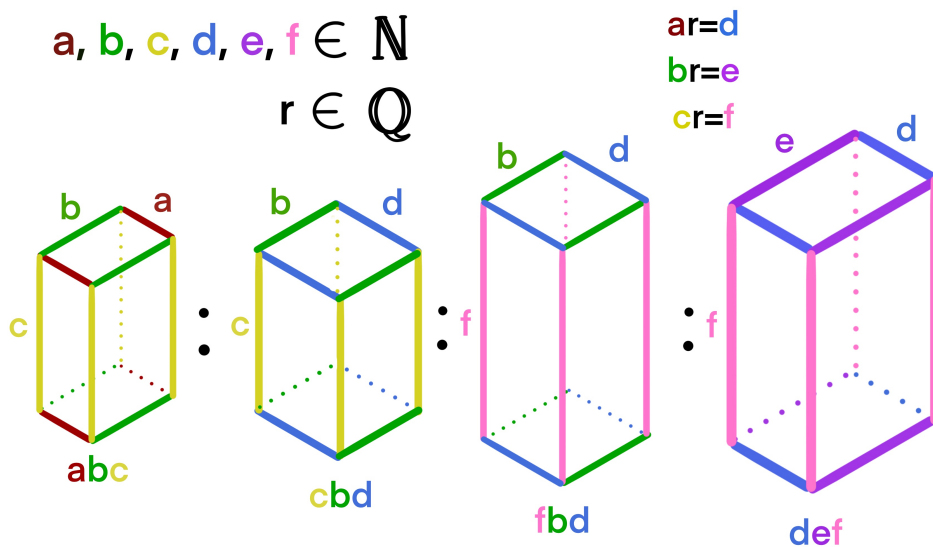
$$x:y = cbd:fd = c:f \quad [\text{VII, 16}], [\text{VII, 17}], [\text{VII, 18}]$$

$$y:def = fbd:df = b:e$$

Y por la definición de sólidos semejantes: [Def. VII, 21]

$$a:d = b:e = c:f$$

Es decir, abc y def están en la razón triplicada de sus lados. □



Proposición VIII, 20. *Si tres números son proporcionales, los extremos serán números planos semejantes*^{111, 112}.

¹¹¹Definición VII, 21

¹¹²Este resultado es el recíproco de la Proposición VII, 20

Heath [1, 2]: “If one mean proportional number fall between two numbers, the numbers will be similar plane numbers.” (p. 375)

Demostración: Sean A, Γ y B tres números proporcionales:

$$A : \Gamma :: \Gamma : B$$

Veamos que A y B son planos semejantes:

Sean Ψ y Ω los menores números en la razón de A con Γ :¹¹³ ¹¹⁴

$$\Psi : \Omega :: A : \Gamma :: \Gamma : B$$

Por ser los menores, Ψ mide tantas veces a A, como Ω a Γ .¹¹⁵ Sea X el número de veces que A y Γ son medidos por Ψ y Ω . Luego A y Γ son el producto de Ψ y Ω por X:¹¹⁶

$$(I) \begin{cases} A = X\Psi \\ \Gamma = X\Omega \end{cases}$$

Se deduce que:

$$A : \Gamma = X\Psi : X\Omega :: \Psi : \Omega$$

Análogamente, sea Φ el número de veces que Γ y B son medidos por Ψ y Ω . Luego Γ y B son el producto de Ψ y Ω por Φ :

$$(II) \begin{cases} \Gamma = \Phi\Psi \\ B = \Phi\Omega \end{cases}$$

Se deduce que:

$$\Gamma : B = \Phi\Psi : \Phi\Omega :: \Psi : \Omega$$

N.B. que:

$$\Gamma = {}^{(I)} X\Omega = {}^{(II)} \Phi\Psi$$

¹¹³**Proposición VII, 33**

¹¹⁴Euclides excluye directamente el caso en el que A y Γ sean los menores en su razón ya que no es posible. Si lo fueran, se tendría que:

$$\frac{\Gamma}{A} = r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p, q \in \mathbb{N}$$

es fracción irreducible. Ahora bien:

$$\frac{\Gamma}{A} = \frac{B}{\Gamma} = r \iff \Gamma = rA; B = r\Gamma = r^2A$$

Pero $r = \frac{p}{q}$ y, entonces, A es divisible dos veces entre q, ya que B es un número. Luego tanto A como Γ se pueden dividir entre q y no son los menores en su razón por no ser primos entre sí. Este resultado que acabamos de aplicar, es el contrarrecíproco de la **Proposición VIII, 1**.

¹¹⁵**Proposición VII, 20**

¹¹⁶**Definición VII, 15**

¹¹⁷**Proposición VII, 17**

¹¹⁸**Proposición VII, 17**

Luego A y B son números planos y sus respectivos lados son X, Ψ y Φ, Ω.

$$\begin{cases} A = X\Psi \\ B = \Phi\Omega \end{cases}$$

Veamos ahora que son planos semejantes:

$$\Psi : \Omega :: A : \Gamma \stackrel{(II)}{=} X\Psi : \Phi\Psi :: \stackrel{119}{X} : \Phi$$

$$\Psi : \Omega :: X : \Phi \iff \stackrel{120}{\Psi} : X :: \Omega : \Phi$$

Por lo que los lados de A y B son proporcionales y A y B guardan la razón duplicada de sus lados.

Este resultado es el recíproco de la **Proposición VIII, 18**. □

Sean a, c, b ∈ ℕ proporcionales. Veamos que a y b son planos semejantes:

sean x, y ∈ ℕ los menores naturales proporcionales a a y c: [VII, 33]

$$x : y = a : c = c : b$$

Además ∃ m, n ∈ ℕ: [VII, 20]

$$m = \frac{a}{x} = \frac{c}{y} \quad n = \frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$

Luego a=xm, c=ym=xn, b=yn, por lo que a y b son naturales “planos”.

Además: [VII, 17] o [VII, 18]

$$x : y = a : c = c : b = ym : yn = m : n$$

Por alternancia: [VII, 13]

$$x : y = m : n \iff x : m = y : n \quad \square$$

Proposición VIII, 21. *Si cuatro números están en proporción continua, los extremos son números sólidos semejantes.*¹²¹

Heath [1, 2]: “If two mean proportional numbers fall between two numbers, the numbers will be similar cube numbers.” (p. 377)

Demostración: Sean A, Γ, Δ y B en proporción continua. Veamos que A y B son sólidos semejantes: Sean X, Ψ y Ω los menores números continuamente proporcionales en la razón de A, Γ y Δ:¹²²

$$X : \Psi : \Omega :: A : \Gamma : \Delta$$

¹¹⁹Proposición VII, 18

¹²⁰Proposición VII, 13

¹²¹Definición VII, 21

¹²²Proposición VIII, 2

La **Proposición VIII, 3** garantiza que X y Ω son primos entre sí. Y, como entre ellos cae Ψ en proporción continua, por la proposición anterior¹²³ se tiene que X y Ω son planos semejantes. Sean entonces M_X y N_X los lados de X mientras que, M_Ω y N_Ω , los de Ω :

$$\begin{cases} X = M_X N_X \\ \Omega = M_\Omega N_\Omega \end{cases}$$

Volviendo al resultado anterior,¹²⁴ en concreto, a la demostración, queda patente que X , Ψ y Ω están en la razón en la que están los lados. *I.e.*, en la razón:

$$M_X : M_\Omega :: N_X : N_\Omega$$

Ahora por igualdad:¹²⁵

$$A : \Gamma : \Delta :: X : \Psi : \Omega \implies A : \Delta :: X : \Omega$$

Luego A y Δ son proporcionales a X y Ω , los cuales son primos entre sí y por tanto los menores en su razón.¹²⁶ Pero, los números menores en su razón, miden a los que son proporcionales a ellos, según la **Proposición VII, 20**. Esto implica que X mide a A tantas veces como Ω a Δ o, que:

$$\exists E \in \mathbb{N} \mid A = EX \wedge \Delta = E\Omega$$

Y por lo tanto A es un número sólido, ya que:

$$A = EX = EM_X N_X$$

Pero X , Ψ y Ω son los números menores proporcionales a Γ , Δ y B , de la misma forma que son los menores números en la razón de A , Γ y Δ . Y, similarmente, obtendremos que:

$$\exists O \in \mathbb{N} \mid \Gamma = OX \wedge B = O\Omega = OM_\Omega N_\Omega$$

Es decir, A y B son sólidos. Veamos que son semejantes: Por ser A , Γ , Δ y B continuamente proporcionales:

$$A : \Gamma :: \Gamma : \Delta :: \Delta : B$$

Además:

$$A : \Gamma = EX : OX :: {}^{127}E : O$$

Pero estos están en la misma razón que X y Ψ , así

$$A : \Gamma :: X : \Psi :: M_X : M_\Omega (:: N_X : N_\Omega)$$

De lo que se deduce que todas las parejas de lados están en la misma razón.

Este resultado es el recíproco de la **Proposición VIII, 19**. □

¹²³ **Proposición VIII, 20**

¹²⁴ **Proposición VIII, 20**

¹²⁵ **Proposición VII, 14**

¹²⁶ **Proposición VII, 21**

¹²⁷ **Proposición VII, 18**

Sean $a, c, d, b \in \mathbb{N}$ en progresión geométrica. Veamos que a y b son cubos semejantes:

sean $r, s, t \in \mathbb{N}$ los menores naturales proporcionales a a, c, d : [VII, 33] o [VIII, 2]

$$r : s : t = a : c : d$$

r, t son coprimos y planos similares: [VIII, 3], [VIII, 20]

$$\exists r_1, r_2, t_1, t_2 \in \mathbb{N} \mid r = r_1 r_2, t = t_1 t_2$$

Además:

$$r_1 : r_2 = t_1 : t_2$$

Y según la demostración de [VIII, 20], $\exists x, y \in \mathbb{N}$ los menores verificando:

$$x : y = r_1 : t_1 = r_2 : t_2$$

Ex aequali: [VII, 14]

$$a : d = r : t$$

Y como r, t son coprimos: [VII, 20]

$$m = \frac{a}{r} = \frac{d}{t} \in \mathbb{N}$$

Es decir, a es un natural “sólido” ya que:

$$a = mr = m r_1 r_2$$

Tengamos ahora en cuenta lo siguiente:

$$c : b = r : t$$

Razonando como antes obtendremos: [VII, 20]

$$n = \frac{c}{r} = \frac{b}{t} \in \mathbb{N}$$

Y, por tanto, b es otro natural “sólido”, ya que:

$$b = nt = n t_1 t_2$$

Además se verifica:

$$x : y = a : c = m r : n r = m : n$$

$$x : y = r_1 : t_1 = r_2 : t_2$$

Y por tanto:

$$m : n = r_1 : t_1 = r_2 : t_2$$

□

Proposición VIII, 22. *Si tres números son continuamente proporcionales y el primero es cuadrado¹²⁸, el tercero también será cuadrado.*

Heath [1, 2]: “If three numbers be in continued proportion, and the first be square, the third will also be square.” (p. 379)

Demostración: Sean A, B y Γ en proporción continua, y sea A cuadrado; veamos que Γ es cuadrado también:

¹²⁸Definición VII, 18

Se tiene que, por ser tres números continuamente proporcionales, B es media proporcional de A y Γ. En estas condiciones, la **Proposición VII, 20** nos asegura que A y Γ son planos semejantes. Finalmente veamos como que A y Γ sean planos semejantes y A cuadrado implica que Γ es cuadrado: Sean Λ_A^1 y Λ_A^2 los lados de A. Sean Λ_Γ^1 y Λ_Γ^2 , los de Γ. Por ser semejantes:

$$\Lambda_A^1 : \Lambda_\Gamma^1 :: \Lambda_A^2 : \Lambda_\Gamma^2 \iff {}^{129}\Lambda_A^1 : \Lambda_A^2 :: \Lambda_\Gamma^1 : \Lambda_\Gamma^2 \quad (3.3)$$

Pero como A es cuadrado:

$$\Lambda_A^1 = \Lambda_A^2 = \Lambda_A$$

Es decir, por la definición de estar en la misma razón:

$$\Lambda_A : \Lambda_A :: \Lambda_\Gamma^1 : \Lambda_\Gamma^2 \iff \Lambda_\Gamma^1 = \Lambda_\Gamma^2 = \Lambda_\Gamma$$

□

Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ en progresión geométrica y sea a cuadrado:

$$\exists \bar{a} \in \mathbb{N} \mid a = \bar{a}^2$$

$$a : b = b : c$$

Veamos que c también es cuadrado:

Entonces a y c son números planos similares. [VIII, 20]

Sean x e y los lados de c:

$$\bar{a} : x = \bar{a} : y$$

Equivalentemente: [Def. VII, 20]

$$x = y$$

□

Proposición VIII, 23. Si cuatro números son continuamente proporcionales y el primero es cubo¹³⁰, también será cubo el cuarto.

Heath [1, 2]: “If four numbers be in continued proportion, and the first be cube, the forth will also be cube.” (p. 379)

Demostración: Sean A, B, Γ y Δ en proporción continua y sea A cubo, veamos que Δ es cubo también:

Se tiene que B y Γ son media proporcional de A y Δ. En estas condiciones, la **Proposición VII, 21** nos asegura que A y Δ son sólidos semejantes.

Finalmente veamos como, que A y Δ sean sólidos semejantes y A cubo, implica que Δ es cubo: Sean Λ_A^1 , Λ_A^2 y Λ_A^3 los lados de A. Sean Λ_Δ^1 , Λ_Δ^2 y Λ_Δ^3 , los de Δ. Por ser semejantes:

$$\Lambda_A^1 : \Lambda_\Delta^1 :: \Lambda_A^2 : \Lambda_\Delta^2 :: \Lambda_A^3 : \Lambda_\Delta^3$$

¹²⁹Proposición VII, 13

¹³⁰Definición VII, 19

Pero como A es cubo:

$$\Lambda_A^1 = \Lambda_A^2 = \Lambda_A^3 = \Lambda_A$$

Es decir, por la definición de estar en la misma razón:

$$\Lambda_A : \Lambda_\Delta^1 :: \Lambda_A : \Lambda_\Delta^2 :: \Lambda_A : \Lambda_\Delta^3 \iff \Lambda_\Delta^1 = \Lambda_\Delta^2 = \Lambda_\Delta^3 = \Lambda_\Delta$$

□

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ en progresión geométrica y sea a cubo:

$$\exists \bar{a} \in \mathbb{N} \mid a = \bar{a}^3$$

$$a : b = b : c = c : d$$

Veamos que d también es cubo:

Entonces a y d son números sólidos similares.

[VIII, 21]

Sean x, y, z los lados de d:

$$\bar{a} : x = \bar{a} : y = \bar{a} : z$$

Equivalentemente:

[Def. VII, 20]

$$x = y = z$$

□

Proposición VIII, 24. *Si dos números guardan entre sí la razón que un número cuadrado¹³¹ guarda con un número cuadrado y el primero es cuadrado, el segundo será también cuadrado.*

Heath [1, 2]: “If two numbers have to one another the ratio which a square number has to a square number, and the first be square, the second will also be square.” (p. 380)

Demostración: Sean A y B en la razón de dos números cuadrados siendo A cuadrado; veamos que B también lo es. Sean pues Ψ y Ω los números (cuadrados) menores en la razón de A y B:

$$A : B :: \Psi : \Omega$$

Como Ψ y Ω son cuadrados, son planos semejantes.¹³² En virtud de la **Proposición VIII, 18**, caerá entre ellos un número que es media proporcional, Φ .

Pero tantos caen en proporción continua entre Ψ y Ω , tantos caerán entre A y B en la misma razón.¹³³ Sea este número Γ :

$$A : \Gamma : B :: \Psi : \Phi : \Omega$$

¹³¹Definición VII, 18

¹³²Ver Definición VII, 21. Euclides no lo demuestra pero es inmediato. Para dos cuadrados distintos, las razones entre los lados de un número y los del otro son trivialmente iguales, ya que los lados de cada número lo son.

¹³³Proposición VIII, 8

Y, dado que A, Γ y B son continuamente proporcionales y A es cuadrado, B es cuadrado.¹³⁴

□

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Sea a cuadrado (*i.e.* $\exists \bar{a} \in \mathbb{N} \mid \bar{a}^2 = a$) y se verifique además:

$$a : b = c^2 : d^2$$

Veamos que b es otro número cuadrado:

Entre c^2 y d^2 cae cd, su media geométrica.

[VIII, 18]

Luego a y b también tienen una media geométrica, x:

[VIII, 8]

$$a : x : b = c^2 : cd : d^2$$

Y por [VIII, 22], como a es cuadrado, b también.

□

Proposición VIII, 25. *Si dos números guardan entre sí la razón que un número cubo¹³⁵ guarda con un número cubo y uno de ellos es cubo, el otro también lo será.*

Heath [1, 2]: “*If two numbers have to one another the ratio which a cube number has to a cube number, and the first be cube, the second will also be cube.*” (p. 380)

Demostración: Sean A y B en la razón de dos números cubos siendo A cubo; veamos que B es cubo. Sean pues Ψ y Ω los números (cubos) menores en la razón de A y B:

$$A : B :: \Psi : \Omega$$

Como Ψ y Ω son cubos, son sólidos semejantes.¹³⁶ En virtud de la **Proposición VIII, 19**, caerán entre ellos dos números que son media proporcional, Φ y X.

Pero tantos caen en proporción continua entre Ψ y Ω , tantos caerán entre A y B en la misma razón.¹³⁷ Sean estos números Γ y Δ :

$$A : \Gamma : \Delta : B :: \Psi : \Phi : X : \Omega$$

Y, dado que A, Γ , Δ y B son continuamente proporcionales y A es cubo, B es cubo.¹³⁸

□

¹³⁴**Proposición VIII, 22**

¹³⁵**Definición VII, 19**

¹³⁶Ver **Definición VII, 21**. Euclides no lo demuestra pero es inmediato. Para dos cubos distintos, las razones entre los lados de un número y los del otro son trivialmente iguales.

¹³⁷**Proposición VIII, 8**

¹³⁸**Proposición VIII, 23**

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Sea a cubo (*i.e.* $\exists \bar{a} \in \mathbb{N} \mid \bar{a}^3 = a$) y se verifique además:

$$a : b = c^3 : d^3$$

Veamos que b es otro número cubo:

Bien, c^3 y d^3 tienen dos medias geométricas (c^2d y cd^2). [VIII, 19]

Luego a y b también tienen dos medias geométricas, x e y : [VIII, 8]

$$a : x : y : b = c^3 : c^2d : cd^2 : d^3$$

Y por [VIII, 23], como a es cubo, b también. □

Proposición VIII, 26. *Los números planos semejantes¹³⁹ guardan entre sí la razón que un número cuadrado¹⁴⁰ guarda con un número cuadrado.*

Heath [1, 2]: “*Similar plane numbers have to one another the ratio which a square number has to a square number.*” (p. 381)

Demostración: Sean A y B dichos números planos semejantes. Veamos que son proporcionales a dos números cuadrados:

Por ser A y B sólidos semejantes, caerá entre ellos otro número Ω que es media proporcional.¹⁴¹ *I.e.* A, Ω y B están en proporción continua.

La **Proposición VIII, 2** garantiza la existencia de Γ, Δ y E , los menores números que verifican:

$$A : \Omega : B :: \Gamma : \Delta : E$$

*Ex aequali:*¹⁴²

$$A : B :: \Gamma : E$$

Luego A y B son proporcionales a E y Θ . Además, si ahora volvemos al Porisma de la **Proposición VIII, 2**, este nos garantiza que E y Θ son números cuadrados. Por lo tanto, A y B están en la razón de dos números cuadrados. □

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ planos semejantes y sea $c \in \mathbb{N}$ su media geométrica: [VIII, 18]

$$a : c = c : b$$

Sean $x, y, z \in \mathbb{N}$ los menores naturales en la razón de a, c, b . [VII, 33] o [VIII, 2]

Ex aequali: [VII, 14]

$$a : b = x : z$$

Pero x y z son números cuadrados según [Por VIII, 2]. □

¹³⁹Definición VII, 21

¹⁴⁰Definición VII, 18

¹⁴¹Proposición VII, 18

¹⁴²Proposición VII, 14

Proposición VIII, 27. *Los números sólidos semejantes¹⁴³ guardan entre sí la razón que un número cubo¹⁴⁴ guarda con un número cubo.*

Heath [1, 2]: “*Similar solid numbers have to one another the ratio which a cube number has to a cube number.*” (p. 382)

Demostración: Sean A y B dichos sólidos semejantes. Veamos que son proporcionales a dos números cubos:

Por ser A y B sólidos semejantes, caerán entre ellos dos números Γ y Δ que son media proporcional.¹⁴⁵ *I.e.* A, Γ , Δ y B están en proporción continua.

Las **Proposiciones VII,33** y **VIII, 2** garantizan la existencia de E, Z, H y Θ ; los menores números que verifican:

$$A : \Gamma : \Delta : B :: E : Z : H : \Theta$$

*Ex aequali:*¹⁴⁶

$$A : B :: E : \Theta$$

Luego A y B son proporcionales a E y Θ . Además, si ahora volvemos al **Porisma** de la **Proposición VIII, 2**, este nos garantiza que E y Θ son números cubos. Por lo tanto, A y B están en la razón de dos cubos. □

Sean $a, b \in \mathbb{N}$, sólidos semejantes y sean $c, d \in \mathbb{N}$ sus medias geométricas: [VIII, 19]

$$a:c=c:d=d:b$$

Sean $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ los menores naturales proporcionales a a, c, d, b . [VII, 33] o [VIII, 2]

Por igualdad: [VII, 14]

$$a:b=x:t$$

Pero x y t son números cubos según [Por VIII, 2]. □

¹⁴³Definición VII, 21

¹⁴⁴Definición VII, 19

¹⁴⁵Proposición VII, 19

¹⁴⁶Proposición VII, 14

Apéndice A

Agradecimientos

A Celso Rodríguez Fernández, por su paciencia, experiencia y buen talante. Este documento no estaría terminado sin su inestimable ayuda, e incompleto sin reconocer su mérito.

A Eduardo Sáenz de Cabezón y a todos los divulgadores científicos y, en especial, matemáticos que ayudaron a desarrollar mi pasión por la ciencia y las matemáticas.

A los excelentes profesionales del CHUAC, en especial al personal de cardiología, donde este documento fue finalizado tras mi hospitalización y posterior operación.

A Sira Fernández García, mi apoyo incondicional, consejera particular, valedora principal y mi mejor amiga.

A Jacobo Nieto Quiñones por ofrecerme su ayuda en la confección de este documento, y por su apoyo moral durante el presente curso escolar.

A María Macía Álvarez por brindarme su ayuda en el presente documento como ilustradora de gran talento y por su amistad imperecedera.

A Martín Edy Silvani Prado, por ser mi día a día y la persona con la que compartiría todas mis risas.

A Nicolás Antonio Fernández Marín, por su apoyo eterno, por su amistad incondicional y por nunca haber dejado de confiar en mí y en mis capacidades.

A David Rodríguez Justo, en quien siempre podré confiar y quien me acogió desde el primer día como si me conociese de toda la vida.

A Olalla Liz Castro, la persona más pura que conozco, eres un haz de luz en la oscuridad. Nunca cambies y no pierdas tu sonrisa y alegría.

A mis ahijadas Nilia Ruiz Caamaño y Candela Fernández Pascual por ser mi familia fuera de casa.

A Héctor Bazo González y a Sergio García Iglesias, por ser mis hermanos pequeños en funciones.

A Bárbara Maquieira Cortiñas por su inquebrantable amistad y su sonrisa eterna. Y sus 33 formas de apoyarme.

A María Iglesias Baleato, por su eterna preocupación por mí y mi salud y por no dejar de creer en mí.

A Pedro Ortego Carrascal y Javier López Caridad, por seguir ahí a pesar de todo y todos. Y por muchos años más.

A Antonio Sampedro Padilla y Efrén Ruiz Pedrosa por su inestimable ayuda en la revisión de este documento.

A Sara Martínez Leis por ser mi segunda madre en Santiago.

A mi hermana, Inma, el amor y la alegría de mi vida, te quiero con locura.

A mi padre Ricardo, sin su esfuerzo titánico mi entendimiento de la lógica y las matemáticas no sería el que es. A mi madre Ana, la mujer más inteligente que conozco, que me enseñó la forma que tiene el mundo a través de sus sabios ojos. A ambos por todo lo que soy y lo que tengo y por enseñarme a amar.

A todas las personas que han influido en mi vida de forma positiva y que no puedo nombrar en este documento, a las que me han querido o apreciado a alguna vez, a las que me han enseñado algo, a las que me han acompañado y me han convertido en la persona que soy hoy.

A todos vosotros, gracias de corazón.

Late Fragment

And did you get what
you wanted from this life, even so?
I did
And what did you want?
To call myself beloved, to feel myself
beloved on the earth.

Raymond Carver

$$P\{\emptyset\} = \{\emptyset\} \neq \emptyset$$

Bibliografía

- [1] Heath, T.L. *The thirteen books of Euclids Elements. Second Edition Unabridged* (Vol. II-III). Cambridge University Press, 1908.
https://archive.org/details/thirteenbooksele00heat_069/
<https://archive.org/details/thirteenbooksele00heat/mode/2up>
- [2] Heath, T.L. *The thirteen books of Euclids Elements. Second Edition Unabridged* (Vol. I-II). Dover Publications Inc., 1956.
https://archive.org/details/thirteenbooksofe0001eucl_e2h2
<https://archive.org/details/thirteenbooksofe00eucl/>
- [3] Rodriguez Alonso, Ana Gloria e Rodriguez Fernandez Celso. *Euclides [Elementos. Galego]* Universidad de Santiago de Compostela, 2013.
[https://www.usc.gal/libros/gl/matematicas/808-elementos-332826-.html#](https://www.usc.gal/libros/gl/matematicas/808-elementos-332826-.html#/29-formato-pdf/34-transaccion-gratis)
<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>
- [4] Sáenz de Cabezón, Eduardo *El libro MÁS IMPORTANTE DEL MUNDO: Los Elementos de Euclides*. [vídeo], Derivando, Youtube, 2022.
<https://www.youtube.com/watch?v=sM3qGIyy1Dc&t=189s>
- [5] Alias Linares, Luis José *Euclides, el padre de la Geometría por el Prof. Dr. D. Luis José Alias Linares, académico de número*, Academia de Ciencias de la región de Murcia
<https://www.um.es/acc/euclides-el-padre-de-la-geometria/>
- [6] M. L. Puertas Castaños, *Elementos*, vols. I-III, Madrid 1991-1996, Biblioteca Clásica Gredos
<https://docplayer.es/45840668-Elementos-biblioteca-clasica-gredos-155-euclides-libros-1-iv-editor-al-iredos-introduccion-de-luis-vega.html>
- [7] J. L. Heiberg y H. Menge, *Euclidis Opera omnia*, vols. I-IV, Leipzig 1883-86,
<https://archive.org/details/euclidisoperaomn01eucluoft>