FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Variedades cosimplécticas: aplicacións en Mecánica Analítica

Leonardo Cornes Miramontes

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Variedades cosimplécticas: aplicacións en Mecánica Analítica

Leonardo Cornes Miramontes

Xullo 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Variedades cosimplécticas: aplicacións en Mecánica Analítica
Breve descrición do contido
Neste traballo, tratamos de levar a cabo unha breve descripción dos espazos vectoriais simplécticos e cosimplécticos para logo facer un estudo das variedades simplécticas e cosimplécticas. Moitas teorías en física moderna poden formularse usando as ferramentas da Xeometría Diferencial. No eido xeométrico natural dos sistemas mecánicos hamiltonianos autónomos utilízase, comunmente, a xeometría simpléctica para dar unha descripción detallada dos mesmos, mentres que a contrapartida non autónoma pódese describir moi ben usando xeometría cosimpléctica.

Índice xeral

Resumo

Os obxectivos principais deste traballo son:

- En primeiro lugar, describir as variedades cosimplécticas, facendo primeiro un pequeno estudo dos espacios vectoriais cosimpléticos. Para unha mellor comprensión da xeometría cosimpléctica, faremos un repaso das variedades simplécticas. Os correspondentes teoremas de Darboux son esenciais no desenrolo deste traballo.

- En segundo lugar, desenvolvemos a formulación xeométrica das ecuacións de Hamilton para o caso non autónomo, establecendo que as solucións destas ecuacións son as curvas integrais de certos campos de vectores nas variedades cosimplécticas.

  Para unha mellor comprensión de dita formulación presentamos un exemplo físico, da formulación hamiltoniana.

Abstract

The main objectives of this work are:

- First, we describe the cosymplectic varieties, making first a small study of cosymplectic vector spaces. For a better understanding of cosymplectic geometry, we review the symplectic varieties. The corresponding Darboux theorems are essential in the development of this work.

- Secondly, we develop the geometrical formulation of the Hamilton equations for the no-autonomous case, establishing that the solutions of these equations are the integral curves of certain vector fields in cosymplectic varieties.

  For a better understanding of this formulation we present a physical example, of the Hamiltonian formulation.

Introdución

A Mecánica Analítica é o estudo da Mecánica Clásica (Newtoniana) no seu formalismo matemático. Foi desenvolto durante os séculos XVIII e XIX por físicos e matemáticos como Leonhard Paul Euler (1707-1783), Jean le Rond D´Alembert (1717-1783), Joseph- Louis Lagrange (1736-1813) e William Rowan Hamilton (1805-1865).

As ecuacións de Euler-Lagrange e as ecuacións de Hamilton, que son sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias, xogan un papel elemental na Mecánica Clásica.

O propósito fundamental deste traballo é a descrición matemática das variedades cosimplécticas, así como a descripción da formulación hamiltoniana da Mecánica para hamiltonianos non autónomos, utilizando ditas variedades.

O traballo divídese en cinco capítulos que agora describimos:

- **Capítulo 1. Ecuacións de Hamilton**.

  Faise unha breve introdución a ditas ecuacións de Newton e de Hamilton no caso de sistemas conservativos.
  As referencias bibliográficas deste capítulo son [1, 8].

- **Capítulo 2. Espazos vectorais cosimplécticos**.

  Describimos os espazos vectoriais simplécticos e os espazos vectoriais cosimplécticos. As bases canónicas destes espazos son fundamentais para os dous seguintes capítulos. A referencia bibliográfica deste capítulo é [11].

- **Capítulo 3. Variedades simplécticas**.

  Neste capítulo, repasamos as variedades simplécticas e a formulación xeométrica hamiltoniana para hamiltonianos autónomos.
  As referencias bibliográficas deste capítulo son [1, 7, 11].

- **Capítulo 4. Variedades cosimplécticas.**

  Os contidos deste capítulo son o eixo fundamental deste traballo. Despois de dar as definicións básicas e propiedades destas variedades, entre elas o Teorema de Darboux para variedades cosimplécticas, introducimos diversos campos de vectores, entre eles, o campo de vectores de evolución, que é fundamental no que segue.
  As referencias bibliográficas deste capítulo son [1, 6, 7, 11].

- **Capítulo 5. Sistemas hamiltonianos en variedades cosimplécticas.**

  Neste capítulo, mostramos que as solución das ecuacións de Hamilton, para hamiltonianos non autónomos, son curvas integrais do campo de vectores de evolución descrito no capítulo anterior. Finalizamos poñendo un exemplo físico dun hamiltoniano non autónomo, observando que, a diferencia dos hamiltonianos autónomos, non son cantidades conservadas.
  As referencias bibliográficas deste capítulo son [1, 7, 11].

Capítulo 1

Ecuacións de Hamilton

Consideremos un sistema dinámico de N masas puntuais. Enténdese por *masa puntual* un obxecto ideal de dimensión cero, descrito pola súa masa, que consideraremos constante, e pola súa posición no espazo $\mathbb{R}^3$.

Nun sistema de N masas puntuais, diremos que unha *configuración* do sistema é

$$(x^1, \dots, x^{3N}) \in \mathbb{R}^{3N},$$

onde $(x^{3i-2}, x^{3i-1}, x^{3i}) \in \mathbb{R}^3$ é a posición da masa puntual i-ésima, con $i = 1, \dots, N$.

Chamaremos *espazo de configuración* ó conxunto de todas as posibles configuracións e denotarémolo por M.

Exemplos

1. Consideremos unha masa puntual movéndose libremente no interior dunha esfera de radio 1. O espazo de configuración é

   $$M = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 < 1\}, \quad S = M \times \mathbb{R}^3.$$

2. Consideremos agora unha masa puntual unida por unha corda ríxida, de lonxitude unidade, á orixe de coordenadas. Neste caso o espazo de configuración é $M = \mathbb{S}^2$, a esfera en $\mathbb{R}^3$.

3. Se consideramos N masas puntuais movéndose libremente polo espazo con vector de posición $x_i = (x^{3i-2}, x^{3i-1}, x^{3i})$, o espazo de configuración é

   $$M = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N} \,/\, x_i \neq x_j, \ \forall\, i \neq j\}.$$

   Nótese que M é un aberto en $\mathbb{R}^{3N}$, e a condición $x_i \neq x_j$, $\forall\, i \neq j$ é para evitar colisións que nós non consideraremos.

4. (Sólido ríxido) Neste caso, temos que $N \geq 2$ masas puntuais están sometidas a restricións fixas do tipo

$$\|x_i - x_j\| = a_{ij}\ ,\ \ i, j = 1, \ldots, N,$$

é dicir, desprázanse como se estiveran acopladas, como un sólido ríxido. O espazo de configuración é

$$M = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N}\ /\ \|x_i - x_j\| = a_{ij}\ ,\ \ i, j = 1, \ldots, N\}.$$

En xeral, o espazo de configuración vai ser unha variedade diferenciable.

Nesta breve introdución imos supoñer que non hai restricións no movemento, o que se traduce en que o espazo de configuración será $\mathbb{R}^{3N}$, ou no seu defecto, un aberto M de $\mathbb{R}^{3N}$.

1.1. Ecuacións de Newton

Consideremos N partículas movéndose en $\mathbb{R}^3$ e denotemos o vector de masas por

$$(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{3i-2}, m_{3i-1}, m_{3i}, \ldots, m_{3N-2}, m_{3N-1}, m_{3N}),$$

onde $m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i} = M_i$ é a masa da partícula i-ésima.

A *Segunda Lei de Newton* establece que o movemento dun sistema de partículas ríxese polo seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde

$$F_i\left(x^j(t), \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_t\right) = m_i \left.\frac{d^2x^i}{dt^2}\right|_t, \quad i, j = 1, \ldots, 3N, \tag{1}$$

onde

$$F_i : S = M \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, 3N,$$

sendo $(F_{3i-2}, F_{3i-1}, F_{3i})$ a forza que actúa sobre a partícula i-ésima, e $(F_1, \ldots, F_{3N})$ a forza total do sistema.

Polo tanto, unha solución de (1) será unha curva

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & M \\ & t & \longmapsto & \alpha(t) = (x^1(t), \ldots, x^{3N}(t)) \end{array}$$

sobre o espazo de configuración, que representa o movemento das N partículas.

De agora en diante centrarémonos só nos chamados sistemas *conservativos*, que son aqueles nos que existe unha función *potencial*

$$V : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \circ \tau, \quad i = 1, \ldots, 3N$$

sendo $\tau : M \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow M$ a proxección canónica, é dicir, as forzas que actúan sobre cada partícula son funcións que só dependen das posicións e non das velocidades.

1.2. Formulación hamiltoniana

Definición 1.1.

Defínese o ***espazo de fases*** ou *espazo de momentos* como

$$S^* = M \times (\mathbb{R}^{3N})^*,$$

onde $(\mathbb{R}^{3N})^*$ é o espazo dual de $\mathbb{R}^{3N}$.

As coordenadas dun punto $(x, \alpha) \in S^* = M \times (\mathbb{R}^{3N})^*$, onde $\alpha = \alpha_i dx^i$, son

$$(x^1, \ldots, x^{3N}, p_1, \ldots, p_{3N}),$$

con $p_i(x, \alpha) = \alpha_i$.

Seguindo no caso dun sistema conservativo introducimos agora a función hamiltoniana, que está definida no espazo de fases.

Definición 1.2.

Á seguinte aplicación denomínase ***hamiltoniano*** do sistema

$$\begin{array}{rccc} H : & S^* = M \times (\mathbb{R}^{3N})^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x^i, p_i) & \longmapsto & \frac{1}{2}\frac{p_i^2}{m_i} + V(x^i), \end{array}$$

isto é, a enerxía total do sistema (enerxía cinética + enerxía potencial).

Definición 1.3.

As denominadas ecuacións de ***Hamilton*** son o seguinte sistema de ecuacións diferenciais de primeira orde

$$\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_t = \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \beta(t), \qquad \left.\frac{dp_i}{dt}\right|_t = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \circ \beta(t)\,, \tag{2}$$

cuxa solución é unha curva

$$\begin{array}{rccl} \beta: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & M \times (\mathbb{R}^{3N})^* \\ & t & \longmapsto & \beta(t) = (x^i(t), p_i(t)) \end{array}$$

sobre o espazo de fases.

É fácil ver que $\beta(t)$ é curva integral do seguinte campo de vectores X_H sobre o espazo de fases S^*, dado por

$$X_H(x^i, p_i) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \,.$$

Vexamos agora que as ecuacións de Hamilton son equivalentes ás de Euler-Lagrange. Da ecuación (2), deducimos que

$$\begin{aligned} \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_t &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \beta(t) = \frac{p_i}{m_i} \circ \beta(t) = \frac{p_i(\beta(t))}{m_i} = \frac{p_i(t)}{m_i}, \\ \left.\frac{dp_i}{dt}\right|_t &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \circ \beta(t) = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \circ \alpha(t), \end{aligned} \tag{3}$$

onde $\alpha(t) = (x^i(t))$.

Así, de (3) obtemos

$$\left.\frac{d^2 x^i}{dt^2}\right|_t = \frac{1}{m_i} \left.\frac{dp_i}{dt}\right|_t = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \circ \alpha(t),$$

é dicir, $\beta(t) = (x^i(t), p_i(t))$ é solución das ecuacións de Hamilton se e só se $\alpha(t) = (x^i(t))$ é solución das ecuacións de Newton, feito que recollemos no seguinte teorema.

Teorema 1.4.

Nun sistema conservativo, as ecuacións de Hamilton (2) son equivalentes ás ecuacións de Newton (1).

Capítulo 2

Espazos vectoriais cosimplécticos

2.1. Aplicacións bilineais antisimétricas

Sexa V un espazo vectorial real e $\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ unha aplicación bilineal. Sexa $\{e_1, \dots, e_m\}$ unha base de V e $\{e^1, \dots, e^m\}$ a base (dual) de V^*.

Se $\omega(e_i, e_j) = \omega_{ij}$, podemos escribir

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{m} \omega_{ij}\, e^i \otimes e^j,$$

onde $\otimes$ representa o produto tensorial.

Definimos a aplicación

$$\begin{array}{rccl} \flat_\omega : & V & \longrightarrow & V^* \\ & v & \longmapsto & \flat_\omega(v) = i_v\omega = \omega(v, -)\,, \end{array}$$

onde $i_v\omega$ denota o produto interior, e así

$$\flat_\omega(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} e^j,$$

sendo (ω_{ij}) a matriz asociada a $\flat_\omega$.

Por outro lado, sabemos que o rango de $\flat_\omega$ é a dimensión da súa imaxe, que o mesmo tempo é o rango da súa matriz asociada, é dicir,

$$\mathit{rango}\, \flat_\omega = \dim Im\, \flat_\omega = \mathit{rango}\, \omega\,,$$

e como

$$\dim \ker \flat_\omega + \dim Im\, \flat_\omega = \dim V = m,$$

temos que

$$\textit{rango}\, \omega = m \Longleftrightarrow \ker \flat_\omega = \{0\} \Longleftrightarrow \flat_\omega \text{ é inxectiva} .$$

Como estamos entre espazos da mesma dimensión, tense que $\flat_\omega$ é un isomorfismo se e só se o rango de ω é máximo.

Agora ben,

$$\textit{rango}\, \omega = m = \textit{dim}\ V \Longleftrightarrow \ker \flat_\omega = \{0\} \Longleftrightarrow [\, \flat_\omega(v) = 0 \Longrightarrow v = 0\,]$$

$$\Longleftrightarrow [\, \omega(v,w) = 0,\ \forall\, w \in V \Longrightarrow v = 0\,] \Longleftrightarrow \omega \text{ é non dexenerada.}$$

Polo tanto, introducimos o seguinte resultado.

Proposición 2.1.

Son equivalentes:

i) ω é de rango máximo.

ii) $\flat_\omega : V \longrightarrow V^*$ é un isomorfismo lineal.

iii) ω é non dexenerada.

O seguinte resultado proporciona a forma estándar para as aplicacións bilineais e antisimétricas.

Teorema 2.2.

Sexa ω unha aplicación bilineal e antisimétrica en V. Entón existe unha base $B = \{e_1 \dots, e_n, u_1, \dots, u_n, f_1, \dots, f_k\}$ de V tal que:

$$\begin{aligned} &\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(u_i, u_j)\,, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\ &\omega(e_i, u_j) = \delta_{ij}\,, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\ &\omega(f_i, v) = 0\,, && \forall i \in \{1, \dots, k\}\,, e\ \forall v \in V. \end{aligned}$$

Observación 2.3.

1. A base do Teorema 2.2 non é única. Tradicionalmente denomínase base “canónica”.
2. Do Teorema 2.2 dedúcese que a matriz de ω respeto da base B é $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Na notación matricial con respecto a tal base, tense:

$$\omega(v,v') = \begin{pmatrix} & v & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_s & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ v' \\ \\ \end{pmatrix}, \; \forall\, v, v' \in V,$$

onde I_n denota a matriz identidade.

Demostración.

A demostración é por indución e é unha versión antisimétrica do proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

■

Como consecuencia do teorema anterior dedúcese o seguinte resultado.

Corolario 2.4.

Sexa V un espazo vectorial de dimensión m e ω unha forma bilineal antisimétrica e non dexenerada (de rango máximo). Entón a dimensión de V é par, $m = 2n$, e existe unha base $\{e_1, \dots, e_n, u_1, \dots, u_n\}$ de V tal que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge u^i \,,$$

onde $\{e^i, u^i\}$ é a base dual, e a matriz asociada, denominada matriz estándar, é

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

♢

Definición 2.5.

Unha ***forma simpléctica*** nun espazo vectorial real V, de dimensión finita, é unha forma bilineal $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$, antisimétrica e non dexenerada.

De maneira semellante, a aplicación

$$\begin{array}{rccc} \flat_\omega : & V & \longrightarrow & V^* \\ & v & \longmapsto & \flat_\omega(v) = \omega(v, -) \end{array}$$

é un isomorfismo.

Definición 2.6.

Chámase ***espazo vectorial simpléctico*** a un espazo vectorial V provisto dunha forma simpléctica ω.

Do corolario anterior sabemos que todo espazo vectorial simpléctico é de dimensión par.

Lema 2.7.

Sexa V un espazo vectorial simpléctico e $\{e_i, u_i\}$ unha base de V, como a descrita no Corolario 2.4, tal que

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge u^i \, ,$$

entón verifícase

$$\begin{aligned} \flat_\omega(e_i) &= u^i \qquad & \flat_\omega(u_i) &= -e^i \\ \flat_\omega^{-1}(e^i) &= -u_i \qquad & \flat_\omega^{-1}(u^i) &= e_i. \end{aligned} \tag{1}$$

2.2. Espazos vectoriais cosimplécticos

Dada calquera aplicación lineal e non trivial $\eta : V \longrightarrow \mathbb{R}$ xunto con unha aplicación bilineal $\Omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, defínese unha aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} \flat_{(\eta,\Omega)} : & V & \longrightarrow & V^* \\ & v & \longmapsto & \flat_{(\eta,\Omega)}(v) := i_v\Omega + \eta(v)\eta, \end{array}$$

de tal maneira que

$$[\flat_{(\eta,\Omega)}(v)](w) = \Omega(v,w) + \eta(v)\eta(w), \quad \text{para todo v,w} \in V.$$

Definición 2.8.

1. Un par (η, Ω) formado por unha aplicación bilineal antisimétrica $\Omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e por unha aplicación lineal e non trivial $\eta : V \longrightarrow \mathbb{R}$, chámase ***par cosimpléctico*** se a aplicación $\flat_{(\eta,\Omega)}$ é bixectiva, e polo tanto un isomorfismo.

2. Chámaselle ***espazo vectorial cosimpléctico*** a unha tripla (V, η, Ω) , onde V é un espazo vectorial e (η, Ω) é unha estructura cosimpléctica sobre V.

Proposición 2.9.

Sexa o espazo vectorial cosimpléctico (V, η, Ω)*, entón a* $dim(V) = 2n+1$ *(é un número impar).*

Demostración.

Polo Teorema 2.2 temos que a $dim(V) = 2n + k$. Chegará con ver que k=1.

Sexa $B = \{e_1, ..., e_n, u_1, ..., u_n, f_1, ..., f_k\}$ unha base de V como a do Teorema 2.2. Dado que $\Omega(f_i, v) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, k$ e para todo $v \in V$, temos que

$$\flat_{(\eta,\Omega)}(f_i) = \Omega(f_i, -) + \eta(f_i)\eta = \eta(f_i)\eta. \tag{2}$$

Sexa $\xi := \flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(\eta)$ entón de (2) deducimos que

$$f_i = \flat^{-1}(\eta(f_i)\eta) = \eta(f_i)\flat^{-1}(\eta) = \eta(f_i)\xi, \tag{3}$$

para cada $i = 1, \ldots, k$, polo tanto a base B de antes queda:

$$B = \{e_1, ..., e_n, u_1, ..., u_n, \xi\},$$

por suposto despois da normalización, se fose necesario.

∎

A partires da proba da Proposición 2.9 dedúcese o seguinte resultado.

Corolario 2.10.

Sexa o espazo vectorial cosimpléctico (V, η, Ω) *entón existe un vector* ξ *tal que*

$$\eta(\xi) = 1, \quad i_\xi\Omega = \Omega(\xi, -) = 0. \tag{4}$$

Chamaremos ***vector Reeb*** *de* (V, η, Ω) *o vector* ξ*.*

Lema 2.11.

Sexa o espazo vectorial cosimpléctico (V, η, Ω) *e* $\{e_i, u_i, \xi\}$ *unha base de* V*, entón verifícase*

$$\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i) = u^i, \quad \flat_{(\eta,\Omega)}(u_i) = -e^i, \quad \flat_{(\eta,\Omega)}(\xi) = \eta. \tag{5}$$

Demostración.

Demostramos a primeira identidade, as outras fanse de maneira semellante.

Supoñamos que

$$\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i) = A_{ij}e^i + B_{ij}u^j + C\eta,$$

entón
$$[\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i)](e_k) = A_{ik},$$
por outra banda, pola definición de $\flat_{(\eta,\Omega)}$ temos,
$$[\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i)](e_k) = [i_{e_i}\Omega + \eta(e_i)\eta](e_k) = \Omega(e_i, e_k) = 0,$$
debido ó Teorema 2.2, logo temos que
$$A_{ik} = 0.$$

Agora como
$$\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i) = B_{ij}u^j + C\eta,$$
deducimos que
$$[\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i)](u_k) = B_{ik},$$
e como
$$[\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i)](u_k) = [i_{e_i}\Omega + \eta(e_i)\eta](u_k) = \Omega(e_i, u_k) = \delta_{ik},$$
temos que
$$B_{ik} = \delta_{ik}.$$

Agora, de novo, como $\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i) = u^i + C\eta,$ dedúcese que
$$[\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i)](\xi) = u^i(\xi) + C\eta(\xi) = C,$$

e por outra banda
$$[\flat_{(\eta,\Omega)}(e_i)](\xi) = [i_{e_i}\Omega + \eta(e_i)\eta](\xi) = \Omega(e_i, \xi) = 0,$$
polo tanto $C = 0$.

■

Observación 2.12.

Sexa (V, η, Ω) un espazo vectorial cosimpléctico de dimensión $2n + 1$, entón utlizando a base $B = \{e_1, ..., e_n, u_1, ..., u_n, f_1, ..., f_k\}$, como a da Proposición 2.9, demóstrase que $\eta \wedge \Omega^n \neq 0$.

♢

Capítulo 3

Variedades simplécticas

3.1. Definicións básicas e propiedades

Definición 3.1.

Unha 2-forma $\omega \in \Lambda^2 M$, pechada ($d\omega = 0$) e non dexenerada, denomínase forma simpléctica e ó par (M, ω) denomínase variedade simpléctica.

O carácter non dexenerado significa que a aplicación

$$\begin{array}{rcccl} \omega(x) & : & T_xM \times T_xM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (v_x, w_x) & \longmapsto & \omega(x)(v_x, w_x), \end{array}$$

é non dexenerada en todo punto $x \in M$.

Exemplos:

1. $M = \mathbb{R}^{2n}$, a forma bilineal simpléctica canónica en $\mathbb{R}^{2n}$ é

   $$\begin{array}{rcccl} \omega & : & \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (v_1, v_2), (w_1, w_2) & \longmapsto & \omega\left((v_1, v_2), (w_1, w_2)\right) = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1. \end{array}$$

   Considerando coordenadas $(x^i, \dot{x}^i)$, a forma simpléctica canónica ven dada por

   $$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge d\dot{x}^i,$$

   e a súa matriz con respecto a base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$ é

   $$\omega(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

   sendo I_n a matriz identidade.

2. $M = T^*Q$ coa forma simpléctica canónica en T^*Q.

   Dada a variedade diferenciable T^*Q, defínese a 1-*forma de Liouville* $\theta \in \Lambda^1(T^*Q)$, no punto $\alpha_q \in T^*Q$, como

$$\begin{array}{rcl} \theta\,(\alpha_q): \quad T_{\alpha_q}(T^*Q) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X_{\alpha_q} & \longmapsto & \theta\,(\alpha_q)\left(X_{\alpha_q}\right) \,=\, \alpha_q\left(\pi_*\,(\alpha_q)\left(X_{\alpha_q}\right)\right), \end{array} \tag{1}$$

   onde $X_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}\,(T^*Q)$ e $\pi_*\,(\alpha_q) : T_{\alpha_q}\,(T^*Q) \longrightarrow T_qQ$ é a diferencial da proxección π do fibrado cotanxente no punto α_q.

   Se denotamos as coordenadas en T^*Q por (q^i, p_i), a expresión local de θ en coordenadas canónicas é

$$\theta \,=\, p_i\, dx^i\,. \tag{2}$$

   A partir da 1-forma de Liouville θ defínese a 2-forma simpléctica canónica $\omega \,=\, -d\theta \in \Lambda^2(T^*M)$, onde d denota o operador diferencial exterior, e cuxa expresión local é

$$\omega \,=\, -d\theta = \, dx^i \,\wedge\, dp_i\,. \tag{3}$$

   Así, ω é unha 2-forma diferencial exacta, xa que $\omega = d(-\theta)$, e polo tanto é pechada $(d\omega = d(-d\theta) = 0)$.

3. $M = \mathbb{S}^2$. A forma simpléctica canónica en $\mathbb{S}^2$ defínese como segue

$$\begin{array}{rcl} \omega_p \quad : \quad T_p\mathbb{S}^2 \times T_p\mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_p, v_p) & \longmapsto & \omega_p(u_p, v_p) := < p, u_p \times v_p >, \end{array}$$

   onde u_p, $v_p \in T_p\mathbb{S}^2 = \{p\}^\perp$.

De seguido, estableceremos un resultado que nos mostra que todas as variedades simplécticas, da mesma dimensión, son semellantes.

Teorema 3.2. ***(Teorema de Darboux, 1842-1917)***

Sexa (M, ω) unha variedade simpléctica, entón para todo punto $x \in M$ existe unha carta local

$$(U_{x,\varphi} \equiv (q^i, p_i)), \quad 1 \le i \le n$$

centrada en x, é dicir, $\varphi(x) = 0$, tal que

$$\omega\big|_U = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i \quad . \tag{4}$$

As (q^i, p_i) denomínanse coordenadas canónicas.

Sempre hai veciñanzas coordenadas nas que as compoñentes de ω son constantes. A súa matriz, con respecto a base $\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_j}$, é

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Consecuencias do teorema de Darboux

- A dimensión de M é par, $\dim M = 2n$.
- M é orientable con forma de volume $\omega^n = \omega \wedge \overset{n}{\dots} \wedge \omega \neq 0$ posto que

$$\omega^n = dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \neq 0.$$

3.2. Campos de vectores hamiltonianos

Sexa (M, ω) unha variedade simpléctica, entón a aplicación

$$\begin{array}{rccl} \flat_\omega : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \Lambda^1 M \\ & X & \longmapsto & \flat_\omega(X) = \omega(X, -) = i_X \omega \end{array}$$

é un isomorfismo de módulos, sendo

$$[\flat_\omega(X)](Y) = \omega(X, Y), \quad \text{para todo Y} \in \mathfrak{X}(M).$$

Denotaremos o isomorfismo inverso por

$$\sharp_\omega : \Lambda^1 M \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Definición 3.3.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ é unha función diferenciable definida en M, chámase **campo de vectores Hamiltoniano** correspondente a función f ó único campo de vectores

$$X_f \in \mathfrak{X}(M),$$

que é solución da ecuación

$$\flat_\omega(X_f) = \omega(X_f, -) = df, \qquad (i_{X_f}\omega = df), \tag{5}$$

ou ben

$$X_f = \flat_\omega^{-1}(df) = \sharp_\omega(df).$$

Se $(q^i, p_i)_{1\leq i\leq n}$ é un sistema de coordenadas canónicas en M, da expresión local de (4) e da definición de (5) de X_f, dedúcese que a expresión local de X_f é

$$X_f \,=\, \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} \,-\, \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{6}$$

o cal sae de $\quad \omega = dq^i \wedge dp_i\,.$

3.3. Sistemas hamiltonianos simplécticos

Definición 3.4.

Cando a función f é a **función Hamiltoniana** H dun sistema mecánico, a tripla (M, ω, H) chámaselle **sistema Hamiltoniano**.

Da expresión local (6) dedúcese o seguinte resultado.

Teorema 3.5.

Sexa $c : \mathbb{R} \to M$ unha curva integral de X_H dada localmente por $c(t) = (q^i(t), p_i(t))$, entón $c(t)$ é solución do sistema de ecuacións diferenciais ordinarias

$$\frac{dq^i}{dt} \,=\, \frac{\partial H}{\partial p_i}\circ c\,, \quad \frac{dp_i}{dt} \,=\, -\frac{\partial H}{\partial q^i}\circ c\,, \quad 1 \leq i \leq n,$$

*que son as **ecuacións de Hamilton da Mecánica Clásica**, cando H é a función hamiltoniana dun sistema dinámico.*

Así, a ecuación

$$i_{X_H}\omega \,=\, dH,$$

pódese interpretar como a versión xeométrica das ecuacións de Hamilton sobre unha variedade simpléctica.

Proposición 3.6. (Ley de conservación da enerxía)

Se (M, ω, H) é un sistema dinámico entón H é constante ó longo das curvas integrais de X_H, é dicir, H é unha cantidade conservada ou constante de movemento ó longo das traxectorias do sistema.

Demostración.

Isto é consecuencia de que $X_H(H) = 0,\quad$ pois de maneira inmediata temos que

$$X_H(H) = dH(X_H) = i_{X_H}\omega(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0.$$

■

3.4. Transformacións simplécticas

Definición 3.7.

Se (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) son variedades simplécticas, un **simplectomorfismo (ou transformación simpléctica)** é un difeomorfismo $\Phi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ que verifica

$$\Phi^* \omega_2 = \omega_1.$$

A seguinte proposición dinos que se Φ é unha transformación simpléctica e se $\alpha(t)$ é solución das ecuacións de Hamilton con hamiltoniano H, entón $\Phi(\alpha(t))$ é solución das ecuacións de Hamilton con hamiltoniano $H \circ \Phi$.

Proposición 3.8.

Se $\Phi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ é unha transformación simpléctica entón

$$\Phi^* X_H = X_{H \circ \Phi},$$

para calquera $H : M_2 \to \mathbb{R}$, é dicir, $\Phi^* X_H \in \mathfrak{X}(M_1)$ é hamiltoniano con hamiltoniano $H \circ \Phi : M_1 \to M_2 \to \mathbb{R}$.

Demostración.

Sexa $\Phi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ unha transformación simpléctica entón

$$\Phi^* X_H = X_{H \circ \Phi}.$$

Supoñamos que

$$\Phi^* \omega_2 = \omega_1$$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rr, bend right, "H\circ\Phi"'] & M_2 \arrow[r, "H"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

entón probaremos que

$$i_{\Phi^* X_H} \omega_1 = i_{X_{H \circ \Phi}} \omega_1 \iff \flat_\omega(\Phi^* X_H) = \flat_\omega(X_{H \circ \Phi}).$$

En verdade

$$i_{\Phi^* X_H} \omega_1 = i_{\phi^* X_H} \Phi^* \omega_2 = \Phi^*(i_{X_H} \ \omega_2) = \Phi^*(dH) = d(H \circ \Phi) = i_{X_{H \circ \Phi}} \omega_1 \, .$$

Se $\alpha(t)$ é curva integral de X_H,

$$X_H(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t),$$

entón $\Phi^{-1}(\alpha(t))$ é curva integral de

$$\Phi^* X_H = X_{H\circ\Phi}.$$

$$\begin{aligned}
(\Phi^* X_H)(\Phi^{-1}(\alpha(t))) &= (\Phi^{-1})_*(\Phi(\Phi^{-1}(\alpha(t)))\, X_H(\Phi(\Phi^{-1}(\alpha(t)))) \\
&= (\Phi^{-1})_*(\alpha(t)) X_H(\alpha(t)) \\
&= (\Phi^{-1})_*(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) \\
&= (\Phi^{-1}\circ\alpha)_*(t)\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right).
\end{aligned}$$

Isto dinos que as transformacións simplécticas coinciden coas transformacións canónicas da Mecánica, aquelas que deixan invariantes as ecuacións de Hamilton.

Sexa

$$\Phi : (q^i, p_i) \to (Q^i(q,p), P_i(q,p)),$$

unha transformación simpléctica.
Sexa $\alpha(t) = (Q^i(t), P_i(t))$ curva integral de X_H, entón é solución de

$$\frac{dQ^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}\circ\alpha\,, \qquad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q^i}\circ\alpha,$$

e por unha proposición, $\Phi^{-1}(\alpha(t)) = (q^i(t), p_i(t))$ é curva integral de $X_{H\circ\Phi}$ verificando

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H\circ\Phi}{\partial p_i}\Big|_{\Phi^{-1}(\alpha(t))}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H\circ\phi}{\partial q^i}\Big|_{\Phi^{-1}(\alpha(t))}.$$

■

Capítulo 4

Variedades cosimplécticas

Os contidos deste capítulo atópanse en [1, 2, 4, 6, 7, 11].

4.1. Definicións básicas e propiedades

As variedades cosimplécticas foron introducidas por Libermann en [9, 10].

Definición 4.1.

Unha estructura cosimpléctica nunha variedade M de dimensión impar $2n+1$ é un par (η, Ω) onde η é unha 1-forma pechada e Ω é unha 2-forma pechada tal que $\eta \wedge \Omega^n$ é unha forma de volume, é dicir, $\eta \wedge \Omega^n \neq 0$.

Unha variedade cosimpléctica é unha variedade provista dunha estrutura cosimpléctica (η, Ω).

Sexa M unha variedade e sexan $\eta \in \Lambda^1(M)$ e $\Omega \in \Lambda^2(M)$ pechadas. Consideremos a aplicación

$$\begin{array}{rccl} \flat_{(\eta,\Omega)}: & TM & \longrightarrow & T^*M \\ & v_x & \longmapsto & \flat_{(\eta,\Omega)}(v_x) = i_{v_x}\Omega + (i_{v_x}\eta)\eta = \Omega(v_x, -) + \eta(v_x)\eta. \end{array}$$

Vamos introducir a seguinte caracterización de variedades cosimplécticas e simplécticas.

Proposición 4.2. *[2]*

- *Se (M, η, Ω) é cosimpléctica, entón a aplicación*

$$\begin{array}{rccl} \flat_{(\eta,\Omega)}: & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \Lambda^1(M) \\ & X & \longmapsto & \flat_{(\eta,\Omega)}(X) = i_X\Omega + (i_X\eta)\eta = \Omega(X, -) + \eta(X)\eta, \end{array} \qquad (1)$$

é un isomorfismo de módulos.

- *Se $\flat_{(\eta,\Omega)}$ é un isomorfismo de módulos, entón (M, η, Ω) é unha variedade cosimpléctica, e polo tanto M é de dimensión impar, ou ben (M, Ω) é unha variedade simpléctica, en cuxo caso M é de dimensión par.*

$\diamondsuit$

Definición 4.3.

O campo de vectores

$$\mathcal{R} = \flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(\eta)$$

en M, denomínase **campo de vectores de Reeb** da variedade cosimpléctica (M, η, Ω). Dado que $\eta \wedge \Omega^n \neq 0$ (M é orientable) tense que o campo de vectores de Reeb está caracterizado por

$$i_{\mathcal{R}}\Omega = \Omega(\mathcal{R}, -) = 0, \quad i_{\mathcal{R}}\eta = \eta(\mathcal{R}) = 1, \tag{2}$$

e polo tanto $\quad \flat_{(\eta,\Omega)}(\mathcal{R}) = \eta, \quad$ véxase [3].

Observación 4.4.

1. As variedades cosimplécticas pódense considerar como unha contrapartida en dimensión impar das variedades simplécticas.

2. As variedades cosimplécticas son orientables pois $\eta \wedge \Omega^n \neq 0$.

Exemplo 4.5.

O exemplo canónico de variedade cosimpléctica é o *fibrado cotanxente extendido*

$$(\mathbb{R} \times T^*Q, dt, pr_2^*\omega)$$

con $t : \mathbb{R} \times T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ e $pr_2 : \mathbb{R} \times T^*Q \longrightarrow T^*Q$ as proxeccións canónicas e ω a forma simpléctica canónica de T^*Q.

En coordenadas (t, q^i, p_i) temos:

$$\eta = dt, \qquad \Omega = pr_2^*\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i.$$

Exemplo 4.6.

Dada unha aplicación $H : \mathbb{R} \times T^*Q \to \mathbb{R}$, vamos a construir unha 2-forma $\Omega_H \in \Lambda^2(\mathbb{R} \times T^*Q)$ tal que (dt, Ω_H) é unha estrutura cosimpléctica en $\mathbb{R} \times T^*Q$.

Sexa θ a 1-forma de Liouville en T^*Q e sexa

$$\theta_H = pr_2^*\theta - H\, dt.$$

De (2) temos que localmente

$$\theta_H = p_i dq^i - H dt = p_i dq^i - H dt.$$

Definimos

$$\Omega_H = -d\theta_H,$$

polo tanto

$$\Omega_H = -d\theta_H = -d(pr_2^*\theta - H\, dt) = pr_2^*(-d\theta) - dH \wedge dt = pr_2^*(\omega) - dH \wedge dt,$$

onde ω é a forma simpléctica canónica de T^*Q, véxase [3]. A expresión local de Ω_H é

$$\Omega_H = dq^i \wedge dp_i + dH \wedge dt.$$

Agora é evidente que dt e Ω_H son pechadas, así que para probar que (dt, Ω_H) é cosimpléctica temos que ver que $dt \wedge \Omega_H^n \neq 0$, pero $dt \wedge \Omega_H = dt \wedge pr_2^*\omega$ e así temos que

$$dt \wedge \Omega_H^n = dt \wedge pr_2^*\omega^n \neq 0\,,$$

dado que $\omega^n \neq 0$.

$\diamondsuit$

Tamén hai un teorema de Darboux para variedades cosimplécticas.

Teorema 4.7. ***(Teorema cosimpléctico de Darboux)***

Calquera variedade cosimpléctica (M, η, Ω) de dimensión $2n+1$ admite para todo punto $x \in M$, unha carta local

$$(U_{x,\varphi} \equiv (z, q^i, p_i)), \quad 1 \leq i \leq n$$

centrada en x, é dicir, $\varphi(x) = 0$, tal que

$$\Omega\big|_U = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i, \qquad \eta = dz, \qquad \mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

As coordenadas que nos proporciona o ***Teorema de Darboux*** *denomínanse coordenadas canónicas.*

Corolario 4.8.

Sexa $\flat_{(\eta,\Omega)}$ *o isomorfismo definido en (1). A expresión local de dita aplicación é:*

$$\flat_{(\eta,\Omega)}(\frac{\partial}{\partial q^i}) = dp_i, \qquad \flat_{(\eta,\Omega)}(\frac{\partial}{\partial p_i}) = -dq^i, \qquad \flat_{(\eta,\Omega)}(\frac{\partial}{\partial z}) = dz. \tag{4}$$

Observación 4.9.

Dada unha variedade cosimpléctica M, a aplicación

$$\begin{array}{rccl} \flat_{(\eta,\Omega)}: & TM & \to & T^*M \\ & v_x & \to & \flat_{(\eta,\Omega)}(v_x) = i_{v_x}\Omega(x) + \eta(v_x)\eta(x), \end{array}$$

é un difeomorfismo. Sexa $\omega = -d\theta$ a forma simpléctica canónica de T^*M entón o "pull-back"

$$\omega_0 = \flat^*_{(\eta,\Omega)}\omega$$

é unha forma simpléctica en TM.

4.2. Campos de vectores en variedades cosimplécticas

4.2.1. Campo de vectores gradiente

Por medio do isomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \flat_{(\eta,\Omega)}: & \mathfrak{X}(M) & \to & \Lambda^1(M) \\ & X & \to & \flat_{(\eta,\Omega)}(X) = i_X\Omega + \eta(X)\eta, \end{array}$$

podemos asociar a cada función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo de vectores $grad\, f$, chamado **gradiente de f** que está definido por

$$grad\, f = \flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(df),$$

é dicir,

$$\flat_{(\eta,\Omega)}(grad\, f) = i_{grad\, f}\Omega + \eta(grad\, f)\eta = df.$$

Expresión local de $grad\, f$

Supoñamos que a expresión local de $grad\, f$ é:

$$grad\, f = A^i\frac{\partial}{\partial q^i} + B_i\frac{\partial}{\partial p_i} + C\frac{\partial}{\partial z},$$

entón, do Corolario anterior, a partires das identidades de (4), obtemos que

$$\flat_{(\eta,\Omega)}(gradf) = df = \frac{\partial f}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{5}$$

Por outra banda,

$$\flat_{(\eta,\Omega)}(gradf) = A^i dp_i + B_i(-dq^i) + Cdz. \tag{6}$$

Agora, de (5) e (6) temos que,

$$A^i dp_i + B_i(-dq^i) + Cdz = \frac{\partial f}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

logo chegamos a que:

$$A^i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \qquad -B_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}, \qquad C = \frac{\partial f}{\partial z},$$

co cal a expresión do campo $grad\, f$ é

$$grad\, f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{7}$$

4.2.2. Campo de vectores hamiltoniano

Podemos asociar a cada función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo de vectores X_f, chamado **campo de vectores hamiltoniano** correspondente a f, como segue

$$X_f = \flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(df - \mathcal{R}(f)\eta),$$

dado que

$$grad\, f = \flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(df),$$

temos que

$$\begin{aligned} X_f &= \flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(df - \mathcal{R}(f)\eta) = \flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(df) - \flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(\mathcal{R}(f)\eta) \\ &= grad\, f - \mathcal{R}(f)\,\flat^{-1}_{(\eta,\Omega)}(\eta) = grad\, f - \mathcal{R}(f)\,\mathcal{R}\,, \end{aligned}$$

é dicir,

$$X_f = grad\, f - \mathcal{R}(f)\,\mathcal{R}\,.$$

Así de (3) e (7) deducimos que a expresión local de X_f é

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{8}$$

4.2.3. Campo de vectores de evolución

O campo de vectores

$$\mathcal{E}_f = \mathcal{R} + X_f,$$

denomínase **campo de vectores de evolución** correspondente a f.

Das expresións locais (4) e (8) de $\mathcal{R}$ e X_f, respectivamente, dedúcese que a expresión do campo vectorial de evolución é:

$$\mathcal{E}_f = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{9}$$

Observación 4.10.

No caso da variedade cosimpléctica $(\mathbb{R} \times T^*Q, dt, \Omega_H)$ o seu campo de Reeb, $\mathcal{R}_H$, ven dado por

$$\mathcal{R}_H = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i},$$

que coincide co campo de vectores de evolución $\mathcal{E}_H$.

4.3. Automorfismos cosimplécticos

Definición 4.11.

Se (M_1, η_1, Ω_1) e (M_2, η_2, Ω_2) son variedades cosimplécticas, unha **transformación cosimpléctica** é un difeomorfismo $\Phi : M_1 \to M_2$ que verifica que

$$\Phi^*\eta_2 = \eta_1, \quad \Phi^*\Omega_2 = \Omega_1.$$

A seguinte proposición dinos que se Φ é unha transformación cosimpléctica e se $\alpha(t)$ é solución das ecuacións de Hamilton con hamiltoniano H, entón $\Phi(\alpha(t))$ é solución das ecuacións de Hamilton con hamiltoniano $H \circ \Phi$.

Proposición 4.12.

Se $\Phi : (M_1, \eta_1, \Omega_1) \to (M_2, \eta_2, \Omega_2)$ é unha transformación cosimpléctica entón

$$\Phi^*\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_{H\circ\Phi}$$

para calquera $H : M_2 \to \mathbb{R}$, é dicir, $\Phi^*\mathcal{E}_H \in \mathfrak{X}(M_1)$ é campo de vectores de evolución con hamiltoniano $H \circ \Phi : M_1 \to M_2 \to \mathbb{R}$.

Neste caso verifícase:

1. $\Phi^*\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1$.

2. $\Phi^* X_H = X_{H\circ\Phi}$.

3. $\Phi^*\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_{H\circ\Phi}$.

Vexámolo.

Demostración. Dada a seguinte función

$$(M_1, \eta_1, \Omega_1) \xrightarrow{\Phi} (M_2, \eta_2, \Omega_2) \xrightarrow{H} \mathbb{R}$$

e a aplicación

$$\begin{array}{rccl} \flat_1 : & \mathfrak{X}(M_1) & \to & \Lambda^1(M_1) \\ & \Phi^*\mathcal{R}_2 & \to & \flat_1(\Phi^*\mathcal{R}_2) = \flat_1(\mathcal{R}_1) \Longrightarrow \Phi^*\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1. \end{array}$$

1.
Sabemos que $\flat_1(\Phi^*\mathcal{R}_2) = \eta_1$.

$\flat_1(\Phi^*\mathcal{R}_2) = i_{\Phi^*\mathcal{R}_2}\Omega_1 + \eta_1(\Phi^*\mathcal{R}_2)\eta_1 = i_{\Phi^*\mathcal{R}_2}\Phi^*\Omega_2 + \Phi^*\eta_2(\Phi^*\mathcal{R}_2)\Phi^*\eta_2 =$
$= \Phi^*(i_{\mathcal{R}_2}\Omega_2 + \eta_2(\mathcal{R}_2)\eta_2) = \Phi^*(\flat_2(\mathcal{R}_2)) = \Phi^*\eta_2 = \eta_1$.

Logo, polo "pull-back"de $\flat_1$ temos que

$$\Phi^*\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1.$$

2.
$\flat_1(\Phi^* X_H) = i_{\Phi^* X_H}\Omega_1 + \eta_1(\Phi^* X_H)\eta_1 = i_{\Phi^* X_H}\Phi^*\Omega_2 + \Phi^*\eta_2(\Phi^* X_H)\Phi^*\eta_2 =$
$= \Phi^*(i_{X_H}\Omega_2 + \eta_2(X_H)\eta_2) = \Phi^*(\flat_2(X_H)) = \Phi^*(dH - \mathcal{R}_2(H)\eta_2) =$
$= d(\Phi^* H) - \Phi^*(\mathcal{R}_2(H))\eta_1 = d(\Phi^* H) - \mathcal{R}_1(H\circ\Phi)\eta_1 = d(H\circ\Phi) - \mathcal{R}_1(H\circ\Phi)\eta_1 =$
$= \flat_1(X_{H\circ\Phi}) = \flat_1 d(H\circ\Phi) - \mathcal{R}_1(H\circ\Phi)\eta_1$.

Resumindo, acabamos de probar que $\flat_1(\Phi^* X_H) = \flat_1(X_H \circ \Phi) \Longleftrightarrow \Phi^* X_H = X_{H\circ\Phi}$.

3.
$\flat_1(\Phi^*\mathcal{E}_H) = i_{\Phi^*\mathcal{E}_H}\Omega_1 + \eta_1(\Phi^*\mathcal{E}_H)\eta_1 = i_{\Phi^*\mathcal{E}_H}\Phi^*\Omega_2 + \Phi^*\eta_2(\Phi^*\mathcal{E}_H)\Phi^*\eta_2 =$
$= \Phi^*(i_{\mathcal{E}_H}\Omega_2 + \eta_2(\mathcal{E}_H)\eta_2) = \Phi^*(\flat_2(\mathcal{E}_H)) = \Phi^*(dH - \mathcal{R}_2(H)\eta_2) = d(\Phi^* H) - \Phi^*(\mathcal{R}_2(H))\eta_1 =$
$= d(\Phi^* H) - \mathcal{R}_1(H\circ\Phi)\eta_1 = d(H\circ\Phi) - \mathcal{R}_1(H\circ\Phi)\eta_1 = \flat_1(X_{H\circ\Phi}) = \flat_1 d(H\circ\Phi) - \mathcal{R}_1(H\circ\Phi)\eta_1$.

Entón $\Phi^*\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_{H\circ\Phi}$.

■

Capítulo 5

Sistemas hamiltonianos en variedades cosimplécticas

5.1. Aplicacións físicas

Sexa $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ o hamiltoniano dun sistema físico que dependa do tempo. Denotamos con $\mathcal{E}_H$ o campo de vectores de evolución introducido no capítulo anterior e sexa

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & M \\ & t & \longmapsto & \alpha(t) = (q^i(\alpha(t)), p_i(\alpha(t)), z(\alpha(t))) = (q^i(t), p_i(t), z(t))\,, \end{array}$$

unha curva integral de $\mathcal{E}_H$. Logo temos que

$$\dot{\alpha}(t) = \mathcal{E}_H(\alpha(t)).$$

O vector tanxente a curva α é:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{dq^i}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\alpha(t)} + \frac{dp_i}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial p_i}\Big|_{\alpha(t)} + \frac{dz}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial z}\Big|_{\alpha(t)}, \tag{1}$$

e tendo en conta a expresión local (9), o vector $\mathcal{E}_H(\alpha(t))$ ven dado por

$$\mathcal{E}_H(\alpha(t)) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big|_{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\alpha(t)} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}\Big|_{\alpha(t)} + \frac{\partial}{\partial z}\Big|_{\alpha(t)} = \dot{\alpha}(t). \tag{2}$$

Polo tanto de (1) e (2) deducimos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}\Big|_{\alpha(t)} = \frac{dq^i}{dt}\Big|_t, \qquad -\frac{\partial H}{\partial q^i}\Big|_{\alpha(t)} = \frac{dp_i}{dt}\Big|_t, \qquad \frac{dz}{dt}\Big|_t = 1, \tag{3}$$

que son as ecuacións de Hamilton.

Observación 5.1.

A diferencia do caso autónomo, $H(q^i, p_i)$, véxase a Proposición 3.6, no caso non autónomo, $H(z, q^i, p_i)$, o hamiltoniano non é unha cantidade conservada.

Sexa

$$\alpha(t)\left[q^i(\alpha(t)), p_i(\alpha(t)), z(\alpha(t))\right] = \left(q^i(t), p_i(t), z(t)\right),$$

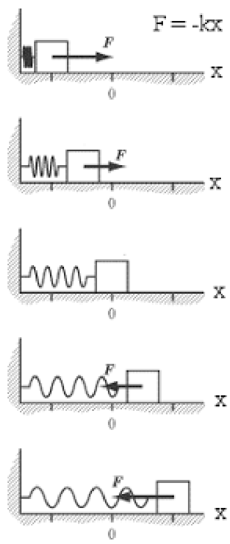
unha curva integral de $\mathcal{E}_H$, entón

$$\begin{aligned} \frac{d(H\circ\alpha)}{dt}\Big|_t &= \frac{dH(q^i(\alpha(t)), p_i(\alpha(t)), z(\alpha(t)))}{dt}\Big|_t \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\Big|_{\alpha(t)}\frac{dq^i}{dt}\Big|_t + \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big|_{\alpha(t)}\frac{dp^i}{dt}\Big|_t + \frac{\partial H}{\partial z}\Big|_{\alpha(t)}\frac{dz}{dt}\Big|_t = \frac{\partial H}{\partial z}\Big|_{\alpha(t)}. \end{aligned}$$

A última identidade é consecuencia de (3).

5.2. Exemplo: hamiltoniano dependente do tempo

(Resorte e parede móvil) Unha masa m está unida a unha parede por un resorte horizontal con constante de resorte k e lonxitude l_0 na posición de relaxamento. A parede está colocada para moverse cara adiante e cara atrás con posición $X_{\text{parede}} = Asen(\omega t)$.



A posición da masa con respecto a situación da parede en $t = 0$ (que tomaremos arbitrariamente como a nosa orixe) é $l_0 + q + X_{\text{parede}}$, xa que a definición de q implica que $l_0 + q$ é a posición con respecto a parede.

Así a velocidade da masa é

$$\dot{q} + \dot{X}_{\text{parede}} = \dot{q} + A\omega cos(\omega t),$$

polo que o lagrangiano é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{q} + A\omega cos(\omega t))^2 - \frac{1}{2}kq^2.$$

O momento conxugado a q é

$$p \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m(\dot{q} + A\omega cos(\omega t),$$

que pode ser invertido para dar

$$\dot{q} = \frac{p}{m} - A\omega cos(\omega t).$$

Así que o Hamiltoniano é

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\left(\frac{p}{m} - A\omega cos(\omega t)\right) - \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kq^2\right) = \frac{p^2}{2m} - p(A\omega cos(\omega t)) + \frac{1}{2}kq^2.$$

Así este hamiltoniano é un hamiltoniano dependente do tempo e pode considerarse como a aplicación

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbb{R} \times T^*\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, q, p) & \longmapsto & \dfrac{p^2}{2m} - p(A\omega cos(\omega t)) + \dfrac{1}{2}kq^2, \end{array}$$

sendo as ecuacións de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} - A\omega cos(\omega t), \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq. \end{aligned}$$

Da expresión de H dedúcese que

$$\left.\frac{dH \circ \alpha}{dt}\right|_t = \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{\alpha(t)} \neq 0,$$

como se comenta na Observación 5.1.

Bibliografía

[1] Abraham, R., and Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*, second edition, revised, enlarged, reset. Benjamin/Cummings, Reading, 1978.

[2] C. Albert, Le théorème de réduction de Marsden-Weinstein en géométrie cosymplectique et de contact, J. Geom. Phys. 6 (1989), no. 4, 627-649.

[3] Blair, D. Contact manifolds in Riemannian geometry, Lect. Notes in Math., 509, Springer, Berlin, 1976.

[4] Cantrijn F., de León, Lacomba E. A, Gradient vector fields on cosymplectic manifolds 1992 J. Phys. A: Math. Gen. 25 175.

[5] Cannas Da Silva, A., *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.

[6] Cappelletti-Montano B. , de Nicola A., Yudin I., A survey on cosymplectic geometry, Reviews in Mathematical Physics 25 (2013), 1343002, 55 pages.

[7] De León, M., Rodrigues, P.R. *Methods of differential geometry in analytical mechanics*, North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.

[8] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1959.

[9] P. Libermann, Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact, Colloque Géom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958), Centre Belge Rech. Math., Louvain, 1959, pp. 37-59.

[10] P. Libermann, Sur quelques exemples de structures pfaffiennes et presque cosymplectiques, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 60 (1962), 153-172.

[11] Libermann, P., and C-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Kluwer Academic1987.