FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Una introducción a la teoría del punto fijo

Jacobo Santos Fernández

2018/2019

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Una introducción a la teoría del punto fijo

Jacobo Santos Fernández

julio/2019

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemática
Título: Una introducción a la teoría de punto fijo
Breve descripción del contenido
Este trabajo consiste en la revisión de algunos teoremas de punto fijo que constituyen herramientas de gran utilidad para deducir la existencia de soluciones a diferentes problemas. Se considerarán resultados válidos en espacios de dimensión finita ó infinita y se estudiarán algunas de sus aplicaciones. Se analizarán algunos ejemplos no triviales de aplicaciones sin puntos fijos.
Recomendaciones
Tener superadas las materias: Diferenciación de Funciones de Varias Variables Reales, Series Funcionales e Integración de Riemann en Varias Variables Reales, Cálculo Vectorial e Integración de Lebesgue. Tener conocimientos de programas de cálculo simbólico
Otras observaciones

Índice general

Resumen

En este trabajo, nos centraremos en diferentes resultados de punto fijo, en los cuales, imponiendo ciertas condiciones sobre una aplicación y su dominio de definición, aseguramos la existencia y unicidad de tal punto fijo. Dichos puntos fijos pueden ser números reales, vectores o incluso elementos de un espacio de Banach. Por lo tanto, se manejarán resultados tanto en dimensión finita como infinita. Se mostrarán algunas aplicaciones de los resultados mencionados a la existencia de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Abstract

In this work, we will focus on several fixed point results, in which, imposing certain conditions on the application and its domain of definition, we can ensure the existence and uniqueness of such a fixed point. These fixed points can be real numbers, vectors or even elements in a Banach space. Then, we will study results in both finite and infinite dimension. We will show some applications of the results mentioned to the existence of solution to second order ordinary differential equations.

Introducción

En los últimos años, numerosos matemáticos se han preocupado de estudiar las propiedades de las aplicaciones lineales de un espacio topológico en sí mismo, como es el caso de autovalores, autovectores, subespacios invariantes o puntos fijos. En este trabajo, nos centraremos en los puntos fijos. Un punto fijo de una aplicación f de un espacio X en sí mismo es un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Dicho punto fijo, dependiendo de las características del espacio base X, puede ser un punto, un vector de $\mathbb{R}^n$ o una función, este último caso es muy útil para la prueba de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales.

A lo largo del trabajo, nos centraremos en imponer ciertas condiciones sobre la aplicación f, como, por ejemplo, la continuidad, contractividad o compacidad y también restricciones sobre los espacios de definición, como la compacidad, completitud, convexidad o dimensión, con la finalidad de probar la existencia y unicidad de puntos fijos.

En este trabajo, abarcaremos numerosos resultados introducidos por los matemáticos más conocidos del siglo XX, como es el caso de Stefan Banach, Julius Schauder, Luitzen Brouwer o Mark Alexandrovich Krasnoselskii; todos ellos afectados directa o indirectamente por la Primera y Segunda Guerra Mundial. Usaremos las referencias [5], [6], [7].

En primer lugar, hablaremos de uno de los matemáticos más significativos en los teoremas de punto fijo, Luitzen Brouwer, nacido en 1881 en la ciudad de Overschie. Brouwer, después de acabar la educación secundaria, en 1897 ingresó en la Universidad de Ámsterdam, donde estudió Matemáticas durante siete años. Los intereses de Brouwer eran muy diversos, desde topología, aplicaciones, lógica o incluso la filosofía mística. Después de realizar la tesis doctoral en 1907, Brouwer descubrió varios resultados muy valiosos; estudió el quinto problema de Hilbert, basado en la teoría de grupos continuos, a partir del cual descubrió uno de sus resultados más importantes, el Teorema de Punto Fijo de Brouwer, a través del cual enunció otros como el Teorema de la Esfera Peluda. Brouwer también estudió varias aplicaciones topológicas, así como introdujo el grado, noción que permitió la clasificación topológica de muchas variedades. En sus últimos años, Brouwer se centró en su punto de vista intuicionista, intentando persuadir a los matemáticos para que rechazaran la ley del tercio excluso, falleciendo en diciembre de 1966 en Blaricum.

Stefan Banach nació el 30 de marzo de 1892 en Cracovia. Después de realizar sus estudios de primaria y secundaria en su ciudad natal, viajó en 1910 a Leópolis para estudiar en la Facultad de Ingeniería. Durante la Primera Guerra Mundial trabajó en Cracovia como profesor. Posteriormente, empezó a reunirse con otros matemáticos como Steinhaus, Mazur o Schauder en el Café Escocés, lugar donde llevaban a cabo reuniones para discutir problemas matemáticos, muchos de los cuales están escritos en el llamado Cuaderno Escocés. Como anécdota podemos destacar que Banach se salvó de la Segunda Guerra Mundial gracias a que trabajó como criador de piojos con el biólogo Weigl, que se dedicaba a estudiar la enfermedad del tifus. Banach es considerado usualmente como el fundador del análisis funcional moderno y en sus obras podemos destacar el concepto conocido como espacio de Banach y contribuciones fundamentales en la teoría de los espacios vectoriales topológicos como el teorema de Hahn-Banach o el teorema de Banach-Steinhaus. Pero en este trabajo nos centraremos en el llamado Teorema del Punto Fijo de Banach (también conocido como teorema de la aplicación contractiva) presentado en 1922, una de las herramientas más importantes para demostrar la existencia y unicidad de soluciones de numerosos problemas matemáticos.

Figura 1: Banach

Finalmente, otro de los participantes más significativos del Café Escocés es Juliusz Schauder, nacido en 1899 en Leópolis. Schauder, de familia judía, sufrió directamente las consecuencias de la Segunda Guerra Mundial y sus publicaciones abarcaron solo 10 años, entre las que destacan la base de Schauder, el principio de Leray-Schauder, método usado para probar la existencia de soluciones para complicadas ecuaciones diferenciales, o el Teorema de Punto fijo de Schauder para espacios de Banach, introducido en 1930 después de que Brouwer publicara en 1911 su teorema de punto fijo para espacios de dimensión finita. El teorema de punto fijo de Schauder es una gran herramienta para analizar ecuaciones diferenciales parciales elípticas e hiperbólicas y, además de ser utilizado para obtener resultados cualitativos, también se utiliza para resolver problemas numéricos en los ordenadores.

Figura 2: Schauder

Capítulo 1

Aplicaciones contractivas y Teorema del punto fijo de Banach

La mayoría de teoremas que aseguran la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales sujetas a ciertas condiciones iniciales y de frontera pueden ser reducidos a formulaciones de tipo punto fijo. Probaremos la existencia y unicidad de solución para una ecuación diferencial sujeta a una condición de contorno del estilo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(a) = b. \end{cases} \tag{1.1}$$

A continuación presentaremos la noción de aplicación contractiva.

Definición 1.1. Dada una aplicación T de un espacio métrico (M, d) en sí mismo, se dice que T es una aplicación contractiva si existe un número real $k \in [0, 1)$ tal que $d(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y)$ para todo $x, y \in M$.

Una forma de ver que una función real definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es contractiva, es comprobar que tiene la derivada acotada por un valor menor que 1 en todo punto del intervalo, es decir, toda función derivable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leqslant k < 1$ para todo $x \in [a, b]$ es contractiva con constante de contractividad k. Esto es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.2. Consideramos la función $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$. A simple vista, no es sencillo comprobar que es contractiva por la definición, en cambio, derivando la función, obtenemos que $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ y se tiene que:

$$|f'(x)| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \right| \leqslant \left| \frac{2}{\sqrt{x^2 + 5}} \right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{6}} < 1.$$

Así, podemos asegurar que f es contractiva con constante de contractividad $k = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Teorema 1.3 (Banach, 1922). *Cualquier aplicación contractiva de un espacio métrico completo no vacío en sí mismo posee un único punto fijo en dicho espacio (véase en el libro de Smart [4], p.2,3).*

Demostración. Supongamos una aplicación $T : (M, d) \longrightarrow (M, d)$ contractiva y (M, d) espacio métrico completo.
Dado $x_0 \in M$, tomamos $x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), ..., x_n = T^n(x_0)$.
Veamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_i = T^i(x_0)$ es de Cauchy. En efecto, por ser T contractiva, se tiene que existe $k \in [0, 1)$ tal que $d(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y)$ para todo $x, y \in M$.
Por tanto, $d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leqslant kd(x_n, x_{n-1}) \leqslant k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant k^n d(x_1, x_0)$.
Así, dado $m > n$, tenemos que
$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^{n+1} + k^n)d(x_1, x_0) = \textstyle\sum_{i=n}^{m-1} k^i d(x_1, x_0) \\ &\leqslant \textstyle\sum_{i=n}^{\infty} k^i d(x_1, x_0) = \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \longrightarrow 0,\ n \to \infty. \end{aligned}$$
Por tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (M, d). Como (M, d) es un espacio métrico completo, existe $z \in M$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = z$.
Veamos que z es el único punto fijo de T. En efecto,
$$d(T(z), z) \leqslant d(T(z), T(x_n)) + d(T(x_n), z) \leqslant kd(z, x_n) + d(x_{n+1}, z) \longrightarrow 0,$$
de lo que se sigue que $T(z) = z$.
Supongamos que existe $w \in M$ tal que $T(w) = w$ con $w \neq z$, por tanto, $d(z, w) > 0$. En ese caso, $d(z, w) = d(T(z), T(w)) \leqslant kd(z, w) < d(z, w)$, lo cual es una contradicción, lo que prueba la unicidad. $\square$

Veamos que, en el Teorema del Punto Fijo de Banach, todas las hipótesis son esenciales. En efecto:

1. El Teorema del Punto Fijo de Banach no es cierto si M es vacío.

2. El Teorema del Punto Fijo de Banach no es cierto en general si la aplicación no es contractiva. Si consideramos la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1+x$, cumple todas las propiedades del teorema menos la de contractividad y no tiene puntos fijos, ya que la recta $y = 1 + x$ es paralela a la recta $y = x$, por tanto, en general, nunca se intersecarán.

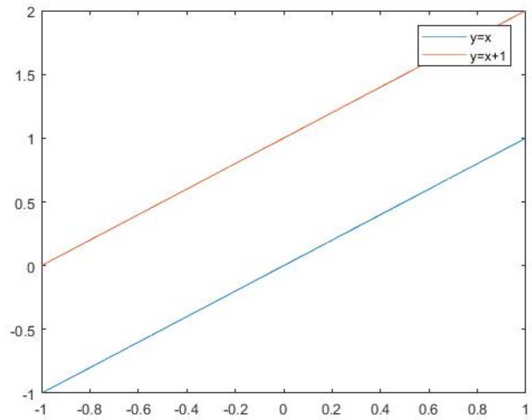

Figura 1.1: Representación de la gráfica $y = x$ frente a $y = x + 1$.

3. El Teorema del Punto Fijo de Banach no es cierto en general si T no es una aplicación de M en sí mismo. Considerando la aplicación $f : [\frac{1}{3}, 1] \longrightarrow [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ dada por $f(x) = \frac{x}{2}$.

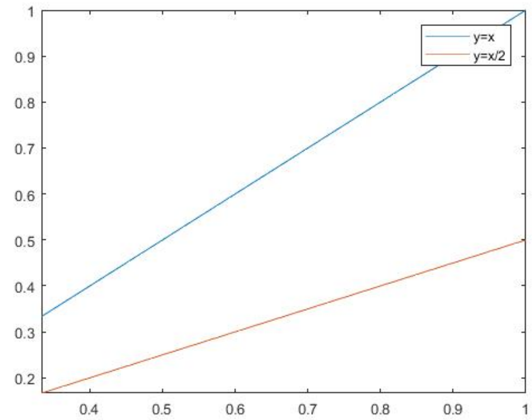

Figura 1.2: Representación de la gráfica $y = x$ frente a $y = x/2$.

4. El Teorema del Punto Fijo de Banach no es cierto si el espacio métrico (X, d) no es completo. Sea $X = (0, 1]$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$, que es un espacio métrico no completo ya que, por ejemplo, la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy pero no converge en X. Sea $T : X \longrightarrow X$ dada por $T(x) = \frac{x}{2}$, la cual es contractiva, ya que
$$d(Tx, Ty) = \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right| = \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}d(x, y).$$
Sin embargo, T no tiene puntos fijos en M, ya que $T(x) = x$ si y sólo si $\frac{x}{2} = x$,

por tanto, $x = 0$ sería el único candidato a punto fijo de T, el cual no pertenece a $X = (0, 1]$.

Por otra parte, la contractividad no es necesaria para la existencia de punto fijo, pues existen aplicaciones no contractivas con puntos fijos, como es el caso de $f : [1/2, 1] \longrightarrow [1/2, 1]$ dada por $f(x) = x - \sin(\pi x)$. Es fácil comprobar que $x = 1$ es el único punto fijo de la aplicación, en cambio no es contractiva, ya que

$$|f(1/2) - f(1)| = |1/2 - \sin(\pi/2) - 1 + \sin(\pi)| = 3/2 > |1/2 - 1| = 1/2.$$

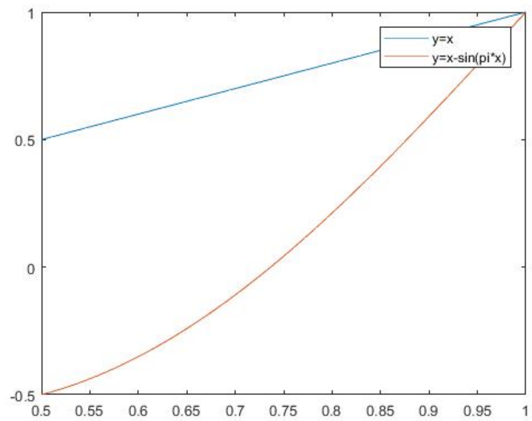

Figura 1.3: Representación de la gráfica $y = x$ frente a $y = \sin(\pi x)$.

Veamos que, bajo ciertas condiciones podemos asegurar la existencia y unicidad de solución para la ecuación diferencial (1.1) utilizando la teoría de punto fijo.

Teorema 1.4 (Lipschitz, 1876)**.** *Sea una aplicación f continua con valores en $\mathbb{R}$ y localmente Lipschitziana con respecto a la segunda variable, es decir, existe una constante $k > 0$ tal que $|f(t, y) - f(t, z)| \leqslant k|y - z|$ para cierto entorno N_2 de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces la ecuación diferencial con condición de contorno*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(a) = b. \end{cases} \tag{1.1}$$

tiene solución única en algún entorno de a.(Ver Smart [4], p.4,5)

Demostración. Integrando entre a y t, podemos observar que el problema (1.1) es equivalente a la ecuación integral

$$y(t) = b + \int_a^t f(x, y(x))dx. \tag{1.2}$$

Denotamos a M como el conjunto de las funciones continuas definidas en un compacto A de $\mathbb{R}$ y consideramos la aplicación $T : M \longrightarrow M$ que, para cada $y \in M$ y $t \in A$, está definida mediante

$$(Ty)(t) = b + \int_a^t f(x, y(x))dx.$$

Así, la solución de (1.2) será un punto fijo de la aplicación T.

Tomamos un entorno compacto $N_1 \subset N_2$ de (a, b), entonces, por la continuidad de f y la compacidad de N_1, f está acotada en N_1, es decir, existe una constante $L > 0$ tal que $|f(x, y)| < L$ para todo par $(x, y) \in N_1$.

Sea y una función cuyo grafo está contenido en N_1, se tiene que:

$$|(Ty)(t) - b| = |\textstyle\int_a^t f(x, y(x))dx| \leqslant L|t - a|.$$

Tomamos $d \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño de modo que la función continua y esté bien definida en el intervalo compacto $I_d = [a - d, a + d]$, $y(t) \in [b - Ld, b + Ld]$ y el rectángulo $R = [a - d, a + d] \times [b - Ld, b + Ld]$ esté contenido en el entorno N_1.

Consideramos ahora M como el conjunto de aplicaciones continuas cuyo grafo está contenido en R, en el que consideramos la métrica del supremo $d(f, g) = \sup\limits_{t \in I_d} |f(t) - g(t)|$, el cual es completo. Veamos que la aplicación T definida anteriormente es contractiva y apliquemos el Teorema del Punto Fijo de Banach para asegurar la existencia y unicidad de punto fijo. En efecto,

$$\begin{aligned} |(Ty)(t) - (Tz)(t)| &= \left|\textstyle\int_a^t f(x, y(x))dx - \int_a^t f(x, z(x))dx\right| \\ &= \left|\textstyle\int_a^t \left(f(x, y(x)) - f(x, z(x))\right) dx\right| \\ &\leqslant d \sup_{x \in I_d} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| \\ &\leqslant dk \sup_{x \in I_d} |y(x) - z(x)| \,. \end{aligned}$$

Así, como la desigualdad anterior se verifica para cada t, tenemos que

$$\begin{aligned} \|Ty - Tz\| &= \sup_{t \in I_d} |(Ty)(t) - (Tz)(t)| \\ &\leqslant dk \sup_{t \in I_d} |y(x) - z(x)| = dk\|y - z\|. \end{aligned}$$

Por tanto, T es una aplicación contractiva si $dK < 1$, lo cual se puede conseguir siempre tomando d suficientemente pequeño. Aplicando el Teorema del Punto Fijo de Banach, podemos asegurar la existencia y unicidad del punto fijo para T, es decir, probamos la existencia y unicidad de solución para ecuaciones del tipo (1.1) en cierto entorno de a.

□

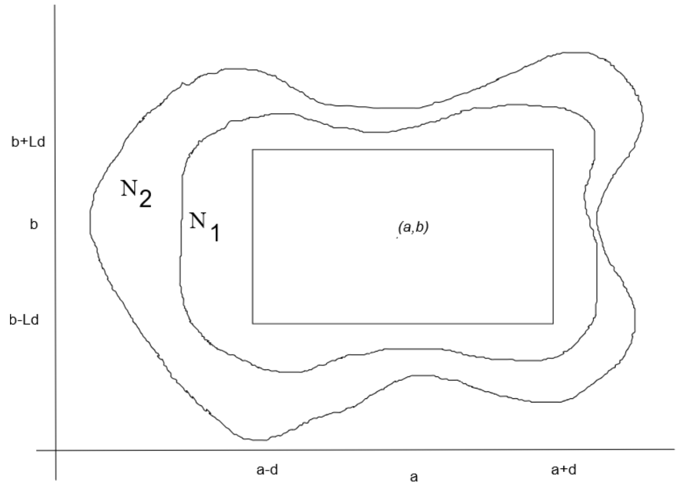

Figura 1.4: Representación de los entornos N_1, N_2 y R.

A continuación, daremos otra aplicación del Teorema del Punto Fijo de Banach, muy útil también en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.5 (Teorema de la Función implícita)**.** *Sea N un entorno de un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que f es una función continua de N en N verificando que:*

1. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *existe en N y es continua en (a, b).*
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.
3. $f(a, b) = 0$.

Entonces, existe una única función y_0 definida en cierto entorno suficientemente pequeño de a tal que $f(x, y_0(x)) = 0$ en dicho entorno (ver Smart [4], p.5-7).

Demostración. A partir de ahora, usaremos la notación $D_f = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Denotaremos por M un conjunto de funciones que a lo lago de la demostración les impondremos condiciones para poder probar la existencia e unicidad de punto fijo de la función T de M en M, que para cada x, viene dada por

$$[Tz](x) = z(x) - \tfrac{f(x,z(x))}{D_f}.$$

Está claro que, si probamos que dicha función tiene un único punto fijo y, dicho punto fijo sera la función que buscamos.

Consideramos el rectángulo $R = [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [b - \delta, b + \delta]$, donde ε y δ son números positivos suficientemente pequeños para los cuales

$$\left|\tfrac{1}{D_f}\tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-1\right| < \tfrac{1}{2} \text{ para } (x,y)\in R,$$

$$\left|\tfrac{1}{D_f}f(x,b)\right| < \tfrac{1}{2}\delta \text{ para } |x|<\varepsilon.$$

Ahora, sea $C = C([a-\varepsilon, a+\varepsilon], \mathbb{R})$ y tomamos

$$M = \{y \in C \ : \ y(a) = b, \ \|y-\beta\| \leqslant \delta\},$$

donde, en este caso, β denota a la función que vale b en todo punto. Claramente T es una aplicación que lleva elementos de M en C.

Para $(x,y)\in R$, tenemos que

$$\left|\tfrac{\partial}{\partial y}\left(y - \tfrac{1}{D_f}f(x,y)\right)\right| = |1 - \tfrac{1}{D_f}\tfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)| < \tfrac{1}{2},$$

de lo que se sigue que, para $y, z \in M$,

$$|[Ty]\,(x) - [Tz]\,(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}|y(x)-z(x)|, \ x\in[a-\varepsilon, a+\varepsilon].$$

Por tanto, $\|Ty - Tz\| \leqslant \frac{1}{2}\|y-z\|$, es decir, T es una aplicación contractiva con constante de contractividad $k = 1/2$.

Además, T aplica M en M ya que:

$$\begin{aligned} \|Ty-\beta\| &\leqslant \|Ty - T\beta\| + \|T\beta - \beta\| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\|y-\beta\| + \|T\beta-\beta\| \\ &< \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta = \delta. \end{aligned}$$

Además, por ser M subespacio cerrado de un espacio completo, M es completo. Por el Teorema del Punto Fijo de Banach, T tiene un único punto fijo, lo que es equivalente a que existe una única función continua y definida en un entorno $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ de a tal que $f(x, y(x)) = 0$, para todo x en dicho entorno. □

Este teorema puede ser generalizado para el caso m-dimensional. Para ello previamente debemos introducir el término de derivada de Fréchet:

Definición 1.6. Sean X un espacio normado, U un abierto no vacío de X y $F : U \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que F es diferenciable en $u_0 \in U$ en el sentido de Fréchet si existe una aplicación lineal y continua $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\tfrac{F(u_0+h)-F(u_0)-L(h)}{\|h\|} = 0.$$

La aplicación L se denomina diferencial en el sentido de Fréchet de F en u_0.

Sea f una aplicación de $B \times C$ en C, donde B y C son espacios de Banach, D_f es la diferencial en el sentido de Fréchet de f en (a, b). Reemplazamos la segunda condición en el teorema 1.5 por la existencia de $(D_f)^{-1}$, en particular, si f está definida en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$, interpretaremos D_f como la matriz de dimensión $n \times n$ de derivadas parciales con respecto a las n variables de $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 2

Teorema de Brouwer

En este capítulo introduciremos una propiedad de los espacios topológicos que usaremos en lo que resta de trabajo, la propiedad del punto fijo. También probaremos que la bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ tiene dicha propiedad.

Definición 2.1. Un espacio topológico X se dice que posee la propiedad del punto fijo si toda aplicación continua de X en X tiene un punto fijo.

Teorema 2.2. *La propiedad del punto fijo es una propiedad topológica.*

Demostración. Dados dos espacios topológicos X e Y homeomorfos, tenemos que probar que si uno posee la propiedad del punto fijo el otro también. Supongamos que X tiene la propiedad del punto fijo y veamos que Y también la posee. Sea una aplicación $f : Y \longrightarrow Y$ continua, tenemos que ver que f posee al menos un punto fijo. Denotamos por $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfimo de X en Y. Consideramos la composición

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h^{-1}} X,$$

la cual es continua y lleva elementos de X en X, por tanto, como X tiene la propiedad del punto fijo, tenemos que existe al menos un $x \in X$ tal que $\left(h^{-1} \circ f \circ h\right)(x) = x$, de lo que se sigue que, componiendo con h por la izquierda, $(f \circ h)(x) = h(x)$, es decir, $f(y) = y$, donde $y = h(x)$. Así un punto fijo de f será $y = h(x)$. $\square$

Algunos ejemplos de espacios topológicos que poseen la propiedad del punto fijo son el intervalo $[0, 1]$ o el disco unidad cerrado en el plano. A simple vista, hay espacios para los cuales no es sencillo probar que poseen la propiedad del punto fijo, para ello surgen los llamados retractos.

Definición 2.3. Dados dos espacios topológicos X e Y, se dice que X es un retracto de Y si $X \subset Y$ y existe una función continua $r : Y \longrightarrow X$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in X$. La aplicación r se llama retracción o retracto.

Teorema 2.4. *Si Y tiene la propiedad del punto fijo y X es un retracto de Y, entonces X tiene la propiedad del punto fijo (véase en Smart [4], p.10).*

Demostración. Supongamos que Y tiene la propiedad del punto fijo y sea $r : Y \longrightarrow X$ una retracción, veamos que X posee la propiedad del punto fijo, es decir, que cualquier aplicación $f : X \longrightarrow X$ continua posee al menos un punto fijo.

Consideramos la aplicación $g : Y \longrightarrow X$, $g = f \circ r$ continua (por ser composición de continuas). Como $X \subset Y$ y la continuidad no depende del rango, podemos tomar la función $g^* : Y \longrightarrow Y$ continua, la cual, por hipótesis, posee al menos un punto fijo, es decir existe $x_0 \in Y$ tal que $g^*(x_0) = x_0$. Como $x_0 \in X \subset Y$, entonces $r(x_0) = x_0$, de lo que se obtiene que $f(x_0) = x_0$. □

Notación 2.5. En lo que sigue, usaremos la notación B^n y $\mathbb{S}^n$ para representar la bola cerrada centrada en el origen de radio la unidad y de dimensión n y la esfera centrada en el origen de radio la unidad y dimensión $n+1$ respectivamente, es decir, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ y $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

Previamente de enunciar y demostrar el teorema de Brouwer, debemos introducir una serie de resultados topológicos:

Definición 2.6. Un espacio topológico X se dice contráctil a un punto $x_0 \in X$ si existe una función continua $f : X \times [0,1] \longrightarrow X$ verificando que $f(x,0) = x$ y $f(x,1) = x_0$ para todo $x \in X$. Tal función f es una homotopía entre X y x_0.

Teorema 2.7. *Para $n \geqslant 0$, $\mathbb{S}^n$ no es contráctil.*

Lema 2.8. *Si Y es contráctil, todo retracto de Y es contráctil.*

Demostración. Sea Y un espacio topológico contráctil y X un retracto de Y. Veamos que X es contráctil. Sea $r : Y \longrightarrow X$ una retracción y $f : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ una homotopía entre Y e $y_0 \in Y$. Considerando la composición

$$X \times [0,1] \overset{(r,Id)}{\longrightarrow} Y \times [0,1] \overset{f}{\longrightarrow} Y \overset{r}{\longrightarrow} X,$$

tenemos una homotopía entre X y $r(y_0)$. □

Teorema 2.9 (Brouwer, 1910)**.** *B^n tiene la propiedad del punto fijo (véase en la monografía de Smart [4], p.11).*

Demostración. Supongamos que existe una aplicación T de B^n en B^n sin puntos fijos y llegaremos a una contradicción. Si dicha aplicación existiese, podríamos construir un retracto de B^n en $\mathbb{S}^{n-1}$ como sigue: para cada $x \in B^n$, consideramos la intersección de la recta que une Tx y x con $\mathbb{S}^n$, dicha intersección serán dos puntos, pero consideraremos el punto de intersección obtenido al prolongar el segmento que va desde Tx a x, y denotamos dicho punto por $r(x)$. Así, acabamos de construir un retracto $r : B^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ lo cual no es posible pues B^n es contráctil y, así, todo retracto de B^n sería contráctil, en particular $\mathbb{S}^{n-1}$, lo que es una contradicción, pues $\mathbb{S}^{n-1}$ no es contráctil. □

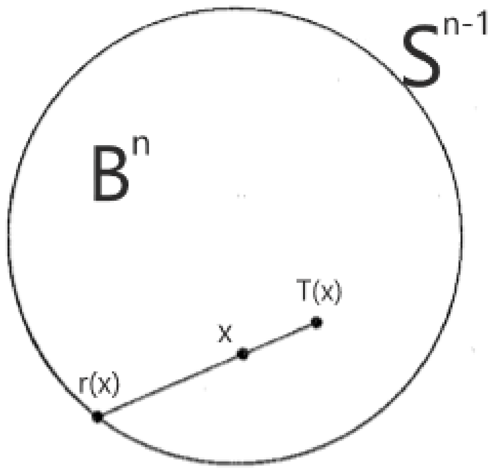

Figura 2.1: Demostración Teorema de Brouwer.

2.1. Resultados equivalentes al Teorema de Brouwer

A continuación, estudiaremos numerosos resultados que, aunque a simple vista pueden parecer distintos al teorema de Brouwer, en realidad son equivalentes a él, dichos resltados se ven reflejados en el libro de Istrăţescu [3], p.116-119. Antes de enunciar y demostrar la siguiente equivalencia, introduciremos el Teorema de Stone-Weierstrass.

Teorema 2.10 (Stone-Weierstrass). *Sea K un subconjunto compacto de un espacio topológico X. Dada $f : K \longrightarrow X$ una función continua, entonces existe una sucesión de funciones polinómicas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a f en K.*

Teorema 2.11. *El teorema de Brouwer es equivalente a que no existe un retracto continuo y diferenciable de B^n en $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Demostración. Supongamos que se verifica el teorema de Brouwer y que existe un retracto $r : B^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ continuo y diferenciable. Tomamos $r_1(x) = -r(x)$, r_1 es una función continua de B^n en B^n que no tiene puntos fijos, lo que contradice el teorema de Brouwer.

Supongamos ahora que no existe ningún retracto continuo y diferenciable de B^n en $\mathbb{S}^{n-1}$ y veamos que se verifica el teorema de Brouwer. Supongamos que no se verifica el teorema de Brouwer, es decir, existe una función continua f de B^n en B^n que no tiene puntos fijos y consideramos la línea que une x y $f(x)$ intersecada con $\mathbb{S}^{n-1}$, lo que nos da un punto que llamaremos $g(x)$. La función $x \mapsto g(x)$ está bien definida y verifica que $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Probaremos que g es continua y diferenciable, para ello, la línea que une x y $f(x)$ tiene la forma $\alpha(x)x + (1 - \alpha(x))f(x)$. Para probar la afirmación tenemos que ver que α es continua y diferenciable:

$$\begin{aligned}&\langle \alpha(x)x + (1-\alpha(x))f(x), \alpha(x)x + (1-\alpha(x))f(x)\rangle \\ &= \alpha(x)^2\|x\|^2 + 2\alpha(x)(1-\alpha(x))\langle x, f(x)\rangle + (1-\alpha(x))^2 \,|\|f(x)\|^2 = 1,\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Por tanto $\alpha(x)$ es la solución de una ecuación cuyos coeficientes son continuos y diferenciables, así la solución $\alpha(x)$ tiene la misma propiedad y es continua y diferenciable. En consecuencia, el punto fijo de g existe.

Por la continuidad de f en el compacto B^n, el teorema de Stone-Weierstrass nos asegura que podemos encontrar una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas y diferenciables que convergen uniformemente a f. Tomamos ahora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $(x_n) = f_n(x_{n-1})$. El punto al que converge dicha sucesión será un punto fijo de f. Contradicción con que no se verifica el teorema de Brouwer. $\square$

Otro teorema equivalente al Teorema de Brouwer es el enunciado por Henri Poincaré en 1886, 24 años antes que el propio Teorema de Brouwer.

Teorema 2.12 (H. Poincaré). *Sea $f : B^n \longrightarrow B^n$ una aplicación continua y supongamos que para algún $r > 0$ y todo $\lambda > 0$, $f(u) + \lambda u \neq 0$ para todo u con $||u|| = r$. Entonces existe un punto u_0, con $||u_0|| < r$, tal que $f(u_0) = 0$.*

A continuación, enunciaremos otro teorema equivalente al teorema de Brouwer, el cual es muy útil en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.13 (Teorema Poincaré-Miranda). *Si denotamos por D^n=$\{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$ y dada $f_i : D^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y verificando:*

$$\begin{aligned}f_i(x_1, ..., x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, ..., x_n) \geqslant 0,\\ f_i(x_1, ..., x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, ..., x_n) \leqslant 0,\end{aligned}$$

para todo $i = 1, ..., n$. Entonces existe un punto $x_0 \in D^n$ tal que $f_i(x_0) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Demostración. Veamos que es equivalente al teorema de Brouwer, para ello, en primer lugar, supongamos que se verifica el teorema de Brouwer y veamos que se cumple dicho teorema. Por ser f_i una función continua definida en un compacto, alcanza el máximo y el mínimo en dicho compacto. Denotemos por m_i y M_i el mínimo y máximo de f_i en D^n y sean $\delta_i^{'}$ y $\delta_i^{''}$ las distancias del conjunto de puntos de D^n tales que $f_i(x) < 0$ y $f_i(x) > 0$ a los hiperplanos $x_i = a_i$ y $x_i = b_i$, respectivamente. Sabemos que $m_i < 0$ y que $M_i > 0$, por tanto, podemos encontrar n números ε_i tales que

$$0 < \varepsilon_i \leqslant -\delta_i^{'}/m_i,$$
$$0 < \varepsilon_i \leqslant \delta_i^{''}/M_i.$$

Definimos así las funciones $g_i(x_1, ..., x_n) = x_i + \varepsilon_i f_i(x_1, ..., x_n)$, las cuales cumplen, si $f(x_1, ..., x_n) = 0$, que

$$a_i \leqslant x_i \leqslant g_i(x_1, ..., x_n) \leqslant b_i.$$

Si $f_i(x_1, ..., x_n) > 0$, tenemos

$$a_i \leqslant x_i < g_i(x_1, ..., x_n) \leqslant b_i - \delta_i^{''} + \varepsilon_i M_i \leqslant b_i.$$

En el caso de $f_i(x_1, ..., x_n) < 0$, se tiene

$$b_i \geqslant x_i > g_i(x_1, ..., x_n) \geqslant a_i + \delta_i^{'} + \varepsilon_i m_i \geqslant a_i.$$

Si tomamos $G = (g_1, \ldots, g_n)$, por el teorema de Brouwer sabemos que G admite un punto fijo, es decir, existe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D^n$ tal que $G(x) = x$, en particular, $x_i = x_i + \varepsilon_i f_i(x)$, es decir, $f_i(x) = 0$.

Supongamos ahora que se verifica dicho teorema y veamos que se cumple el teorema de Brouwer. Sea $f_i : D^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y verificando:

$$f_i(x_1, ..., x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, ..., x_n) \geqslant 0,$$
$$f_i(x_1, ..., x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, ..., x_n) \leqslant 0,$$

$\forall i = 1, ..., n$. Entonces existe un punto $x_0 \in D^n$ tal que $f_i(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$. Tomando $g_i^*(x) = f_i(x) - x_i$, por hipótesis sabemos que existe $x_0 \in D^n$ tal que $g_i(x_0) = 0$, por tanto, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ tiene la propiedad de punto fijo.

□

Otra forma equivalente de enunciar el teorema de Brouwer es la siguiente:

Teorema 2.14. *Si C es un subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial de dimensión finita y $f : C \longrightarrow C$ es una aplicación continua, entonces f admite al menos un punto fijo. En otras palabras, todo subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial de dimensión finita tiene la propiedad de punto fijo.*

La demostración es inmediata, se sigue de que todo subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial de dimensión finita es homeomorfo a la bola cerrada en dicha dimensión y, como la propiedad del punto fijo es una propiedad topológica, se obtiene el resultado.

2.2. Aplicaciones del Teorema de Brouwer

El teorema de Brouwer tiene varias aplicaciones importantes en diferentes ámbitos, a continuación estudiaremos uno de los más importantes. Este hace referencia al bien conocido Teorema Fundamental del Álgebra, que establece que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces complejas. Veamos que una de sus demostraciones es una consecuencia del Teorema de Brouwer:

Teorema 2.15 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, un polinomio con coeficientes complejos. Entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$ (véase Istrăţescu [3], p.141).*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a_n = 1$, de no ser así, bastaría con dividir todos los coeficientes del polinomio entre a_n.

Fijemos $z = re^{i\theta}$, con $0 \leqslant \theta < 2\pi$, y sea $R = 2 + |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$. Definimos la función $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$g(z) = \begin{cases} z - p(z)/\left(Re^{i(n-1)\theta}\right), & si \;\; |z| \leqslant 1, \\ z - p(z)/\left(Rz^{n-1}\right), & si \;\; |z| > 1. \end{cases}$$

Es claro que g es una función continua (por construcción).

Consideramos el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |z| \leqslant R\}$ compacto y convexo en el plano complejo. Veamos que es invariante por g. En efecto, dado $z \in A$, distinguimos dos casos: Si $|z| \leqslant 1$, entonces:

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |z - p(z)/Re^{i(n-1)\theta}| \leqslant |z| + |p(z)|/R \\ &= |z| + |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n|/R \\ &\leqslant 1 + (|a_0| + |a_1 z| + \cdots + |a_{n-1} z^{n-1}| + |z^n|)/R \\ &\leqslant 1 + (|a_0| + |a_1| \cdots + |a_{n-1}| + 1)/R \leqslant 1 + 1 = 2 \leqslant R. \end{aligned}$$

Si $|z| \geq 1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|g(z)| &= |z - p(z)/Rz^{n-1}| = \left|z - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n)/(Rx^{n-1})\right| \\
&= \left|z - z/R - (a_0 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1})/(Rz^{n-1})\right| \\
&\leqslant |z - z/R| + \left|(a_0 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1})/(Rz^{n-1})\right| \\
&\leqslant (R-1) + \left(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}z^{n-1}|\right) / \left|Rz^{n-1}\right| \\
&\leqslant (R-1) + |a_0|/|Rz^{n-1}| + |a_1 z|/|Rz^{n-1}| + \cdots + |a_{n-1}z^{n-1}|/|Rz^{n-1}| \\
&= (R-1) + |a_0|/|Rz^{n-1}| + |a_1|/|Rz^{n-2}| + \cdots + |a_{n-1}|/|R| \\
&\leqslant (R-1) + |a_0|/|R| + |a_1|/|R| + \cdots + |a_{n-1}|/|R| \\
&= (R-1) + (|a_0| + |a_1| + \cdots |a_{n-1}|)/R = R - 1 + (R-2)/R \leqslant R.
\end{aligned}
$$

Por tanto, A es invariante mediante g. Aplicando el Teorema de Brouwer a la aplicación $g_{|A} : A \longrightarrow A$, se deduce que existe $z_0 \in A$ tal que $g_{|A}(z_0) = z_0$, es decir, se satisface que $p(z_0) = 0$. $\square$

Capítulo 3

Teorema de Schauder

Después de que Brouwer probara su famoso teorema en 1912, numerosos matemáticos realizaron diversas pruebas sobre su teorema, obteniendo resultados sobre conjuntos más generales, como es el caso de Birkhoff y Kellog, que demostraron que cualquier subconjunto compacto y convexo de $L^2([0,1])$ o $C([0,1],\mathbb{R}^n)$ tiene la propiedad de punto fijo. En 1927 J. Schauder extendió dicho teorema para espacios métricos lineales y tres años después obtuvo que todo subconjunto compacto y convexo de un espacio de Banach tiene la propiedad del punto fijo. Antes de demostrar el teorema de Schauder, debemos enunciar y demostrar una serie de resultados.

Lema 3.1. *Sea U un espacio métrico. Supongamos que T es una aplicación continua de U o de un subconjunto cerrado de U en un subconjunto compacto de U y que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $x(\varepsilon)$ tal que $d\left((Tx)(\varepsilon), x(\varepsilon)\right) < \varepsilon$. Entonces T posee al menos un punto fijo (ver el libro de Smart [4], p.2).*

Demostración. Sea $T : M \longrightarrow L$, donde M es un subconjunto cerrado y L un subconjunto compacto de un espacio métrico U y supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $x(\varepsilon)$ tal que $d\left((Tx)(\varepsilon), x(\varepsilon)\right) < \varepsilon$. Como $(Tx)(\varepsilon) \in L$ y L es compacto, podemos asumir que existe una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a cero tal que $Tx(\varepsilon_n) \to y \in L$. Como $d\left((Tx)(\varepsilon), x(\varepsilon)\right) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $x(\varepsilon_n) \to y$ y ,así, $y \in M$.

Por tanto, Ty está bien definido y, por la continuidad de T, se tiene que

$$Ty = T\left(\lim_{n\to\infty} x(\varepsilon_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \left((Tx)(\varepsilon_n)\right) = y$$

y, así, y es un punto fijo de T. □

Lema 3.2. *Sea (Y, d) un espacio métrico compacto. Para cada $\varepsilon > 0$ consideramos $P_\varepsilon : Y \longrightarrow Y$ una aplicación continua verificando que $d(P_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$, $\forall x \in Y$. Si cada* *conjunto $P_\varepsilon(Y)$, para $\varepsilon > 0$, tiene la propiedad de punto fijo, entonces Y tiene la propiedad de punto fijo (ver Smart [4], p.13).*

Demostración. Sea $T : Y \longrightarrow Y$ una función continua y veamos que admite al menos un punto fijo. $P_\varepsilon(Y)$ tiene la propiedad de punto fijo, sea $P_\varepsilon T : P_\varepsilon(Y) \longrightarrow P_\varepsilon(Y)$ una aplicación continua verificando que $d(P_\varepsilon(x), x) < \varepsilon$, $\forall x \in Y$, así existe $x_\varepsilon \in P_\varepsilon(Y)$ tal que $P_\varepsilon T(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Por tanto $d(x_\varepsilon, T(x_\varepsilon)) = d(P_\varepsilon T(x_\varepsilon), T(x_\varepsilon)) < \varepsilon$, luego, por el Lema 3.1, se tiene que x_ε es un punto fijo de Y. □

Veamos que podemos generalizar los resultados de dimensión infinita al cubo de Hilbert:

Definición 3.3. Definimos el cubo de Hilbert como el subconjunto $\mathcal{H}_0$ de ℓ^2 formado por las sucesiones $a = (a_1, a_2, ...) \in \ell^2$ tales que $|a_n| < 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota 3.4. En el caso de ℓ^2 nos referimos a la norma de un elemento $x = (x_1, x_2, \dots)$ de ℓ^2 como $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^\infty x_n^2\right)^{1/2}$.

Teorema 3.5. *Todo subconjunto compacto y convexo $\mathcal{H}$ de un espacio de Banach $\mathcal{B}$ es homeomorfo a un subconjunto compacto y convexo del cubo de Hilbert $\mathcal{H}_0$ (Ver Smart [4], p.13).*

Demostración. Consideramos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ y sea la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}^*$(espacio dual de $\mathcal{B}$) dada por $f_n(x_n) = ||x_n||/n$, que cumplen que $||f_n|| = 1/n$. La aplicación $F : x \in \mathcal{H} \longrightarrow (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...) \in \mathcal{H}_0$ es un homeomorfismo entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$. En efecto, F es un operador lineal y acotado y es biyectivo ya que, si $x \neq y$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geqslant |f_n(x_n)| - |f_n(x) - f_n(y) - f_n(x_n)| \geqslant \|x_n\|/n - \|x - y - x_n\|/n > 0,$$

para x_n suficientemente cerca de $x - y$. Así, F es un homeomorfismo de $\mathcal{H}$ en $F(\mathcal{H})$ (subconjunto compacto y convexo de $\mathcal{H}_0$, por la compacidad y convexidad de $\mathcal{H}$ y la continuidad de F). □

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar un resultado sobre la propiedad del punto fijo en un espacio de dimensión infinita.

Teorema 3.6. *El cubo de Hilbert $\mathcal{H}_0$ tiene la propiedad del punto fijo (ver Smart [4], p.14).*

Demostración. Denotamos por $P_n : x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^2 \longrightarrow P_n(x) = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Así, para cada $a \in \mathcal{H}_0$,

$$\|P_n(a) - a\| \leqslant \left(\sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\right)^{1/2}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n\mathcal{H}_0$ es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Por el Teorema de Brouwer, $P_n\mathcal{H}_0$ tiene la propiedad del punto fijo y, por el lema 3.2, tenemos que $\mathcal{H}_0$ tiene la propiedad de punto fijo. □

Corolario 3.7. *Todo subconjunto no vacío compacto y convexo de $\mathcal{H}_0$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 3.8 (Teorema de Schauder, 1930)**.** *Todo subconjunto no vacío compacto y convexo de un espacio de Banach tiene la propiedad de punto fijo (ver Smart [4], p.15).*

Demostración. Sea X un espacio de Banach e Y un subconjunto de X. Por el Teorema 3.5, Y es homeomorfo a un subconjunto compacto y convexo Z de $\mathcal{H}_0$. Ahora bien, por el corolario anterior, Z tiene la propiedad de punto fijo, la cual es una propiedad topológica, por tanto Y tiene la propiedad de punto fijo. □

A continuación veremos que la condición de compacidad del Teorema de Schauder no puede ser sustituida por cerrado y acotado. Probaremos que la bola unitaria (cerrada y acotada, pero no compacta) en $l^2(\mathbb{Z})$ carece de la propiedad del punto fijo. Para ello, consideremos el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$ con la base natural $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $y_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ con el 1 en la posición n. Para cada $x \in l^2(\mathbb{Z})$ escribimos $x = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...) = \sum x_n y_n$. Consideramos el operador shift hacia la derecha, T de $l^2(\mathbb{Z})$ en $l^2(\mathbb{Z})$ dado por $Tx = \sum x_n y_{n+1}$. Antes de probar que la bola unitaria de $l^2(\mathbb{Z})$ carece de la propiedad del punto fijo, probemos un lema que usaremos en dicha demostración.

Lema 3.9. *En las condiciones anteriores, el vector $x - Tx$ es un múltiplo de y_0 solo si $x = 0$ (véase la monografía de Smart [4], p.16).*

Demostración. Escribimos $x - Tx = \sum(x_n - x_{n-1})y_n = cy_0$, por tanto, $x_n = x_0$ para todo $n > 0$, $x_0 - x_{-1} = c$ y $x_n = x_{-1}$ para todo $n < 0$. Para que dicha sucesión pertenezca a $l^2(\mathbb{Z})$ se debe cumplir que $x_0 = x_{-1} = 0$. La otra implicación es trivial. □

Teorema 3.10. *La bola unidad en $l^2(\mathbb{Z})$ carece de la propiedad de punto fijo (ver Smart [4], p.16).*

Demostración. Denotamos por B la bola unidad en $l^2(\mathbb{Z})$ y definimos la aplicación $S : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$ dada por $Sx = (1 - ||x||)y_0 + Tx$, donde T denota el shift hacia la derecha introducido en el lema anterior.

S es continua (por definición) y aplica B en B ya que, si $x \in B$,

$$||Sx|| \leqslant (1 - ||x||)\|y_0\| + \|Tx\| = (1 - \|x\|) + \|x\| = 1,$$

por tanto, si $x \in B$, $Sx \in B$.

Veamos ahora que la aplicación S no posee puntos fijos. Supongamos que existe $x_0 \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que $Sx_0 = x_0$, así, $x_0 = Sx_0 = (1 - ||x_0||)y_0 + Tx_0$, por tanto, $x_0 - Tx_0 = (1 - ||x_0||)y_0$, lo cual no sucede si $x_0 = 0$ y tampoco si $x_0 \neq 0$ (por el lema anterior). Por tanto, B no tiene la propiedad de punto fijo. □

Schauder probó otro resultado de punto fijo, en el que impone menos condiciones sobre el conjunto de definición pero a cambio tiene que imponer condiciones más fuertes sobre la aplicación, tal y como se enuncia a continuación.

Definición 3.11. Dado un espacio topológico X y un subespacio no vacío Y de X, una aplicación continua $T : Y \longrightarrow Y$ se dice compacta si, para todo subconjunto acotado E de Y, $\overline{f(E)}$ es compacto; en otras palabras, $f(E)$ es relativamente compacto.

Nota 3.12. Si Y es un subconjunto compacto de X, toda función continua $f : Y \longrightarrow X$ es compacta. En efecto, si A es un subconjunto acotado de Y, $\overline{f(A)}$ es un subconjunto compacto de $f(Y)$ ya que $\overline{f(A)}$ es un cerrado contenido en un compacto $f(Y)$.

Teorema 3.13 (Teorema de Schauder)**.** *Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto no vacío de X cerrado y acotado. Toda aplicación compacta $f : C \longrightarrow C$ tiene la propiedad de punto fijo (véase [8]).*

Para demostrar dicho resultado introduciremos un lema que usaremos en su demostración.

Lema 3.14. *Dados un subconjunto compacto K de un espacio normado X, $\varepsilon > 0$ y A un subconjunto finito de K tal que $K \subseteq \bigcup\{B(a, \varepsilon) : a \in A\}$. Definimos la aplicación $\phi_A : K \longrightarrow X$ dada por*

$$\phi_A(x) = \frac{\sum\{m_a(x)a \ : \ a \in A\}}{\sum\{m_a(x) \ : \ a \in A\}}, \tag{3.1}$$

para cada $x \in K$, donde

$$m_a(x) = \begin{cases} 0 & si \ ||x - a|| \geqslant \varepsilon, \\ \varepsilon - ||x - a|| & si \ ||x - a|| < \varepsilon. \end{cases}$$

Entonces ϕ_A es una función continua y $||\phi_A(x) - x|| < \varepsilon$, para todo $x \in K$. (véase [8]).

Demostración. Por definición, $m_a(x) \geqslant 0$ para cada $a \in A$ y $\sum\{m_a(x) \ : \ a \in A\} > 0$ para todo $x \in K$, entonces ϕ_A está bien definida sobre K. Además, ϕ_A es continua, pues para cada $a \in A$, $m_a : K \longrightarrow [0, \varepsilon]$ lo es. En efecto, sean $\varepsilon_1 > 0$, $x_1 \in B(a, \varepsilon)$ y $x_2 \in K \setminus B(a, \varepsilon)$ tales que $d(x_1, x_2) < \delta$. Tomando $0 < \delta < \varepsilon_1$, se tiene que

$$|m_a(x_1) - m_a(x_2)| = |\varepsilon - ||x_1 - a||| \leqslant |||x_2 - a|| - ||x_1 - a||| \leqslant ||x_2 - x_1|| < \delta \leqslant \varepsilon_1.$$

Por otra parte,

$$\phi_A(x) - x = \frac{\sum\{m_a(x)(a-x)\ :\ a \in A\}}{\sum\{m_a(x)\ :\ a \in A\}}$$

y, si $m_a(x) > 0$, entonces

$$||\phi_A(x) - x|| \leqslant \frac{\sum\{m_a(x)\,||a-x||\ :\ a \in A\}}{\sum\{m_a(x)\ :\ a \in A\}} < \varepsilon.$$

□

Estamos en condiciones de demostrar la segunda forma del Teorema de Schauder.

Notación 3.15. En la siguiente demostración usaremos la siguiente notación para referirnos a la envoltura convexa de un conjunto A, $co(A) = \bigcap\{C :\ A \subseteq C, C\ convexo\}$.

Demostración Teorema 3.13. Definimos $K = \overline{f(C)}$. Por hipótesis, $K \subseteq C$. Por ser K compacto, existen subconjuntos finitos A_n de K tales que $K \subseteq \bigcup\{B(a,1/n)\ :\ a \in A_n\}$ y sea $\phi_n = \phi_{A_n}$ la aplicación definida por (3.1) en el Lema anterior. Entonces, por la definición de ϕ_n y la convexidad de C, se tiene que $\phi_n(K) \subseteq co(K) \subseteq C$, entonces $f_n := \phi_n \circ f$ aplica C en sí mismo. Además, por el Lema 3.14, se tiene que

$$||f_n(x) - f(x)|| < 1/n,$$

para todo $x \in E$.

Denotamos por X_n el espacio lineal generado por el conjunto finito A_n y definimos $C_n = C \cap X_n$. Entonces, X_n es un espacio normado de dimensión finita, E_n es un subconjunto convexo (por definición) y compacto de X_n ya que C_n es cerrado en X_n y X_n es un espacio de Hausdorff. Además, $f_n : C_n \longrightarrow C_n$ es continua por ser composición de continuas, por tanto, por el Teorema 2.14, existe un elemento $x_n \in C_n$ tal que $f_n(x_n) = x_n$.

Dado que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en el conjunto compacto K, existe una subsucesión $\left(f(x_{n_j})\right)_{j\in\mathbb{N}}$ y un punto $x_0 \in K$ tal que $\left(f(x_{n_j})\right) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Dado que $f_{n_j}(x_{n_j}) = x_{n_j}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\left|x_{n_j} - x_0\right|\right| &= \left|\left|f_{n_j}\left(x_{n_j}\right) - x_0\right|\right| \\ &\leqslant \left|\left|f_{n_j}\left(x_{n_j}\right) - f\left(x_{n_j}\right)\right|\right| + \left|\left|f\left(x_{n_j}\right) - x_0\right|\right| \\ &\leqslant \tfrac{1}{n_j} + \left|\left|f\left(x_{n_j}\right) - x_0\right|\right|. \end{aligned}$$

Luego, $\left(x_{n_j}\right) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ y, dado que f es una aplicación continua, se tiene que

$$f\left(x_0\right) = \lim_{j\to\infty} f\left(x_{n_j}\right) = x_0.$$

□

3.1. Aplicaciones del Teorema de Schauder

El Teorema de Schauder tiene numerosas aplicaciones, como es el caso del Teorema de Peano sobre la existencia de soluciones para el problema de Cauchy relativo a ecuaciones diferenciales. Previamente enunciaremos un teorema.

Teorema 3.16 (Teorema Arzelá-Ascoli)**.** *Sean X un espacio topológico compacto e Y un espacio métrico completo. Un subconjunto $H \subset C(X,Y)$ será relativamente compacto si y solamente si:*

1. *H es equicontinuo.*
2. *Para todo $x \in X$, el conjunto $H_x = \{f(x) \,:\, f \in H\}$ es relativamente compacto en Y.*

Nótese que, si $Y = \mathbb{R}$, la condición 2 es equivalente a pedir que para cada $x \in X$, el conjunto H_x sea acotado.

Teorema 3.17 (Teorema de Peano)**.** *Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$. Dada una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y consideremos la ecuación diferencial con condición inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Entonces existe una función y cumpliendo las condiciones indicadas anteriormente. (Ver Istrăţescu [3], p.177,178)

Demostración. Consideramos el espacio de Banach formado por todas las funciones continuas con valores reales definidas en el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$, donde

$$h = \text{mín}\left\{\frac{a}{\|f(x,y)\| + 1}, \frac{b}{\|f(x,y)\| + 1}\right\},$$

con la norma del supremo, que denotaremos por M.

La ecuación diferencial del enunciado es equivalente a la ecuación integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

La solución de la ecuación diferencial de partida será un punto fijo del operador T definido en M y con valores en M, dado por

$$[Ty]\,(s) = y_0 + \int_{x_0}^{s} f(t, y(t))dt,$$

para cada $s \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Consideramos el subconjunto C de M formado por las funciones $y : [x_0-h, x_0+h] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $|y(s) - y_0| \leqslant b$, que es cerrado, acotado y convexo en M. Veamos que C es invariante por el operador T. En efecto, sea $y \in C$, entonces

$$|[Ty](s) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{s} f(t, y(t))dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{s} ||f||dx \right| \leqslant b.$$

Además, dados $s, s' \in [x_0 - h, x_0 + h]$ tenemos:

$$\left|[Ty](s) - [Ty](s')\right| = \left| \int_{x_0}^{s} f(t, y(t))dt - \int_{x_0}^{s'} f(t, y(t))dt \right| \leqslant 2||f|||s - s'|.$$

Por tanto, por el Teorema de Arzelá-Ascoli, T es un operador compacto. Así, por el Teorema de punto fijo de Schauder, T admite un punto fijo que será una solución de la ecuación diferencial de partida.

$\square$

Capítulo 4

Consecuencias del Teorema de Schauder

Hasta ahora, hemos considerado aplicaciones que aplican un conjunto en sí mismo. Ocupémonos ahora de estudiar las aplicaciones que no preservan el conjunto de definición. Varios resultados de este tipo nos los proporcionan los teoremas de Krasnoselskii (1953), Rothe (1937), Altman (1957) y Petryshyn (1967). Dichos teoremas se basan en imponer condiciones sobre la imagen de puntos de la frontera de un conjunto y así probar la existencia de punto fijo de tal aplicación.

Notación 4.1. Dado un conjunto M denotaremos por $Int(M)$ al interior de M y ∂M por la frontera de M.

Veamos cuales son las condiciones impuestas y posteriormente probemos el Teorema de Rothe. Sea $f : B \longrightarrow X$, donde X es un espacio de Banach real y B es la bola cerrada de radio n y centro el origen:

1. Condiciones de tipo Krasnoselskii:

   Para $x \in \partial B$, $\langle f(x), x\rangle \leqslant \|x\|^2$.

2. Condiciones de tipo Petryshyn:

   Para $x \in \partial B$, $\|x - f(x)\| \geqslant \|f(x)\|$.

3. Condiciones de tipo Rothe:

   Para $x \in \partial B$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

4. Condiciones de tipo Altman:

   Para $x \in \partial B$, $\|x - f(x)\|^2 \geqslant \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.

Probemos ahora el Teorema de Rothe, para lo cual, previamente enunciaremos dos lemas:

Lema 4.2. *Sea M la bola cerrada de radio n centrada en el origen en un espacio vectorial normado X. El retracto de X a M viene dado por la aplicación $r : X \longrightarrow M$ definida mediante*

$$r(x) = \begin{cases} x, & si \;\; x \in M, \\ n\frac{x}{||x||}, & si \;\; x \notin M. \end{cases} \tag{4.1}$$

Se tiene que:

1. *r es un retracto continuo.*
2. *Si $r(x) \in Int(M)$, entonces $r(x) = x$.*
3. *Si $x \notin M$, entonces $r(x) \in \partial M$ (ver Smart [4], p.26).*

Lema 4.3. *Sea M la bola cerrada de radio n centrada en el origen en un espacio vectorial X y N, L dos subespacios de un espacio normado X. Dada $T : M \longrightarrow N$ una aplicación compacta y $r : N \longrightarrow L$ continua, entonces $r \circ T : M \longrightarrow L$ es compacta.*

Teorema 4.4 (Rothe, 1937)**.** *Sea X un espacio vectorial normado. Toda aplicación T continua y compacta de M en X tal que $T(\partial M) \subset M$ tiene al menos un punto fijo (véase Smart [4], p.27).*

Demostración. Sea r la proyección radial del Lema 4.2. Entonces, por el Lema anterior, $r \circ T$ es compacta y, por tanto, por el Teorema de Schauder, tiene al menos un punto fijo, es decir, existe $y \in M$ tal que $(r \circ T)\, y = y$. Distinguimos dos casos:

- Si $y \in Int(M)$, por el apartado 2 del Lema 4.2 se tiene que $Ty = y$.
- Si $y \in \partial M$, por la definición de T, $Ty \in M$ y, por la definición de r, $(r \circ T)\, y = Ty$. Por tanto, $y = (r \circ T)\, y = Ty$, es decir, y es un punto fijo de T.

□

El teorema además puede ser enunciado de una forma más general, como se recoge a continuación.

Teorema 4.5. *La conclusión del Teorema 4.4 es cierta para todo subconjunto cerrado y convexo M de X.*

A continuación, nos centraremos en una familia de aplicaciones $\{U_t \ : \ t \in [0,1]\}$ definidas en una región M de un espacio vectorial normado X, las cuales no poseen puntos fijos en la frontera de M. Así, al variar t, los puntos fijos no pueden escapar de M a través de su frontera. En los siguientes resultados, imponiendo ciertas condiciones sobre las funciones de la familia $\{U_t \ : \ t \in [0,1]\}$, se podrá asegurar que U_1 posee un punto fijo. A continuación expondremos el concepto de pf-homotopía.

Definición 4.6. Dadas U_0 y U_1 dos aplicaciones de un conjunto N en un espacio vectorial normado B, decimos que U_0 es pf-homotópica a U_1 en N si existe una familia de aplicaciones $\{U_t \ : \ t \in [0,1]\}$ de N en X tales que:

1. $U_t(x) = U(x,t)$ es continua en $N \times [0,1]$.

2. $U(N \times [0,1])$ está contenido en un subconjunto compacto de X.

3. $U_t(x) \neq x$ para $x \in \partial M$ y para todo $t \in [0,1]$.

Los siguientes resultados se basan en imponer ciertas condiciones sobre M y U_0, suponer que U_1 es pf-homotópica a U_0 en ∂M y, así, concluyen la existencia de un punto fijo para la aplicación U_1. Uno de los primeros y más famosos teoremas de este tipo es debido a Leray y Schauder (1934), pero la condición sobre U_0 en ese caso es que $deg(I - U_0) \neq 0$, resultado cuya aplicación requiere conocer la teoría del grado. Posteriormente, se intentó modificar la condición sobre el grado de $I - U_0$ y no fue hasta casi 20 años más tarde cuando Schaefer enunció y demostró un teorema con condiciones menos generales sobre M y U_0 pero que se pueden aplicar más fácilmente. Schaefer considera $U_0 = 0$, $U_t = tU_1$ y M una bola en el espacio vectorial normado X. Posteriormente, Browder enunció un resultado en el que modificaba la restricción $U_t = tU_1$, el cual fue generalizado por Potter, que exigió $U_0(\partial M) \subset M$ y M convexo. Veamos estos dos resultados.

Teorema 4.7 (Schaefer, 1955)**.** *Seam un espacio vectorial normado X y T una aplicación de X en X compacta. Entonces se cumple que la ecuación $x = \lambda Tx$ tiene solución para $\lambda = 1$ (es decir, existe un punto fijo para T) o el conjunto $\{x \in X \ : \ x = \lambda Tx,$ con $0 < \lambda < 1\}$ no está acotado (véase en Smart [4], p.29).*

Demostración. Consideramos el retracto radial r de X en la bola M de X de radio n y centro el origen dado por (4.1). Por el Teorema de Schauder, $r \circ T$ tiene un punto fijo x en M. Si $\|Tx\| \leqslant n$, $(r \circ T)\, x = Tx = x$, si $\|Tx\| > n$, $x = (r \circ T)\, x = (n/||Tx||)Tx = \lambda Tx$ con $0 < \lambda < 1$. Por lo tanto, para algún entero n, existe un punto fijo $x = Tx$ o para cada n obtenemos un autovector de norma n con algún autovalor asociado en el intervalo $(0,1)$, en este caso el conjunto de autovectores no está acotado. □

Antes de enunciar y demostrar el Teorema de Browder-Potter, debemos introducir el llamado funcional de Minkowski. Dado M un subconjunto cerrado y convexo de un espacio vectorial normado X tal que $0 \in Int(M)$, el funcional de Minkowski viene dado por

$$g(x) = \text{ínf}\{c \in \mathbb{R}^+ \;:\; x \in cM\}$$

Teorema 4.8 (Browder-Potter, 1973). *Sea M un subconjunto cerrado y convexo de un espacio vectorial normado X. Sea U una aplicación continua de $M \times [0,1]$ en un subconjunto compacto de X tal que $U_0(\partial M) \subset M$ y, si denotamos por $U_t(x) = U(x,t)$, supongamos que para cada $t \in [0,1], U_t$ no tiene puntos fijos en ∂M, entonces U_1 tiene al menos un punto fijo en M.(Ver Smart [4], p.30)*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $0 \in Int(M)$. Supongamos que U_1 no tiene puntos fijos y lleguemos a una contradicción. Para $\varepsilon > 0$ arbitrario, consideramos la aplicación $S : M \longrightarrow X$ dada por:

$$S(x) = \begin{cases} U_1\left(\frac{x}{1-\varepsilon}\right), & si \;\; g(x) \leqslant 1-\varepsilon, \\ U\left(\frac{x}{g(x)}, \frac{1-g(x)}{\varepsilon}\right), & si \;\; 1 \geqslant g(x) \geqslant 1-\varepsilon, \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $g(x)$ es el funcional de Minkowski introducido anteriormente.

La aplicación S no posee puntos fijos para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, como se justificará en el Lema 4.9. Sin embargo, S aplica ∂M en M pues, si $x \in \partial M$, $g(x) = 1$ y, así, $S(x) = U(x,0) = U_0(x) \in M$ (por hipótesis). Además, por la definición de S, se tiene que S es compacta, lo que contradice el Teorema 4.5. Esta contradicción viene de asumir que U_1 no tiene puntos fijos y de que U_t no tiene puntos fijos en ∂M, $\forall t \in [0,1]$.

□

Probemos ahora que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, la aplicación definida en (4.2) no tiene puntos fijos:

Lema 4.9 (Smart [4], p.30,31). *En las hipótesis del Teorema anterior y suponiendo que U_1 no tiene punos fijos, entonces para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, las ecuaciones*

(I) $U_1\left(\frac{x}{1-\varepsilon}\right) = x$, con $g(x) \leqslant 1-\varepsilon$,

(II) $U\left(\frac{x}{g(x)}, \frac{1-g(x)}{\varepsilon}\right)$, con $1 \geqslant g(x) \geqslant 1-\varepsilon$,

no poseen solución.

Demostración. Empecemos probando que la primera ecuación no tiene solución para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. La condición $g(x) = \text{ínf}\{c \in \mathbb{R}^+ \;:\; x \in cM\} \leqslant 1-\varepsilon$ nos indica que $\frac{x}{1-\varepsilon} \in M$. Razonemos por reducción al absurdo, así podemos encontrar una sucesión de números reales positivos $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ y una sucesión de elementos de M, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ tal que $U_1(\frac{x_n}{1-\varepsilon_n}) = x_n$. Por la compacidad de U, podemos encontrar una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \to y$. Ahora, por la continuidad de U_1, tenemos que $U_1(y) = y$, lo cual es una contradicción.

Probemos que la segunda igualdad no tiene solución para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Procediendo de nuevo por reducción al absurdo, existen una sucesión de números reales positivos $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ y una sucesión de elementos de M, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ tales que para $1 \geqslant g(x_n) \geqslant 1 - \varepsilon_n$ se tiene que $U\left(\frac{x_n}{g(x_n)}, \frac{1-g(x_n)}{\varepsilon_n}\right) = x_n$. Así, tenemos que $0 \leqslant \frac{1-g(x_n)}{\varepsilon_n} \leqslant 1$. Por la compacidad de U,podemos tomar una subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \to y$ tal que $\frac{1-g(x_{n_k})}{\varepsilon_n} \to t$, para cierto $t \in [0,1]$. Ahora, como $\varepsilon_n \to 0$, se tiene que $(g(x_{n_k}))_{n_k\in\mathbb{N}} \to g(y) = 1$. Por tanto, $U_t(y) = U(y,t) = y$, lo que contradice que U_t no tenga puntos fijos en ∂M.

□

4.1. Teorema de Krasnoselskii

A continuación, consideraremos la suma de aplicaciones compactas y aplicaciones contractivas, las cuales es fácil que ocurran en la práctica matemática, por ejemplo, en el caso de los operadores diferenciales sometidos a perturbaciones, nos podemos encontrar con que la perturbación venga dada por una aplicación contractiva, mientras que la inversión del operador diferencial nos da una aplicación compacta. Nos centraremos en el teorema de krasnoselskii. Previamente introduciremos una definición y probaremos un lema con la finalidad de probar dicho teorema.

Definición 4.10. Se dice que un subconjunto S de un espacio topológico X es relativamente compacto si su clausura es compacta.

Nota 4.11. Para comprobar que un subconjunto S de un espacio topológico X es relativamente compacto, se puede ver que toda sucesión de elementos de S tiene una subsucesión que converge en X.

Lema 4.12. *Si B es una aplicación contractiva de un subconjunto M de un espacio vectorial normado X en X, entonces $I - B$ es un homeomorfismo de M en $(I-B)M$. Si $(I-B)(M)$ es un espacio relativamente compacto, entonces M también lo es. (Ver Smart [4], p.32)*

Demostración. Es claro que $(I-B)$ es continua, veamos que $(I-B)^{-1}$ también lo es:

$$\|(I-B)x-(I-B)y\| \geqslant \|x-y\|-\|Bx-By\| \geqslant (1-k)\|x-y\|,$$

para cierto $k \in (0,1)$. Substituyendo x e y por $(I-B)^{-1}(u)$ e $(I-B)^{-1}(v)$ para ciertos $u, v \in (I-B)(X)$, llegamos a que $(I-B)^{-1}$ es Lipschitziana con constante de Lipschitz $m=\frac{1}{1-k}$. Así, $(I-B)^{-1}$ es continua. Por tanto, $I-B$ es un homeomorfismo. □

Teorema 4.13 (Krasnoselskii). *Sea M un subconjunto cerrado convexo y no vacío de un espacio de Banach X. Supongamos que A y B son aplicaciones de M en X cumpliendo que:*

1. *$Ax+By \in M$ para todo $x, y \in M$.*

2. *A es continua y compacta.*

3. *B es una aplicación contractiva.*

Entonces, existe $y \in M$ tal que $Ay+By=y$.(Ver Smart [4], p.31,32)

Demostración. Para cada $y \in M$, consideramos la ecuación $z=Ay+Bz$, la cual tiene una única solución $z \in M$, ya que la aplicación $z \mapsto Ay+Bz$ es una aplicación contractiva de M en M. Tomando $z=(I-B)^{-1} \circ A(y) \in M$. Por el lema anterior, $(I-B)^{-1} \circ A$ es una aplicación continua y compacta de M en M. Por el Teorema de Schauder, $(I-B)^{-1} \circ A$ tiene un punto fijo en M. Dicho punto fijo es el punto y que necesitamos. □

A continuación presentamos una generalización del teorema de punto fijo de Krasnoselskii en conos, así como una aplicación para resolver una ecuación diferencial. (Ver [2] y [1]).

Definición 4.14. Dado X un espacio vectorial normado, un subconjunto $W \subset X$ no vacío cerrado y convexo se dice cuña si dado $x \in W$ y $\lambda \geqslant 0$ se tiene que $\lambda x \in W$.

Definición 4.15. Dado X un espacio vectorial normado, $P \subset X$ un subconjunto no vacío cerrado y convexo se dice cono si satisface:

1. $x \in P$ y $\lambda \geqslant 0$ implica que $\lambda x \in P$.

2. Si $x \in P$ y $-x \in P$, se tiene que $x=0$.

A continuación, vamos a enunciar de otra manera el teorema de Krasnoselskii y varios resultados que se siguen con el fin de probar la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de segundo orden. Previamente, debemos introducir el término de aplicación completamente continua.

Definición 4.16. Una aplicación f entre dos espacios vectoriales normados X e Y se dice completamente continua si la imagen de todo subconjunto relativamente compacto de X es un subconjunto relativamente compacto de Y.

Teorema 4.17 (Krasnoselskii)**.** *Dado $(X, |\cdot|)$ un espacio vectorial normado, $K \subset X$ un cono y $\prec$ la relación de orden inducida por K. Sean r, R dos números reales positivos, con $0 < r < R$ y consideramos $K_{r,R} = \{u \in K \ : \ r \leqslant |u| \leqslant R\}$. Dada $N : K_{r,R} \longrightarrow K$ una aplicación completamente continua verificando una de las siguientes condiciones:*

1. *$|Nu| \geqslant |u|$ si $|u| = r$ y $|Nu| \leqslant |u|$ si $|u| = R$.*

2. *$|Nu| \leqslant |u|$ si $|u| = r$ y $|Nu| \geqslant |u|$ si $|u| = R$.*

Entonces, N tiene un punto fijo $z \in K$ con $r \leqslant |z| \leqslant R$.

Antes de enunciar el siguiente teorema introduciremos la siguiente notación:

Notación 4.18. Dadas dos cuñas K_1, K_2 de un espacio vectorial X y dos elementos $r = (r_1, r_2)$ y $R = (R_1, R_2)$ de $\mathbb{R}^2$ con ambas componentes positivas, denotamos por $(K_i)_{r_i R_i} = \{u \in K_i \ : \ r_i \leqslant |u| \leqslant R_i\}$ para $i = 1, 2$ y por $K_{rR} = \{u \in K \ : \ r_i \leqslant |u_i| \leqslant R_i, i = 1, 2\}$. Está claro que $K_{rR} = (K_1)_{r_1 R_1} \times (K_2)_{r_2 R_2}$.

Teorema 4.19. *Sea $(X, |\cdot|)$ un espacio vectorial normado, K_1,$K_2 \subset X$ dos cuñas, $K = K_1 \times K_2$, $\alpha_i, \beta_i > 0$ números reales con $\alpha_i \neq \beta_i$ para $i = 1, 2$ y sean $r_i = min\{\alpha_i, \beta_i\}$ y $R_i = max\{\alpha_i, \beta_i\}$ para $i = 1, 2$. Supongamos que $N = (N_1, N_2) : K_{rR} \longrightarrow K$ es una aplicación compacta y que existe $h_i \in K_i \setminus \{0\}$ tal que para cada $i \in 1, 2$ se satisface la siguiente condicion en K_{rR}:*

1. *$N_i(u) \neq \lambda u_i$ para $|u_i| = \alpha_i$ y $\lambda > 0$.*

2. *$N_i(u) + \mu h_i \neq u_i$ para $|u_i| = \beta_i$ y $\mu > 0$.*

Entonces N tiene un punto fijo $u = (u_1, u_2)$ en K con $r_i \leqslant |u_i| \leqslant R_i$ para $i = 1, 2$.

En el siguiente resultado, consideraremos diferentes normas en un espacio vectorial normado. Sea $(X, |\cdot|)$ un espacio vectorial normado y $\|\cdot\|$ otra norma en X. Consideramos $C \subset X$ un subconjunto convexo, no necesariamente cerrado, tal que $0 \notin C$ y $\lambda C \subset C$ para todo $\lambda > 0$. Supongamos que $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ son normas topologicamente equivalentes en C, es decir, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1|x| \leqslant \|x\| \leqslant c_2|x|, \text{ para todo } x \in C.$$

Diremos que la norma $\|\cdot\|$ es creciente con respecto a C si $\|x + y\| > \|x\|$ para todo $x, y \in C$.

Teorema 4.20. *Sea $(X, |\cdot|)$ es un espacio vectorial normado y $\|\cdot\|$ otra norma equivalente con $\|x\| \leqslant c_2|x|$ para todo $x \in C$, donde $C \subset X$ es un subconjunto convexo tal que $0 \notin C$ y $\lambda C \subset C$ para todo $\lambda > 0$. Sean $\rho, R > 0$ tales que $0 < c_2\rho < R$, $\|\cdot\|$ creciente con respecto a C y supongamos que la aplicación $N : D = \{x \in C \ : \ ||x|| \leqslant R\} \longrightarrow C$ es compacta. Si se cumplen las condiciones:*

1. *$\|Nx\| \geqslant \|x\|$ para todo $x \in C$ con $|x| = \rho$.*

2. *$|Nx| < |x|$ para todo $x \in C$ tal que $\|x\| = R$.*

N tiene al menos un punto fijo $x \in C$ con $\rho \leqslant |x|$ y $\|x\| < R$.

A continuación nos ocuparemos de substituir la primera condición del teorema de Krasnoselskii, $|u| \geqslant |Nu|$ si $|u| = r$, por una condición del estilo $\varphi(u) \geqslant \varphi(Nu)$ si $|u| = r$, para cierta función φ.

A partir de ahora, consideraremos $(X, |\cdot|)$ un espacio vectorial normado y $K \subset X$ un cono , $\preceq$ la relación de orden inducida por K y $\prec$ la relación de orden estricta inducida por K.

Teorema 4.21. *Sea $K_{r,R} = \{u \in K \ : \ r \leqslant |u| \leqslant R\}$, donde r, R son números reales positivos con $r < R$. Supongamos que $N : K_{r,R} \longrightarrow K$ es un operador completamente continuo y $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\psi : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\varphi(0) = 0$ y existe $h \in k \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(\lambda h) > 0$ para todo $\lambda \in (0, 1]$. Además, supongamos que $\varphi(x + y) \geqslant \varphi(x) + \varphi(y)$ para todo $x, y \in K$.*

2. *$\psi(\alpha x) > \psi(x)$ para todo $\alpha > 1$ y todo $x \in K$ con $|x| = R$.*

3. *$\varphi(u) \leqslant \varphi(Nu)$ si $|u| = r$ y $\psi(u) \geqslant \psi(Nu)$ si $|u| = R$.*

Entonces N tiene un punto fijo en $K_{r,R}$.

Demostración. Consideramos la aplicación $N^* : K \longrightarrow K$ dada por

$$N^*(u) = \begin{cases} h, & si \quad u = 0, \\ \left(1 - \frac{|u|}{r}\right) h + \frac{|u|}{r} N\left(\frac{r}{|u|} u\right), & si \quad 0 < |u| < r, \\ N(u), & si \quad r \leqslant |u| \leqslant R, \\ N\left(\frac{R}{|u|} u\right), & si \quad |u| \geqslant R. \end{cases} \tag{4.3}$$

La aplicación N^* es completamente continua, por serlo N. Por definición de K y la continuidad de N^*, se tiene que $N^*(K) \subset K$ es un conjunto convexo y relativamente compacto, por tanto, por el Teorema de Schauder, N^* tiene al menos un punto fijo, es

decir, existe $u^* \in K$ tal que $N^*(u^*) = u^*$. Veamos que dicho punto es el punto fijo de N, para ello distinguiremos tres casos:
Caso 1: Supongamos que $u^* = 0$. Tenemos que $0 = N^*(0) = h$, lo cual es una contradicción con que $h \in K \setminus \{0\}$.
Caso 2: Supongamos que $0 < |u^*| < r$. Así, tenemos que:

$$\left(1 - \frac{|u^*|}{r}\right) h + \frac{|u^*|}{r} N\left(\frac{r}{|u^*|} u^*\right) = u^*.$$

Multiplicando ambos términos por $\frac{r}{|u^*|}$, tenemos que:

$$\left(\frac{r}{|u^*|} - 1\right) h + N\left(\frac{r}{|u^*|} u^*\right) = \frac{r}{|u^*|} u^*.$$

Tomamos $\lambda = \frac{r}{|u^*|} - 1$ y $u_0 = \frac{r}{|u^*|} u^*$. Como $|u^*| < r$, $\frac{r}{|u^*|} > 1$ y, así, $\lambda > 0$. Además, $|u_0| = |\frac{r}{|u^*|} u^*| = r$. En definitiva,

$$\lambda h + N(u_0) = u_0.$$

Por la condición 1 del enunciado, se sigue que

$$\varphi(u_0) = \varphi\left(N(u_0) + \lambda h\right) \geqslant \varphi\left(N(u_0)\right) + \varphi(\lambda h) > \varphi\left(N(u_0)\right).$$

Finalmente, obtenemos $\varphi(u_0) > \varphi(N(u_0))$, lo que es una contradicción con la hipótesis 3 del enunciado.
Caso 3: Supongamos que $|u^*| > R$. Tenemos que $N\left(\frac{R}{|u^*|} u^*\right) = u^*$. Tomamos $u_1 = \frac{R}{|u^*|} u^*$ y $\beta = \frac{|u^*|}{R} > 1$. Así, tenemos que $|u_1| = R$ y $N(u_1) = u^* = \beta u_1$. Por la segunda condición del enunciado, tenemos que $\psi(N(u_1)) = \psi(\beta u_1) > \psi(u_1)$, lo que es una contradicción con la tercera hipótesis.

Así, llegamos a la conclusión que el punto fijo de N^* es tal que $r \leqslant |u^*| \leqslant R$ y se tiene que $N^*(u^*) = N(u^*) = u^*$, por tanto, u^* es un punto fijo de N en $K_{r,R}$.

$\square$

A simple vista, las condiciones anteriores pueden parecer difíciles de verificar, pero veremos que existen ejemplos bien conocidos de funciones que lo cumplen con sencilla verificación. En primer lugar, consideraremos $X = C([0,1], \mathbb{R})$, $\eta > 0$, $I \subset [0,1]$, $I \neq [0,1]$ y consideramos la norma del supremo $\|x\| = \sup\{|x(t)| \ : \ t \in [0,1]\} = \text{máx}\{|x(t)| \ : \ t \in [0,1]\}$. Tomamos el cono $K = \{x \in X \ : \ x \geqslant 0 \ en \ [0,1] \ y \ x(t) \geqslant \eta\|x\| \ para \ todo \ t \in I\}$. Como funcional que verifica la primera propiedad, podemos tomar $\varphi(x) = \text{mín}\{x(t) \ : \ t \in I\}$, ya que $\varphi(0) = 0$, existe $h \in K \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(\lambda h) > 0$ para todo $\lambda \in (0,1]$ y, como el mínimo de la suma es mayor o igual que la suma de los mínimos, $\varphi(x+y) \geqslant \varphi(x) + \varphi(y)$. La norma es el ejemplo más sencillo de funcional que verifica la condición 2.

En el siguiente teorema, modificaremos las condiciones que tienen que cumplir φ *y* ψ del siguiente modo: cambiaremos de sentido las desigualdades de la segunda y tercera condición, así como en la primera se considerará el carácter estrictamente decreciente del funcional. La demostración es análoga a la del teorema anterior, utilizando el mismo funcional N^* y probando que posee un punto fijo, que será también para N.

Teorema 4.22. *Sea $K_{r,R} = \{u \in K \ : \ r \leqslant |u| \leqslant R\}$, donde r, R son números reales positivos con $r < R$. Supongamos que $N : K_{r,R} \longrightarrow K$ es un operador completamente continuo y sean $\varphi, \psi : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *φ es estrictamente decreciente.*

2. *$\psi(\alpha x) < \psi(x)$ para todo $\alpha > 1$ y todo $x \in K$ con $|x| = R$.*

3. *$\varphi(u) \geqslant \varphi(Nu)$ si $|u| = r$ y $\psi(u) \leqslant \psi(Nu)$ si $|u| = R$.*

Entonces N tiene un punto fijo en $K_{r,R}$.

Ejemplo 4.23. Consideremos de nuevo $X = C([0,1], \mathbb{R})$, $\eta > 0$, $I \subset [0,1]$, $I \neq [0,1]$ y la norma del supremo $\|x\| = \sup\{|x(t)| \ : \ t \in [0,1]\} = \text{máx}\{|x(t)| \ : \ t \in [0,1]\}$. Tomemos el cono $K = \{x \in X \ : \ x \geqslant 0 \ en \ [0,1] \ y \ x(t) \geqslant \eta\|x\| \ para \ todo \ t \in I\}$. En este caso, un ejemplo de función ψ que cumple la segunda condición viene dada por $\psi(x) = \frac{1}{|x|+1}$. En efecto, para $\alpha > 1$ y $|x| = R$, se tiene que

$$\psi(\alpha x) = \tfrac{1}{\alpha|x|+1} < \tfrac{1}{|x|+1} = \psi(x).$$

Además, la misma función $\psi(x) = \frac{1}{|x|+1}$, es estrictamente decreciente, ya que, en este caso $|\cdot|$ es estrictamente creciente pues, para todo par de elementos $x, y \in K$, con $x < y$ se deduce que $|x| < |y|$. Así en este caso podemos tomar $\psi(x) = \varphi(x) = \frac{1}{|x|+1}$.

Finalmente, nos centraremos en asegurar la existencia de solución para ecuaciones diferenciales del tipo

$$x''(t) + f(x(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \tag{4.4}$$

sujetas a una cierta condición de frontera, donde f es una función continua con valores en $\mathbb{R}^+$ verificando ciertas restricciones.

Algunas posibles condiciones de frontera son:

$$x(0) = 0, x(1) = 0;$$

o bien

$$x(0) = 0, x'(1) = 0.$$

Realicemos algunas manipulaciones de la ecuación (4.4). Integrando entre 0 y t la ecuación de partida tenemos que:

$$\int_0^t x''(s)ds = -\int_0^t f(x(s))ds,$$

lo que implica que

$$x'(t) - x'(0) = -\int_0^t f, x(s))ds.$$

Integrando de nuevo, se sigue que

$$\int_0^t x'(s)ds - \int_0^t x'(0)ds = -\int_0^t \int_0^u f(x(s))dsdu,$$

luego

$$x(t) - x(0) - x'(0)t = -\int_0^t \int_0^u f(x(s))dsdu,$$

y, por tanto,

$$x(t) = x(0) + x'(0)t - \int_0^t \int_0^u f(x(s))dsdu. \tag{4.5}$$

A continuación, calcularemos las funciones de Green para las respectivas condiciones de contorno mencionadas. Consideramos, en primer lugar, la condición de contorno $x(0) = 0, x(1) = 0$. Aplicando las condiciones, concluimos que $x(0) = 0$ y $x'(0) = \int_0^1 \int_0^u f(x(s))dsdu$. Así, la ecuación (4.5) se reduce a

$$x(t) = t\int_0^1 \int_0^u f(x(s))dsdu - \int_0^t \int_0^u f(x(s))dsdu.$$

Aplicando el Teorema de Fubini a ambas integrales, se sigue que

$$\begin{aligned} x(t) &= t\int_0^1 \int_0^u f(x(s))dsdu - \int_0^t \int_0^u f(x(s))dsdu \\ &= t\int_0^1 \int_s^1 f(x(s))duds - \int_0^t \int_s^t f(x(s))duds \\ &= \int_0^1 t(1-s)f(x(s))ds - \int_0^t (t-s)f(x(s))ds \\ &= \int_0^t t(1-s)f(x(s))ds + \int_t^1 t(1-s)f(x(s))ds - \int_0^t (t-s)f(x(s))ds \\ &= \int_0^t s(1-t)f(x(s))ds + \int_t^1 t(1-s)f(x(s))ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)f(x(s))ds, \end{aligned}$$

donde $G(t, s)$ es la llamada función de Green y viene dada por

$$G(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & si\ 0 \leqslant s \leqslant t, \\ t(1-s), & si\ t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Veamos ahora la expresión de la solución imponiendo las condiciones de contorno $x(0) = 0, x'(1) = 0$. En este caso, obtenemos que $x(0) = 0$ y $x'(0) = \int_0^1 f(x(s))ds$ y la expresión (4.5) se reduce a:

$$x(t) = t\int_0^1 f(x(s)) - \int_0^t \int_0^u f(x(s))dsdu,$$

y, aplicando Fubini, llegamos a que

$$\begin{aligned} x(t) &= t\int_0^1 f(x(s))ds - \int_0^t \int_s^t f(x(s))duds \\ &= \int_0^1 tf(x(s)) - \int_0^t (t-s)f(x(s))ds \\ &= \int_0^t tf(x(s))ds + \int_t^1 tf(x(s))ds - \int_0^t (t-s)f(x(s))ds \\ &= \int_0^t sf(x(s))ds + \int_t^1 tf(x(s))ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)f(x(s))ds, \end{aligned}$$

en cuyo caso, la función de Green viene dada por

$$G(t,s) = \begin{cases} s, & si\ 0 \leqslant s \leqslant t, \\ t, & si\ t \leqslant s \leqslant 1, \end{cases} = min\{t,s\}.$$

Estudiaremos en detalle la existencia de solución para las condiciones de contorno $x(0) = 0, x'(1) = 0$. Para ello, previamente debemos introducir un Teorema, para el cual usaremos la siguiente notación:

Notación 4.24. Dados ψ y φ dos operadores continuos definidos en un cono K, para los números positivos a y b denotamos por $P(\psi, b) = \{x \in K \ : \ \psi(x) \leqslant b\}$ y por $P(\psi, \varphi, a, b) = \{x \in K \ : \ a \leqslant \psi(x) \ y \ \varphi(x) \leqslant b\}$.

Teorema 4.25. *Sean $T : K \longrightarrow K$ un operador completamente continuo y $\psi, \varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dos operadores continuos tales que ψ es cóncavo y φ convexo en K. Si existen números reales no negativos a, b, c y d verificando que*

1. $\{x \in K \ : \ a < \psi(x) \ y \ \varphi(x) < b\} \neq \emptyset$.
2. *Si* $x \in K$ *con* $\varphi(x) = b$ *y* $\psi(x) \geqslant a$, *entonces* $\varphi(T(x)) < b$.
3. *Si* $x \in K$ *con* $\varphi(x) = b$ *y* $\psi(T(x)) < a$, *entonces* $\varphi(T(x)) < b$.
4. $\{x \in K \ : \ c < \psi(x) \ y \ \varphi(x) < d\} \neq \emptyset$.
5. *Si* $x \in K$ *con* $\psi(x) = c$ *y* $\varphi(x) \leqslant d$, *entonces* $\psi(T(x)) > c$.
6. *Si* $x \in K$ *con* $\psi(x) = c$ *y* $\varphi(T(x)) > d$, *entonces* $\psi(T(x)) > c$.

Se tiene que,

I. *Si* $a < c$, $b < d$, $\{x \in K \ : \ b < \varphi(x) \ y \ \psi(x) < c\} \neq \emptyset$, $P(\varphi, b) \subset P(\psi, c)$ *y* $P(\psi, c)$ *está acotado, entonces* T *tiene al menos un punto fijo* $x^* \in P(\varphi, \psi, b, c)$.

II. *Si* $c < a$, $d < b$, $\{x \in K \ : \ a < \psi(x) \ y \ \varphi(x) < d\} \neq \emptyset$, $P(\psi, a) \subset P(\varphi, d)$ *y* $P(\varphi, d)$ *está acotado, entonces* T *tiene al menos un punto fijo* $x^* \in P(\psi, \varphi, a, d)$.

A partir de ahora consideraremos el operador completamente continuo

$$[Tx]\,(t) = \int_0^t sf(x(s))ds + \int_t^1 tf(x(s))ds = \int_0^1 G(t,s)f(x(s))ds,$$

el espacio $X = C([0,1],\mathbb{R})$, el cono

$$K = \{x \in X \ : \ x \geqslant 0, \ x \textit{ no decreciente}, \ \textit{cóncava y } x(\tau) \geqslant \tau x(1)\};$$

para $x \in K$, el operador cóncavo ψ en K, dado por

$$\psi(x) = \text{mín}\,\{x(t) \ : \ t \in [\tau,1]\}$$

y el operador convexo φ en K, dado por

$$\varphi(x) = \text{máx}\,\{x(t) \ : \ t \in [0,1]\},$$

donde $\tau \in (0,1)$ fijado.

Finalmente, estudiaremos un teorema que nos asegura la existencia de solución para la ecuación 4.4 con condiciones de frontera $x(0) = 0, x'(1) = 0$.

Teorema 4.26. *Sean $\tau \in (0,1)$ arbitrariamente fijado, b y c dos números positivos con $3b \leqslant c$ y $f : [0,\infty] \longrightarrow [0,\infty]$ una función continua verificando*

1. *$f(w) > \frac{c}{\tau(1-\tau)}$, para $w \in \left[c, \frac{c}{\tau}\right]$.*
2. *$f(w)$ decreciente para $w \in [0, b\tau]$.*
3. *$f(b\tau) > f(w)$, para $w \in [b\tau, b]$.*
4. *$\int_0^\tau sf(bs)ds < \frac{2b - f(b\tau)(1-\tau^2)}{2}$.*

Entonces, la ecuación ecuación 4.4 con condiciones de frontera $x(0) = 0, x'(1) = 0$ tiene al menos una solución positiva $x^* \in P(\varphi,\psi,b,c)$.

Demostración. Si tomamos $a = b\tau$ y $d = \frac{c}{\tau}$ tenemos que, como $\tau \in (0,1)$, $a < c$ y $b < d$, con $3b \leqslant c$ por hipótesis. Para $x \in P(\varphi,\psi,b,c)$, si $t \in (0,1)$, entonces, por las propiedades de la función de Green tenemos que $(Tx)''\,(t) = -f(x(t))$ y $Tx(0) = 0 = Tx'(1)$. Para $y, w \in [0,1]$, con $y \leqslant w$, tenemos que, denotando por $I = [0,1]$,

$$\min_{s \in I} \frac{G(t,s)}{G(w,s)} \geqslant \frac{y}{w} \tag{4.6}$$

y así, para cada $x \in K$ tenemos que

$$\psi(Tx) = Tx(\tau) = \int_0^1 G(\tau,s)f(x(s))ds \geqslant \int_0^1 \tau G(1,s)f(x(s))ds = \tau\,[Tx]\,(1) = \tau\varphi(Tx).$$

Veamos que $P(\psi,c)$ es un subconjunto acotado en el cono K, en efecto, si $x \in P(\psi,c)$, se tiene que $\tau\varphi(x) \leqslant \psi(x) \leqslant c$ y, así,

$$\|x\| = \varphi \leqslant \frac{\psi(x)}{\tau} \leqslant \frac{c}{\tau}.$$

Además, si $x \in P(\varphi, b)$, se tiene que

$$\psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant b \leqslant c$$

y, por tanto, $P(\varphi, b) \subset P(\psi, c)$.

Definimos, para cada $M \in (2b, c)$, la función x_M dada por

$$x_M(t) = \int_0^1 MG(t,s)ds = \frac{Mt(2-t)}{2} \in P(\varphi, \psi, b, c).$$

A continuación veremos que se verifican las condiciones del Teorema 4.25, para asegurar la existencia de punto fijo para T. En efecto, si $x \in K$ y $\psi(Tx) < a$, se tiene que $\varphi(Tx) < b$, ya que, por (4.6),

$$\begin{aligned} \varphi(Tx) &= \max_{t \in I} [Tx](t) = \int_0^1 G(1,s) f(x(s)) ds \\ &\leqslant \frac{1}{\tau} \int_0^1 G(\tau, s) f(x(s)) ds = \frac{1}{\tau} \psi(Tx) < \frac{a}{\tau} = b. \end{aligned}$$

Se tiene que $\psi(Tx) > c$ para todo $x \in K$ con $\psi(x) = c$ y $\varphi(x) \leqslant d$. En efecto, para cada $s \in [\tau, 1]$, $c \leqslant x(s) \leqslant d = \frac{c}{\tau}$ y así, por la propiedad 1,

$$\begin{aligned} \psi(Tx) &= \int_0^1 G(\tau, s) f(x(s)) ds \geqslant \int_\tau^1 G(\tau, s) f(x(s)) ds \\ &= \int_\tau^1 \tau f(x(s)) ds > \int_\tau^1 \frac{c}{1-\tau} ds = c. \end{aligned}$$

Finalmente, si $x \in K$ y $\varphi(Tx) > d$, se tiene que $\psi(Tx) > c$, ya que, por la propiedad dada en (4.6), se tiene que

$$\psi(Tx) = \int_0^1 G(\tau, s) f(x(s)) ds \geqslant \tau \int_0^1 G(1, s) f(x(s)) ds = \tau \varphi(Tx) > \tau d = c.$$

Así, acabamos de probar que estamos en las hipótesis del Teorema 4.25, por tanto el operador T posee al menos un punto fijo $x^* \in P(\varphi, \psi, b, c)$, que será una solución de (4.4) con condiciones de frontera $x(0) = 0, x'(1) = 0$. $\square$

Aunque las condiciones de este teorema pueden parecer difíciles de verificar, a continuación expondremos un ejemplo donde se cumple.

Ejemplo 4.27. Consideramos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{\sqrt{x}} + e^{x-2} = 0, \\ x(0) = 0 = x'(1). \end{cases}$$

Tiene al menos una solución x positiva verificando que $1 \leqslant x(1)$ y $x(\tau) \leqslant 5$. Basta suponer $b = 1, c = 5$ y $\tau = 1/2$ y ver que se verifican todas las condiciones del teorema 4.26.

Capítulo 5

Algunas extensiones

En este capítulo, estudiaremos algunos ejemplos de conjuntos con la propiedad de punto fijo, así como numerosos resultados para poder identificarlos. En muchos casos, es inmediato probar que un conjunto tiene la propiedad de punto fijo, como es el caso de $X = [0, 1]$. Por tratarse de un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, es compacto, por tanto, toda función continua de X en X verificará que el grafo de dicha función intersecará a los puntos de la forma (x, x) con $x \in [0, 1]$, pues es continua y $f(0) \geqslant 0, f(1) \leqslant 1$. Dichos puntos de intersección serán los puntos fijos de tal función.

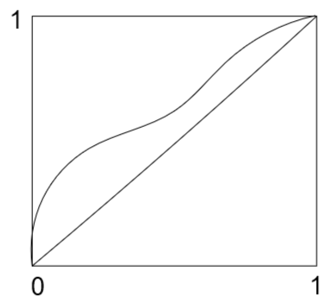

Figura 5.1: Ejemplo de función continua de $[0, 1]$ en sí mismo.

Después de estudiar numerosos resultados que, bajo ciertas hipótesis, aseguran que se satisface la propiedad del punto fijo. Veamos algunos ejemplos no triviales de espacios con y sin la propiedad del punto fijo. Los enunciados de los diferentes teoremas de punto fijo estudiados pueden hacernos pensar que un conjunto con la propiedad de punto fijo debe ser compacto o contráctil, de hecho, la mayoría de las veces, si un conjunto no cumple una de las propiedades anteriores, se puede construir fácilmente una aplicación sin puntos fijos.

Si tenemos un subconjunto no compacto de $\mathbb{R}^n$, normalmente podemos construir una aplicación sin puntos fijos aproximando todos los puntos a un punto que no esté en el conjunto (esto sabemos que existe por no ser compacto).

Como vimos anteriormente, la bola unidad en l^2, que es cerrada y acotada pero no compacta, no tiene la propiedad del punto fijo. Más generalmente, Klee en el año 1955 probó que todo subconjunto convexo y no compacto de un espacio vectorial normado carece de la propiedad del punto fijo.

En casos simples, donde un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no es contráctil, usualmente, presenta algún tipo de agujero en el medio. En estos casos, podemos girar el conjunto sobre el agujero o bien reflejarlo a través de él; así es posible probar que conjuntos como la botella de Klein, el toro, la banda de Möbius, el círculo o la esfera carecen de la propiedad del punto fijo.

Veamos algunos resultados que permiten asegurar que numerosos conjuntos con ciertas propiedades relacionadas con la compacidad y contractibilidad tienen la propiedad del punto fijo. Para consultar más detalles sobre estos resultados, véase Smart [4], p.18-20.

Teorema 5.1 (Lefschetz)**.** *Si X es un espacio métrico compacto y localmente contráctil, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Teorema 5.2. *Si X es un espacio métrico compacto, contráctil y localmente contráctil, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

En cambio, a partir de ahora, mostraremos conjuntos que no son compactos o contráctiles pero sí verifican la propiedad del punto fijo y otras que, sin cumplirlo, sí son compactas o contráctiles.

Teorema 5.3 (Kinoshita)**.** *Existe un subconjunto compacto y contráctil de $\mathbb{R}^3$ que carece de la propiedad del punto fijo.*

Esta cuestión había permanecido abierta al menos durante 20 años. El conjunto que consiguió encontrar fue la unión de un disco cerrado horizontal, un cilindro vertical de altura unidad y base en el disco cerrado, y una hoja de altura unidad y longitud infinita con espirales alrededor del eje del cilindro.

Teorema 5.4. *El espacio proyectivo de dimensión n tiene la propiedad del punto fijo.*

Este ejemplo nos proporciona un espacio que no es contráctil pero sí tiene la propiedad del punto fijo.

A continuación, veremos ejemplos no triviales de conjuntos con la propiedad del punto fijo, entre los cuales incluiremos uno que no es compacto y otro que no es compacto ni contráctil (véase Smart [4], 21–23).

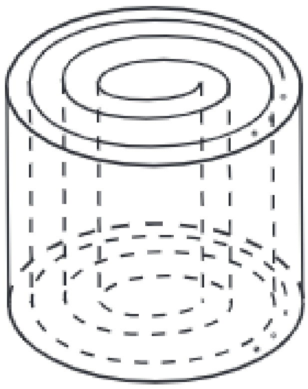

Figura 5.2: Extraído de [9].

Ejemplo 5.5. Los conjuntos que veremos tienen la forma $X = X_0 \cup \bigcup_{1}^{\infty} X_n$, donde X_n es homeomorfo a un segmento cerrado y, para todo $n > 0$, X_n está relacionado con X_0 mediante un punto p_n. Veamos que, si podemos describir nuestro conjunto de dicha forma, dicho conjunto posee la propiedad de punto fijo. Se puede ver que cualquier arco que una un punto en X_i con un punto de $X \setminus X_i$ debe pasar por p_i. Sea T una aplicación continua de X en X, distinguimos los siguientes casos:
Caso 1: Para algún $i \geqslant 1, T(p_i) = p_i$. Entonces p_i es un punto fijo.
Caso 2: Para algún $i \geqslant 1, T(p_i) \in X_i \setminus \{p_i\}$. Definimos la aplicación $R : X \longrightarrow X_i$ dada por

$$R(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \in X_i, \\ p_i, & si \quad x \notin X_i. \end{cases}$$

Así, $R(x(t)), t \in [0,1]$, será un arco en X_i si $x(t), t \in [0,1]$ es un arco en X. Tomamos la aplicación $S : X_i \longrightarrow X_i$ dada por $S(x) = R \circ T(x)$ y veamos que es continua. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ en X_i, podemos suponer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ en un arco de X_i, así por la continuidad de T, $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to Tx$ a través de un arco en X, pero entonces $(R \circ T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to (R \circ T)(x)$, por tanto S es continua y, por el Teorema de Brouwer, tiene un punto fijo z en X_i. Como $z \neq p_i$, tenemos que $T(z) = S(z) = z$.
Caso 3: Para todo $i \geqslant 1$, $T(p_i) \notin X_i$. Definimos la aplicación $R : X \longrightarrow X_0$ dada por

$$R(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \in X_0, \\ p_i, & si \quad x \in X_i, i \geqslant 1. \end{cases}$$

Igual que en el caso 2, podemos ver que la aplicación S dada por $S(x) = (R \circ T)(x)$ es continua y, además, por el Teorema de Brouwer, tiene un punto fijo z que no puede ser p_i, por tanto, $S(z) = T(z) = z$.

A continuación veremos dos ejemplos a los que les podemos aplicar el anterior resultado.

Ejemplo 5.6. Consideramos $A = [0,1] \times \{0\} \bigcup \{\{1/n\} \times [0,n] \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

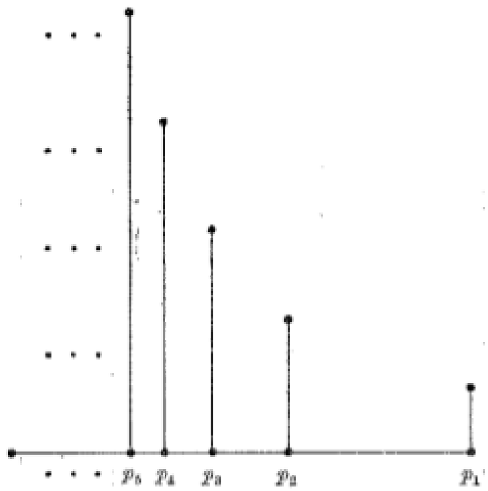

Figura 5.3: Extraído de la página 22 del libro de Smart [4].

Tomemos $X_0 = [0,1] \times \{0\}$, $p_n = (1/n, 0)$, $X_n = \{1/n\} \times [0,n], n \in \mathbb{N}$.

El conjunto A no es compacto. En cambio, como vimos en el Ejemplo 5.5, el conjunto A tiene la propiedad del punto fijo.

Ejemplo 5.7. Sea $B = \{(\cos(x), \sin(x)) \ : \ x \in [\pi, 2\pi]\} \bigcup \{(2t-1, \frac{1-t}{n}) \ : \ n \in \mathbb{N}, t \in [0,1]\}$.

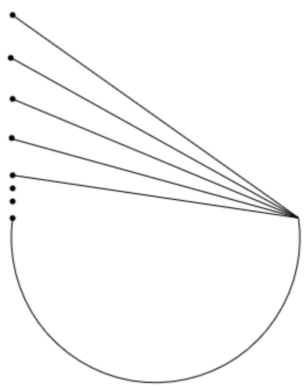

Figura 5.4: Representación gráfica de B.

En este caso, $X_0 = \{(\cos(x), \sin(x)) \,:\, x \in [\pi, 2\pi]\}$, $p_n = \{(0,1)\}$, $X_n = \{(2t-1, \frac{1-t}{n}) \,:\, t \in [0,1]\}$, $n \in \mathbb{N}$.

El conjunto B no es compacto ni contráctil y, sin embargo, por las consideraciones del Ejemplo 5.5, B tiene la propiedad de punto fijo.

Bibliografía

[1] D. R. Anderson, R. I. Avery, J. Henderson *Functional expansion-compression fixed point theorem of Leggett-Williams type*, Vol. 2010 (2010), No. 63, 1–9.

[2] S. Budişan, *Generalizations of Krasnoselskii's fixed point theorem in cones*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 56 (2011), No. 4, 165–171.

[3] V.I. Istrăţescu, *Fixed Point Theory, An Introduction*, D. Reidel Pubishing Company, Dordrecht, Holland, 1981.

[4] D.R. Smart, *Fixed Point Theorems*, 1º edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1974.

[5] https://es.wikipedia.org/wiki/Luitzen_Egbertus_Jan_Brouwer, Consulta de 08/07/2019.

[6] https://es.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach, Consulta de 08/07/2019.

[7] J.J.O'Connor and E.F.Robertson, MacTutor History of Mathematics, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Schauder.html. Consulta de 08/07/2019.

[8] M. G. García, documento no publicado, disponible en http://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/AF/12.%20Teoremas%20del%20punto%20fijo%20-%20Maria%20Guadalupe%20Garcia%20-%202013.pdf, 2013, 15,16. Consulta de 08/07/2019.

[9] A. Illanes, *La Veleidosa Propiedad del Punto Fijo*, http://albertofest.matcuer.unam.mx/Misc51/5101.pdf,2010 20. Consulta de 08/07/2019.

[10] https://alchetron.com/Juliusz-Schauder#-. Consulta de 08/07/2019.

[11] https://www.ecured.cu/Stefan_Banach. Consulta de 08/07/2019.