FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Localización de anillos conmutativos

Juan Carballo Rodríguez

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Localización de anillos conmutativos

Juan Carballo Rodríguez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

m

Resumen

El Álgebra Conmutativa ha pasado a ser una herramienta fundamental en la Geometría Algebraica desde finales del siglo XIX. El método local-global está estrechamente involucrado en el desarrollo de la Geometría. En este TFG desarrollamos el aspecto algebraico de la localización geométrica, dando la idea y métodos básicos de la misma.

Se pone énfasis en el producto tensorial, comportamiento de los ideales en la localización, interpretación geométrica, estudio de las propiedades locales, así como del soporte e ideales primos asociados.

Abstract

Commutative Algebra has become a fundamental tool in Algebraic Geometry since the end of the 19th century. The local-global method is closely involved in the development of Geometry. In this TFG we develop the algebraic aspect of geometric localization, giving the basic idea and methods of it.

Emphasis is put on the tensor product, behavior of ideals in localization, geometric interpretation, study of local properties, as well as support and associated prime ideals.

Introducción

La teoría de anillos conmutativos (Álgebra Conmutativa) constituye una herramienta imprescindible en la Geometría Algebraica, tal como se entiende esta desde hace más de un siglo. Como cualquier rama de la Geometría, la Geometría Algebraica es local-global, i.e., hay problemas globales que se resuelven mejor localmente. Esto, llevado al campo del Álgebra Conmutativa, dio lugar al proceso de localización de anillos y de módulos.

En este TFG procedemos a exponer las ideas y resultados principales de la localización de anillos conmutativos, así como establecer el vínculo con la Geometría Algebraica. Comenzamos con un primer capítulo de que incluye someramente los prerrequisitos generales de anillos y módulos, tales como los ideales, Lema de Nakayama, producto tensorial y cambio de anillo.

En el segundo capítulo se pone énfasis sobre todo en el comportamiento de los ideales en el proceso de localización y en su significado geométrico, así como en el estudio de las propiedades locales de anillos y módulos.

Finalmente incluimos un capítulo sobre soporte e ideales primos asociados y ejercicios que contribuyen a ilustrar el significado de los contenidos.

Capítulo 1

Anillos, Ideales y módulos

1.1. Ideales y anillos cocientes

El objetivo del álgebra conmutativa es el estudio de los anillos conmutativos y los ideales. La condición de conmutatividad simplifica drásticamente el problema, dando lugar una manera muy específica y con métodos peculiares dentro de la teoría de anillos.

Los pilares históricos del álgebra conmutativa son dos, la Teoría de Números Algebraicos y la Geometría Algebraica Ambas ramas de las matemáticas, aunque con objetivos muy diferentes, tiene nociones paralelas y métodos comunes, y es en ellos donde hay que buscar los primeros ejemplos de ideales y de anillos, los cuales surgieron para estudiar ambos campos de una forma matemática. El concepto de ideal es anterior al de anillos y y surgió como una formalización del concepto de número en Teoría de Números Algebraicos, cuando se consideraban conjuntos de números más amplios que $\mathbb{Z}$ (donde todo ideal es principal).

El prototipo de anillos que surgen en Teoría de Números Algebraicos forman $\mathbb{Z}$ y las extensiones enteras (anillos de enteros de un cuerpo de números algebraicos).

Cuando en una de estas dos ramas se plantea un problema es mejor llevarlo al marco más abstracto de álgebra conmutativa, donde los desarrollos son más sistemáticos para resolverlo. Luego es preciso traducir el resultado a lenguaje geométrico o numérico.

El prototipo de anillos que surgen en Geometría Algebraica son $k[x_1, ..., k_n]$. En efecto, su objeto es el estudio de variedades algebraicas, dadas por ecuaciones algebraicas en n-variables. Aquí vamos a realizar un estudio más específico.

Definición 1.1. Podemos definir un ideal I de un anillo A como el subconjunto de A que es un un subgrupo conmutativo de tal forma que $AI \subseteq I$. El grupo cociente A/I mantiene de A la multiplicación, lo que lo convierte en un anillo, el cual denominaremos *anillo cociente* A/I.

Diremos que un ideal $\mathfrak{p}$ en A es un ideal *primo* si se cumple que para cualquier producto $xy \in \mathfrak{p}$ entonces $x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$, y siendo el ideal $\mathfrak{p} \neq (1)$.

Por otro lado tenemos los *ideales maximales*, que diremos que lo son si $\mathfrak{m} \neq (1)$ y cumple que no hay ningún ideal I tal que $\mathfrak{m} \subset I \subset (1)$. Lo cual equivale a:

$$\mathfrak{p} \text{ es primo} \Leftrightarrow A/\mathfrak{p} \text{ es un dominio de integridad;}$$
$$\mathfrak{m} \text{ es maximal} \Leftrightarrow A/\mathfrak{m} \text{ es un cuerpo.}$$

Proposición 1.2. *Si $I \neq A$, este está contenido en algún maximal.*

Definición 1.3. Un anillo con un único maximal se dirá *anillo local.*

Ejemplo 1.4. Mostremos algún ejemplo de lo anterior.

1. El conjunto $\{0\} \subseteq A$ es un ideal.

2. En $\mathbb{Z}$, (0) es un ideal primo.

3. $p\mathbb{Z}_n$, donde p es divisor primo de n es un ideal maximal de $\mathbb{Z}_n$.

4. Escojamos $\mathbb{Z}_9$, esto es $\mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Sus ideales maximales serán de la forma $p\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, en el cual el elemento p es un divisor de 9. Aquí, en este anillo, el ideal generado por (3) es el único ideal maximal.

5. Sea $A = h[x_1, ..., x_n]$ primo distinto de cero, entonces también es maximal.

Se denota $\mathscr{U}_A$ el conjunto de unidades (elementos con inversos) de A.

Proposición 1.5. *Sea $\mathfrak{m}$ maximal del anillo A. Entonces $1 + \mathfrak{m} \subset \mathscr{U}_A$ si y sólo si A es un anillo local.*

Observación 1.6. Recordemos que diremos que un anillo es un *dominio de integridad* si no tiene divisores de cero distintos de cero.

En consecuencia podemos ver que un ideal maximal es primo. Además diremos que el ideal cero es primo si y sólo si el anillo A es un dominio de integridad.

Si consideramos ahora $\mathfrak{p}$ un ideal primo en B y el homomorfismo de anillos $f\colon A \to B$; por cumplirse que $A/f^{-1}(\mathfrak{p})$ es isomorfo a un subanillo de $B/\mathfrak{p}$, con lo cual no tiene divisores de cero distintos de cero, tenemos que $f^{-1}(\mathfrak{p})$ será un ideal primo en A. En cambio, si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de B, $f^{-1}(\mathfrak{m})$ no tiene la necesidad de ser un maximal en A; lo que podemos garantizar es que es primo.

1.2. Operaciones con Ideales

En este apartado destacaremos cinco operaciones que podemos realizar con ideales. Supongamos dos ideales I, J de A:

1. Definimos el conjunto de todos los elementos $x + y$, en el cual $x \in I$ e $y \in J$ como la operación *suma* de $I + J$. Generalizando esto, podemos precisar la suma $\sum\limits_{i \in I} I_i$ sobre cualquier familia de ideales I_i pertenecientes a A, en el cual sus componentes son todas las sumas $\sum x_i$, en el cual $x_i \in I_i$ para todo $i \in I$ y las x_i son casi todas nulas. Asimismo podemos decir que la suma de ideales es el menor ideal que contiene todos los ideales I_i.

2. Definiremos el *producto* de dos ideales como el ideal IJ generado por los productos xy, donde como antes $x \in I$ e $y \in J$, tal que es el conjunto formado por las sumas finitas $\sum x_i y_i$ donde cada $x_i \in I$ y cada $y_i \in J$. Así mismo, podremos definir el producto de cualquier familia finita de ideales.

3. La *intersección* de una familia $(I_i)_{i \in I}$ de ideales es un ideal.

4. Precisaremos ahora, el *ideal cociente* de dos ideales será

$$(I : J) = \{x \in A : xJ \subseteq I\}$$

   que también es un ideal.

   Específicamente denominamos como el *anulador de* J al ideal $(0 : J)$, que lo indicaremos por $Ann(J)$. Denotado de esta forma, el conjunto de los divisores de cero en A es $D = \bigcup\limits_{x \neq 0} Ann(x)$.

5. Diremos finalmente que el *radical* de I es

$$r(I) = \{x \in A : x^n \in I \text{ para algún } n > 0\}.$$

Proposición 1.7. *Dado un ideal I, su radical es la intersección de los ideales primos que contienen al propio ideal I.*

1.3. Extensión y Contracción

Una cuestión de interés muy corriente en álgebra conmutativa es el comportamiento de ideales respecto a un homomorfismo de anillos. Sea $f : A \to B$ ese homomorfismo del que hablábamos. Si I es un ideal en A, el conjunto $f(I)$ no es necesariamente un ideal en B.

Definición 1.8. Si J es un ideal de B, entonces $f^{-1}(J) =: J \cap A$ es un ideal de A, que se denomina la *contracción* $f^{-1}(J) =: J \cap A$ de J.

Definición 1.9. Definimos la *extensión* IB de I como el ideal $Bf(I)$ generado por $f(I)$ en B: de manera más evidente se define IB como el conjunto de las sumas $\sum y_i f(x_i)$ donde $x_i \in I$, $y_i \in B$.

En el caso de que $\mathfrak{q}$ primo, entonces $\mathfrak{q} \cap A$ es primo. Además, si $\mathfrak{p}$ primo $\not\Rightarrow$ $\mathfrak{p}B$ primo.

Definición 1.10. Definimos los siguientes conjuntos:

1. E : { ideales de B extendidos de alguno de A }.

2. C : { ideales de A contraídos de alguno de B }.

Existen dos problemas generales. Por un lado estudiar las clases de E, C, y por otro lado saber el comportamiento de los primos.

Vamos a dar algunos criterios formales que dan solución parcial a los problemas planteados. En cada caso concreto, dicha solución se completa.

Un homomorfismo $f : A \to B$ se descompone en una parte suprayectiva $f : A \to f(A)$, para la cual el problema está resuelto, seguida de un inyectiva: $i : f(A) \to B$. En este caso el problema es más complicado , en general.

El comportamiento de los ideales en las extensiones de $\mathbb{Z}$ al anillo de enteros de un cuerpo es uno de los problemas centrales de Teoría de Números Algebraicos.

Proposición 1.11. *Sea $f : A \to B$ homomorfismo de anillos y la conexión de Galois antes definida. Se tiene:*

i) 1. $J \cap A = (J \cap A)B \cap A$.

   2. $IB = (IB \cap A)B$.

ii) Las aplicaciones $C \xrightarrow{(-)B} E$ *y* $E \xrightarrow{(-)\cap A} C$ *son inversas.*

Demostración. Por las propiedades formales de una conexión de Galois se cumple la primera propiedad.

Para ver la segunda, también se trata de una conexión de Galois. Respecto de los primos se tiene un encaje: $primosE \xrightarrow{(-)\cap A} primosC$ (son los primos extendidos y contraídos).

Es biyectiva si y sólo si: para todo primo $\mathfrak{p} \in primoC$, $\mathfrak{p}B$ es primo. $\square$

1.4. Módulos y Homomorfismos de Módulos

Un A-módulo M puede considerarse como una representación $A \to End(M)$, del anillo A por endomorfismos. Los módulos son representaciones de anillos y sirven para poder estudiarlos. La noción de módulo surgen como una generalización de los conjuntos de k-álgebra vectorial, $\mathbb{Z}$-módulo (Geometría Algebraica) e ideal de un anillo A, y como marco adecuado para el desarrollo de los métodos del Álgebra Homológica.

El álgebra conmutativa moderna utiliza cada vez más los módulos en lugar de los ideales, puesto que en este nivel más formal, muchas nociones y resultados relativos a anillos e ideales adquieren una forma más simple y manejable. A parte que se pueden aprovechar por el álgebra conmutativa los métodos homológicos y demás instrumentos de la teoría de módulos.

1.5. Suma y producto directos

Sea $(M_i)_{i\in S}$ una familia de módulos, su producto directo $\prod_{i\in I} M_i$ es otro módulo que está caracterizado por la propiedad universal final.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "p_i"] & M_i \\
M \arrow[u, "\exists^{\cdot} f"] \arrow[ur, "i"] &
\end{tikzcd}$$

La suma directa $\oplus M_i$ está caracterizada por una propiedad universal inicial. En el caso finito coinciden.

Sean $N_1, ..., N_n$ submódulos de M. Se tiene un homomorfismo $h : \otimes_A N_i \to M$ cuya imagen es $\sum_{i=1}^n N_i$.

Si el homomorfismo anterior h es isomorfismo se dirá que M es suma directa de los $N_i : M = \oplus_{i=1} N_i$.

h es inyectiva si y sólo si $N_i \cap (N_1, ..., N_{i-1}) = 0$, $\forall i$. Si $A = \prod_{i=1}^n A_i$ y I_i es la inclusión de A_i en A, entonces $A \cong \prod_{i=1}^n I_i$. Recíprocamente, si $A = \otimes_{i=1}^n I_i$, tenemos que $A \cong \prod_{i=1}^n A/J_i$, cuando $J_i = \otimes_{j\neq i} I_j$.

1.6. Módulos Finitamente Generados

Definición 1.12. Diremos que un A-módulo M es de *generación finita* si posee un conjunto finito de generadores; *i.e.* cada componente de M la podemos expresar como una combinación lineal finita, con coeficientes en A.

Definición 1.13. Llamaremos un A-módulo *libre* a un A-módulo que tiene una base, i.e., isomorfo a uno de estructura $\bigoplus_I A$. Si además le incluimos que el A-módulo sea de generación finita, entonces éste será isomorfo a $A \oplus ... \oplus A$ (n elementos).

Corolario 1.14. *Sea I un ideal de A y sea un A-módulo M con generación finita de tal forma que $IM = M$. Entonces existe $x \equiv 1(modI)$ tal que $xM = 0$.*

Proposición 1.15 (Lema de Nakayama). *[1] Sea I un ideal de A contenido en cada maximal de A y M un A-módulo con generación finita. En este caso, si $IM = M$, entonces $M = 0$.*

La condición de finitud puede demostrar algunos resultados bastante útiles.

Proposición 1.16. *Sea I un ideal de A y M un A-módulo finitamente generado. Si $\varphi : M \to M$ es tal que $\varphi(M) \subset IM$ entonces satisface la siguiente ecuación:*

$$\varphi^n + a\varphi^{n-1} + ... + a_n = 0, \text{ con } a_i \in I.$$

Demostración. Sea $M = (x_1, ..., x_n)$ un conjunto de generadores de M. Entonces $\varphi(x_i) \in IM_i$, así $\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, con $a_j \in I$.

Luego $\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}\varphi - a_{ij})x_j = 0$, para $i = 1, ..., n$. De tal manera que los elementos (a_{ij}) son de la forma: $(a_{ij}) = (\delta_{ij}\varphi - a_{ij}) \in M_n(A[\varphi])$, con $S = A[\varphi] \subset End(_AM)$.

Así se tiene que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, con $a_{ij} \in S$ y $x_j \in {}_AM_S$, es decir:

$$c \cdot (x1 \cdots x_n)^t = 0, \; (x_1 \cdots x_n) \in M^n.$$

Pero $\bar{c} \cdot c = det(c) \cdot \Delta$ (matriz identidad). Así nos quedaría: $det(c) \cdot \Delta \cdot (x_1 \cdots x_n)^t = 0$, lo cual quiere decir que: $det(c) \cdot M = 0$, y así $0 = det(c) \in S \subset End(_AM)$.

□

Definición 1.17. Una sucesión exacta de A-módulos es una sucesión de A-módulos y A-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots,$$

tal que $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$, para todo $i = 1...n$.

1) $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ es exacta $\Leftrightarrow f$ es inyectiva.

2) $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es exacta $\Leftrightarrow g$ es suprayectiva.

Definición 1.18. Una sucesión *exacta corta* es una sucesión exacta $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$, i.e., f es inyectiva, g sobreyectiva y $M/f(M') \cong M''$.

1.7. Producto Tensorial de Módulos

Definición 1.19. Sean M, N, P tres A-módulos. Si se cumple, que para cada componente $x \in M$ la aplicación $y \mapsto f(x, y)$ de N en P es A-lineal, y análogamente para cada elemento $y \in N$ la aplicación $x \mapsto f(x, y)$ de M en P es A-lineal, entonces diremos que la aplicación $f \colon M \times N \to P$ es *A-bilineal*.

Construiremos un A-módulo denominado *producto tensorial* de M por N, y que en este caso denotaremos por $M \otimes_A N$, y el cual tendrá la propiedad de que linealiza las aplicaciones bilineales. De manera más concreta:

Proposición 1.20 (Construcción producto tensorial)**.** *Sean M, N, dos A-módulos. Tenemos entonces que existe un par $(M \otimes_A N, g)$ formado por $g : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ una aplicación A-bilineal, siendo $M \otimes_A N$ un A-módulo, en donde se cumple la siguiente propiedad:*

Existe una única aplicación A-lineal $h : M \otimes_A N \longrightarrow P$ cumpliendo que $f = h \circ g$, para cualquier aplicación A-bilineal $f : M \times N \longrightarrow P$ y cada A-módulo P (es decir, cada función bilineal sobre $M \times N$ se factoriza a través de $M \otimes_A N$).

Proposición 1.21. *Sea I un ideal de un anillo, con M un A-módulo. Entonces $(A/I) \otimes_A M$ es isomorfo a M/IM.*

Demostración. Supongamos que tenemos la sucesión exacta

$$I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} A/I \to 0.$$

Si ahora la tensorizamos obtenemos

$$I \otimes_A M \xrightarrow{i \otimes 1} A \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes 1} (A/I) \otimes_A M \to 0,$$

lo cual induce un isomorfismo entre $(A/I) \otimes_A M$ y el conúcleo de $i \otimes 1$, el cual sería $(A \otimes_A M)/(I \otimes_A M) \simeq X/IM$, ya que si tenemos un ideal cualquiera demostramos que $I \otimes_A M \simeq IM$. De ahí es donde obtenemos $(A/I) \otimes_A M \simeq M/IM$, como queríamos ver. $\square$

Proposición 1.22. *Dado un anillo local A, M e N A-módulos con generación finita. Tenemos que, si $M \otimes Y = 0$, entonces $M = 0$ o $N = 0$.*

Demostración. Sea I el ideal maximal de A, $k = A/IA$ el cuerpo residual. Sea también $M_k = k \otimes_A M \simeq M/IM$, por la proposición anterior. La condición $M \otimes_A N = 0$ implica que $(M \otimes_A N)_k = 0$, de ahí que $M_k \otimes_A N_k = (M \otimes_A N)_k \otimes_A k = 0$. Pero M_k y N_k son espacios vectoriales sobre un cuerpo k, de donde $dim(M_k \otimes_A N_k) = dim_k(M_k) dim_k(N_k)$, de ahí que $M_k \otimes_A N_k = 0$ implique que $M_k = 0$ o $N_k = 0$. Supongamos sin perdida de generalidad que fuese cierto. Entonces dado que I es el único ideal maximal , coincidirá con el radical de Jacobson de A, por lo tanto $M/IM = M_k = 0$ implica que $M = IM$, y, por el lema de Nakayama, esto implica que $M = 0$. □

Restricción y extensión de escalares

Sean N un B-módulo y un homomorfismo de anillos $f : A \to B$, (de esto deducimos que N tiene una estructura de A-módulo que se define de la siguiente manera: si $a \in A$ e $y \in N$, entonces ay está definido por $f(a)y$. Se dice entonces que este A-módulo se ha obtenido de N mediante *restricción de escalares*. De este modo, el homomorfismo definido anteriormente define así una estructura de A-módulo en B). Entonces N es A-módulo de forma obvia.

Por otro lado, sea un A-módulo M. Podemos crear el A-módulo $M_B = B \otimes_A X$. De hecho, M_B tiene estructura de B-módulo tal que $b(b' \otimes x) = bb' \otimes x$ para todo $b, b' \in B$ y todo $x \in M$. Diremos entonces que el B-módulo M_B lo hemos obtenido de M por *extensión de escalares.*

Proposición 1.23. *Sea el módulo N de generación finita como B-módulo y B también siendo de generación finita como A-módulo, entonces concluimos que N es de generación finita como A-módulo.*

Proposición 1.24. *Si M es un módulo de generación finita como un A-módulo, tenemos entonces que M_B es de generación finita como B-módulo.*

1.8. Isomorfismo de adjunción Tensor-Hom

Proposición 1.25. *Supongamos $\sum x_i \otimes y_i = 0$ en $M \otimes_A N$. Entonces existen submódulos finitamente generados $M_0 \subset M$, $N_0 \subset N$ tales que*

$$\sum x_i \otimes y_i = 0 \text{ en } M_0 \otimes_A N_0.$$

Definición 1.26. Un *bimódulo* ${}_AM_B$ es un A-módulo y un B-módulo M tal que se cumple $(ax)b = a(xb)$, para todo $x \in M$; $a \in A$ y $b \in B$.

Proposición 1.27. *Se tienen las siguientes propiedades:*

i) $(M_A, {}_AN_B) \implies (M \otimes_A N)_B$.

ii) $({}_BM_A, {}_AN) \implies {}_B(M \otimes_A N)$.

Proposición 1.28. *Para M_A, $_AN_B$ se tiene $(M \otimes_A N)_B$, en particular para un homomorfismo de anillos $A \to B$ y un B-módulo N se tiene $_AN_B$, y para un A-módulo M se tiene $(M \otimes_A B)_B$.*

Proposición 1.29. *Sean A, B anillos, M un A-módulo, N un (A, B)-bimódulo y P un B-módulo. Entonces $(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$.*

Proposición 1.30. *Se tiene así el isomorfismo de adjunción $\otimes - Hom$. Para $_BM_A,_A N_C,_B P_C$ se tiene:*

$$Hom_B(_CM \otimes_A N, P) \cong Hom_A(_CM, Hom_B(N, P)).$$

Proposición 1.31. *En consecuencia de la propiedad de adjunción se tiene:*

i) $M \otimes_A (\oplus_{i\in I} N_i) = \oplus_{i\in I} M \otimes_A N_i$.

ii) *Sea $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos y homomorfismos, y sea N un A-módulo cualquiera. Entonces la sucesión*

$$M' \otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M'' \otimes N \to 0$$

es exacta.

Definición 1.32. Se dice que $- \otimes_A N$ es exacta a la derecha. Si es exacta se dice que N es *plano*.

Proposición 1.33. *Para un A-módulo N, las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) *N es plano .*

ii) *Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta cualquiera de A-módulos, la sucesión tensorizada $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ es exacta.*

iii) *Si $f : M' \to M$ es inyectiva, entonces $f \otimes 1 : M' \otimes N \to N \otimes N$ es inyectiva.*

iv) *Si $f : M' \to M$ es inyectiva y M, M' son de generación finita, entonces $f \otimes 1 : M' \otimes N \to M \otimes N$ es inyectiva.*

Capítulo 2

Localización

La construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$, se puede generalizar para un dominio entero A. Nosotros tenemos interés en la Teoría de Números Algebraicos.

La imagen algebraica del proceso geométrico de localización de V en P es la localización de A en P. Uno y otro son ejemplos de formación de fracciones.

Se va a describir el proceso de localización y a deducir sus propiedades, para lo cual se hace preciso plantearlo a módulos.

Construcción del anillo de fracciones

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$; $\frac{a}{s}$, con $a, s \in \mathbb{Z}$, siendo s distinto de cero y una unidad en $\mathbb{Q}$, o lo que es lo mismo, $s^{-1} = \frac{1}{s}$.

$\mathbb{Q}$ es la menor extensión de $\mathbb{Z}$ en la que todo entero distinto de cero tiene inverso. Generalizando esto, tomamos cualquier anillo A y tratemos de construir un anillo y un homomorfismo de A en ese anillo que transforme ciertos elementos, que en A no tienen porque ser unidades, en unidades, de la mejor forma posible. Estos elementos pertenecen a una parte multiplicativa S de A.

Definición 2.1. Diremos que un subconjunto S de un anillo A es *multiplicativo* si se cumple que $1 \in S$ y S es cerrado respecto a la multiplicación, es decir: $x, y \in S \implies x \cdot y \in S$.
En $A \times S$ se define $(a, s) \sim (b, t)$ si existe $u \in S$ cumpliendo que $(at - bs)u = 0$. Es de equivalencia, y se denota por $S^{-1}A = \frac{A \times S}{\sim}$, y $\frac{a}{s}$ siendo la clase de (a, s).

Por operaciones naturales, $S^{-1}A$ tiene estructura de anillo: anillo de fracciones de A respecto de S. Se define así un homomorfismo

$$\phi : A \to S^{-1}A : a \to \frac{a}{1} = \phi(a) : s \in S \implies \phi(S) \text{ unidad.}$$

Se define pues una relación $\equiv$ en $A \times S$ como:

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow (at - bs)u = 0 \text{ para algún } u \in S,$$

cuyo conjunto cociente se denomina $S^{-1}A$. Es fácil ver que es un anillo con las operaciones $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$; $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$, lo cual se llama *localización a anillo de fracciones* de A en S.

Proposición 2.2 (Propiedad Universal)**.** *Sea un homomorfismo de anillos $g\colon A \to B$ tal que $g(s)$ cumple que es una unidad en B para todo $s \in S$. Por lo tanto existirá un único homomorfismo de anillos $h\colon S^{-1}A \to B$ tal que $g = h \circ f$, donde $f : A \to S^{-1}A$ denota el homomorfismo canónico $f(a) = \frac{a}{1}$.*

Demostración. Demostraremos entonces por un lado la unicidad del homomorfismo y por otro lado su existencia.

1. *Unicidad.* Si el homomorfismo h cumple las condiciones descritas anteriormente, entonces $h(a/1) = hf(a) = g(a)$ para todo elemento$a \in A$; por lo que, si $s \in S$ tenemos que $h(1/s) = h((s/1)^{-1}) = h(s/1)^{-1} = g(s)^{-1}$, y entonces se cumple que $h(a/s) = h(a/1)h(1/s) = g(a)g(s)^1$, de modo que h está determinada unívocamente por g.

2. *Existencia.* Definamos $h(a/s) = g(a)g(s)^1$. Entonces h será de forma evidente un homomorfismo de anillos siempre y cuando esté bien definido. Supongamos pues que $a/s = a'/s'$; entonces sabemos que existe un elemento $t \in S$ tal que $(as' - a's)t = 0$, por lo tanto

$$(g(a)g(s') - g(a')g(s))g(t) = 0;$$

   ya que por hipótesis $g(t)$ es una unidad en B; en conclusión se tiene que $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$.

□

Observación 2.3. Tengamos en cuenta que:

a) $Ker(A \to S^{-1}A) = \bigcup_{s \in S} Ann(S)$.

b) $\mathscr{U}_{S^{-1}A} \supset f(S \cup \mathscr{U}_A)$.

Proposición 2.4. *Sea S un subconjunto de un anillo A. Entonces se cumple que:*

$$f(S) \subset \mathscr{U}_{S^{-1}A} \text{ y } g(S) \subset \mathscr{U}_B \implies \text{existe una única aplicación } h \text{ tal que } hf = g.$$

Proposición 2.5. *Para un par (B,g) y el homomorfismo $f : A \to B$ son equivalentes:*

i) $(B,g) \cong (S^{-1}A, f)$.

ii) 1. $g(S) \subset \mathscr{U}_B$.

2. $g(a) = 0 \implies \exists s \in S$ *tal que* $as = 0$.

3. *Para todo* $x \in B$, $x = g(a)g(s)^{-1}$.

iii) (B,g) *universal inicial para* $gS \subset \mathscr{U}_B$.

Sea (B,g) un anillo de fracciones de A respecto de S. Un módulo sería $(S^{-1}A, f)$. Cualquier otro es isomorfo.

Casos particulares

1. A entero. Entonces $A \to S^{-1}A$ inyectiva y $S = A - \{0\}$ multiplicativo. $S^{-1}A$ es un cuerpo: el cuerpo de fracciones de A: K_A. En el caso de que $S \subset A$, tenemos que $A \to S^{-1}A \to K_A$. Por ejemplo: $\mathbb{Q} = K_{\mathbb{Z}}$.

2. $\mathfrak{p}$ primo si y sólo si $\mathfrak{p}$ ideal, $A - \mathfrak{p} = S$ multiplicativo. $S^{-1}A \equiv A_{\mathfrak{p}}$ denominada localización de A en $\mathfrak{p}$.

   Si A entero: 0 primo luego $K_A = A_0$.

Proposición 2.6. *$A_{\mathfrak{p}}$ es local. Si A local entonces $S^{-1}A$ local, y si $\mathfrak{m}$ es maximal de A tenemos que $A_{\mathfrak{m}} \cong A$. Los anillos locales son el resultado del proceso de localización de anillos por primos.*

A continuación, veamos unos ejemplos que nos ayudarán a visualizar lo visto anteriormente.

Ejemplo 2.7. Primeramente veamos que si $\mathfrak{p}$ es un ideal en A, $\mathfrak{p}$ es primo si y sólo si $S = A - \mathfrak{p}$ es multiplicativo.

Para la implicación hacia la izquierda si $S = A - \mathfrak{p}$, tenemos que $1 \in S$, con lo que sabemos que $1 \notin \mathfrak{p}$; por lo cual $\mathfrak{p} \neq A$. También, si

$$x, y \notin \mathfrak{p} \implies x, y \in S \implies xy \in S \implies xy \notin \mathfrak{p}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{p}$ es primo.

Para la implicación hacia la derecha, supongamos que $\mathfrak{p}$ es primo. Sabemos que $1 \notin \mathfrak{p} \implies 1 \in S$. También, si $x, y \in S \implies x, y \notin \mathfrak{p} \implies xy \notin \mathfrak{p} \implies xy \in S$. Entonces S es multiplicativo. Sea ahora S el suplemento de un ideal primo $\mathfrak{p}$. Hemos visto que S es multiplicativo. Por lo tanto en este punto escribimos $A_\mathfrak{p}$ en lugar de $S^{-1}A$. Veamos pues que los elementos a/s con $a \in \mathfrak{p}$ forman un ideal J en $A_\mathfrak{p}$.

Efectivamente, $J \subseteq A_\mathfrak{p}$. Veamos ahora que $A_\mathfrak{p}J \subseteq$, lo cual quiere decir que si $x \in A_\mathfrak{p}J \implies x = yz$, con $y \in A_\mathfrak{p}J$, siendo de la forma a/s y z; $z \in J$ de la forma $b/t \implies yz = ab/st \in A_\mathfrak{p}$ (esto es puesto que $\mathfrak{p}$ es un ideal en A y S multiplicativo). Luego J efectivamente es un ideal en $A_\mathfrak{p}$.

Sean ahora $\mathfrak{p}, J, S$ como los definimos anteriormente. Si $b/t \notin J$, entonces tenemos que $b \notin \mathfrak{p}$, por lo tanto $b \in S$ y en conclusión b/t es una unidad en $A_\mathfrak{p}$. De esto se deduce que $\mathfrak{p}$ es un ideal en $A_\mathfrak{p}$ y $I \subseteq J$, $\mathfrak{p}$ contiene una unidad (ya que existe $b/t \in \mathfrak{p}$ de tal forma que $b/t \notin J$) y por consiguiente es todo el anillo. En conclusión J es el único ideal maximal en A_I.

Ejemplo 2.8. $S^{-1}A$ es el anillo cero sí y solo sí $0 \in S$.

Efectivamente, sea el anillo cero $S^{-1}A$, dado un elemento $s \in S$ tenemos que $1/s = 0/1$, en consecuencia existirá un $u \in S$ cumpliendo que $u1 = 0$. A raíz de esto, $0 \in S$. Recíprocamente, sea $0 \in S$. En el caso de que $a/s \in S^{-1}A$, ya que $0 \in S, a/s = 0/1$ (porque $a0 = 0$), y en conclusión $S^{-1}A$ es el anillo cero.

Ejemplo 2.9. Sea $f \in A$ y sea $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$.En este caso A_f representa $S^{-1}A$. Veamos que $A_f = A[1/f]$.

" $\supset$ " $A_f = S^{-1}A = \{\frac{a}{f^n}, a \in A, n \geq 0\} \supset A[1/f]$.

" $\subset$ " $A[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, con $a_i \in A, n \geq 0$. Por lo tanto $A[1/f] = \{a_0 + \frac{a_1}{f} + \frac{a_2}{f^2} + ... + \frac{a^n}{f^n}$, con $a_i \in A, n \geq 0\}$. Y podemos ver que el término $\frac{a}{f^n}$ pertenece a $A[1/f]$.

Ejemplo 2.10. Sea ahora un I, ideal de A, y sea $S = 1 + I$, definido como el conjunto de todos los $1 + x$ en el cual $x \in I$. Es evidente que S es multiplicativo. Evidentemente, como I es un ideal, tenemos que $0 \in I$, por consiguiente $1 \in S$.

Sean ahora dos ideales $a, b \in S$, por lo tanto: $a = 1 + x, b = 1 + y$, con $x, y \in I$, lo cual implica que $ab = 1 + (x + y + xy)$. Como I es un ideal, $x + y + xy \in I$. Así, llegamos a la conclusión de que $a, b \in 1 + I = S$.

Para la construcción de $S^{-1}A$ la podemos crear con un A-módulo M en lugar de un anillo A. Definiremos así la relación $\sim$ en $M \times S$ de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow \exists t \in S \text{ tal que } t(ba' - b'a) = 0,$$

que es una relación de equivalencia. Indicamos por a/b la clase de equivalencia del par (a,b), el conjunto cociente lo denotamos por $S^{-1}M$, y convertimos $S^{-1}M$ en un $S^{-1}A$-módulo con las definiciones de adición y multiplicación escalar. Escribiremos $M_{\mathfrak{p}}$ en lugar de $S^{-1}M$ si $S = A - \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ primo).

Proposición 2.11. *Sea un A-módulo M. Entonces tenemos que los $S^{-1}M$ módulos $S^{-1}A$ y $S^{-1}A \otimes_A M$ son isomorfos; es decir, existe un isomorfismo único f tal que*

$$f((a/s) \otimes m) = am/s \text{ donde } a \in A, m \in M, s \in S.$$

Demostración. Tenemos que la aplicación $S^{-1}A \times S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M$ definida tal que

$$(a/s, m) \mapsto am/s$$

es A-bilineal, y gracias a la propiedad universal 1.20 del producto tensorial induce un A-homomorfismo definido por

$$f : S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M,$$

satisfaciendo lo visto en el enunciado.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & S^{-1}M \arrow[dl, "h"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Se tiene que $h(\frac{x}{s}) = \frac{g(x)}{s}$ es $S^{-1}M$ y además $h(1 \otimes x) = g(x)$ es $S^{-1}A \otimes M$, verificando las propiedades universales. Por lo tanto la unicidad de las construcciones universales da el isomorfismo.

Sea ahora un elemento cualquiera definido como $\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i$ perteneciente a $S^{-1}A \otimes M$. Si s es de la forma $s = \prod_i s_i \in S, t_i = \prod_{j \neq i} s_j$, tendremos que

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes m = \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m = \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m,$$

de este modo cada elemento de $S^{-1}A \otimes M$ es de la forma $1/s \otimes m$. Considérese que $f((1/s) \otimes m) = 0$. Por lo tanto $m/s = 0$, entonces $tm = 0$ para algún $t \in S$, y así

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0.$$

Por lo tanto f es inyectiva y en consecuencia es un isomorfismo.

$\square$

Corolario 2.12. *Sea S^{-1} localización de un anillo A, entonces se cumple que:* $S^{-1}(A[x]) = (S^{-1})[x]$.

Proposición 2.13. *La operación S^{-1} para A-módulos es lo que se llama un funtor exacto, i.e., si $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es exacta en M, entonces $S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ es exacta en $S^{-1}M$. En consecuencia $A \to S^{-1}A$ es un homomorfismo plano.*

Demostración. Veamos la doble inclusión:

" $\subset$ " Tenemos que $g \circ f = 0$, por lo cual $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(0)$, entonces obtenemos que $Im(S^{-1}f) \subseteq Ker(S^{-1}g)$.

" $\supset$ " Si $a/b \in Ker(S^{-1}g)$, tenemos que $g(a)/b = 0$ en $S^{-1}M''$, en consiguiente existe un $t \in S$ cumpliendo que $tg(a) = 0$ en M''.
Pero $tg(a) = g(ta)$ ya que la aplicación g es un homomorfismo de A-módulos, entonces $tm \in Ker(g) = Im(f)$ y por lo tanto $ta = f(a')$ con algún $a' \in M'$. Por lo tanto en $S^{-1}M$ tenemos que $a/b = f(a')/bt = (S^{-1}f)(a'/st) \in Im(S^{-1}f)$. En consecuencia $Ker(S^{-1}g) \subseteq Im(S^{-1}f)$.

□

Proposición 2.14. *Dado un anillo A, sean dos conjuntos multiplicativos S y T de A, y además sea U la imagen de T en $S^{-1}A$, entonces los anillos $(ST)^{-1}A$ y $U^{-1}(S^{-1}A)$ son isomorfos.*

Demostración. Supongamos que tenemos dos conjuntos multiplicativos S, T del anillo A, sea la aplicación $f : A \to S^{-1}A$ y sea $U = f(t)$. Notemos que el producto ST es un subconjunto multiplicativo de A y sea ahora la aplicación $g : A \to (ST)^{-1}A$. Ya que $g(s) = s/1$ es una unidad en $(ST)^{-1}A$ para todo $s \in S$, g tendrá una única aplicación $h : S^{-1}A \to (ST)^{-1}A$ cumpliendo que $h \circ f = g$ por la Propiedad Universal.

Si $u = f(t)$ está en la imagen $U = f(T)$, entonces $h(u) = h(f(t)) = g(t) = t/1$ es una unidad en $(ST)^{-1}A$. Si además $0 = h(a/s) = g(a)g(s)^{-1} = a/s$ en $(ST)^{-1}A$, luego hay elementos s_0, t_0 en S, T cumpliendo que $s_0t_0a = 0$ en A. De este modo

$$0 = \tfrac{1}{s_0} \cdot f(s_0t_oa) = f(t_0)\tfrac{a}{1}$$

en $S^{-1}A$.

Finalmente, para cada elemento $\frac{a}{st} \in (ST)^{-1}A$,

$$\tfrac{a}{st} = g(a)g(st)^{-1} = (g(a)g(s)^{-1})g(t)^{-1} = h(a/s)h(f(t)^{-1}.$$

Así, vemos que existe un isomorfismo $h : U^{-1}(S^{-1}A) \to (ST)^{-1}A$. □

Proposición 2.15. *El conjunto denotado por S_0 es un subconjunto multiplicativo saturado de un anillo A y está formado por todos los no divisores de cero en ese anillo. Por lo tanto el conjunto formado por los divisores de cero en A que llamaremos D es una unión de ideales primos. Entonces cada ideal primo minimal de A está contenido en D.*

Denominaremos a $S_0^{-1}A$ como el anillo total de fracciones de A. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i) S_0 es el mayor subconjunto multiplicativo de A tal que el homomorfismo $A \to S_0^{-1}A$ es inyectivo.

ii) El anillo $S_0^{-1}A$ es igual a cada anillo en el que cada no unidad es un divisor de cero (o lo que es lo mismo, $A \to S_0^{-1}A$ es biyectiva).

iii) Cada elemento en $S_0^{-1}A$ eso una unidad o divisor de cero .

Demostración. Veamos primero que cada ideal primo minimal de A está contenido en D. Sabemos que si un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A es minimal entonces $S = A - \mathfrak{p}$ es un subconjunto maximal saturado multiplicativo de A que no contiene a 0; de esto se sigue que el complemento S en A de cualquier unión de ideales primos, en concreto $A - \mathfrak{p} = S \supset A - D$; y así $\mathfrak{p} \subseteq D$.

i) Cualquier conjunto $S'_0 \supset S_0$ contiene al menos un divisor de cero a (sea $ax = 0$, con $X \neq 0$). Tenemos que $x/1 = (xa)/a = 0$, pero $x \neq 0$, de ahí que el homomorfismo $A \to S_0'^{-1}$ es inyectivo.

ii) El homomorfismo $f : A \to S_0^{-1}A$ es inyectivo por lo anterior. Dado cualquier elemento $a/s \in S_0^{-1}A$ el denominador s no es un divisor de cero, de ahí que debe ser una unidad. Si $ss' = 1 \implies a/s = as'/1 = f(as')$, de donde se saca que f también es subyectiva.

iii) Un elemento de $S_0^{-1}A$ es de la forma a/s, donde $a \in A$ y s no es divisor de cero. Vemos que si a es un divisor de cero, así también lo es a/s, y por otro lado a/s es una unidad. De ahí, cada elemento en $S_0^{-1}A$ es una unidad o un divisor de cero.

□

2.1. Comportamiento de los ideales en localización

Ampliemos en este momento el concepto de extensión y contracción ya vistos anteriormente, pero ahora en el caso de ideales en anillos fraccionarios.

Supongamos que tenemos un anillo A acompañado de un subconjunto S multiplicativo de A y un homomorfismo $f : A \mapsto S^{-1}A$ definido como $f(a) = a/1$. Sea ahora C definido como el conjunto de los ideales contraídos en A y sea también E denotado como el conjunto de los ideales extendidos en $S^{-1}A$.

Proposición 2.16. *La aplicación $S^{-1}A : I(A) \to I(S^{-1}A)$ que lleva los ideales I en $S^{-1}I = IB$ conmuta con la formación de sumas, intersecciones finitas productos y radicales.*

Teorema 2.17. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

i) $E = I(S^{-1}A)$.

ii) *En A, si I es un ideal, se cumple que $(S^{-1}I) \cap A = \cup_{s\in S}(I : s)$. Luego $(S^{-1}I) \cap A = (1)$ si y sólo si el ideal I corta a S.*

iii) *$I \in C$ si y sólo si $s \in S$ es divisor de cero módulo I.*

iv) *$\mathfrak{p}$ es primo contraído si y sólo si $\mathfrak{p}$ primo y además $\mathfrak{p}$ no corta a S.*

v) *Si $\mathfrak{p}$ es primo contraído entonces $\mathfrak{p}B$ es primo extendido.*

Demostración. i) Sea J un ideal de $S^{-1}A$ y $\frac{x}{x} \in J$. Así se tiene que $\frac{x}{1} \in J$ y $x \in JB$. Por lo tanto $\frac{x}{s} \in S^{-1}J \cap A = (J \cap A)B$. Se sigue que $J = (J \cap A)B$.

ii) Sea I un ideal de A, entonces $x \in \mathrm{I}B \cap A = (S^{-1}I) \cap A$ si y sólo si $\exists s \in S$, $\exists a \in I$ tal que $\frac{x}{1} = \frac{a}{s} \iff \exists s, t \in S$, $a \in I$ cumpliendo que $xst = at \iff \exists s \in S$, $\exists a \in I$, $xs = a$ si y sólo si $x \in \cup_{s\in S}(I : s)$

Además: $IB = S^{-1}A$ si y sólo si $A = \cup_{s\in S}(I : s) \iff \exists s \in S$, $(I : s) = A$ si y sólo si existe un elemento $s \in S$ tal que $s \in I \iff I \cap S \neq \emptyset$.

iii) $I \in C \iff \cup_{s\in S}(I : s) \subset I$ si y sólo si $\forall s \in S$ se tiene que $(I : s) \subset I \iff$ para todo $s \in S(xs \in I \implies x \in I)$ si y sólo si $\forall s \in S$, S no es divisor de cero módulo I.

iv) $\mathfrak{p} \in primosC$ si y sólo si $A/\mathfrak{p}$ entero, $\forall s \in S$, s no es divisor de cero en $A/\mathfrak{p} \iff \mathfrak{p}$ primo para todo $s \in S$, s no es cero en $A/\mathfrak{p}$ si y sólo si $\mathfrak{p}$ primo y $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

v) Sea $\mathfrak{p} \in primosC$, por el apartado anterior se tiene que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, y por el segundo apartado tenemos que $\mathfrak{p}B \neq S^{-1}A$. Además $S^{-1}A/\mathfrak{p}B \cong S^{-1}(A/\mathfrak{p})$ subanillo del cuerpo de fracciones del dominio $A/\mathfrak{p}$.

□

Corolario 2.18. *Tenemos los siguientes casos:*

i) Los primos de $S^{-1}A$ están en correspondencia biyectiva con los primos de A que no cortan a S.

ii) Si $\mathfrak{p}$ es primo de A, los primos del anillo local $A_\mathfrak{p}$ están en correspondencia biyectiva con los primos de A contraídos a $\mathfrak{p}$.

Observación 2.19. El paso de A a A_I suprime todos los ideales primos salvo los contenidos en I, en el otro sentido el paso de A a A/I descarta todos los ideales primos menos aquellos que contienen I. Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ son ideales primos cumpliendo que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$, entonces localizando con respecto a $\mathfrak{p}$ y eligiendo como cociente $\bmod \mathfrak{q}$, restringiendo a aquellos primos que están entre $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$.

Corolario 2.20. *Sea $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ primos de A. Entonces los primos de $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} = (A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}$ son biyectivos con los primos de A entre $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$.*

Definición 2.21. En el caso particular, donde $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, obtenemos un cuerpo denominado *cuerpo residual en* $\mathfrak{p}$, que se obtiene como cuerpo residual del anillo $A_\mathfrak{p}$ o como cuerpo de fracciones del dominio de integridad $A/\mathfrak{p}$. Se denota $k(\mathfrak{p})$. $k(0) = k(A)$ es el anillo de fracciones del dominio A.

Demostración. Comprobemos la doble implicación:

($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Supongamos $\mathfrak{p} \in primosC$. Entonces $\mathfrak{p}B \cap A = \mathfrak{p}$. Sea $S = f(A - \mathfrak{p})$ multiplicativo de B. Además $(\mathfrak{p}B) \cap S = \emptyset$.

Si $(\mathfrak{p}B) \cap S \neq \emptyset$ entonces $\mathfrak{p} \cap f^{-1}f(A - \mathfrak{p}) \neq \emptyset$, por lo que existe un $a \in \mathfrak{p}$ tal que $f(a) \in f(A - \mathfrak{p})$, es decir, $f(a) = f(s)$, con $s \notin \mathfrak{p}$. Así $a - s \in ker(f) \subset \mathfrak{p}$ y $s \in \mathfrak{p}$, lo cual no puede ser.

Se sigue que $S^{-1}(\mathfrak{p}B) \neq S^{-1}B$. Sea $\mathfrak{m}$ maximal contraído a $S^{-1}(\mathfrak{p}B)$ y $\mathfrak{q}$ su contracción en B. Así $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}B$, por lo que $\mathfrak{q} \cap A \supset \mathfrak{p}$. También se tiene que $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ por lo que $\mathfrak{q} \cap A \subset \mathfrak{p}$.

□

Proposición 2.22. *Sea M un A-módulo de generación finita, un subconjunto S multiplicativo de A. Entonces tenemos que $S^{-1}(Ann(M)) = Ann(S^{-1}M)$.*

Proposición 2.23. *Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Entonces el ideal primo $\mathfrak{p} \in primosC$ si y sólo si es contracción de un ideal primo de B.*

Definición 2.24. Sea V una variedad algebraica afín irreducible de un ideal primo $\mathfrak{p} \subset k[x_1, ..., x_n]$. En este caso $k(\mathfrak{p}) =: k[V]$ es el *cuerpo de fracciones racionales de* V. Contiene a todos los anillos locales de V en sus puntos $p \in V$, definidos aquellos como $\theta_p(V) := \frac{k[x]_\mathfrak{m}}{\mathfrak{p}k[x]_\mathfrak{m}} = k[V]_\mathfrak{m}$. Los primos de $\theta_p(V)$ parametrizan a las subvariedades de V que pasan por p (del teorema de los ceros de Hilbert).

Proposición 2.25. *Sea una A-álgebra plana B . Entonces son equivalentes:*

i) Para todos los ideales I de A se cumple que $IB \cap A = a$.

ii) La aplicación $Spec(B) \to Spec(A)$ es suprayectiva. ($Spec(A) := \{Ideal\ primo\ de\ A\}$).

iii) Para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ del anillo A se tiene $\mathfrak{m}B \neq (1)$.

iv) Si M es cualquier A-módulo no nulo, en tal caso $M_B \neq 0$.

v) La aplicación $x \to 1 \otimes x$ de M en M_B es inyectiva para cada A-módulo M.

Solución 2.26. Sea $f : A \to B$ un A-álgebra plana.

i) $\Longrightarrow$ ii) Sea un punto I del $Spec(A)$. Existe un J de $Spec(B)$ por la Prop.2.23 cumpliendo que: $f^*(J) = J \cap A = I$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Sea un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A y sea un ideal primo $\mathfrak{p}$ de B tal que $f^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}$. Entonces $\mathfrak{m}B = (\mathfrak{p} \cap A)B \subseteq \mathfrak{p} \neq (1)$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Sea $I = Ann(x)$ con x un elemento no nulo de M. I es un ideal de A como consecuencia de que x es un elemento no nulo.

IB es un ideal de B por hipótesis. Además, por el Primer Teorema de Isomorfismo, tenemos el siguiente isomorfismo de B-módulos:

$$B/IB \cong B \otimes_A (A/I) \cong B \otimes_A Ax.$$

Como B es plano, la aplicación $B \otimes_A Ax \to B \otimes_A M$ inducida por la inclusión $Ax \to M$ es inyectiva. Entonces M_B es un elemento no nulo de B-módulo.

vi) $\Longrightarrow$ v) Sea la aplicación $M \to B \otimes_A M$, denotando el núcleo por M', en consecuencia tenemos una sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \to M' \to M \to M_B \to 0.$$

Dado que B es plano, debemos tensorizar para obtener una sucesión exacta corta de B-módulos, para lo cual aplicaremos el tensor $B \otimes A$:

$$0 \to M'_B \to M_B \to (M_B)_B \to 0.$$

La aplicación es inyectiva. Así $M'_B = 0$. Esto implica que $M' = 0$ por hipótesis. De ahí deducimos que $M \to B \otimes_A M$ es inyectiva.

v) $\implies$ i) La aplicación $A/I \to (A/I)_B \cong B/IB$ es inyectiva por hipótesis. En consecuencia tenemos que $I \subseteq IB \cap A \subseteq I$.

Ejercicio 2.27. *Sea un homomorfismo de anillos plano $f : A \to B$, sea $\mathfrak{p}{=}I \cap A$ siendo $\mathfrak{p}$ un ideal primo de B. Entonces la aplicación $f^* : Spec(B_I) \to Spec(A_\mathfrak{p})$ es subyectiva.*

Solución 2.28. $B_\mathfrak{p}$ es plano sobre $A_\mathfrak{p}$, y B_I es un anillo local de $B_\mathfrak{p}$, por lo tanto es plano sobre $B_\mathfrak{p}$. En consecuencia B_I es plano sobre $A_\mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}B = (I \cap A)B \subseteq I$, $\hat{f} : A_\mathfrak{p} \to B_I$ satisface la condición iii) del ejercicio anterior. Así, B_I es exactamente una A-álgebra plana, por lo tanto:

$$f^* : Spec(B_I) \to Spec(A_\mathfrak{p}) \text{ es subyectiva.}$$

2.2. Propiedades Locales de Anillos y Módulos

Las propiedades geométricas locales comprenden a las propiedades algebraicas de los anillos locales.

Muchas propiedades interesantes de anillos locales vienen sugeridas por la Geometría Algebraica. Interesa extenderlas a todos los anillos de una forma conveniente. Para ello se consideran aquellas propiedades $\mathcal{P}$ de anillos locales tales que

$$\forall A \text{ anillo local: } A \in \mathcal{P} \implies A_\mathfrak{p} \in \mathcal{P}, \forall \mathfrak{p}.$$

Proposición 2.29. *Si $\mathcal{P}$ (para anillos locales) verifica la condición anterior, entonces, para cualquier anillo A son equivalentes:*

i) $A_\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$, *para todo ideal primo* $\mathfrak{p}$.

ii) $A_\mathfrak{m} \in \mathcal{P}$, *para todo ideal maximal* $\mathfrak{m}$.

Se define $\mathcal{P}^*$ (para anillos generales), por las condiciones (i) y (ii) anteriores.

Definición 2.30. Sea $\mathcal{P}$ una propiedad de anillos generales. Se dice *propiedad local* si para cualquier A son equivalentes:

i $A \in \mathcal{P}$

ii) $A_\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$.

iii) $A_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{P}$, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$.

Se define $\mathcal{P}_*$ para anillos locales por restricción. Entonces $\mathcal{P}_*$ verifica la condición inicial.

Las propiedades locales son aquellas que tienen un significado geométrico local. Por ejemplo, el dominio no es local.

Proposición 2.31. *Se tienen las condiciones siguientes:*

i) La propiedad de A-módulos dadas por $M = 0$ es local.

ii) La propiedad de A-módulos dada por f inyectiva (sobreyectiva) es local.

iii) La planitud de A-módulos es local.

Demostración. i) Es trivial salvo:

$M_{\mathfrak{m}} = 0$, para todo maximal $\mathfrak{m}$ implica que $M = 0$. Si $M \neq 0$ tenemos que $x \neq 0$ en M. Puesto que $M_{\mathfrak{m}} = 0$, $\frac{x}{1} \in M\mathfrak{m}$ ha de ser cero. Luego $\exists s \in A - \mathfrak{m}$ tal que $sx = 0$. Así $s \in (0 : x) \subset \mathfrak{m}$, lo cual no puede darse.

ii) La demostración es consecuencia de la exactitud de la localización y la primera propiedad.

iii) Es consecuencia directa de la segunda condición.

□

Proposición 2.32. *Sea un homomorfismo $\phi : M \to N$ de A-módulos. Entonces tenemos que son equivalentes las siguientes proposiciones:*

i) ϕ es inyectiva;

ii) $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ es inyectiva para cada ideal primo $\mathfrak{p}$;

iii) $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ es inyectiva para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$.

Teorema 2.33. *[2] Sea A un dominio de integridad con el cuerpo de fracciones K. Entonces $A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in A} A_J$, con $\mathfrak{m}$ maximal de A.*

Demostración. Para $x \in K$ se tiene que $(A : x) = 1$, lo cual quiere decir que $x \in A$ si $x \in A_{\mathfrak{m}}$, para todo $\mathfrak{m}$ maximal, ya que, en este caso $(A : x) \not\subseteq \mathfrak{m}$.

□

Proposición 2.34. *Sea A un anillo y M un A-módulo finito. Si $M \otimes_A k(\mathfrak{m}) = 0$ para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ entonces $M = 0$.*

Demostración. $k(\mathfrak{m}) = A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$, entonces $M \otimes k(\mathfrak{m}) = M_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$, y por el lema de Nakayama, $M \otimes k(\mathfrak{m}) = 0 \Leftrightarrow M_{\mathfrak{m}} = 0, \forall \mathfrak{m}$, de donde $M = 0$. □

A continuación veamos algún ejemplo donde usaremos lo anterior pero aplicado a elementos de torsión.

Definición 2.35. Diremos que un elemento $x \in M$ es un *elemento de torsión* de M si se cumple que $Ann(x) \neq 0$.

Ejercicio 2.36. *Sea un anillo A que sea dominio de integridad y sea también un subconjunto$S$ multiplicativo de A. Con las notaciones vistas hasta ahora, probaremos que $T(S^{-1}M) = S^{-1}(TM)$. Además, comprobemos que las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) M es sin torsión.

ii) Para todo ideal primo $\mathfrak{p}$, $M_{\mathfrak{p}}$ es sin torsión.

iii) Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$, $M_{\mathfrak{m}}$ es sin torsión.

Solución 2.37 (**Solución 1**). Con el claro hecho de que $T(S^{-1}M) = S^{-1}(TM)$, tenemos lo siguiente:

i) $\Longrightarrow$ ii) $T(M_{\mathfrak{p}}) = T(M)_{\mathfrak{p}} = 0$

ii) $\Longrightarrow$ iii) Es obvio.

iii) $\Longrightarrow$ i) Asumimos que $T(M) \neq 0$. Diremos que $x \in T(M)$ con $xy = 0$, y $x, y \neq 0$. Entonces, sea J un ideal maximal que contiene a $\mathfrak{p} = Ann(x)$ (notemos así que $\alpha x \neq 0, \alpha y \neq 0, \forall \alpha \in A - J$). Se ve fácilmente que $y(x/1) = 0$ en $M\mathfrak{m}$, y $y \neq 0$, que contradice la suposición de que $M\mathfrak{m}$ es libre de torsión. En consecuencia, M es libre de torsión.

Solución 2.38 (**Solución 2**). Sea S un subconjunto multiplicativo del dominio A. Para cada $x \in M$ y $s \in S$ tenemos:

$Ann(x/s) = Ann(S^{-1}Ax) = S^{-1}Ann(Ax) = S^{-1}(Ann(x))$, por la Prop. 2.22.

Dado que $x/s \in T(S^{-1}M) \Leftrightarrow x/s \in S^{-1}(T(M))$. En particular, $T(M_I) = T(M)_{\mathfrak{p}}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. En consecuencia, las tres afirmaciones son equivalentes.

2.3. Ejercicios

En este último apartado expondremos un recopilatorio de ejercicios en los que aplicaremos lo visto hasta ahora en este capítulo.

Ejercicio 2.39. *Sea x un elemento nilpotente de un anillo A. Demostremos que en el anillo A $1+x$ es una unidad. Además deduzcamos que la suma de una unidad y un elemento nilpotente es también una unidad.*

Expondremos dos posibles soluciones a este problema:

Solución 1: Por ser x nilpotente, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$, entonces:

1. Si n es par: $1 = 1 - x^n = (1+x)p(x)$, entonces 1+x tiene inverso y es unidad.
2. Si n es impar: $1 = 1 + x^n = (1+x)(1+x+...+x^{n-1})$, luego 1+x es unidad.

Si r es una unidad del anillo A y x es nilpotente, entonces xr^{-1} es nilpotente y $1+xr^{-1}$ es una unidad y $r(1+xr^{-1}) = u + x$ también lo es.

Solución 2: Sabemos que el nilradical de A es la intersección de todos los ideales primos de A. Dado que todo ideal maximal de A es primo, el nilradical de A está contenido en el radical de Jacobson. Así pues, x está contenido en el radical de Jacobson de A.

Aplicando que un elemento x pertenece al radical de Jacobson si y sólo si $1 - xy$ es una unidad en A para todo elemento $y \in A$, pero en nuestro caso con $y = -u^{-1}$, vemos que $1 + u^{-1}x$ es una unidad. Dado que las unidades de A forman un grupo, entonces

$$u(1 + u^{-1}x) = u + x$$

también será una unidad.

Ejercicio 2.40. *Sea un subconjunto S multiplicativo de un anillo A, y sea también un A-módulo con generación finita M. Probemos que $S^{-1}M = 0$ si y sólo si existe un elemento $a \in S$ tal que $aM = 0$.*

Solución 2.41. Si hay $a \in S$ tal que $aM = 0$, entonces es obvio que $S^{-1}M = 0$ (ya que $b/t = ba/ts = 0/ta = 0$, para cualquier elemento $b/t \in S^{-1}M$). Así mismo, si $S^{-1}M = 0$ y $x_1, x_2, ..., x_b$ genera M, entonces hay elementos $a_1, a_2, ..., a_b$ de S tales que $a_i b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces escogemos $a = a_1 a_2 ... a_b$ y esta elección lo cumple.

Ejercicio 2.42. *Sea un conjunto S multiplicativo de A y sea también un homomorfismo de anillos $f : A \to B$. Sea $T = f(S)$. Probemos que $T^{-1}B$ y $S^{-1}B$ son isomorfos como $S^{-1}A$-módulos.*

Solución 2.43. Consideremos B como un A-módulo por restricción de escalares, y que forma $S^{-1}B$, que es un $S^{-1}A$-módulo. Sea $\frac{b}{s} = \frac{b'}{s'}$ en $S^{-1}B$. Entonces

$$f(s'')(f(s')b - f(s)b') = s'' \cdot (s' \cdot - s \cdot b') = 0$$

en B. En consiguiente, la aplicación $g : S^{-1}B \to T^{-1}B$, determinada por $\frac{b}{s} \to \frac{b}{f(s)}$ es biyectiva y está bien definida. Veamos que se cumple la adición y la multiplicación.

El cálculo,

$$g(\tfrac{b}{s} + \tfrac{b'}{s'}) = g(\tfrac{s'\cdot b + s\cdot b'}{ss'}) = \tfrac{s'\cdot b+s\cdot b'}{f(ss')} = \tfrac{f(s')b+f(s)b'}{f(s)f(s')} = \\ = \tfrac{b}{f(s)} + \tfrac{b'}{f(s')} = g(\tfrac{b}{s}) + g(\tfrac{b'}{s'}),$$

nos muestra que g es aditiva.

Por otro lado,

$$g(\tfrac{a}{s} + \tfrac{b}{s'}) = g(\tfrac{a\cdot b}{ss'}) = \tfrac{a\cdot b}{f(ss')} = \tfrac{f(a)}{f(s)}\tfrac{b}{f(s')} = (S^{-1}f)(\tfrac{a}{s})g(\tfrac{b}{s'}) = \tfrac{a}{s}\cdot g(\tfrac{b}{s'})$$

muestra que se cumple la multiplicación. Así pues, g es un isomorfismo de $s^{-1}A$-módulos.

Ejercicio 2.44. *Sea A un anillo. Supongamos que el anillo local $A_{\mathfrak{p}}$ no tiene elementos nilpotentes $\neq 0$ para cada ideal primo $\mathfrak{p}$. Probemos que el anillo A no tiene ningún elemento nilpotente $\neq 0$. En el caso de que cada uno de los anillos locales $A_{\mathfrak{p}}$ sea un dominio de integridad, ¿es obligatoriamente A un dominio de integridad?*

Solución 2.45. Suponemos que A tiene un elemento nilpotente distinto de cero. Entonces x pertenece a todos los ideales primos $\mathfrak{p}$. Dado cualquier ideal primo $\mathfrak{p}$, el elemento $(x/1) \in A_{\mathfrak{p}}$ es nilpotente.

Si elegimos el ideal maximal $\mathfrak{m}$ que contiene el ideal $Ann(x)$, nos aseguramos que $x \neq 0$ en $A_{\mathfrak{m}}$, de ahí que $A_{\mathfrak{m}}$ no contiene elementos nilpotentes distintos de cero.

Para comprobar la última pregunta, supongamos $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. A no es un dominio, pero A_I es un dominio de integridad para todo ideal primo de A, que en este caso serían ((2),(3)).

Ejercicio 2.46. *Sea A un anillo que no es el anillo cero y denotemos por $\sum$ el conjunto de todos los conjuntos multiplicativos S de A que cumplen la condición de que $0 \notin S$. Probemos que el conjunto $\sum$ tiene elementos maximales, y además, comprobemos que $A - S$ es un ideal primo minimal de A si y sólo si $S \in \sum$ es maximal.*

Solución 2.47. Dado que A no es el anillo cero, el elemento $\{1\}$ pertenece a $\sum$. Fijemos la cadena $\{S_i\}_{i\in I}$ perteneciente a $\sum$ y definamos $S = \cup_{i\in I} S_i$. Luego $1 \in S$ y si $x, y \in S$, entonces existe algún $j \in I$ cumpliendo que $x, y \in S_j$. Entonces $xy \in S_j \subseteq S$. Además, si el anillo cero estuviera en S, debería de estar en algún S_i, dado que S es un subconjunto de A multiplicativo que no contiene a cero, es un elemento de $\sum$. Por el Teorema de Zorn, $\sum$ tiene elementos maximales.

Sea x un elemento de A y sea también S un elemento maximal de $\sum$. En consecuencia de que S es maximal en $\sum$, x no está en $S \Leftrightarrow$ el subgrupo multiplicativo de A generado por S y x contiene a cero. Esto equivale a la condición de que en $S^{-1}A$, el elemento x es nilpotente. Por tanto, $A \setminus S$ es la contracción del nilradical de $S^{-1}A$. Dado que S es multiplicativo, $I = A \setminus S$ es un ideal primo que no está en S. Por la Prop 2.17, $S^{-1}I = R(A_I)$ es un ideal primo minimal, así I es un ideal primo minimal.

Sea un ideal primo minimal I de A, x un elemento y definamos $S = A \setminus SI$. Entonces $S^{-1}I = R(A_I)$. Así x no pertenece a $S \Leftrightarrow x$ es nilpotente en A_I. En conclusión, S es un elemento maximal de $\sum$.

Ejercicio 2.48. *Diremos que un subconjunto multiplicativo S de un anillo A que cumple $xy \in S \Leftrightarrow x \in S$ e $y \in S$ es un conjunto saturado. Probemos los siguientes apartados:*

i) El conjunto S es saturado si y sólo si $A - S$ es una unión de ideales primos.

ii) En el caso de que S sea un subconjunto multiplicativo de A, existe $\bar{S}$, que es el único subconjunto multiplicativo saturado mínimo que contiene a S, y que además el conjunto $\bar{S}$ cumple que es el complemento en A de la unión de los ideales primos que no cortan S. (Denominamos $\bar{S}$ la saturación de S.)

Solución 2.49. i) Debemos probar que si S es saturado entonces $A - S \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset} \mathfrak{p}$.

Efectivamente, es obvio que el primer miembro contiene al segundo miembro. Para la otra inclusión, sea un elemento $x \in A - S$ y sea $(x) = \mathfrak{p}$. Entonces, si definimos $S/\mathfrak{p} = \{s + \mathfrak{p} : s \in S\}$ el conjunto de subconjuntos de S en $\mathfrak{p}$, observamos que $\bar{0} = 0 + \mathfrak{p} \neq S/\mathfrak{p}$(porque esto implicaría $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, lo cual es absurdo por la condición de saturación de S). También $S/\mathfrak{p}$ es multiplicativo como subconjunto de A/I porque S lo es. Así mismo, por el ejercicio previo, existe un conjunto maximal multiplicativo $\sum = \mathfrak{p} - \bar{\mathfrak{p}}$, donde $\bar{\mathfrak{p}}$ es un ideal primo minimal tal que $S \subseteq \sum$. Este $\bar{\mathfrak{p}}$ tiene que ser de la forma $\mathfrak{p}/\bar{\mathfrak{p}}$ donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo que contiene a $\bar{\mathfrak{p}}$; en particular, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ y esto nos muestra que x pertenece al segundo miembro. En consiguiente, la otra inclusión

$$A - S \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset} \mathfrak{p},$$

completa la prueba.

ii) Si S es multiplicativo, entonces

$$\bar{S} = A - \bigcup_{p\cap S\neq\emptyset} \mathfrak{p}$$

es un conjunto saturado y multiplicativo.

Si $\bar{S}'$ fuese un subconjunto saturado y multiplicativo de $\bar{S}$ que contiene a S, entonces el complemento en A debería contener por lo menos un ideal primo que no esté trivialmente intersecado con S. Pero entonces, esta intersección pertenecería a ambos, a S y a $A - \bar{S}' \subseteq A - S$, lo que lleva a una contradicción. Así pues, S es minimal.

Ahora, si definimos $S = 1 + \mathfrak{p}$, inmediatamente vemos que $\mathfrak{p} \cap (1 + \mathfrak{p}) \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathfrak{p} + \mathfrak{p} = (1)$. En consiguiente, $\mathfrak{p} \cap (1 + \mathfrak{p}) = \emptyset$ si y sólo si hay algún ideal primo $\mathfrak{p}'$ tal que $\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{p}$. Pero entonces

$$\overline{1 + \mathfrak{p}} = A - \bigcup_{\mathfrak{p} \cap (1+\mathfrak{p}) = \emptyset} \mathfrak{p} = A - \bigcup_{\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}.$$

Ejercicio 2.50. *Sean dos subconjuntos S, T multiplicativos de A, tales que $S \subseteq T$. Sea el homomorfismo $f : S^{-1}A \to T^{-1}A$ que aplica cada $a/s \in S^{-1}A$ a a/s considerado como un elemento de $T^{-1}A$. Probemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) El homomorfismo f es biyectivo.

ii) Para cada elemento $t \in T$, $t/1$ es una unidad en $S^{-1}A$.

iii) Para cada elemento $t \in T$ existe $x \in A$ tal que $xt \in S$.

iv) El subconjunto T está contenido en la saturación de del conjunto S.

v) Todo ideal primo que corta T corta también S.

Solución 2.51.

i) $\implies$ ii) Sabemos que, al ser f biyectiva, es subjetiva, por lo tanto sea un elemento $t \in T$, entonces $f(1/t) = (1/t)$ en $S^{-1}A$.

Por lo anterior $(1/t)$ es inversible en $S^{-1}A$, cuyo inverso es $(t/1)$ implicando que $(t/1)$ es un unidad en $S^{-1}A$.

ii) $\implies$ iii) Sea un elemento $t \in T$, entonces $(t/1)$ es una unidad en $S^{-1}A$, implicando que existe $(a/s) \in S^{-1}A$ tal que $(t/1)(a/s) = (1/1)$, lo cual llegamos a que existe un elemento $u \in S$ tal que $uat = us$. Sea ahora $x = ua$, como el subconjunto S es multiplicativo, $us \in S$ luego nos implica que hay un $x \in A$ tal que $xt \in S$.

iii) $\implies$ iv) Para cada $t \in T$ hay un elemento $x \in A$ cumpliendo que: $xt \in S \implies t \in \bar{S}$, es decir, corta a S.

iv) $\implies$ v) Sea un ideal primo $\mathfrak{q}$ de A que corta al conjunto T. Por el ejercicio anterior, $\bar{S} \cap \mathfrak{p} \cap A$, con $\mathfrak{p}$ un ideal primo cumpliendo que no corta a S. Por la hipótesis, conocemos que $T \subseteq \bar{S}$. Supongamos que $\mathfrak{q}$ no corta a S, a raíz de la hipótesis $T \subseteq \mathfrak{q} \cap A$, implicando que $\mathfrak{q}$ no corta a T, lo cual es un absurdo. Por lo que el ideal $\mathfrak{q}$ sí corta a S.

v) $\implies$ i) Sea el homomorfismo de $S^{-1}A$-módulos $f : S^{-1}A \to T^{-1}A$. Si el ideal $\mathfrak{p}$ es primo de $S^{-1}A$ entonces $S \subseteq T \subseteq A \setminus \mathfrak{p} \cap A$. Por el Ejercicio 2.42, $(S^{-1}A)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}'} = (T^{-1}A)_{\mathfrak{p}}$, siendo $\mathfrak{p}'$ la contracción $\mathfrak{p} \cap A$,y $f_{\mathfrak{p}}$ es una identidad en $A_{\mathfrak{p}}$, indicándonos que la propia aplicación $f_{\mathfrak{p}}$ es biyectiva. Por la Proposición 2.32, podemos deducir que la aplicación f también cumple que es biyectiva.

Observación 2.52. Un elemento $x \in M$ es un *elemento de torsión* de M si $Ann(x) \neq 0$, es decir, si x es anulado por algún elemento no nulo de A. Los elementos de torsión de M forman un submódulo de M, denominado *submódulo de torsión* de M, y se indica pro $T(M)$, además si $T(M) = 0$ se dice que el módulo M es sin torsión.

Ejercicio 2.53. *Sea un A-módulo M y un ideal I del anillo A. Suponemos que para todos los ideales maximales $\mathfrak{m} \supseteq I$ se tiene que $M\mathfrak{m} = 0$. Probemos que $M = IM$.*

Solución 2.54. Para todos los ideales maximales $\mathfrak{m}$ que contienen a I, sea M un A-módulo tal que $M_{\mathfrak{m}} = 0$ y sea I un ideal de A. En consecuencia de que la localización es exacta, M/IM es un A-módulo ya que para todos los ideales maximales $\mathfrak{m}$ de A/IM se cumple que $(M/IM)_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}}/(IM)_{\mathfrak{m}} = 0$. Por lo tanto, tenemos que $M/IM = 0 \implies M = IM$.

Capítulo 3

Soporte e Ideales Primos Asociados

Definición 3.1. Un anillo se dice *Noetheriano* si verifica la condición de cadena ascendente (cca) en ideales.[3]

Proposición 3.2. *Un anillo A es Noetheriano si y sólo si la propiedad de tipo finito es hereditaria en A-módulos.*

Proposición 3.3. *Si un anillo A es Noetheriano, entonces lo es cada localización $S^{-1}A$*

Proposición 3.4. *Sea un anillo A tal que se cumplen las siguientes hipótesis.*

i) El anillo local $A_{\mathfrak{m}}$ es Noetheriano para cualquier $\mathfrak{m}$ que sea ideal maximal de A.

ii) Para todo elemento x de A que no sea igual a cero, el conjunto de ideales maximales que contiene dicho elemento de A es finito.

Por lo tanto el anillo A es Noetheriano.

Demostración. Sea I un ideal Noetheriano de A, y sean los ideales maximales $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, ..., \mathfrak{m}_r$ que contienen a I. Seleccionemos un elemento x_0 que no sea cero perteneciente a I, y sea $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{r+s}$ ideales maximales que contienen a x_0.

Dado que $\mathfrak{m}_{r+1}, \mathfrak{m}_{r+2}, \mathfrak{m}_{r+s}$ no contienen al ideal I, existe entonces elementos $x_j \in I$, $1 \leq j \leq s$ tal que x_j no pertenece a los ideales maximales $\mathfrak{m}_{r+j}$. Puesto que cada $A_{\mathfrak{m}_i}$ es Noetheriano, la extensión en $A_{\mathfrak{m}_i}$ de I es finitamente generada.

Sean ahora los elementos de I cuyas imágenes generan para $i = 1, ..., r$ $A_{\mathfrak{m}_i}I$, que los denotamos por $x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_t$. Expresemos en este momento I_0=$(x_0, x_1, ...x_t)$; fijémonos que en $A_{\mathfrak{m}}$ los ideales I_0 y I tienen idéntica extensión para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$, así pues concluimos que I=I_0; en particular, I será finitamente generado y dado que optamos por un ideal arbitrario, el anillo A tiene que ser obligatoriamente Noetheriano. □

Proposición 3.5. *Sea M un A-módulo Noetheriano. Entonces $M[x]$ es un $A[x]$-módulo Noetheriano.*

Demostración. Recordemos que $M[x]$ es la notación para definir al conjunto de los polinomios en x con coeficientes en M.

Sabemos que $M[x] \simeq M \otimes_A A[x]$.

Dado que M y $A[x]$ son A-módulos Noetherianos, la suma directa $M \oplus A[x]$ será un A-módulo Noetheriano. También podemos comprobar que existe una aplicación subjetiva $M \oplus A[x] \to M \otimes_A A[x]$ donde la cual $M \otimes_A A[x]$ será también Noetheriano. □

3.1. Soporte e ideales primos asociados

En relación con la localización también es útil considerar el *Soporte* de un A-módulo, que se define como

$$Supp(M) = \{\mathfrak{p} \in Sp(A) : M_{\mathfrak{p}} \neq \emptyset\}.$$

Proposición 3.6. *Sea M un A-módulo, entonces $Supp(M) = \emptyset$ si y sólo si $M = 0$.*

Proposición 3.7. *Sean N y M dos A-módulos, y sea además la sucesión de exacta $N \mapsto M \to M/N$. Entonces tenemos que $Supp(M) = Supp(N) \cup Supp(M/N)$.*

Proposición 3.8. *Sean N_i submódulos del A-módulo M. Por lo tanto $Supp(\sum N_i) = \bigcup Supp(N_i)$.*

Proposición 3.9. *Sea I un ideal de un anillo A. En tal caso se tiene que $Supp(A/I) = V(I)$.*

Demostración. Por la exactitud de la localización se obtiene lo siguiente: $(A/I)_{\mathfrak{p}} = \frac{A_{\mathfrak{p}}}{I_{\mathfrak{p}}}$. Para $I_{\mathfrak{p}}$=$IA_{\mathfrak{p}}$, la extensión de I en $A_{\mathfrak{p}}$. Para IB= (1) si y sólo si el ideal I corta a $A - \mathfrak{p}$.

□

Corolario 3.10. *Sea M un A-módulo. Con esto tenemos:*

i) Si $M =< (x_i) >$, entonces $Supp(M) = \bigcup V(0 : x_i)$.

ii) Si M es finitamente generado, entonces $Supp(M) = V(0 : M)$.

Demostración. i) $Supp(M) = \bigcup Supp(Ax_i) = \bigcup Supp(0 : x_i)$.

ii) Obsérvese que si $M =< x_1, x_2, ..., x_n >$, entonces $(0 : M) = \bigcap_{i=1}^{n}(0 : x_i)$. Por lo tanto los 'cerrados' de $Sp(A)$ son, exactamente, los soportes de los A-módulos finitamente generados.

$\square$

Corolario 3.11. *Sea M un A-módulo finitamente generado y sea I un ideal de A. Entonces tenemos que la aplicación $I : M \to M$ es nilpotente si y sólo si el ideal I pertenece a la intersección de los ideales primos $\mathfrak{p}$ tales que $\mathfrak{p} \in Supp(M)$, es decir,*

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in Supp(M)} \mathfrak{p} = rad(0 : M).$$

Proposición 3.12. *Si M, N son dos A-módulos finitamente generados, entonces se cumple que $Supp(M \otimes_A N) = Supp(M) \cap Supp(N)$.*

Demostración. Puesto que $(M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}$, basta probar que, para un anillo local A y módulos finitamente generados M y N,

$$M \otimes_A N = 0 \text{ por lo tanto } M = 0 \text{ ó } N = 0.$$

Así es, sea k el cuerpo residual. Entonces
$M \otimes_A N = 0$, por lo tanto $(M \otimes_A N) \otimes_A k \cong (M \otimes_A k) \otimes_k (N \otimes_A k) = 0$.

Por ser K un cuerpo residual, se tiene lo siguiente:

$$M \otimes_A k = 0 \text{ ó } N \otimes_A k = 0, \text{ es decir } M/mM = 0 \text{ ó } N/mN = 0.$$

Por el Lema de Nakayama: $M = 0$ ó $N = 0$. $\square$

Corolario 3.13. *Sea I ideal de A y M un A-módulo finitamente generado. En tal caso tenemos que $Supp(M/IM) = V(I) \cap V(0{:}M) = V(I+(0{:}M))$.*

Pasemos ahora a ver otro término relacionado con la localización.

Definición 3.14. Sea M un A-módulo. Un *primo asociado* a M es un primo de A que es anulador de algún elemento de M.

$$Ass(M) = \{\mathfrak{p} \in Sp(A) \text{ tal que } \mathfrak{p} = (0 : x), \text{ para algún } x \in M\}.$$

Proposición 3.15. *Sea M un A-módulo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Entonces, $\mathfrak{p} \in Ass(A)$ si y sólo si existe un subconjunto N de M, con $N \cong A/\mathfrak{p}$.*

Proposición 3.16. *Sea N un subconjunto de un A-módulo M. Entonces se tiene que $Ass(N) \subset Ass(M) \subset Ass(N) \cup Ass(M/N)$.*

Demostración. El primer contenido es trivial ya que, como $N \subset M$ entonces $Ass(N) \subset Ass(M)$. Veamos el segundo contenido.

Sea $\mathfrak{p} \in Ass(M)$, en ese caso $\mathfrak{p} = (0 : x)$, con x un elemento perteneciente a M. Siendo así, se pueden dar los siguientes casos:

1. Si $Ax \cap N = 0$, entonces $\mathfrak{p} = (0 : x + N) \in Ass(M/N)$.

2. Si $a \in \mathfrak{p}$, entonces $ax = 0$. Así $a(x + N) = 0$.

3. Si $a \in (0 : x + N)$, $ax \in N$ luego $ax \in Ax \cap N = 0$. Por lo tanto $ax = 0$, con $a \in \mathfrak{p}$.

4. Si $Ax \cap N \neq 0$ entonces $Ax \cap N \subset Ax \cong A/\mathfrak{p}$.

Así tendríamos que $Ass(Ax \cap N) \subset Ass(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$. Pero por ser $Ax \cap N \neq \emptyset$ debe ser que $Ass(Ax \cap N) \neq \emptyset$.

(Si $0 \neq N \subset A/\mathfrak{p}$ es evidente que $Ass(N) = \{\mathfrak{p}\}$).

□

Proposición 3.17. *Sea A un anillo Noetheriano y M un A-módulo distinto de cero. Los elementos maximales en el conjunto $X = \{(0 : x)$ tal que $x \in M, x \neq 0\}$ pertenecen a $Ass(M)$. En tal caso $M = 0$ si y sólo si $Ass(M) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $(0 : x)$ maximal de X. Probemos que es primo: $(0 : x) \neq (1)$, ya que $X \neq 0$.

Si $ab \in (0 : x)$, entonces $b \in (0 : ax)$.

Si $a \notin (0 : x)$, luego $(0 : ax) \in X$. Pero $(0 : x) \subset (0 : ax)$, luego $(0 : x) = (0 : ax)$, por lo cual $B \in (0 : x)$. □

Proposición 3.18. *Sean los módulos M_i, con $i = 1, ..., n$ del anillo A. Entonces $Ass(\oplus M_i) = \bigcup Ass(M_i)$.*

Proposición 3.19. *Sea A un anillo Noetheriano, M un A-módulo y a perteneciente a A. Entonces tenemos que $\alpha : M \to M$ es biyectiva si y sólo si $a \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p}$.*

Demostración. Veamos la implicación inversa, ya que la directa es trivial.

Sea así, supongamos que la aplicación α no es inyectiva, entonces existe un elemento $x \neq 0$ del anillo A tal que $ax = 0$. Por ser A un anillo Noetheriano tenemos que el primo asociado $Ass(Ax) \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{p}$ perteneciente a $Ass(Ax)$, teniendo así que $Ass(Ax) \subset Ass(M)$. Con lo cual, $\mathfrak{p} = (0 : bx)$, con $bx \neq 0$. Pero $a \in (0 : bx)$, por lo que llegamos a un contradicción. Por lo que la aplicación α tiene que ser inyectiva. □

Proposición 3.20. *Sea A un anillo Noetheriano y M un A-módulo. Entonces*

$$D(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p},$$

siendo D el conjunto de divisores de cero en M.

Proposición 3.21. *Sea A un anillo Noetheriano y sea M un A-módulo, se tiene que:*

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p} = \{a \in A \textit{ tal que, para todo elemento } x \in M, \exists n \in \mathbb{N}, \textit{ con } a^n x = 0\} =$$

$$= \bigcap_{x \in M} r(0 : x).$$

Esto denota el conjunto de elementos de A localmente nilpotentes en M.

Demostración. Demostremos el doble contenido:

" $\subset$ " Si a no es localmente nilpotente se tendría que $\{(0 : x)$ tal que $a^n x \neq 0$ para todo número natural $n\} \neq \emptyset$. Sea $(0 : x_1)$ un maximal. Probemos que $(0 : x_1)$ es primo:

1. Si $bc \in \mathfrak{p}$, entonces $bcx_1 = 0$, cumpliendo que $c \in (0 : bx_1) \supset \mathfrak{p}$.
2. Si $a^n bx_1 = 0$, tal que $b \in (0 : a^n x_1) \supset \mathfrak{p}$.

Por maximalidad, se tiene que $(0 : a^n x_1) = \mathfrak{p}$. Luego $c \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$.

" $\supset$ " Sea a un ideal de A localmente nilpotente, y sea $\mathfrak{p} = (0 : x)$ un primo asociado a M. Entonces $a^n \in \mathfrak{p}$, de donde $a \in \mathfrak{p}$.

□

Corolario 3.22. *Sea A un anillo Noetheriano y M módulo finitamente generado. Entonces:*

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p} = r(0 : M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Supp(M)} \mathfrak{p}.$$

Proposición 3.23. *Sea M un A-módulo y $X \subset Ass(M)$. Entonces existe $N \subset M$, $Ass(N) = X$, cumpliéndose que $Ass(M/N) = Ass(M) - X$.*

Demostración. Sea $\sum = \{P \subset M$ tal que $Ass(P) \subseteq X$. Es inductivo, ya que $0 \in \sum$. Sea N maximal de $\sum$. Basta probar que $Ass(M/N) \subset Ass(M) - X$.

Sea $\mathfrak{p} \in Ass(M/N)$, entonces tenemos que $\mathfrak{p} = (0 : x + N)$, tal que $Ax + N \supsetneq N$, con $\frac{Ax+N}{N} \simeq \frac{A}{\mathfrak{p}}$.

Entonces vemos que: $Ass(Ax + N) \subset Ass(N) \cup Ass(\frac{A}{\mathfrak{p}}) = Ann(N) \cup \{\mathfrak{p}\}$.

Si $\mathfrak{p} \in X$, se cumple que $Ass(Ax+N) \subset N$, y con esto llegamos a que lo visto contradice la maximalidad de N.

□

Proposición 3.24. *Sea un anillo A, M un A-módulo y $\mathfrak{p} \in Sp(A)$.*

i) Si existe $\mathfrak{q} \in Ass(M)$, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p} \in Supp(M)$.

ii) Además, si A es un anillo Noetheriano, también se cumple el recíproco.

Demostración. Veamos la demostración de las dos condiciones.

i) Sea $\mathfrak{q} = (0 : x) = (0 : Ax)$. Entonces se cumple que $q_p = (0 : (Ax)_{\mathfrak{p}}) = (0 : \frac{x}{1})$ es primo de $A_{\mathfrak{p}}$, ya que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

   Luego $q_p \in Ass(M_{\mathfrak{p}})$, tal que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, con $\mathfrak{p} \in Supp(M)$.

ii) Si $\mathfrak{p} \in Supp(M)$ tal que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Por ser A un anillo Noetheriano, se cumple que $Ass_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$.

   Sea pues $\bar{\mathfrak{q}} = (0 : \frac{x}{s}) \in Ass_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. El elemento $\bar{\mathfrak{q}}$ se corresponde a un $\mathfrak{q}$ del anillo A, tal que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

   Además, el ideal $\mathfrak{q} = (q_1, q_2, ..., q_s)$ cumple que $\frac{q_i}{1} \cdot \frac{x}{s} = 0$. Es decir: $\exists t_i \in A - \mathfrak{p}$, tal que $t_i q_i x = 0$.

   Sea ahora $t = \prod_{i=1}^{s} t_i \notin \mathfrak{p}$. Se tiene así que $tqx = 0$, para todo elemento $q \in \mathfrak{q}$. Entonces $\mathfrak{q} \subset (0 : tx)$. Igualmente, si $atx = 0$, entonces $\frac{a}{1} \cdot \frac{tx}{1} = 0$. Así llegaríamos a que $\frac{a}{1} \cdot \frac{x}{s} = 0$, concluyendo que $\frac{a}{1} \in \bar{\mathfrak{q}}$, de donde $a \in \mathfrak{q}$. En definitiva tendríamos que $\mathfrak{q} = (0 : tx) \in Ass(M)$.

□

Corolario 3.25. *Sea M un A-módulo. Se tiene que:*

i) $Ass(M) \subset Supp(M)$.

i) Si, además, se tiene que A es un anillo Noetheriano, entonces ambos conjuntos tienen los mismos maximales.

Teorema 3.26. *Sea un anillo A Noetheriano y sea M un A-módulo finitamente generado. Entonces existen un par de sucesiones $(N_i)_{i=0}^{n}$ y $(\mathfrak{p}_i)_{i=0}^{n}$ en $Supp(M)$ y en $Sp(A)$ respectivamente tales que*

1. $M = N_0 \supset ... \supset N_n = 0$.

2. $N_{i-1}/N_i \cong A/\mathfrak{p}_i$, con $i = 1, ..., n$.

Cualesquiera sucesiones que sean de este tipo verifican que:

$$Ass(M) \subset \{\mathfrak{p}_1 ... \mathfrak{p}_n\} \subset Supp(M).$$

Además se cumple que estos tres conjuntos tienen el mismo número de maximales.

Demostración. Sea $X \neq \emptyset$ el conjunto de submódulos de M verificando la existencia de tales sucesiones. Sea N maximal de X.

Si $N \neq M$ entonces tenemos que $Ass(M/N) \neq \emptyset$. Sea ahora el ideal primo $\mathfrak{p} = (0 : x + N) \in Ass(M/N)$. Así pues $\frac{Ax+N}{N} \cong A/\mathfrak{p}$, luego $Ax + N$ pertenece al conjunto X, contradiciendo así la hipótesis de maximalidad de N puesta al principio.

Para la segunda implicación tenemos que es consecuencia de que se cumpla $Ass(M) \subset Ass(N_0/N_1) \cup ... \cup Ass(N_{n-1}) = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n\}$.

Además se tiene que $\{\mathfrak{p}_i\} = Ass(N_{i-1}/N_i) \subset Supp(N_{i-1}/N_i) \subset Supp(M)$. □

Corolario 3.27. *Si el anillo A es Noetheriano y el A-módulo M es finitamente generado, entonces $Ass(M)$ es finito.*

Corolario 3.28. *Sea M un A-módulo finitamente generado, con A un anillo Noetheriano. Entonces son equivalentes:*

i) M es de longitud finita.

ii) Si $\mathfrak{p} \in Ass(M)$, entonces $\mathfrak{p}$ es maximal.

iii) Si $\mathfrak{p} \in Supp(M)$, entonces $\mathfrak{p}$ es maximal.

Corolario 3.29. *Si A es un anillo Noetheriano y M es de longitud finita, entonces $Ass(M) = Supp(M)$.*

Corolario 3.30. *Sea (A, m) es localmente Noetheriano y M es finitamente generado. Entonces M es artiniano (condición de cadena descendente en submódulos) si y sólo si $Supp(M) = \{m\}$.*

Proposición 3.31. *Sea S un subconjunto multiplicativo de A, y consideremos $Sp(S^{-1}A)$ como subespacio de $Sp(A)$. Entonces tenemos que:*

i) $Ass_A(N) = Ass_{S^{-1}A}(N)$ para N un $S^{-1}A$-módulo.

ii) $Ass(S^{-1}M) \supset Ass(M) \cap Sp(S^{-1}A)$, para M un A-módulo.

Si además A es un anillo Noetheriano, se cumple la igualdad.

Demostración. Veamos la demostración de cada punto.

i) Ante todo, para $x \in N$, $(0 : x)_A = (0 : x)_{S^{-1}A} \cap A$.

Si $\mathfrak{q} \in Ass_{S^{-1}A}$ tal que $\mathfrak{q} = (0 : x)_{S^{-1}A}$. Como $\mathfrak{q} \cap A = (0 : x)_A \in Ass_A(N)$. Puesto que $\mathfrak{p} \in Ass_A(N)$, entonces $\mathfrak{p} = (0 : x)_A$, con $0 \neq x \in N$.

En el caso de que $s \in S$, entonces $sx = \frac{s}{1} \cdot x \neq 0$, donde en la igualdad aplicamos que N es un $S^{-1}A$-módulo. Así tendríamos que $\mathfrak{p} \cap s = \emptyset$ y también $S^{-1}\mathfrak{p} \in Sp(S^{-1}A)$. Asimismo, $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}(0 : Ax)_A = (0 : S^{-1}(Ax))_{S^{-1}A} = (0 : x)_{S^{-1}A}$. Así pues , llegamos a la conclusión de que $S^{-1}\mathfrak{p} \in Ass_{S^{-1}A}(N)$.

ii) En el caso de que $\mathfrak{p} \in Ass(M)$, tal que $\mathfrak{p} \cap s = \emptyset$, como antes: $S^{-1}\mathfrak{p} \in Ass_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$.

Si A es un anillo Noetheriano, sea el ideal $\mathfrak{q}$ perteneciente a $Ass_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ de tal modo que $\mathfrak{q} = (0 : x/1)$. Sea así $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p} = (a_1, ..., a_r)$, tenemos entonces que:

$\frac{a_i x}{1} = 0$, por lo que existe un $s_i \in S$ cumpliendo que $s_i a_i x = 0$. Sea pues $t = s_1, ..., s_n$. Por lo tanto $t a_i x = 0$, para todo $i = 1, ..., n$. En consecuencia, $\mathfrak{p} \subset (0 : tx)$.

En el caso de que $a \in (0 : tx)$, entonces $atx = 0 \implies \frac{atx}{1} = 0 \implies \frac{a}{1} \cdot \frac{x}{1} = 0$. Por lo que, por consiguiente $a \in (0 : x/1) \cap A = \mathfrak{p}$.

□

Las siguientes clases de anillos se comportan en localización: dominio, dominio principal, anillo noetheriano. También lo cumple el dominio de factorización única, que lo denotaremos como *dfu*, y como lo comprobaremos enseguida.

Proposición 3.32. *Sea un anillo A que es un dominio de factorización única, entonces la localización $S^{-1}A$ también es dominio de factorización única.*

Demostración. Sea $a = p_1^{e_1} ... p_r^{e_r}$ (en A) $= p_1^{e_1} ... p_t^{e_t}$ (en $S^{-1}A$ tomando los $(p_i) \cap S = \emptyset$), es una factorización en primos, y así, en irreducibles, en $S^{-1}A$.

El problema es la unicidad, *i.e.*, 'irreducible $\implies$ primo' en $S^{-1}A$.

Lema 3.33. *Para el anillo A son equivalentes:*

i) A es un dfu.

ii) A es un dominio, entonces existe factorización en irreducibles, lo cual implica primo.

iii) A es un dominio, entonces existe una única factorización en primos.

iv) A es un dominio, entonces existe factorización en primos.

Demostración. La primera condición implica tanto la segunda como la tercera, ya que es dfu, por lo que irreducible $\implies$ primo.

Para ver que la cuarta condición implica la segunda, sea p irreducible de A:
$p = p_1 ... p_{r-1}$. En irreducibles $p = p_1$ es primo. □

Anteriormente ya habíamos probado que existe factorización en primos de $S^{-1}A$. Por lo tanto, para probar esta proposición basta usar el lema anterior. □

Observación 3.34. Un elemento irreducible en $S^{-1}A$ puede no ser irreducible en A. Por ejemplo: $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$: $6 = 2 \cdot 3$, que es irreducible en $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}](2 \in \mathscr{U}_{\mathbb{Z}}[\frac{1}{2}])$, pero se factoriza en $\mathbb{Z}$.

A continuación expondremos algunos ejemplos geométricos relacionado con lo anterior.

Ejemplo 3.35. 1. La parábola $y - x^2$.

Sea $A = \frac{k[x,y]}{(y-x^2)} = k[x, x^2] = k[x]$ que es dominio de factorización única por ser principal.

2. La hipérbola $xy - 1$.

Sea $A = \frac{k[x,y]}{(xy-1)} = k[x, \frac{1}{y}] = k[x]_x$ (denotada así la localización en x). Y esto sería igual a $k[\mathbb{Z}]$. Por lo tanto $A = k[x,y]/(xy-1)$ es dominio de factorización única.

Bibliografía

[1] Atiyah, M.F. y MacDonald, I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1969.

[2] Kunz, E., *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[3] Matsumura, H., *Commutative ring theory*, University press, Cambridge, 1990.