



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Curvas Planas

Adrián González Maestro

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Curvas Planas

Adrián González Maestro

07/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Curvas Planas
Breve descrición do contido
Preténdese estudar propiedades locais e globais de curvas planas prestando un interese especial ás curvas convexas
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	IX
1. Teoría local de curvas planas	1
2. Teoría global de curvas planas	15
3. Teorema dos Catro Vértices	21
4. Desigualdade isoperimétrica	25
5. A fórmula de Cauchy-Crofton	33
Bibliografía	37

Resumo

O obxectivo deste traballo é abordar algúns dos teoremas clásicos máis importantes no referente ao ámbito das curvas planas, prestando especial atención ás curvas planas convexas. Para elo será preciso expor unha serie de nocións e resultados previos a modo de introducción á teoría de curvas planas. En consecuencia, o traballo pode verse como a unión de dous bloques distintos. O primeiro estaría conformado polos capítulos un e dous, onde ofrecemos unha formación básica en teoría local e global de curvas planas, e o segundo polos capítulos tres, catro e cinco, onde usamos os coñecementos adquiridos no bloque anterior para levar a cabo a resolución de tres grandes teoremas. En concreto probaremos o teorema dos catro vértices, a desigualdade isoperimétrica e a fórmula de Cauchy-Crofton. Os dous primeiros pertencen ao ámbito de xeometría diferencial e están intimamente ligados á noción de convexidade, mentres que a fórmula de Cauchy-Crofton pertence ao ámbito da xeometría integral. En xeral, a exposición de ditos teoremas será acompañada pola súa historia e algunhas das súas aplicacións. Ademáis, en todos os casos intentaremos expor as súas demostracións do xeito máis xeométrico posible.

Abstract

The objective of this work is to deal with some of the most important classic theorems related to the realm of plane curves, with special attention to plane convex curves. In order to achieve that, we will have to show some previous notions and results as a introduction to the plane curves theory. Due to that, this work can be seen as the union of two different blocks. The first one would be made up by chapters one and two, where we offer a basic training on local and global plane curves theory, and the second by chapters three, four and five, where we use the knowledge acquired on the previous block in order to solve three important theorems. Specifically, we will prove the four vertex theorem, the isoperimetric inequality and the Cauchy-Crofton formula. The first two belong to the realm of differential

geometry and they are very related to the concept of convexity, while the Cauchy-Crofton formula belongs to the realm of integral geometry. In general, the exposure of those theorems will be accompanied by their history and some of their applications. Futhermore, in all cases we will try to show their proofs in the most geometric way possible.

Introdución

No primeiro capítulo definiremos o que entendemos por "curva plana". Este concepto resultará ser nin máis nin menos que unha aplicación dun intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^2 . Presentaremos algunhas propiedades locais das curvas planas, tais como os seus vectores tanxente e normal, a súa recta tanxente nun punto ou a súa curvatura, a cal interpretaremos como unha medida cuantitativa da variación do vector tanxente da curva nun punto. A imaxe dunha curva plana como aplicación será designada como a "traza" de dita curva. Da susodita traza emanan as propiedades xeométricas da curva, que é cara onde centraremos os nosos estudos. Por este motivo, para estudar as propiedades dunha curva, poderemos traballar coa aplicación orixinal, ou con outra que teña unha traza equivalente. Este feito levaranos a definir o que entendemos por reparametrización dunha curva". Este concepto resulta ser un difeomorfismo que composto coa curva orixinal, danos unha nova curva que conserva a traza da curva orixinal. En concreto, familiarizarémonos cun tipo de reparametrizacións que nos serán de moita utilidade, e as cales usaremos frecuentemente ao longo deste traballo: as reparametrizacións polo parámetro lonxitude de arco. Tamén estudaremos o teorema fundamental de curvas planas, o cal afirma que, dada unha aplicación $k : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, existe unha única curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, salvo isomorfismos, que cumpre que a curvatura de α en $\alpha(t)$ é $k(t) \forall t \in I$. Noutras palabras, podemos identificar unha curva plana unicamente pola súa función curvatura.

Durante o segundo capítulo estudaremos propiedades globais das curvas planas. Isto é, propiedades xeométricas que se evalúan sobre a totalidade da traza da curva. De entre estas propiedades sobresaee a "convexidade", que é un concepto que usamos para expresar que unha curva plana cumpre a propiedade de que todas as súas rectas tanxentes dividen \mathbb{R}^2 en dous semiplanos de tal forma que a traza da curva está contida nun e só nun deses semiplanos.

A partir do terceiro capítulo centraremos os nosos esforzos en usar os coñecementos adquiridos para probar tres resultados clásicos: a desigualdade isoperimétrica, o teorema dos catro vértices e a fórmula de Cauchy-Crofton. A desigualdade isoperimétrica resulta ser un teorema dun gran percorrido histórico que afirma que de todas as figuras planas e pechadas

cun perímetro dado, a que máis área abarca é a circunferencia. Para a súa resolución, a nosa principal ferramenta serán as simetrías axiais a través dunha recta. Grazas a isto, resultará doado obter unha intuición xeométrica das principais ideas que conforman a proba. O teorema dos catro vértices asegura que toda curva pechada e convexa posúe, polo menos, catro puntos da súa traza nos que a súa curvatura pasa de crecer a decrecer. Ao igual que no problema isoperimétrico, neste caso a demostración tamén resultará bastante xeométrica e asequible. Finalmente, a fórmula de Cauchy-Crofton proporciona unha equivalencia que pode resultar moi útil á hora de calcular a lonxitude dunha curva. Este é un resultado moi usado no ámbito da bioloxía. Cabe mencionar que este último teorema pertence á xeometría integral, non coma a desigualdade isoperimétrica e o teorema dos catro vértices, que pertencen á xeometría diferencial.

Capítulo 1

Teoría local de curvas planas

Neste primeiro capítulo vamos ver algunhas definicións, proposicións e teoremas básicos da teoría de curvas planas. A pesar de que a gran maioría dos resultados son aplicables a \mathbb{R}^n , estudaremos unicamente en \mathbb{R}^2 , dado que este traballo está enfocado ás curvas bidimensionais. Para a presentación destes conceptos previos seguimos, en maior medida, as referencias bibliográficas [1], [3] e [5].

Definición 1.1. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Dicimos que unha aplicación $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é unha curva plana parametrizada e diferenciable se as dúas aplicacións compoñentes de α son diferenciables.

Así, temos que unha curva plana parametrizada e diferenciable en \mathbb{R}^2 e definida en $I \subset \mathbb{R}$, é unha aplicación da forma $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ tal que cúmprese que $\alpha_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ son aplicacións reais de variable real derivables.

Chamaremos traza da curva a $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$.

Notación 1.2. Neste traballo, todas as curvas que consideremos serán curvas planas parametrizadas e diferenciables. Polo tanto, en adiante, entenderemos o termo "curva" como "curva plana parametrizada e diferenciable". Isto axudaranos a non facer as definicións excesivamente pesadas cando teñamos que enunciar máis características das curvas.

É importante resaltar que é posible que dúas curvas distintas teñan a mesma traza.

Por exemplo, se consideramos as curvas $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ e $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (\sin(t), \cos(t))$, observamos que ambas teñen por traza a circunferencia de raio 1 centrada na orixe de coordenadas. Non obstante, γ recórrea en sentido antihorario e β fáino en sentido horario. Así tense que, por exemplo, $\gamma(0) = (1, 0) \neq (0, 1) = \beta(0)$, logo β e γ non son a mesma aplicación. En definitiva, son curvas distintas a pesar de ter a mesma traza.

Definición 1.3. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Consideremos un subintervalo de I da forma $[a, b] \subset I$. Entón dicimos que a restricción da curva α ao intervalo $[a, b]$, é dicir, a aplicación $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta(t) = \alpha(t)$, é un segmento da curva α .

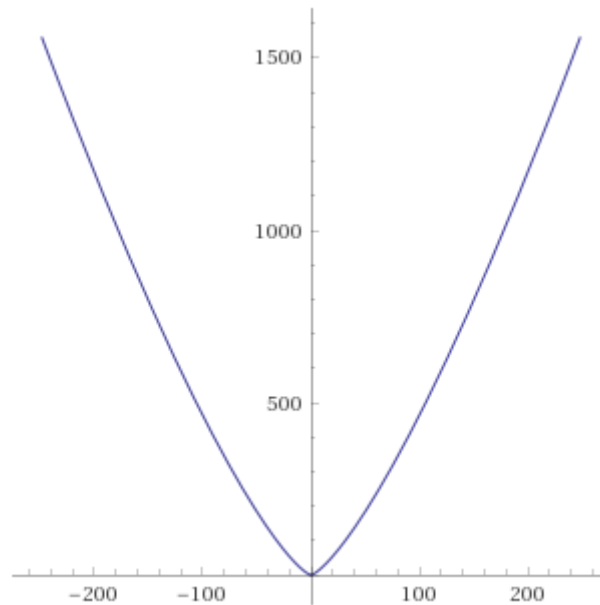
Definición 1.4. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Consideremos a aplicación derivada de α , é dicir, $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha'(t) = (\frac{d}{dt}\alpha)(t)$. Entón, diremos que o vector $(\frac{d}{dt}\alpha)(t_0)$ é o vector tanxente (ou vector velocidade) á curva α no punto $\alpha(t_0)$. En adiante denotarémolo por $\alpha'(t_0)$.

Definición 1.5. Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Sexa $\alpha(t)$ un punto da traza de α . Entón, se $\alpha'(t) = (0, 0)$, diremos que $\alpha(t)$ é un punto singular. Pola contra, se $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ diremos que $\alpha(t)$ é un punto regular.

En breve veremos a importancia de que unha curva non teña puntos singulares de cara a poder definir algunhas nocións básicas a cerca dela.

Definición 1.6. Dicimos que unha curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular se $\alpha'(t) \neq (0, 0) \forall t \in I$, é dicir, se non posúe ningún punto singular.

Exemplo 1.7. Consideremos a curva $\alpha(t) = (t^3, t^4)$ definida no intervalo $(-2\pi, 2\pi)$. Observamos que posúe un punto singular en $\alpha(0) = (0, 0)$, xa que $\alpha'(0) = (0, 0)$. Sen embargo, todos os demais puntos da súa traza son regulares.



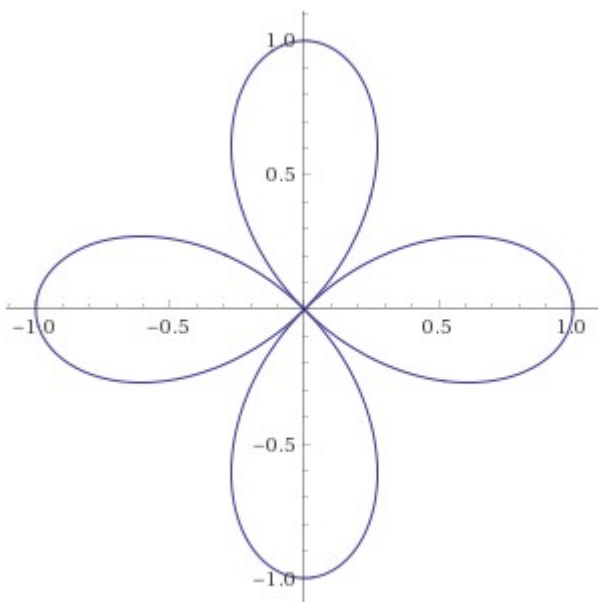
Definición 1.8. Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Podemos entón falar da recta tanxente a α no punto $\alpha(t_0)$. Dita recta é a que pasa polo punto $\alpha(t_0)$ e ten o vector director $\alpha'(t_0)$, é dicir, $\lambda(a) = \alpha(t_0) + a \cdot \alpha'(t_0)$.

Observemos que, para poder garantir a existencia da recta tanxente a α en todos os puntos da súa traza, é preciso que dita curva sexa regular. En caso de que existise algún punto $\alpha(t_0)$ tal que $\alpha'(t_0) = (0, 0)$, entón a recta tanxente a α no punto $\alpha(t_0)$ non podería definirse, xa que non teríamos un vector director co cal darlle unha dirección. Así, por exemplo temos que na curva presentada no *Exemplo 1.7* non podemos definir a recta tanxente no punto $\alpha(0, 0)$.

Definición 1.9. Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Consideremos un punto $w \in \alpha(I)$ da traza de α . Diremos que w ten multiplicidade n se existen (t_1, t_2, \dots, t_n) , n puntos distintos en I , tal que $w = \alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \dots = \alpha(t_n)$.

Definición 1.10. Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Consideremos un punto $w \in \alpha(I)$ da traza de α . Diremos que w é un punto simple se w ten multiplicidade 1. É dicir, w é simple se só existe un punto $t \in I$ tal que $\alpha(t) = w$.

Exemplo 1.11. Consideramos o trevo de catro follas, é dicir, a curva $\alpha(t) = (\cos(t) \cdot \cos(2t), \sin(t) \cdot \cos(2t))$, definida no intervalo $(0, 2\pi]$. Todos os puntos da súa traza son simples a excepción do $(0, 0)$, que ten multiplicidade 4, dado que $\alpha(\pi/4) = \alpha(3\pi/4) = \alpha(5\pi/4) = \alpha(7\pi/4) = (0, 0)$



Definición 1.12. Consideremos unha curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Diremos que o vector $\frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}$ é o vector tanxente unitario á curva α no punto $\alpha(t_0)$. Referirémonos a el como $V_1(t_0)$.

Definición 1.13. Consideremos unha curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Sexan $a, b \in I$ tal que $a < b$. Entón definimos a lonxitude de α entre os puntos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ como: $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$.

Definición 1.14. Sexan I e J dous intervalos de \mathbb{R} . Consideremos unha curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Sexa $g : J \rightarrow I$ unha aplicación bixectiva tal que g e a súa aplicación inversa son derivables (é dicir, sexa g un difeomorfismo). Entón a aplicación $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como $\beta(t) := (\alpha \circ g)(t)$, é unha nova curva da cal dicimos que é unha reparametrización da curva α .

Agora vamos ver interesantes propiedades das reparametrizacións á hora de preservar certas características da curva orixinal.

Proposición 1.15. Sexan I e J dous intervalos de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Sexa $g : J \rightarrow I$ un difeomorfismo e sexa $\beta(t) := (\alpha \circ g)(t)$ unha reparametrización de α . Entón tense que a traza de α e a traza de β coinciden.

Demostración. Por definición, a traza de α é $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$, e a traza de $\beta := (\alpha \circ g)$ é $(\alpha \circ g)(J) \subset \mathbb{R}^2$.

Como $\forall t \in J$ tense que $g(t) \in I$, deducimos que $\beta(t) = \alpha(g(t)) \in (\alpha(I))$. Por outro lado, como $g : J \rightarrow I$ é unha aplicación bixectiva, temos que $\forall x \in I$, $\exists t \in J$ tal que $g(t) = x \implies \forall \alpha(x) \exists (\alpha \circ g)(t)$ tal que $(\alpha \circ g)(t) = \alpha(x)$. Polo tanto, xa vimos que a traza de α está contida na traza de β e que a traza de β está contida na traza de $\alpha \implies$ as trazas de α e β coinciden. □

Proposición 1.16. Sexan I e J dous intervalos de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Sexa $g : J \rightarrow I$ un difeomorfismo e sexa $\beta(t) := (\alpha \circ g)(t)$ unha reparametrización de α . Supoñamos $x, y \in J$ tal que $x < y$. Entón tense que a lonxitude de β entre $\beta(x)$ e $\beta(y)$ coincide coa lonxitude de α entre $\alpha(g(x))$ e $\alpha(g(y))$.

Demostración. Por definición, a lonxitude de β entre $\beta(x)$ e $\beta(y)$ é $\int_x^y \|\beta'(t)\| dt = \int_x^y \|\alpha'(g(t)) \cdot g'(t)\| dt$.

Por definición, a lonxitude de α entre $\alpha(g(x))$ e $\alpha(g(y))$ é $\int_{g(x)}^{g(y)} \|\alpha'(t)\| dt$.

Finalmente, facendo uso do teorema de cambio de variable, vemos que ambas integrais teñen o mesmo valor. □

Proposición 1.17. Sexan I e J dous intervalos de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva e V_1^α o seu vector tanxente unitario. Sexa $g : J \rightarrow I$ un difeomorfismo e sexa $\beta(t) := (\alpha \circ g)(t)$ unha reparametrización de α e V_1^β o seu vector tanxente unitario. Entón cúmprese que $V_1^\alpha(g(t)) = \pm V_1^\beta(t) \forall t \in J$.

Demostración. Sexa $t \in J$ arbitrariamente fixado. Consideremos $\alpha'(g(t)) = (\alpha'_1(g(t)), \alpha'_2(g(t)))$. Por outra parte, consideremos $\beta'(t) = (\alpha \circ g)'(t) = \alpha'(g(t)) \cdot g'(t) = (\alpha'_1(g(t)), \alpha'_2(g(t))) \cdot g'(t)$. Así, temos que $\beta'(t) = \alpha'(g(t)) \cdot g'(t) \implies \|\beta'(t)\| = \|\alpha'(g(t)) \cdot g'(t)\| = \|\alpha'(g(t))\| \cdot |g'(t)| \implies \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{\alpha'(g(t)) \cdot g'(t)}{\|\alpha'(g(t))\| \cdot |g'(t)|} = \pm \frac{\alpha'(g(t))}{\|\alpha'(g(t))\|} \implies V_1^\alpha(g(t)) = \pm V_1^\beta(t)$. \square

Proposición 1.18. Sexan I e J dous intervalos de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Sexa $g : J \rightarrow I$ un difeomorfismo e sexa $\beta(t) := (\alpha \circ g)(t)$ unha reparametrización de α . Entón β tamén é unha curva regular.

Demostración. Por ser α unha curva regular, tense que $\alpha'(t) \neq (0, 0) \forall t \in I$. Por ser g un difeomorfismo, temos que $g'(t) \neq (0, 0) \forall t \in J$. Como $\beta'(t) = (\alpha \circ g)'(t) = \alpha'(g(t)) \cdot g'(t) \implies \beta'(t) \neq (0, 0) \forall t \in J$. \square

Acabamos de ver que as reparametrizacións conservan algunhas das características da curva orixinal. Non obstante, existen algúns factores que as reparametrizacións, en xeral, non respetan, como por exemplo a orientación. Vémolo formalmente na seguinte definición.

Definición 1.19. Sexan I e J dous intervalos de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Sexa $g : J \rightarrow I$ un difeomorfismo e sexa $\beta(t) := (\alpha \circ g)(t)$ unha reparametrización de α . Se se cumpre que $g'(t) > 0$ diremos que a reparametrización conserva a orientación. Se polo contrario cúmprese que $g'(t) < 0$, diremos que a reparametrización reverte a orientación.

Nótese que, efectivamente, $g'(t)$ ten que ser estrictamente maior que 0 ou estrictamente menor que 0 en todo o seu dominio, xa que I é conexo e, como vimos anteriormente, $g'(t) \neq (0, 0) \forall t$.

Exemplo 1.20. Agora vamos ver un par de exemplos de reparametrizacións dunha curva dada, unha delas respetando a orientación inicial e a outra non. Tomamos $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, cuxa traza é a circunferencia de centro a orixe e de raio unidade percorrida no sentido antihorario. Un exemplo dunha reparametrización que non conserva a orientación de α pode ser o seguinte:

Consideramos o difeomorfismo $g(t) = -t$ e a consecuente reparametrización de α , $\beta := (\alpha \circ g)$, podemos observar que $\beta(t) = \alpha(g(t)) = \alpha(-t) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos(t), -\sin(t)) \implies \beta$ percorre a circunferencia de centro a orixe e de raio 1, pero con sentido horario. É dicir, esta reparametrización non conserva a orientación.

Sen embargo, se consideramos o difeomorfismo $h(t) = 10 \cdot t$, e a consecuente reparametrización de α , $\gamma := (\alpha \circ h)$, vemos que desta vez obtemos $\gamma(t) = \alpha(h(t)) = \alpha(10 \cdot t) = (\cos(10 \cdot t), \sin(10 \cdot t))$, que é unha curva que si respeta a orientación inicial de α . É certo que percorre a circunferencia de centro a orixe e de raio 1 a moita máis velocidade que α ,

máis non altera o sentido do percorrido.

Nótese que, en concordancia coa definición que acabamos de ver, cúmprese que $g'(t) = -1 < 0$ e que $h'(t) = 10 > 0$.

Observación 1.21. É importante remarcar que, se ben existen cualidades dunha curva, como a orientación, que non son conservadas polas reparametrizacións, o feito de que a traza dunha curva permaneza invariante fronte a reparametrizacións (como xa probamos na *Proposición 1.15*) é suficiente para xustificar que, á hora de traballar cunha curva, podemos usar a súa parametrización orixinal ou calquera outra reparametrización. Isto débese a que as propiedades das curvas que vamos estudar nos vindeiros temas son as de carácter xeométrico e, evidentemente, dúas curvas que teñen unha traza común posúen as mesmas propiedades xeométricas.

Agora vamos ver unha parametrización que é especialmente interesante: a parametrización polo parámetro lonxitude de arco.

Definición 1.22. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Diremos que unha curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco se se cumpre que $\forall t \in I, \|\alpha'(t)\| = 1$.

Observación 1.23. Resulta inmediato que, cando unha curva está parametrizada por lonxitude de arco, o seu vector $V_1(t)$ coincide con $\alpha'(t)$. Isto resulta ser unha propiedade bastante cómoda á hora de traballar con curvas. Cos próximos resultados veremos que toda curva regular pode ser reparametrizada polo parámetro lonxitude de arco.

Corolario 1.24. *Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Entón toda curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada polo parámetro lonxitude de arco é necesariamente regular.*

Demostración. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} e sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Logo por definición, $\forall t \in I, \|\alpha'(t)\| = 1 \implies \forall t \in I, \sqrt{\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2} = 1 \implies \forall t \in I, (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \neq (0, 0) \implies \alpha$ é unha curva regular. \square

Logo xa temos unha condición necesaria para que unha curva sexa reparametrizable polo parámetro lonxitude de arco. Así, temos que por exemplo a curva que visualizamos no *Exemplo 1.7* non pode ser reparametrizada desta forma. Non obstante, de inmediato vamos comprobar que esta condición, ademáis de ser necesaria, tamén é suficiente.

Proposición 1.25. *Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Entón existe unha reparametrización de α que conserva a orientación e tal que a curva resultante é unha curva parametrizada polo parámetro lonxitude de arco.*

Demostración. Tomamos un punto $x \in I$ e definimos unha aplicación $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) := \int_x^t \|\alpha'(u)\| du$. Resulta que g é unha función derivable e $g'(t) = \|\alpha'(t)\|$. Como $\alpha'(t) \neq (0,0)$ (por ser α regular), tense que $g'(t) > 0 \forall t \in I$. Agora, grazas ao teorema da función inversa, sabemos que $g(I)$ é un intervalo aberto de \mathbb{R} (a partir de agora definirémolo como $g(I) := J$) e que $g : I \rightarrow J$ é un difeomorfismo. Polo tanto, se h é a función inversa de g , h tamén é un difeomorfismo. Ademais $\forall t \in I$ tense que $(h \circ g)(t) = t \implies (h \circ g)'(t) = 1 \implies h'(g(t)) \cdot g'(t) = 1 \implies h'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0$. Polo tanto, xa sabemos que a reparametrización que xera h sobre a curva α conserva a orientación. Resta comprobar que a nova curva está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco:

Sexa $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta(s) := (\alpha \circ h)(s)$. Entón $\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s)) \cdot h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| = \|\alpha'(h(s))\| \cdot \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|} = 1$ \square

Observación 1.26. Obsérvese que da demostración desta última proposición dedúcese un algoritmo para reparametrizar unha curva regular polo parámetro lonxitude de arco:

Consideramos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Seleccionamos un $t_0 \in I$. Tomamos a aplicación $g(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$ e buscamos a súa aplicación inversa. Para elo será suficiente tomar $\varsigma = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$ e despxear o parámetro t en función do novo parámetro ς . Así obtemos a expresión da aplicación inversa de g . Logo se compoñemos α con tal aplicación, teremos a reparametrización de α polo parámetro lonxitude de arco.

Visualicemos este procedemento cun exemplo.

Exemplo 1.27. Definimos a curva $\alpha(t) = (2, 1) + t \cdot (1, 1)$. Dado que $\alpha'(t) = (1, 1) \forall t \in \mathbb{R}$, sabemos que α é unha curva regular. Ademais, como $\|\alpha'(t)\| = \|(1, 1)\| = \sqrt{2} \neq 1$, α non está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Buscaremos reparametrizar α por dito parámetro:

Tomamos $\varsigma = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{2} du = t \cdot \sqrt{2}$. Polo tanto $t = \frac{\varsigma}{\sqrt{2}}$. Logo consideramos a aplicación $h(\varsigma) = \frac{\varsigma}{\sqrt{2}}$ e compoñémola con α , obtendo $(\alpha \circ h)(\varsigma) = (2, 1) + \frac{\varsigma}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1)$. Resulta doado comprobar que $(\alpha \circ h)'(\varsigma) = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$, e así $\|(\alpha \circ h)'(\varsigma)\| = 1 \forall \varsigma \in \mathbb{R}$. En consecuencia $\beta(\varsigma) = (\alpha \circ h)(\varsigma)$ é unha reparametrización de α polo parámetro lonxitude de arco.

Definición 1.28. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Definiremos o vector normal unitario a α no punto $\alpha(t_0)$ como $J(V_1(t_0))$, tal que $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o xiro de 90 graos no sentido contrario ás agullas do reloxo. Denotaremos tal vector como $V_2(t_0)$.

Observación 1.29. Dado o vector $V_1(t) = (x(t), y(t))$ dunha curva regular, resulta inmediato que $V_2(t) = (-y(t), x(t))$.

Observación 1.30. Observemos tamén que, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é unha curva regular, cúmprese que $\forall t \in I$, $V_1(t)$ e $V_2(t)$ son vectores unitarios e ortogonales entre si. Como consecuencia temos que $\forall t \in I$, $V_1(t)$ e $V_2(t)$ conforman unha base ortonormal de \mathbb{R}^2 . A dupla $(V_1(t), V_2(t))$ recibe o nome de *Diedro de Frenet*.

A partir da seguinte definición, vamos traballar coas segundas derivadas dalgunhas curvas, polo tanto precisamos máis regularidade da que esiximos nun principio na *Definición 1.1*. Así, en adiante estudaremos só curvas que sexan C^2 (clase dous). En consecuencia, a partir de agora vamos considerar o termo "curva" non soamente como "curva plana parametrizada e diferenciable", senón como "curva plana parametrizada e de clase dous".

Definición 1.31. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular parametrizada polo parametro lonxitude de arco da forma $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. Definimos a curvatura de α no punto $\alpha(t_0)$ como: $\chi(t_0) := \langle (V_1'(t_0), V_2(t_0)) \rangle = \langle \alpha''(t_0), J(\alpha'(t_0)) \rangle = \langle (\alpha_1''(t_0), \alpha_2''(t_0)), (-\alpha_2'(t_0), \alpha_1'(t_0)) \rangle$.

Proposición 1.32. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Entón cúmprese que:

1. $V_1'(t) = \chi(t) \cdot V_2(t)$
2. $V_2'(t) = -\chi(t) \cdot V_1(t)$

Demostración. Demostremos o primeiro punto:

Como $(V_1(t), V_2(t))$ forman unha base ortonormal de \mathbb{R}^2 , temos que $V_1'(t) = V_1(t) \cdot \langle (V_1'(t), V_1(t)) \rangle + V_2(t) \cdot \langle (V_1'(t), V_2(t)) \rangle$. Tamén sabemos que $V_1(t)$ é un vector unitario $\implies 1 = \|V_1(t)\| = \sqrt{\langle (V_1(t), V_1(t)) \rangle} \implies \langle (V_1(t), V_1(t)) \rangle = 1$. Se agora derivamos esa expresión, chegamos a que $\langle (V_1'(t), V_1(t)) \rangle + \langle (V_1(t), V_1'(t)) \rangle = 0 \implies 2 \cdot \langle (V_1'(t), V_1(t)) \rangle = 0 \implies \langle (V_1'(t), V_1(t)) \rangle = 0 \implies V_1'(t) = V_2(t) \cdot \langle (V_1'(t), V_2(t)) \rangle = V_2(t) \cdot \chi(t)$.

Demostremos o segundo punto:

Como $(V_1(t), V_2(t))$ forman unha base ortonormal de \mathbb{R}^2 , temos que $V_2'(t) = V_1(t) \cdot \langle (V_2'(t), V_1(t)) \rangle + V_2(t) \cdot \langle (V_2'(t), V_2(t)) \rangle$. Tamén sabemos que $V_2(t)$ é un vector unitario $\implies 1 = \|V_2(t)\| = \sqrt{\langle (V_2(t), V_2(t)) \rangle} \implies \langle (V_2(t), V_2(t)) \rangle = 1$. Se agora derivamos esa expresión, chegamos a que $\langle (V_2'(t), V_2(t)) \rangle + \langle (V_2(t), V_2'(t)) \rangle = 0 \implies 2 \cdot \langle (V_2'(t), V_2(t)) \rangle = 0 \implies \langle (V_2'(t), V_2(t)) \rangle = 0 \implies V_2'(t) = V_1(t) \cdot \langle (V_2'(t), V_1(t)) \rangle$.

Por outra parte, como $V_1(t)$ e $V_2(t)$ son dous vectores ortogonais, cúmprese que $\langle (V_1(t), V_2(t)) \rangle = 0$. Derivando esa expresión obtemos que $\langle (V_1'(t), V_2(t)) \rangle + \langle (V_1(t), V_2'(t)) \rangle = 0 \implies \langle (V_2'(t), V_1(t)) \rangle = -\langle (V_1'(t), V_2(t)) \rangle = -\chi(t) \implies V_2'(t) = -\chi(t) \cdot V_1(t)$.

□

Observación 1.33. Das fómulas que obtivemos na *Proposición 1.29* podemos deducir de forma sinxela que, se α é unha curva parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, o seu vector aceleración, $\alpha''(t) = V_1'(t)$, non ten compoñente tanxencial, é dicir, só ten compoñente normal. Polo tanto, resulta razoable interpretar a curvatura dunha curva plana parametrizada polo parámetro lonxitude de arco nun punto da súa traza, como "o grao en que se curva a curva" en dito punto. Máis formalmente, podémola interpretar como a razón do cambio de ángulo entre o seu vector tanxente nese punto e a parte positiva do eixo de abscisas. Nótese que dito cambio de ángulo pode ter lugar en sentido horario ou antihorario, isto xustifica o porqué a curvatura pode ter signo positivo ou negativo: cando dito cambio de ángulo sucede no sentido das agullas do reloxo, a curvatura será menor que cero, mentres que se dito cambio prodúcese en sentido contrario as agullas do reloxo, a curvatura será maior que cero.

Tendo en conta esta interpretación xeométrica, resulta bastante intuitivo pensar que debe ser posible xeralizar o concepto de curvatura a unha curva parametrizada regular calquera, e que ademais, a curvatura dunha curva non debería depender da súa parametrización salvo polo signo (lembremos que, como xa expuxemos na *Definición 1.19*, existen reparametrizacións que non conservan a orientación).

Definición 1.34. Sexan I e J dous intervalos de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Sexa $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ a súa reparametrización polo parámetro lonxitude de arco a través do difeomorfismo $g : J \rightarrow I$. Sexa $h : I \rightarrow J$ a plicación inversa de g e sexan $t_0 \in I, w_0 \in J$ tal que $h(t_0) = w_0$. Entón definimos a curvatura de α no punto $\alpha(t_0)$ como a curvatura da súa reparametrización polo parámetro lonxitude de arco en $\beta(h(t_0))$, é dicir, $\chi_\alpha(t_0) := \chi_\beta(h(t_0))$.

Proposición 1.35. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Entón cúmprese que $\chi_\alpha(t_0) = \frac{\langle \alpha'(t_0), J(\alpha'(t_0)) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\|^3}$.

Demostración. Herdamos toda a notación da *Definición 1.31* e así, como $\forall t \in I$ tense por definición que $\chi_\alpha(t) = \chi_\beta(h(t))$, vamos calcular $\chi_\beta(s)$ tal que $s \in J$. Como β está parametrizada polo parámetro lonxitude arco, a súa curvatura defínese como $\chi_\beta(s) := \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle$. Agora calcularemos $V_1'(s)$ e $V_2(s)$: $V_1(s) = \beta'(s) = \alpha'(g(s)) \cdot g'(s) \implies V_1'(s) = \alpha''(g(s)) \cdot g'(s)^2 + \alpha'(g(s)) \cdot g''(s)$.

$$V_2(s) = J(V_1(s)) = J(\alpha'(g(s)) \cdot g'(s)) = J(\alpha'(g(s))) \cdot g'(s).$$

$$\begin{aligned} \text{Polo tanto } \chi_\beta(s) &= \langle \alpha''(g(s)) \cdot g'(s)^2 + \alpha'(g(s)) \cdot g''(s), J(\alpha'(g(s))) \cdot g'(s) \rangle = \langle \alpha''(g(s)) \cdot \\ &g'(s)^2, J(\alpha'(g(s))) \cdot g'(s) \rangle + \langle \alpha'(g(s)) \cdot g''(s), J(\alpha'(g(s))) \cdot g'(s) \rangle = \langle \alpha''(g(s)) \cdot g'(s)^2, J(\alpha'(g(s))) \\ &\cdot g'(s) \rangle = \langle \alpha''(g(s)), J(\alpha'(g(s))) \rangle \cdot g'(s)^3 = \frac{1}{\|\alpha'(g(s))\|^3} \cdot \langle \alpha''(g(s)), J(\alpha'(g(s))) \rangle \quad \square \end{aligned}$$

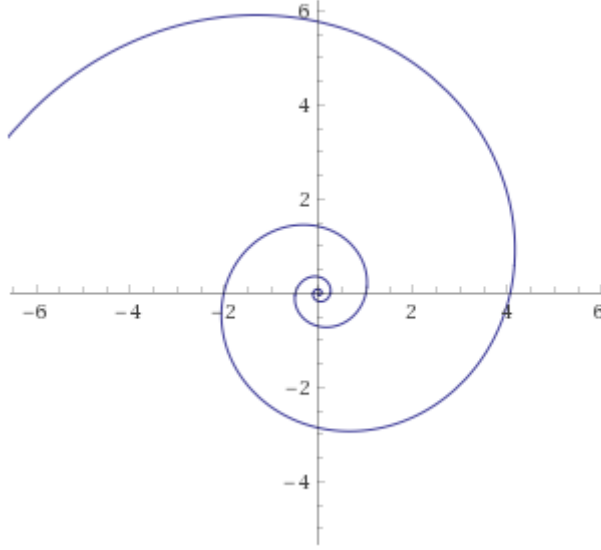
Agora vamos ver un exemplo de curva cuxa función curvatura é non negativa e estritamente decrecente. Dito máis informalmente, unha curva que "cúrvase menos" segundo o seu parámetro toma valores máis grandes.

Exemplo 1.36. As espirais logarítmicas son a familia de curvas regulares que poden ser parametrizadas da seguinte forma $\alpha(t) = (a \cdot b^t \cdot \cos(t), a \cdot b^t \cdot \sin(t))$, con $t \in \mathbb{R}$, onde a e b son números reais maiores que 0. En concreto, tomando $a = 1$ e $b = \frac{5}{4}$, obtemos a espiral logarítmica $\alpha(t) = ((\frac{5}{4})^t \cdot \cos(t), (\frac{5}{4})^t \cdot \sin(t))$.

Facendo uns simples cálculos chegamos a que $\alpha''(t) = (\frac{5}{4})^t \cdot (-\sin(t) \cdot \ln(\frac{5}{4}) - \cos(t), -\sin(t) + \cos(t) \cdot \ln(\frac{5}{4}))$, $J(\alpha'(t)) = (\frac{5}{4})^t \cdot (-\cos(t) - \sin(t) \cdot \ln(\frac{5}{4}), \cos(t) \cdot \ln(\frac{5}{4}) - \sin(t))$ e $\|\alpha'(t)\|^3 = (\frac{5}{4})^{3t} \cdot (1 + \ln(\frac{5}{4})^2) \cdot \sqrt{1 + \ln(\frac{5}{4})^2}$. Polo tanto, usando a *Proposición 1.32* temos que

$$\begin{aligned} \chi_\alpha(t) &= \frac{\langle \alpha''(t), J(\alpha'(t)) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\langle (\frac{5}{4})^t \cdot (-\sin(t) \cdot \ln(\frac{5}{4}) - \cos(t)), -\sin(t) + \cos(t) \cdot \ln(\frac{5}{4}) \rangle, (\frac{5}{4})^t \cdot (-\cos(t) - \sin(t) \cdot \ln(\frac{5}{4}), \cos(t) \cdot \ln(\frac{5}{4}) - \sin(t)) \rangle}{(\frac{5}{4})^{3t} \cdot (1 + \ln(\frac{5}{4})^2) \cdot \sqrt{1 + \ln(\frac{5}{4})^2}} \\ &= \frac{(1 + \ln(\frac{5}{4})^2) \cdot (\frac{5}{4})^{2t}}{(\frac{5}{4})^{3t} \cdot (1 + \ln(\frac{5}{4})^2) \cdot \sqrt{1 + \ln(\frac{5}{4})^2}} = \frac{1}{(\frac{5}{4})^t \cdot \sqrt{1 + \ln(\frac{5}{4})^2}}. \end{aligned}$$

En consecuencia temos que o valor da función curvatura é inversamente proporcional ao valor de t . É dicir, a función curvatura é estritamente decrecente.



Esta é unha representación da espiral logarítmica anterior, onde o seu parámetro toma valores no intervalo $(-5\pi, 5\pi)$. Nela resulta fácil visualizar que, efectivamente, canto maior é o valor do parámetro t , menos acentuado é o cambio de ángulo entre o vector tanxente á curva e a parte positiva do eixo de abscisas.

Proposición 1.37. *Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Se se cumpre que $\chi(t) = 0 \forall t \in I$, entón a traza de α está contida nunha recta.*

Demostración. Xa comprobamos que toda curva regular pode ser reparametrizada polo parámetro lonxitude de arco e que toda reparametrización dunha curva dada conserva a traza da curva orixinal. Polo tanto, podemos realizar a demostración para unha curva α parametrizada polo parámetro lonxitude de arco e obter un resultado válido para calquera curva regular.

Sexan $c, d \in I$ calesquera tal que $c < d$. Sabemos que $\int_c^d (\alpha'(t)) dt = \alpha(d) - \alpha(c)$. Por outra banda, dado que $\chi(t) = 0 \implies V_1'(t) = (0, 0) \forall t \in I \implies V_1(t)$ é un vector constante, é dicir, $\alpha'(t)$ é constante. En consecuencia, tense que $\int_c^d (\alpha'(t)) dt = \alpha'(t) \cdot (d - c)$. Así, podemos afirmar que $\alpha(d) = \alpha(c) + \alpha'(t) \cdot (d - c) = \alpha(c) + \alpha'(t) \cdot d - \alpha'(t) \cdot c = \alpha(c) - \alpha'(t) \cdot c + \alpha'(t) \cdot d$. Se fixamos o valor de c , teremos que $\alpha(c) - \alpha'(t) \cdot c$ é un vector fixo de \mathbb{R}^2 . Polo tanto $\alpha(d) = (\alpha(c) - \alpha'(t) \cdot c) + \alpha'(t) \cdot d$ é a expresión dunha recta para $d \in (c, b)$. Como a elección do punto fixado, $c \in I$, é completamente arbitraria, deducimos que a traza de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está contida nunha recta. \square

Proposición 1.38. *Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Se se cumpre que $\forall t \in I, \chi(t) = k$, tal que k é unha constante distinta de 0, entón a traza de α está contida nunha circunferencia de raio $\frac{1}{k}$.*

Demostración. Ao igual que na proposición anterior, vamos supor que a curva α está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Pola *Proposición 1.29* sabemos que $V_1'(t) = \chi(t) \cdot V_2(t)$. Ademais, $\alpha'(t) = V_1(t) \implies \alpha''(t) = V_1'(t) \implies \alpha''(t) = \chi(t) \cdot V_2(t)$. Así, deducimos que o vector $\alpha''(t)$ ten a mesma dirección que $V_2(t)$. Polo tanto, tense que $(\alpha'(t), \alpha''(t))$ é unha base ortogonal de \mathbb{R}^2 .

Agora consideramos a aplicación $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $c(t) = \alpha(t) + \frac{\alpha''(t)}{k^2}$ e a súa derivada $c'(t) = \alpha'(t) + \frac{\alpha'''(t)}{k^2}$. Vamos probar que c é unha aplicación constante. Mais para conseguilo precisamos algúns resultados previos.

Como α está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, sabemos que $\chi(t) = \langle V_1'(t), V_2(t) \rangle$, é dicir, $k = \langle V_1'(t), V_2(t) \rangle \implies k = \langle \alpha''(t), \frac{\alpha''(t)}{k} \rangle \implies k = \frac{1}{k} \cdot \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle \implies k^2 = \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle$. Derivando a igualdade anterior chegamos a que $0 = \langle \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle + \langle \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = 2 \cdot \langle \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle \implies 0 = \langle \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle$.

Tamén sabemos que $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$. Polo tanto, derivando a anterior igualdade temos que $\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'''(t) \rangle = 0$. Como xa comprobamos que $\langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle = k^2$, deducimos que $\langle \alpha'(t), \alpha'''(t) \rangle = -k^2$. Xa estamos en condicións de probar que c é unha aplicación constante:

Tense que $\langle c'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \frac{\alpha'''(t)}{k^2}, \alpha'(t) \rangle = \|\alpha'(t)\|^2 + \frac{1}{k^2} \cdot \langle \alpha'''(t), \alpha'(t) \rangle = 1 + \frac{1}{k^2} \cdot (-k^2) = 0$. Por outra banda, verificase que $\langle c'(t), \alpha''(t) \rangle = \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle + \langle \frac{\alpha'''(t)}{k^2}, \alpha''(t) \rangle = 0 + \frac{1}{k^2} \cdot 0 = 0$.

Como $(\alpha'(t), \alpha''(t))$ é unha base ortogonal de \mathbb{R}^2 e acabamos de ver que $\langle c'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ e $\langle c'(t), \alpha''(t) \rangle = 0 \implies c'(t) = 0 \forall t \in I \implies \exists w \in \mathbb{R}^2$ tal que $c(t) = w \forall t \in I$.

Finalmente, comprobaremos que a distancia de w a calquera punto da traza de α é constante. Dado un punto $t_0 \in I$, tense que a distancia entre $\alpha(t_0)$ e $w = c(t_0)$ ven dada por $\|c(t_0) - \alpha(t_0)\| = \|\alpha(t_0) + \frac{\alpha''(t_0)}{k^2} - \alpha(t_0)\| = \|\frac{\alpha''(t_0)}{k^2}\| = \frac{1}{k^2} \cdot \|\alpha''(t_0)\| = \frac{1}{k^2} \cdot \sqrt{\langle \alpha''(t_0), \alpha''(t_0) \rangle} = \frac{1}{k^2} \cdot \sqrt{k^2} = \frac{1}{k^2} \cdot k = \frac{1}{k}$. Polo tanto, todos os puntos da traza de α están a distancia $\frac{1}{k}$ de w . Isto quere dicir que todos os puntos da traza de α están contidos na circunferencia de raio $\frac{1}{k}$ centrada no punto w .

□

A *Proposición 1.34* e a *Proposición 1.35* axúdannos a identificar rapidamente curvas cando a súa función curvatura é constante. Deseguido vamos expoñer un teorema moito máis xeral, que permítenos identificar unha curva a partir da súa curvatura sen impoñer condicións sobre ela. Resulta ser un dos resultados máis importantes da teoría de curvas planas.

Teorema 1.39. *Teorema fundamental de curvas planas*

Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ unha aplicación derivable. Entón cúmprense os seguintes enunciados:

1. Existe unha curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada polo parámetro lonxitude de arco tal que $\chi_\alpha(t) = k(t) \forall t \in I$.
2. Se $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é outra curva plana regular parametrizada polo parámetro lonxitude de arco tal que $\chi_\beta(t) = k(t) \forall t \in I$, entón existe unha isometría $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $M((x, y)) := A \cdot (x, y) + b$ (onde A é unha matriz 2×2 ortogonal de determinante 1 con coeficientes en \mathbb{R} e $b \in \mathbb{R}^2$), tal que $\beta = M \circ \alpha$.

Demostración. Demostremos o primeiro punto:

Sexa $t_0 \in I$. Definimos a aplicación $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) := \int_{t_0}^t k(u) du$. Como k é unha aplicación derivable, entón φ tamén o é.

Agora creamos a curva plana $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := (\int_{t_0}^t \cos(\varphi(u)) du, \int_{t_0}^t \sin(\varphi(u)) du)$. Como φ é derivable, entón sabemos que α tamén o é. Verifícase que $\alpha'(t) = (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t))) \implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\cos^2(\varphi(t)) + \sin^2(\varphi(t))} = 1 \implies \alpha$ é regular e está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Ademais, $\chi_\alpha(t) = \langle V_1'(t), V_2(t) \rangle = \langle (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t)), (-\alpha_2'(t), \alpha_1'(t)) \rangle = \varphi'(t) \cdot \sin^2(\varphi(t)) + \varphi'(t) \cdot \cos^2(\varphi(t)) = \varphi'(t) = k(t)$. Logo queda probado que α é a curva que buscábamos.

Demostremos o segundo punto:

Supoñamos que existen dúas curvas, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas polo

parámetro lonxitude de arco tal que $k(t) = \chi_\alpha(t) = \chi_\beta(t) \forall t \in I$. Sexan $(V_1^\alpha(t), V_2^\alpha(t))$ e $(V_1^\beta(t), V_2^\beta(t))$ os *Diedros de Frenet* de α e β , respectivamente. Fixamos un punto $t_0 \in I$ e consideramos $V_1^\alpha(t_0)$ e $V_1^\beta(t_0)$. Sabemos que unicamente existe unha rotación con matriz asociada ortogonal de determinante 1, A , tal que $A \cdot V_1^\alpha(t_0) = V_1^\beta(t_0)$. Sabemos que $V_1^\alpha(t_0)$ é ortogonal con $V_2^\alpha(t_0)$, e que $V_1^\beta(t_0)$ é ortogonal con $V_2^\beta(t_0)$, logo temos que $A \cdot V_2^\alpha(t_0) = V_2^\beta(t_0)$. Agora definimos o vector de \mathbb{R}^2 , $b := \beta(t_0) - A \cdot \alpha(t_0)$ e consideramos a isometría $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $M((x, y)) := A \cdot (x, y) + b$. Definimos a nova curva $\gamma = M \circ \alpha$. Vamos demostrar que $\beta \equiv \gamma$:

Cúmprese que $\gamma(t_0) = (M \circ \alpha)(t_0) = A \cdot \alpha(t_0) + b = A \cdot \alpha(t_0) + \beta(t_0) - A \cdot \alpha(t_0) = \beta(t_0)$ e que $\gamma'(t_0) = (M \circ \alpha)'(t_0) = A \cdot \alpha'(t_0) = A \cdot V_1^\alpha(t_0) = V_1^\beta(t_0)$. Polo tanto, xa sabemos que ambas curvas teñen a mesma imaxe e o mesmo vector tanxente en t_0 . Co fin de verificar que isto non só ocorre en t_0 , senón que sucede en todo o intervalo I , creamos a aplicación $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := \frac{\|V_1^\beta(t) - V_1^\gamma(t)\|^2}{2}$. Como $V_1^\beta(t_0) = V_1^\gamma(t_0) \implies f(t_0) = 0$. Agora comprobamos que $f'(t) = \langle (V_1^\beta)'(t) - (V_1^\gamma)'(t), V_1^\beta(t) - V_1^\gamma(t) \rangle = \langle \chi_\beta(t) \cdot V_2^\beta(t) - \chi_\gamma(t) \cdot V_2^\gamma(t), V_1^\beta(t) - V_1^\gamma(t) \rangle = -k(t) \cdot (\langle V_2^\beta(t), V_1^\gamma(t) \rangle + \langle V_2^\gamma(t), V_1^\beta(t) \rangle)$.

Por outra banda, como $\langle V_2^\beta(t), V_1^\gamma(t) \rangle = \langle J(V_1^\beta)(t), V_1^\gamma(t) \rangle = -\langle V_1^\beta(t), J(V_1^\gamma)(t) \rangle = -\langle V_1^\beta(t), V_2^\gamma(t) \rangle$.

En consecuencia, $-k(t) \cdot (\langle V_2^\beta(t), V_1^\gamma(t) \rangle + \langle V_2^\gamma(t), V_1^\beta(t) \rangle) = 0 \forall t \in I \implies f'(t) = 0 \forall t \in I \implies f$ é unha función constante. Como xa vimos que $f(t_0) = 0 \implies f(t) = 0 \forall t \in I$. Como consecuencia inmediata temos que $V_1^\gamma(t) = V_1^\beta(t) \forall t \in I$, ou o que é o mesmo, $(\beta - \gamma)'(t) = 0 \forall t \in I \implies (\beta - \gamma)(t)$ é constante. Como xa vimos que $V_1^\gamma(t_0) = V_1^\beta(t_0) \implies (\beta - \gamma)(t_0) = 0 \implies (\beta - \gamma)(t) = 0 \forall t \in I$. Co cal xa podemos concluir que as curvas β e γ son iguais.

□

Capítulo 2

Teoría global de curvas planas

A maioría das definicións e resultados que presentamos no capítulo anterior versan sobre as características locais que posúe unha curva, é dicir, mostran cualidades que poden ser evaluadas en cada punto da súa traza. En cambio, neste capítulo vámonos adicar a estudar propiedades das curvas de carácter global. Isto é, propiedades que involucran a toda a traza da curva e, polo tanto, só son interpretables se consideramos a curva na súa totalidade. Neste capítulo as principais fontes bibliográficas correspóndense coas referencias [1], [3] e [7].

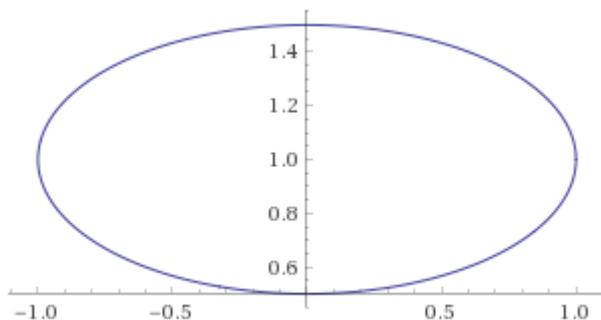
O primeiro concepto que vamos abordar será o de "curva pechada". Para ter unha intuición xeométrica do que isto representa, podemos pensar que unha curva pechada representa un circuito cuxo inicio coincide co seu final e que é recorrido un número indeterminado de veces. Poderíamos formalizar este concepto da seguinte maneira.

Definición 2.1. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Dicimos que α é unha curva pechada se se cumpre que:

1. Existen dous puntos $a, b \in I$, con $a < b$, tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$.
2. $\forall c \in I$ tal que $c > b$, tense que $\alpha(c) = \alpha(a + (c - b))$
3. $\forall d \in I$ tal que $d < a$, tense que $\alpha(d) = \alpha(b - (a - d))$

Observación 2.2. Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Nótese que, trivialmente, o que a definición anterior ven a esixirlle a α para que esta sexa unha curva pechada, é nin máis nin menos que o feito de que α sexa unha aplicación periódica con período $b - a$. O valor deste período representa canto tarda a curva en dar unha volta ao circuito que conforma a súa traza.

Exemplo 2.3. Vamos expoñer un exemplo de curva pechada. Consideramos a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(t) = (\cos(t), 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin(t))$, cuxa traza é unha elipse centrada no punto $(0, 1)$ con semieixo maior de lonxitude 1 e semieixo menor de lonxitude $\frac{1}{2}$.



Observamos que cúmprese que $\alpha(0) = (1, 1) = \alpha(2\pi)$. Ademáis, grazas ao feito de que as funcións seno e coseno son periódicas de período 2π , podemos deducir que $\forall c > 2\pi, \alpha(c) = \alpha(0 + (c - 2\pi))$ e que $\forall d < 0, \alpha(d) = \alpha(2\pi - (0 - d))$. En consecuencia, podemos afirmar que α é unha curva pechada de período 2π . En concreto, α é unha curva que representa o percorrido dunha elipse un número infinito de veces.

Agora, apoiándonos na *Definición 1.13* do tema 1, a cal establece o significado da distancia dunha curva entre dous puntos da súa traza, vamos introducir a noción de lonxitude dunha curva pechada. Esta será simplemente a lonxitude do percorrido que hai que levar a cabo para dar unha volta enteira á traza de dita curva.

Definición 2.4. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva pechada tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$, de período $b - a$. Entón definimos a lonxitude da curva α como $L_\alpha := \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$.

Notación 2.5. Tras expoñer a *Definición 2.4* xa coñecemos dous conceptos que conteñen a palabra "lonxitude" na súa denominación. Polo tanto é un bo momento para remarcar que, se estamos a traballar cunha curva pechada, falamos de "lonxitude" para referirnos á distancia que hai que percorrer entre dous pasos consecutivos por un mesmo punto da súa traza. Por outro lado, cando estemos a traballar cunha curva α calquera, xa sexa pechada ou non, para referirnos á distancia existente entre dous puntos distintos da súa traza, por exemplo u e w , usamos a expresión "lonxitude de α entre os puntos u e w ".

Corolario 2.6. *Da definición anterior pódese concluír que, se α é unha curva nas condicións xa mencionadas e ademáis está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, entón a lonxitude de α coincide co seu período.*

Isto suxírenos que o concepto de lonxitude dunha curva pechada podería redefinirse como, simplemente, o período da súa reparametrización polo parámetro lonxitude de arco.

Agora vamos introducir o concepto de *curva simple*, o cal é unha xeralización do concepto de *punto simple*.

Definición 2.7. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva. Dicimos que α é unha curva simple se se cumpre algún dos seguintes requisitos:

1. Todos os puntos da traza de α son puntos simples.
2. α é unha curva pechada de período p tal que, se $\exists u, w \in I$ con $u < w$ e $\alpha(u) = \alpha(w)$, entón necesariamente tense que $w = u + n \cdot p$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.8. Notemos entón que, se α é unha curva non pechada, tense que α é simple $\iff \alpha$ é inxectiva.

Por outra parte, se α é unha curva pechada, tense que α é simple \iff existe $J \subset I$ un subintervalo de I tal que $\alpha(J) = \alpha(I)$ e α é inxectiva en J .

Agora que coñecemos os conceptos de curva simple e curva pechada, podemos comezar a falar da noción de *interior* dunha curva. Cando temos unha curva pechada e simple, α , podemos identificar unha rexión acotada de \mathbb{R}^2 como o *interior* de α . Isto é grazas ao *Teorema de Jordan-Schönflies*, o cal afirma que toda curva pechada e simple divide \mathbb{R}^2 en dúas compoñentes conexas disxuntas tal que as súas fronteiras son a traza de α e tal que unha destas compoñentes está acotada e a outra non.

Definición 2.9. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva pechada e simple. Entón, a compoñente conexas acotada de \mathbb{R}^2 que xera α ao aplicarlle o *Teorema de Jordan-Schönflies* recibe o nome de *interior* de α .

Este concepto pode ser expresado dunha maneira máis sinxela como a área que encerra unha curva que cumpre esas características. Isto axuda a ver o porqué da condición de que a curva sexa simple. Se por exemplo consideramos o trevo de catro follas (visto no *Exemplo.1.11* do capítulo 1) definido en \mathbb{R} , que é unha curva pechada pero non simple, observamos que non se lle podería aplicar o *Teorema de Jordan-Schönflies*. Isto é porque esta curva non divide \mathbb{R}^2 en dúas compoñentes conexas, senón en cinco, das cales catro están acotadas. Resulta entón bastante intuitivo que non podemos falar do concepto de *interior* nun caso así.

Antes de expoñer o próximo concepto, lembramos que na *Definición 1.8* do Tema 1 introducimos a recta tanxente a unha curva regular nun punto da súa traza. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é unha curva regular e $\alpha(t)$ é un punto da súa traza, entón a recta tanxente a α en $\alpha(t)$ é a recta $\lambda(a) = \alpha(t) + a \cdot \alpha'(t)$.

Pero agora xa coñecemos o concepto de vector normal unitario a unha curva nun punto da súa traza. Polo tanto, estamos en condicións de establecer a seguinte equivalencia: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é un punto da recta tanxente a α en $\alpha(t) \iff \langle (x, y) - \alpha(t), V_2(t) \rangle = 0$. Isto dedúcese rapidamente do feito de que $V_1(t)$ é ortogonal a $V_2(t)$.

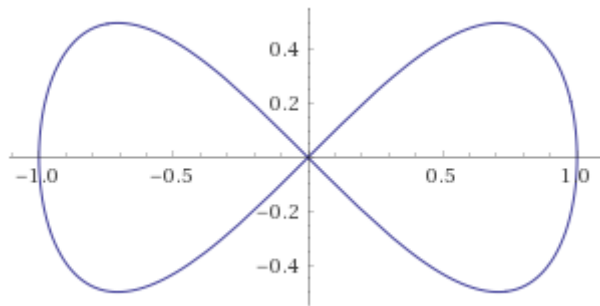
Teñamos agora en conta que toda recta de \mathbb{R}^2 induce dous semiplanos pechados, A e B , tal que a súa intersección é a propia recta e a súa unión é \mathbb{R}^2 .

Así, se temos unha curva α e un punto da súa traza $\alpha(t)$, podemos considerar os conxuntos $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \langle (x, y) - \alpha(t), V_2(t) \rangle \leq 0\}$ e $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \langle (x, y) - \alpha(t), V_2(t) \rangle \geq 0\}$. Estas premisas motivan a seguinte definición.

Definición 2.10. Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular. Entón dicimos que α é unha curva convexa se $\forall t \in I$ cúmprese que $\alpha(I) \subset A$ ou $\alpha(I) \subset B$ tal que A e B son os semiplanos de \mathbb{R}^2 asociados á recta tanxente a α en $\alpha(t)$ anteriormente descritos.

Máis informalmente, diremos que unha curva é convexa se, ao considerar calquer punto da súa traza, tense que a totalidade da mesma queda contida a un dos lados da recta tanxente á curva nese punto.

Exemplo 2.11. A curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada como $\alpha(t) = (\sin(t), \sin(t) \cdot \cos(t))$ recibe o nome de *figura oito*. Veremos que esta curva non é convexa.



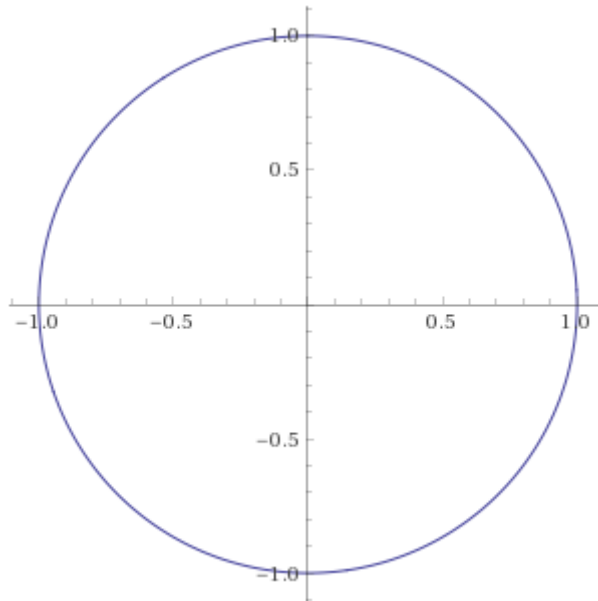
Resulta moi intuitivo visualizar xeometricamente que existen moitos puntos da traza de α tal que a recta tanxente á curva neses puntos deixa puntos da traza a ambos lados. Vexámolo formalmente cun contraexemplo concreto:

Tense que $\alpha'(t) = (\cos(t), \cos^2(t) - \sin^2(t))$. Consideremos os puntos da súa traza $\alpha(0) = (0, 0)$, $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$, $\alpha(\frac{3\pi}{2}) = (-1, 0)$. Verifícase que $V_1(0) = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \implies V_2(0) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Agora podemos comprobar que $\langle \alpha(\frac{\pi}{2}) - \alpha(0), V_2(0, 0) \rangle = \langle (1, 0) - (0, 0), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$ e que $\langle \alpha(\frac{3\pi}{2}) - \alpha(0, 0), V_2(0, 0) \rangle = \langle (-1, 0) - (0, 0), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. En consecuencia,

sabemos que a cada lado da recta tanxente a α en $(0, 0)$ existe como mínimo un punto da traza de α .

Exemplo 2.12. Un dos exemplos máis sinxelos de curva convexa que podemos mencionar é o dunha circunferencia. Consideremos entón a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada como $\alpha(t) = (\text{sen}(t), \cos(t))$.



Tense que $\alpha'(t) = (\cos(t), -\text{sen}(t))$. Consideremos un punto arbitrario da traza de α , da forma $\alpha(t_0) = (\text{sen}(t_0), \cos(t_0))$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Polo tanto $V_1(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|} = \frac{(\cos(t_0), -\text{sen}(t_0))}{1} = (\cos(t_0), -\text{sen}(t_0)) \implies V_2(t_0) = (\text{sen}(t_0), \cos(t_0)) = \alpha(t_0)$. Así, se agora tomamos outro punto arbitrario da traza de α , da forma $\alpha(t_1) = (\text{sen}(t_1), \cos(t_1))$ para algún $t_1 \in \mathbb{R}$, cúmprese que $\langle \alpha(t_1) - \alpha(t_0), V_2(t_0) \rangle = \langle (\text{sen}(t_1), \cos(t_1)) - (\text{sen}(t_0), \cos(t_0)), (\text{sen}(t_0), \cos(t_0)) \rangle = \langle (\text{sen}(t_1), \cos(t_1)), (\text{sen}(t_0), \cos(t_0)) \rangle - \langle (\text{sen}(t_0), \cos(t_0)), (\text{sen}(t_0), \cos(t_0)) \rangle = \langle (\text{sen}(t_1), \cos(t_1)), (\text{sen}(t_0), \cos(t_0)) \rangle - 1 = \text{sen}(t_1) \cdot \text{sen}(t_0) + \cos(t_1) \cdot \cos(t_0) - 1$.

Como a aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = \text{sen}(y) \cdot \text{sen}(x) + \cos(y) \cdot \cos(x)$, está acotada superiormente por 1, deducimos que $\langle \alpha(t_1) - \alpha(t_0), V_2(t_0) \rangle \leq 0 \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. Finalmente, como a elección dos puntos da traza da curva, $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_1)$, foi arbitraria, podemos concluir que a recta tanxente a α en calquera dos puntos da súa traza, deixa a totalidade da mesma a un dos lados de dita recta. É dicir, α é unha curva convexa.

Capítulo 3

Teorema dos Catro Vértices

Neste capítulo probaremos un teorema que está historicamente ligado á noción de convexidade. Falamos do *Teorema dos catro vértices*, o cal afirma que a aplicación curvatura dunha curva pechada, simple e convexa posúe polo menos catro extremos relativos. Este resultado foi inicialmente demostrado en 1909 polo matemático indio Mukhopadhaya para curvas pechadas, simples e convexas. Posteriormente, en 1912, o teorema foi probado polo alemán Kneser prescindindo da hipótese de convexidade. Co paso dos anos foron xurdindo novas demostracións, con técnicas de resolución moi variadas. Unha das aportacións máis recentes foi publicada por Robert Osserman en 1985, a cal é unha interesante proba na que se usa o concepto de círculo circunscrito. Osserman define o círculo circunscrito dun subconxunto de \mathbb{R}^2 como o círculo de menor raio que contén a dito subconxunto. Resulta ser unha demostración bastante intuitiva e de asequible interpretación xeométrica.

Neste traballo abordaremos unha proba do *Teorema dos catro vértices* asumindo a hipótese de convexidade. Para a realización de dita proba, así como para a obtención dos conceptos previos a ela, a referencia bibliográfica maioritaria foi a [1].

O primeiro que faremos será demostrar un lema que será útil para levar a cabo a proba do teorema dos catro vértices.

Lema 3.1. *Sexa $\alpha : [m, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva plana, pechada e parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, a cal notamos como segue $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Entón cúmprese que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \int_m^n ((a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c) \cdot \chi'(t)) dt = 0$, onde χ' é a derivada da función curvatura de α .*

Demostración. Tense que $\int_m^n \chi'(t) dt = [\chi(t)]_{t=m}^{t=n} = \chi(n) - \chi(m)$. Como α é unha curva pechada $\implies \chi(n) = \chi(m) \implies \chi(n) - \chi(m) = 0$, e polo tanto deducimos que $\int_m^n \chi'(t) dt = 0$. Por outra banda, aplicando integración por partes, obtense que $\int_m^n (x(t) \cdot \chi'(t)) dt = [x(t) \cdot \chi(t)]_{t=m}^{t=n} - \int_m^n (x(t))' \cdot \chi(t) dt$. Como α é unha curva pechada, sabemos que $x(m) \cdot \chi(m) =$

$x(n) \cdot \chi(n)$, e xa que logo deducimos que $\int_m^n (x(t) \cdot \chi'(t)) dt = -\int_m^n (x(t)' \cdot \chi(t)) dt$. Grazas ás fórmulas de Frenet (véxase a *Proposición 1.29* do capítulo 1) sabemos que $\alpha''(t) = \chi(t) \cdot V_2(t) \implies (x''(t), y''(t)) = \chi(t) \cdot (-y'(t), x'(t)) \implies y''(t) = \chi(t) \cdot x'(t) \implies -\int_m^n (x(t)' \cdot \chi(t)) dt = -\int_m^n y''(t) dt = -[y'(t)]_{t=m}^n$. Novamente, como α é unha curva pechada, tense que $y'(n) = y'(m) \implies y'(n) - y'(m) = 0 \implies -\int_m^n (x(t)' \cdot \chi(t)) dt = 0 \implies \int_m^n (x(t) \cdot \chi'(t)) dt = 0$.

Unha serie de argumentos análogos aos anteriores permiten demostrar que $\int_m^n (y(t) \cdot \chi'(t)) dt = 0$.

En consecuencia, podemos concluir que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ cúmprese que $\int_m^n ((a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c) \cdot \chi'(t)) dt = a \cdot \int_m^n (x(t) \cdot \chi'(t)) dt + b \cdot \int_m^n (y(t) \cdot \chi'(t)) dt + c \cdot \int_m^n (\chi'(t)) dt = 0$

□

Teorema 3.2. Teorema dos catro vértices

Sexa $\alpha : [m, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva pechada, simple e convexa da forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Entón a función curvatura de α , $\chi(t)$, ten polo menos catro extremos relativos (ou, equivalentemente, α ten polo menos catro vértices).

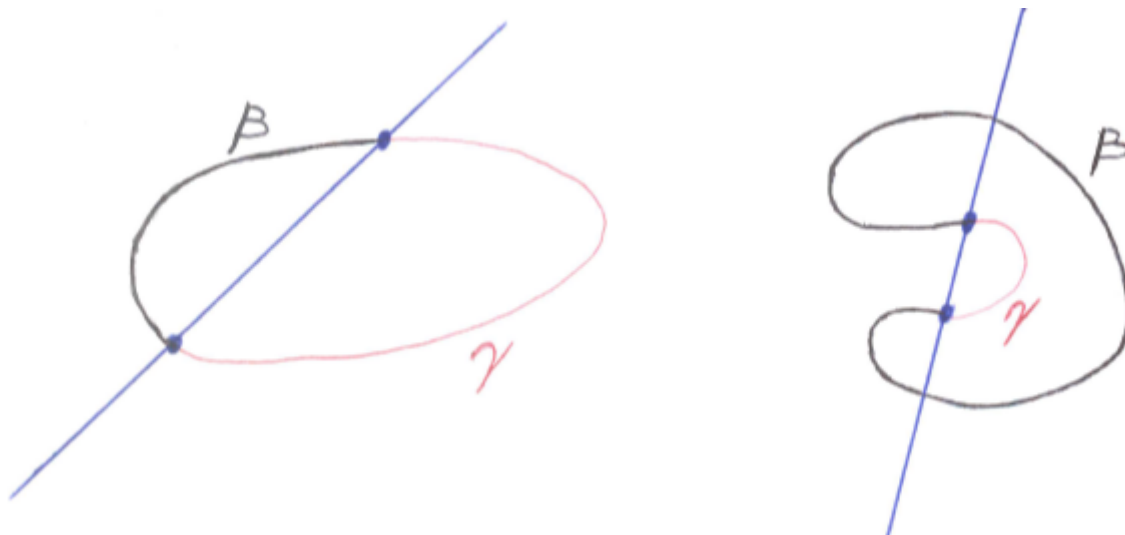
Demostración. Supoñemos, sen perda de xeralidade, que α está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Facendo uso da *Definición 1.28* do capítulo 1, lembramos que $\chi(t) = \langle V_1'(t), V_2(t) \rangle$. Como $V_1'(t)$ e $V_2(t)$ son aplicacións continuas, tense que $\chi(t)$ tamén é unha aplicación continua. Polo tanto, por ser χ unha aplicación continua no intervalo pechado $[m, n] \implies \chi$ alcanza o seu máximo e o seu mínimo en $[m, n]$. Así, xa temos dous vértices.

Supoñamos que ditos extremos da función curvatura son alcanzados nos correspondentes puntos da traza de α , $\alpha(t_1) = a_1$ e $\alpha(t_2) = a_2$. Consideremos a recta de \mathbb{R}^2 que contén aos puntos a_1 e a_2 , e designémola como W . Consideremos tamén os segmentos de curva que determinan os puntos a_1 e a_2 excluindo os extremos, é dicir, os seguintes segmentos abertos da curva α : $\gamma := \{\alpha(t)/t \in (t_1, t_2)\}$ e $\beta := \{\alpha(t)/t \in [m, n] \setminus [t_1, t_2]\}$.

Supoñamos que γ contén puntos a ambos lados de W . Como γ é un subconxunto conexo da traza de α , entón necesariamente $\exists t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $\alpha(t_0) \in W$. Polo tanto, existen polo menos tres puntos da traza de α que pertencen tamén á recta W : $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$ e $\alpha(t_0)$. Supoñamos sen perda de xeralidade que, destes tres puntos contidos en W , o punto intermedio é $\alpha(t_0)$. Dado que α é unha curva convexa, a recta tanxente a α en $\alpha(t_0)$ deixa toda a traza de α a un dos lados de dita recta. En consecuencia, tense que necesariamente a recta tanxente a α en $\alpha(t_0)$ é W , xa que calquera outra recta que pasa por $\alpha(t_0)$ deixa $\alpha(t_1)$ a un lado e $\alpha(t_2)$ a outro. Isto entra en contradicción coa suposición que fixemos anteriormente a cerca de que γ contén puntos a ambos lados de $W \implies \gamma$ posee puntos a

un único lado da recta W . Un razoamento análogo permite comprobar que β posee puntos a un único lado da recta W . Usando novamente a hipótese de convexidade sobre a curva α , deducimos que γ está contido nun dos semiplanos xerados por W e β está contido no outro. É dicir, se $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ é a ecuación da recta W , entón podemos supoñer, sen perda de xeralidade, que γ está contido no semiplano $a \cdot x + b \cdot y + c \geq 0$ e β está contido no semiplano $a \cdot x + b \cdot y + c \leq 0$.

A modo de exemplo, na seguinte imaxe visualizamos dúas curvas pechadas e simples. A primeira é convexa, e polo tanto cumpre que a recta que une dous puntos calesquera da súa traza divide a curva en dous segmentos, un en cada semiplano xerado por dita recta. A segunda non cumpre esa propiedade, isto débese a que non é convexa.



Supoñamos agora que $\chi(t)$ non ten máis extremos relativos. En tal caso, os únicos extremos relativos de $\chi(t)$ en $[m, n]$ son o seu máximo e o seu mínimo, os cales, como xa vimos, delimitan os segmentos de curva γ e β . Isto implica que $\chi'(t)$ ten signo constante ao longo de γ e de β , sendo ademáis positivo nun dos ditos segmentos e negativo no outro. Distinguimos entón dous casos:

1. Caso 1: $\chi'(t)$ ten signo positivo en γ e negativo en β

Tense que $\int_m^n ((a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c) \cdot \chi'(t)) dt = \int_\gamma ((a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c) \cdot \chi'(t)) dt + \int_\beta ((a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c) \cdot \chi'(t)) dt$, e como $\chi'(t) > 0$ en γ , $\chi'(t) < 0$ en β , γ esta contida no semiplano $a \cdot x + b \cdot y + c \geq 0$ e β está contida no semiplano $a \cdot x + b \cdot y + c \leq 0 \implies \int_m^n ((a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c) \cdot \chi'(t)) dt \geq 0$. Ademáis, como existen puntos de γ da forma $(x(t), y(t))$ tal que $a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c > 0 \implies \int_m^n ((a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c) \cdot \chi'(t)) dt > 0$, chegando así a unha contradición co *Lema 4.1*.

2. **Caso 2:** $\chi'(t)$ ten signo negativo en γ e positivo en β

Aplicando unha serie de razoamentos análogos aos do caso anterior, chegamos a que $\int_m^n ((a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c) \cdot \chi'(t)) dt < 0$, obtendo tamén unha contradición co *Lema 4.1*.

Polo tanto temos que a hipótese de que $\chi(t)$ non ten máis extremos relativos é falsa $\implies \chi(t)$ ten polo menos tres puntos extremos. Isto implica que $\chi'(t)$ é unha aplicación periódica de período $n - m$ que cambia de signo polo menos tres veces en $[m, n]$. Logo podemos concluir que, necesariamente, $\chi'(t)$ cambia de signo unha cuarta vez en $[m, n] \implies \chi(t)$ ten un cuarto extremo relativo. En consecuencia, α ten como mínimo catro vértices. \square

Observación 3.3. Nótese que, a pesar de que o enunciado clásico do teorema só afirma a existencia de como mínimo catro vértices, grazas ao último argumento usado nesta demostración tamén podemos concluir inmediatamente que o número de vértices debe ser par.

Unha aplicación práctica do teorema dos catro vértices pódese ver na cinemática: imaxinemos un obxecto de volume desprezable e bidimensional a efectos prácticos, o cal está delimitado por unha curva simple, pechada e convexa, α . Se este obxecto rodase por un plano horizontal mediante un movemento rectilíneo e desacelerado polo efecto do rozamento, entón grazas ao teorema dos catro vértices sabemos que deberían existir polo menos catro puntos da traza de α nos que o movemento podería rematar. Isto débese a que un vértice de α é un punto no que a súa curvatura pasa de crecer a decrecer ou viceversa, é dicir, un posible punto de equilibrio para o movemento.

Capítulo 4

Desigualdade isoperimétrica

Neste cuarto tema veremos un teorema con moita historia, cuxas motivacións teñen uns 2000 anos de antigüidade e que resposta á seguinte pregunta: ¿de todas as figuras planas que teñen o mesmo perímetro, cal abarca unha maior área? ou, en termos máis acordes á nosa nomenclatura ¿de todas as curvas planas pechadas que teñen a mesma lonxitude, cal ten un interior que cubre máis superficie? Estamos a falar da *Desigualdade isoperimétrica*. Existe unha lenda que recobre dunha especial beleza e interese o problema isoperimétrico. Segundo a mitoloxía, durante o século IX a.C. a irmá do rei da cidade de Tiro, Elisa de Tiro, viuse forzada a fuxir da cidade por causa dun conflito entre o seu irmán e o seu marido, o cal rematou coa morte deste último. Exiliouse xunto cun séquito de fieis sen un rumbo fixo. Finalmente chegaron ata unha tribu libia do norte de África, onde solicitou que se lle concedera a ela e aos seus fieis unhas terras nas que poder asentarse. O rei daquela tribu, de nome Jarbas, decidiu darlle a Elisa a pel dun boi, dicíndolle que lle concedería a extensión de terreo que fose capaz de delimitar usando a pel do animal. Segundo a lenda, Elisa dividiu a pel do animal en tiras moi finas e, co fin de abarcar a maior área posible, usounas para formar unha gran circunferencia. Desta forma, Elisa tería obtido os terreos suficientes como para formar unha nova cidade, a cal bautizaría como Cartago, e da cal sería nomeada raíña, baixo o novo nome de Dido.

Noutras palabras, o que esta interesante lenda van a dicir é que a raíña Dido tivo que enfrontarse á desigualdade isoperimétrica. Ademais, segundo afirman as demostracións que hoxe en día coñecemos, Dido deu coa solución.

Non obstante, e a pesar de que este problema xa foi analizado polos gregos antigos, non se acadou unha solución rigurosa ata finais do século XIX. Foi nese século cando o suízo Jakob Steiner publicou varias probas da desigualdade isoperimétrica, todas elas puramente xeométricas. Non obstante, os seus traballos foron duramente criticados por outros matemáticos da época por estar incompletos. Steiner non probou que de todas as figuras planas

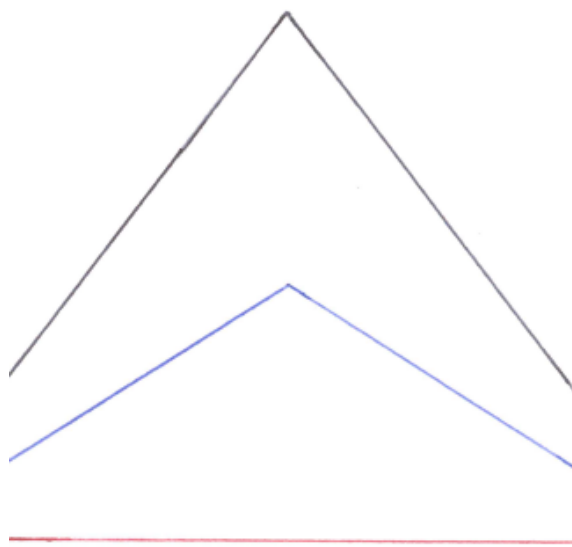
cun perímetro común, debe haber unha que encerre unha maior área. Simplemente demostrou que, de existir unha figura verificando isto último, necesariamente debía ser unha circunferencia. É dicir, deu por sentado que o problema isoperimétrico debía ter solución. Non se acadou unha solución completa ata que, varias décadas despois, o alemán Karl Weierstrass expuxo unha proba do problema usando o cálculo variacional.

As ideas xeométricas usadas por Steiner nas súas probas do problema isoperimétrico encaixan moi ben na natureza deste traballo. Polo tanto, o que faremos para demostrar a desigualdade isoperimétrica será completar unha das súas probas, algo sinxelo grazas as ferramentas de análise que temos á nosa disposición hoxe en día. Para profundizar nos conceptos deste capítulo aconséllase consultar a referencia bibliográfica [4].

Procedamos a enunciar algunhas definicións e resultados previos á demostración.

Definición 4.1. Sexa $[a, b]$ un intervalo de \mathbb{R} . Sexan $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dúas curvas. Podemos definir a curva intermedia entre α e β como $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \frac{\alpha(t) + \beta(t)}{2}$.

Na seguinte imaxe vemos un exemplo de curva intermedia. Nela, a curva representada en azul é a curva intermedia entre as curvas representadas en negro e en vermello.



Agora veremos unha proposición que usaremos na demostración da desigualdade isoperimétrica. Esta ven a dicir que, dadas dúas curvas α e β e a súa curva intermedia, γ , todas elas definidas nun intervalo $[a, b]$, entón tense a lonxitude de γ entre os seus extremos é menor ou igual que a media das lonxitudes de α e β nos seus extremos. Vexámolo formalizado:

Proposición 4.2. *Sexa $[a, b]$ un intervalo de \mathbb{R} . Sexan $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dúas curvas. Sexa γ a curva intermedia entre α e β . Entón tense que $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \frac{\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt + \int_a^b \|\beta'(t)\| dt}{2}$. A igualdade dáse se e soamente se α é unha traslación de β .*

Demostración. Supoñamos sen perda de xeralidade que α e β están parametrizadas polo parámetro lonxitude de arco, polo tanto $\|\alpha'(t)\| = 1 = \|\beta'(t)\|$.

Demostrar a desigualdade resulta inmediato xa que $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{\alpha'(t) + \beta'(t)}{2} \right\| dt = \frac{\int_a^b \|\alpha'(t) + \beta'(t)\| dt}{2}$ e aplicando as propiedades das normas obtemos o resultado buscado.

A igualdade dáse se e soamente se $\frac{\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt + \int_a^b \|\beta'(t)\| dt}{2} = \frac{\int_a^b \|\alpha'(t) + \beta'(t)\| dt}{2} \iff \int_a^b \|\alpha'(t)\| + \|\beta'(t)\| dt = \int_a^b \|\alpha'(t) + \beta'(t)\| dt \iff \int_a^b 2 dt = \int_a^b \|\alpha'(t) + \beta'(t)\| dt \iff 2 \cdot (b - a) = \int_a^b \|\alpha'(t) + \beta'(t)\| dt \iff \|\alpha'(t) + \beta'(t)\| = 2$. Como $\alpha'(t)$ e $\beta'(t)$ son vectores unitarios, cúmprese que $\|\alpha'(t) + \beta'(t)\| = 2 \iff \alpha'(t) = \beta'(t)$. Logo temos que $\forall t \in [a, b]$ os vectores tanxentes das curvas α e β , é dicir, $\alpha'(t)$ e $\beta'(t)$, coinciden $\implies \alpha$ é unha traslación de β . □

O seguinte resultado é un corolario inmediato do Teorema de Green. Vámolo precisar para finalizar a proba da desigualdade isoperimétrica.

Proposición 4.3. *Sexa $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva pechada e simple da forma $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. Entón tense que a área abarcada polo seu interior é $\frac{1}{2} \cdot \int_0^l \alpha_1(t) \cdot \alpha_2'(t) - \alpha_2(t) \cdot \alpha_1'(t) dt$*

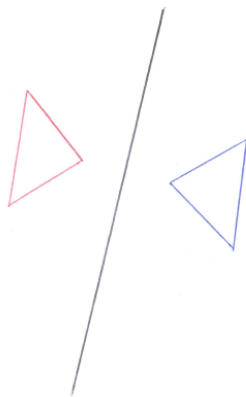
Lembramos agora que unha isometría de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 é unha aplicación continua e bixectiva que conserva as distancias. Isto quere dicir que a imaxe dunha curva por unha isometría será outra curva de igual lonxitude que a curva orixinal. En todas as demostracións que Steiner levou a cabo sobre a desigualdade isoperimétrica, usou como ingrediente principal unha isometría concreta: a simetría axial respecto dunha recta. A interpretación xeométrica de dito concepto é bastante sinxela. Se consideramos unha recta, W , a aplicación simetría axial respecto de W leva un punto no seu correspondente "punto reflexo respecto de W ". É dicir, dado un punto x , a súa imaxe é o resultado de trasladar dito punto na dirección do vector normal a W cun módulo equivalente ao dobre da distancia de x a W . Formalizamos dito concepto na seguinte definición.

Definición 4.4. *Sexa W unha recta de \mathbb{R}^2 que pasa polo punto $b = (b_1, b_2)$ e que ten vector director unitario $d = (d_1, d_2)$. Definimos a aplicación simetría axial respecto de W como $S((x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$ se $(x_1, x_2) \in W$, $S((x_1, x_2)) = (x_1, x_2) + (-d_2, d_1) \cdot 2 \cdot (x_1 d_2 - b_1 d_2 - x_2 d_1 + b_2 d_1)$ se $(x_1, x_2) \notin W$.*

Observación 4.5. É un sinxelo exercicio comprobar que a anterior definición verifica a intuición xeométrica que antes establecimos:

Sexa W a recta que pasa por (b_1, b_2) e ten por vector director (d_1, d_2) , a cal parametrizamos así: $\lambda(s) = (b_1, b_2) + s \cdot (d_1, d_2)$. Sexa T a recta que pasa por un punto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e ten por vector director $(-d_2, d_1)$ (é dicir, o vector normal a d), a cal parametrizamos así: $\beta(t) = (x_1, x_2) + t \cdot (-d_2, d_1)$. A intersección entre estas dúas rectas dáse cando, para uns certos $s, t \in \mathbb{R}$, $(b_1, b_2) + s \cdot (d_1, d_2) = (x_1, x_2) + t \cdot (-d_2, d_1) \iff (b_1 + s \cdot d_1, b_2 + s \cdot d_2) = (x_1 - t \cdot d_2, x_2 + t \cdot d_1) \iff (s, s) = (\frac{x_1 - t \cdot d_2 - b_1}{d_1}, \frac{x_2 + t \cdot d_1 - b_2}{d_2}) \implies \frac{x_1 - t \cdot d_2 - b_1}{d_1} = \frac{x_2 + t \cdot d_1 - b_2}{d_2} \implies x_1 \cdot d_2 - t \cdot d_2^2 - b_1 \cdot d_2 = x_2 \cdot d_1 + t \cdot d_1^2 - b_2 \cdot d_1$, e como (d_1, d_2) é un vector unitario, tense que $t = x_1 \cdot d_2 - b_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot x_2 + b_2 \cdot d_1$. En consecuencia a intersección entre ámbalas dúas rectas é o punto $\beta(x_1 \cdot d_2 - b_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot x_2 + b_2 \cdot d_1) = (x_1, x_2) + (x_1 \cdot d_2 - b_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot x_2 + b_2 \cdot d_1) \cdot (-d_2, d_1)$. Polo tanto a distancia entre (x_1, x_2) e W é $x_1 \cdot d_2 - b_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot x_2 + b_2 \cdot d_1$. Logo xa temos que a traslación de (x_1, x_2) na dirección do vector normal a W cun módulo equivalente ao dobre da distancia entre (x_1, x_2) e W é $(x_1, x_2) + (-d_2, d_1) \cdot 2 \cdot (x_1 \cdot d_2 - b_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot x_2 + b_2 \cdot d_1)$.

Vemos na seguinte ilustración un exemplo de simetría axial dun triángulo respecto dunha recta.



Agora si, estamos en condicións de enunciar e probar o teorema que motiva este tema.

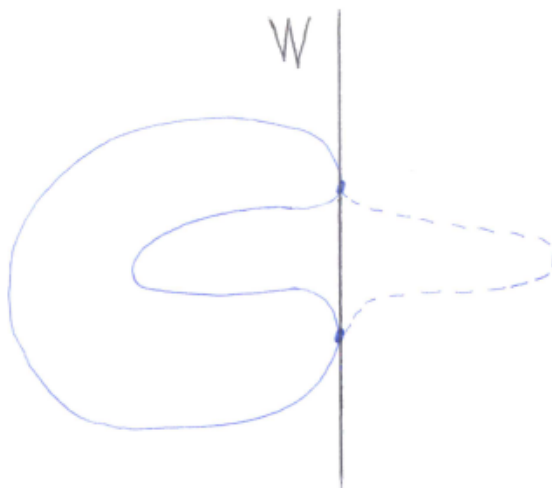
Teorema 4.6. *Desigualdade isoperimétrica*

Sexa I un intervalo de \mathbb{R} . Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva pechada e simple de lonxitude L . Sexa Δ o interior de α . Entón tense que:

1. $L^2 \geq 4 \cdot \pi \cdot A(\Delta)$, tal que $A(\Delta)$ representa a área que cobre a rexión Δ .
2. $L^2 = 4 \cdot \pi \cdot A(\Delta) \iff$ a traza de α é unha circunferencia.

Demostración. Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva pechada e simple de lonxitude "L". Podemos supoñer sen perda de xeralidade que α está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco e que $I = [0, L]$.

Designemos o interior de α como Δ . Supoñamos que α non é convexa \implies o interior de α é unha rexión de \mathbb{R}^2 non convexa $\implies \exists p, q \in Fr(\Delta)$ tal que o segmento de recta que une p e q está contido en $\{\mathbb{R}^2 \setminus \Delta\}$. Seleccionamos $t_1, t_2 \in [0, L]$ tal que $\alpha(t_1) = p, \alpha(t_2) = q$. Podemos agora considerar a nova curva $\beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\beta(t) = \alpha(t) \forall t \in [0, t_1] \cup [t_2, L]$ e $\beta(t) = S_1(\alpha(t)) \forall t \in [t_1, t_2]$, onde S_1 é a aplicación simetría axial sobre a recta que une p e q . Como S_1 é unha isometría, tense que as lonxitudes de α e β coinciden. Ademais, resulta evidente que o interior de β alberga unha área maior que o interior de α . Chegamos así á conclusión de que existe outra curva plana de lonxitude "L" cuxo interior ten unha área maior que a de α . Dito dun xeito máis xeral, para toda curva pechada e non convexa que consideremos, sempre existe outra curva pechada e convexa de igual lonxitude que alberga unha maior área. A seguinte imaxe danos unha intuición xeométrica deste feito.

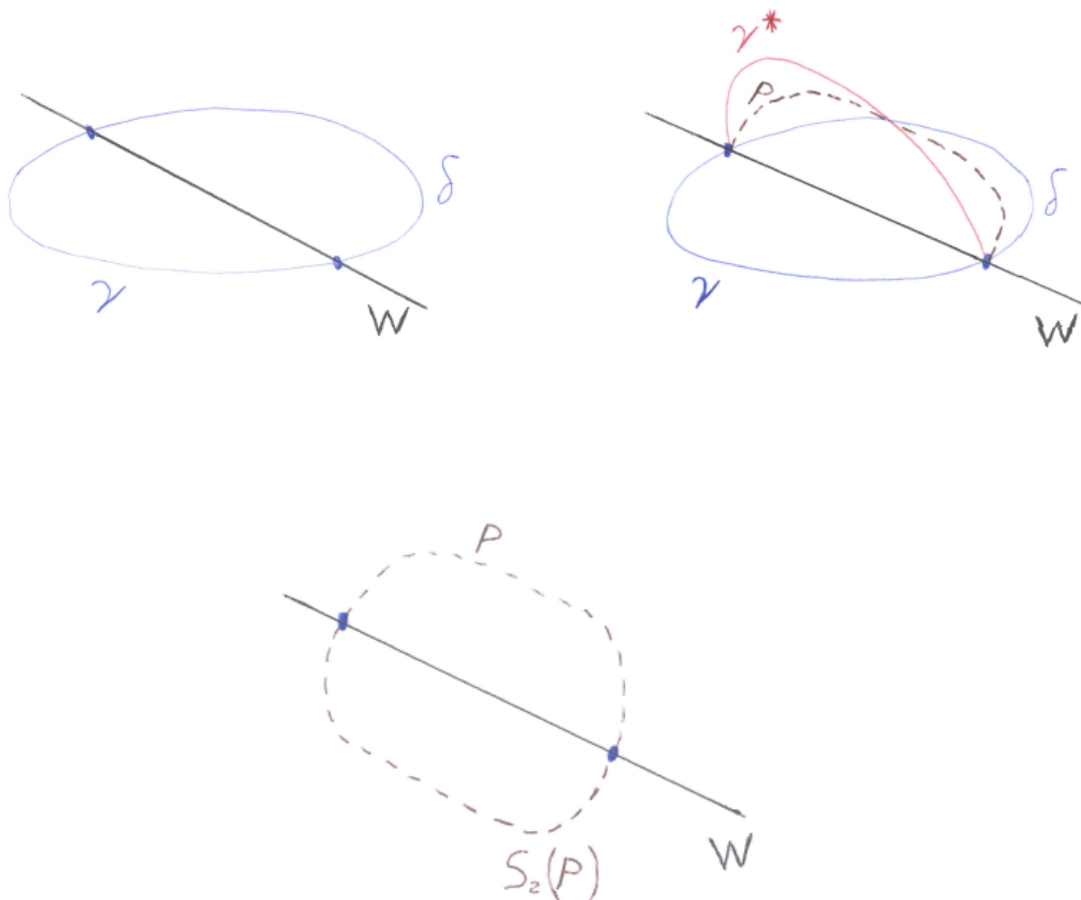


Supoñamos outra vez que $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é unha curva pechada e simple de lonxitude "L", non obstante, desta vez supoñamos que α é tamén convexa. Seleccionemos dous puntos da traza de α , r e s , tal que a lonxitude de α entre r e s sexa $\frac{L}{2}$. Eses dous puntos fraccionan α en dous segmentos de curva, γ e δ , ambos de lonxitude $\frac{L}{2}$. Consideremos a recta que pasa por r e s , e denotémola por W . Como xa vimos que α é necesariamente convexa, podemos repetir argumentos que xa usamos na proba do *Teorema dos catro vértices* para deducir que γ e δ están contidos cada un a un lado da recta W . Polo tanto a recta W divide o interior de α , Δ , en dúas rexións disjuntas de \mathbb{R}^2 , Δ_1 (a asociada a γ) e Δ_2 (a asociada a δ) tal que $A(\Delta) = A(\Delta_1) + A(\Delta_2)$.

Supoñamos agora que $A(\Delta_1) > A(\Delta_2)$. Sexa S_2 a aplicación simetría axial respecto á recta W . A imaxe de γ por S_2 é outro segmento, γ^* , de lonxitude $\frac{L}{2}$ e tal que a área comprendida entre dito segmento e W é maior que Δ_2 . Polo tanto, podemos considerar unha nova curva, cuxa traza está conformada polos segmentos γ e γ^* , e que polo tanto é pechada. Esta curva ten lonxitude $\frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L$ e posúe un interior que abarca unha área estrictamente maior que $A(\Delta)$. Chegamos así á conclusión de que existe outra curva plana de lonxitude " L " cuxo interior ten unha área maior que a de α . Unha serie de argumentos análogos axúdannos a deducir que se $A(\Delta_1) < A(\Delta_2)$, entón tamén existe outra curva plana de lonxitude " L " cuxo interior ten unha área maior que a de α . Como conclusión temos que, se consideramos unha curva pechada e convexa de lonxitude " L " que ten dous puntos da súa traza a distancia $\frac{L}{2}$ e tal que a recta que os une divide o interior de dita curva en dúas rexións de distinta área, entón existe outra curva pechada e convexa, tamén de lonxitude " L ", cuxo interior posúe unha área maior que a da curva orixinal.

Novamente, supomos que $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é unha curva pechada, simple e convexa de lonxitude " L ", non obstante, desta vez supoñemos que α tamén cumpre a propiedade de que para calesquera dous puntos da súa traza a distancia $\frac{L}{2}$, tense que a recta que os une divide o interior de α en dúas rexións de áreas equivalentes. Seleccionamos dous puntos da traza de α , r e s tal que a lonxitude de α entre r e s sexa $\frac{L}{2}$, coa mesma notación que antes, nomeamos á recta que pasa por r e s como W , e aos segmentos de curva xerados por dita recta denominámoslos γ e δ . Sexa S_2 a aplicación simetría axial respecto da recta W . Supoñamos agora que γ e δ non son simétricos respecto a W . Dito máis formalmente, supoñamos que a imaxe de γ por S_2 é outro segmento γ^* tal que $\gamma^* \neq \delta$. Polo tanto temos dúas curvas distintas, γ^* e δ , ambas con extremos en r e s , de lonxitude $\frac{L}{2}$, e que, xunto coa recta W , delimitan unha área equivalente.

Consideremos a curva intermedia entre γ^* e δ , a cal denotaremos por ρ . Resulta trivial que os extremos de ρ tamén son r e s . Por outro lado, sabemos que como a área que delimitan tanto γ^* como δ coa recta W é $\frac{A(\Delta)}{2}$, entón a área que delimita ρ con W é, tamén, $\frac{A(\Delta)}{2}$. Tendo en conta que γ^* non é unha traslación de δ , podemos aplicar a *Proposición 6.2* e así deducimos que a lonxitude de ρ é menor que $\frac{L}{2}$. Como resultado, temos que ρ e a súa simetría axial respecto a W , $S_2(\rho)$, conforman unha curva pechada e convexa cuxo interior abarca unha área de $A(\Delta)$, pero tal que a súa lonxitude é menor que $\frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L$, é dicir, é menor que a lonxitude de α . Esta nova curva, ao contrario que α , sí cumpre a propiedade de ser simétrica respecto á recta W . Ilustramos este procedemento mediante as seguintes imaxes.



Lembremos que sobre a selección dos puntos r e s só impuxemos a condición de que r estivese a unha lonxitude de $\frac{L}{2}$ de s . Nótese que a circunferencia é a única curva pechada que é simétrica respecto a todas as rectas que dividen a súa traza en dous segmentos de igual lonxitude. Polo tanto, e tendo en conta os razoamentos anteriores, podemos concluir que para calquera curva pechada de lonxitude L , existe unha circunferencia, tamén de lonxitude L , cuxo interior posúe unha área maior ou igual que a da curva considerada.

As probas que Steiner realizou no seu día chegaron ata este punto. O que resta por facer para rematar a demostración é simplemente probar que, se α é unha curva pechada e simple de lonxitude L e interior Δ tal que $L^2 = 4 \cdot \pi \cdot A(\Delta)$, entón necesariamente α é unha circunferencia. Para elo unicamente temos que usar a *Proposición 4.3*, segundo a cal $A(\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \alpha_1(t) \cdot \alpha_2'(t) - \alpha_2(t) \cdot \alpha_1'(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l -\langle \alpha(t), V_2(t) \rangle dt$. Pola desigualdade de Cauchy-Schwartz sabemos que $|\langle \alpha(t), V_2(t) \rangle| \leq \|\alpha(t)\| \cdot \|V_2(t)\|$ e a igualdade cúmprese se e soamente se $V_2(t)$ e $\alpha(t)$ son proporcionais.

Xa sabemos que α verifica $L^2 \geq 4 \cdot \pi \cdot A(\Delta)$, ou equivalentemente, $A(\Delta) \leq \frac{L^2}{4 \cdot \pi}$. Logo para que

se alcance a igualdade $L^2 = 4 \cdot \pi \cdot A(\Delta)$ é preciso que se dea a igualdade $A(\Delta) = \frac{L^2}{4\pi}$, a cal, polo que acabamos de dicir sobre a desigualdade de Cauchy-Schwartz, dáse se e soamente se $V_2(t)$ e $\alpha(t)$ son proporcionais. Polo tanto xa sabemos que \exists unha constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \cdot \alpha(t) = V_2(t) \implies \lambda \cdot V_1(t) = V_2'(t)$. Lembramos agora que grazas á *Proposición 1.29* do tema 1 sabemos que $V_2'(t) = -\chi(t) \cdot V_1(t)$. Polo tanto, no noso caso particular, tense que $-\chi(t) \cdot V_1(t) = \lambda \cdot V_1(t) \implies \chi(t) = \lambda \forall t \in [0, L]$. É dicir, a curvatura de α é constante. Polo tanto, facendo uso da *Proposición 1.35* do capítulo 1 deducimos que α é unha circunferencia, rematando así a demostración.

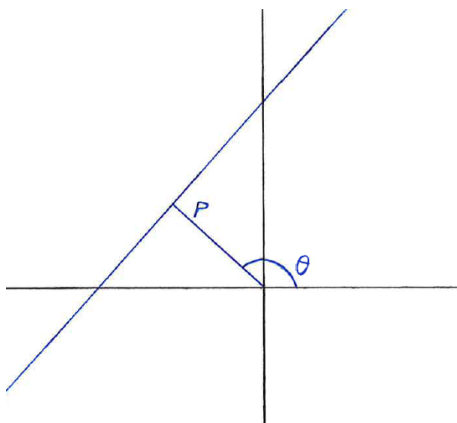
□

Capítulo 5

A fórmula de Cauchy-Crofton

Ata agora, os resultados que abordamos son do ámbito da xeometría diferencial. Neste derradeiro capítulo, sen embargo, estudaremos un teorema do ámbito da xeometría integral: a fórmula de Cauchy-Crofton. Para esta sección resaltamos como referencias bibliográficas principais a [1] e a [6].

Antes de levar a cabo a proba do teorema, temos que parametrizar a familia de todas as rectas de \mathbb{R}^2 dun xeito conveniente. Para iso, consideremos a familia de vectores unitarios $V = \{(sen(\theta), cos(\theta)) / \theta \in [0, 2\pi]\}$. Nótese que unha recta calquera de \mathbb{R}^2 , L , pode ser identificada cunha dirección, que debe ser ortogonal a dous elementos de V , u_1 e u_2 , e cunha distancia á orixe de coordenadas. Observemos agora que, se L non pasa pola orixe e consideramos as dúas semirectas $\{(0, 0) + \lambda \cdot u_1 / \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ e $\{(0, 0) + \lambda \cdot u_2 / \lambda \in \mathbb{R}^+\}$, tense que unha e só unha delas interseca a L . Polo tanto, podemos identificar univocamente L con dous parámetros: a súa distancia á orixe e, ou ben o vector u_1 , ou ben o vector u_2 . No caso de que L pase pola orixe, podemos identificar dita recta coa súa distancia á orixe (que é 0) e con calquera dos dous vectores, u_1 e u_2 . En adiante, identificaremos unha recta de \mathbb{R}^2 con dúas coordenadas, (ρ, θ) , tal que ρ é a súa distancia á orixe e θ é o vector do conxunto V que ten asociado.

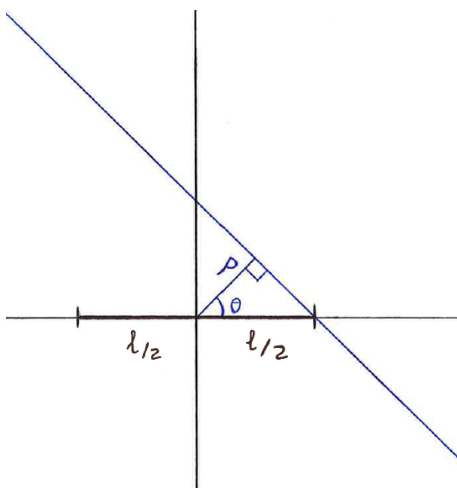


En consecuencia podemos decir que todas as rectas de \mathbb{R}^2 están no conxunto $\{(\rho, \theta) / \rho \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Agora xa estamos en condicións de probar a fórmula de Cauchy-Crofton.

Teorema 5.1. *Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva de lonxitude l . Consideremos $\eta : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{N}$ a aplicación que leva cada recta (ρ, θ) no número de veces que dita recta corta á curva α . Sexa Γ_α o conxunto de todas as rectas de \mathbb{R}^2 que se intersecan con α . Entón tense que $\int \int_{\Gamma_\alpha} \eta(\rho, \theta) d\rho d\theta = 2 \cdot l$*

Demostración. Comezamos supoñendo que α é un segmento de recta de forma que un dos seus extremos atópase no punto $(-\frac{l}{2}, 0)$ e o outro no punto $(\frac{l}{2}, 0)$. Como duas rectas poden intersecarse unha única vez ou non intersecarse, tense que $\forall (\rho, \theta) \in \Gamma_\alpha, \eta(\rho, \theta) = 1$ ou $\eta(\rho, \theta) = 0$. Grazas ao triángulo rectángulo que visualizamos na seguinte ilustración, sabemos que dase $\eta(\rho, \theta) = 1$ se $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\rho \in [0, \frac{l}{2} \cdot |\cos(\theta)|]$.



Logo temos que $\int \int_{\Gamma_\alpha} \eta(\rho, \theta) d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{l}{2} \cdot |\cos(\theta)|} 1 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{l}{2} \cdot |\cos(\theta)| d\theta = \frac{l}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta - \frac{l}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta = \frac{l}{2} \cdot 2 - \frac{l}{2} \cdot (-2) = 2l$, confirmándose así o resultado.

Teñamos en conta que se α fose outro segmento de recta de lonxitude l calquera, poderíamos transformalo no segmento anteriormente descrito mediante unha isometría. Polo tanto, o resultado confirmase para calquer segmento de recta de lonxitude arbitraria.

Supoñamos agora que α é unha curva poligonal de lonxitude l conformada por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ segmentos de recta. Polo tanto, se as lonxitudes destes segmentos son l_1, l_2, \dots, l_n , sabemos que $l_1 + l_2 + \dots + l_n = l$. Agora, grazas a aditividade das integrais, tense que $\int \int_{\Gamma_\alpha} \eta(\rho, \theta) d\rho d\theta = \int \int_{\Gamma_{\alpha_1}} 1 d\rho d\theta + \dots + \int \int_{\Gamma_{\alpha_n}} 1 d\rho d\theta$, e como xa analizamos o caso no que a nosa curva é un segmento de recta, obtemos que $\int \int_{\Gamma_{\alpha_1}} 1 d\rho d\theta + \dots + \int \int_{\Gamma_{\alpha_n}} 1 d\rho d\theta = 2 \cdot l_1 + \dots + 2 \cdot l_n = 2 \cdot (l_1 + \dots + l_n) = 2 \cdot l$. Logo xa sabemos que para unha curva poligonal calquera verificase o resultado.

Supoñamos agora que α é unha curva de lonxitude l calquera. Teñamos en conta que calquera curva pode ser interpretada como unha curva poligonal de infinitos segmentos, é dicir, calquera curva pode expresarse como o límite, en función do número de segmentos, dunha curva poligonal. Polo tanto, e en concordancia coa notación anterior, teríamos que $\int \int_{\Gamma_\alpha} \eta(\rho, \theta) d\rho d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} (\int \int_{\Gamma_{\alpha_1}} 1 d\rho d\theta + \dots + \int \int_{\Gamma_{\alpha_n}} 1 d\rho d\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot l_1 + \dots + 2 \cdot l_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2l = 2l$. En consecuencia, xa temos probado que o resultado verificase para calquera curva. \square

Nótese que, se temos unha curva α de lonxitude l , e na fórmula da Cauchy-Crofton despegamos en función de l , obtemos $l = \frac{1}{2} \cdot \int \int_{\Gamma_\alpha} \eta(\rho, \theta) d\rho d\theta$. Logo se somos capaces de calcular esa expresión obteremos a lonxitude de α . O problema é que pode resultar complicado levar a cabo o calculo da integral $\int \int_{\Gamma_\alpha} \eta(\rho, \theta) d\rho d\theta$. Sen embargo, existe un algoritmo que ven da man da matemática aplicada que ofrece unha aproximación numérica dese valor. Consiste en representar a traza da curva conxuntamente cunha familia de rectas paralelas a distancia d e coas familias de rectas resultantes de rotar as rectas orixinais $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ graos. Pódese probar que, se w é o número de interseccións de α con todas as rectas anteriores, entón $\frac{1}{2} \cdot w \cdot d \cdot \frac{\pi}{4}$ resulta ser unha aproximación do valor $\frac{1}{2} \cdot \int \int_{\Gamma_\alpha} \eta(\rho, \theta) d\rho d\theta$ de tal forma que canto máis pequeno é o valor de d , máis precisa é a aproximación. Este procedemento é usado no ámbito da bioloxía para, por exemplo, estimar a lonxitude de moléculas de ADN.

Bibliografía

- [1] M.P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Prentice-Hall, Inc. USA, 1976. Edición castelá: Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1990.
- [2] H.W. Guggenheimer. *Differential Geometry*. Dover publications Inc. New York, 1977.
- [3] M.A. Hernández e J.A. Pastor. *Un curso de Geometría Diferencial*. CSIC. Madrid, 2010.
- [4] P.J. Herrero. *La Gaceta de la RSME, Vol 15, Núm 2, Págs. 335-354*. 2012
- [5] P.R. Rodrigues. *Introdução às curvas e superfícies*. Editora da Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2001.
- [6] L.A. Santaló. *Introduction to Integral Geometry*. Hermann, Paris, 1953.
- [7] P. Ventura. *Geometría diferencial*. Instituto de Matemática pura e aplicada. Río de Janeiro, 1998.