FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Categorías. Funtores. Construcciones universales

Anxo Fernández Sánchez

2021/22

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Categorías. Funtores. Construcciones universales

Anxo Fernández Sánchez

2021-22

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Álxebra
Título: Categorías. Funtores. Construcciones universales
Breve descrición do contido Neste traballo introdúcense os conceptos fundamentais da teoría de categorías: funtores, transformacións naturais, produtos, coprodutos e funtores adxuntos, ilustrando todos estos conceptos con exemplos.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es introducir conceptos fundamentales de la teoría de categorías como las categorías, los funtores y las transformaciones naturales, ilustrando estos conceptos con numerosos ejemplos. Se estudian las construcciones universales, en particular, los productos y coproductos, igualadores y coigualadores, núcleos y conúcleos, cuadrados cartesianos y cuadrados cocartesianos, así como nociones más abstractas, como los conceptos de límite y colímite, de los cuales son ejemplo las construcciones universales anteriores. Se estudian los funtores adjuntos, que aparecen con tanta frecuencia en Matemáticas, dando distintas formas de determinar una adjunción; se analizan sus propiedades más importantes y se estudia su relación con las construcciones universales.

Abstract

The goal of this project is to introduce fundamental concepts of category theory such as categories, functors and natural transformations. Some examples illustrate these concepts. We study universal constructions, in particular products and coproducts, equalizers and coequalizers, kernels and cokernels, pullbacks and pushouts, and some more general abstract notions such as limits and colimits. We also study adjoint functors, which often appear in Mathematics, showing diferent ways of determining an adjunction; their most important properties are analysed and their relationship with universal properties is studied.

Introducción

El lenguaje categórico proporciona una economía de pensamiento y expresión que pone de relieve las ideas básicas comunes subyacentes en diversas construcciones y teoremas aparentemente no relacionados; este lenguaje aporta un nuevo contexto en el cual se pueden examinar los resultados clásicos y determinar su alcance.

Por otra parte, la teoría de categorías permite, en ciertos caso, trasladar, mediante el lenguaje de funtores, problemas difíciles en ciertas áreas de las matemáticas a problemas más sencillos en otras. De hecho, el desarrollo de diversas ideas categóricas debidas a la Topología y a la Geometría ha contribuido a la resolución de problemas topológicos y geométricos.

Históricamente, la teoría de categorías tuvo sus orígenes en un intento de precisar la noción de "naturalidad". Algunas aplicaciones que aparecen en las Matemáticas, como el isomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión finita en su bidual $\widehat{\widehat{V}}$, son "naturales". Esta noción no estaba en principio formalizada, aunque parecía claro lo que no era "natural"; por ejemplo, el isomorfismo usual de un espacio vectorial de dimensión finita en su dual, $V \simeq \widehat{V}$, no es natural, puesto que depende de la elección de una base. Para describir la naturalidad de este isomorfismo, Eilenbreg y MacLane tuvieron que considerar simultáneamente los espacios vectoriales de dimensión finita, las aplicaciones lineales entre ellos, los biduales de los espacios y las aplicaciones lineales entre ellos. Estas consideraciones les llevaron a los conceptos de categoría, funtor y transformación natural, conceptos que aparecieron por primera vez en 1945 [1] y que han proporcionado un marco adecuado para su desarrollo posterior.

La memoria consta de tres capítulos bien diferenciados. En el primer capítulo se definen los conceptos de categoría, funtor y transformación natural y se da una gran variedad de ejemplos. Se prueba el principio de dualidad, el cual se debe a MacLane, inspirado en la naturaleza dual de los grupos abelianos libres y los divisibles, y que permite obtener, en algunos casos, a partir de un resultado, su resultado dual. Se definen objetos y morfismos especiales en una categoría, como el objeto cero, las secciones, las retracciones, los monomorfismos y los epimorfismos y se estudian en diversas categorías, como las de conjuntos, espacios topológicos, grupos, módulos, etc.

En el segundo capítulo, antes de introducir los conceptos de límite y colímite, nociones muy generales y de gran nivel de abstracción, se estudian algunos casos particulares: productos y coproductos, igualadores y coigualadores, núcleos y conúcleos, cuadrados cartesianos y cocartesianos y se analiza su existencia en diversas categorías, como las de conjuntos, espacios topológicos, grupos, módulos, anillos, cuerpos, etc; La idea de introducir núcleos, conúcleos, productos, etc., en términos de propiedades universales se debe a MacLane [7], [8]. Finalmente, se introduce el concepto de límite y su noción dual de colímite de un diagrama en su forma más general, haciendo referencia a las construcciones universales anteriores.

La noción de funtores adjuntos fué formulada por Kan [5] en 1958, inspirándose en el hecho elemental de que el funtor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ puede ser descrito como el funtor adjunto a la derecha del funtor $M \otimes_R -$. Las adjunciones aparecen con tanta frecuencia y en áreas tan diversas de las matemáticas que se consideran como una de las nociones mas útiles de la teoría de categorías. En este trabajo se introducen la unidad y la counidad de la adjunción, dando distintas formas de determinar la adjunción entre dos funtores; se prueba la unicidad del funtor adjunto salvo equivalencias naturales, así como el hecho general de que el funtor adjunto a la izquierda (resp. derecha) conserva colímites (resp. límites). Se exponen además diversos ejemplos de funtores adjuntos.

Finalmente, se da la definición de construcción universal correspondiente a un funtor F como un adjunto por la izquierda a F junto con la counidad de la adjunción, o como un adjunto a la derecha a F junto con la unidad de la adjunción. Se prueba que los funtores límite y colímite son adjuntos a la derecha y a la izquierda, respectivamente, del funtor diagonal, obteniendose así las construcciones universales expuestas en el capítulo anterior, como ejemplos de construcción universal correspondiente un funtor límite o un funtor colímite.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mi tutora María Jesús Vale Gonsalves la ayuda prestada y su continua atención que han hecho posible la realización de esta memoria.

Capítulo 1

Categorías

1.1. Categorías

Definición 1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ es una clase, $\mathrm{Obj}(C)$, cuyos elementos se llaman *objetos*, tal que para cada par de objetos (X,Y) de $\mathcal{C}$ se tiene un conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ cuyos elementos se llaman *morfismos* de X a Y y para cada terna de objetos X, Y, y Z se tiene una ley de composición

$$\begin{array}{rcl} \circ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X,Z) \\ (\ f\ ,\ g\ ) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

verificando los siguientes axiomas:

(1) $\mathcal{C}(X_1,Y_1) \cap \mathcal{C}(X_2,Y_2) = \varnothing$, si $X_1 \neq X_2$ o $Y_1 \neq Y_2$.

(2) Dados $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ y $h \in \mathcal{C}(Z,T)$, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(3) Para cada objeto X existe un morfismo $1_X \in \mathcal{C}(X,X)$ tal que para cada $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ y cada $g \in \mathcal{C}(Y,X)$,

$$f \circ 1_X = f, \qquad 1_Y \circ g = g.$$

El morfismo 1_X se llama *identidad* y el axioma (2), *asociaticidad de la composición.* Si $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, escribiremos $f\colon X \to Y$ y diremos que f es una flecha de X a Y. El objeto X se llama dominio de f y el objeto Y se llama codominio de f. La condición $g \circ f = h$ se puede indicar diciendo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

es conmutativo. La condición (3) se puede expresar por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

Se dice que un morfismo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ es un *isomorfismo*, si existe un morfismo $g \in \mathcal{C}(Y, X)$, tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$; denotaremos con frecuencia g por f^{-1}.

Definición 1.2. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ es *pequeña* si la clase de objetos de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Obj}(C)$, es un conjunto.

Ejemplos 1.3. (1) La categoría **Set** es la categoría cuyos objetos son los conjuntos, sus morfismos son las aplicaciones entre conjuntos y la composición es la composición usual de aplicaciones.

(2) La categoría de conjuntos punteados $\mathbf{Set}_*$ es la categoría cuyos objetos son pares ordenados (X, x), donde X es un conjunto y $x \in X$, Un morfismo de (X, x) a (Y, y) es una aplicación $f \colon X \to Y$ tal que $f(x) = y$. La composición es la composición usual de aplicaciones.

(3) La categoría **Grp** es aquella cuyos objetos son los grupos, los morfismos son los homomorfismos de grupos y la composición es la composición de aplicaciones usual.

(4) La categoria **Ab** es aquella cuyos objetos son los grupos abelianos, los morfismos son los homomorfismos de grupos abelianos y la composición es la composición de aplicaciones usual.

(5) La categoría **Top** es la que tiene como objetos los espacios topológicos, los morfismos son las aplicaciones continuas y la composición es la composición de aplicaciones usual.

(6) La categoría $\mathbf{G}$ es la categoría donde $\mathrm{Obj}(\mathbf{G}) = \{G\}$, siendo G un grupo y donde $\mathbf{G}(G, G) = G$ y la composición de morfismos es el producto de los elementos del grupo. En esta categoría todos los morfismos son isomorfismos. La categoría $\mathbf{G}$ es pequeña.

(7) La categoría **Ring** es la categoría que tiene como objetos los anillos conmutativos y unitarios y cuyos morfismos son los homomorfismos de anillos que llevan el elemento identidad, que se denota por 1, al elemento identidad. La composición es la composición usual de aplicaciones.

(8) La categoría $\mathbf{Mod_R}$ es la categoría que tiene como objetos los módulos sobre el anillo conmutativo y unitario R y cuyos morfismos son los homomorfismos de R-módulos. La composición es la composición usual de aplicaciones.

(9) La categoría $\mathbf{Vec_K}$ es la categoría que tiene como objetos los espacios vectoriales sobre K y cuyos morfismos son las aplicaciones lineales.

(10) La categoría $\mathbf{Vec^f_K}$ es la categoría que tiene como objetos los espacios vectoriales sobre K de dimensión finita y cuyos morfismos son las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita.

(11) La categoría **Field** es la categoría que tiene como objetos los cuerpos y como morfismos los homomorfismos de cuerpos.

(12) La categoría $\boldsymbol{C}_S$ asociada a un conjunto ordenado $(S, \leq)$ es la categoría donde $\mathrm{Obj}(\boldsymbol{C}_S) = S$, siendo S un conjunto parcialmente ordenado y donde $C_S(x, y)$ está formado por un solo elemento, que denotaremos por i_x^y, si $x \leq y$ e $C_S(x, y) = \varnothing$ si $x \not\leq y$, y composición está dada por $i_y^z \circ i_x^y = i_x^z$. La categoría $\boldsymbol{C}_S$ es una categoría pequeña.

(13) La categoría **Poset** es la categoría cuyos objetos son conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son las aplicaciones que preservan el orden.

(14) Sean $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ categorías. La categoría $\mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_n$ es la categoría cuyos objetos son n-plas $(X_1, \ldots, X_n)$ donde $X_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_i)$, para $i = 1, \ldots, n$, y cuyos morfismos son n-plas $(f_1, \ldots, f_n)$ donde $f_i \in \mathcal{C}(X_i, Y_i)$, para $i = 1, \ldots, n$. Si $(f_1, \ldots, f_n)$ y $(g_1, \ldots, g_n)$ son morfismos en $\mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_n$, $f_i \in \mathcal{C}(X_i, Y_i)$, $g_i \in \mathcal{C}(Y_i, Z_i)$, para $i = 1, \ldots, n$, su composición es

$$(g_1, \ldots, g_n) \circ (f_1, \ldots, f_n) = (g_1 \circ f_1, \ldots, g_n \circ f_n).$$

(15) Si $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ es la categoría cuyos objetos son morfismos $f\colon X \to Y$. Si $f\colon X \to Y$ y $f'\colon X' \to Y'$ son objetos de $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$, un morfismo de f a f' es un par de mofismos $(g, g')\colon f \to f'$, donde $g\colon X \to X'$, $g'\colon Y \to Y'$, tales que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

es conmutativo

(16) Si $\mathcal{C}$ es una categoría, la *categoría opuesta* a $\mathcal{C}$ es una categoría que denotaremos por $\mathcal{C}^{op}$ cuyos objetos son los de $\mathcal{C}$ y los morfismos son

$$\mathcal{C}^{op}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X).$$

siendo el morfismo $f\colon X \to Y$ de $\mathcal{C}^{opp}$ igual al morfismo $f\colon Y \to X$ de $\mathcal{C}$, y donde la composición

$$\begin{array}{rcl} \circ^{op}\colon \mathcal{C}^{op}(X, Y) \times \mathcal{C}^{op}(Y, Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{op}(X, Z) \\ (\ f\ ,\ g\ ) & \longmapsto & g \circ^{op} f, \end{array}$$

está dada por $g \circ^{op} f = f \circ g$. Se tiene que $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

(17) Sea Σ una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ una categoría. Denotaremos por $\mathcal{C}^{\Sigma}$ la categoría cuyos objetos son los funtores (véase la definición 1.23) de Σ a $\mathcal{C}$ y donde $\mathcal{C}^{\Sigma}(F,G)$ es el conjunto de las transformaciones naturales de F a G (véase la definición 1.29). Obsérvese que la clase $\mathcal{C}^{\Sigma}(F,G)$ es un conjunto puesto que

$$\mathcal{C}^{\Sigma}(F,G) \subset \prod_{X \in \Sigma} \mathcal{C}(FX, GX).$$

La composición de morfismos es la composición de transformaciones naturales de la definición 1.30.

1.2. Principio de dualidad

Sea $\mathcal{P}$ un concepto que tiene sentido en cualquier categoría $\mathcal{C}$. Puesto que los objetos y morfismos de $\mathcal{C}^{op}$ son los de $\mathcal{C}$, tiene sentido aplicar los conceptos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}^{op}$ y luego interpretar el resultado resultante en $\mathcal{C}$. Este proceso lleva a un nuevo concepto $\mathcal{P}^{op}$ y si denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ el concepto $\mathcal{P}$ en la categoría $\mathcal{C}$, entonces se tiene

$$\mathcal{P}^{op}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}^{(}\mathcal{C}^{op}).$$

Teorema 1.4. (Principio de dualidad) *Sea $\mathcal{T}$ un teorema que es cierto en cualquier categoría $\mathcal{C}$ satisfaciendo unos axiomas adicionales $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$. Si los axiomas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ se verifican en $\mathcal{C}^{op}$, entonces el teorema dual $\mathcal{T}^{op}$ también se verifica en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Dado que los axiomas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ se verifican en $\mathcal{C}^{op}$, entonces $\mathcal{T}$ es cierto en $\mathcal{C}^{op}$. Por tanto, $\mathcal{T}^{op}$ es cierto en $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^{op})^{op}$. $\square$

1.3. Objetos y morfismos especiales

Definición 1.5. Se dice que un morfismo $f\colon X \to Y$ es una sección si existe un morfismo $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$. Se dice que $f\colon X \to Y$ es una retracción si existe un morfismo $g\colon Y \to X$ tal que $f \circ g = 1_Y$.

Ejemplos 1.6. (1) En las categorías donde los morfismos son aplicaciones entre conjuntos, por ejemplo en **Set**, **Top**, **Grp**, **Ab**, **Ring**, $\mathbf{Mod_R}$, etc, toda sección es una aplicación inyectiva y toda retracción es una aplicación suprayectiva.

(2) Un morfismo en **Set** es una sección si, y solo si, es inyectivo y no es la aplicación vacía del conjunto vacío en un conjunto no vacío. Un morfismo en **Sets** es una corretracción si, y solo si, es un morfismo supreyectivo.

(3) En la categoría $\mathbf{Vec_K^f}$ de espacios vectoriales de dimensión finita las secciones son las aplicaciones lineales inyectivas y las retracciones son las aplicaciones lineales suprayectivas.

Los conceptos de sección y retracción son conceptos duales.

Definición 1.7. Un morfismo $f\colon X \to Y$ se dice que es un *monomorfismo* si para todos los morfismos $g, h\colon Z \to X$ tales que $g \circ f = h \circ f$, se tiene que $g = h$.

Proposición 1.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si $s\colon X \to Y$ es una sección, entonces s es un monomorfismo.*

Demostración. Si s es una sección, entonces existe un morfismo $l\colon Y \to X$ tal que $l \circ s = 1_X$. Así, tenemos que si $s \circ h = s \circ g$, entonces $l \circ (s \circ h) = l \circ (s \circ g)$. Por asociatividad, tenemos que $(l \circ s) \circ h = (l \circ s) \circ g$ y como s es sección, se sigue que $1_X \circ h = 1_X \circ g$ lo que implica que $h = g$ y por tanto s es un monomorfismo. $\square$

Ejemplos 1.9. (1) En las categorías donde los morfismos son aplicaciones entre conjuntos, por ejemplo en **Set**, **Top**, **Grp**, **Ab**, **Ring**, $\mathbf{Mod_R}$, etc, las aplicaciones inyectivas son claramente monomorfismos.

(2) En **Set** (resp. **Top**) los monomorfismos son las aplicaciones inyectivas. En efecto, veamos que si f es un monomorfismo, entonces f es una aplicación inyectiva. Sean $x, x' \in X$ tales que $f(x) = f(x')$. Consideremos el conjunto (resp. subespacio con la topología inducida) $Z = \{x\}$ y las aplicaciones (aplicaciones continuas) $g\colon Z \to X$, $g(x) = x$ y $h \to Z \to X$, $g(x) = x'$. Se tiene que $f \circ g = f \circ h$ y como f es un monomorfismo $g = h$, es decir $x = x'$.

(3) En la categoría **Grp** (resp. **Ab**, $\mathbf{Mod_R}$, $\mathbf{Vec_K}$), los monomorfismos son las aplicaciones inyectivas. Veamos que si $f\colon X \to Y$ es monomorfismo de grupos, sea $h\colon \mathrm{Nuc}(f) \to X$ la inclusión y $g\colon \mathrm{Nuc}(f) \to X$, $g = 0$. Entonces se tiene que $f \circ g = f \circ h$ y por ser f monomorfismo, $g = h$. Así, $\mathrm{Nuc}(f) = 0$. La demostración en las categorías **Ab**, $\mathbf{Mod_R}$ y $\mathbf{Vec_K}$ es similar.

(4) En la categoría **Ring** los monomorfismos son los homomorfismos de anillos inyectivos. Para probar este resultado, veamos que si $f\colon R \to S$ no es una aplicación inyectiva, entonces f no es un monomorfismo. En efecto, si f no es inyectiva el conjunto $K = \{(r_1, r_2) \in R \times R \mid f(r_1) = f(r_2)\}$ es un subanillo de $R \times R$ y los homomorfismos de anillos $g_1, g_2\colon K \to R$ dados por $g_1(r_1, r_2) = r_1$, $g_2(r_1, r_2) = r_2$, verifican que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, pero $g_1 \neq g_2$.

El concepto dual del concepto de monomorfismo es el de epimorfismo.

Definición 1.10. Un morfismo $f\colon X \to Y$ se dice que es un *epimorfismo* si para todos los morfismos $g, h\colon Y \to Z$ tales que $g \circ f = h \circ f$, se tiene que $g = h$.

Proposición 1.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si $r\colon X \to Y$ es una retracción, entonces r es un epimorfismo.*

Demostración. Si r es una retracción, entonces existe un morfismo $l\colon Y \to X$ tal que $r \circ l = 1_Y$. Así, tenemos que si $h \circ r = g \circ r$, entonces $(h \circ r) \circ l = (g \circ r) \circ l$. Por asociatividad, tenemos que $h \circ (r \circ h) = g \circ (r \circ g)$ y como r es retracción, se sigue que $h \circ 1_Y = g \circ 1_X$ lo que implica que $h = g$ y por tanto r es un epimorfismo. $\square$

Ejemplos 1.12. (1) En las categorías donde los morfismos son aplicaciones entre conjuntos, por ejemplo en **Set**, **Top**, **Grp**, **Ab**, $\mathbf{Mod_R}$, etc, las aplicaciones suprayectivas son epimorfismos.

(2) En **Set** los epimorfismos son las aplicaciones subrayectivas. Veamos que si $f\colon X \to Y$ es un epimorfismo entonces $f(X) = Y$. Supongamos que $f(X) \neq Y$, entonces existe $y_0 \in Y$ tal que $y \notin f(X)$. Consideremos las aplicaciones $1_Y, h\colon Y \to Y$, donde $h(y) = y$ si $y \in f(X)$ y $h(y) = y_0$ si $y \notin f(X)$. Dado que $1_Y \circ f = h \circ f$, por ser f epimorfismo, $h = 1_Y$, lo cual es una contradicción.

(3) En **Top** no todos los epimorfismos son aplicaciones suprayectivas. Por ejemplo, la inclusión $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ es un epimorfismo, puesto que si dos aplicaciones continuas $g, h\colon \mathbb{R} \to X$ coinciden en $\mathbb{Q}$, entonces $g = h$.

(4) En las categorías **Ab**, $\mathbf{Mod_R}$, $\mathbf{Vec_K}$, los epimorfismos son las aplicaciones suprayectivas. Si $f\colon X \to Y$ es un epimorfismo en alguna de estas categorías y $g, h\colon Y \to Y/f(X)$ son los morfismos $g = 0$, $h(y) = y + f(x)$, para todo $y \in Y$, entonces $h \circ f = 0 \circ f = 0$. Por ser f un epimorfismo, $h = 0$. Así, $y + f(X) = f(X)$, para todo $y \in Y$. Así, $f(X) = Y$.

(5) En **Grp** todo epimorfismo es un homomorfismo suprayectivo. La demostración en **Grp** es más complicada. Sea $f\colon X \to Y$ un epimorfismo de grupos y supongamos que $f(X) \neq Y$. Si $f(X)$ es un subgrupo normal de Y entonces se razona como en el caso de grupos abelianos. Si $f(X)$ no es un subgrupo normal de Y, veremos que existen homomorfismos de grupos $g, h\colon Y \to \mathrm{Perm}(Y)$, $g \neq h$, tales que $g \circ f = h \circ f$.

Dado que $f(X)$ no es un subgrupo normal de Y, entonces $(Y : f(X)) > 2$. Consideremos el conjunto cociente $Y/\sim$, que denotaremos por $Y/f(X)$, donde $y \sim y'$ si, y solo si, $y^{-1}y' \in f(X)$. Si $y_1, y_2 \in Y$ son tales que $y_1 f(X) \neq y_2 f(X) \neq f(X) \neq y_1 f(X)$, entonces $y_1 f(X) \cap y_2 f(X) = \varnothing$, $y_1 f(X) \cap f(X) = \varnothing$ y $y_2 f(X) \cap f(X) = \varnothing$. Sea $\mathrm{Perm}(Y)$ el conjunto de permutaciones de Y y consideremos la permutación

$$\begin{aligned} \sigma\colon Y &\to Y \\ y_1 f(x) &\mapsto y_2 f(x) \\ y_2 f(x) &\mapsto y_1 f(x) \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ y todo $y \in Y - (y_1 f(X) \cup y_2 f(X))$. Sea $g\colon Y \to \mathrm{Perm}(Y)$ la aplicación dada por $(g(y))(z) = zy$ y sea $h\colon Y \to \mathrm{Perm}(Y)$ la aplicación $h(y) = \sigma \circ g(y) \circ \sigma$. Veamos que $g \neq h$. Si $g = h$, entonces $g(y) = h(y)$ para todo $y \in Y$, luego $(g(y))(1) = (h(y))(1)$, para todo $y \in Y$, es decir $y = (\sigma g(y) \sigma)(1) = \sigma(y)$. Entonces $\sigma = \mathrm{id}_Y$, lo cual es una contradicción. Las aplicaciones g y h son homomorfismos de grupos:

$$(g(y\,y'))(z) = z\,(y\,y'), \quad (g(y') \circ g(y))(z) = (z\,y)\,y',\ \forall\, z \in Y \iff g(y\,y') = g(y') \circ g(y),$$

$$(h(y') \circ h(y)) = \sigma \circ g(y') \circ \sigma \circ \sigma \circ g(y) \circ \sigma = \sigma \circ g(y') \circ g(y) \circ \sigma = \sigma \circ g(y\,y') \circ \sigma = h(y\,y').$$

Veamos que $g \circ f = h \circ f$. Se tiene

$$\begin{aligned}((g \circ f)(x))(y_1 f(x')) =&(g(f(x))(y_1 f(x')) = y_1 f(x')f(x) = y_1 f(x'x),\\((h \circ f)(x))(y_1 f(x')) =&(h(f(x))(y_1 f(x')) = (\sigma \circ g(f(x)) \circ \sigma)(y_1 f(x'))\\=&(\sigma \circ g(f(x)))(y_2 f(x')) = \sigma(y_2 f(x')f(x)) = y_1 f(xx').\end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $((g \circ f)(x))(y_2 f(x')) = y_2 f(x'x) = ((h \circ f)(x))(y_2 f(x'))$, Si $y \in Y - (y_1 f(X) \cup y_2 f(X))$, entonces

$$\begin{aligned}((g \circ f)(x))(y) =&(g(f(x)))(y) = yf(x),\\((h \circ f)(x))(y) =&(h(f(x)))(y) = (\sigma \circ g(f(x)) \circ \sigma)(y) = \sigma(f(x)y) = yf(x),\end{aligned}$$

puesto que $yf(x) \in Y - (y_1 f(X) \cup y_2 f(X))$.

(6) En la categoría **Ring** no todo epimorfismo es una aplicación suprayectiva. Por ejemplo la inclusión $i\colon \mathbb{Z} \to Q$ es un epimorfismo de anillos pero no es una aplicación suprayectiva.

Definición 1.13. Un objeto X de $\mathcal{C}$ se dice que es *inicial* si para todo objeto Y de $\mathcal{C}$, el conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ tiene un único elemento.

Proposición 1.14. *Dos objetos iniciales en una categoría son isomorfos.*

Demostración. Sean X y X' objetos iniciales de la categoría $\mathcal{C}$. Por ser X objeto inicial, $\mathcal{C}(X,X') = \{f\}$ y $\mathcal{C}(X,X) = \{1_X\}$, y por ser X' objeto inicial $\mathcal{C}(X',X) = \{f'\}$ y $\mathcal{C}(X',X') = \{1_{X'}\}$. Por tanto,

$$f' \circ f = 1_X, \quad f \circ f' = 1_{X'}.$$

Así, f es un isomorfismo. □

Ejemplos 1.15. (1) Las categorías **Set** y **Top** tienen un único objeto inicial, el conjunto vacío.

(2) La categoría **Grp** (resp. **Ab**, $\mathbf{Mod_R}$, $\mathbf{Vec_K}$) tiene objetos iniciales los grupos (resp. los anillos, los módulos y los espacios vectoriales) triviales.

(3) $\mathbb{Z}$ es un objeto inicial en **Ring**.

(4) La categoría **Field** no tiene objetos iniciales.

(5) La categoría $\boldsymbol{C_S}$ asociada a un conjunto ordenado $(S, \leq)$ tiene elemento inicial si, y solo si, S tiene mínimo.

El concepto dual del concepto de objeto inicial es el de objeto final.

Definición 1.16. Un objeto Y de $\mathcal{C}$ se dice que es *final* si para todo objeto X de $\mathcal{C}$, el conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ tiene un único elemento.

Proposición 1.17. *Dos objetos finales en una categoría son isomorfos.*

Demostración. Se sigue de la proposición 1.14 y del teorema de dualidad. □

Ejemplos 1.18. (1) Las categorías **Set** y **Top** tienen como objetos finales los conjuntos formados por un único punto.

(2) La categoría **Grp** (resp. **Ab**, $\mathbf{Mod_R}$, $\mathbf{Vec_K}$) tiene objeto final los grupos (resp. los anillos, los módulos y los espacios vectoriales) triviales, es decir los formados por un único elemento.

(3) El anillo cero es un objeto final en **Ring**.

(4) La categoría **Field** no tiene objetos finales.

(5) La categoría $\boldsymbol{C}_S$ asociada a un conjunto ordenado $(S, \leq)$ tiene elemento final si, y solo si, S tiene máximo.

Definición 1.19. Se dice que un objeto en una categoría es un *objeto cero* si es objeto inicial y objeto final. Denotaremos en general un objeto cero por 0.

Proposición 1.20. *Dos objetos cero en una categoría son isomorfos.*

Demostración. Se sigue de la proposición 1.14. □

Ejemplos 1.21. (1) Las categorías **Grp** (resp. **Ab**, $\mathbf{Mod_R}$, $\mathbf{Vec_K}$) tienen objeto cero, el subgrupo (resp. submódulo, subespacio) trivial.

(2) Las categorías **Sets**, **Top**, **Ring**, **Field** no tienen objeto cero.

(3) La categoría de conjuntos punteados $\mathbf{Set}_*$ tiene objetos cero, los conjuntos formados por un único elemento.

Definición 1.22. Si la categoría $\mathcal{C}$ tiene objeto cero entonces en el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ hay un morfismo, llamado morfismo cero y que denotaremos por 0_{XY}, o símplemente por 0, dado por la composición de dos morfismos

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y.$$

El morfismo cero $0 \in \mathcal{C}(X, Y)$ no depende del objeto cero considerado.

Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son morfismos en $\mathcal{C}$ se tiene

$$0_{YZ} \circ f = 0_{XZ}, \quad g \circ 0_{XY} = 0_{XZ}.$$

1.4. Funtores

Definición 1.23. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un *funtor covariante* F de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ y se denota por $F\colon \mathcal{C} \to D$ es una correspondencia que asigna a cada objeto X en $\mathcal{C}$ un objeto $F(X)$ en $\mathcal{D}$, que denotaremos por FX, y a cada morfismo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ un morfismo $F(f) \in \mathcal{D}(FX, FY)$, que denotaremos por Ff, y que verifica las siguientes condiciones:

(1) Para cada $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ y $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ se tiene

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff$$

(2) Para cada objeto X in $\mathcal{C}$, se tiene que $F(1_X) = 1_{FX}$.

Definición 1.24. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un *funtor contravariante* F de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es un funtor covariante $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$, es decir es una correspondencia que asocia a cada objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto FX en $\mathcal{D}$ y a cada morfismo $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ un morfismo $Ff \in \mathcal{D}(FY,FX)$ y que verifica las siguientes condiciones:

(1) Para cada $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ y $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ se tiene

$$F(g \circ f) = Ff \circ Fg$$

(2) Para cada objeto X in $\mathcal{C}$, se tiene que $F(1_X) = 1_{FX}$.

Proposición 1.25. *Si $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son categorías y $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son funtores entonces se tiene un funtor $GF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, dado por $(GF)(X) = G(F(X))$, para todo objeto X de $\mathcal{C}$ y $(GF)(f) = G(F(f))$, para todo morfismo f en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Tenemos que $(GF)(g \circ f) = G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = GF(g) \circ GF(f)$. Por otro lado, se tiene que $(GF)(1_X) = G(F(1_X)) = G(1_{FX}) = 1_{GFX}$. Por lo tanto GF es un funtor. □

Ejemplos 1.26. (1) El funtor identidad $1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría cualquiera, es el funtor que asocia a cada objeto X de $\mathcal{C}$ el objeto $1_{\mathcal{C}}(X) = X$ y a cada morfismo $f\colon X \to Y$ el norfismo $1_{\mathcal{C}}(f) = f$.

(2) Si $F_1\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ y $F_2\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}_2$ son funtores, se tiene un funtor $F_1 \times F_2\colon \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ dado por $(F_1 \times F_2)(X_1,X_2) = (F_1X_1, F_2X_2)$, para cada objeto (X_1,X_2) de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ y si $(f_1,f_2) \in (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))$, entonces $(F_1 \times F_2)(f_1,f_2) = (F_1f_1, F_2f_2)$.

(3) Sea $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Se tiene un funtor $F^{op}\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$, $F^{op}(X) = FX$, para cada objeto X de $\mathcal{C}$ y si $f \in \mathcal{C}^{op}(X,Y)$, entonces $F^{op}(f) = Ff$.

(4) Sea $\mathcal{C}$ una categoría y X un objeto de $\mathcal{C}$. La correspondencia $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$ que asigna a cada objeto $Y \in \mathcal{C}$ el conjunto $FY = \mathcal{C}(X,Y)$ y a cada morfismo $f : X \to Y$ la aplicación $Ff : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y')$ dada por $Ff(g) = g \circ f$, es un funtor covariante. Denotaremos F por $\mathcal{C}(X,-)$ y $F(f)$ por $\mathcal{C}(X,f)$.

(5) Sea R un anillo conmutarivo y unitario. Se tiene el funtor

$$\mathrm{Hom}_R(M,-)\colon \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Mod_R},$$

dado por, $\mathrm{Hom}_R(M,-) = \mathbf{Mod_R}(M,-)$, donde para cada R-módulo N la estructura de R-módulo de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ está dada por:

$$\begin{aligned}(f+g)(m) =& f(m) + g(m),\\ (r\,f)(m) =& r\,f(m),\end{aligned}$$

para cada $f,g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $m \in M$ y $r \in R$.

(6) Sea $\mathcal{C}$ una categoría y Y un objeto de $\mathcal{C}$. La correspondencia $G\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$ que asigna a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ el conjunto $GX = \mathcal{C}(X, Y)$ y a cada morfismo $f\colon X \to X'$ la aplicación $Gf\colon \mathcal{C}(X', Y) \to \mathcal{C}(X, Y)$ dada por $Gf(g) = g \circ f$, es un funtor contravariante. Denotaremos G por $\mathcal{C}(-, Y)$ y Gf por $\mathcal{C}(f, Y)$.

(7) El *funtor de olvido* $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ está dado por $U(G) = G$ para todo grupo G y $U(f) = f$ para todo homomorfismo de grupos f. De forma análoga, hay funtores de olvido de $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, $U\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$, $U\colon \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Set}$ y $U\colon \mathbf{Vec_K} \to \mathbf{Set}$.

(8) El *funtor grupo libre* $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ es el funtor que hace corresponder a cada conjunto S el grupo libre $F(S)$ sobre S. Si $f\colon S \to S'$ es una aplicación y $i\colon S \to F(S)$ y $i'\colon S' \to F(S')$ son las inclusiones canónicas, entonces $Ff\colon F(S) \to F(S')$ es el único homomorfismo de grupos que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & F(S) \arrow[d, "Ff"] \\
S' \arrow[r, "i'"] & F(S')
\end{tikzcd}$$

Análogamente, se tienen también los funtores *grupo abeliano libre* y *módulo libre* que hacen corresponder a cada conjunto S, el grupo abeliano libre sobre S y el módulo libre sobre S, respectivamente. El funtor anillo libre es el funtor $F = \mathbb{Z}[-]\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ring}$, que hace corresponder a cada conjunto S el anillo de polinomios sobre S con coeficientes en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[S]$.

Los funtores grupo libre (resp. grupo abeliano libre, módulo libre, anillo libre) verifican la siguiente propiedad universal: Se tiene una aplicación inyectiva canónica $i\colon S \to F(S)$ donde F(S) es el grupo libre sobre S (resp grupo abeliano libre sobre S, módulo libre sobre S, anillo libre sobre S), y el par $(F(S), i)$ verifica que dado un grupo (resp. grupo abeliano, módulo, anillo) L y una aplicación $f\colon S \to L$, existe un único homomorfismo de grupos (resp. grupos abelianos, módulos, anillos) $h\colon F(S) \to L$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F(S) \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & L
\end{tikzcd}$$

Esta propiedad determina $F(S)$ salvo isomorfismos y a partir de ella se deduce la funtorialidad del funtor libre F.

(9) El funtor $[\ ,\ ]\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ es el funtor que asocia a un grup G su subgrupo conmutador $[G, G]$ y a cada homomorfismo de grupos la aplicación restricción, $f_{|_{[G,G]}}\colon [G, G] \to [G', G']$.

(10) El *funtor abelianización* $\mathrm{Abel}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ hace corresponder a un grupo G el grupo abeliano $G/[G, G]$. Si $f\colon G \to G'$ es un homomorfismo de grupos, f induce un homomorfismo de

grupos $\bar{f}\colon G/[G,G] \to G'/[G',G']$. El funtor Abel hace corresponder al homomorfismo f el homomorfismo $\bar{f}$.

(11) Se tiene un funtor $\widehat{(-)}\colon \mathbf{Vec_K} \to \mathbf{Vec_K}$ que asigna a cada espacio vectorial V su dual $\widehat{V} = \mathrm{Hom}_K(V,K)$ y a cada homomorfismo de espacios vectoriales $f\colon V \to W$ el homomorfismo $\widehat{f}\colon \widehat{W} \to \widehat{V}$, dado por $\widehat{f}(\varphi) = \varphi \circ f$, para $\varphi \in \widehat{W}$.

(12) Si M es un R-módulos se tiene el funtor

$$M \otimes_R -\colon \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Mod_R},$$

dado por $(M \otimes_R -)(N) = M \otimes_R N$. El R-módulo $M \otimes_R N$ es el cociente del R-módulo libre sobre el conjunto $M \times N$, por el submódulo H generado por los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
&(m+m',n) - (m,n) - (m',n), \quad (m,n+n') - (m,n) - (m,n'),\\
&(r\,m,n) - r\,(m,n), \quad (m,r\,n) - r\,(m,n) \quad m,m' \in M,\ n,n' \in N,\ r \in R.
\end{aligned}$$

El elemento $(m,n)+H$ se denota por $m \otimes n$, y el conjunto $\{m \otimes n \mid m \in M,\, n \in N\}$ genera $M \otimes_R N$ como R-módulo. La aplicación $\mu\colon M \times N \to M \otimes_R N$, dada por $\mu(m,n) = m \otimes n$, es R-bilineal y el par $(M \otimes_R N, \mu)$ verifica la siguiente propiedad universal: Si L es un R-módulo y $\alpha\colon M \times N \to L$ es una aplicación R-bilineal, existe un único homomorfismo de grupos R-módulos $\beta\colon M \otimes_R N \to L$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\alpha"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\beta"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

Si $f\colon N \to N'$ es un homomorfismo de R-módulos, se define $(M \otimes_R -)(f) = 1 \otimes f$, donde

$$\begin{aligned}
1 \otimes f\colon M \otimes_R N &\to M \otimes_R N'\\
m \otimes n &\mapsto m \otimes f(n)
\end{aligned}$$

para $m \in M$ y $n \in N$.

Si N es un R-módulo, el funtor $- \otimes_R N\colon \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Mod_R}$ se define de forma análoga.

(13) Sea $n \in \mathbb{N}$ y R un anillo conmutativo y unitario. Sea $M_n(R)$ el conjunto de matrices $n \times n$ con coeficientes en R. Un homomorfismo de anillos $f\colon R \to S$ determina un homomorfismo de anillos $M_n(f)\colon M_n(R) \to M_n(S)$, dado por $M_n(r_{ij}) = (f(r_{ij}))$. Se tiene un funtor $M_n(-)\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ring}$.

(14) Sean n y R como en el ejemplo anterior y sea $GL_n(R)$ el grupo de unidades de $M_n(R)$, es decir, el de las matrices invertibles de $M_n(R)$. Denotemos por $\mathbf{Ring}^*$ la categoría cuyos objetos son los anillos unitarios y cuyos morfismos son los isomorfismos de anillos. Si $f\colon R \to S$ es un isomomorfismo de anillos, entonces la aplicación $GL_n(f)\colon GL_n(R) \to GL_n(S)$, dada por $(GL_n(f))(r_{ij}) = (f(r_{ij}))$, es un homomorfismo de grupos. Se tiene un funtor $GL_n(-)\colon \mathbf{Ring}^* \to \mathbf{Grp}$.

(15) La correspondencia $L\colon \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Poset}$ que asocia a cada R-módulo M el conjunto de submódulos $L(M)$ de M ordenados por inclusión y a cada homomorfismo de R-módulos $f\colon M \to N$ la aplicación $L(f)\colon L(M) \to L(N)$, dada por $L(f)(M_1) = f(M_1)$, es un funtor.

Definición 1.27. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ categorías. Un *bifuntor* $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ es un funtor covariante de la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ a $\mathcal{E}$.

Ejemplo 1.28. Sean $\mathcal{C}$ una categoría. Se tiene un bifuntor $\mathcal{C}(-,-)\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, dado por $\mathcal{C}(-,-)(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$, para X e Y objetos de $\mathcal{C}$ y si $f\colon X' \to X$ y $g\colon Y \to Y'$ son morfismos en $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-,-)(f,g) = \mathcal{C}(f,g)\colon \mathcal{C}(X,Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(X',Y') \\ \varphi &\longmapsto g \circ \varphi \circ f. \end{aligned}$$

En efecto,

$$\mathcal{C}(1_X, 1_Y) = 1_{\mathcal{C}(X,Y)}, \quad \mathcal{C}(f \circ f', g' \circ g) = \mathcal{C}(f', g') \circ \mathcal{C}(f,g),$$

para todo $f \in \mathcal{C}(X', X)$, $f' \in \mathcal{C}(X'', X')$, $g \in \mathcal{C}(Y, Y')$ y $f' \in \mathcal{C}(Y', Y'')$.

1.5. Transformaciones naturales

Definición 1.29. Sean F y G funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$. Una *transformación natural* $t\colon F \to G$ es una colección de morfismos $t_X\colon FX \to GX$, uno para cada objeto X in $\mathcal{C}$, tal que para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "t_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si t_X es un isomorfismo para cada $X \in \mathcal{C}$, entonces se dice que t es una *equivalencia natural* y que los funtores F y G son *naturalmente equivalentes.*

Definición 1.30. Sean F, G y H funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, $t\colon F \to G$ y $u\colon G \to H$ transformaciones naturales. Se llama transformación natural *composición* de t y u a la transformación natural $u \circ t\colon F \to H$, dada por $(u \circ t)_X = u_X \circ t_X$, para todo objeto X de $\mathcal{C}$.

Obsérvese que $u \circ t$ es una transformación natural de F a H, puesto que para cada morfismo $f\colon X \to Y$ en $\mathcal{C}$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "Gf"] & HX \arrow[d, "Ht"] \\ FY \arrow[r, "t_Y"] & GY \arrow[r, "u_Y"] & HY \end{tikzcd}$$

Proposición 1.31. *Sean $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores y $t\colon F \to G$ una transformación natural.*

(1) *Si* $H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ *es un funtor. Se tiene la transformación natural* $Ht\colon HF \to HG$ *dada por* $(Ht)_X = H(t_X)$*, para todo objeto* X *de* $\mathcal{C}$.

(2) *Si* $H'\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *es un funtor. Se tiene la transformación natural* $tH'\colon FH' \to GH'$ *dada por* $(tH')_X = t_{H'X}$*, para todo objeto* X *de* $\mathcal{E}$.

Demostración. Es inmediata. □

Ejemplos 1.32. (1) Sea $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. La transformación natural identidad de F, $1_F\colon F \to F$ está dada por $(1_F)(X) = 1_{FX}\colon FX \to FX$, para cada objeto X en $\mathcal{C}$. Si $f\colon X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "1_{FX}"] \arrow[d, "Ff"'] & FX \arrow[d, "Ff"] \\ FY \arrow[r, "1_{FY}"] & FY \end{tikzcd}$$

(2) Consideremos los funtores $1_{\mathbf{Vec_K}}, \widehat{\widehat{(-)}}\colon \mathbf{Vec_K} \to \mathbf{Vec_K}$. Se tiene una transformación natural

$$t\colon 1_{\mathbf{Vec_K}} \longrightarrow \widehat{\widehat{(-)}}$$
$$V \mapsto \widehat{\widehat{V}}$$

donde $t_V\colon V \to \widehat{\widehat{V}}$ es la aplicación lineal dada por $t_V(v))(\varphi) = \varphi(v), v \in V,\ \varphi \in \widehat{V}$. En particular, en la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita la transformación natural

$$t\colon 1_{\mathbf{Vec}^f_K} \longrightarrow \widehat{\widehat{(-)}}$$

es una equivalencia natural.

(3) Existe una transformación natural entre los funtores $[\ ,\ ]\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ y $1_{\mathbf{Grp}}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$, $\iota\colon [\ ,\ ] \to 1_{\mathbf{Grp}}$, siendo $\iota_G\colon [G,G] \to G$ la aplicación inclusión. En efecto, si $f\colon G \to G'$ es un homomorfismo de grupos, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} {[G,G]} \arrow[r, "\iota_G"] \arrow[d, "f|_{[G,G']}"'] & G \arrow[d, "f"] \\ {[G',G']} \arrow[r, "\iota_{G'}"] & G' \end{tikzcd}$$

(4) Sea X un conjunto y $X \times (-)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ y $(-) \times X\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ los funtores

$$(X \times (-))(Y) = X \times Y, \quad ((-) \times X)(Y) = Y \times X$$
$$(X \times (-))(f) = (1_X, f), \quad ((-) \times X)(f) = (f, 1_X),\ f\colon Y \to Y',$$

donde $(1_X, f)(x,y) = (x, f(y))$ y $(f, 1_X)(y,x) = (f(y), x)$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Las aplicaciones $t_Y\colon X \times Y \to Y \times X$, $t_Y(x,y) = (y,x)$, dan una equivalencia natural

$t\colon X\times(-)\to(-)\times X$. En efecto, t es una transformación natural, puesto que si $f\colon Y\to Y'$ es una aplicación, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[r, "t_Y"] \arrow[d, "(1_X,f)"'] & Y\times X \arrow[d, "(f,1_X)"] \\ X\times Y' \arrow[r, "t'_Y"] & Y'\times X \end{tikzcd}$$

y las aplicaciones t_Y son biyectivas, para todo conjunto Y.

(5) Consideremos el funtor $\oplus_n(-)\colon \mathbf{Mod_R}\to\mathbf{Mod_R}$, dado por $\oplus_n(M)=M^n$ y si $f\colon M\to N$ es un homomorfismo de R-módulos

$$\begin{aligned} \oplus_n(f) = f^n\colon M^n &\longrightarrow M^n \\ (a_1,\dots,a_n) &\mapsto (f(a_1),\dots,f(a_n)). \end{aligned}$$

Se tiene una transformación natural $\alpha^n\colon 1_{\mathbf{Mod_R}}\to\otimes_n$ dada por

$$\begin{aligned} \alpha^n_M\colon M &\to M^n \\ a &\mapsto (a,\dots,a). \end{aligned}$$

α^n es una transformación natural ya que si $f\colon M\to N$ es un homomorfismo de R-módulos se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha_M^{(n)}"] \arrow[d, "f"'] & M^{(n)} \arrow[d, "f^{(n)}"] \\ N \arrow[r, "\alpha_N^{(n)}"] & N^{(n)} \end{tikzcd}$$

Veremos mas ejemplos de transformaciones naturales en el capítulo 3, al estudiar la unidad y la counidad de una adjunción.

Capítulo 2

Construcciones Universales

No podemos precisar de momento el concepto de construcción universal. Para justificar este concepto necesitaremos el lenguaje de funtores adjuntos. En esta sección vamos estudiar algunos ejemplos de construcciones universales.

2.1. Productos y coproductos

Definición 2.1. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathcal{C}$. Un *producto* de los objetos X_i, donde $i \in I$, es un par (X, p_i), donde X es un objeto de $\mathcal{C}$ y $p_i\colon X \to X_i$ es un morfismo para cada $i \in I$, y el par (X, p_i) verifica la siguiente propiedad universal: Dado un objeto Y y morfismos $f_i\colon Y \to X_i$, $i \in I$, existe un único morfismo $f = \{f_i\}\colon Y \to X$ verificando $p_i \circ f = f_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p_i"] & X_i \\ Y \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Los morfismos p_i, $i \in I$, se llaman *proyecciones*. No podemos afirmar que existe el producto de una familia de objetos en una categoria $\mathcal{C}$, pero podemos afirmar que si existe es único salvo isomorfismos.

Teorema 2.2. *Sean (X, p_i),(X', p'_i) productos de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$. Existe un único isomorfismo $h\colon X \to X'$ tal que $p'_i \circ h = p_i$, para cada $i \in I$.*

Demostración. Por la propiedad universal de X existe un único morfismo $g\colon X' \to X$ tal que $p_i \circ g = p'_i$. De forma análoga existe un morfismo $h\colon X \to X'$ tal que $p'_i \circ h = p_i$, para todo $i \in I$. Así,

$$p_i \circ g \circ h = p_i = p_i \circ 1_X, \quad \forall\, i \in I.$$

Por la propiedad universal de (X, p_i), esto implica que $g \circ h = 1_X$. Análogamente $h \circ g = 1_{X'}$. $\square$

Si (X, p_i) es un producto y $g\colon X' \to X$ es un isomorfismo, entonces $(X', p_i \circ g)$ es también un producto. Denotaremos un producto de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ por $\prod_{i\in I} X_i$. Si $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ escribiremos $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Proposición 2.3. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría con productos y objeto cero, entonces las proyecciones son retracciones; en particular las proyecciones son epimorfismos.*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$ y sean $f_i\colon X_j \to X_i$ los morfismos dados por: $f_i = 0$ para $i \neq j$ y $f_j = 1_{X_j}$. Por la propiedada universal del producto $\prod_{i\in I} X_i$, existe un morfismo $f\colon X_j \to \prod_{i\in I} X_i$ tal que $p_j \circ f = 1_{X_j}$. Luego, p_j es una retracción.

□

Proposición 2.4. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ y $\{X'_i\}_{i\in I}$ dos familias de objetos de $\mathcal{C}$. Si los productos $\prod_{i\in I} X_i$ y $\prod_{i\in I} X'_i$ existen y si tenemos morfismos $f_i\colon X_i \to X'_i$ para todo $i \in I$, entonces existe un único morfismo $\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X'_i$ tal que $p'_i \circ (\prod_{i\in I} f_i) = f_i \circ p_i$, para todo $i \in I$.*

Demostración. Consideremos los morfismos $f_i \circ p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X'_i$, $i \in I$. Por la propiedad universal del producto $(\prod_{i\in I} X'_i, p'_i)$, existe un único morfismo $h\colon \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X'_i$, tal que $p'_i \circ h = f_i \circ p_i$, para todo $i \in I$. Denotaremos h por $\prod_{i\in I} f_i$. □

Definición 2.5. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ tiene productos (resp. tiene productos finitos) si para todo conjunto I (resp. conjunto finito I) existe el producto de cualquier familia de objetos indicada por I.

Sea I un conjunto. Consideremos I como una categoría cuyos objetos son los elementos de I y cuyos únicos morfismos son las identidades. Si $\mathcal{C}$ es una categoría y $F\colon I \to \mathcal{C}$ es un objeto de $\mathcal{C}^I$ (véase ejemplos 1.3 (17)), denotaremos por F_i la imagen por F de $i \in I$, es decir $F(i) = F_i$, y si $t\colon F \to F'$ es un morfismo en $\mathcal{C}^I$ tenemos morfismos $t_i\colon F_i \to F'_i$ en $\mathcal{C}$.

Proposición 2.6. *Si I es un conjunto y $\mathcal{C}$ tiene productos para todas las familias de objetos indicadas por I, entonces se tiene un funtor*

$$\prod_{i\in I}\colon \mathcal{C}^I \to \mathcal{C},$$

dado por $\prod_{i\in I}(F) = \prod_{i\in I} F_i$ y si $t\colon F \to F'$ es una transformación natural, $\prod_{i\in I}(t) = \prod_{i\in I} t_i$, con $t_i\colon F_i \to F'_i$.

Demostración. Es inmediata. □

Ejemplos 2.7. (1) En la categoría **Set** existen productos. Un producto de la familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ es el producto cartesiano de conjuntos $\prod_{i\in I} X_i$. Las proyecciones p_j: $\prod_{i\in I} X_i \to X_j$ son las aplicaciones dadas por $p_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$.

El par $(\prod_{i\in I} X_i, p_i)$ verifica la propiedad universal del producto. En efecto, si Y es un conjunto y para cada $I \in I$ se tiene una aplicación $f_i\colon Y \to X_i$, entonces la aplicación $f\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$, dada por $f(y) = (f_i(y))$, verifica que $p_i \circ f = f_i$, para todo $i \in I$ y además f es la única aplicación tal que $p_i \circ f = f_i$.

(2) En la categoría **Top** existen productos. El producto de una familia de espacios topológicos $\{X_i\}_{i\in I}$ es el producto cartesiano de conjuntos $\prod_{i\in I} X_i$ con la topología producto.

El par $(\prod_{i\in I} X_i, p_i)$ verifica la propiedad universal del producto. En efecto, dadas aplicaciones continuas $f_i\colon Y \to X_i$, $i \in I$, la aplicación $f\colon Y \to \prod X_i$, $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$, es la única aplicación tal que $p_i \circ f = f_i$, para todo $i \in I$. La aplicación f es continua puesto que si U es un abierto de $\prod X_i$, existen abiertos $U_{i_1} \neq X_{i_1}, \dots, U_{i_n} \neq X_{i_n}$, para algún $n \geq 0$, tales que $U = \prod_{i\in I} U_i$, siendo $U_i = X_i$ para todo $i \in I - \{i_1, \dots, i_n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) =& \{y \in Y \mid f(y) = \{(p_i(f(y)))_{i\in I} \mid p_i(f(y)) \in U_i, i \in I\} \\ =& \bigcap_{i=i_1}^{i_n} (p_i \circ f)^{-1}(U_i). \end{aligned}$$

es un abierto de Y.

(3) En la categoría **Gpr** existen productos. Un producto de una familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ es el producto cartesiano de conjuntos $\prod_{i\in I} G_i$, con las operaciones

$$(x_i) \cdot (x'_i) = (x_i \cdot x'_i).$$

Las proyecciones son los homomorfismos de grupos $p_j\colon \prod_{i\in I} G_i \to G_j$, dados por $p_j((x_i)) = x_j$.

$(\prod_{i\in I} G_i, p_i)$ verifica la propiedad universal del producto. En efecto, dados homomorfismos de grupos $f_i\colon G' \to G_i$, la aplicación $f\colon G' \to \prod G_i$, $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$, es un homomorfismo de grupos y es el único homomorfismo de grupos tal que $p_i \circ f = f_i$, para todo $i \in I$,

(4) En la categoría $\mathbf{Mod_R}$ existen productos. Un producto de una familia de módulos $\{M_i\}_{i\in I}$ es el producto cartesiano de conjuntos $\prod_{i\in I} M_i$, con las operaciones

$$(m_i) + (m'_i) = (m_i + m'_i), \quad r\,(m_i) = (r\, m_i)$$

Las proyecciones son los homomorfismos de módulos $p_j\colon \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ dadas por $p_j((m_i)) = m_j$. La propiedad universal del producto se prueba de forma similar a como se probó en grupos.

(5) En la categoría **Ring** existen productos. Un producto de una familia de anillos $\{R_i\}_{i\in I}$ es el producto cartesiano de conjuntos $\prod_{i\in I} R_i$ con las operaciones

$$(r_i) + (r'_i) = (r_i + r'_i), \quad (r_i)\,(r'_i) = (r_i\, r'_i).$$

Las proyecciones son los homomorfismos de anillos $p_j\colon \prod_{i\in I} R_i \to R_j$ dados por $p_j((m_i)) = m_j$.

(6) La categoría **Field** no tiene productos. Por ejemplo, no existe el cuerpo producto de dos cuerpos de distinta característica.

El concepto dual del concepto de producto es el concepto de coproducto.

Definición 2.8. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathcal{C}$. Un *coproducto* de los objetos X_i es un par (X, q_i), donde X es un objeto en $\mathcal{C}$ y $q_i\colon X_i \to X$ es un morfismo para cada $i \in I$. El par (X, q_i) verifica la siguiente propiedad universal: Dado un objeto Y y morfismos $f_i\colon X_i \to Y$, para cada $i \in I$, existe un único morfismo $f = \langle f_i \rangle\colon X \to Y$ verificando $q_i \circ f = f_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & X \arrow[d, dashed, "f"'] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Los morfismos q_j se llaman *inyecciones*. No podemos afirmar que existe el coproducto de una familia de objetos en una categoria $\mathcal{C}$, pero podemos afirmar que si existe es único salvo isomorfismos.

Teorema 2.9. *Sean (X, q_i) y (X', q_i') coproductos de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$. Existe un único isomorfismo $h\colon X \to X'$ tal que $q_i \circ h = q_i'$, para cada $i \in I$.*

Demostración. Se sigue del teorema 2.2 y del teorema de dualidad. □

Si (X, q_i) es un coproducto y $h\colon X \to X'$ es un isomorfismo, entonces $(X', h \circ q_i)$ es también un coproducto. Denotaremos un coproducto de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ por $\bigoplus_{i\in I} X_i$. Si $I = \{1, 2, \dots, n\}$ escribiremos $X = X_1 \bigoplus \dots \bigoplus X_n$.

Proposición 2.10. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ y $\{X_i'\}_{i\in I}$ dos familias de objetos de $\mathcal{C}$. Si los coproductos $\bigoplus {X_i}_{i\in I}$, $\bigoplus {X_i'}_{i\in I}$ existen y tenemos morfismos $f_i\colon X_i \to X_i'$ para todo $i \in I$, entonces existe un único morfismo $\bigoplus_{i\in I} f_i\colon \bigoplus_{i\in I} X_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i'$ tal que $(\bigoplus {f_i}_{i\in I}) \circ q_i = q_i' \circ f_i$.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.4 y del teorema de dualidad. □

Definición 2.11. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ tiene coproductos (resp. tiene coproductos finitos) si para todo conjunto I (resp. conjunto finito I) existe el coproducto de cualquier familia de objetos indicada por I.

Proposición 2.12. *Si I es un conjunto y $\mathcal{C}$ tiene coproductos para todas las familias de objetos indicadas con I, entonces se tiene un funtor*

$$\bigoplus_{i\in I}\colon \mathcal{C}^I \to \mathcal{C},$$

dado por $\bigoplus_{i\in I}(F) = \bigoplus_{i\in I} F_i$ y si $t\colon F \to F'$ es una transformación natural, $\bigoplus_{i\in I}(t) = \bigoplus_{i\in I} t_i$.

Demostración. Es inmediata. □

Proposición 2.13. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría con coproductos y objeto cero, entonces las inyecciones son secciones; en particular las inyecciones son monomorfismos.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.3 y del teorema de dualidad. □

Ejemplos 2.14. (1) En la categorías **Set** existen coproductos. Un coproducto de una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ es la unión disjunta de los conjuntos X_i, $\bigsqcup_{i\in I} X_i$, con las aplicaciones inyección $q_i\colon X_i \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$, $q_i(x_i) = x_i$.

En efecto, dadas aplicaciones $f_i\colon X_i \to Y$, $i \in I$, la aplicación $f\colon \bigsqcup_{i\in I} X_i \to Y$ dada por $f(x_i) = f_i(x_i)$, para todo $i \in I$, es la única aplicación que verifica que $f \circ q_i = f_i$, para todo $i \in I$.

(2) En la categorías **Top** existen coproductos. Un coproducto de una familia de espacios topológicos $\{X_i\}_{i\in I}$ es el conjunto unión disjunta $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ con la topología suma y las aplicaciones inyección $q_i\colon X_i \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$, están dadas por $q_i(x_i) = x_i$.

Veamos que $(\bigsqcup_{i\in I} X_i, q_i)$ es un coproducto de los X_i. Dadas aplicaciones continuas $f_i\colon X_i \to Y$, $i \in I$, la aplicación $f\colon \bigsqcup_{i\in I} X_i \to Y$ dada por $f(x_i) = f_i(x_i)$, para todo $i \in I$, es continua: Si V es un abierto en Y, entonces

$$f^{-1}(V) \cap X_i = \{x \in X_i \mid f(x_i) \in V\} = f_i^{-1}(V).$$

es un abierto en X_i, para todo $i \in I$. Además, $f \circ q_i = f_i$, para todo $i \in I$

(3) En la categoría **Grp** existen coproductos. Un objeto coproducto de la familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ es el producto libre $\star_{i\in I} G_i$, es decir el grupo cociente del grupo libre sobre el conjunto unión disjunta $\bigsqcup_{i\in I} G_i$, $F(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$, por el subgrupo normal H generado por el conjunto

$$\{\mu_i(x_i)\,\mu_i(x_i')\,\mu_i(x_i x_i')^{-1} \mid x_i, x_i' \in G_i, i \in I\}.$$

donde $\mu_i\colon G_i \to \bigsqcup_{i\in I} G_i$ son las inyecciones en el conjunto $\bigsqcup_{i\in I} G_i$. Las inyecciones en el producto libre $\star_{i\in I} G_i = F(\bigsqcup_{i\in I} G_i)/H$ son los homomorfismos $q_i = p \circ \iota \circ \mu_i\colon G_i \to \star_{i\in I} G_i$, donde $p\colon F(\bigsqcup_{i\in I} G_i) \to \star_{i\in I} G_i$ es la proyección, $p(x) = xH$ y $\iota\colon \bigsqcup_{i\in I} X_i \to F(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$ es la inclusión.

Veamos que el par $(\star_{i\in I} G_i, q_i)$ es un coproducto de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$. Dados homomorfismos de grupos $f_i\colon G_i \to G$, por la propiedad universal del coproducto en **Set** de los grupos G_i, $\bigsqcup_{i\in I} G_i$, existe un única aplicación $f\colon \bigsqcup_{i\in I} G_i \to G$ tal que $f \circ \mu_i = f_i$. Por la propiedad universal del grupo libre sobre el conjunto $\bigsqcup_{i\in I} G_i$, $F(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$, existe un único homomorfismo de gupos $f'\colon F(\bigsqcup_{i\in I} G_i) \to G$ tal que $f' \circ \iota = f$. Dado que

$$f'(\mu_i(x_i)\,\mu_i(x_i')\,\mu_i(x_i x_i')^{-1}) = f_i(x_i)\,f_i(x_i')\,f_i(x_i x_i'))^{-1} = 0$$

se tiene que $H \subset \ker f'$. Dado que $f'(H) = 0$, la aplicación $\widehat{f'}\colon F(\bigsqcup_{i\in I} G_i)/H \to G$, dada por $\widehat{f'}(xH) = f'(x)$ es un homomomorfismo de grupos tal que $\widehat{f'} \circ p = f'$. Se tiene que $\widehat{f'} \circ q_i = f_i$, para todo $i \in I$.

Obsérvese que si G es un grupo y $S \subset G$, el subgrupo normal generado por S es el menor subgrupo normal de G que contiene a S.

(4) En la categoría $\mathbf{Mod_R}$ existen coproductos. Un coproducto de la familia de módulos $\{M_i\}_{i\in I}$, es el R-módulo $\bigoplus_{i\in I} M_i$, cuyos elementos son familias $(m_i)_{i\in I}$, con $m_i \in M_i$ y $m_i \neq 0$ solo para un número finito de elementos $i \in I$, con las operaciones

$$(m_i)_{i\in I} + (m'_i)_{i\in I} = (m_i + m'_i)_{i\in I}, \quad r\,(m_i)_{i\in I} = (r\,m_i)_{i\in I}, \;\; m_i, m'_i \in M_i, \; r \in R.$$

Para cada $j \in I$, las aplicaciones inyección son los homomorfismos de R-módulos $q_j \colon M_j \to \bigoplus M_i$, dados por $q_j(m_j) = (m'_i)_{i\in I}$, con $m'_i = 0$, para $i \neq j$ y $m'_j = m_j$, para $m_j \in M_j$.

Veamos que $(\bigoplus_{i\in I} M_i, q_i)$ es un coproducto de los M_i. En efecto, sean $f_i \colon M_i \to M$, $i \in I$, homomorfismos de R-módulos. La aplicación $f \colon \bigoplus M_i \to M$, dada por $f((m_i)) = \sum f_i(m_i)$ es el único homomorfismo de R-módulos tal que $q_i \circ f = f_i$, para todo $i \in I$.

(5) La categoría **Ring** tiene coproductos. Sean $\{R_i\}_{i\in I}$ un conjunto de anillos conmutativos y unitarios, $\mu_i \colon R_i \to \bigsqcup_{i\in I} R_i$ las aplicaciones inyección, $\mathbb{Z}[\bigsqcup_{i\in I} R_i]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$ sobre el conjunto $\bigsqcup_{i\in I} R_i$ y $\iota \colon \bigsqcup_{i\in I} R_i \to \mathbb{Z}[\bigsqcup_{i\in I} R_i\,]$ la aplicacion inclusión. Un coproducto de los anillos R_i, es el cociente del anillo $\mathbb{Z}[\bigsqcup_{i\in I} R_i]$, por el ideal $\mathfrak{a}$ generado por el conjunto

$$\{\mu_i(r_i) + \mu_i(r'_i) - \mu_i(r_i + r'_i), \;\; \mu_i(r_i)\,\mu_i(r'_i) - \mu_i(r_i\,r'_i) \;\mid\; r_i, r'_i \in R_i, \; i \in I\},$$

es decir $\bigoplus_{i\in I} R_i = \mathbb{Z}[\bigsqcup_{i\in I} R_i\,]/\mathfrak{a}$. Los homomorfismos inyección son $q_i = p \circ \iota \circ \mu_i$, donde $p \colon Z[\bigsqcup_{i\in I} R_i\,] \to \mathbb{Z}[\bigsqcup_{i\in I} R_i\,]/\mathfrak{a}$ es la proyección, $p(x) = x + \mathfrak{a}$.

Un coproducto de los anillos R y S es también el producto tensorial $R \otimes_Z S$ donde la estructura de anillo en $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ está dada por:

$$(r \otimes s)\,(r' \otimes s') = r\,r' \otimes s\,s'.$$

y los homomorfismos inyeccion $q_1 \colon R \to R \otimes_Z S$ están dados por $q_1(r) = r \otimes 1$ y $q_2(s) = 1 \otimes s$. Veamos que la terna $(R \otimes_{\mathbb{Z}} S, q_1, q_2)$ es un coproducto de R y S. En efecto, si $f \colon R \to L$ y $g \colon S \to L$ son homomorfismos de anillos, la aplicación $\alpha \colon R \times S \to L$, $\alpha(r, s) = f(r)g(s)$ es Z-bilineal y por tanto induce un homomorfismo de grupos abelianos $\beta \colon R \otimes_{\mathbb{Z}} S \to L$ tal que $\beta \circ \mu = \alpha$, siendo $\mu \colon R \times S \to R \otimes_{\mathbb{Z}} S$, $\mu(r, s) = r \otimes s$. Además, β es homomorfismo de anillos y $\beta \circ q_1 = f$, $\beta \circ q_2 = g$.

(6) La categoría **Field** no tiene coproductos. Por ejemplo, no existe el coproducto de dos cuerpos de distinta característica.

2.2. Igualadores y coigualadores

Definición 2.15. Dados dos morfismos $f, g \colon X \to Y$, se dice que un par (E, u), donde E es un objeto en $\mathcal{C}$ y $u \colon E \to X$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, es un *igualador* para f y g, si $f \circ u = g \circ u$ y el par (E, u) verifica la siguiente propiedad universal: Si $v \colon Z \to X$ es otro morfismo tal que $f \circ v = g \circ v$

entonces existe un único morfismo $h\colon Z \to E$ tal que $u \circ h = v$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] & Y \\
Z \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "v"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se dice que E es un *objeto igualador* de f y g,

Proposición 2.16. *Si $u\colon E \to X$ es un igualador para f y g, entonces u es un monomorfismo. Si (E', u') es otro igualador para f y g, entonces existe un isomorfismo $h\colon E' \to E$ tal que $u \circ h = u'$.*

Demostración. Sean $h_1, h_2\colon E' \to E$ tales que $u \circ h_1 = u \circ h_2$. Entonces tenemos que $f \circ (u \circ h_1) = (f \circ u) \circ h_1 = (g \circ u) \circ h_1 = g \circ (u \circ h_1)$. Pero por la definición de igualador, la factorización de $u \circ h_1$ a través de E debe ser única, por tanto $h_1 = h_2$, lo que implica que u es un monomorfismo.

Sea $u'\colon E' \to X$ otro igualador para f y g. Entonces, por la propiedad universal de (E, u), existe un morfismo $h\colon E' \to E$ tal que $u \circ h = u'$ y por la propiedad universal de (E', u') existe un morfismo $h'\colon E \to E$ tal que $u' \circ h' = u$. Así, $u \circ h \circ h' = u' \circ h' = u$. Al ser u un monomorfismo, se sigue que $h \circ h' = 1_E$. Análogamente, $h' \circ h = 1'_E$. Por tanto h es un isomorfismo con inverso h'. $\square$

Definición 2.17. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ *tiene igualadores* si existe un igualador para todo par de morfismos en $\mathcal{C}$ con igual dominio y codominio.

Ejemplo 2.18. Las categorías **Set**, **Top**, **Grp**, $\mathbf{Mod_R}$, **Ring** y **Field** tienen igualadores. En la categoría **Set** (resp. **Top**, **Grp**, $\mathbf{Mod_R}$, **Ring**, **Field**) si $f, g\colon X \to Y$ son dos morfismos, un objeto igualador de f y g es el siguiente subconjunto (resp. espacio topológico con la topología inducida, subgrupo, submódulo, subanillo, subcuerpo):

$$E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

Si $i\colon E \to X$ es la inclusión, el par (E, i) es un igualador para f y g.

En efecto, si $v\colon Z \to X$ es una aplicación (resp. aplicación continua, homomorfismo de grupos, homomorfismo de R-módulos, homomorfismo de anillos, homomorfismo de cuerpos) tal que $f \circ v = g \circ v$, es decir $f(v(z)) = g(v(z))$, para todo $Z \in Z$, entonces $v(z) \in E$. Sea $h\colon Z \to E$, la aplicación dada por $h(z) = v(z)$. En la categoría **Top**, la aplicación h es contínua. puesto que si U es un abierto de X, entonces $h^{-1}(U \cap E) = v^{-1}(U)$, es un abierto de Z. En la categoría de grupos (resp. R-módulos, anillos, cuerpos) h es un homomorfismo de grupos (resp. R-módulos, anillos, cuerpos). Además, $i \circ h = v$. La unicidad del morfismo h que se factoriza por E se sigue de que i es un monomorfismo.

Definición 2.19. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f\colon X \to Y$. Se dice que un par (K, i), $i\colon K \to X$, es un *nucleo* para f si (K, i) es un igualador para los morfismos f y 0, es decir $f \circ i = 0$ y el par (K, i) verifica la siguiente propiedad universal: Si $v\colon Z \to X$ es otro morfismo tal que

$f \circ v = 0$ entonces existe un único morfismo $h\colon Z \to E$ tal que $i \circ h = v$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
Z \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "v"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Si (K, i) es un núcleo de f se suele denotar K por $\mathrm{Nuc}(f)$.

Ejemplo 2.20. En la categoría **Grp** (resp. $\mathbf{Mod_R}$) si $f\colon X \to Y$ es un homomorfismo, un núcleo de f es el par $(\mathrm{Nuc}(f), \iota)$ donde $\mathrm{Nuc}(f)$ es el siguiente subgrupo (resp. R-submódulo):

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

y donde 1 denota el elemento neutro de Y e $\iota\colon \mathrm{Nuc}(f) \to X$ es la inclusión.

El concepto dual del concepto de igualador es el concepto de coigualador.

Definición 2.21. Dados dos morfismos $f, g\colon X \to Y$, un *coigualador* de f y g es un igualador de f y g en la categoría $\mathcal{C}^{op}$, es decir, un par (C, c), donde C es un objeto en $\mathcal{C}$ y $c\colon Y \to C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, es un *coigualador* para f y g, si $c \circ f = c \circ g$ y el par (C, c) verifica la siguiente propiedad universal: Si $t\colon Y \to Z$ es otro morfismo tal que $t \circ f = t \circ g$ entonces existe un único morfismo $h\colon C \to Z$ tal que $h \circ c = t$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "t"'] & C \arrow[d, dashed, "h"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Se dice que C es un *objeto coigualador* de f y g,

Proposición 2.22. *Si (C, c) es un coigualador para f y g, entonces c es un epimorfismo. Si (C', c') es otro coigualador para f y g entonces existe un isomorfismo $h\colon C \to C'$ tal que $h \circ c = c'$.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.16 y del principio de dualidad. □

Definición 2.23. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ *tiene coigualadores* si existe un coigualador para todo par de morfismos en $\mathcal{C}$ con igual dominio y codominio.

Ejemplos 2.24. (1) La categoría **Set** tiene coigualadores. Si $f, g\colon X \to Y$ son aplicaciones, un coigualador de f y g es el par $(Y/\sim_R, p)$, donde $\sim_R$ es la menor relación de equivalencia que contiene a la relación R en Y, dada por

$$y_1 \, R \, y_2 \iff \exists\, x \in X, \ \text{tal que} \quad y_1 = f(x),\ y_2 = g(x),$$

y $p\colon Y \to Y/\sim_R$ es la aplicación proyección, $p(y) = [y]$.

Obsérvese que dada una relación R en un conjunto Y, la menor relación de equivalencia que contiene a R y que denotamos por $\sim_R$ está dada por: $y \sim_R y$ para todo $y \in Y$ y si $y \neq y'$, entonces $y \sim_R y'$ si, y solo si, existen $y_1, \ldots, y_r \in Y$, con $y_1 = y$, $y_r = y'$ y además,

$$y_1 \, R \, y_2 \ \text{ o } \ y_2 \, R \, y_1, \ldots, y_{r-1} \, R \, y_r \ \text{ o } \ y_r \, R \, y_{r-1}.$$

Veamos que, en nuestro caso, $(Y/\sim_R, p)$ es un coigualador de f y g. Dado que $[f(x)] = [g(x)]$, $p \circ f = p \circ g$. Si $t\colon Y \to Z$ es otra aplicación tal que $t \circ f = t \circ g$, podemos construir la aplicación

$$\begin{aligned} h\colon \frac{Y}{\sim_R} &\longrightarrow Z, \\ [y] &\mapsto t(y). \end{aligned}$$

Se tiene que h es una aplicación: Si $y \sim_R y'$, entonces existen $y_1, \ldots, y_r$, con $y_1 = y$, $y_r = y'$ y además, $y_1 \, R \, y_2$ o $y_2 \, R \, y_1$, …, $y_{r-1} \, R \, y_r$ o $y_r \, R \, y_{r-1}$. Por tanto existen $x_1, \ldots, x_{r-1}$, tales que $y = f(x_1)$, $y_2 = g(x_1)$ o $y = g(x_1)$, $y_2 = f(x_1)$, …, $y_{r-1} = f(x_{r-1})$, $y' = g(x_{r-1})$ o $y_{r-1} = g(x_{r-1})$, $y' = f(x_{r-1})$. Dado que $t \circ f = t \circ g$, se tiene

$$t(y) = t(y_2), t(y_2) = t(y_3), \ldots, h(y_{r-1}) = t(y').$$

Así, $t(y) = t(y')$. Además, $h \circ p = t$. La unicidad de h se sigue de que p es una aplicación suprayectiva.

(2) La categoría **Top** tiene coigualadores. En la categoría **Top**, si $f, g\colon X \to Y$ son aplicaciones continuas, un coigualador de f y g es el coigualador de f y g construido en **Set**, $(Y/\sim_R, p)$, considerando en el conjunto $Y/\sim_R$ la topología identificación.

En efecto, sea $t\colon Y \to Z$ una aplicación contínua tal que $t \circ f = t \circ g$. La aplicación $h\colon Y/\sim_R \to Z$, $h[y] = t(y)$, verifica que $h \circ p = t$ y es continua. En efecto, si U es un abierto de Z, entonces $h^{-1}(U)$ es un abierto de $Y/\sim_R$, puesto que $p^{-1}(h^{-1}(U)) = t^{-1}(U)$.

(3) La categoría **Grp** tiene coigualadores. En la categoría **Grp**, si $f, g\colon X \to Y$ son homomorfismos de grupos, un objeto coigualador de f y g es el grupo cociente Y/H, donde $H = \langle f(x)^{-1}g(x) \mid x \in G\rangle_N$ es el subgrupo normal de Y generado por el conjunto $\{f(x)^{-1}g(x) \mid x \in G\}$. El par $(Y/H, p)$, donde $p\colon Y \to Y/H$ es el homomorfismo proyección, es un coigualador de (f, g).

En efecto, como $p(f(x)) = f(x)H = g(x)H = (p \circ g)(x)$, para todo $x \in X$, se tiene que $p \circ f = p \circ g$. Si $t\colon Y \to Z$ es un homomorfismo de grupos tal que $t \circ f = t \circ g$, entonces $t(f(x)^{-1}\, g(x)) = 1$, para todo $x \in X$, de donde se sigue que $H \subset \ker t$. Dado que $t(H) = 1$, existe un homomorfismo de grupos $h\colon Y/H \to Z$, tal que $h \circ p = t$. La unicidad de h se sigue de que p es suprayectivo.

(4) La categoría $\mathbf{Mod_R}$ (resp. **Ring**) tiene coigualadores. Si $f, g\colon X \to Y$ son homomorfismos de R-módulos (resp. anillos), un coigualador de f y g es el par $(Y/S, p)$, donde Y/S es el R-módulo (resp. anillo) cociente de Y por el submódulo (resp. ideal) S generado por el subconjunto $\{f(x) - g(x) \mid x \in X\}$ y $p\colon Y \to Y/N$ es la proyección. Para probar este resultado se razona como en la categoría **Grp**.

(5) La categoría **Field** no tiene coigualadores. No existe el coigualador de ningún par de homomorfismos distintos $f, g \colon K \to L$. En efecto, si (C, c) es un coigualador de f y g, entonces $c \circ f = c \circ g$ y por ser c una aplicación inyectiva (los homomorfismo de cuerpos son aplicaciones inyectivas), $f = g$.

Definición 2.25. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f \colon X \to Y$. Se dice que un par (C, c), $c \colon Y \to C$, es un *conúcleo* para f, si (C, c) es un coigualador para los morfismos f y 0, es decir si $c \circ f = 0$ y si (C, c) verifica la siguiente propiedad universal: Si $t \colon Y \to Z$ es otro morfismo tal que $t \circ f = 0$ entonces existe un único morfismo $h \colon C \to Z$ tal que $h \circ c = t$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "t"] & C \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Si (C, c) es un conúcleo de f se suele denotar C por $\mathrm{Conuc}(f)$.

Ejemplos 2.26. (1) En la categoría **Grp** si $f \colon G \to G'$ es un homomorfismo de grupos un conúcleo de f es el par $(\mathrm{Conuc}(f), c)$ donde $\mathrm{Conuc}(f) = G'/\langle f(G) \rangle_N$, donde $\langle f(G) \rangle_N$ es el subgrupo normal de Y generado por $f(G)$ y $c \colon G' \to G'/\langle f(G) \rangle_N$ es la proyección, es decir $c(y) = y \langle f(G) \rangle_N$.

(2) En la categoría $\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}}$ si $f \colon M \to M'$ es un morfismo un conúcleo de f es el par $(\mathrm{Conuc}(f), c)$, donde $\mathrm{Conuc}(f) = M'/f(M)$ y $c \colon M' \to M'/f(M)$ es la proyección, $c(m') = m' + f(M)$.

2.3. Cuadrados cartesianos y cuadrados cocartesianos

Definición 2.27. Dados $f_1 \colon A_1 \to X$ y $f_2 \colon A_2 \to X$ morfismos en $\mathcal{C}$. Un *cuadrado cartesiano* para (f_1, f_2) es una terna (P, g_1, g_2), donde P es un objeto de $\mathcal{C}$ y $g_1 \colon P \to A_1$ y $g_2 \colon P \to A_2$ son morfismos tales que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ y la terna (P, g_1, g_2) verifica la siguiente propiedad universal: Para todo par de morfismos $h_1 \colon Q \to A_1$ y $h_2 \colon Q \to A_2$ con $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, existe un único morfismo $h \colon Q \to P$ tal que $g_1 \circ h = h_1$ y $g_2 \circ h = h_2$.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, "h_2"] \arrow[ddr, "h_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "g_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "f_1"] & X \end{tikzcd}$$

Proposición 2.28. *Si (P', g_1', g_2') es otro cuadrado cartesiano para (f_1, f_2), entonces existe un isomorfismo $h \colon P' \to P$ tal que $g_1 \circ h = g_1'$ y $g_2 \circ h = g_2'$.*

Demostración. Por la propiedad universal de (P, g_1, g_2), existe un único morfismo $h\colon P' \to P$ tal que $g_1 \circ h = g_1'$ y $g_2 \circ h = g_2'$, y por la propiedad universal de (P', g_1', g_2'), existe un único morfismo $h'\colon P \to P'$ tal que $g_1' \circ h' = g_1$ y $g_2' \circ h' = g_2$. Se tiene que $g_1 \circ h \circ h' = g_1' \circ h' = g_1$ y $g_2 \circ h \circ h' = g_2$. De la unicidad de las factorizaciones a través de P, se sigue que $h \circ h' = 1_P$. De forma análoga se prueba que $h' \circ h = 1_{P'}$. Así, h es un isomorfismo. $\square$

Proposición 2.29. *Sean $f_1\colon A_1 \to X$ y $f_2\colon A_2 \to X$ morfismos en $\mathcal{C}$. Si (P, g_1, g_2) es un cuadrado cartesiano para (f_1, f_2) y f_1 es un monomorfismo, entonces g_2 es un monomorfismo.*

Demostración. Si $\alpha, \beta\colon Q \to P$ son morfismos tales que $g_2 \circ \alpha = g_2 \circ \beta$, entonces $f_1 \circ g_1 \circ \alpha = f_2 \circ g_2 \circ \alpha = f_2 \circ g_2 \circ \beta = f_1 \circ g_1 \circ \beta$. Dado que f_1 es un monomorfismo, $g_1 \circ \alpha = g_1 \circ \beta$. Por la unicidad de las factorizaciones a través de P, se tiene que $\alpha = \beta$. Por tanto, g_2 es un monomorfismo. $\square$

Definición 2.30. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ *tiene cuadrados cartesianos* si existen cuadrados cartesianos para todo par de morfismos en $\mathcal{C}$ con igual codominio.

Ejemplos 2.31. Las categorías **Set**, **Top**, $\mathbf{Mod_R}$, **Ring**, **Field** tienen cuadrados cartesianos. En la categoría **Set** (resp. **Top**, $\mathbf{Mod_R}$, **Ring**, **Field**) un cuadrado cartesiano para los morfismos $f_1\colon A_1 \to X$ y $f_2\colon A_2 \to X$ es la terna $(A_1 \times_X A_2, p_1, p_2)$, donde $A_1 \times_X A_2$ es el subconjunto (resp, subespacio con la topología inducida, subgrupo, submódulo, subanillo, subcuerpo) del producto cartesiano $A_1 \times A_2$ dado por

$$A_1 \times_X A_2 = \{(a_1, a_2) \mid f_1(a_1) = f_2(a_2)\}.$$

En efecto, si $h_1\colon Q \to A_1$ y $h_2\colon Q \to A_2$ son aplicaciones (resp. aplicaciones continuas, homomorfismos de grupos, homomorfismos de módulos, homomorfismos de anillos, homomorfismos de cuerpos) que verifican que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, la aplicación $h\colon Q \to A_1 \times_X A_2$ dada por $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$, es la única aplicación (resp aplicación continua, homomorfismo de grupos, homomorfismo de módulos, homomorfismo de anillos, homomorfismo de cuerpos) que verifica que $g_1 \circ h = h_1$ y $g_2 \circ h = h_2$.

El concepto dual del concepto de cuadrado cartesiano es el concepto de cuadrado cocartesiano.

Definición 2.32. Dados $f_1\colon X \to A_1$ y $f_2\colon X \to A_2$ morfismos en $\mathcal{C}$. Un *cuadrado cocartesiano* para (f_1, f_2) es una terna (C, g_1, g_2), donde C es un objeto de $\mathcal{C}$ y $g_1\colon A_1 \to C$ y $g_2\colon A_2 \to C$ son morfismos tales que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$, que verifica la siguiente propiedad universal: Para todo par de morfismos $h_1\colon A_1 \to D$ y $h_2\colon A_2 \to D$ con $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, existe un único morfismo $h\colon C \to D$ tal que $h \circ g_1 = h_1$ y $h \circ g_2 = h_2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2"'] \arrow[ddr, "h_2"] & \\
A_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[drr, "h_1"'] & C \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & D
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.33. *Si (C', g_1', g_2'), es otro cuadrado cocartesiano para (f_1, f_2), entonces existe un isomorfismo $h\colon C \to C'$ tal que $h \circ g_1 = g_1'$ y $h \circ g_2 = g_2'$.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.28 y del teorema de dualidad. □

Proposición 2.34. *Sean $f_1\colon X \to A_1$ y $f_2\colon X \to A_2$ morfismos en $\mathcal{C}$. Si (C, g_1, g_2) es un cuadrado cocartesiano para (f_1, f_2) y f_1 es un epimorfismo, entonces g_2 es un epimorfismo.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.29 y del teorema de dualidad. □

Definición 2.35. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ *tiene cuadrados cocartesianos* si existe un cuadrado cocartesiano para todo par de morfismos en $\mathcal{C}$ con igual dominio.

Ejemplos 2.36. (1) Las categorías **Set** y **Top** tienen cuadrados cocartesianos. Dadas las aplicaciones (resp. aplicaciones continuas) $f_1\colon X \to A_1$ y $f_2\colon X \to A_2$, consideremos el conjunto cociente de la unión disjunta $A_1 \bigsqcup A_2$ (resp. espacio topológico cociente del coproducto $A_1 \bigsqcup A_2$ en **Top**) por la relación $\sim_R$, donde $\sim_R$ es la menor relación de equivalencia que contiene a la relación R dada por: si $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$

$$a_1 \, R \, a_2 \iff \exists\, x \in X, \quad f_1(x) = a_1, \; f_2(x) = a_2.$$

Sean $g_i\colon A_i \to (A_1 \bigsqcup A_2)/\sim_R$, las aplicaciones (resp. aplicaciones continuas) dadas por $g_i(a_i) = [a_i]$, para $i = 1, 2$, La terna $((A_1 \bigsqcup A_2)/\sim_R, g_1, g_2)$ es un cuadrado cocartesiano para f_1 y f_2.

Veamos que $((A_1 \bigsqcup A_2)/\sim_R, g_1, g_2)$ verifica la propiedad universal del cuadrado cocartesiano para (f_1, f_e). En efecto, se tiene que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$. Además, si $h_1\colon A_1 \to D$ y $h_2\colon A_2 \to D$ son aplicaciones (resp. aplicaciones continuas) tales que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, entonces la aplicación $h\colon (A_1 \bigsqcup A_2)/\sim_R \to D$ dada por

$$h([x]) = \begin{cases} h_1(x), & \text{si } x \in A_1 \\ h_2(x), & \text{si } x \in A_2, \end{cases}$$

es la única aplicación (resp. aplicación contínua) que verifica que $h \circ g_1 = h_1$ y $h \circ g_2 = h_2$.

(2) La categoría **Grp** tiene cuadrados cocartesianos. Sean $f_1\colon X \to A_1$ y $f_2\colon X \to A_2$ homomorfismos de grupos y sea $A_1 \star_X A_2$ el producto libre amalgamado, es decir, el grupo cociente del producto libre $A_1 \star A_2$, por el subgrupo normal H generado por el subconjunto

$$\{((q_1 \circ f_1)(x))^{-1} \, (q_2 \circ f_2)(x) \mid x \in X\}.$$

donde $q_1\colon A_1 \to A_1 \star A_2$ y $q_2\colon A_2 \to A_1 \star A_2$ son los homomorfismos inyección.

La terna $(A_1 \star_X A_2, g_1, g_2)$, siendo $g_i\colon A_i \to A_1 \star_X A_2$ el homomorfismo dado por $g_i(a_i) = a_i H$, para $i = 1, 2$, es un cuadrado cocartesiano para f_1 y f_2.

Veamos que $(A_1 \star_X A_2, g_1, g_2)$ es un cuadrado cocartesiano para (f_1, f_2): Dado que

$$(q_1(f_1(x))^{-1} \, q_2(f_2(x)) \in H,$$

se tiene que $(g_1 \circ f_1)(x) = q_1(f_1(x)H) = q_2(f_2(x)H) = (g_2 \circ f_2)(x)$, para todo $x \in X$, equivalentemente, $g_1 \circ f_1 = g_s \circ f_2$. Además, si $h_1 \colon A_1 \to D$ y $h_2 \colon A_2 \to D$ son homomorfismos tales que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, por la propiedad universal del coproducto $A_1 \star A_2$, existe un único homomorfismo $h \colon A_1 \star A_2 \to D$ tal que $h \circ q_1 = h_1$ y $h \circ q_2 = h_2$. Se tiene que $H \subset \ker h$. En efecto,

$$h(q_1(f_1(x))^{-1}\, q_2(f_2(x)))) = h_1(f_1(x))^{-1}\, h_2(f_2(x)) = 1.$$

Dado que que $h(H) = \{1\}$, existe un único homomorfismo de grupos $\widehat{h} \colon A_1 \star_X A_2 \to D$ tal que $\widehat{h} \circ p = h$. Se tiene

$$\widehat{h} \circ g_1 = \widehat{h} \circ p \circ i_1 = h \circ i_1 = h_1, \quad h \circ g_2 = \widehat{h} \circ p \circ i_2 = h \circ i_2 = h_2.$$

La unicidad de $\widehat{h}$ se sigue de la unicidad de h y de que p es un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dd, "f_1"'] & & A_2 \arrow[dl, "q_2"'] \arrow[dd, "g_2"] \arrow[dddr, "h_2"] & \\
& A_1 \star A_2 \arrow[dr, "p"] \arrow[ddrr, "h"] & & \\
A_1 \arrow[ur, "q_1"] \arrow[rr, "g_1"] \arrow[drrr, "h_1"'] & & A_1 \star_X A_2 \arrow[dr, "\widehat{h}"] & \\
& & & D
\end{tikzcd}$$

(3) La categoría $\mathbf{Mod_R}$ tiene cuadrados cocartesianos. Sean $f_1 \colon X \to A_1$ y $f_2 \colon X \to A_2$ homomorfismos de R-módulos y consideremos el módulo cociente $(A_1 \bigoplus A_2)/N$, donde

$$N = \{(f_1(x), -f_2(x)) \mid x \in X\}.$$

La terna $((A_1 \bigoplus A_2)/N, g_1, g_2)$, donde los homomorfismos $g_i \colon A_i \to (A_1 \bigoplus A_2)/N$, $i = 1, 2$, están dados por $g_1(a_1) = (a_1, 0) + N$ y $g_2(a_2) = (0, a_2) + N$, es un cuadrado cocartesiano para f_1 y f_2.

En efecto, dado que $(f_1(x), -f_2(x)) \in N$, se tiene

$$g_1(f_1(x)) = (f_1(x), 0) + N = (0, f_2(x)) + N = g_2(f_2(x)),\ x \in X,$$

equivalentemente, $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$. Sean $h_1 \colon A_1 \to D$ y $h_2 \colon A_2 \to D$ son homomorfismos de R-módulos tales que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$. La aplicación $h \colon A_1 \bigoplus A_2 \to D$ dada por $h(a_1, a_2) = h_1(a_1) + h_2(a_2)$ es un homomorfismo de R-módulos y $h(N) = 0$. En efecto,

$$h(f_1(x), -f_2(x)) = h_1(f_1(x)) - h_2(f_2(x)) = 0,$$

luego existe un homomorfismo de R-módulos $\widehat{h} \colon (A_1 \bigoplus A_2)/N \to D$ tal que

$$\widehat{h}((a_1, a_2) + N) = h_1(a_1) + h_2(a_2).$$

Además, $\widehat{h}$ es el único homomorfismo de R-módulos tal que $\widehat{h} \circ g_1 = h_1$ y $\widehat{h} \circ g_2 = h_2$.

(4) La categoría **Ring** tiene cuadrados cocartesianos. Sean $f_1\colon X \to A_1$ y $f_2\colon X \to A_2$ homomorfismos de anillos, la terna $(A_1 \otimes_X A_2, g_1, g_2)$, donde $A_1 \otimes_X A_2$ un anillo con la multiplicación

$$(a_1 \otimes a_2)\,(a_1' \otimes a_2') = a_1\, a_1' \otimes a_2\, a_2',$$

y donde los homomorfismos de anillos $g_i\colon A_i \to A_1 \otimes_X A_2$, $i = 1, 2$, están dados por $g_1(a_1) = a_1 \otimes 1$, $g_2(a_2) = 1 \otimes a_2$, es un cuadrado cocartesiano para f_1 y f_2.

En efecto, se tiene que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$. Si $h_1\colon A_1 \to D$ y $h_2\colon A_2 \to D$ son homomorfismos de anillos tales que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, la aplicación $h\colon A_1 \times A_2, \to D$ dada por $h(a_1, a_2) = h_1(a_1)\, h_2(a_2)$, es X-bilineal y por tanto induce un homomorfismo de X-módulos $\widehat{h}\colon A_1 \otimes_X A_2 \to D$. Además, $\widehat{h}$ un homomorfismo de anillos y se tiene que $g_1 \circ \widehat{h} = h_1$ y $g_2 \circ \widehat{h} = h_2$.

(5) La categoría **Field** no tiene cuadrados cocartesianos.

2.4. Límites y colímites

Definición 2.37. Sea $\mathcal{I}$ una categoría pequeña. Un *diagrama* D sobre $\mathcal{I}$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un funtor,

$$\begin{aligned} D\colon \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ i &\mapsto D_i \end{aligned}$$

La categoría de diagramas sobre $\mathcal{I}$ en $\mathcal{C}$ es la categoría $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ definida en ejemplos 1.3 (17).

Definición 2.38. Sea D un diagrama sobre $\mathcal{I}$ en $\mathcal{C}$. Una familia $(f_i\colon X \to D_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de morfismos de $\mathcal{C}$ se dice que es *compatible para* $\mathcal{D}$ si para cualquier morfismo $a\colon i \to j$ en $\mathcal{I}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_i \arrow[dd, "Da"] \\ X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & D_j \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Se dice que (X, l_i), donde X es un objeto en $\mathcal{C}$ y $(l_i\colon X \to D_i)_{i \in \mathcal{I}}$, es una familia compatible para D, es un *límite* para D verifica la siguiente propiedad universal: Para cualquier familia de morfismos $(f_i\colon Y \to D_i)_{i \in \mathcal{I}}$ compatible para D, existe un único morfismo $f\colon Y \to X$ tal que $l_i \circ f = f_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$, es decir tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "l_i"] & & D_i \\ & Y \arrow[ul, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, para todo $i \in \mathcal{I}$.

Proposición 2.39. *Si* (X, l_i) *y* (X', l'_i) *son límites para el diagrama* D *entonces existe un isomorfismo* $h\colon X' \to X$ *tal que* $l_i \circ h = l'_i$*, para todo* $i \in \mathcal{I}$*. Si* (X, l_i) *es un límite y* $h\colon X' \to X$ *es un isomorfismo, entonces* $(X', l_i \circ h)$ *es un límite para* D*.*

Demostración. Por definición de límite existen morfismos únicos $h\colon X \to X'$ y $k\colon X' \to X$ tales que para todo $i \in I$, $l'_i \circ h = l_i$ y $l_i \circ h = l'_i$. Consecuentemente, para todo i,

$$l_i \circ k \circ h = l'_i \circ h = l_i = l_i \circ 1_X$$

y como (X, l_i) es un límite para D, $k \circ h = 1_X$. Análogamente, $h \circ k = 1_{X'}$; por tanto h es un isomorfismo. □

Notación 2.40. *Denotaremos un límite para un diagrama* D *sobre* $\mathcal{I}$ *por* $(\text{lím}_{i\in I} D_i, l_i)$ *o simplemente por* $\text{lím}_{i\in I} D_i$*.*

Proposición 2.41. *Si existe un límite para cualquier diagrama sobre* $\mathcal{I}$ *en* $\mathcal{C}$ *se tiene un funtor*

$$\begin{aligned} \lim_{i\in\mathcal{I}}(-)\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ D &\mapsto \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i. \end{aligned}$$

Demostración. Si $t\colon D \to D'$ es un morfismo en $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, la familia de morfismos $\{t_i \circ l_i\colon \text{lím}_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{D}_i \to D'_i\}$ es compatible para D'. Por la propìedad universal de $(\text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D'_i, l'_i)$, existe un morfismo

$$h\colon \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i \to \lim_{i\in\mathcal{I}} D'_i$$

en $\mathcal{C}$ tal que $l'_i \circ h = t_i \circ l_i$. Denotaremos h por $\text{lím}_{i\in\mathcal{I}} t_i$. Definimos

$$\lim_{i\in\mathcal{I}}(D) = \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i, \qquad \lim_{i\in\mathcal{I}}(t) = \lim_{i\in\mathcal{I}} t_i.$$

$\text{lím}_{i\in\mathcal{I}}(-)$ es un funtor: Claramente, $\text{lím}_{i\in\mathcal{I}}(1_D) = 1_{\text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D}$ y si $t\colon D \to D'$ y $t'\colon D' \to D''$ son morfismos en $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, se prueba fácilmente que $\text{lím}_{i\in\mathcal{I}}(t' \circ t) = \text{lím}_{i\in\mathcal{I}} t' \circ \text{lím}_{i\in\mathcal{I}} t$. □

El concepto dual de límite es el de colímite.

Definición 2.42. Sea D un diagrama sobre $\mathcal{I}$ en $\mathcal{C}$. Una familia $(f_i\colon D_i \to Y)_{i\in\mathcal{I}}$ de morfismos de $\mathcal{C}$ se dice que es *cocompatible para* $\mathcal{D}$ si para cualquier morfismo $a\colon i \to j$ en $\mathcal{I}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[d, "Da"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ & Y \\ D_j \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Se dice que (X, k_i), donde X es un objeto en $\mathcal{C}$ y $(k_i\colon D_i \to X)_{i\in\mathcal{I}}$ es una familia cocompatible para $\mathcal{D}$, es un *colímite* para $\mathcal{D}$ si verifica la siguiente propiedad universal: Para cualquier familia de morfismos $(g_i\colon D_i \to Y)_{i\in\mathcal{I}}$ cocompatible para D, existe un único morfismo $g\colon X \to Y$ tal que $g \circ k_i = g_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$, es decir, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[rr, "k_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & X \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, para todo $i \in \mathcal{I}$.

Proposición 2.43. *Si (Y, k_i) y (Y', k_i') son colímites para el diagrama D entonces existe un isomorfismo $h\colon Y \to Y'$ tal que $h \circ k_i = k_i'$, para todo $i \in \mathcal{I}$.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.39 y del teorema de dualidad. □

Notación 2.44. *Denotaremos un colímite para un diagrama D sobre $\mathcal{I}$ por $(\operatorname{colím}_{i\in I} D_i, l_i)$ o simplemente por $\operatorname{colím}_{i\in I} D_i$.*

Proposición 2.45. *Si existe un colímite para cualquier diagrama sobre $\mathcal{I}$ en $\mathcal{C}$ se tiene un funtor*

$$\operatorname*{colím}_{i\in\mathcal{I}}(-)\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{C}$$
$$D \mapsto \operatorname*{colím}_{i\in\mathcal{I}} D_i.$$

Demostración. Se sigue de la proposición 2.41 y del teorema de dualidad. □

Ejemplos 2.46. (1) Si los morfismos de $\mathcal{I}$ son las identidades, entonces un límite para un diagrama $\mathcal{D}$ sobre I en $\mathcal{C}$ es el par $(\prod_{i\in\mathcal{I}} D_i, p_i)$, donde los morfismos p_j: $\prod_{i\in\mathcal{I}} D_i \to D_j$, son las proyecciones del producto. El colímite de $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{I}$ es el par $(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}, q_i)$, donde los morfismos $q_j\colon D_j \to \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i$, son las inyecciones en el coproducto.

(2) El límite del diagrama D sobre $\mathcal{I}$ en $\mathcal{C}$, donde $\mathrm{Obj}(I) = \{1, 2\}$, $\mathcal{I}(1, 2) = \{a, b\}$, $D(a) = f$ y $D(b) = g$, es un igualador de (f, g) y el colímite de $\mathcal{D}$ es un coigualador de (f, g).

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] & D_2 \end{tikzcd}$$

(3) El límite del diagrama D sobre $\mathcal{I}$ en $\mathcal{C}$ donde $\mathrm{Obj}(I) = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{I}(1, 3) = \{a\}$, $\mathcal{I}(2, 3) = \{b\}$, $D(a) = f_1$ y $D(b) = f_2$, es el cuadrado cartesiano para (f_1, f_2).

$$\begin{tikzcd} & D_2 \arrow[d, "f_2"] \\ D_1 \arrow[r, "f_1"] & D_3 \end{tikzcd}$$

(4) El límite del diagrama D sobre $\mathcal{I}$, donde $\mathrm{Obj}(I) = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{I}(3, 1) = \{a\}$, $\mathcal{I}(3, 2) = \{b\}$, $D(a) = f_1$ y $D(b) = f_2$, es un cuadrado cocartesiano para (f_1, f_2).

$$\begin{tikzcd} D_3 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & D_2 \\ D_1 & \end{tikzcd}$$

Definición 2.47. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ es *completa* si existe un límite para cualquier diagrama en $\mathcal{C}$. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ es *cocompleta* si existe un colímite para cualquier diagrama en $\mathcal{C}$.

Ejemplos 2.48. (1) La categorías **Set**, **Top**, **Grp**, $\mathbf{Mod_R}$ y **Ring** son categorías completas. Si D, es un diagrama sobre $\mathcal{I}$ en **Set** (resp. **Top**, **Grp**, $\mathbf{Mod_R}$ y **Ring**) un límite para $(\mathcal{I}, D)$ está dado por el subconjunto (resp. subespacio con la topología inducida, subgrupo, submódulo, subespacio, subanillo)

$$\lim_{i\in\mathcal{I}} D_i = \{(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} D_i \mid Da(x_i) = x_j, \forall\, a\colon i \to j\}.$$

junto con las aplicaciones $p_i \circ \iota\colon \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i \to D_i$, donde $\iota\colon \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i \to \prod_{i\in\mathcal{I}} D_i$ es la inclusión.

$$\begin{tikzcd} \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i \arrow[r, "\iota"] & \prod_{i\in\mathcal{I}} D_i \arrow[r, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & D_i \arrow[d, "Da"] \\ & & D_j \end{tikzcd}$$

Claramente, $\mathcal{D}(a) \circ p_i \circ \iota = p_j \circ \iota$. Si (Y, f_i) es otra familia compatible para D, entonces la aplicación (resp. aplicación contínua, homomorfismo de grupos, homomorfismo de módulos, homomorfismo de anillos) $f\colon Y \to \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i$, $f(y) = (f_i(y))_{i\in\mathcal{I}}$ es la única aplicación (resp. aplicación contínua, homomorfismo de grupos, homomorfismo de módulos, homomorfismo de anillos) que verifica que $p_i \circ \iota \circ f = f_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$.

(2) Las categorías **Set** y **Top** son categorías cocompletas. Si D es un diagrama sobre $\mathcal{I}$ en **Set** (resp. **Top**), un colímite para D está dado por el conjunto cociente (resp. espacio topológico cociente con la topología identificación)

$$\operatorname*{colím}_{i\in\mathcal{I}} D_i = \frac{\coprod_{i\in\mathcal{I}} D_i}{\sim_R}$$

donde $\coprod_{i\in\mathcal{I}} D_i$ es el conjunto unión disjunta (resp. suma topológica) de la familia $\{D_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ y donde $\sim_R$ es la menor relación de equivalencia que contiene a la relación R dada por

$$x_i \in D_i,\ x_j \in D_j,\ x_i \mathrel{R} x_j \iff \exists\, a\colon i \to j,\ Da(x_i) = x_j,$$

junto con las aplicaciones $p \circ q_i \colon D_i \to \operatorname{colím}_{i\in\mathcal{I}} D_i$, siendo $q_i \colon D_i \to \bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} D_i$ la aplicación inyección y $p \colon \bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} D_i \to \operatorname{colím}_{i\in\mathcal{I}} D_i$ la proyección.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "Da"'] & \bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} D_i \arrow[r, "p"] & \operatorname{colím}_{i\in\mathcal{I}} D_i \\
D_j \arrow[ur, "q_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

(3) La categoría **Grp** es cocompleta. En la categoría **Grp**, un colímite para el diagrama D está dado por el grupo cociente $(\star_{i\in\mathcal{I}} D_i)/N$, donde $\star_{i\in\mathcal{I}} D_i$ es el producto libre de la familia de grupos $\{D_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ y N es el subgrupo normal generado por el subconjunto

$$\{q_i(x_i)\,((q_j \circ Da)(x_i))^{-1} \mid x_i \in D_i,\ i,j \in \mathcal{I},\ a \colon i \to j\},$$

donde $q_i \colon D_i \to \star_{i\in\mathcal{I}} D_i$ los homomorfismos inyección en el producto libre, junto con los homomorfismos $p \circ q_i \colon D_i \to (\star_{i\in\mathcal{I}} D_i)/N$, siendo $p \colon \star_{i\in\mathcal{I}} D_i \to (\star_{i\in\mathcal{I}} D_i)/N$ la proyección.

(4) La categoría $\mathbf{Mod_R}$ es cocompleta. Un colímite para el diagrama D está dado por el módulo cociente $(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i)/N$, donde $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i$ es el coproducto de la familia módulos $\{D_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ y N es el submódulo de $\bigoplus_{i\in I} D_i$ generado por el conjunto

$$\{q_i(x_i) - (q_j \circ Da)(x_i) \mid x_i \in D_i,\ i,j \in \mathcal{I},\ a \colon i \to j\},$$

junto con los homomorfismos $p \circ q_i \colon D_i \to (\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i)/N$, siendo los $q_i \colon D_i \to \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i$ los homomorfismos inyección en el coproducto y $p \colon \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i \to (\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i)/N$ la proyección.

Veamos que $((\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i)/N, p \circ q_i)$ es un colímite para D. Sea $\{f_i \colon Y \to D_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia cocompatible para D. El homomorfismo $f \colon \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i \to Y$, dado por $f((x_i)) = \sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(x_i)$, verifica que $f \circ q_i = f_i$, para todo $i \in I$. Además $f(N) = \{0\}$, puesto que

$$f(q_i(x_i) - (q_j \circ Da)(x_i)) = f_i(x_i) - (f_j \circ Da)(x_i) = 0.$$

Luego, existe un único homomorfismo

$$\widehat{f} \colon (\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i)/N \to Y$$

tal que $\widehat{f}\,p = f$. Se tiene que $\widehat{f}$ es el único homomorfismo que verifica que $\widehat{f} \circ p \circ q_i = f_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$.

(5) La categoría **Ring** es cocompleta. Un colímite para el diagrama D está dado por el anillo cociente $(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i)/\mathfrak{a}$, donde $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i$ es el coproducto de la familia anillos $\{D_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ y $\mathfrak{a}$ es el ideal de $\bigoplus_{i\in I} D_i$ generado por el conjunto

$$\{q_i(x_i) - q_j(Da(x_i)) \mid x_i \in D_i,\ i,j \in \mathcal{I},\ a \colon i \to j\},$$

junto con los homomorfismos $p \circ q_i \colon D_i \to (\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i)/\mathfrak{a}$, siendo los $q_i \colon D_i \to \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i$ los homomorfismos inyección en el coproducto y $p \colon \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i \to (\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D_i)/\mathfrak{a}$ la proyección.

Capítulo 3

Funtores adjuntos. Propiedades universales

3.1. Funtores adjuntos

Definición 3.1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Se dice que F es *adjunto por la izquierda* a G o que G es *adjunto por la derecha* a F, si existe una equivalencia natural entre los funtores

$$\eta\colon \mathcal{D}(F(-),-) \longrightarrow \mathcal{C}(-,G(-)),$$

donde $\mathcal{D}(F(-),-), \mathcal{C}(-,G(-))\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ están dados por

$$\mathcal{D}(F(-),-) = \mathcal{D}(-,-)\,(F^{op} \times 1_{\mathcal{D}}), \quad \mathcal{C}(-,G(-)) = \mathcal{C}(-,-)\,(1_{\mathcal{C}} \times G).$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, shift right, "F"'] \\ \mathcal{D} \arrow[u, shift right, "G"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_{X,Y}(\varphi)"] & GY \\ FX \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, phantom, "\eta_{X,Y}\uparrow"] & Y \end{tikzcd}$$

y para todo morfismo $(f,g)\colon (X,Y) \to (X',Y')$ en $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(FX,Y) \arrow[r, "\eta_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathcal{D}(F(f),g)"'] & \mathcal{C}(X,GY) \arrow[d, "\mathcal{C}(f,G(g))"] \\ \mathcal{D}(FX',Y') \arrow[r, "\eta_{X',Y'}"] & \mathcal{C}(X',GY') \end{tikzcd}$$

es decir, si $\varphi\colon FX \to Y$ en $\mathcal{D}$,

$$\eta_{X',Y'}(g \circ \varphi \circ F(f)) = G(g) \circ \eta_{X,Y}(\varphi) \circ f, \qquad (\star)$$

equivalentemente,

$$(\eta_{X',Y'})^{-1}(G(g) \circ \psi \circ f) = g \circ (\eta_{X,Y})^{-1}(\psi) \circ F(f), \qquad (\star\star)$$

para todo $\psi \in \mathcal{C}(X, GY)$.

Denotaremos esta adjunción por $\eta\colon F \dashv G$.

Definición 3.2. Se llama *unidad de la adjunción* $\eta\colon F \dashv G$ a la transformación natural $\mu\colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$ dada por

$$\mu_X = \eta_{X,FX}(1_{FX}).$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, shift right, "F"'] & X \arrow[r, "\mu_X"] & FGX \\ \mathcal{D} \arrow[u, shift right, "G"'] & FX \arrow[r, "1_{F(X)}"] \arrow[ur, phantom, "\eta_{X,FX}\uparrow"] & FX \end{tikzcd}$$

Obsérvese que μ es una transformación natural, puesto que si $f\colon X' \to X$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\mu_{X'}"] \arrow[d, "f"'] & GFX' \arrow[d, "GFf"] \\ X \arrow[r, "\mu_X"] & GFX \end{tikzcd}$$

En efecto, por $(\star)$ se tiene

$$\begin{aligned} GFf \circ \mu'_X =& GFf \circ \eta_{X',FX'}(1_{FX'}) = \eta_{X,FX}(Ff \circ 1_{FX'}) = \eta_{X,FX}(1_{FX} \circ Ff) \\ =& \eta_{X,FX}(1_{FX}) \circ f = \mu_X \circ f. \end{aligned}$$

Definición 3.3. Se llama *counidad de la adjunción* $\delta\colon F \dashv G$ a la transformación natural $\delta\colon FG \to 1_{\mathcal{D}}$ dada por

$$\delta_Y = (\eta_{GY,Y})^{-1}(1_{GY}).$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, shift right, "F"'] & GY \arrow[r, "1_{GY}"] & G(Y) \\ \mathcal{D} \arrow[u, shift right, "G"'] & FGY \arrow[r, "\delta_Y"] \arrow[ur, phantom, "\eta_{GY,Y}\uparrow"] & Y \end{tikzcd}$$

La naturalidad de δ se sigue de la relación $(\star)$.

En general, cuando está claro que objetos X e Y se consideran, denotaremos $\eta_{X,Y}$ por η.

Proposición 3.4. *Consideremos la adjunción $\eta\colon F \dashv G$ y sean $\mu\colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$ y $\delta\colon FG \to 1_{\mathcal{D}}$ la unidad y la counidad de la adjunción, respectivamente. Se tiene*

(1) $\eta(\varphi) = G\varphi \circ \mu_X$, *para todo* $\varphi\colon FX \to Y$.

(2) $\eta^{-1}(\psi) = \delta_Y \circ F\psi$, *para todo* $\psi\colon X \to GY$.

(3) $\delta F \circ F\mu = 1_F$, $G\delta \circ \mu G = 1_G$.

(4) Propiedad universal de la unidad de la adjunción*: Para cada objeto* X *en* $\mathcal{C}$ *y cada morfismo* $g\colon X \to GY$ *existe un único morfismo* $f\colon FX \to Y$ *tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[dr, "g"'] & GFX \arrow[d, dashed, "Gf"] \\ & GY \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir $Gf \circ \mu_X = g$.

(5) Propiedad universal de la counidad de la adjunción*: Para cada objeto* Y *en* $\mathcal{D}$ *y cada morfismo* $g\colon FX \to Y$ *existe un único morfismo* $f\colon X \to GY$ *tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} FGY \arrow[r, "\delta_Y"] & Y \\ FX \arrow[u, dashed, "Ff"] \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir $\delta_Y \circ Ff = g$.

Demostración. (1) Por la naturalidad de η, se tiene que $\eta(g \circ \varphi \circ Ff) = Gg \circ \eta(\varphi) \circ f$, para todo $f \in \mathcal{C}(X', X)$, $g \in \mathcal{D}(Y, Y')$ y $\varphi \in \mathcal{D}(FX, Y)$. Luego,

$$\eta(\varphi) = G\varphi \circ \eta(1_{FX}) = G\varphi \circ \mu_X$$

(2) Por la relación ($\star\star$), se tiene

$$\eta^{-1}(\psi) = \eta^{-1}(1_{GY} \circ \psi) = \eta^{-1}(1_{GY}) \circ F\psi = \delta_Y \circ F\psi$$

(3) Se tienen las transformaciones naturales $F\mu\colon F \to FGF$ y $\delta F\colon FGF \to F$, y que $(\delta F \circ F\mu)_X = \delta_{FX} \circ F\mu_X$. Así,

$$\eta(\delta_{FX} \circ F\mu_X) = \eta(\delta_{FX}) \circ \mu_X = \eta(\eta^{-1}(1_{GFX})) \circ \mu_X = \mu_X = \eta(1_{FX})$$

Por tanto, $\delta_{FX} \circ F\mu_X = 1_{FX}$. De forma análoga se prueba que $G\delta \circ \mu G = 1_G$.

(4) Dado $g\colon X \to GY$, se tiene $\eta^{-1}g\colon FX \to Y$. Así, por (1)

$$G(\eta^{-1}g) \circ \mu_X == \eta(\eta^{-1}g) = g.$$

Probemos ahora la unicidad. Sea $f\colon FX \to Y$ tal que $Gf \circ \mu_X = g$. Por (1), se tiene

$$Gf \circ \mu_X = \eta(f)$$

Luego, $\eta(f) = g$ y por tanto $f = \eta^{-1}(g)$.

(5) Se prueba de forma similar a (4)

□

Teorema 3.5. *Sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores, Son equivalentes:*

(1) *F es adjunto a la izquierda a G, $\eta\colon F \dashv G$.*

(2) *Existe una transformación natural $\mu\colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$ verificando la siguiente propiedad universal: Para cada objeto X en $\mathcal{C}$ y cada morfismo $g\colon X \to GY$ existe un único morfismo $f\colon FX \to Y$ tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[dr, "g"'] & GFX \arrow[d, dashed, "Gf"'] \\ & GY \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir tal que $Gf \circ \mu_X = g$.

(3) *Existe una transformación natural $\delta\colon FG \to 1_{\mathcal{D}}$ verificando la siguiente propiedad universal: Para cada objeto Y en $\mathcal{D}$ y cada morfismo $g\colon FX \to Y$ existe un único morfismo $f\colon X \to GY$ tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} FGY \arrow[r, "\delta_Y"] & Y \\ FX \arrow[u, dashed, "Ff"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir tal que $\delta_Y \circ Ff = g$.

(4) *Existen transformaciones naturales $\mu\colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$ y $\delta\colon FG \to 1_{\mathcal{D}}$ tales que $\delta F \circ F\mu = 1_F$ y $G\delta \circ \mu G = 1_G$.*

Demostración. (1) ⇒ (2) Se sigue de la proposición 3.4 (4).

(2) ⇒ (1) Consideremos la aplicación:

$$\eta_{X,Y}\colon \mathcal{D}(FX, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X, GY)$$
$$\varphi \mapsto G\varphi \circ \mu_X$$

Por la propiedad universal de (2) tenemos que $\eta_{X,Y}$ es biyectiva.
Probemos ahora la naturalidad de $\eta\colon \mathcal{D}(F(-), -) \to \mathcal{C}(-, G(-))$:

Si $(f, g)\colon (X, Y) \to (X', Y')$ es un morfismo en $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ y $\varphi \in \mathcal{C}(FX, Y)$:

$$\begin{aligned}\eta(g \circ \varphi \circ Ff) =& G(g \circ \varphi \circ Ff) \circ \mu_{X'} = Gg \circ G\varphi \circ GFf \circ \mu_{X'} = Gg \circ G\varphi \circ \mu_X \circ f \\ =& Gg \circ \eta(\varphi) \circ f.\end{aligned}$$

(1) ⇒ (3) Se sigue de la proposición 3.4 (5).
(3) ⇒ (1) Se prueba de forma análoga a (2) ⇒ (1).
(1) ⇒ (4) Se sigue de la proposición 3.4 (3).

(4) $\Rightarrow$ (1) Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \eta_{X,Y} : \mathcal{D}(FX, Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, GY) \\ \varphi &\mapsto G\varphi \circ \mu_X \end{aligned}$$

Tenemos que η es natural puesto que si $(f, g) \colon (X, Y) \to (X', Y')$ es un morfismo en $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ y $\varphi \in \mathcal{C}(FX, Y)$:

$$\begin{aligned} \eta(g \circ \varphi \circ Ff) =& G(g \circ \varphi \circ Ff) \circ \mu_{X'} = Gg \circ G\varphi \circ GFf \circ \mu_{X'} = Gg \circ G\varphi \circ \mu_X \circ f \\ =& Gg \circ \eta(\varphi) \circ f. \end{aligned}$$

Probemos ahora que $\eta_{X,Y}$ es biyectiva. La aplicación $\xi_{X,Y} : \mathcal{C}(X, GY) \to \mathcal{D}(FX, Y)$, dada por $\xi_{X,Y}(\psi) = \delta_Y \circ F\psi$ para $\psi \colon X \to GY$, es la inversa de $\eta_{X,Y}$. En efecto,

$$(\xi_{X,Y}\, \eta_{X,Y})(\varphi) = \delta_Y \circ F(\eta_{X,Y}(\varphi)) = \delta_Y \circ FG\varphi \circ F\mu_X = \varphi \circ \delta_{FX} \circ F\mu_X = \varphi$$

De forma análoga se prueba que $\eta_{X,Y}\, \xi_{X,Y} = 1_{\mathcal{C}(X,GY)}$. □

Obsérvese que en (2) y (4), μ es la unidad de la adjunción y que en (3) y (4), δ es la counidad de la adjunción $\eta \colon F \dashv G$.

Proposición 3.6. *Si $F \dashv G$, entonces $G^{op} \dashv F^{op}$.*

Demostración. Sea $\eta \colon F \dashv G$. Se tiene la equivalencia natural

$$\tilde{\eta} \colon \mathcal{C}^{op}(G^{op}(-), -) \longrightarrow \mathcal{D}^{op}(-, F^{op}(-)),$$

dada por $\tilde{\eta}_{X,Y}(\psi) = \eta^{-1}_{X,Y}(\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{C}^{op}(G^{op}Y, X)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^{op} \arrow[d, shift right, "G^{op}"'] \\ \mathcal{C}^{op} \arrow[u, shift right, "F^{op}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{\eta}_{X,Y}(\psi)"] & FX \\ GY \arrow[r, "\psi"] \arrow[u, phantom, "\tilde{\eta}_{X,Y} \uparrow"] & X \end{tikzcd}$$

□

Proposición 3.7. *Si $F \dashv G$, entonces G determina a F salvo una equivalencia natural y F determina a G salvo una equivalencia natural.*

Demostración. Por la proposición 3.6 es suficiente con probar la primera afirmación. Supongamos que $\eta \colon F \dashv G$ y que $\eta' \colon F' \dashv G$. Sean $\mu \colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$, $\mu' \colon 1_{\mathcal{C}} \to GF'$ las unidades de las correspondientes adjunciones. Por las propiedades universales de μ y μ', para cada objeto X de $\mathcal{C}$ existen morfismos $t_X : FX \to F'X$ y $t'_X : F'X \to FX$ tales que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[dr, "\mu'_X"'] & GFX \arrow[d, dashed, "Gt_X"] \\ & GF'X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu'_X"] \arrow[dr, "\mu_X"'] & GF'X \arrow[d, dashed, "Gt'_X"] \\ & GFX \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Dado que

$$G(t'_X \circ t_X) \circ \mu_X = Gt'_X \circ \mu'_X = \mu_X, \qquad G(t_X \circ t'_X) \circ \mu'_X = Gt_X \circ \mu_X = \mu'_X$$

por la propiedad universal de μ y μ', se tiene que $t'_X \circ t_X = 1_{FX}$ y $t_X \circ t'_X = 1_{FX'}$. Así, t_X es un isomorfismo, para todo objeto X de $\mathcal{C}$. Veamos que si $f\colon X \to X'$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ se tiene el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "Ff"'] & F'X \arrow[d, "F'f"] \\
FX' \arrow[r, "t_{X'}"] & F'X'
\end{tikzcd}$$

En efecto, dado que

$$\begin{aligned}
G(F'f \circ t_X) \circ \mu_X =& GF'f \circ \mu'_X \\
G(t_{X'} \circ Ff) \circ \mu_X =& G(t_{X'}) \circ \mu_{X'} \circ f = \mu'_{X'} \circ f = GF'f \circ \mu'_X.
\end{aligned}$$

por la propiedad universal de μ, $F'f \circ t_X = t_{X'} \circ Ff$. Así, $t\colon F \to F'$ es una equivalencia natural. $\square$

Proposición 3.8. *Sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y $G'\colon \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ funtores. Si $F \dashv G$ y $F' \dashv G'$ adjuntos, entonces $F'F \dashv GG'$.*

Demostración. Sean $\eta\colon F \dashv G$ y $\eta'\colon F' \dashv G'$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, shift right, "F"'] & & X \arrow[r] & GG'Y \\
\mathcal{D} \arrow[u, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "F'"'] & & & \\
\mathcal{E} \arrow[u, shift right, "G'"'] & & F'FX \arrow[r] \arrow[uu, phantom, "\eta''X,Y \uparrow"] & Y
\end{tikzcd}$$

La aplicación $\eta''_{X,Y}\colon \mathcal{E}(F'FX, Y) \to \mathcal{C}(X, GG'Y)$, dada por $\eta''_{X,Y} = \eta_{X,G'Y} \circ \eta'_{FX,Y}$ es biyectiva

$$\begin{tikzcd}
\eta_{X,G'Y} \circ \eta'_{FX,Y}\colon \mathcal{E}(F'FX, Y) \arrow[rr, "\eta''_{X,Y}"] \arrow[dr, "\eta'_{FX,Y}"] & & \mathcal{C}(X, GG'Y) \\
& \mathcal{D}(FX, G'Y) \arrow[ur, "\eta_{X,G'Y}"] &
\end{tikzcd}$$

Se comprueba que $\eta''\colon \mathcal{E}(F'F(-), -) \to \mathcal{C}(-, GG'(-))$ es natural. $\square$

Teorema 3.9. *$\eta\colon F \dashv G$, entonces G conserva límites y F conserva colímites, es decir si D es un diagrama sobre $\mathcal{I}$ en $\mathcal{C}$ y D' es un diagrama sobre $\mathcal{I}'$ en $\mathcal{D}$,*

$$F(\operatorname*{colím}_{i \in \mathcal{I}} D_i) = \operatorname*{colím}_{i \in \mathcal{I}} FD_i, \quad G(\lim_{i \in \mathcal{I}'} D_i) = \lim_{i \in \mathcal{I}} GD_i,$$

Demostración. Por la proposición 3.6, es suficiente probar que G conserva límites.

Sea $D\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D}$ un diagrama sobre $\mathcal{I}$ y $(l_i\colon \operatorname{lím}_{i\in I} D_i \to D_i)_{i\in\mathcal{I}}$, un límite para D. Vamos a probar que $(Gl_i\colon G(\operatorname{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i) \to GD_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es un limite para $GD\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$. Por la funtorialidad de G, la familia $(Gl_i\colon G(\operatorname{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i) \to GD_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es compatible para GD. Sea $(g_i\colon Y \to GD_i)_{i\in\mathcal{I}}$ otra familia compatible para GD,

$$\begin{tikzcd} & GD_i \arrow[dd, "GDa"] \\ Y \arrow[ur, "g_i"] \arrow[dr, "g_j"'] & \\ & GD_j \end{tikzcd}$$

La familia $(\eta^{-1}(g_i)\colon FY \to D_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es compatible para D, puesto que si $a\colon i \to j$ es un morfismo en $\mathcal{I}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_i \arrow[dd, "Da"] \\ FY \arrow[ur, "\eta^{-1}(g_i)"] \arrow[dr, "\eta^{-1}(g_j)"'] & \\ & D_j \end{tikzcd}$$

es conmutativo:

$$\eta^{-1}(g_j) = \eta^{-1}(GDa \circ g_i) = Da \circ \eta^{-1}(1_{GD_i}) \circ Fg_i = Da \circ \delta_{D_i} \circ Fg_i = Da \circ \eta^{-1}(g_i).$$

Por la propiedad universal del límite $(\operatorname{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i, l_i)$, existe un único morfismo $\rho\colon FY \to \operatorname{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i$ tal que

$$l_i \circ \rho = \eta^{-1}(g_i), \quad i \in \mathcal{I},$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i \arrow[r, "l_i"] & D_i \\ FY \arrow[u, dashed, "\rho"] \arrow[ur, "\eta^{-1}(g_i)"'] & \end{tikzcd}$$

y el morfismo $\eta(\rho)\colon Y \to G(\operatorname{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i)$ verifica:

$$g_i = \eta\,\eta^{-1}(g_i) = \eta(l_i \circ \rho) = G(l_i \circ \rho) \circ \mu_Y = Gl_i \circ \eta(\rho), \quad i \in \mathcal{I}\,.$$

$$\begin{tikzcd} G(\operatorname{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i \arrow[r, "Gl_i"] & GD_i \\ Y \arrow[u, dashed, "\eta(\rho)"] \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos la unicidad. Si $\rho'\colon Y \to GX$ otro morfismo tal que $Gl_i \circ \rho' = g_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$, entonces

$$\eta^{-1}(g_i) = \eta^{-1}(Gl_i \circ \rho') = l_i \circ \eta^{-1}(1_X) \circ F\rho' = l_i \circ \delta_X \circ F\rho' = l_i \circ \eta^{-1}(\rho'), \quad i \in \mathcal{I}\,.$$

Así,

$$l_i \circ \rho = \eta^{-1}(g_i) = l_i \circ \eta^{-1}(\rho'), \quad i \in \mathcal{I},$$

y por la propiedad universal del límite $(\text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i, l_i)$, se tiene que $\eta^{-1}(\rho') = \rho$. Luego, $\rho' = \eta(\rho)$.

De forma análoga se prueba que $F(\text{colím}_{i\in\mathcal{I}} D_i) = \text{colím}_{i\in\mathcal{I}} FD_i$. $\square$

Ejemplos 3.10. (1) El funtor grupo libre $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$, (resp. el funtor R-módulo libre $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Mod_R}$, el funtor anillo libre $\mathbb{Z}[\ ]\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ring}$) es adjunto por la izquierda al funtor de olvido $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ (resp. $U\colon \mathbf{Mod_R} \to \mathbf{Set}$, $U\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$). La propiedad universal de la unidad de la adjunción es la propiedad universal del grupo (resp. R-módulo, anillo) libre sobre un conjunto.

(2) El funtor $Dis\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$, que hace corresponder a cada conjunto S el espacio topológico S con la topología discreta es adjunto por la izquierda al funtor de olvido $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$. Si S es un conjunto y X es un espacio topológico, la biyección

$$\eta_{S,X}\colon \mathbf{Top}(Dis(S), X) \to \mathbf{Set}(S, X),$$

está dada por $\eta_{S,X}(f) = f$, para cada aplicación continua $f\colon Dis(S) \to X$.

(3) El funtor $Ind\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$, que hace corresponder a cada conjunto S el espacio topológico S con la topología indiscreta es adjunto por la derecha al funtor de olvido $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$. Si S es un conjunto y X es un espacio topológico, la aplicación biyectiva

$$\eta_{S,X}\colon \mathbf{Set}(U(X), S) \to \mathbf{Top}(X, Ind(S)),$$

está dada por $\eta_{X,S}(f) = f$, para cada aplicación $f\colon U(X) \to S$.

(4) El funtor $(-) \times Y\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ es adjunto por la izquierda al funtor $\mathbf{Set}(Y, -)$. La aplicación biyectiva

$$\eta_{X,Z}\colon \mathbf{Set}(X \times Y, S) \to \mathbf{Set}(X, \mathbf{Set}(Y, Z)),$$

está dada por $\big((\eta_{X,Z}(f))(x)\big)(y) = f(x, y)$, para cada $x \in X$, $y \in Y$.

(5) Sean $\boldsymbol{C}_{\mathbb{Z}}$ y $\boldsymbol{C}_{\mathbb{R}}$ las categorías asociadas a los conjuntos ordenados $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ (véase ejemplos 1.3 (12)). El funtor inclusión $\iota\colon \boldsymbol{C}_{\mathbb{Z}} \to \boldsymbol{C}_{\mathbb{R}}$ es adjunto por la izquierda al funtor parte entera $E\colon \boldsymbol{C}_{\mathbb{R}} \to \boldsymbol{C}_{\mathbb{Z}}$, siendo $E(r)$ la parte entera de $r \in \mathbb{R}$. La aplicación biyectiva

$$\eta_{n,r}\colon \boldsymbol{C}_{\mathbb{R}}(n, r) \to \boldsymbol{C}_{\mathbb{Z}}(n, E(r)),$$

está dada por $\eta_{n,r}(i_n^r) = i_n^{E(r)}$, para $n \leq r$

(6) El funtor abelianización $\text{Abel}\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ es adjunto por la izquierda al funtor inclusión $\iota\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$. La unidad de la adjunción es el homomorfismo de grupos $p\colon G \to G/[G, G]$, $p(x) = x[G, G]$.

(7) El funtor $M \otimes_R -$ es adjunto por la izquierda al funtor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$.

En efecto, se tiene una equivalencia natural

$$\eta\colon\ \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R -, -) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_R(M, -)),$$

dada por: Si N y H son R-módulos, la aplicación

$$\eta_{N,H}\colon\ \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, H)),$$

$\big((\eta_{N,H}(f))(n)\big)(m) = f(m \otimes n)$, para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, H)$, $m \in M$ y $n \in N$, es un isomorfismo de R-módulos. Vamos a describir su inversa

$$(\eta_{N,H})^{-1}\colon\ \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, H)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, H).$$

Dado $g \in \mathrm{Hom}_R(n, \mathrm{Hom}_R(M, H))$ consideremos la aplicación $g'\colon M \times N \to H$, dada por $g'(m, n) = (g(n))(m)$. La aplicación g' es R-bilineal, luego por la propiedad universal del producto tensor induce un homomorfismo de R-módulos $g''\colon M \otimes_R N \to H$, tal que $g''(m \otimes n)= g'(m, n)$. Se tiene que $(\eta_{N,H})^{-1}(g) = g''$.

3.2. Funtores adjuntos y construcciones universales

La proposición 3.9 establece una relación entre los funtores adjuntos y las construcciones universales. En esta sección vamos a probar un resultado que nos permitirá dar una definición de construcción universal.

Sea $\mathcal{I}$ una categoría pequeña y $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ la categoría de diagramas sobre $\mathcal{I}$, definida en 2.37.

Definición 3.11. Se llama *funtor diagonal* o *funtor constante* $\Delta(-)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ al funtor dado por

$$(\Delta(X))(i) = X, \quad (\Delta(X))(a) = 1_X$$

para cada objeto X en $\mathcal{C}$, $i \in \mathcal{I}$ y cada $a\colon i \to j$, y si $f\colon X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$,

$$(\Delta(f))_i = f, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Teorema 3.12. *El funtor* $\mathrm{lím}_{i\in\mathcal{I}}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{C}$ *es adjunto por la derecha al funtor diagonal y el funtor* $\mathrm{colím}_{i\in\mathcal{I}}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{C}$ *es adjunto por la izquierda al funtor diagonal.*

Demostración. Veamos que el funtor $\mathrm{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{C}$ es adjunto por la derecha al funtor diagonal. Vamos a definir una transformación natural

$$\eta\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}}(\Delta(-), -) \longrightarrow \mathcal{C}(-, \lim_{i\in\mathcal{I}}(-)),$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, shift right, "\Delta(-)"'] \\ \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \arrow[u, shift right, "\mathrm{lím}_{i\in\mathcal{I}}(-)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_{X,D}(\varphi)"] & \mathrm{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i \\ \Delta(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, phantom, "\eta_{X,Y}\uparrow"] & D. \end{tikzcd}$$

Dado $\varphi\colon \Delta(X) \to D$, tenemos que $(\varphi\colon X \to D_i)_{i\in I}$ es una familia compatible para D,

$$\begin{tikzcd} & D_i \arrow[dd, "Da"] \\ X \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & D_j \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de $(\text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i, l_i)$, existe un único morfismo $\psi\colon X \to \text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i$ tal que $l_i\,\psi = \varphi_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$,

$$\begin{tikzcd} \text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i \arrow[r, "l_i"] & D_i \\ X \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Definimos

$$\eta_{X,D}\colon \mathcal{D}(\Delta(X), D) \longrightarrow \mathcal{C}(X, \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i),$$

por $\eta_{X,D}(\varphi) = \psi$. Vamos a describir su inversa

$$(\eta_{X,D})^{-1}\colon \mathcal{C}(X, \lim_{i\in\mathcal{I}} D_i) \longrightarrow \mathcal{D}(\Delta(X), D).$$

Dado $\psi\colon X \to \text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i$, se tiene un familia compatible $(\psi \circ l_i\colon X \to D_i)_{i\in I}$, equivalentemente, un morfismo $\varphi\colon \Delta(X) \to D$ en $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, dado por $\varphi_i = \psi \circ l_i$, para cada $i \in \mathcal{I}$. Se tiene que $(\eta_{X,D})^{-1}(\psi) = \varphi$.

Se puede comprobar que η es una transformación natural.

Si $(\text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i, l_i)$ es un límite para el diagrama D, la counidad de la adjunción

$$\delta\colon \Delta \lim_{i\in\mathcal{I}}(-)) \to 1_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}$$

está dada por $\delta_D\colon \Delta(\text{lím}_{i\in\mathcal{I}} D_i) \to D$, $(\delta_D)_i = l_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$.

Análogamente, se prueba que el funtor $\text{colím}_{i\in\mathcal{I}}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{C}$ es adjunto por la izquierda al funtor diagonal. □

Definición 3.13. Se define una *construcción universal* correspondiente a un funtor F como un adjunto por la izquierda a F junto con la counidad de la adjunción, o como un adjunto a la derecha a F junto con la unidad de la adjunción.

Observación 3.14. El funtor $\text{lím}_{i\in\mathcal{I}}(-)$ es una construcción universal correspondiente al funtor diagonal; en particular, si I es un conjunto (considerado como una categoría cuyos únicos morfismos son las identidades), el funtor $\prod_{i\in\mathcal{I}}(-)\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$, es una construcción universal correspondiente al funtor diagonal y las proyecciones del producto vienen dadas por la counidad de la adjunción.

Análogamente, el funtor $\text{colím}_{i\in\mathcal{I}}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{C}$ es una construcción universal correspondiente al funtor diagonal; en particular, si I es un conjunto (considerado como una categoría cuyos únicos morfismos son las identidades), el funtor $\bigoplus_{i\in I}\colon \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$, es una construcción universal correspondiente al funtor diagonal y las inyecciones del coproducto vienen dadas por la unidad de la adjunción.

Todas las construcciones universales del capítulo 2 se obtienen como construcciones universales correspondientes al funtor diagonal $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ para las correspondientes categorías $\mathcal{I}$ de los ejemplos 2.46.

Bibliografía

[1] Eilenberg, S., MacLane, S., *General theory of natural equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945) 231-294.

[2] Jacobson N. *Basic Algebra II*, Freeman and Company, New York, 1989.

[3] Herrlich, H., Strecker, G. E., *Category theory*, Heldermann Verlag, 3rd ed., Berlin, 2007.

[4] Hilton, P. J., Stammbach, U. A., *A course in homological algebra*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 4, Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] Kan D., *Adjoint functors*, Trans. Am. Math. Soc. 87 (1958) 294-329.

[6] MacLane, S. *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[7] MacLane, S. *Groups, categories, and duality*, Proc. Nat. Acad, Sci. U:S: 34 (1948), 263-267.

[8] MacLane, S. *Duality for groups*, Bull. Am. Math, Soc. 50 (1950), 485-516.

[9] Mitchell, J. *Theory of categories*, Academic Press, New York, 1965.