FORMA DE JORDAN. FORMA DE JORDAN REAL

PAULA FERNÁNDEZ OTERO Y MARÍA J. VALE GONSALVES

1. Introducción

Karl Weierstrass (1815-1897) en 1858 determina las clases de semejanza de todas las matrices complejas. Dos años mas tarde, Camille Jordan (1838-1922) en su obra "Traité des substitutions" introduce las formas canónicas que hoy en día llevan su nombre para matrices sobre un cuerpo finito y presenta un proceso para reducir matrices a su forma canónica, muy parecido al actual.

En este trabajo se prueba que si K es un cuerpo y $A \in M_n(K)$ es una matriz cuyo polinomio característico tiene sus n raíces en K, entonces A es semejante a una matriz de Jordan. Como caso particular se obtiene el teorema de diagonalización de matrices que afirma que una matriz cuadrada $n \times n$ es diagonalizable si, y solo si, su polinomio característico tiene sus n raíces en K y la multiplicidad de cada raíz coincide con la dimensión del subespacio propio asociado a ese autovalor. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz cuyo polinomio característico no tiene todas sus raíces reales, se prueba que A es semejante a una matriz denominada forma de Jordan real de A que coincide con la forma de Jordan si todos los autovalores de A son reales. Para probar este resultado se introduce el concepto de complejificación de un espacio vectorial real V y de un endomorfismo de V y se estudian las propiedades de los autovalores y autovectores del endomorfismo complejificado.

2. Forma de Jordan

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K de dimensión $n \geq 1$.

Definición 2.1. Una *combinación lineal* de los elementos $v_1, \ldots, v_r \in V$ es una suma

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, v_i, \quad \lambda_i \in K, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Si S es un subconjunto finito de V, se llama *subespacio generado* por S, y se denota por $\langle S \rangle$, al conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S.

Un subconjunto ordenado $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V es una *base* de V si el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V; en particular, los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

Denotaremos por $C = \{(1, \ldots, 0), \overset{n}{\ldots}, (0, \ldots, 1)\}$ la *base canónica* de K^n.

Si S es un subconjunto de V, entonces $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

Definición 2.2. Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ bases de V y sea

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \, v_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

La matriz

$$\mathrm{id}_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de cambio de base* de B' a B.

Definición 2.3. Un endomorfismo f de V es una aplicación lineal $f\colon V \to V$.

Denotaremos por $\mathrm{End}_K(V)$ el conjunto de endomorfismos de V.

Definición 2.4. Sea V un espacio vectorial sobre K, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Si f es un endomorfismo de V y

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, v_j,\ i = 1, \ldots, n,$$

la matriz

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz asociada a f respecto* a la base B.

Definición 2.5. Se dice que las matrices $A, B \in M_n(K)$ son *semejantes* si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$.

La relación "ser semejantes" en el conjunto de matrices $n \times n$ sobre K es una relación de equivalencia.

Ejemplo 2.6. Si $f\colon V \to V$ es una aplicación lineal y B y B' son bases de V, entonces las matrices f_B y $f_{B'}$ son semejantes. En efecto, $f_{B'} = \mathrm{id}_{BB'}\, f_B\, \mathrm{id}_{B'B}$.

Definición 2.7. Sea f un endomorfismo de V. Se dice que un escalar $\lambda \in K$ es un *autovalor* o *valor propio* de f si existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda\, v$. Un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda\, v$ se llama *autovector* o *vector propio* de f asociado a λ.

Definición 2.8. Se llama *polinomio característico* de A al polinomio $P_A(X) = \det(A - XI)$.

Proposición 2.9. *Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Si $A, B \in M_n(K)$ son *semejantes*, entonces existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$. Se tiene

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(B - XI) = \det(P^{-1}AP - XI) = \det(P^{-1}AP - XP^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(XI)P) = \det(P^{-1}(A - XI)P) \\ &= \det(P^{-1})\, \det(A - XI)\, \det(P) = \det(A - XI) = P_A(X). \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2.10. Si f es un endomorfismo de V, se llama *polinomio característico* de f al polinomio $P_f(X) = P_{f_B}(X)$, siendo f_B la matriz asociada a f respecto a una base B de V.

Observación 2.11. El polinomio característico de f no depende de la base de V considerada. En efecto, si B y B' son bases de V, entonces las matrices f_B y $f_{B'}$ son semejantes. Por la proposición 2.9, $P_{f_B}(X) = P_{f_{B'}}(X)$.

Proposición 2.12. *Si f es un endomorfismo de V, entonces λ es un autovalor de f si, y solo si, λ es una raiz del polinomio característico de f.*

Demostración. Si λ es un autovalor de f existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$, es decir $(f - \lambda\, \mathrm{id})(v) = 0$. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$. Se tiene

$$\lambda \text{ autovalor de } f \iff (f_B - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff P_{f_B}(\lambda) = \det(f_B - \lambda I) = 0. \qquad \square$$

Definición 2.13. Se dice que la matriz $A \in M_n(K)$ es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal, es decir si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Se dice que un endomorfismo f de un espacio vectorial V es *diagonalizable* si existe una base B de V tal que la matriz f_B asociada a f respecto a B es una matriz diagonal.

Definición 2.14. Se llama *bloque elemental de Jordan de orden r asociado al escalar $\lambda \in K$* a la siguiente matriz triangular superior:

$$J_\lambda^r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.15.

$$J_\lambda^1 = (\,\lambda\,), \quad J_\lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_\lambda^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definición 2.16. Una *matriz de Jordan J* es una matriz triangular superior de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s}^{r_s} \end{pmatrix},$$

donde las matrices $J_{\lambda_i}^{r_i}$ son bloques elementales de Jordan de orden r_i, para $i = 1, \dots, s$. Si f es un endomorfismo de V y B es una base de V respecto a la cual la matriz asociada a f es una matriz de Jordan J, se dice que B es una *base de Jordan para f* y que J es una *forma de Jordan para f*.

Lema 2.17. *Sea f un endomorfismo de V. La aplicación $\Phi_f\colon K[X] \to \mathrm{End}_K(V)$ dada por*

$$\Phi_f(a_m X^m + \ldots + a_0) = a_m f^m + \ldots + a_0 1_V,$$

es un homomorfismo de K-álgebras, es decir, es una aplicación lineal y verifica que $\Phi_f(q(X)\,h(X)) = \Phi_f(q(X)) \circ \Phi_f((h(X))$, para cualesquiera $q(X), h(X) \in K[X]$. Denotaremos $\Phi(q(X))$ por $q(f)$.

Demostración. La demostración es inmediata. □

Obsérvese que de la conmutatividad del producto de polinomios de $K[X]$ se deduce que dos endomorfismos de la imagen de Φ_f siempre conmutan, es decir

$$q(f) \circ h(f) = h(f) \circ q(f).$$

Lema 2.18. ([1, Lema 1, p. 319]) *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f.*

(1) *Se tiene la siguiente cadena creciente de subespacios de V:*

$$\{0\} \subset \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \subset \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,id_V)^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^j \subset \ldots$$

(2) *Existe* $q \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^m$*, para todo* $m > q$.

Demostración. (2) Dado que V tiene dimensión finita, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, id_V)^{q+1}$. Veamos que $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, id_V)^m$, para todo $m > q$. Pongamos $m = q + r$, $r \geq 1$. Razonemos por inducción sobre r. Para $r = 1$ el resultado es cierto. Supongamos el resultado cierto para $r - 1 \geq 1$ y veamos que es cierto para r. Si $v \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{q+r}$, entonces $(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{q+r}(v) = 0$, de donde se sigue que $(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{q+r-1}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v) = 0$, es decir $(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v) \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{q+r-1}$. Por hipótesis de inducción, $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{q+r-1} = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q$. Así, $v \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{q+1} = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q$. $\square$

Lema 2.19. *Sea* f *un endomorfismo de* V *y* λ *un autovalor de* f. *Sea* q *el menor entero positivo tal que* $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V))^q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V))^m$*, para todo* $m > q$. *Consideremos la cadena creciente de subespacios de* V

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q.$$

Sea F_i*,* $2 \leq i \leq q$*, un subespacio suplementario de* $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{i-1}$ *en* $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^i$*,*

$$\mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^i = F_i \oplus \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{i-1}$$

y sea $B_i = \{v_1, \ldots, v_r\}$*, una base de* F_i. *Se tiene*

(1) *El conjunto*

$$(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(B_i) = \{(f - \lambda \mathrm{id}_V)(v_1), \ldots, (f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v_r)\} \subset \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{i-1}$$

es linealmente independiente.

(2) $\langle (f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(B_i) \rangle \cap \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{i-2} = \{0\}$*, para* $3 \leq i \leq q$ *.*

Demostración. (1) Supongamos que

$$\sum_{j=1}^{r} a_j (f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v_j) = 0, \quad a_j \in K,\ j = 1, \ldots, r,$$

equivalentemente,

$$(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)\,(\sum_{j=1}^{r} a_j v_j) = 0.$$

Entonces, para $i \geq 2$

$$\sum_{j=1}^{r} a_j v_j \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) \cap F_i \subset \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{i-1} \cap F_i = \{0\},$$

y por lo tanto $a_j = 0$ para $j = 1, \ldots, r$.

(2) Sea

$$v = \sum_{j=1}^{r} a_j (f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v_j) \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^{i-2}.$$

Se tiene

$$(f - \lambda \mathrm{id}_V)^{i-2} (\sum_{j=1}^{r} a_j (f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v_j)) = 0.$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{r} a_j v_j \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{i-1} \cap F_i = \{0\},$$

de donde se sigue que $a_j = 0$, para $j = 1, \ldots, r$, y por tanto $v = 0$. $\square$

Definición 2.20. Sean $U_1, \ldots, U_s$ subespacios de V. Se dice que la suma $U_1 + \ldots + U_s$ es *directa* y se denota por $U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$ si verifica

$$U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0\}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Lema 2.21. *Sean $U_1, \ldots, U_s$ subespacios de V tales que $U_1 + \ldots + U_s = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$. Si B_i es una base de U_i, $i = 1, \ldots, s$, entonces $\bigcup_{i=1}^s B_i$ es una base de $U_1 + \ldots + U_s$.*

Demostración. Pongamos $B_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{ir_i}\}$, $i = 1, \ldots, s$. El conjunto $\bigcup_{i=1}^s B_i$ es un conjunto de generadores de $U_1 + \ldots + U_s$. Veamos que es linealmente independiente. Pongamos,

$$\sum_{j=1}^{r_1} a_{1j} v_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{r_s} a_{sj} v_{sj} = 0.$$

luego

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} v_{ij} = \quad U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j), \quad i = 1, \ldots, s.$$

Puesto que la suma es directa

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} v_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, s,$$

y por ser B_i , $i = 1, \ldots, s$, linealmente independiente,

$$a_{ij} = 0, \quad j = 1, \ldots, r_i.$$

Así, $a_{ij} = 0$, para todo $j = 1, \ldots, r_i$, $i = 1, \ldots, s$. □

Proposición 2.22. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f. Sea q el menor entero positivo tal que $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Se tiene*

$$f(\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q) \subset \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q.$$

Demostración. (1) Sea $v \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$. Se tiene que $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q f(v) = f(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q(v) = 0$. □

Denotaremos por f_λ el endomorfismo restricción de f a $\mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^q$

$$\begin{aligned} f_\lambda \colon \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q &\longrightarrow \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q \\ v &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

Teorema 2.23. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f. Sea q el menor entero positivo tal que $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Existe una base B_λ de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$ tal que la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ es una matriz de Jordan.*

Demostración. Consideremos la cadena de subespacios de V

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q.$$

Sea F_q un subespacio suplementario de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1}$ en $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$ y sea $B_q = \{v_{q\,1}, \ldots, v_{q\,m_q}\}$ una base de F_q. Pongamos $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_V$. Por el lema 2.19, el conjunto $g(B_q)$ es un subconjunto de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1}$ linealmente independiente y $\langle g(B_q) \rangle \cap \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-2} = 0$. Completamos $g(B_q)$ a una base B_{q-1} de un subespacio F_{q-1} suplementario de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-2}$ en $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1}$. Se tiene

$$B_{q-1} = \{v_{q-1\,1}, \ldots, v_{q-1\,m_{q-1}}\}, \quad g(v_{q\,i}) = v_{q-1\,i}, \quad i = 1, \ldots, m_q.$$

Siguiendo así, sucesivamente se obtiene una base $B_2 = \{v_{2\,1}, \ldots, v_{2\,m_2}\}$ de un subespacio F_2, suplementario de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ en $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^2$, y completando $g(B_2)$ obtenemos una base B_1 de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ tal que

$$B_1 = \{v_{1\,1}, \ldots, v_{1\,m_1}\}\,, \quad g(v_{2\,i}) = v_{1\,i}, \quad i = 1, \ldots, m_2.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q &= \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1} \oplus F_q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-2} \oplus F_{q-1} \oplus F_q \\ &= \ldots = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_q.\end{aligned}$$

Por el lema 2.21, los $m_1 + \ldots + m_q$ vectores así construidos forman una base de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$.
El cuadro 1.1 esquematiza la construcción de esta base de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$.

B_q	v_{q1}	$\ldots$	$v_{q\,m_q}$										
B_{q-1}	$g(v_{q1})$	$\ldots$	$g(v_{q\,m_q})$	$v_{q-1\,m_q+1}$	$\ldots$	$v_{q-1\,m_{q-1}}$							
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
B_2	$g^{q-2}(v_{q1})$	$\ldots$	$g^{q-2}(v_{q\,m_q})$	$g^{q-3}(v_{q-1\,m_q+1})$	$\ldots$	$g^{q-3}(v_{q-1 m_{q-1}})$	$\ldots$	$v_{2\,m_3+1}$	$\ldots$	v_{2m_2}			
B_1	$g^{q-1}(v_{q1})$	$\ldots$	$g^{q-1}(v_{q\,m_q})$	$g^{q-2}(v_{q-1\,m_q+1})$	$\ldots$	$g^{q-2}(v_{q-1 m_{q-1}})$	$\ldots$	$g(v_{2\,m_3+1})$	$\ldots$	$g(v_{2m_2})$	$v_{1\,m_2+1}$	$\ldots$	$v_{1\,m_1}$

Cuadro 1: Base de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$

Escribiendo estos vectores por columnas y empezando por la última fila del cuadro 1.1 obtenemos la siguiente base de $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$:

$$\begin{aligned}B_\lambda = &\{g^{q-1}(v_{q\,1}), \ldots, g(v_{q\,1}), v_{q\,1}\} \bigcup \overset{m_q}{\cdots} \bigcup \{g^{q-1}(v_{q\,m_q}), \ldots, g(v_{q\,m_q}), v_{q\,m_q}\} \\ &\bigcup \{g^{q-2}(v_{q-1\,m_q+1}), \ldots, v_{q-1\,m_q+1}\} \bigcup \cdots \bigcup \{g^{q-2}(v_{q-1\,m_{q-1}}), \ldots, v_{q-1\,m_{q-1}}\} \bigcup \cdots \\ &\bigcup \{v_{1\,m_2+1}, \ldots, v_{1\,m_1}\}.\end{aligned}$$

Denotemos por J_λ la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ. Las m_q primeras columnas del cuadro 1.1 dan cada una un bloque elemental de Jordan de orden q. En efecto, para $j = 1, \ldots, m_q$, se tiene

$$\begin{aligned}f(g^{q-1}(v_{qj})) &= (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(g^{q-1}(v_{qj})) + \lambda g^{q-1}(v_{qj}) = \lambda g^{q-1}(v_{qj}), \\ f(g^{q-2}(v_{qj})) &= (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(g^{q-2}(v_{qj})) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}) = g^{q-1}(v_{qj}) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}), \\ &\vdots \\ f(v_{qj}) &= (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v_{qj}) + \lambda v_{qj} = g(v_{qj}) + \lambda v_{qj}.\end{aligned}$$

Por tanto hay m_q bloques elementales de Jordan de orden q asociados a λ colocados en la diagonal de J_λ. Análogamente, dado que cada una de las siguientes $m_{q-1} - m_q$ columnas define un bloque elemental de Jordan de orden $q-1$, tenemos $m_{q-1} - m_q$ bloques elementales de Jordan de orden $q-1$ en la diagonal de J_λ. Siguiendo este proceso llegamos a las $m_1 - m_2$ últimas columnas del cuadro 1.1 que proporcionan $m_1 - m_2$ bloques elementales de Jordan de orden 1 en la diagonal de J_λ.

La matriz J_λ es una matriz de Jordan y $\dim \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = m_1$ es el número total de bloques elementales de Jordan que hay en J_λ. $\square$

Proposición 2.24. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f de multiplicidad r. Si q es el menor entero positivo tal que* $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m$, *para todo $m > q$, entonces* $\dim \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q = r$.

Demostración. Supongamos que $\dim \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q = s$. Queremos probar que $s=r$. Si $B'=\{v_1,\dots,v_s\}$ es una base de $\operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$ y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ es una base de V, entonces

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1s+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} & a_{ss+1} & \dots & a_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{s+1s+1} & \dots & a_{s+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ns+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (f_\lambda)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Pongamos $B''=\{v_{s+1},\dots,v_n\}$, $L=\langle B''\rangle$ y consideremos el endomorfismo $h\colon L\to L$ cuya matriz asociada respecto a la base B'' es la matriz

$$h_{B''} = \begin{pmatrix} a_{s+1s+1} & \dots & a_{s+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ns+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por la demostración del teorema 2.23, $P_{f_\lambda}(X) = (-1)^s (X-\lambda)^s$. Luego

$$P_f(X) = \det(f_B - XI) = P_{f_\lambda}(X)\, P_h(X) = (-1)^s (X-\lambda)^s P_h(X).$$

Veamos que $P_h(\lambda)\neq 0$. Supongamos que $P_h(\lambda)=0$, es decir, que λ es un autovalor de h. Existe un vector

$$v = \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j v_j \in L, \quad v\neq 0,$$

tal que $h(v)=\lambda\, v$. Se tiene

$$\begin{aligned} (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= f(v) - \lambda\, v = f(v) - h(v) = \\ &= \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j f(v_j) - \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j h(v_j) \\ &= \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j (\sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k) - \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j (\sum_{k=s+1}^{n} a_{kj} v_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=s+1}^{n} \mu_j a_{kj}) v_k - \sum_{k=s+1}^{n} (\sum_{j=s+1}^{n} \mu_j a_{kj}) v_k \\ &= \sum_{k=1}^{s} (\sum_{j=s+1}^{n} \mu_j a_{kj}) v_k \in \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q. \end{aligned}$$

Así, $v\in \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q+1} = \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$. Por tanto $v\in \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q \cap L = \{0\}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $s=r$. □

Corolario 2.25. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f de multiplicidad r. Se tiene que* $\dim \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^r = r$.

Demostración. Sea q el menor entero positivo tal que $\operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q = \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^m$, para todo $m>q$. Dado que $\dim \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q = r$, se tiene que $q\leq r$ y por tanto $\operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^r = \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$. □

Teorema 2.26. (Teorema de Cayley-Hamilton)[3] *Sea $A\in M_n(K)$, y sea $P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ su polinomio característico. Se tiene que $P_A(A) \equiv (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0\, I = 0$.*

Corolario 2.27. *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ su polinomio característico. Se tiene que $P_f(f) = (-1)^n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_0 \,\mathrm{id}_V = 0$.*

Demostración. Se sigue del lema 2.17. □

Lema 2.28. ([2, Lema 6.7.2]) *Sea f un endomorfismo de V. Si $q_1(X), \ldots, q_s(X) \in K[X]$ son tales que* m.c.d. $(q_j(X), q_k(X)) = 1$*, para $j \neq k$, entonces*

$$\mathrm{Nuc}\, q_j(f) \cap (\sum_{k\neq j} \mathrm{Nuc}\, q_k(f)) = \{0\}, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Demostración. Se tiene

$$\sum_{k\neq j} \mathrm{Nuc}\, q_k(f) \subset \mathrm{Nuc}\, (\prod_{k\neq j} q_k(f)). \tag{1}$$

Dado que los polinomios $q_j(X)$ y $\prod_{k\neq j} q_k(X)$ son primos entre sí, por el teorema de Bezout, existen polinomios $a(X), b(X) \in K[X]$ tales que

$$a(X)\, q_j(X) + b(X) \prod_{k\neq j} q_k(X) = 1.$$

Por tanto

$$a(f)\, q_j(f) + b(f) \prod_{k\neq j} q_k(f) = \mathrm{id}_V.$$

Si $v \in \mathrm{Nuc}\, q_j(f) \cap \mathrm{Nuc}\, (\prod_{k\neq j} q_k(f))$, entonces

$$v = a(f)\, q_j(f)(v) + b(f) \prod_{k\neq j} q_k(f)(v) = 0 + 0 = 0.$$

Luego $\mathrm{Nuc}\, q_j(f) \cap \mathrm{Nuc}(\prod_{k\neq j} q_k(f)) = \{0\}$ y el resultado se sigue de (1). □

Proposición 2.29. *Sea f un endomorfismo de V. Si $P_f(X) = q_1(X) \ldots q_s(X)$ y* m.c.d. $(q_i(X), q_j(X)) = 1$*, para $i \neq j$, entonces*

$$V = \mathrm{Nuc}\, q_1(f) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Nuc}\, q_s(f).$$

Demostración. Si $g_i(X) = q_1(X) \ldots q_{i-1}(X)\, q_{i+1}(X) \ldots q_s(X)$, para $i = 1, \ldots, s$, entonces

$$\text{m.c.d.}(g_1(X), \ldots, g_s(X)) = 1,$$

y por el teorema de Bezout existen polinomios $h_i(X) \in K[X]$, para $i = 1, \ldots, s$, tales que

$$\sum_{i=1}^{s} g_i(X)\, h_i(X) = 1.$$

Por el lema 2.17 se tiene

$$\sum_{i=1}^{s} g_i(f) \circ h_i(f) = \mathrm{id}_V,$$

equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{s} (g_i(f) \circ h_i(f))(v) = v, \text{ para todo } v \in V.$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton se tiene que $P_f(f) = q_i(f) \circ g_i(f) = 0$, para $i = 1, \ldots, s$. Por tanto, $q_i(f) \circ g_i(f) \circ h_i(f) = 0$, para $i = 1, \ldots, s$ y así, $(g_i(f) \circ h_i(f))(v) \in \mathrm{Nuc}\, q_i(f)$, para todo $v \in V$ y para $i = 1, \ldots, s$. Así,

$$V = \mathrm{Nuc}\, q_1(f) + \cdots + \mathrm{Nuc}\, q_s(f).$$

La suma es directa por el lema 2.28. □

Proposición 2.30. *Sea f un endomorfismo de V y $P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1}\dots(X-\lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Se tiene*

$$V = \operatorname{Nuc}(f - \lambda_1 \operatorname{id}_V)^{r_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Nuc}(f - \lambda_s \operatorname{id}_V)^{r_s}.$$

Demostración. El resultado se sigue de la proposición anterior. □

Teorema 2.31. (Teorema de Jordan) *Sea f un endomorfismo de V. Si*

$$P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1}\dots(X-\lambda_s)^{r_s},$$

donde $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i \neq j$, entonces existe una base B_J de V tal que la matriz asociada a f respecto a B_J es una matriz de Jordan.

Demostración. Sea q_i el menor entero positivo tal que $\operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i} = \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^m$, para todo $m > q_i$. Por la demostración del corolario 2.25, $\operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{r_i} = \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$. Sea B_{λ_i} una base de Jordan para el endomorfismo $f_{\lambda_i} \colon \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i} \to \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$ y J_{λ_i} la matriz asociada a f_{λ_i} respecto a B_{λ_i}. Pongamos

$$B_J = \bigcup_{i=1}^{s} B_{\lambda_i}.$$

Por el lema 2.21 y la proposición 2.30, B_J es una base de V. La matriz asociada a f respecto a B_J es la matriz

$$f_{B_J} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_s} \end{pmatrix},$$

que es una matriz de Jordan. □

Corolario 2.32. *Si A es una matriz de $M_n(K)$ y el polinomio característico de A es de la forma*

$$P_A(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1}\dots(X-\lambda_s)^{r_s}, \;\; \lambda_i \in K, \; \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ si } i \neq j \;,$$

entonces A es semejante a una matriz de Jordan J.

Demostración. Sea $f \colon K^n \to K^n$ el endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A. Dado que $P_f(X) = P_A(X)$, por el teorema de Jordan existe una base de K^n tal que la matriz asociada a f respecto a esta base es una matriz de Jordan J. Así, A y J son matrices semejantes. □

Definición 2.33. En las condiciones del corolario anterior la matriz J se dice que es una *forma de Jordan* de A. Obsérvese que la matriz J es única salvo el orden de los bloques elementales de Jordan.

Teorema 2.34. (Teorema de diagonalización) *Sea f un endomorfismo de V. Se tiene que f es diagonalizable si, y solo si, verifica las siguientes condiciones:*

(1) $P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1}\dots(X-\lambda_s)^{r_s}$, *donde $\lambda_i \in K$, para $i = 1,\dots,s$, y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$.*

(2) $\dim \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V) = r_i$, *para $i = 1,\dots,s$.*

Demostración. Si f es diagonalizable, entonces existe una base B de V tal que f_B es una matriz diagonal. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ son los elementos de la diagonal principal de f_B y $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i \neq j$, entonces

$$P_f(X) = P_{f_B}(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1}\dots(X-\lambda_s)^{r_s}.$$

Además,

$$\dim \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V) = n - \operatorname{rango}(f_B - \lambda_i I) = n - (n - r_i) = r_i, \; i = 1,\dots,s.$$

El recíproco se sigue del teorema 2.31. □

Corolario 2.35. *La matriz $A \in M_n(K)$ es diagonalizable si, y solo si, verifica las siguientes condiciones:*

(1) $P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \dots (X - \lambda_s)^{r_s}$*, donde* $\lambda_i \in K$*, para* $i = 1, \dots, s$*, y* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *para todo* $i \neq j$*.*

(2) *Si* $f \colon K^n \to K^n$ *es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es* A*, entonces* $\dim \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_{K^n}) = r_i$*, para* $i = 1, \dots, s$*.*

Ejemplo 2.36. Consideremos la matriz real

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_1}(X) = X^3(X-2)$. Si $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_1, entonces

$$\operatorname{Nuc}(f) = \langle (1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,1,0,-1) \rangle, \quad \operatorname{Nuc}(f - 2\,1_{\mathbb{R}^4}) = \langle ((1,0,0,1) \rangle.$$

Por el teorema de diagonalización, A_1 es diagonalizable. Una base de Jordan para f es

$$\{(1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,1,0,-1), (1,0,0,1)\}.$$

Si tomamos

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz J_1 es la forma de Jordan para A_1 se tiene $P_1^{-1} A_1 P_1 = J_1$.

Ejemplo 2.37. Consideremos la matriz real

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_2}(X) = (X-2)^4$.

Si $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_2, entonces

$$\operatorname{Nuc}(f - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1,1,0,0), (0,1,-2,1) \rangle,$$

Puesto que $\dim \operatorname{Nuc}(f - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^4}) = 2$, una forma de Jordan para A_2 tiene dos bloques elementales de Jordan y como $(A_2 - 2\,I)^2 = 0$, los dos bloques elementales de Jordan son de orden 2. Vamos a construir una base de Jordan para f. Se tiene la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Nuc}(f - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^4}) \subsetneq \operatorname{Nuc}(f - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \mathbb{R}^4.$$

Una base de un subespacio F_2 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})$ en $\mathbb{R}^4$ es $B_2 = \{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$. Se tiene

$$(f - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})(0,0,1,0) = (1,0,2,-1), \quad (f - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})(0,0,0,1) = (2,-1,6,-3).$$

Una base de $\operatorname{Nuc}(f - 2 \operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})$ es $B_1 = \{(1,0,2,-1), (2,-1,6,-3)\}$. Una base de Jordan para f es

$$\{(1,0,2,-1), (0,0,1,0), (2,-1,6,-3), (0,0,0,1)\}.$$

Si tomamos

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz J_2 es una forma de Jordan para A_2 y se tiene $P_2^{-1} A_2 P_2 = J_2$.

Ejemplo 2.38. Consideremos la matriz real

$$A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_3}(X) = (-4-X)^4$. Si $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_3, entonces

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = 4 - \operatorname{rango}(A_3 + 4\,I) = 4 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Por tanto, una forma de Jordan de A_3 tiene dos bloques elementales de Jordan. Se tiene

$$(A_3 + 4\,I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_3 + 4\,I)^3 = 0.$$

Entonces una forma de Jordan de A_3 tiene un bloque elemental de Jordan de orden 3 y un bloque elemental de Jordan de orden 1. Vamos a construir una base de Jordan para f. Se tiene la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) \subsetneq \operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2 \subsetneq \operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^3 = \mathbb{R}^4.$$

donde

$$\operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle, \quad \operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$$

Una base de un subespacio F_3 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2$ en $\mathbb{R}^4$ es $B_3 = \{(0,0,0,1)\}$. Dado que $(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}))(0,0,0,1) = (-5,-5,9,0)$, una base de un subespacio F_2 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ en $\operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2$, es $B_2 = \{(-5,-5,9,0)\}$. Una base de $\operatorname{Nuc}(f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ es $B_1 = \{(36,36,0,0), (0,1,0,0)\}$, donde $(36,36,0,0) = (f + 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}))^2(0,0,0,1)$. Una base de Jordan para f es

$$\{(36,36,0,0), (-5,-5,9,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0)\}.$$

Si tomamos

$$P_3 = \begin{pmatrix} 36 & -5 & 0 & 0 \\ 36 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

la matriz J_3 es una forma de Jordan para A_3 y se tiene que $P_3^{-1} A_3 P_3 = J_3$.

Ejemplo 2.39. Consideremos la matriz compleja

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_4}(X) = (X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$. Si $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ es la aplicación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_4, entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})) = 4 - \operatorname{rango}(A_4 - i\,I) = 4 - \operatorname{rango}\begin{pmatrix} -i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1-i \end{pmatrix} = 4-3 = 1,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Nuc}(f + i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})) = 4 - \operatorname{rango}(A_4 + i\,I) = 4 - \operatorname{rango}\begin{pmatrix} i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = 4-3 = 1.$$

Por tanto, una forma de Jordan de A_4 tiene un bloque elemental de Jordan de orden 2 asociado al autovalor i y un bloque elemental de Jordan de orden 2 asociado al autovalor $-i$. Se tiene

$$\operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (i,0,1,0) \rangle, \quad \operatorname{Nuc}(f + i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (-i,0,1,0) \rangle.$$

Consideremos las cadenas de subespacios

$$\begin{aligned} \{0\} &\subsetneq \operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) \subsetneq \operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^3, \\ \{0\} &\subsetneq \operatorname{Nuc}(f + i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) \subsetneq \operatorname{Nuc}(f + i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \operatorname{Nuc}(f + i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^3. \end{aligned}$$

Dado que

$$(A - i\,I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2-2i & 2i & 1 \\ 0 & -2+2i & 0 & -2i \\ -2i & -2i & -2 & 1 \\ 0 & 4i & -2 & -2-2i \end{pmatrix}, \quad (A + i\,I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2+2i & -2i & 1 \\ 0 & -2-2i & 0 & 2i \\ 2i & 2i & -2 & 1 \\ 0 & -4i & -2 & -2+2i \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \langle (i,0,1,0),(0,1+i,1,2i) \rangle, \quad \operatorname{Nuc}(f + i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \langle (-i,0,1,0),(0,1-i,1,-2i) \rangle.$$

Una base de un subespacio F_2 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ en $\operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2$ es $B_2 = \{(0,1+i,1,2i)\}$ y $(f - i\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})(0,1+i,1,2i) = (i,0,1,0)$, Una base de un subespacio F_2' suplementario de $\operatorname{Nuc}(f + i\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}))$ en $\operatorname{Nuc}(f + i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2$ es $B_2' = \{(0,1-i,1,-2i)\}$ y $(f - i\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})(0,1-i,1,-2i) = (-i,0,1,0)$. Una base de Jordan para f es

$$\{(i,0,1,0),(0,1+i,1,2i),(-i,0,1,0),(0,1-i,1,-2i)\}.$$

Si tomamos

$$P_4 = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 1-i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2i & 0 & -2i \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

la matriz J_4 es una forma de Jordan de A_4 y se tiene $P_4^{-1}A_4P_4 = J_4$.

3. Forma de Jordan real

Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$. La *complejificación* de V es el espacio vectorial complejo $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} &(u,v) + (u',v') = (u+u', v+v'), \\ &(a+bi)\,(u,v) = (au - bv, av + bu), \ a+bi \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

El subespacio real $V \times \{0\}$ de $V_{\mathbb{C}}$ es isomorfo a V y la aplicación $\varphi\colon V \to V_{\mathbb{C}}$, $\varphi(v) = (v, 0)$, se llama *encaje estándar* de V en $V_{\mathbb{C}}$. Denotaremos los elementos $(v, 0)$ por v. Dado que

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v) = (u, 0) + i(v, 0),$$

cada elemento (u, v) de $V_{\mathbb{C}}$ se denotará por $u + iv$.

Si $\mu = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, denotaremos por $\overline{\mu}$ su complejo conjugado $\alpha - \beta i$. Si $w = u + iv \in \mathbb{C}$, denotaremos por $\overline{w}$ a $u - iv$. Se tiene que $\overline{w + w'} = \overline{w} + \overline{w}'$, $\overline{\mu\, w} = \overline{\mu}\,\overline{w}$, para todo $w, w' \in V_{\mathbb{C}}$ y $\mu \in \mathbb{C}$. Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, denotaremos por $\overline{A}$ la matriz $(\overline{a}_{ij})$.

Lema 3.1. *Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente independiente (resp. conjunto de generadores, base), entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente (resp. conjunto de generadores, base) del espacio vectorial complejo $V_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Veamos que si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente independiente, entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto de vectores de $V_{\mathbb{C}}$ linealmente independiente. Pongamos

$$\sum_{j=1}^{r} (a_j + b_j i)\, v_j = 0, \quad a_j + b_j i \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, s,$$

equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^{r} (a_j v_j + i b_j v_j) = 0.$$

Se tiene

$$\sum_{j=1}^{r} a_j v_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{r} b_j v_j = 0.$$

Así, $a_j = 0$ y $b_j = 0$, para $j = 1, \ldots, r$.

Supongamos ahora que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ genera V. Dado $u + iv \in V_{\mathbb{C}}$, pongamos

$$u = \sum_{j=1}^{r} a_j v_j, \quad v = \sum_{j=1}^{r} b_j v_j,$$

y así,

$$u + iv = \sum_{j=1}^{r} (a_j + b_j i)\, v_j.$$

□

Obsérvese que $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Si f es un endomorfismo de V denotaremos por $f_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ la aplicación dada por

$$f_{\mathbb{C}}(u + iv) = f(u) + i f(v).$$

Proposición 3.2. *Sea f un endomorfismo de V. Se tiene*

(1) *La aplicación $f_{\mathbb{C}}$ es un endomorfismo de $V_{\mathbb{C}}$ y la restricción de $f_{\mathbb{C}}$ a V es la aplicación f.*

(2) *Las matrices asociadas a f y a $f_{\mathbb{C}}$ respecto a cualquier base de V son iguales.*

(3) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $f_{\mathbb{C}}$, entonces λ es un autovalor de f.*

(4) *Sea $\mu = \alpha + \beta i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ un autovalor de $f_{\mathbb{C}}$. Se tiene*

   (a) *$\overline{\mu} = \alpha - \beta i$ es autovalor de $f_{\mathbb{C}}$.*

   (b) *$u + iv \in \operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu \operatorname{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$ si, y solo si, $u - iv \in \operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu} \operatorname{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$.*

(c) *Si los vectores* $w_1,\ldots,w_s$ *de* V_C *son* $\mathbb{C}$*-linealmente independientes, entonces los vectores* $\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_s$ *son* $\mathbb{C}$*-linealmente independientes.*

(d) *Sea* $E=\{w_1,\ldots,w_s\}\subset V_{\mathbb{C}}$ *un conjunto de vectores* $\mathbb{C}$*-linealmente independientes y* $\overline{E}=\{\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_s\}$*. Si la matriz asociada a la restricción de* $f_{\mathbb{C}}$ *a* $\langle E\rangle$ *en la base* E *es el bloque elemental de Jordan* J^s_{μ}*, entonces la matriz asociada a la restricción de* $f_{\mathbb{C}}$ *a* $\langle\overline{E}\rangle$ *en la base* $\overline{E}$ *es* $J^s_{\overline{\mu}}$*.*

Demostración. (1) La aplicación $f_{\mathbb{C}}$ es $\mathbb{C}$-lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}((u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)) &= f_{\mathbb{C}}(u_1+u_2+i(v_1+v_2))\\ &=f(u_1+u_2)+if(v_1+v_2)\\ &=f(u_1)+if(v_1)+f(u_2)+if(v_2)\\ &=f_{\mathbb{C}}(u_1+iv_1)+f_{\mathbb{C}}(u_2+iv_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}((a+bi)(u+iv)) &=f_{\mathbb{C}}(au-bv+i(av+bu))\\ &=f(au-bv)+if(av+bu)\\ &=(a+bi)(f(u)+if(v)) \;=\; (a+bi)f_{\mathbb{C}}(u+iv),\end{aligned}$$

y además, $f_{\mathbb{C}}(v)\;=\;f(v)+i\,f(0)\;=\;f(v)$.

(2) Sea $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V y $(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ la matriz asociada a f respecto a B. Se tiene

$$f_{\mathbb{C}}(v_j)=f(v_j)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}v_k,\quad j=1,\ldots,n.$$

(3) Si $\lambda\in\mathbb{R}$ es un autovalor de $f_{\mathbb{C}}$ y $u+iv$ es un vector propio de $f_{\mathbb{C}}$ asociado a λ, se tiene

$$f_{\mathbb{C}}(u+iv)=\lambda\,(u+iv)\Longleftrightarrow f(u)+if(v)=\lambda\,u+i\,\lambda\,v,$$

o equivalentemente, $f(u)=\lambda\,u$, $f(v)=\lambda\,v$. Dado que $u+iv\neq 0$, λ es un autovalor de f.

(4) (a) Por (2), $P_{f_{\mathbb{C}}}(X)=P_f(X)\in\mathbb{R}[X]$ y por tanto dado que μ es una raíz de $P_f(X)$, $\overline{\mu}$ es una raíz de $P_f(X)$.

(4) (b) Sea $\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V y $u+iv\in V_{\mathbb{C}}$. Si

$$u\;=\;\sum_{j=1}^{n}a_jv_j,\quad v\;=\;\sum_{j=1}^{n}b_jv_j,$$

entonces

$$u+iv\;=\;\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_ji)\,v_j,\quad u-iv\;=\;\sum_{j=1}^{n}(a_j-b_ji)\,v_j.$$

Se tiene

$$(f_B-\mu\,I)^j\begin{pmatrix}a_1+b_1i\\ \vdots\\ a_n+b_ni\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow (f_B-\overline{\mu}\,I)^j\begin{pmatrix}a_1-b_1i\\ \vdots\\ a_n-b_ni\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

puesto que $f_B=(f_{\mathbb{C}})_B\in M_n(\mathbb{R})$ y por tanto $u+iv\in\operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}}-\lambda\,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$ si, y solo si, $u-iv\in\operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}}-\overline{\lambda}\,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^j$.

(4) (c) Supongamos que los vectores $w_1,\ldots,w_m$ son $\mathbb{C}$-linealmente independientes. Veamos que los vectores de los vectores $\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_s$ son $\mathbb{C}$-linealmente independientes. Pongamos

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_j\,\overline{w}_j=0,\quad \mu_j\in K,\ j=1,\ldots,m.$$

Se tiene

$$\sum_{j=1}^{m}\overline{\mu}_j\,w_j=0,$$

y por ser los vectores de E linealmente independientes, $\overline{\mu}_j = 0$, para $j = 1, \ldots, m$. Así $\mu_j = 0$, para $j = 1, \ldots, m$.

(4) (d) Veamos que la matriz asociada a la restricción de $f_{\mathbb{C}}$ a $\langle \overline{E} \rangle$ es $J_{\overline{\mu}}$. En efecto,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(\overline{w}_1) &= \overline{f_{\mathbb{C}}(w_1)} = \overline{\mu}\, \overline{w}_1, \\ f_{\mathbb{C}}(\overline{w}_j) &= \overline{f_{\mathbb{C}}(w_j)} = \overline{\mu}\, \overline{w}_j + \overline{w}_{j-1}, \quad j = 2, \ldots, s. \end{aligned}$$

□

Obsérvese que por (2) los endomorfismos f y $f_{\mathbb{C}}$ tienen el mismo polinomio característico

$$P_f(X) = P_{f_{\mathbb{C}}}(X) = \det(f_B - XI).$$

Las raíces reales de este polinomio son los autovalores de f y las raíces complejas son autovalores de $f_{\mathbb{C}}$.

Definición 3.3. Se llama *bloque elemental de Jordan real* de orden $2r$ asociado al número complejo $\mu = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, a la siguiente matriz real

$$J_{\mu}^{2r} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 & & & & \\ \beta & \alpha & 0 & 1 & & & 0 & \\ & & \alpha & -\beta & 1 & 0 & & \\ & & \beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & 1 & 0 \\ & 0 & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & \alpha & -\beta \\ & & & & & & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

que tiene en su diagonal principal las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

y tiene matrices identidad 2×2 encima de la diagonal principal y ceros en el resto.

Definición 3.4. Una *matriz de Jordan real* de orden n es una matriz diagonal por bloques de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{r_1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{\lambda_s}^{r_s} & & & \\ & & & J_{\mu_1}^{2t_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & J_{\mu_m}^{2t_m} \end{pmatrix}$$

donde las matrices $J_{\lambda_i}^{r_i}$ son bloques elementales de Jordan asociados al número real λ_i, para $i = 1, \ldots, s$, y las matrices $J_{\mu_j}^{2t_j}$ son bloques elementales de Jordan reales asociados al número complejo $\mu_j = \alpha_j + \beta_j i$, $\beta_j \neq 0$, para $j = 1, \ldots, m$.

Si f es un endomorfismo de V y B es una base de V respecto a la cual la matriz asociada a f es una matriz de Jordan real J, se dice que B es una *base de Jordan real para* f y que J es una *forma de Jordan real para* f.

Proposición 3.5. *Sea* $E = \{u_1 + iv_1, \ldots, u_s + iv_s\}$ *una de las columnas del cuadro* 1.1 *para el autovalor* $\alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$ *de* $f_{\mathbb{C}}$. *Se verifica*

(1) *Los vectores* $u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_s \in V$ *son vectores* $\mathbb{R}$*-linealmente independientes.*

(2) *Si* $S = \{v_1, u_1, \ldots, v_s, u_s\}$, *la matriz asociada al endomorfismo restricción de* f *al subespacio* $\langle S \rangle$ *respecto a la base* S *es un bloque elemental de Jordan real de orden* $2s$ *asociado al autovalor* $\alpha + \beta i$.

Demostración. (1) La columna $E = \{u_1 + iv_1, \dots, u_s + iv_s\}$ define un bloque elemental de Jordan de orden s en la matriz de Jordan de $f_{\mathbb{C}}$ y por tanto

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1) =& (\alpha + \beta i)(u_1 + iv_1), \\ f_{\mathbb{C}}(u_j + iv_j) =& (\alpha + \beta i)(u_j + iv_j) + (u_{j-1} + iv_{j-1}), \end{aligned}$$

para $j = 2, \dots, s$.

Pongamos $\overline{E} = \{u_1 - iv_1, \dots, u_s - iv_s\}$. Por la proposición 3.2 (4), se tiene que $\alpha - \beta i$ es un autovalor de $f_{\mathbb{C}}$ y además

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{C}}(u_1 - iv_1) =& (\alpha - \beta i)(u_1 - iv_1), \\ f_{\mathbb{C}}(u_j - iv_j) =& (\alpha - \beta i)(u_j - iv_j) + (u_{j-1} - iv_{j-1}), \end{aligned}$$

para $j = 2, \dots, s$. Se tiene

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{2}((u_j + iv_j) + (u_j - iv_j)), \\ v_j &= \frac{1}{2i}((u_j + iv_j) - (u_j - iv_j)). \end{aligned} \tag{2}$$

Veamos que los vectores $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s \in V$ son $\mathbb{R}$-linealmente independientes. Pongamos

$$\sum_{j=1}^{s} a_j u_j + \sum_{j=1}^{s} b_j v_j = 0, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo las expresiones (2) de u_j y v_j, obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{s} \frac{a_j}{2} \big((u_j + iv_j) + (u_j - iv_j)\big) + \sum_{j=1}^{s} \frac{b_j}{2i} \big((u_j + iv_j) - (u_j - iv_j)\big) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} \Big(\big(a_j + \frac{b_j}{i}\big)(u_j + iv_j) + \big(a_j - \frac{b_j}{i}\big)(u_j - iv_j)\Big) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} \big((a_j - b_j i)(u_j + iv_j) + (a_j + b_j i)(u_j - iv_j)\big) = 0. \end{aligned}$$

Dado que $E \subset \operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu \operatorname{id}_{V_{\mathbb{C}}})^s$ y $\overline{E} \subset \operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu} \operatorname{id}_{V_{\mathbb{C}}})^s$ y que por el lema 2.28, $\operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu \operatorname{id}_{V_{\mathbb{C}}})^s \cap \operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu} \operatorname{id}_{V_{\mathbb{C}}})^s = \{0\}$, se tiene que $E \cup \overline{E}$ es un conjunto de vectores $\mathbb{C}$-linealmente independientes. Así, $a_j - b_j i = 0$ para $j = 1, \dots, s$, de donde se deduce que $a_j = b_j = 0$ para $j = 1, \dots, s$.

(2) Puesto que $f_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1) = \mu\,(u_1 + iv_1)$,

$$f(v_1) = \alpha v_1 + \beta u_1, \quad f(u_1) = -\beta v_1 + \alpha u_1,$$

y como $f_{\mathbb{C}}(u_j + iv_j) = \mu\,(u_j + iv_j) + u_{j-1} + iv_{j-1}$, para $j = 2, \dots, s$, entonces

$$f(v_j) = \alpha v_j + \beta u_j + v_{j-1}, \quad f(u_j) = -\beta v_j + \alpha u_j + u_{j-1}.$$

□

Teorema 3.6. (Teorema de Jordan real) *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea f un endomorfismo de V. Existe una base de Jordan real para f.*

Demostración. ([2, Teorema 6.9.2]) El polinomio característico de f puede escribirse de la forma

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{m_1} (X - \lambda_j)^{r_j} \prod_{j=1}^{m_2} (X - \mu_j)^{t_j}, \ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ \mu_j \in \mathbb{C} - \mathbb{R},$$

con $\lambda_j \neq \lambda_k$ y $\mu_j \neq \mu_k$, si $j \neq k$. Dado que $P_f(X) \in \mathbb{R}[X]$ y $\mu_j = \alpha_j + \beta_j i$ es una raíz de $P_f(X)$ entonces $\overline{\mu}_j = \alpha_j - \beta_j i$ es una raíz de $P_f(X)$. Pongamos $q_j(X) = (X - \mu_j)(X - \overline{\mu}_j) \in \mathbb{R}[X]$. Se tiene

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^{m_1} (X - \lambda_j)^{r_j} \prod_{j=1}^{n_1} q_j(X)^{t_j}\,. \tag{3}$$

Por la proposición 2.29 se tiene

$$V = (\bigoplus_{j=1}^{m_1} \mathrm{Nuc}(f - \lambda_j \,\mathrm{id}_V)^{r_j}) \bigoplus (\bigoplus_{j=1}^{n_1} \mathrm{Nuc}\, q_j(f)^{t_j}). \tag{4}$$

Dado que $(\mathrm{Nuc}(f - \lambda_j \,\mathrm{id}_V)^{r_j})_{\mathbb{C}} = \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \lambda_j \,\mathrm{id}_{V_C})^{r_j}$, por el corolario 2.25 y el lema 3.1 se tiene que $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Nuc}(f - \lambda_j \,\mathrm{id}_V)^{r_j} = r_j$, para $j = 1, \ldots, m_1$. Por el corolario 2.25, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j} = t_j$; además si $B_{\mu_j} = \{u_{1j} + iv_{1j}, \ldots, u_{t_j j} + iv_{t_j j}\}$ es una base de Jordan del endomorfismo $(f_{\mathbb{C}})_{\mu_j}$ restricción de $f_{\mathbb{C}}$ a $\mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j 1_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}$, razonando como en la proposición 3.5, el conjunto $B_{\mu_j,\overline{\mu}_j} = \{v_{1j}, u_{1j}, \ldots, v_{t_j j}, u_{t_j j}\}$ es un conjunto de vectores de V linealmente independiente y $B_{\mu_j,\overline{\mu}_j}$ es una base de Jordan real del endomorfismo restricción de f a $\langle B_{\mu_j,\overline{\mu}_j}\rangle$. Veamos que $B_{\mu_j,\overline{\mu}_j} \subset \mathrm{Nuc}\, q_j(f)^{t_j}$. En efecto,

$$\begin{aligned} q_j(f)^{t_j}(u_{kj}) =& \frac{1}{2}\left[q_j(f_{\mathbb{C}})^{t_j}(u_{kj} + iv_{kj}) + q_j(f_{\mathbb{C}})^{t_j}(u_{kj} - iv_{kj})\right] \\ =& \frac{1}{2}\left[(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu}_j \,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}(u_{kj} + iv_{kj})\right. \\ &\left. + (f_{\mathbb{C}} - \mu_j \,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}(f_{\mathbb{C}} - \bar{\mu}_j \,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}(u_{kj} - iv_{kj})\right] = 0, \end{aligned}$$

para $k = 1, \ldots, t_j$, puesto que $u_{kj} + iv_{kj} \in \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \mu_j \,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}$ y $u_{kj} - iv_{kj} \in \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - \overline{\mu}_j \,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{t_j}$. Análogamente se prueba que $q_j(f)^{t_j}(v_{kj}) = 0$, para $k = 1, \ldots, t_j$. Por tanto

$$2t_j \leq \dim \mathrm{Nuc}\, q_j(f)^{t_j}. \tag{5}$$

Veamos que $B_{\mu_j,\overline{\mu}_j}$ es una base de $\mathrm{Nuc}\, q_j(f)^{t_j}$, para $j = 1, \ldots n_1$. Por (3) y (4), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_1} r_j + \sum_{j=1}^{n_1} 2t_j =& \mathrm{grad}\, P_f(X) = \dim V = \sum_{j=1}^{m_1} \dim \mathrm{Nuc}(f - \lambda_j \,\mathrm{id}_V)^{r_j} + \sum_{j=1}^{n_1} \dim \mathrm{Nuc}\, q_j(f)^{t_j} \\ =& \sum_{j=1}^{m_1} r_j + \sum_{j=1}^{n_1} \dim \mathrm{Nuc}\, q_j(f)^{t_j}. \end{aligned}$$

y utilizando (5) deducimos que $\dim \mathrm{Nuc}\, p_j(f)^{t_j} = 2t_j$. Por tanto, $B_{\mu_j,\overline{\mu}_j}$ es una base de $\mathrm{Nuc}\, q_j(f)^{t_j}$, para $j = 1, \ldots, n_1$. Si B_{λ_j} una base de Jordan para f_{λ_j} para $i = 1, \ldots, m_1$, una base de Jordan real para f es la base $B_{\lambda_1} \bigcup \cdots \bigcup B_{\lambda_{m_1}} \bigcup B_{\mu_1,\overline{\mu}_1} \bigcup \cdots \bigcup B_{\mu_{n_1},\overline{\mu}_{n_1}}$. □

Corolario 3.7. *Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ existe una matriz de Jordan real J y una matriz regular $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P^{-1}JP$.*

Ejemplo 3.8. Consideremos la matriz real

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{M_1}(X) = -X^3 + 6X^2 - 15X + 14 = (X - 2)(X - (2 + \sqrt{3}\, i))(X - (2 - \sqrt{3}\, i))$.

Sea $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_1 y $f_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la aplicación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_1. Se tiene

$$\mathrm{Nuc}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(1, -1, 1)\rangle, \quad \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (2 + \sqrt{3}\, i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^3}) = \langle(1, -\sqrt{3}\, i, 1 + \sqrt{3}\, i)\rangle.$$

Si tomamos

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz J_1 es una forma de Jordan real de M_1 y se tiene $P_1^{-1} M_1 P_1 = J_1$.

Ejemplo 3.9. Consideremos la matriz

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $P_{M_2}(X) = (X^2+2X+2)^2 = (X-(-1+i))^2(X-(-1-i))^2$.

Si $f_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ es la aplicación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_2, entonces

$$\mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (-1+i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle (1-i, i, i, -i) \rangle, \quad \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (-1+i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \langle ((-1, i, 1, 0), (i, -1+i, 0, 1) \rangle.$$

Dado que $(-1, i, 1, 0) \in \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (-1+i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2 - \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (-1+i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})$ y que $(f_{\mathbb{C}} - (-1+i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})(-1, i, 1, 0) = (1+i, -1, -1, 1)$, una base de Jordan para $(f_{\mathbb{C}})_{-1+i}$ es

$$\{(1+i, -1, -1, 1), (-1, i, 1, 0)\}.$$

Si tomamos

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_2 es una forma de Jordan real de M_2 y se tiene $P_2^{-1} M_2 P_2 = J_2$.

Ejemplo 3.10. Consideremos la matriz real

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{M_3}(X) = (X-3)(X-(1+4i))(X-(1-4i))(X-(-2+i))(X-(-2-i))$. Sea $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_3 y sea $f_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ la aplicación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_3. Se tiene

$$\begin{gathered} \mathrm{Nuc}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5}) = \langle (1, 0, 0, 1, 1) \rangle, \quad \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (-2+i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^5}) = \langle (-i, -i, -1, 0, 0) \rangle, \\ \mathrm{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (1+4i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^5}) = \langle (0, -i, i, 1, 0) \rangle. \end{gathered}$$

Poniendo

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_3 es una forma de Jordan real de M_3 y se tiene $P_3^{-1} M_3 P_3 = J_3$.

Ejemplo 3.11. Consideremos la matriz real

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $P_{M_4}(X) = -(X-2)^3(X^2+2X+10) = -(X-2)^3(X-(-1+3i))(X-(-1-3i))$. Sea $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_4 y sea $f_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ la aplicación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_4. Se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc}(f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5}) =& \langle(1,0,0,0,0)\rangle,\ \operatorname{Nuc}(f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5})^2 = \langle(1,0,0,0,0),(0,0,-1,1,1)\rangle, \\ \operatorname{Nuc}(f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5})^3 =& \langle(1,0,0,0,0),(0,0,-1,0,0),(0,0,0,1,1)\rangle,\ \operatorname{Nuc}(f_{\mathbb{C}} - (-1+3i)\operatorname{id}_{\mathbb{C}^5}) = \langle(-1,1-i,0,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

Dado que $(0,0,-1,0,0) \in \operatorname{Nuc}(f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5})^3 - \operatorname{Nuc}(f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5})^2$,

$$\begin{aligned} (f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5})(0,0,-1,0,0) =& (0,0,-1,1,1) \in \operatorname{Nuc}(f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5})^2 - \operatorname{Nuc}(f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5}), \\ (f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5})(0,0,-1,1,1) =& (1,0,0,0,0) \in \operatorname{Nuc}(f - 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5}). \end{aligned}$$

Poniendo

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_4 es una forma de Jordan real de M_4 y se tiene $P_4^{-1} M_4 P_4 = J_4$.

Bibliografía

[1] Hernández Rodríguez, E., *Álgebra y geometría*. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, DE, 1994.

[2] Hernández Rodríguez, E., Vázquez Gallo, M. J., Zurro Moro, M. A., *Álgebra lineal y geometría*. Pearson, Madrid, 2012.

[3] Birkohff, G. and Mac Lane, S., *A survey of modern algebra*. Vicens-Vives, Barcelona, 1963.

[4] Godement, R., *Cours d'algèbre*. Herman, Paris, 1966.