

ESTRUCTURA DE UNA APLICACIÓN LINEAL

MARÍA J. VALE GONSALVES

1. Introducción

Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n y f un endomorfismo cuyo polinomio característico tiene sus n raíces en K . En este trabajo se prueba el teorema de Jordan que afirma que f tiene una forma canónica de Jordan y en particular que f es diagonalizable si, y solo si, la multiplicidad de cada autovalor de f coincide con la dimensión del subespacio de vectores propios asociado a ese autovalor. Se prueba el teorema de Cayley-Hamilton, según el cual todo endomorfismo es raíz de su polinomio característico. Se define el concepto de endomorfismo nilpotente y se prueba el teorema de descomposición de Jordan-Chevalley que dice que todo endomorfismo de V tiene una única expresión como suma de un endomorfismo nilpotente y un endomorfismo diagonalizable que conmutan. A partir de este teorema se pueden calcular las potencias de f cuando se conocen sus autovalores.

2. Forma canónica de Jordan

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K de dimensión $n \geq 1$.

Definición 2.1. Una *combinación lineal* de los elementos $v_1, \dots, v_r \in V$ es una suma

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in K, \quad i = 1, \dots, r.$$

Si S es un subconjunto finito de V , se llama *subespacio generado* por S , y se denota por $\langle S \rangle$, al conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S .

Un subconjunto ordenado $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V es una *base* de V si el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V ; en particular, los vectores v_1, \dots, v_n son linealmente independientes.

Denotaremos por $C = \{(1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)\}$ la *base canónica* de K^n .

Si S es un subconjunto de V , entonces $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S .

Definición 2.2. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ bases de V y f es un endomorfismo de V . Si

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v'_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

la matriz

$$f_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz asociada a f respecto a las bases B y B'* . Si $B = B'$ denotaremos por f_B la matriz f_{BB} .

Definición 2.3. Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ bases de un espacio vectorial V y sea

$$v'_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

La matriz

$$\text{id}_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de cambio de base* de B' a B .

Definición 2.4. Un endomorfismo f de V es una aplicación lineal $f: V \rightarrow V$.

Denotaremos por $\text{End}_K(V)$ el conjunto de endomorfismos de V . $\text{End}_K(V)$ es una K -álgebra, es decir un espacio vectorial sobre K y un anillo con las operaciones

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \quad (af)(v) = \lambda f(v), \quad (g \circ f)(v) = g(f(v)),$$

y además verifica

$$(ag) \circ f = g \circ (af) = a(f \circ g),$$

para todo $f, g \in \text{End}_K(V)$, $a \in K$ y $v \in V$.

Definición 2.5. Se dice que las matrices $A, B \in M_n(K)$ son *semejantes* si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$.

La relación “ser semejantes” en el conjunto de matrices $n \times n$ sobre K es una relación de equivalencia.

Ejemplo 2.6. Si $f: V \rightarrow V$ es una aplicación lineal y B y B' son bases de V , entonces las matrices f_B y $f_{B'}$ son semejantes. En efecto, $f_{B'} = \text{id}_{BB'} f_B \text{id}_{B'B}$.

Definición 2.7. Sea f un endomorfismo de V . Se dice que un escalar $\lambda \in K$ es un *autovalor* o *valor propio* de f si existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$. Un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$ se llama *autovector* o *vector propio* de f asociado a λ .

Definición 2.8. Se llama *polinomio característico* de A al polinomio $P_A(X) = \det(A - XI)$.

Proposición 2.9. *Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Si $A, B \in M_n(K)$ son semejantes, entonces existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$, y entonces

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(B - XI) = \det(P^{-1}AP - XI) = \det(P^{-1}AP - XP^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(XI)P) = \det(P^{-1}(A - XI)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - XI) \det(P) = \det(A - XI) = P_A(X). \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2.10. Si f es un endomorfismo de V , se llama *polinomio característico* de f al polinomio $P_f(X) = P_{f_B}(X)$, siendo f_B la matriz asociada a f respecto a una base B de V .

Observación 2.11. El polinomio característico de f no depende de la base de V considerada. En efecto, si B y B' son bases de V , entonces las matrices f_B y $f_{B'}$ son semejantes. Por la proposición 2.9, $P_{f_B}(X) = P_{f_{B'}}(X)$.

Proposición 2.12. *Si f es un endomorfismo de V , entonces λ es un autovalor de f si y solo si λ es una raíz del polinomio característico de f .*

Demostración. Si λ es un autovalor de f existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$, es decir $(f - \lambda \text{id}_V)(v) = 0$. Sea $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V y $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Se tiene

$$\lambda \text{ autovalor de } f \iff (f_B - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff P_{f_B}(\lambda) = \det(f_B - \lambda I) = 0. \quad \square$$

Definición 2.13. Se dice que la matriz $A \in M_n(K)$ es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal, es decir si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Se dice que un endomorfismo f de un espacio vectorial V es *diagonalizable* si existe una base B de V tal que la matriz f_B asociada a f respecto a B es una matriz diagonal; es decir si existe una base B de V formada por vectores propios de f .

Definición 2.14. Se llama *bloque elemental de Jordan de orden r asociado al escalar $\lambda \in K$* a la siguiente matriz triangular superior:

$$J_\lambda^r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.15.

$$J_\lambda^1 = (\lambda), \quad J_\lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_\lambda^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definición 2.16. Una *matriz de Jordan* es una matriz triangular superior de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s}^{r_s} \end{pmatrix}$$

donde las matrices $J_{\lambda_i}^{r_i}$, son bloques elementales de Jordan de orden r_i , para $i = 1, \dots, s$. Si f es un endomorfismo de V y B es una base de V respecto a la cual la matriz asociada a f es la matriz de Jordan J se dice que B es una *base de Jordan para f* y que J es una *forma canónica de Jordan* o también una *forma de Jordan para f* .

Lema 2.17. Sea f un endomorfismo de V . La aplicación $\Phi_f: K[X] \rightarrow \text{End}(V)$ dada por

$$\Phi_f(a_m X^m + \dots + a_0) = a_m f^m + \dots + a_0 \text{id}_V,$$

es un homomorfismo de K -álgebras, es decir, es una aplicación lineal y verifica que $\Phi_f(q(X)h(X)) = \Phi_f(q(X)) \circ \Phi_f(h(X))$, para cualesquiera $q(X), h(X) \in K[X]$. Denotaremos $\Phi_f(q(X))$ por $q(f)$.

Demostración. La demostración es inmediata. □

Observación 2.18. Obsérvese que de la conmutatividad del producto de polinomios de $K[X]$ se deduce que dos endomorfismos de la imagen de Φ_f siempre conmutan, es decir

$$q(f) \circ h(f) = h(f) \circ q(f).$$

Lema 2.19. ([1, Lema 1, p. 319]) Sea f un endomorfismo de V , λ un autovalor de f .

(1) Se tiene la siguiente cadena creciente de subespacios de V :

$$0 \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^2 \subset \dots \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^j \subset \dots$$

(2) Existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$.

Demostración. (2) Dado que V tiene dimensión finita, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+1}$. Veamos que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Pongamos $m = q + r$, $r \geq 1$. Razonemos por inducción sobre r . Para $r = 1$ el resultado es cierto. Supongamos el resultado cierto para $r - 1 \geq 1$ y veamos que es cierto para r . Si $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r}$, entonces $(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r}(v) = 0$, de donde se sigue que $(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r-1}(f - \lambda \text{id}_V)(v) = 0$, es decir $(f - \lambda \text{id}_V)(v) \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r-1}$. Por hipótesis de inducción, $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+r-1} = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. Así, $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+1} = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. \square

Lema 2.20. Sea f un endomorfismo de V , λ un autovalor de f . Sea q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Consideremos la cadena creciente de subespacios de V

$$0 \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q.$$

Sea F_i , $2 \leq i \leq q$, un subespacio suplementario de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1}$ en $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^i$,

$$\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^i = F_i \oplus \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1},$$

y sea $B_i = \{v_1, \dots, v_r\}$, una base de F_i . Se tiene

(1) El conjunto

$$(f - \lambda \text{id}_V)(B_i) = \{(f - \lambda \text{id}_V)(v_1), \dots, (f - \lambda \text{id}_V)(v_r)\} \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1},$$

es linealmente independiente.

(2) $\langle (f - \lambda \text{id}_V)(B_i) \rangle \cap \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-2} = \{0\}$, para $3 \leq i \leq q$.

Demostración. (1) Supongamos que

$$\sum_{j=1}^r a_j (f - \lambda \text{id}_V)(v_j) = 0, \quad a_j \in K, \quad j = 1, \dots, r,$$

equivalentemente

$$(f - \lambda \text{id}_V) \left(\sum_{j=1}^r a_j v_j \right) = 0,$$

Entonces, para $i \geq 2$

$$\sum_{j=1}^r a_j v_j \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \cap F_i \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1} \cap F_i = \{0\},$$

luego $a_j = 0$ para $j = 1, \dots, r$.

(2) Sea

$$v = \sum_{j=1}^r a_j (f - \lambda \text{id}_V)(v_j) \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-2}.$$

Se tiene

$$(f - \lambda \text{id}_V)^{i-2} \left(\sum_{j=1}^r a_j (f - \lambda \text{id}_V)(v_j) \right) = 0.$$

Así,

$$\sum_{j=1}^r a_j v_j \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{i-1} \cap F_i = \{0\},$$

de donde se sigue que $a_j = 0$, para $j = 1, \dots, r$, y por tanto $v = 0$. \square

Definición 2.21. Sean U_1, \dots, U_s subespacios de V . Se dice que la suma $U_1 + \dots + U_s$ es *directa* y se denota por $U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ si verifica

$$U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Lema 2.22. Sean U_1, \dots, U_s subespacios de V tales que $U_1 + \dots + U_s = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$. Si B_i es una base de U_i , $i = 1, \dots, s$, entonces $\bigcup_{i=1}^s B_i$ es una base de $U_1 + \dots + U_s$.

Demostración. Pongamos $B_i = \{v_{i1}, \dots, v_{ir_i}\}$, $i = 1, \dots, s$. El conjunto $\bigcup_{i=1}^s B_i$ es un conjunto de generadores de $U_1 + \dots + U_s$. Veamos que es linealmente independiente. Si

$$\sum_{j=1}^{r_1} a_{1j} v_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^{r_s} a_{sj} v_{sj} = 0,$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} v_{ij} = U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right), \quad i = 1, \dots, s.$$

Puesto que la suma es directa

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} v_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

y por ser B_i , $i = 1, \dots, s$, linealmente independiente,

$$a_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, r_i.$$

Así, $a_{ij} = 0$, para todo $j = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, s$. □

Proposición 2.23. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f . Sea q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Se tiene

$$f(\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q) \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q.$$

Demostración. (1) Si $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$, entonces $(f - \lambda \text{id}_V)^q f(v) = f(f - \lambda \text{id}_V)^q(v) = 0$. □

Denotaremos por f_λ el endomorfismo restricción de f a $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$

$$f_\lambda: \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q \longrightarrow \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q \\ v \longmapsto f(v)$$

Teorema 2.24. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f . Sea q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Existe una base B_λ de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$ tal que la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ es una matriz de Jordan.

Demostración. Consideremos la cadena de subespacios de V

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q.$$

Sea F_q un subespacio suplementario de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1}$ en $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$ y sea $B_q = \{v_{q1}, \dots, v_{qm_q}\}$ una base de F_q . Pongamos $g = f - \lambda \text{id}_V$. Por el lema 2.20, el conjunto $g(B_q)$ es un subconjunto de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1}$ linealmente independiente y $\langle g(B_q) \rangle \cap \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-2} = 0$. Completamos $g(B_q)$ a una base B_{q-1} de un subespacio F_{q-1} suplementario de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-2}$ en $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1}$. Se tiene

$$B_{q-1} = \{v_{q-11}, \dots, v_{q-1m_{q-1}}\}, \quad g(v_{qi}) = v_{q-1i}, \quad i = 1, \dots, m_q.$$

Siguiendo así, sucesivamente se obtiene una base $B_2 = \{v_{21}, \dots, v_{2m_2}\}$ de un subespacio F_2 , suplementario de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)$ en $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^2$, y completando $g(B_2)$ obtenemos una base B_1 de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)$ tal que

$$B_1 = \{v_{11}, \dots, v_{1m_1}\}, \quad g(v_{2i}) = v_{1i}, \quad i = 1, \dots, m_2.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q &= \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1} \oplus F_q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-2} \oplus F_{q-1} \oplus F_q \\ &= \dots = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_q. \end{aligned}$$

Por el lema 2.22, los $m_1 + \dots + m_q$ vectores así construidos forman una base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$.

El cuadro 1.1 esquematiza la construcción de esta base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$.

B_q	v_{q1}	\dots	v_{qm_q}										
B_{q-1}	$g(v_{q1})$	\dots	$g(v_{qm_q})$	v_{q-1m_q+1}	\dots	$v_{q-1m_{q-1}}$							
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots							
B_2	$g^{q-2}(v_{q1})$	\dots	$g^{q-2}(v_{qm_q})$	$g^{q-3}(v_{q-1m_q+1})$	\dots	$g^{q-3}(v_{q-1m_{q-1}})$	\dots	v_{2m_3+1}	\dots	v_{2m_2}			
B_1	$g^{q-1}(v_{q1})$	\dots	$g^{q-1}(v_{qm_q})$	$g^{q-2}(v_{q-1m_q+1})$	\dots	$g^{q-2}(v_{q-1m_{q-1}})$	\dots	$g(v_{2m_3+1})$	\dots	$g(v_{2m_2})$	v_{1m_2+1}	\dots	v_{1m_1}

Cuadro 1: Base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$

Escribiendo estos vectores por columnas y empezando la última fila del cuadro 1.1 obtenemos la siguiente base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$:

$$\begin{aligned} B_\lambda &= \{g^{q-1}(v_{q1}), \dots, g(v_{q1}), v_{q1}\} \cup \dots \cup \{g^{q-1}(v_{qm_q}), \dots, g(v_{qm_q}), v_{qm_q}\} \cup \\ &\quad \cup \{g^{q-2}(v_{q-1m_q+1}), \dots, v_{q-1m_q+1}\} \cup \dots \cup \\ &\quad \cup \{g^{q-2}(v_{q-1m_{q-1}}), \dots, v_{q-1m_{q-1}}\} \cup \dots \cup \\ &\quad \cup \{v_{1m_2+1}, \dots, v_{1m_1}\}. \end{aligned}$$

Denotemos por J_λ la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ . Las m_q primeras columnas del cuadro 1.1 dan cada una un bloque elemental de Jordan de orden q . En efecto, para $j = 1, \dots, m_q$, se tiene

$$\begin{aligned} f(g^{q-1}(v_{qj})) &= (f - \lambda \text{id}_V)(g^{q-1}(v_{qj})) + \lambda g^{q-1}(v_{qj}) = \lambda g^{q-1}(v_{qj}), \\ f(g^{q-2}(v_{qj})) &= (f - \lambda \text{id}_V)(g^{q-2}(v_{qj})) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}) = g^{q-1}(v_{qj}) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}), \\ &\vdots \\ f(v_{qj}) &= (f - \lambda \text{id}_V)(v_{qj}) + \lambda v_{qj} = g(v_{qj}) + \lambda v_{qj}. \end{aligned}$$

Por tanto hay m_q bloques elementales de Jordan colocados en la diagonal de J_λ . Análogamente, dado que cada una de las siguientes $m_{q-1} - m_q$ columnas define un bloque elemental de Jordan de orden $q - 1$, tenemos $m_{q-1} - m_q$ bloques elementales de Jordan de orden $q - 1$ en la diagonal de J_λ . Siguiendo este proceso llegamos a las $m_1 - m_2$ últimas columnas del cuadro 1.1 que proporcionan $m_1 - m_2$ matrices de Jordan de orden 1 en la diagonal de J_λ .

La matriz J_λ es una matriz de Jordan y $\dim \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) = m_1$ es el número total de bloques elementales de Jordan que hay en J_λ . \square

Definición 2.25. Se dice que $\lambda \in K$ es una raíz de multiplicidad r del polinomio $q(X) \in K[X]$ si $q(\lambda) = 0$ y

$$q(X) = (X - \lambda)^r c(X), \quad c(\lambda) \neq 0.$$

Obsérvese que si $(X - \lambda)^r c(X) = (X - \lambda)^s c'(X)$, con $c(\lambda) \neq 0$ y $c'(\lambda) \neq 0$, entonces $r = s$ y $c(X) = c'(X)$.

Proposición 2.26. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f de multiplicidad r . Si q es el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$, entonces $\dim_K \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = r$.

Demostración. Supongamos que $\dim_K \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = s$. Queremos probar que $s = r$. Si $B' = \{v_1, \dots, v_s\}$ es una base de $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1s+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & a_{ss+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{s+1s+1} & \dots & a_{s+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ns+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (f\lambda)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Pongamos $B'' = \{v_{s+1}, \dots, v_n\}$, $L = \langle B'' \rangle$ y consideremos el endomorfismo $h: L \rightarrow L$ cuya matriz asociada respecto a la base B'' es la matriz

$$h_{B''} = \begin{pmatrix} a_{s+1s+1} & \dots & a_{s+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ns+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por la demostración del teorema 2.24, $P_{f\lambda}(X) = (-1)^s(X - \lambda)^s$. Luego

$$P_f(X) = \det(f_B - XI) = P_{f\lambda}(X) P_h(X) = (-1)^s(X - \lambda)^s P_h(X).$$

Veamos que $P_h(\lambda) \neq 0$. Supongamos que $P_h(\lambda) = 0$, es decir, que λ es un autovalor de h . Existe un vector

$$v = \sum_{j=s+1}^n \mu_j v_j \in L, \quad v \neq 0,$$

tal que $h(v) = \lambda v$. Se tiene

$$\begin{aligned} (f - \lambda \text{id}_V)(v) &= f(v) - \lambda v = f(v) - h(v) = \\ &= \sum_{j=s+1}^n \mu_j f(v_j) - \sum_{j=s+1}^n \mu_j h(v_j) \\ &= \sum_{j=s+1}^n \mu_j \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} v_k \right) - \sum_{j=s+1}^n \mu_j \left(\sum_{k=s+1}^n a_{kj} v_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=s+1}^n \mu_j a_{kj} \right) v_k - \sum_{k=s+1}^n \left(\sum_{j=s+1}^n \mu_j a_{kj} \right) v_k \\ &= \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=s+1}^n \mu_j a_{kj} \right) v_k \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q. \end{aligned}$$

Así, $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q+1} = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. Por tanto $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q \cap L = \{0\}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $s = r$. \square

Corolario 2.27. Sea f un endomorfismo de V , λ un autovalor de f de multiplicidad r y q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Se tiene que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^r$.

Demostración. Dado que $\dim_K \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = r$, se tiene que $q \leq r$ y por tanto $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^r = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$. \square

Lema 2.28. ([2, Lema 6.7.2]) *Sea f un endomorfismo de V . Si $p_1(X), \dots, p_s(X) \in K[X]$ son tales que $\text{m.c.d.}(p_j(X), p_k(X)) = 1$, para $j \neq k$, entonces*

$$\text{Nuc } p_j(f) \cap \left(\sum_{k \neq j} \text{Nuc } p_k(f) \right) = \{0\}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Demostración. Se tiene

$$\sum_{k \neq j} \text{Nuc } p_k(f) \subset \text{Nuc} \left(\prod_{k \neq j} p_k(f) \right). \quad (1)$$

Dado que los polinomios $p_j(X)$ y $\prod_{k \neq j} p_k(X)$ son primos entre sí, por el teorema de Bezout, existen polinomios $a(X), b(X) \in K[X]$ tales que

$$a(X)p_j(X) + b(X) \prod_{k \neq j} p_k(X) = 1.$$

Por tanto

$$a(f)p_j(f) + b(f) \prod_{k \neq j} p_k(f) = \text{id}_V.$$

Si $v \in \text{Nuc } p_j(f) \cap \text{Nuc}(\prod_{k \neq j} p_k(f))$, entonces

$$v = a(f)p_j(f)(v) + b(f) \prod_{k \neq j} p_k(f)(v) = 0 + 0 = 0.$$

Luego $\text{Nuc } p_j(f) \cap \text{Nuc}(\prod_{k \neq j} p_k(f)) = \{0\}$ y el resultado se sigue de (1). \square

Proposición 2.29. *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n(X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Sea q_i el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} = \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i}$, para todo $m_i > q_i$, $i = 1, \dots, s$. Se tiene*

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{q_1} \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{q_s}.$$

Demostración. Dado que $\text{m.c.d.}((X - \lambda_i)^{q_i}, (X - \lambda_j)^{q_j}) = 1$, para $i \neq j$, se tiene que

$$\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{q_1} + \dots + \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{q_s} = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{q_1} \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{q_s}.$$

Por la proposición 2.26, $\dim_K \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} = r_i$ y entonces

$$\dim_K V = n = \text{grad } P_f(X) = \sum_{i=1}^s r_i = \sum_{i=1}^s \dim_K \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} = \dim_K (\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{q_1} \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{q_s}),$$

por el lema 2.22. \square

Corolario 2.30. *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n(X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Se tiene*

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{r_s}.$$

Demostración. Se sigue del corolario 2.27 y del teorema 2.29. \square

Teorema 2.31. (Teorema de Jordan) *Sea f un endomorfismo de V . Si*

$$P_f(X) = (-1)^n(X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \in K, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \text{si } i \neq j.$$

entonces existe una base B_J de V tal que la matriz asociada a f respecto a esta base es una matriz de Jordan. Se dice que B_J es una base de Jordan para f .

Demostración. Por el teorema 2.24, existe una base $B_{\lambda_i} = \{v_{i1}, \dots, v_{ir_i}\}$ de $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$, $i = 1, \dots, s$, tal que la matriz asociada a $f_{\lambda_i}: \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} \rightarrow \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$, respecto a B_{λ_i} , $i = 1, \dots, s$, es una matriz de Jordan. Por la proposición 2.29 y el lema 2.22, $B_J = \{v_{11}, \dots, v_{1r_1}, \dots, v_{s1}, \dots, v_{sr_s}\}$ es base de V . La matriz asociada a f respecto a B_J es

$$f_{B_J} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & J_{\lambda_s} \end{pmatrix},$$

que es una matriz de Jordan. □

La forma de Jordan de f está determinada por las dimensiones de los subespacios $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^j$, $j \geq 1$, para los distintos autovalores λ_i de f , por tanto es única salvo el orden de los bloques elementales de Jordan.

Corolario 2.32. *Si A es una matriz de $M_n(K)$ y el polinomio característico de A es de la forma*

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \in K, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ si } i \neq j,$$

entonces A es semejante a una matriz de Jordan.

Demostración. Sea $f: K^n \rightarrow K^n$ el endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A . Dado que $P_f(X) = P_A(X)$, por el teorema de Jordan existe una base B de K^n tal que la matriz f_B asociada a f respecto a B es una matriz de Jordan. Así, A y f_B son matrices semejantes. □

Definición 2.33. En las condiciones del corolario anterior la matriz de Jordan f_B se dice que es una *forma de Jordan* para A .

Teorema 2.34. (Teorema de diagonalización) *Sea f un endomorfismo de V . Se tiene*

- (1) *Si λ es un autovalor de f de multilicidad r , entonces $\dim_K \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V) \leq r$.*
- (2) *f es diagonalizable si, y solo si, $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$ y $\dim_K \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V) = r_i$, para $i = 1, \dots, s$.*

Demostración. (1) Se sigue de la proposición 2.26.

(2) Si f es diagonalizable, entonces existe una base B de V tal que f_B es una matriz diagonal. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los elementos de la diagonal principal de f_B , entonces

$$P_f(X) = P_{f_B}(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \text{si } i \neq j.$$

Además,

$$\dim_K \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V) = n - \text{rango}(f_B - \lambda_i I) = n - (n - r_i) = r_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

El recíproco se sigue de los teoremas 2.24 y 2.31. □

Corolario 2.35. *La matriz $A \in M_n(K)$ es diagonalizable si, y solo si, verifica las siguientes condiciones:*

- (1) $P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, donde $\lambda_i \in K$, para $i = 1, \dots, s$, y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$.
- (2) Si $f: K^n \rightarrow K^n$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A , entonces $\dim_K \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V) = r_i$, para $i = 1, \dots, s$.

Teorema 2.36. *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Se tiene que $P_f(f) = (-1)^n (f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \dots (f - \lambda_s \text{id}_V)^{r_s} = 0$.*

Demostración. Por el corolario 2.30,

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{r_s}.$$

Si $v \in V$, existen vectores $v_i \in \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{r_i}$, $i = 1, \dots, s$, tales que $v = v_1 + \dots + v_s$. Dado que $(f - \lambda_i \text{id}_V)^{r_i}(v_i) = 0$, $i = 1, \dots, s$, se tiene

$$(P_f(f))(v) = (-1)^n (f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \dots (f - \lambda_s \text{id}_V)^{r_s}(v) = \sum_{i=1}^s (-1)^n (f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \dots (f - \lambda_s \text{id}_V)^{r_s}(v_i) = 0. \quad \square$$

Corolario 2.37. Si $A \in M_n(K)$ y $P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ es su polinomio característico, entonces $P_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I = 0$.

Demostración. Dado que existe un cuerpo $\bar{K} \supset K$ donde todo polinomio de $K[X]$ tiene sus raíces (\bar{K} se llama la clausura algebraica de K), se tiene que $P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in \bar{K}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Sea $f: \bar{K}^n \rightarrow \bar{K}^n$ el endomorfismo cuya matriz asociada en la base canónica es A . Dado que

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s},$$

por el teorema 2.38, $P_f(f) = 0$. Luego $P_f(A) = 0$. □

Teorema 2.38. (Teorema de Cayley-Hamilton) Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ su polinomio característico. Se tiene que $P_f(f) = (-1)^n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_0 \text{id}_V = 0$.

Demostración. Por el corolario 2.37, si B es una base de V y $A = f_B$, se tiene que $P_A(A) = 0$. Así, $P_f(f) = 0$. □

Ejemplo 2.39. Consideremos la aplicación \mathbb{R} -lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(x, y, z, t) = (y - 4z, 5x - 9z, 2x + y - 6z, -2t).$$

Se tiene que $P_f(X) = (X + 2)^4$. La matriz asociada a f respecto a la base canónica $C = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es

$$f_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

luego

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = 4 - \text{rango}(f_C + 2I) = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Por tanto, una forma de Jordan de f tiene dos bloques elementales de Jordan asociados al autovalor -2 . Dado que

$$(f_C + 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 36 \\ 2 & 0 & -2 & 36 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (f_C + 2I)^3 = 0,$$

una forma de Jordan para f tiene un bloque elemental de Jordan de orden 3 y un bloque elemental de Jordan de orden 1. Vamos a construir una base de Jordan para f . Consideremos la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) \subsetneq \text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})^2 \subsetneq \text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})^3 = \mathbb{R}^4.$$

Se tiene

$$\text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

Análogamente,

$$\text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Una base de un subespacio F_3 suplementario de $\text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})^2$ en \mathbb{R}^4 es $B_3 = \{(0, 0, 1, 0)\}$. Dado que $(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})(0, 0, 1, 0) = (-4, -9, -4, 0)$, una base de un subespacio F_2 suplementario de $\text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ en $\text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})^2$, es $B_2 = \{(-4, -9, -4, 0)\}$. Una base de $\text{Nuc}(f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ es $B_1 = \{(-1, -2, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, donde $(-1, -2, -1, 0) = (f + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4})^2(0, 0, 1, 0)$. Una base de Jordan para f es

$$B = \{(-1, -2, -1, 0), (-4, -9, -4, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

y una forma de Jordan para f es

$$f_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.40. Consideremos la matriz real

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_1}(X) = (X - 1)^4$.

Si $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_1 , entonces

$$\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle (1, 2, 1, 0), (1, -2, 0, 1) \rangle.$$

Puesto que $\dim_K \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = 2$ una forma de Jordan para A_1 tiene dos bloques elementales de Jordan asociados al autovalor 1 y como $(A_1 - I)^2 = 0$, los dos bloques elementales de Jordan son de orden 2. Vamos a construir una base de Jordan para f . Se tiene la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4}) \subsetneq \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \mathbb{R}^4.$$

Una base de un subespacio F_2 suplementario de $\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ en \mathbb{R}^4 es $B_2 = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Dado que

$$(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4})(0, 0, 1, 0) = (-2, -8, -3, 1), \quad (f - \text{id}_{\mathbb{R}^4})(0, 0, 0, 1) = (2, 0, 1, 1),$$

una base de $\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4})$ es $B_1 = \{(-2, -8, -3, 1), (2, 0, 1, 1)\}$. Una base de Jordan para f es

$$\{(-2, -8, -3, 1), (0, 0, 1, 0), (2, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Si tomamos

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_{A_1} es una forma de Jordan para A_1 y se tiene $P_1^{-1}A_1P_1 = J_{A_1}$.

Ejemplo 2.41. Consideremos la matriz real

$$A_2 = \begin{pmatrix} -8 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 7 & 0 \\ -5 & 10 & 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_2}(X) = (X - 2)^2(X + 3)^2$. Si $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_2 , entonces

$$\text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1) \rangle, \quad \text{Nuc}(f + 3 \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Por el teorema de diagonalización, A_2 es diagonalizable. Una base de Jordan para f es

$$\{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Si tomamos

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

la matriz J_{A_2} es una forma de Jordan para A_2 y $P_2^{-1}A_2P_2 = J_{A_2}$.

Ejemplo 2.42. Consideremos la matriz compleja

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & -2 & 2 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+i & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1+i \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_3}(X) = (i - X)^2(1 + i - X)^2$. Si $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ es la aplicación \mathbb{C} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_3 , entonces

$$\text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (1, 0, 0, -1) \rangle, \quad \text{Nuc}(f - (1 + i) \text{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (2, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1) \rangle$$

Por tanto, una forma de Jordan de A_3 tiene un bloque elemental de Jordan de orden 2 para el autovalor i y dos bloques elementales de orden 1 Jordan para el autovalor $1 + i$. Se tiene

$$(A_3 - iI)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \langle (1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, 0) \rangle.$$

Una base B_2 de un subespacio F_2 suplementario de $\text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})$ en $\text{Nuc}(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})^2$ es $B_2 = \{(1, 1, 1, 0)\}$, y dado que $(f - i \text{id}_{\mathbb{C}^4})(1, 1, 1, 0) = (1, 0, 0, -1)$, una base de Jordan para f es

$$\{(1, 0, 0, -1), (1, 1, 1, 0), (2, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}.$$

Si tomamos

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{A_3} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix},$$

la matriz J_{A_3} es una forma de Jordan para A_3 y se tiene que $P_3^{-1}A_3P_3 = J_{A_3}$.

3. Diagonalización simultánea de dos endomorfismos diagonalizables que conmutan

Lema 3.1. Sean U_1, \dots, U_s subespacios de V . Si $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ y $f_i \in \text{End}_K(U_i)$, $i = 1, \dots, s$, entonces la aplicación $f_1 \oplus \dots \oplus f_s: V \rightarrow V$ dada por

$$(f_1 \oplus \dots \oplus f_s)(u_1 + \dots + u_s) = f_1(u_1) + \dots + f_s(u_s),$$

es un endomorfismo de V .

Demostración. Es inmediata. □

Teorema 3.2. ([4, Ejercicio 15-13]) Sean f y g dos endomorfismos de V diagonalizables tales que $f \circ g = g \circ f$. Existe una base de V formada por vectores propios para f y para g .

Demostración. Sea $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Dado que f es diagonalizable

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V) \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V).$$

Veamos que $g(\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)) \subset (\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V))$. Sea $v \in \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)$, puesto que

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v),$$

se tiene que $g(v) \in \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)$.

Si $g_{\lambda_i}: \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V) \rightarrow \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)$ es la restricción de g a $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)$, para $i = 1, \dots, s$, entonces

$$g = g_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus g_{\lambda_s}.$$

Sea B una base de vectores propios de f . La matriz asociada a g respecto a B es una matriz diagonal por bloques

$$g_B = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \quad A_i \in M_{r_i}(K), \quad i = 1, \dots, s.$$

Veamos que cada endomorfismo g_{λ_i} es diagonalizable. Dado que g es diagonalizable,

$$P_g(X) = (-1)^n (X - \mu_1)^{t_1} \dots (X - \mu_m)^{t_m}, \quad \mu_i \in K, \quad \mu_i \neq \mu_j, \quad \text{si } i \neq j,$$

y $P_f(X) = P_{A_1}(X) \dots P_{A_s}(X)$. Por la unicidad de la factorización en $K[X]$, el polinomio $P_{g_{\lambda_i}}(X) = P_{A_i}(X)$ tiene sus r_i raíces en K , luego g_{λ_i} tiene una forma de Jordan. Si B'_{λ_i} es una base de Jordan para g_{λ_i} , $i = 1, \dots, s$, entonces

$$B' = \bigcup_{i=1}^s B'_{\lambda_i},$$

es una base de Jordan para g y dado que g es diagonalizable, B' es una base de vectores propios para g . Por tanto cada B'_{λ_i} , $i = 1, \dots, s$, es una base de vectores propios para g_{λ_i} . Además, dado $v \in B'$ existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tal que $v \in B'_{\lambda_i}$ y como $B'_{\lambda_i} \subset \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)$, se tiene que $f(v) = \lambda_i v$. Así, B' es también una base de vectores propios para f y $f_{B'} = f_B$. □

Corolario 3.3. Sean $A_1, A_2 \in M_n(K)$ matrices diagonalizables tales que $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1} A_1 P$ y $P^{-1} A_2 P$ son matrices diagonales.

Demostración. Sean f y g los endomorfismos de K^n cuya matrices asociadas en la base canónica son A_1 y A_2 , respectivamente. Dado que $A_1 A_2 = A_2 A_1$, se tiene que $f \circ g = g \circ f$. Por la proposición anterior existe una base B de vectores propios para f y g . Si $P = \text{id}_{BC}$, entonces las matrices $P^{-1} A_1 P$ y $P^{-1} A_2 P$ son diagonales. □

Ejemplo 3.4. Consideremos los endomorfismo f y g de \mathbb{R}^4 cuyas matrices asociadas respecto a la base canónica son:

$$f_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -3 & -2 \\ -6 & 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad g_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & 4 & 4 \\ -10 & -8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $f \circ g = g \circ f$. Los endomorfismos f y g son diagonalizables puesto que

$$P_f(X) = (1 - X)(2 - X)^2(-1 - X), \quad P_g(X) = (2 - X)(-1 - X)(1 - X)^2.$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4})) &= 1, & \dim_{\mathbb{R}}(\text{Nuc}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})) &= 2, & \dim_{\mathbb{R}}(\text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^4})) &= 1, \\ \dim_{\mathbb{R}}(\text{Nuc}(g - 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})) &= 1, & \dim_{\mathbb{R}}(\text{Nuc}(g + \text{id}_{\mathbb{R}^4})) &= 1, & \dim_{\mathbb{R}}(\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4})) &= 2. \end{aligned}$$

Vamos a buscar una base de vectores propios para f y g , simultaneamente. Dado que

$$\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, 0, 2, 0) \rangle, \quad \text{Nuc}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1, 0, 2, -1), (0, 1, 1, 0) \rangle, \quad \text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (0, 0, 1, -1) \rangle,$$

una base de vectores propios de f es

$$B = \{(1, 0, 2, 0), (1, 0, 2, -1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, -1)\},$$

y la matriz asociada a f respecto a B es

$$f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a g en B es la matriz diagonal por bloques

$$g_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean

$$\begin{aligned} g_1: \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4}) &\rightarrow \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4}), & g_2: \text{Nuc}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^4}) &\rightarrow \text{Nuc}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^4}), \\ g_{-1}: \text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^4}) &\rightarrow \text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^4}), \end{aligned}$$

las restricciones de g a $\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^4})$, $\text{Nuc}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^4})$ y $\text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^4})$, respectivamente.

$$P_{g_1}(X) = 2 - X, \quad P_{g_2}(X) = (1 - X)(-1 - X), \quad P_{g_{-1}}(X) = 1 - X.$$

El conjunto $B_1 = \{(1, 0, 2, 0)\}$ es una base de vectores propios para g_1 . Dado que

$$\text{Nuc}(g_2 - \text{id}_{\text{Nuc}(f-2\text{id}_{\mathbb{R}^4})}) = \{x_1(1, 0, 2, -1) + x_2(0, 1, 1, 0) \mid \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \langle (0, 1, 1, 0) \rangle$$

$$\text{Nuc}(g_2 + \text{id}_{\text{Nuc}(f-2\text{id}_{\mathbb{R}^4})}) = \{x_1(1, 0, 2, -1) + x_2(0, 1, 1, 0) \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \langle (1, 0, 2, -1) \rangle.$$

una base de vectores propios de g_2 es $B_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, -2, 0, -1)\}$. Una base de vectores propios para g_{-1} es $B_{-1} = \{(0, 0, 1, -1)\}$.

$$(g_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad (g_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g_{-1})_{B_{-1}} = I$$

La base

$$B' = \{(1, 0, 2, 0), (0, 1, 1, 0), (1, -2, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$$

es una base de vectores propios para g y para f , $f_{B'} = f_B$ y

$$g_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poniendo

$$P = \text{id}_{B'C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

se tiene que

$$P^{-1} f_C P = f_{B'}, \quad P^{-1} g_C P = g_{B'}.$$

4. Nilpotencia. Potencias de endomorfismos y de matrices

Definición 4.1. Se dice que el endomorfismo g de V es nilpotente si existe un entero $s \geq 1$ tal que $g^s = 0$. Si $g \neq 0$ es un endomorfismo nilpotente, se llama índice de nilpotencia de g al menor entero $q \geq 2$ tal que $g^{q-1} \neq 0$ y $g^q = 0$.

Se dice que la matriz $A \in M_n(K)$ es nilpotente si existe un entero $s \geq 0$ tal que $A^s = 0$. Si $A \neq 0$ es una matriz nilpotente, se llama índice de nilpotencia de A al menor entero $q \geq 2$ tal que $A^{q-1} \neq 0$ y $A^q = 0$.

Proposición 4.2. Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f . Sea q el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q = \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Se tiene

(1) El endomorfismo

$$\begin{aligned} f_\lambda - \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)} : \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q &\longrightarrow \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q \\ v &\longmapsto f(v) - \lambda v \end{aligned}$$

es nilpotente de índice q .

(2) La matriz de Jordan asociada a $f_\lambda - \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)}$ respecto a B_λ es nilpotente de índice q .

Demostración. (1) Veamos que $(f_\lambda - \lambda \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)})^q = 0$. En efecto, para todo $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$,

$$(f_\lambda - \lambda \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)})^q(v) = (f - \lambda \text{id}_V)^q(v) = 0.$$

Además, se tiene que $(f_\lambda - \lambda \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)})^{q-1} \neq 0$, puesto que si $(f_\lambda - \lambda \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)})^{q-1}(v) = 0$, para todo $v \in \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q$, entonces $\text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^q \subset \text{Nuc}(f - \lambda \text{id}_V)^{q-1}$.

(2) Es trivial. □

Teorema 4.3. (Teorema de descomposición de Jordan-Chevalley) Sea f un endomorfismo de V cuyo polinomio característico tiene sus n raíces en K . Existe un único endomorfismo nilpotente y un único endomorfismo diagonalizable que conmutan y tales que su suma es f .

Demostración. (1) Sea $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$, y q_i el menor entero positivo tal que $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} = \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i}$, para todo $m_i > q_i$, $i = 1, \dots, s$. Se tiene

$$V = \text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1} \oplus \dots \oplus \text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{r_s},$$

y $f = f_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus f_{\lambda_s}$, siendo $f_{\lambda_i} : \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} \rightarrow \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$, $i = 1, \dots, s$, la restricción de f a $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$. La aplicación f_{λ_i} es suma de una aplicación nilpotente y una aplicación diagonalizable. En efecto,

$$f_{\lambda_i} = (f_{\lambda_i} - \lambda_i \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}}) + \lambda_i \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}},$$

donde $f_{\lambda_i} - \lambda_i \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}}$ es un endomorfismo nilpotente de índice q_i y $\lambda_i \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}}$ es un endomorfismo diagonalizable. El endomorfismo

$$g = (f_{\lambda_1} - \lambda_1 \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{q_1}}) \oplus \dots \oplus (f_{\lambda_s} - \lambda_s \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{q_s}})$$

es nilpotente y su índice de nilpotencia es el mínimo común múltiplo de q_1, \dots, q_s . El endomorfismo

$$h = \lambda_1 \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{q_1}} \oplus \dots \oplus \lambda_s \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{q_s}}$$

es diagonalizable. Además

$$f = g + h.$$

Dado que

$$(f_{\lambda_i} - \lambda_i \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}}) \circ \lambda_i \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}} = \lambda_i \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}} \circ (f_{\lambda_i} - \lambda_i \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}}), \quad i = 1, \dots, s,$$

se tiene

$$g \circ h = h \circ g,$$

Veamos la unicidad del endomorfismo nilpotente y el endomorfismo diagonalizable en la descomposición de f . Si $f = g' \circ h'$ donde g' es un endomorfismo nilpotente, h' es un endomorfismo diagonalizable y $g' \circ h' = h' \circ g'$, entonces

$$\begin{aligned} g' \circ f &= g' \circ (g' + h') = g' \circ g' + g' \circ h' = g' \circ g' + h' \circ g' = (g' + h') \circ g' = f \circ g', \\ h' \circ f &= h' \circ (g' + h') = h' \circ g' + h' \circ h' = g' \circ h' + h' \circ h' = (g' + h') \circ h' = f \circ h'. \end{aligned}$$

Así, g' y h' conmutan con cualquier polinomio en f y en particular con $(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$ y con $\lambda_i \text{id}_V$, para $i = 1, \dots, s$.

Se tiene que $g'(\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}) \subset \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$ y $h'(\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}) \subset \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$. En efecto, si $v \in \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$, entonces

$$(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}(g'(v)) = g'(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}(v) = 0, \quad (f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}(h'(v)) = h'(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}(v) = 0.$$

Sean $g'_{\lambda_i} : \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} \rightarrow \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$ y $h'_{\lambda_i} : \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i} \rightarrow \text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$ las aplicaciones restricción de g' y h' a $\text{Nuc}(f - \lambda_i \text{id}_V)^{q_i}$, para $i = 1, \dots, s$. Se tiene

$$g' = g'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus g'_{\lambda_s}, \quad h' = h'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus h'_{\lambda_s}, \quad f_{\lambda_i} = g'_{\lambda_i} + h'_{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Dado que g' y h' conmutan con cualquier polinomio en f , entonces g'_{λ_i} y h'_{λ_i} conmutan con cualquier polinomio en f_{λ_i} , para $i = 1, \dots, s$, luego

$$\begin{aligned} g \circ g' &= ((f_{\lambda_1} - \lambda_1 \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{q_1}}) \circ g'_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus ((f_{\lambda_s} - \lambda_s \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{q_s}}) \circ g'_{\lambda_s}) \\ &= (g'_{\lambda_1} \circ (f_{\lambda_1} - \lambda_1 \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_1 \text{id}_V)^{q_1}})) \oplus \dots \oplus (g'_{\lambda_s} \circ (f_{\lambda_s} - \lambda_s \text{id}_{\text{Nuc}(f - \lambda_s \text{id}_V)^{q_s}})) = g' \circ g. \end{aligned}$$

Análogamente $h \circ h' = h' \circ h$. Así,

$$g - g' = h' - h.$$

Puesto que g y g' son nilpotentes y conmutan, $g - g'$ es nilpotente. En efecto, si el índice de nilpotencia de g es m y el índice de nilpotencia de g' es n , entonces por el teorema del binomio, $(g - g')^{m+n-1} = 0$.

Dado que h y h' son diagonalizables y conmutan, por el teorema 3.2, entonces existe una base B de V formada por vectores propios para h y para h' , y por tanto, para $h' - h$. Así, $h' - h$ es diagonalizable. Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, entonces $(h' - h)(v_i) = \mu_i v_i$, para algún $\mu_i \in K$, $i = 1, \dots, n$ y si $t \geq 1$ es tal que $(g - g')^t = 0$, entonces $(h' - h)^t(v_i) = \mu_i^t v_i = 0$. Así, $\mu_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$, luego $h' - h = 0$ y $g - g' = 0$. \square

Ejemplo 4.4. Consideremos el endomorfismo de \mathbb{R}^3 dado por

$$f(x, y, z) = (-2x + y, -x, -x - 2y + 2z).$$

Vamos a calcular f^n , para $n \geq 1$. La matriz asociada a f en la base canónica $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es

$$f_C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_f(X) = (2 - X)(X + 1)^2$. Consideremos la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \subsetneq \text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2.$$

siendo $\text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1, 1, 1) \rangle$ y $\text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle$. Además, $\text{Nuc}(f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (0, 0, 1) \rangle$.

Una forma de Jordan de f tiene un bloque elemental de Jordan para el autovalor 2 y dos bloques elementales de Jordan para el autovalor -1 . Una base de un subespacio F_2 suplementario de $\text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ en $\text{Nuc}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ es $B_2 = \{(1, 0, 0)\}$. Dado que $(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})(1, 0, 0) = (-1, -1, -1)$, una base de Jordan para f es

$$\{(-1, -1, -1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Una forma de Jordan para f es

$$J_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $P^{-1}f_C P = J_f$. Se tiene

$$J_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pongamos

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que índice de nilpotencia de J es 2 y las matrices J y D conmutan, por el teorema del binomio

$$\begin{aligned} J_f^n &= (D + J)^n = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} f_C^n &= P J_f^n P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n n + (-1)^n & (-1)^{n-1}n & 0 \\ (-1)^n n & (-1)^n + (-1)^{n-1}n & 0 \\ (-1)^n n & (-1)^n + (-1)^{n-1}n - 2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Consideremos la matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular M_1^n , para $n \geq 1$. Se tiene que $P_{M_1}(X) = (1 - X)^3$. Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la aplicación \mathbb{R} -lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_1 , entonces

$$\{0\} \subsetneq \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \subsetneq \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2 \subsetneq \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^3 = \mathbb{R}^3.$$

Se tiene

$$\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1, 1, 1) \rangle, \quad \text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle.$$

Una forma de Jordan de M_1 tiene un bloque elemental de Jordan para el autovalor 1. Una base de un subespacio F_3 suplementario de $\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ en \mathbb{R}^3 es $(0, 0, 1)$. Dado que $(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(0, 0, 1) = (-1, 0, 0)$, una base de $\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ en $\text{Nuc}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ es $B_2 = \{(-1, 0, 0)\}$. Dado que $(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$, una base de Jordan para f es

$$B = \{(1, 1, 1), (-1, 0, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Si tomamos

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_{M_1} es una forma de Jordan para M_1 y $P_1^{-1}M_1P_1 = J_{M_1}$. Se tiene

$$J_{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pongamos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el índice de nilpotencia de J es 3, por el teorema del binomio

$$\begin{aligned} J_{M_1}^n &= (I + J)^n = \binom{n}{0} I^n + \binom{n}{1} I^{n-1} J + \binom{n}{2} I^{n-2} J^2 \\ &= I + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se tiene

$$M_1^n = P_1 J_{M_1}^n P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-n & \frac{5n-n^2}{2} & \frac{n^2-3n}{2} \\ -n & \frac{-n^2+3n+2}{2} & \frac{n(n-1)}{2} \\ -n & \frac{3n-n^2}{2} & \frac{n^2-n+2}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.6. Consideremos matriz real

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular M_2^n , para $n \geq 1$. Se tiene que $P_{M_2}(X) = (2-X)^4$, Una forma de Jordan J_{M_2} de M_2 y una matriz regular P_2 tal que $P_2^{-1}M_2P_2 = J_{M_2}$ son

$$J_{M_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pongamos

$$J_{M_2} = 2I + J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el índice de nilpotencia de J es 4, por el teorema del binomio

$$J_{M_2}^n = (2I + J)^n = \binom{n}{0}(2I)^n + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}J + \binom{n}{2}(2I)^{n-2}J^2 + \binom{n}{3}(2I)^{n-3}J^3$$

$$= 2^n I + 2^{n-1}n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} & 2^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$M_2^n = P_2 J_{M_2}^n P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2^n & 2^{n-1}n & -2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} & -2^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} & 2^n & -2^{n-1}n & -2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \\ -2^{n-1}n & 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 2^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} & 2^{n-1}n & -2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} & 2^n - 2^{n-3} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \end{pmatrix}$$

Bibliografía

- [1] Hernández Rodríguez, E., *Álgebra y geometría*. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, DE, 1994.
- [2] Hernández Rodríguez, E., Vázquez Gallo, M. J., Zurro Moro, M. A., *Álgebra lineal y geometría*. Pearson, Madrid, 2012.
- [3] Godement, R., *Cours d'algèbre*. Herman, Paris, 1966.
- [4] Lang, S., *Algebra*. Aguilar, Madrid, 1971.
- [5] Varadarajan, V. S., *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Springer, New York, 1974.