

ORIGEN Y FUNDAMENTO FILOSOFICO DEL INTUICIONISMO

Concepción Martínez Vidal

Abstract

In this communication the origen and main thesis of the intuitionistic point of view are discussed and confronted against the thesis of both the formalistic and classical points of view. Special attention has been devoted to the discussion of the concepts of *proof*, *truth*, to the intended meaning of the logical constants, and to the discussion of some classical principles which are not intuitionistically valid.

El origen de la concepción intuicionista

La polémica relativa a los fundamentos de la matemática que tuvo lugar en los años 20 se estructura en torno a una cuestión fundamental: el concepto de infinito.

La polémica surge a propósito de la deducción que Frege -defensor de la propuesta logicista- realiza, en su ideografía, de las leyes fundamentales de la aritmética a partir de principios lógicos; esta propuesta se inscribe en el marco del pensamiento de Leibniz que se caracteriza por la defensa del carácter actual del concepto de infinito.

Frege denuncia la carencia de un fundamento relativo a la naturaleza y base epistemológica de la matemática. Para poner término a esta situación propone un programa de investigación cuya tesis fundamental establece la reducibilidad de la matemática (de la aritmética elemental (y del análisis) que es para Frege analítica frente al carácter sintético que estima presenta la geometría) a la lógica. La realización del programa logicista culmina con la publicación de *Die Grundgesetze der Arithmetik* en dos volúmenes (1893 y 1903 respectivamente). Sin embargo, coincidiendo con la impresión del segundo, Bertrand Russell -defensor de las tesis logicistas- detecta ciertas paradojas en el sistema propuesto por Frege. Estas paradojas surgen a propósito de la utilización de la teoría de conjuntos cantoriana (que incorpora el concepto de infinito actual) en el sistema propuesto por Frege para la realización del programa logicista. A partir de este momento se producen distintos intentos de evitar esta dificultad entre los que destacan la teoría de tipos de Russell y la axiomatización de Zermelo Fraenkel.

Desde posturas filosóficas contrarias al logicismo se defienden tesis contrarias: las *formalistas e intuicionistas*. Estas dos escuelas se enmarcan en la tradición Kantiana;

se entiende el concepto de infinito como infinito potencial, como una «idea de la razón». Así, desde el formalismo moderado, Hilbert propone un programa para la demostración de la consistencia de la matemática por métodos finitistas¹ previa representación de la aritmética elemental en un sistema formal adecuado. En otras palabras, Hilbert mantiene que la utilización del concepto de infinito actual en matemáticas es lícita en tanto que *es posible* obtener resultados idénticos utilizando métodos finitistas. Por el contrario desde el intuicionismo se denuncia la utilización del concepto de infinito actual y se propugna la necesidad de reformular la matemática en términos estrictamente constructivos (sin utilizar la teoría de conjuntos cantoriana).

Esta polémica se clarifica tras la obtención de los teoremas de incompletud de Gödel (1931). El primer teorema de incompletud establece la imposibilidad de formalizar *toda* la matemática clásica en un único sistema formal. Este teorema no supuso un golpe definitivo para las tesis formalistas dado que la formalización parcial desarrollada por Zermelo-Fraenkel podía considerarse suficiente para la realización del programa de Hilbert. Sin embargo, el segundo teorema de incompletud constituye un duro revés para el programa de Hilbert puesto que determina la imposibilidad de demostrar la consistencia de la aritmética en el marco del sistema en que esté formalizada, aunque este resultado puede establecerse desde fuera del mismo.

También la tesis logicistas quedan invalidadas en tanto que se demuestra que la reducción de la matemática a la lógica no resuelve el problema de la fundamentación de la primera: la fundamentación de la lógica presenta los mismos problemas que la de la matemática.

Sin embargo el programa intuicionista, con su énfasis en los procedimientos constructivos, resulta reforzado en la medida en que se produce una victoria del constructivismo.

La concepción intuicionista frente a las concepciones clásica (logicista) y formalista

Tesis Intuicionista

Las claves del paradigma intuicionista pueden resumirse en dos puntos básicos:

1) En primer lugar se considera que la comprensión de un enunciado matemático ha de concebirse en términos de construcciones mentales que pueden servir para probar el enunciado, más que términos de un estado de hecho que se produce en el seno de una realidad matemática objetiva que verifica o refuta el enunciado en cuestión. El rechazo del realismo ontológico -que se considera estrechamente vinculado a la teoría platónica del significado- es consustancial a las tesis intuicionistas. En otras palabras, desde el intuicionismo se propugna la necesidad de elaborar una teoría general del significado de las constantes lógicas (de los enunciados matemáticos) en la que se abandone todo presupuesto realista, en la que se abandone el principio de bivalencia.

¹ Hilbert no precisó cuáles eran. Suelen ser identificados con la recursión primitiva sin cuantificadores.

2) En segundo lugar, se rechaza el concepto de infinito actual. Desde el punto de vista intuicionista, *entender* una estructura infinita es *captar* el proceso que la genera, *referir* a una estructura infinita es *referir* a ese proceso infinito y *reconocer* que una estructura es infinita es *reconocer* que el proceso de generación de la misma no terminará². Se propone como alternativa al concepto de *ordinal transfinito* el concepto de *secuencia de elección*. Una *secuencia de elección* es una secuencia infinita en la que es posible distinguir un segmento finito inicial junto con restricciones que se imponen sobre los elementos de elección subsiguientes (elecciones que pueden continuar *ad infinitum*).

*Análisis comparado*³

La primera diferencia entre las tres concepciones concierne a la *naturaleza de los objetos matemáticos*. Desde la concepción clásica se considera que los enunciados matemáticos hacen referencia a una realidad epistemológica con existencia individual y realidad objetiva. Desde el intuicionismo se considera que los objetos matemáticos son construcciones mentales; carece de sentido hablar de la realidad matemática en los mismos términos en los que se habla del mundo real. Por el contrario desde el formalismo se distingue entre sentencias ideales (las indecidibles) y sentencias reales (las decidibles) al tiempo que se prescinde de cualquier referencia a cuestiones ontológicas.

En segundo lugar, desde el intuicionismo se denuncia la necesidad de *justificación* que se plantea desde la matemática clásica como indicio de la existencia de deficiencias importantes en el seno de los paradigmas que la propugnan. La necesidad de justificación se defiende tanto desde el paradigma logicista como desde el formalista. La diferencia entre los dos últimos estriba en la índole de la fundamentación requerida. Mientras que la propuesta logicista es reduccionista, la formalista propone una justificación indirecta.

En tercer lugar desde la propuesta formalista se considera que los enunciados matemáticos tienen tan sólo la forma exterior de las sentencias declarativas pero carecen de contenido genuino que pueda ser afirmado o falsado. Sin embargo, tanto desde la concepción clásica como desde la intuicionista se defiende el *carácter significativo* individual de los distintos enunciados de una teoría (matemática); a los enunciados matemáticos se les pueden aplicar las nociones de verdad y falsedad de forma no holista (todo enunciado matemático tiene un significado propio). Estas dos escuelas difieren, no obstante, a propósito de la forma en que se proclama se debe entender un enunciado matemático. Desde la concepción clásica «entender el significado de un enunciado matemático» es «captar» en qué consiste la verdad de ese enunciado. Además esa verdad puede ser asignada incluso cuando se carece de un método que

² En el caso de los procesos finitos es posible distinguir legítimamente entre el proceso de generación y el *output* obtenido.

³ Buena parte de las diferencias entre las tres escuelas se disipan en el caso de las sentencias reales (Por ejemplo los enunciados matemáticos decidibles).

nos permita reconocerla (principio de bivalencia). La verdad es un concepto trascendente que hace referencia a un reino de objetos abstractos. Por el contrario desde el intuicionismo «entender un enunciado matemático» es disponer de la capacidad para «reconocer» una demostración del mismo siempre que se nos presente. La verdad de un enunciado matemático se identifica con la existencia de una prueba donde por *prueba* se entiende algo intuitivamente concebible, no una derivación en un sistema formal dado. Una prueba es pues cierto tipo de concepción mental que no puede ser representada en el marco de un sistema formal concreto: *esse est concipi*.

En cuanto al concepto de demostración coinciden formalistas y defensores de la concepción clásica puesto que ambos consideran que las demostraciones no constructivas son demostraciones. Los primeros justifican tal opción en base a que es posible obtener una demostración constructiva de cualquier resultado que se obtenga mediante una demostración no constructiva (tesis invalidada, al menos parcialmente, por el segundo teorema de incompletud de Gödel). Los segundos son los artífices de la distinción entre demostración constructiva y demostración no-constructiva. Por el contrario desde el intuicionismo se considera que ninguna demostración constructiva puede ser considerada como la demostración de un enunciado. Toda demostración ha de ser constructiva.

Intuicionistas y defensores de la concepción clásica difieren en torno al *significado que asignan a las constantes lógicas*. Para los defensores de la concepción clásica este significado viene dado por las tablas de verdad. Los intuicionistas consideran, por el contrario, que el significado de las constantes lógicas es el siguiente:

- una prueba de $A \& B$ es cualquier cosa que sea una prueba de A y una prueba de B .
- una prueba de $A \vee B$ es cualquier cosa que sea una prueba de A o de una prueba de B .
- una prueba de $\forall x A x$ es cualquier cosa que sea una prueba del enunciado $A(n)$ para algún n .
- una prueba de $A \rightarrow B$ es una construcción que podemos reconocer transforma toda prueba de A en una de B .
- una prueba de $\forall x A(x)$ es una construcción uniforme (por ejemplo de números naturales sobre pruebas) que podemos reconocer que cuando se aplica a cualquier número n del dominio permite obtener una prueba de $A(n)$.

Para una adecuada *interpretación de los cuantificadores* desde la concepción clásica se exige, exclusivamente, que los dominios sobre los que ranguean sean dominios no-vacios. Esto se justifica porque es posible explicar la cuantificación sobre cualquier tipo de dominio no vacío de manera uniforme; la única distinción significativa es la relativa a la cardinalidad del dominio. Por el contrario desde el intuicionismo se exige no sólo que los dominios de cuantificación sean no vacíos, sino que sean dominios *habitados*. Un *dominio habitado finito* es aquel respecto al cual se puede demostrar que existe al menos un elemento; *dominio habitado infinito* es aquel respecto a cuyos elementos hay que demostrar no sólo que existen sino también que el elemento en cuestión pertenece al dominio que se esté considerando. En lo relativo a la descripción de los objetos matemáticos los defensores de la interpretación clásica utilizan la

identidad extensional, no decidible, de objetos matemáticos, mientras que los intuicionistas utilizan la identidad intensional, decidible, -lo cual no es óbice para que acepten y trabajen también con la identidad extensional-.

Desde el punto de vista algebraico, la estructura del sistema de valuación asociado a la lógica proposicional clásica corresponde a la de un álgebra de Boole⁴, mientras que una estructura algebraica $\langle \mathbf{M}, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ que describe una valuación M es correcta para la lógica intuicionista si y sólo si es el sistema (una familia de sistemas de valuación) asociado a un retículo Heyting⁵. Los sistemas de valuación han demostrado ser útiles en semántica y para obtener resultados sobre sistemas lógicos. Así en el caso de la lógica intuicionista permiten una caracterización algebraica de la misma que no tiene relación alguna con el significado intuitivo de las constantes lógicas⁶. Si se plantea el problema de caracterizar una lógica L por medio de un sistema de valuación, la situación óptima es aquella en que se dispone de una valuación estrictamente característica⁷ para la lógica en cuestión; si no es posible, entonces lo más adecuado es que exista una familia de sistemas de valuación característicos para L . Si hay una familia de sistemas de valuación finitos que sea al menos estrictamente característico para L , diremos que la lógica L tiene la propiedad del modelo finito. El primer caso se ajusta a la caracterización de la lógica proposicional clásica, mientras que el segundo corresponde a la lógica proposicional intuicionista.

La presentación de la lógica intuicionista suele realizarse indicando que ciertas leyes de la lógica clásica no son aceptables desde tal perspectiva. En concreto desde el punto de vista técnico la principal diferencia entre los sistemas intuicionistas y clásico estriba en el rechazo, por parte de los primeros, del principio de *tertio excluso*, $A \vee \neg A$, de la regla de eliminación de doble negador o del absurdo clásico, y, consiguientemente de todas aquellas reglas que se justifican en virtud de la aplicación de cualquiera de las leyes lógicas que se acaban de enumerar. Sin embargo, no suele resultar sencillo desentrañar el por qué de este rechazo del principio de bivalencia que se explica, en último término, en virtud de la distinta forma en que se entiende el significado de las conectivas. El concepto clásico de verdad es un concepto transcendente; la verdad de un enunciado matemático no depende de la existencia de una prueba concebible del mismo. Se propugna que (para Frege, la referencia de) un

⁴ Un álgebra de Boole es todo retículo distributivo y complementario. Donde por retículo se entiende una estructura $\langle \mathbf{M}, \cap, \cup \rangle$ donde $\cap, \cup$ son operaciones (intersección, unión) que satisfacen para todo $a, b, c \in \mathbf{M}$: (i) $a \cap a = a \cup a = a$; (ii) $a \cap b = b \cap a$, $a \cup b = b \cup a$; (iii) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$, $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$; (iv) $a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$. Si además satisface (v) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ y $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$, entonces se dice que el retículo es distributivo. Un retículo es complementario si existen dos elementos, el universal, «1», y el nulo, «0», tales que para todo elemento de $\mathbf{M}$ a se cumple que existe otro a' de $\mathbf{M}$ tal que $a \cup a' = 1$ y $a \cap a' = 0$.

⁵ Un retículo $\langle \mathbf{M}, \cap, \cup \rangle$ se denomina un retículo de Heyting si tiene un '0' y existe una operación binaria ' $\Rightarrow$ ' tal que para todo a, b, c de $\mathbf{M}$: $c \leq a \Rightarrow b$ si y sólo si $a \cap c \leq b$. Si esa operación existe, es única. (Todo retículo de Heyting es un retículo distributivo. Véase la nota anterior).

⁶ En tanto que incorporan el significado intuitivo de las constantes lógicas los desarrollos obtenidos en teoría general de la demostración (teoremas de normalización para la lógica intuicionista y clásica de primer y segundo orden (Gentzen, Prawitz, Girard...) teoría de conjuntos (Halmoss), etc.) superan las caracterizaciones puramente algebraicas (Jaskowski, Tarski, McKinsey, Rasiowa, Sikorski, etc.).

⁷ Una valuación M es estrictamente característica para una lógica L si y sólo si para todo Ω , A se cumple: $\Omega \models A$ si y sólo si $\Omega \models_M A$.

enunciado lógico/matemático es verdadero o falso incluso en el caso de las sentencias indecidibles, del mismo modo que se considera perfectamente factible decir que hay un número infinito de estrellas aunque no sea posible contarlas. Desde el intuicionismo se rechaza que todo enunciado lógico/matemático sea verdadero o falso. La negativa a aceptar el principio de bivalencia se debe a que la verdad de un enunciado matemático se identifica con la existencia, al menos *en principio*, de una prueba del mismo. Se rechaza la analogía que establecen los defensores de la concepción clásica entre objetos matemáticos y estrellas; se contrargumenta que los objetos matemáticos, al contrario que las estrellas, sólo son accesibles a nivel de pensamiento.

Si aplicamos estas tesis intuicionistas a la explicación del rechazo del principio de *tertio excluso* se obtiene la siguiente argumentación: «considérese el caso en que la sentencia A es una sentencia indecidible; en ese caso no disponemos ni de una prueba de A ni de una prueba de $\neg A$, por consiguiente, dado el significado de la disyunción presentada en la página 78, es obvio que no disponemos tampoco de una prueba de $A \vee \neg A$. Por tanto, el principio de *tertio excluso* no es aceptable». Análogamente, tampoco son aceptables:

$[(A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))]$, $\neg \forall x Fx \rightarrow \exists x \neg Fx$, $\neg \forall x \neg Fx \rightarrow \exists x Fx$, etc. En concreto en el último caso, si consideramos el dominio de los números naturales, aunque podamos demostrar que no todos los números naturales carecen de la propiedad F, esto no implica que podamos transformar toda prueba de lo primero en una prueba de que existe al menos un n, tal que no podemos demostrar que no tiene la propiedad F. Por supuesto, tampoco se aceptaría que sea posible transformar toda prueba del antecedente en una prueba de que existe un número n que tiene la propiedad F: $\neg \forall x \neg Fx \rightarrow \exists x Fx$.

En último término desde el intuicionismo se mantiene la importancia de una distinción que la lógica clásica obvia entre:

* el supuesto de que A implica una contradicción, $\perp$, implica una contradicción, $(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$, y

** A es demostrable.

Logicismo, intuicionismo y formalismo tras los resultados obtenidos por Gentzen y Gödel en 1934

Tras la descorazonadora situación que los teoremas de incompletud impusieron a formalistas y logicistas, los resultados de Gentzen y Gödel inauguran nuevas vías de investigación para ambas escuelas. En síntesis, los mencionados resultados establecen:

(ia) la interpretabilidad de la lógica clásica en términos intuicionistas, y (ib) que el conjunto de teoremas de la lógica intuicionista es un subconjunto de los teoremas de la lógica clásica. De este modo lo que hasta entonces se había considerado como una polémica entre paradigmas inconmensurables -en lo que al *status* de las sentencias ideales concierne- se desvela como una diferencia de interpretación.

«Let me now compare the situation of 1930 with that of today. The spirit of peaceful co-operation has gained the victory over that of ruthless contest»⁸.

⁸ Heyting, 1962, p. 194.

(ii) Gentzen establece como corolario a su *Hauptsatz*⁹ una demostración de consistencia para la aritmética elemental.

Este resultado puede ser considerado como el primero de los que se inscriben en la disciplina conocida como *teoría reductiva de la demostración*. Esta disciplina constituye una reorientación del programa de Hilbert en el siguiente sentido: se sustituye el problema de la demostración de la consistencia de la aritmética elemental formalizada en un sistema concreto, por métodos finitistas, como objetivo central, por un nuevo programa de investigación centrado en el problema de la demostración de la consistencia de distintas parcelas de la matemática -al margen del sistema formal en que se expresa- por medio de principios epistemológicos más simples que los utilizados en la parcela de la que se trate.

No obstante desde el intuicionismo se insiste en el carácter rival existente entre sus tesis y las clásicas.

«I know of no argument against such eclecticism, other than the arguments which intuitionists use against classical mathematics in general; but it remains that, if classical mathematics is intelligible, then while intuitionistic mathematics may be intelligible also, *it loses much of its point*. By admitting as legitimate the classical explanations of the sentential operators and the quantifiers, one does not rule out of order the intuitionistic explanations of them; but it is not very clear why, save as an exercise, one should then be interested in using sentences whose logical constants are to be understood according to their intuitionistic senses»¹⁰.

Los resultados de Gödel y Gentzen son de índole técnica y no son suficientes, desde el punto de vista intuicionista, para obviar el trasfondo filológico-semántico que dió lugar a la polémica inicial. Hoy en día desde el intuicionismo se subraya la importancia que la teoría del significado tiene si se aspira a obtener conclusiones firmes en torno a las diferencias -que consideran totalmente vigente- entre la concepción clásica y la intuicionista. Así Michael Dummett señala:

«Intuitionism thus raises two philosophical questions. (1) Do intuitionists succeed in conferring a coherent meaning on the expressions used in intuitionist mathematics, and in particular, on the logical constants? (2) Is there a ground for thinking that classical mathematicians fail to confer an intelligible meaning on the logical constants, and on mathematical expressions in general, as they use them? Of these two questions, the second has in a sense, the priority, and is certainly the deeper»¹¹.

Bibliografía

Dummett, M. *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press, 1977.

Frege, G., *Estudios sobre semántica*, Ariel, 1971 (Traducción de Jesús Mosterín).

Gentzen, G., *Récherches sur la déduction logique*, 1955. (Traducción de Feys y Ladrière). Publicado originalmente: «Untersuchungen über das logische Schiessen», *Mathematische Zeitschrift*, 39, 1935, pp. 176-210, 405-431.

Gödel, K., *Obras completas*, Alianza Universidad, 286 pp., 1981.

⁹ Gentzen, 1955, pp. 121-128.

¹⁰ La cursiva es mía. Dummett, 1977, p. 361.

¹¹ Dummett, 1977, p. 362.

- Heyting, A., «After thirty years», en Nagel, Suppes y Tarski, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, 1962, pp. 194-7.
- Prawitz, D., «Philosophical aspects of proof theory», *Contemporary Philosophy. A new Survey*, vol. 1, 1981, pp. 235-277.

Concepción MARTINEZ VIDAL
Universidad de Santiago de Compostela