FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Una introducción a los polinomios ortogonales reales y a la cuadratura numérica de tipo gaussiano

Eva López Troitiño

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Una introducción a los polinomios ortogonales reales y a la cuadratura numérica de tipo gaussiano

Eva López Troitiño

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Matemática Aplicada
Título: Una introducción a los polinomios ortogonales reales y a la cuadratura numérica de tipo gaussiano
Breve descrición do contido
El trabajo abordaría los siguientes puntos: I. Generalidades sobre polinomios ortogonales reales: concepto de función peso y existencia de un sistema de polinomios ortogonales respecto a una función peso. Propiedad de recurrencia. Propiedades de las raíces de los polinomios ortogonales. II. Los polinomios ortogonales de Jacobi y sus propiedades elementales. Casos particulares: los polinomios de Legendre y los polinomios de Tchebycheff. III. Concepto de fórmula de cuadratura y de orden de una fórmula de cuadratura. IV. Fórmulas de cuadratura de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto. Casos particulares: pesos de Jacobi, de Legendre y de Tchebycheff.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen VII

Introducción IX

1. Generalidades sobre polinomios ortogonales reales 1

2. Los polinomios ortogonales de Jacobi y sus propiedades elementales 9

2.1. Polinomios de Legendre 9

2.2. Polinomios de Tchebycheff 16

2.3. Polinomios de Jacobi 21

3. Fórmulas de cuadratura de tipo gaussiano 25

3.1. Nociones básicas sobre fórmulas de cuadratura 25

3.2. Fórmulas de cuadratura de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto 28

3.2.1. Fórmulas de Gauss 28

3.2.2. Fórmulas de Gauss-Radau 31

3.2.3. Fórmulas de Gauss-Lobatto 34

3.3. Ejemplos de fórmulas de cuadratura de tipo gaussiano 39

I. Función Gamma 47

Bibliografía 49

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una introducción a las diferentes propiedades de los polinomios ortogonales reales y a la cuadratura numérica gaussiana.

Empezaremos describiendo las propiedades generales de los polinomios ortogonales reales con respecto a una función peso, como la relación de recurrencia y las propiedades de sus raíces. Nos centraremos en estudiar las propiedades de los polinomios ortogonales de Jacobi y algunos de sus casos particulares (polinomios de Legendre y de Tchebycheff). Después, presentaremos nociones básicas sobre fórmulas de cuadratura y finalmente nos centraremos en las fórmulas de cuadratura de tipo gaussiano. Para comprender mejor dichas fórmulas presentaremos algúnos ejemplos de estas cuadraturas para el peso de Legendre y el de Tchebycheff.

Abstract

The objective of this work is to present an introduction to the different properties of real orthogonal polynomials and Gaussian numerical quadrature.

We will begin by describing the general properties of real orthogonal polynomials with respect to a weight function, such as the recurrence relation and the properties of their roots. We will focus on studying the properties of orthogonal Jacobi polynomials and some of their particular cases (Legendre and Tchebycheff polynomials). Then, we will present basic notions about quadrature formulas and finally we will focus on quadrature formulas of Gaussian type. In order to better understand these formulas we will present some examples of these quadratures for the Legendre and Tchebycheff weights.

Introducción

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es presentar una introducción a los polinomios ortogonales reales y a las fórmulas de cuadratura gaussianas. En particular, se amplian algunos conocimientos sobre fórmulas de cuadratura, tema cuyos conceptos han sido brevemente introducidos en la asignatura “Cálculo numérico nunha variable”.

El primer capítulo está dedicado al estudio de las propiedades de los polinomios ortogonales reales con respecto a una función peso. Para ello, empezamos definiendo el concepto de función peso y mostrando algunos ejemplos importantes. Después aplicamos el método de Gram-Schmidt, estudiado en la asignatura de “Álgebra Lineal y Multilineal”, para obtener una sucesión de polinomios ortogonales. A continuación estudiamos algunas propiedades de estos polinomios ortogonales, como la relación de recurrencia y las propiedades de las raíces.

En el segundo capítulo abordaremos propiedades específicas de los polinomios ortogonales de Jacobi. Comenzamos este capítulo estudiando los casos particulares de los polinomios de Legendre y después los de Tchebycheff. Enunciaremos y demostraremos sus propiedades elementales y a continuación enunciaremos las propiedades de los polinomios de Jacobi.

En el tercer capítulo nos centraremos en las fórmulas de tipo gaussiano. Comenzaremos este capítulo introduciendo los conceptos de fórmulas de cuadratura, fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico y grado de precisión de una fórmula de cuadratura. A continuación nos centraremos en el estudio de las fórmulas de tipo gaussiano más usuales, concretamente las fórmulas de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto. Estudiaremos su construcción, estableceremos el grado de exactitud que alcanzan y también la positividad de sus coeficientes. Para concluír veremos algunos ejemplos concretos de las fórmulas de cuadratura de tipo gaussiano para los pesos de Legendre y de Tchebycheff.

Capítulo 1

Generalidades sobre polinomios ortogonales reales

Comenzamos este capítulo introduciendo el concepto de una función peso; a continuación veremos algunos ejemplos importantes de funciones peso. Estudiaremos algunas propiedades generales de los polinomios ortogonales reales respecto a una función peso como la propiedad de la recurrencia y las propiedades de las raíces de los polinomios ortogonales.

Las referencias bibliográficas usadas en este capítulo son [2], [4] y [5].

Definición 1.1. Sea $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Se dice que una función $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función **peso** en (a,b) si satisface las siguientes condiciones:

(a) $\omega \geq 0$ en (a,b) y es medible.

(b) Existen todos los momentos $\mu_k := \int_a^b x^k \omega(x)dx, k = 0, 1, \dots$ y son finitos.

(c) Si $s(x)$ es un polinomio tal que $s(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$ y $\int_a^b s(x)\omega(x)dx = 0$, entonces $s(x) \equiv 0$.

En relación con esta definición haremos algunas observaciones:

Observación 1.2. Si $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente positiva, y además cumple la condición (b) de la definición, entonces $\omega(x)$ es una función peso en (a,b).
En efecto, la condición (a) se cumple trivialmente y la condición (c) va a resultar de la positividad de $\omega(x)$. Sea $s(x)$ un polinomio tal que $s \geq 0$ en (a,b); dado que $\omega(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, tenemos obviamente que $s(x)\omega(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Como además $\int_a^b s(x)\omega(x)dx = 0$, tenemos necesariamente $s(x)\omega(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$. Puesto que $\omega(x)$ es estrictamente positiva, concluímos que $s(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Observación 1.3. Si (a, b) está acotado se puede cambiar la condición (b) por $\int_a^b \omega(x)dx < +\infty$, es decir, que ω sea integrable en (a, b) ya que esto, junto con el hecho de que x^k, $k = 0, \ldots, n$, está acotado en (a, b), garantiza que $x^k\omega(x), k = 0, 1, \ldots$ es una función integrable en (a, b).

Observación 1.4. Si $\omega(x)$ es continua y estrictamente positiva en $[a, b]$ con a, b finitos, entonces $\omega(x)$ es una función peso en (a, b).
En efecto, en virtud de la observación 1.2 basta verificar la condición (b) y, gracias a la observación 1.3 es suficiente establecer que ω es integrable en (a, b). Esto es consecuencia de que ω es continua en el compacto $[a, b]$.

Algunos ejemplos importantes de funciones peso son:

Ejemplo 1.5. El peso $\omega(x) = 1$ en un intervalo finito (a, b).
Como $\omega(x)$ es continua y $\omega > 0$ en $[a, b]$, por la observación 1.4, $\omega(x)$ es una función peso en (a, b).
Cuando $a = -1$ y $b = 1$, este peso se llama **peso de Legendre**.

Ejemplo 1.6. El **peso de Jacobi**, $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ con $\alpha, \beta > -1$ en $(-1, 1)$.
Podemos observar que $\omega(x)$ es continua y $\omega > 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Aplicando la observación 1.2 únicamente tenemos que comprobar la condición (b), pero como $(-1, 1)$ está acotado, por la observación 1.3 basta probar que

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx < +\infty. \tag{1.1}$$

Nótese que cuando $\alpha < 0$ (respectivamente $\beta < 0$), ω tiene una singularidad en el punto 1 (resp. en el punto -1). Sea $\delta > 0$ pequeño ($\delta < 1$); dado que $\omega \in \mathcal{C}([-1+\delta, 1-\delta])$, tenemos que $\int_{-1+\delta}^{1-\delta} \omega(x)dx < +\infty$.
Primero estudiamos el intervalo $(1-\delta, 1)$.

$$\int_{1-\delta}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \leq c(\beta, \delta) \int_{1-\delta}^{1} (1-x)^\alpha dx, \quad \text{siendo } c(\beta, \delta) = \begin{cases} 2^\beta & \text{si } \beta \geq 0 \\ (2-\delta)^\beta & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

Comprobamos que $\int_{1-\delta}^{1} (1-x)^\alpha dx$ es finita cuando $\alpha > -1$:

$$\int_{1-\delta}^{1} (1-x)^\alpha dx = -\int_{\delta}^{0} u^\alpha du = \int_{0}^{\delta} u^\alpha du = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\delta} u^\alpha du = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\alpha+1}\left[\delta^{\alpha+1} - \varepsilon^{\alpha+1}\right] = \frac{\delta^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

La integral converge y por tanto

$$\int_{1-\delta}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx < +\infty.$$

Procediendo de forma análoga con el intervalo $(-1, -1+\delta)$, obtenemos que

$$\int_{-1}^{-1+\delta} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx < +\infty.$$

Por consiguiente, se satisface (1.1) y, por lo tanto $\omega(x)$ es una función peso en $(-1,1)$.
Si $\alpha=\beta=0$ tenemos el peso de Legendre y si $\alpha=\beta=-1/2$, $\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ se llama **peso de Tchebycheff**.

Ejemplo 1.7. El **peso de Laguerre**, $\omega(x)=e^{-x}$ en $(0,+\infty)$.
La función $\omega(x)$ es continua y positiva, pero en un intervalo infinito. Aplicando la observación 1.2, solo tenemos que verificar la condición (b). Comprobaremos que $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx<+\infty$ para todo $k\in\mathbb{N}$ empleando el criterio de comparación por paso al límite. Aplicando k veces la regla de L'Hôpital, obtenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k e^{-x}}{e^{-x/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^{x/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{\frac{1}{2}e^{x/2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{k!}{\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{x/2}}=0,$$

de modo que, si $\int_0^{+\infty} e^{-x/2}dx$ converge, entonces $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx$ también converge. Tenemos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x/2}dx=\lim_{M\to+\infty}\int_0^{M} e^{-x/2}dx=\lim_{M\to+\infty}\left[-2e^{-x/2}\right]_0^M=0-(-2)=2<+\infty,$$

por lo tanto, $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx<+\infty$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Concluímos así que $\omega(x)=e^{-x}$ es una función peso en $(0,+\infty)$.

Ejemplo 1.8. El **peso de Hermite**, $\omega(x)=e^{-x^2}$ en $(-\infty,+\infty)$.
Observamos que $\omega(x)$ es continua y positiva en $(-\infty,+\infty)$, entonces, por la observación 1.2, solamente tenemos que comprobar que para todo $k\in\mathbb{N}$ la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-x^2}dx$ existe y es finita. Además, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^k e^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}x^k e^{-x^2}dx,\ \forall k\in\mathbb{N}$$

por lo que basta probar que $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2}dx<+\infty$, $k=0,1,\ldots$
Se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k e^{-x^2}}{x^k e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2+x}=0,$$

por lo que, aplicando el criterio de comparación por paso al límite y dado que $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}dx$ converge, la integral $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2}dx$ también converge. Luego $\omega(x)=e^{-x^2}$ es una función peso en $(-\infty,+\infty)$.

Definimos el producto escalar $(\cdot,\cdot)$ por

$$(f,g):=\int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

siendo $f,g\in\mathcal{L}^2_\omega(a,b)=\left\{f:(a,b)\to\mathbb{R}\quad \text{medible}/\int_a^b|f(x)|^2\omega(x)dx<+\infty\right\}$
La norma asociada está dada por $||f||=\sqrt{(f,f)}$.

Definición 1.9. Se dice que dos funciones $f, g \in \mathcal{L}^2_\omega(a,b)$ son **ortogonales** si se cumple que

$$(f,g) = 0.$$

Usaremos la notación $f \perp g$ para expresar que f y g son ortogonales. De modo más general, si S es un subconjunto de $\mathcal{L}^2_\omega(a,b)$, la notación $f \perp S$ significa que $f \perp g$ para todo $g \in S$.

Denotaremos con $\mathbb{P}_n$ el espacio de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, es decir,

$$\mathbb{P}_n := \left\{ p : x \in \mathbb{R} \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n, a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n \right\}.$$

También usaremos la notación $deg(p)$ para referirnos al grado del polinomio p.

Teorema 1.10. *(Existencia y unicidad salvo una constante multiplicativa de los polinomios ortogonales)*
Existe una sucesión $\{p_n\}_{n=o}^{\infty}$ de polinomios mutuamente ortogonales con $deg(p_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $\{\tilde{p}_n\}_{n=o}^{\infty}$ es otra sucesión de polinomios mutuamente ortogonales con $deg(\tilde{p}_n) = n$, entonces para cada entero $n \geq 0$ existe una constante $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\tilde{p}_n = a_n p_n$.

Demostración.

- Existencia. Tomamos la base canónica del espacio de los polinomios, $\{1, x, x^2, \ldots\}$, y aplicamos el algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt.

  Sea $p_0 = 1$.

  Buscamos $p_1(x)$ de la forma $p_1 = x + a_{10}p_0$ y tal que cumpla $p_0 \perp p_1$; imponemos pues

  $$0 = (p_0, p_1) = (p_0, x) + a_{10}(p_0, p_0),$$

  lo que equivale a $a_{10} = -\frac{(p_0,x)}{(p_0,p_0)}$ ya que $(p_0, p_0) > 0$. Por construcción, p_1 es de grado 1 y ortogonal a p_0.

  Supongamos construída la sucesión finita de polinomios ortogonales $\{p_0, p_1, ..., p_{n-1}\}$ tal que $deg(p_j) = j$ para todo $j = 0, 1, ..., n-1$. Buscamos p_n de la forma

  $$p_n = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{ni} p_i$$

  y tal que $p_n \perp p_j$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
  Imponemos pues

  $$0 = (p_n, p_j) = (x^n, p_j) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{ni}(p_i, p_j) = (x^n, p_j) + a_{nj}(p_j, p_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dado que $(p_j, p_j) > 0$; podemos obtener los coeficientes a_{nj}. Por construción, p_n es mónico, de grado n y ortogonal al conjunto $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$.
De modo que salvo, el cálculo explícito de a_{ij} con $0 \leq j < i \leq n$ se establece la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales.

- Unicidad. Supongamos que $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{n}$ es otra sucesión de polinomios ortogonales, tal que $deg(\tilde{p}_n) = n$, para todo $n \geq 0$. Nótese que como $deg(p_j) = j$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$, el conjunto $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ es una base de $\mathbb{P}_n$. Dado que $\tilde{p}_n \in \mathbb{P}_n$, $\tilde{p}_n$ se puede escribir de la forma
$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j p_j(x).$$
Además, $\tilde{p}_n \perp p_j$ para $j = 0, 1, ..., n-1$, por lo que
$$0 = (\tilde{p}_n, p_j) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i p_i, p_j \right) = a_j (p_j, p_j) \implies a_j = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-1,$$
obteniendo así que $\tilde{p}_n(x) = a_n p_n(x)$; $a_n \neq 0$ ya que $deg(\tilde{p}_n) = n$. Con esto queda probada la unicidad (salvo una constante multiplicativa) de una sucesión de polinomios ortogonales.

$\square$

Observación 1.11. Con las notaciones del teorema 1.10, si además $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ son **ortonormales**, es decir, $||p_n|| = ||\tilde{p}_n|| = 1$, entonces $\tilde{p}_n(x) = \pm p_n(x)$.
En efecto,
$$1 = (\tilde{p}_n, \tilde{p}_n) = (a_n p_n, a_n p_n) = a_n^2 (p_n, p_n) = a_n^2 \implies a_n = \pm 1,$$
entonces concluímos que $\tilde{p}_n(x) = \pm p_n(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

Corolario 1.12. $(p_n, p) = 0$ *para todo* $p \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de que $(p_n, p_j) = 0$, para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$ y $< \{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\} >= \mathbb{P}_{n-1}$. $\square$

A continuación veremos dos propiedades generales de los polinomios ortogonales.

Teorema 1.13. *La sucesión de polinomios ortogonales mónicos* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *con* $deg(p_n) = n$ *para todo* $n \geq 0$ *verifica la relación de recurrencia*

$$p_{n+1}(x) = (x - \lambda_{n+1}) p_n(x) - \mu_{n+1} p_{n-1}(x), \; \forall n \geq 0, \quad donde \;\; p_{-1} \equiv 0, \tag{1.2}$$

$$\lambda_{n+1} = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}, \quad n \geq 0 \quad y \quad \mu_{n+1} = \frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

Demostración. Como $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales, $p_n(x)$ es un polinomio ortogonal de grado n.
Tenemos que demostrar que el polinomio mónico ortogonal de grado $n+1$, $p_{n+1}(x)$, verifica (1.2).
Dado que $p_n(x)$ también es mónico, $p_{n+1} - xp_n \in \mathbb{P}_n$ y por tanto p_{n+1} se puede expresar de la forma

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) + \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(x) = (x + a_n)p_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p_i(x).$$

Como $(p_n, p_j) = 0$ para $j = 0, 1, ..., n-1$, tenemos que

$$(p_{n+1}, p_n) = \left((x + a_n)p_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p_i, p_n \right) = (xp_n, p_n) + a_n(p_n, p_n) = 0.$$

Puesto que $(p_n, p_n) > 0$ podemos despejar a_n, obteniendo que

$$a_n = -\frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}.$$

Si $n = 0$, definiendo $\lambda_1 = -a_0$ se obtiene (1.2) (μ_1 es irrelevante ya que $p_{-1} \equiv 0$).
Supongamos pues, que $n \geq 1$. Para $j = 0, 1, ..., n-1$,

$$0 = (p_{n+1}, p_j) = \left((x + a_n)p_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p_i, p_j \right) = (xp_n, p_j) + a_n(p_n, p_j) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (p_i, p_j) =$$
$$= (p_n, xp_j) + a_n(p_n, p_j) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(p_i, p_j) = (p_n, xp_j) + a_j(p_j, p_j).$$

Si $0 \leq j \leq n-2$, xp_j tiene grado $j + 1 \leq n-1$; por tanto $(p_n, xp_j) = 0$, luego $a_j = 0$.
Consideremos ahora $j = n-1$

$$(p_n, xp_{n-1}) = (p_n, p_n) - (p_n, p_n - xp_{n-1}) = (p_n, p_n)$$

ya que $deg(p_n - xp_{n-1}) \leq n-1$. Por tanto,

$$(p_n, p_n) + a_{n-1}(p_{n-1}, p_{n-1}) = 0$$

y como $(p_{n-1}, p_{n-1}) > 0$, obtenemos

$$a_{n-1} = -\frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}.$$

Finalmente, (para $n \geq 1$) definiendo $\lambda_{n+1} := -a_n$ y $\mu_{n+1} := -a_{n-1}$ se obtiene el resultado. □

Teorema 1.14. *Sea $q(x)$ un polinomio de grado n tal que $q \perp \mathbb{P}_l$, donde $0 \leq l \leq n-1$. Entonces q tiene al menos $l + 1$ raíces de multiplicidad impar en (a, b).*

Demostración. Veamos en primer lugar que q cambia de signo en (a, b).
Si $q(x)$ es de signo positivo en (a, b), entonces (en virtud de la condición (c) de la definición de función peso)

$$(q, p_0) = \int_a^b q(x)\omega(x)dx > 0,$$

pero esto es una contradicción, ya que $(q, p_0) = 0$. Análogamente, si $q(x)$ es de signo negativo en (a, b), entonces $(q, p_0) < 0$ y se tiene una contradicción. Por consiguiente q cambia de signo en (a, b); por tanto, $q(x)$ tiene al menos una raíz de multiplicidad impar en (a, b).
Supongamos ahora que $q(x)$ sólo tiene k raíces de multiplicidad impar en el intervalo (a, b), $x_1, ..., x_k$, con $k < l + 1$.
Sea $r(x) = \prod_{j=1}^{k}(x - x_j)$, entonces

$$q(x)r(x) = q(x)(x - x_1)\cdots(x - x_k) = s_{n-k}(x)(x - x_1)^2 \cdots (x - x_k)^2,$$

donde $s_{n-k}(x)$ no cambia de signo en (a, b).
Luego

$$(q, r) = \int_a^b q(x)r(x)\omega(x)dx = \int_a^b s_{n-k}(x)\prod_{j=1}^{k}(x - x_j)^2\omega(x)dx \neq 0 \tag{1.3}$$

ya que $q(x)r(x)$ es un polinomio que no cambia de signo en (a, b) y ω es una función peso en (a, b).
Por otro lado, como $q(x)$ es un polinomio ortogonal a $\mathbb{P}_l$ y $deg(r) = k < l + 1$ tenemos que $(q, r) = 0$, en contradicción con (1.3). Por lo tanto $k = l + 1$ y las raíces de $q(x)$ son de multiplicidad impar en (a, b). □

Corolario 1.15. *Sea p_n un polinomio ortogonal de grado n con $n \geq 1$. Las raíces $x_1, ..., x_n$ de p_n son reales, simples y están en el intervalo (a, b).*

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema anterior, ya que su hipótesis se verifica con $l = n - 1$. Como además $deg(p_n) = n$, p_n tiene exactamente n raíces simples en (a, b). □

Capítulo 2

Los polinomios ortogonales de Jacobi y sus propiedades elementales

Los **polinomios de Jacobi** son los polinomios ortogonales para el peso

$$\omega(x) = (1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta} \quad \text{en el intervalo} \quad (-1,1), \quad \text{donde} \quad \alpha > -1 \ \text{ y } \beta > -1.$$

Presentaremos una serie de propiedades de los mismos, pero para mayor claridad, comenzaremos con los casos particulares de los polinomios de Legendre y después los de Tchebycheff. Demostraremos sus propiedades elementales y enunciaremos las de los de Jacobi.
Para elaborar este capítulo, hemos consultado las referencias bibliográficas [1] y [5].

2.1. Polinomios de Legendre

Definición 2.1. Los **polinomios de Legendre**, que denotaremos por $P_n(x)$, son los polinomios ortogonales entre sí con respecto a la función peso $\omega(x) = 1$ en el intervalo $(-1,1)$ tales que para todo entero $n \geq 0$, $P_n(x)$ tiene grado n y satisface $P_n(1) = 1$.

Denotaremos por k_n el coeficiente principal de $P_n(x)$.

Estos polinomios satisfacen las siguientes propiedades:

1. SIMETRÍA

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

2. ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{2.2}$$

3. FÓRMULA DE RODRIGUES

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{(1-x^2)^n\right\} \tag{2.3}$$

4. COEFICIENTE PRINCIPAL

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \tag{2.4}$$

5. NORMA

$$\int_{-1}^{1} \left(P_n(x)\right)^2 dx = \frac{2}{2n+1} \tag{2.5}$$

6. FÓRMULA DE RECURRENCIA

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \\ (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad \text{para todo } \; n \geq 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

7. EXPRESIÓN EXPLÍCITA

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}, \tag{2.7}$$

donde $\lfloor s \rfloor$ denota la parte entera de $s \in \mathbb{R}$, es decir, $\lfloor s \rfloor = max\{k \in \mathbb{Z}/k \leq s\}$.

Demostraremos estas propiedades:

Simetría.

Sea $\varphi \in P_{n-1}$ arbitrario. Como P_n es ortogonal a cualquier polinomio de grado $\leq n-1$, haciendo el cambio de variable $x = -y$, tenemos que

$$0 = \int_{-1}^{1} P_n(x)\varphi(x)dx = -\int_{1}^{-1} P_n(-y)\varphi(-y)dy = \int_{-1}^{1} P_n(-y)\varphi(-y)dy.$$

Por lo tanto, $P_n(-x)$ también es ortogonal a $\mathbb{P}_{n-1}$.

Además, por la unicidad (salvo una constante multiplicativa) del polinomio ortogonal de grado n, tenemos que

$$P_n(-x) = c_n P_n(x) \quad \text{con} \;\; c_n \in \mathbb{R}, \; c_n \neq 0. \tag{2.8}$$

Sabemos que podemos escribir $P_n(x)$ de la forma

$$P_n(x) = k_n x^n + \text{ términos de grado } \leq n-1,$$

con lo cual

$$P_n(-x) = (-1)^n k_n x^n + \text{ términos de grado } \leq n-1;$$

entonces

$$(-1)^n k_n x^n = c_n k_n x^n.$$

Por lo tanto $c_n = (-1)^n$; subtituyendo c_n en (2.8) obtenemos (2.1).

Ecuación diferencial

Sea $\varphi \in \mathbb{P}_{n-1}$ arbitrario. El polinomio $\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P_n^{'}\right\}$ tiene grado a lo sumo n.
Por otra parte, integrando por partes dos veces obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P_n^{'}\right\}(x)\varphi(x)dx &= (1-x^2)P_n^{'}(x)\varphi(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n^{'}(x)\varphi^{'}(x)dx = \\ &= -\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n^{'}(x)\varphi^{'}(x)dx = \\ &= -P_n(x)(1-x^2)\varphi^{'}(x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}P_n(x)\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\varphi^{'}\right\}(x)dx = \\ &= \int_{-1}^{1}P_n(x)\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\varphi^{'}\right\}(x)dx = 0\end{aligned}$$

ya que $deg\left(\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\varphi^{'}\right\}\right) \leq n-1$ y $P_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$.
Por lo tanto podemos escribir $\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P_n^{'}\right\}$ como

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P_n^{'}\right\} = a_n P_n, \quad a_n \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Además, como $P_n(x) = k_n x^n +$ términos de grado $\leq n-1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P_n^{'}\right\} &= \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)(nk_nx^{n-1} + \text{ términos de grado} \leq n-1)\right\} = \\ &= \frac{d}{dx}\left\{-nk_nx^{n+1} + \text{ términos de grado} \leq n)\right\} = \\ &= -n(n+1)k_nx^n + \text{ términos de grado} \leq n-1\end{aligned}$$

y comparando los coeficientes principales en (2.9), deducimos que

$$-n(n+1)k_n = a_n k_n.$$

Por lo tanto $a_n = -n(n+1)$, y substituyendo en (2.9) obtenemos la ecuación (2.2).

Fórmula de Rodrigues.

Consideramos $\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^n\right\}$, que es un polinomio de grado n. Veamos que es ortogonal a cualquier polinomio de grado $n-1$.
Sea $\varphi \in \mathbb{P}_{n-1}$ arbitrario. Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^n\right\}\varphi(x)dx &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^n\right\}\varphi(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^n\right\}\varphi^{'}(x)dx = \\ &= -\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^n\right\}\varphi^{'}(x)dx.\end{aligned}$$

Tras haber integrado por partes n veces, obtenemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^n\right\}\varphi(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n \frac{d^n\varphi}{dx^n}dx = 0$$

ya que $\frac{d^n\varphi}{dx^n} = 0$ debido a que $\varphi \in \mathbb{P}_{n-1}$.
Por lo tanto, el polinomio $\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^n\right\}$ es ortogonal a $\mathbb{P}_{n-1}$; como además tiene grado n, existe un número real b_n tal que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^n\right\} = b_n P_n(x). \tag{2.10}$$

Tenemos que $P_n(1) = 1$, por lo que $b_n = \left[\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^n\right\}\right](1)$.
Usando la fórmula de Leibnitz [1] obtenemos que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^n\right\} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}\left\{(1-x)^n\right\}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left\{(1+x)^n\right\}.$$

Observamos que $(1-x)^n$ tiene una raíz en $x=1$ de multiplicidad n, por lo tanto $\left[\frac{d^k}{dx^k}\left\{(1-x)^n\right\}\right](1) = 0$, para $k = 0, 1, ..., n-1$, y por consiguiente

$$\left[\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^n\right\}\right](1) = 2^n\left[\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^n\right\}\right](1).$$

Es fácil ver que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^n\right\} = (-1)^n n!.$$

En consecuencia, $b_n = (-1)^n 2^n n!$. Substituyendo b_n en (2.10) tenemos que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^n\right\} = (-1)^n\ 2^n\ n!\ P_n(x)$$

y despejando P_n obtenemos (2.3), como queriamos demostrar.

Coeficiente principal

Partimos de (2.3). Derivando n veces $\left(1-x^2\right)^n$ y fijándonos en el coeficiente del término de mayor grado, tenemos que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left\{(-1)^n x^{2n} + \text{ términos de grado} \leq 2n-1\right\} =$$
$$= (-1)^n\ 2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)x^n + \text{ términos de grado} \leq n-1.$$

[1] Para dos funciones f, g n veces diferenciables, la derivada de orden n cumple que

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k f}{dx^k}\frac{d^{n-k}g}{dx^{n-k}}.$$

Además, como $2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}$, obtenemos (2.4) como queriamos demostrar.

Norma

Usando (2.3) e integrando n veces por partes tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2 &= \int_{-1}^{1}P_n(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^n\right\}P_n(x)dx = \cdots = \\ &=\frac{1}{2^n\ n!}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n\frac{d^nP_n}{dx^n}dx = \frac{1}{2^n\ n!}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n k_n\ n!\ dx = \\ &=\frac{k_n}{2^n\ n!}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}\ (n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx. \qquad (2.11)\end{aligned}$$

Ahora tenemos que calcular $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx$. Usando que el integrando es una función par y haciendo el cambio $x=\cos\theta$ tenemos que

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_{\pi/2}^{0}\sin^{2n}\theta(-\sin\theta)d\theta = 2\int_{0}^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n+1}d\theta. \qquad (2.12)$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n+1}d\theta &= -\cos\theta\sin^{2n}\theta\Big|_0^{\pi/2} + 2n\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta\cos^2\theta d\theta = \\ &=2n\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta\left(1-\sin^2\theta\right)d\theta = 2n\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta - 2n\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta d\theta.\end{aligned}$$

Denotando $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta d\theta$ y despejando obtenemos

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}. \qquad (2.13)$$

Cambiando n por $n-1$, tenemos que

$$I_{n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2}$$

y remplazando en (2.13)

$$I_n = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)}I_{n-2}.$$

Reiterando el procedimiento resulta que

$$I_n = \frac{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3}I_0.$$

Por otra parte,

$$I_0 = \int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

y entonces

$$I_n = \frac{2^n\ n!}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3}. \qquad (2.14)$$

Observando que

$$(2n+1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3 = \frac{(2n+1)!}{2^n\ n!}$$

y substituyendo en (2.14), obtenemos que

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+1}\, d\theta = \frac{2^{2n}\ (n!)^2}{(2n+1)!}$$

y volviendo a (2.12), deducimos que

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^2 dx = \frac{2^{2n+1}\ (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Finalmente substituyendo este valor en (2.11) concluímos que se cumple (2.5).

Fórmula de recurrencia

Recordemos que $p_n(x)$ es el polinomio ortogonal mónico de grado n. Partiendo de la recurrencia (1.2) del capítulo anterior tenemos que

$$(xp_n, p_n) = \int_a^b xp_n^2(x)dx = 0$$

ya que el integrando es siempre es impar y debido a la simetría de P_n (y por tanto de p_n);

$$\lambda_{n+1} = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)} = 0.$$

Con lo cual (1.2) se simplifica, quedando así

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \mu_{n+1}p_{n-1}(x). \tag{2.15}$$

Obviamente $p_n(x) = \frac{P_n(x)}{k_n}$; usando esto en (2.15) tenemos que

$$\frac{P_{n+1}(x)}{k_{n+1}} = \frac{xP_n(x)}{k_n} - \mu_{n+1}\frac{P_{n-1}(x)}{k_{n-1}}. \tag{2.16}$$

Calculemos aora el valor de μ_{n+1}. Tenemos que $\mu_{n+1} = \frac{(p_n,p_n)}{(p_{n-1},p_{n-1})}$; usando de nuevo que $p_n(x) = \frac{P_n(x)}{k_n}$ y (2.5) obtenemos que

$$\mu_{n+1} = \frac{k_{n-1}^2(2n-1)}{k_n^2(2n+1)}.$$

Usando (2.4) tenemos que

$$\mu_{n+1} = \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)}.$$

Substituyendo en (2.16) y usando nuevamente (2.4) resulta

$$\frac{2^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}P_{n+1}(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}xP_n(x) - \frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)}\frac{2^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n-2)!}P_{n-1}(x).$$

Multiplicando por $\frac{(2n+1)!}{2^n(n!)^2}$ obtenemos (2.6) como queriamos demostrar.

<u>Expresión explícita</u>
Partimos de (2.3). Desarrollando $\left(1-x^2\right)^n$ por la fórmula del binomio, tenemos que

$$\left(1-x^2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{2k}.$$

Haciendo el cambio de índice $k = n-m$, obtenemos que

$$\left(1-x^2\right)^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{n-m} x^{2n-2m}.$$

Al derivar n veces, basta considerar solamente los índices m tales que $n-2m \geq 0$, ya que si $n-2m<0$, entonces $\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{2n-2m}\right\} = 0$; tenemos pues que

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^n\right\} &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{n-m} \binom{n}{n-m} (2n-2m)(2n-2m-1)\cdot\ldots\cdot(n-2m+1)x^{n-2m} = \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{n-m} \binom{n}{n-m} \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!} x^{n-2m}.\end{aligned}$$

Substituyendo en (2.3) tenemos que

$$\begin{aligned}P_n(x) =& \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{n-m} \binom{n}{n-m} \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!} x^{n-2m} = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!\, n!} x^{n-2m} = \\ =& \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}\end{aligned}$$

como queriamos demostrar.

Partiendo de $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$, y usando la fórmula de recurrencia podemos calcular sucesivamente los polinomios de Legendre. Se obtiene así la siguiente lista:

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$
- $P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$
- $P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$
- $P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$
- $P_6(x) = \frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)$

2.2. Polinomios de Tchebycheff

Consideramos ahora la función peso $\omega(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

Definición 2.2. Los **polinomios de Tchebycheff de primera especie** se definen como

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \ \forall x \in [-1, 1], \quad n \geq 0. \tag{2.17}$$

Nótese que $T_n(1) = 1$.

Veremos que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n y que estos polinomios son mutuamente ortogonales para esta función peso.

Denotamos por t_n el coeficiente principal de $T_n(x)$.

Analogamente a los polinomios de Legendre tenemos propiedades similares para los polinomios de Tchebycheff:

1. FÓRMULA DE RECURRENCIA

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

2. COEFICIENTE PRINCIPAL

$$t_0 = 1 \ \text{ y } \ t_n = 2^{n-1}, \quad \forall n \geq 1. \tag{2.19}$$

3. NORMA Y ORTOGONALIDAD

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \pi & si \quad n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & si \quad n = m \neq 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

4. ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$(1 - x^2) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0, \quad \forall n \geq 0 \tag{2.21}$$

5. FÓRMULA DE RODRIGUES

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(1 - x^2\right)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \left(1 - x^2\right)^{n - \frac{1}{2}} \right\}, \tag{2.22}$$

donde Γ denota la función gamma. (Ver Anexo I).

6. SIMETRÍA

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

Demostraremos estas propiedades:

Fórmula de recurrencia.
Consideremos las fórmulas trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\theta) &= \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta \\ \cos((n-1)\theta) &= \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta.\end{aligned}$$

Sumando y restructurando tenemos que

$$\cos((n+1)\theta) = 2\cos n\theta \cos\theta - \cos((n-1)\theta).$$

Haciendo el cambio de variable $\cos\theta = x$, tenemos que $\cos n\theta = T_n(x)$ y por tanto

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

como queriamos demostrar.

Observación 2.3. La fórmula de recurrencia implica que $T_n(x)$ es un polinomio de grado n.
Probamos esto por inducción.
$T_0(x) = 1$, que es de grado 0, y $T_1(x) = x$, que es de grado 1.
Supongamos el enunciado cierto para cualquier natural $\leq n$ y probémoslo para $n+1$.
T_{n+1} es un polinomio de grado $n+1$ ya que $deg(xT_n) = n+1$ y $deg(T_{n-1}) = n-1$.

Coeficiente principal
Para $n \geq 1$, calcularemos el valor del coeficiente principal por inducción.

- Para $n = 1$, $T_1(x) = x$; por tanto $t_1 = 1$.
- Supongamos cierto el enunciado para n, esto es, $t_n = 2^{n-1}$ y probémoslo para $n+1$. Tenemos que $T_n(x) = 2^{n-1}x^n +$ términos de grado $\leq n-1$, entonces

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x) =& 2x\left(2^{n-1}x^n + \text{ términos de grado } \leq n-1\right) - T_{n-1}(x) = \\ =& 2^n x^{n+1} + \text{ términos de grado } \leq n.\end{aligned}$$

Por lo tanto, su coeficiente principal es 2^n, concluyendo así que la propiedad (2.19) se verifica.

Norma y ortogonalidad

Calculemos
$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$
Haciendo el cambio de variable $x = \cos\theta$ tenemos que
$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{\pi}^{0} T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\frac{-\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}d\theta =$$
$$= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\frac{\sin\theta}{\sin\theta}d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta.$$
Aplicando la fórmula trigonométrica
$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}\left[\cos\left((n+m)\theta\right) + \cos\left((n-m)\theta\right)\right]$$
obtenemos que
$$\int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos\left((n+m)\theta\right)d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos\left((n-m)\theta\right)d\theta.$$
Tenemos que distinguir varios casos:

- Si $n \neq m$
$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos\left((n+m)\theta\right)d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos\left((n-m)\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m}\Bigg|_{0}^{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\sin(n-m)\theta}{n-m}\Bigg|_{0}^{\pi} = 0$$
ya que $n \pm m$ es un número entero y $\sin(k\pi) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- Si $n = m$
  - Cuando $n \neq 0$
$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos\left((n+m)\theta\right)d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos\left((n-m)\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(2n\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} 1d\theta =$$
$$= \frac{1}{4n}\sin(2n\theta)\Bigg|_{0}^{\pi} + \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}.$$
  - Cuando $n = 0$
$$\int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = \int_{0}^{\pi} 1d\theta = \pi.$$

Así pues, se verifica (2.20), como queriamos demostrar.

Como consecuencia de esta propiedad tenemos que T_n es ortogonal a T_m para $m = 0, \ldots, n-1$, por lo tanto $T_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$.

Obsérvese que $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es la única sucesión de polinomios mutuamente ortogonales tal que para todo entero $n \geq 0$, $deg(T_n) = n$ y $T_n(1) = 1$. Esta propiedad es análoga a la que usamos para definir los polinomios de Legendre, pero ahora el peso es $\omega(x) = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$.

Ecuación diferencial

Derivando (2.17) tenemos que

$$T_n'(x) = n\left(1-x^2\right)^{-1/2}\sin\left(n\arccos(x)\right); \tag{2.24}$$

derivando de nuevo, resulta

$$T_n''(x) = \frac{nx\sin\left(n\arccos(x)\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} - \frac{n^2\cos\left(n\arccos(x)\right)}{1-x^2}. \tag{2.25}$$

Usando (2.17), (2.24) y (2.25), se comprueba fácilmente que se verifica (2.21), como queriamos demostrar.

Fórmula de Rodrigues

Consideremos

$$Q_n(x) = \left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Aplicando la fórmula de Leibnitz tenemos que

$$\left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right\} = \left(1-x^2\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1+x)^{n-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(1-x^2\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)(1-x)^{n-k-\frac{1}{2}}(1+x)^{k-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)(1-x)^{n-k}(1+x)^k. \tag{2.26}$$

Por otro lado, en virtud de la propiedad $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ de la función gamma tenemos que

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)$$

y despejando obtenemos que

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}.$$

Análogamente,

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}.$$

Aplicando estas igualdades en (2.26), tenemos

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}(1-x)^{n-k}(1+x)^k \tag{2.27}$$

que es un polinomio de grado $\leq n$.
Un cálculo parecido prueba que para $0 \leq j \leq n-1$, $\frac{d^j}{dx^j}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ es una combinación lineal de $(1-x)^{n-k-\frac{1}{2}}(1+x)^{n-\frac{1}{2}-(j-k)}$, $k = 0, 1, \ldots, j$; por consiguiente

$$\left[\frac{d^j}{dx^j}\left\{\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right\}\right](\pm 1) = 0.$$

Veamos que Q_n es ortogonal a $\mathbb{P}_{n-1}$.
Sea $\varphi \in \mathbb{P}_{n-1}$ arbitrario. Integrando por partes

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\varphi(x)\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\}\varphi(x)\left(1-x^2\right)^{-1/2} dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\}\varphi(x)dx = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\}\varphi(x)\Big|_{-1}^{1} -$$
$$- \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\}\varphi^{'}(x)dx = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\}\varphi^{'}(x)dx.$$

Tras haber integrado por partes n veces, obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right\}\varphi^{'}(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{d^n\varphi}{dx^n} = 0$$

ya que $\frac{d^n\varphi}{dx^n} = 0$ debido a que $\varphi \in \mathbb{P}_{n-1}$.
Por lo tanto, $Q_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$ y como además $deg(Q_n) \leq n$ y $Q_n \not\equiv 0$, necesariamente Q_n tiene grado n y lo podemos escribir como

$$Q_n(x) = \left(1-x^2\right)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right\} = b_n T_n(x), \tag{2.28}$$

donde $b_n \in \mathbb{R}$.
Evaluando $Q_n(1)$ con ayuda de (2.27) y dado que $(1-x)^{n-k}$ se anula en $x = 1$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$, tenemos que

$$b_n = Q_n(1) = (-1)^n\, 2^n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Substituyendo b_n en (2.28), resulta

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right\} = (-1)^n\, 2^n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} T_n(x)$$

y despejando $T_n(x)$ obtenemos (2.22) como queriamos demostrar.

<u>Simetría</u>
Procedemos por inducción utilizando la fórmula de recurrencia.

El enunciado es cierto para $n = 0$ y $n = 1$, puesto que $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.
Supongamos cierto el enunciado para todo natural $\leq n$ y probémoslo para $n + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-x) =& -2xT_n(-x) - T_{n-1}(-x) = -2x(-1)^n T_n(x) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(x) = \\ =&(-1)^{n+1}\left(2xT_n(x) - T_{n+1}(x)\right) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la propiedad de simetría se verifica.

Partiendo de $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$, y usando la fórmula de recurrencia podemos calcular sucesivamente los polinomios de Tchebycheff, obteniendo así la siguiente lista:

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = 2x^2 - 1$
- $T_3(x) = 4x^3 - 3x$
- $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
- $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
- $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

2.3. Polinomios de Jacobi

Consideramos el intervalo $(-1, 1)$ y la función peso $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ donde $\alpha > -1$ y $\beta > -1$.
Para $s \in \mathbb{R}$ y k entero, $k \geq 0$, denotaremos por $\binom{s}{k}$ el coeficiente binomial dado por la fórmula

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} \quad \text{si} \quad k \geq 1, \quad \text{y} \quad \binom{s}{0} = 1.$$

Definición 2.4. Los **polinomios de Jacobi**, que denotamos por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, son los polinomios mutuamente ortogonales con respecto al peso $\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ con $\alpha > -1$ y $\beta > -1$ en el intervalo $(-1, 1)$ tales que para todo entero $n \geq 0$, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ tiene grado n y cumple la condición $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$.

Denotamos por $k_n^{(\alpha,\beta)}$ el coeficiente principal de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Los polinomios $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. FÓRMULA DE RODRIGUES

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\ n!}\,(1-x)^{-\alpha}\,(1+x)^{-\beta}\,\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}\,(1+x)^{n+\beta}\right\} \tag{2.29}$$

2. EXPRESIÓN EXPLÍCITA

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}\,(x-1)^{n-m}\,(x+1)^m \tag{2.30}$$

3. SIMETRÍA

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n\ P_n^{(\beta,\alpha)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.31}$$

4. COEFICIENTE PRINCIPAL

$$k_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n} \tag{2.32}$$

5. NORMA Y ORTOGONALIDAD

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)n!}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & si \quad n=m \ \text{ y } \ n\neq 0 \ \text{ ó } \ \alpha+\beta+1\neq 0 \\ 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} & si \qquad n=m=0 \ \text{ y } \ \alpha+\beta+1=0 \\ 0 & si \qquad\qquad n\neq m \end{cases} \tag{2.33}$$

6. ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)\,y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0, \\ y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad \forall n \geq 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

7. FÓRMULA DE RECURRENCIA

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (2n+\alpha+\beta+1)[\alpha^2-\beta^2+(2n+\alpha+ \\ +\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad \forall n \geq 0 \tag{2.35}$$

La demostración de estas propiedades se puede ver en [5].

Cuando $\alpha = \beta$ estos polinomios se denominan **polinomios ultraesféricos**. Entre ellos tenemos algunos polinomios que tienen nombres especiales:

- Cuando $\alpha = \beta = 0$, se llaman **polinomios de Legendre**; los hemos estudiado anteriormente denotándolos por $P_n(x)$.

- Cuando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, se llaman **polinomios de Tchebycheff de primera especie**. Dado que $P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(1) = \binom{n-1/2}{n} \neq 1 = T_n(1)$, obviamente $P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(1) \neq T_n(1)$, pero como ambos polinomios son de grado n y ortogonales a $\mathbb{P}_{n-1}$, en virtud del Teorema 1.10 se tiene que
$$P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) = \binom{n-1/2}{n} T_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, se llaman **polinomios de Tchebycheff de segunda especie**. Para este peso es habitual considerar la sucesión de polinomios ortogonales $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tal que para todo entero $n \geq 0$, $deg(U_n) = n$ y $U_n(1) = n+1$. En virtud del teorema 1.10, tenemos que
$$P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) = c_n U_n(x), \quad \text{con} \quad c_n = \frac{\binom{n+1/2}{n}}{n+1}.$$

Capítulo 3

Fórmulas de cuadratura de tipo gaussiano

El objectivo de este capítulo es el estudio de los conceptos de las fórmulas de cuadratura de tipo gaussiano. Previamente, introducimos los conceptos de fórmulas de cuadratura, fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico y grado de precisión de una fórmula de cuadratura. Posteriormente, estudiaremos las fórmulas de cuadratura de tipo gaussiano (fórmulas de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto), que son aquellas que para un cierto número de nodos intentan dar un grado de precisión máximo. También veremos algunos ejemplos de estas cuadraturas gaussianas, para los casos del peso de Legendre y el de Tchebycheff.
Como referencias bibliográficas hemos usado [2], [3] y [6].

3.1. Nociones básicas sobre fórmulas de cuadratura

Intentamos aproximar la integral definida

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ \omega(x)dx \tag{3.1}$$

donde $f(x)$ e una función continua en el intervalo acotado $[a, b]$ y ω es una función peso en (a, b).

Observación 3.1. Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces $f\omega \in \mathcal{L}^1(a, b)$, donde $\mathcal{L}^1(a, b) = \left\{ f : (a, b) \to \mathbb{R} \quad \text{medible}/ \int_a^b |f(x)|\omega(x)dx < +\infty \right\}$.
En efecto, la función peso ω es medible y $\omega \geq 0$ en el intervalo acotado (a, b). La condición (b) de la definición de función peso implica que $\int_a^b \omega(x) < +\infty$, es decir, que $\omega \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Como f es continua en el compacto $[a, b]$, f está acotada, con lo cual $f\omega \in \mathcal{L}^1(a, b)$.

Sean $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n} \in [a, b]$ con $x_{n,i} \neq x_{n,j}$ para $i \neq j$.

Definición 3.2. Se llama **fórmula de cuadratura** a una aproximación numérica de la integral (3.1), de la forma

$$I_n(f) := \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f\left(x_{n,i}\right). \tag{3.2}$$

Los números $w_{n,i}$ se llaman **coeficientes** o **pesos de cuadratura** y los puntos $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ se llaman **puntos** o **nodos de cuadratura**.

Definimos el **error de cuadratura** como

$$E_n(f) := I(f) - I_n(f).$$

Otro concepto importante es el **grado de precisión** o **de exactitud** de una fórmula de cuadratura.

Definición 3.3. Se dice que una fórmula de cuadratura tiene **grado de precisión** m si y sólo si $E_n(x^k) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, m$ y $E_n(x^{m+1}) \neq 0$.

Observación 3.4. Si una fórmula de cuadratura tiene grado de precisión m, entonces la fórmula proporciona el valor exacto de la integral (3.1) para todo polinomio f de grado $\leq m$.

Definición 3.5. Se dice que una fórmula de cuadratura es **de tipo interpolatorio polinómico** o **de cuadratura interpolatoria** si es una fórmula de cuadratura de la forma

$$I_n(f) := \int_a^b P_n(x)\ \omega(x) dx \tag{3.3}$$

siendo $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de Lagrange de f relativo a los nodos $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$.

Veamos que (3.3) es una fórmula de cuadratura. Representamos $P_n(x)$ mediante la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(x_{n,i}\right) \phi_{n,i}(x),$$

donde los $\phi_{n,i}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ son los **polinomios fundamentales de Lagrange** relativos a los puntos $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Recordemos que $\phi_{n,i}(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$ que cumple

$$\phi_{n,i}(x_{n,j}) = \delta_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b P_n(x)\,\omega(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_{n,i})\phi_{n,i}(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx\right) f(x_{n,i}) = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f(x_{n,i}).$$

Concluímos así que (3.3) es en efecto una fórmula de cuadratura y que la fórmula de cuadratura (3.2) es de tipo interpolatorio polinómico si y sólo si

$$w_{n,i} = \int_a^b \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx, \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Teorema 3.6. *Una fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos es de tipo interpolatorio polinómico si y sólo si es exacta en $\mathbb{P}_n$.*

Demostración. Consideremos una fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \simeq I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f(x_{n,i}).$$

Supongamos que dicha fórmula de cuadratura es de tipo interpolatorio polinómico, es decir,

$$w_{n,i} = \int_a^b \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

y veamos que es exacta en $\mathbb{P}_n$.
Sea $p \in \mathbb{P}_n$; representamos p de la forma:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_{n,i})\ \phi_{n,i}(x);$$

por tanto,

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} p(x_{n,i})\ \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} p(x_{n,i}) \int_a^b \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} p(x_{n,i}) = I_n(p).$$

Recíprocamente, supongamos que la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_n$.
Dado que para todo $i = 0, 1, \ldots, n$, $\phi_{n,i} \in \mathbb{P}_n$, se cumple que

$$\int_a^b \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx = I_n(\phi_{n,i}) = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j}\phi_{n,i}(x_{n,j}) = \sum_{i,j=0}^{n} w_{n,j}\delta_{ij} = w_{n,i}.$$

Por consiguiente la fórmula de cuadratura es de tipo interpolatorio polinómico. □

Proposición 3.7. *Si los nodos de cuadratura están simétricamente distribuídos respecto al punto $\frac{a+b}{2}$, esto es,*

$$x_{n,i} - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n,n-i} - \frac{a+b}{2}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \tag{3.4}$$

y el peso es simétrico respecto de $\frac{a+b}{2}$, es decir,

$$\omega\left(t + \frac{a+b}{2}\right) = \omega\left(\frac{a+b}{2} - t\right), \quad \forall t \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right), \tag{3.5}$$

entonces los coeficientes de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico con nodos $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, satisfacen

$$w_{n,i} = w_{n,n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. Tenemos que demostrar primero que hay una relación de simetría entre los polinomios fundamentales $\phi_{n,i}$, $i =, 1, \dots, n$. Recordemos que $\phi_{n,i}$ es el polinomio de grado $\leq n$ tal que $\phi_{n,i}(x_{n,j}) = \delta_{ij}$ para todo $j = 0, 1, \dots, n$.
La relación (3.4) se puede escribir de la forma

$$x_{n,i} = a + b - x_{n,n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Consideramos $\psi_i(x) := \phi_{n,i}(a + b - x)$, que es un polinomio de grado $\leq n$; tenemos que

$$\psi_i(x_{n,j}) := \phi_{n,i}(a + b - x_{n,j}) = \phi_{n,i}(x_{n,n-j}) = \delta_{i,n-j} = \delta_{n-i,j}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Por la unicidad del polinomio de interpolación tenemos que

$$\psi_i(x) = \phi_{n,n-i}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$$

es decir,

$$\phi_{n,i}(a + b - x) = \phi_{n,n-i}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.$$

Por otra parte, haciendo el cambio de variable $\tau = t + \frac{a+b}{2}$, podemos escribir la relación (3.5) como

$$\omega(\tau) = \omega(a + b - \tau), \quad \forall \tau \in (a, b).$$

Por lo tanto, si hacemos el cambio de variable $x = a + b - t$, resulta que

$$w_{n,i} = \int_a^b \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx = -\int_a^b \phi_{n,i}(a + b - t)\omega(a + b - t)dt = \int_a^b \phi_{n,n-i}(t)\omega(t)dt = w_{n,n-i},$$

obteniendo así la simetría de los coeficientes como queriamos demostrar. □

3.2. Fórmulas de cuadratura de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto

Ahora nos centraremos en el estudio de las fórmulas de Gauss, Gauss-Radau y Gauss-Lobatto. Describiremos su construcción, estudiaremos cuál es el grado de exactitud que alcanzan y la positividad de sus coeficientes.

3.2.1. Fórmulas de Gauss

Sea (a, b) un intervalo (finito o infinito) de $\mathbb{R}$ y ω una función peso en (a, b). Sea $n \geq 0$ un entero. Nos planteamos el problema de encontrar una fórmula de cuadratura con $n + 1$ nodos

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f(x_{n,i}) \tag{3.6}$$

cuyo grado de exactitud sea el máximo posible.
Veremos que ese máximo es $2n+1$ y que existe una única fórmula de cuadratura de $n+1$ nodos con grado de exactitud $2n+1$. Dicha fórmula se llama **fórmula de Gauss** de $n+1$ nodos.

Observación 3.8. Si una fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$, entonces es una fórmula de tipo interpolatorio polinómico.
En efecto, como obviamente $n \leq 2n+1$, $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_{2n+1}$; por lo tanto, si la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$, también lo es en $\mathbb{P}_n$ y por consiguiente es de tipo interpolatorio polinómico.

Proposición 3.9. *Si la fórmula de cuadratura (3.6) es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$, entonces sus $n+1$ nodos, que denotamos por $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ son las raíces de $p_{n+1}(x)$, el polinomio ortogonal de grado $n+1$ relativo a la función peso ω.*

Demostración. Sea $\psi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_{n,i})$; el grado de ψ es $n+1$. Probaremos que ψ es ortogonal a $\mathbb{P}_n$.
Sea $s \in \mathbb{P}_n$ arbitario. El producto $\psi(x)s(x)$ tiene grado a lo sumo $2n+1$, es decir, $\psi s \in \mathbb{P}_{2n+1}$.
Utilizando la hipótesis de que la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$, tenemos que

$$\int_a^b \psi(x)s(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j}\psi(x_{n,j})s(x_{n,j}) = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j}s(x_{n,j})\prod_{i=0}^{n}(x_{n,j} - x_{n,i}) = 0.$$

Por lo tanto, para todo $s \in \mathbb{P}_n$, $\int_a^b \psi(x)s(x)\omega(x)dx = 0$, es decir, $\psi \perp \mathbb{P}_n$. Por la unicidad salvo una constante multiplicativa del polinomio ortogonal de grado $n+1$, tenemos que $p_{n+1}(x) = c_n\psi(x)$, con $c_n \in \mathbb{R}$, $c_n \neq 0$.
Si consideramos $p_{n+1}(x)$ mónico, entonces $c_n = 1$. □

De la Observación 3.8 y la Proposición 3.9 se deduce que si existe una fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$ es única. En efecto, sus nodos $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, han de ser las raíces de $p_{n+1}(x)$ y como además la fórmula de cuadratura ha de ser de tipo interpolatorio polinómico, una vez determinados los $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, los coeficientes $w_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ vendrán dados por

$$w_{n,i} = \int_a^b \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{3.7}$$

siendo $\phi_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ los polinomios fundamentales de Lagrange relativos a los puntos $x_{n,0}, \ldots, x_{n,n}$ (es decir, $\phi_{n,i} \in \mathbb{P}_n$, $\phi_{n,i}(x_{n,j}) = \delta_{ij}$, $j = 0, 1, \ldots, n$). Esto establece la *unicidad* de la fórmula de $n+1$ puntos exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$.

Veremos ahora la *existencia* de dicha fórmula.

Proposición 3.10. *Sean $x_{n,0}, \ldots x_{n,n}$ las raíces de $p_{n+1}(x)$ (recordemos que son todas distintas y que están en (a,b)) y sean $w_{n,0}, \ldots, w_{n,n}$ los coeficientes dados por la expresión (3.7). Entonces* *la fórmula de cuadratura*

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f(x_{n,i}) \tag{3.8}$$

es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ arbitario. Haciendo la división euclídea de p entre el polinomio $p_{n+1}(x)$, obtenemos que existen polinomios s y r únicos con $deg(s) \leq n$ y $deg(r) \leq n$ tales que

$$p = p_{n+1}s + r. \tag{3.9}$$

Tenemos que probar que

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} p(x_{n,i}). \tag{3.10}$$

Tenemos que

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = \int_a^b p_{n+1}(x)s(x)\omega(x)dx + \int_a^b r(x)\omega(x)dx = \int_a^b r(x)\omega(x)dx \tag{3.11}$$

ya que $\int_a^b p_{n+1}(x)s(x)\omega(x)dx = 0$, porque $s \in \mathbb{P}_n$ y $p_{n+1} \perp \mathbb{P}_n$. Como la fórmula de cuadratura (3.8) es interpolatoria polinómica, es exacta en $\mathbb{P}_n$. Como además $r \in \mathbb{P}_n$, tenemos que

$$\int_a^b r(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} r(x_{n,i}). \tag{3.12}$$

Dado que los $x_{n,i}$ son las raíces de $p_{n+1}(x)$, tenemos que

$$p_{n+1}(x_{n,i}) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

lo que, junto con (3.9), implica

$$p(x_{n,i}) = r(x_{n,i}), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Finalmente, usando (3.11), (3.12) y (3.13) obtenemos (3.10). Así pues, la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$, como queríamos demostrar. □

Ahora probaremos la *optimalidad* de la fórmula, es decir, que el máximo grado de precisión que puede alcanzar una fórmula de cuadratura de $n+1$ nodos es $2n+1$.

Proposición 3.11. *No existe ninguna fórmula de cuadratura con* $n+1$ *nodos que sea exacta en* $\mathbb{P}_{2n+2}$.

Demostración. Sean $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ los nodos de la fórmula y $w_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ los pesos. Consideramos

$$q(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_{n,i})^2 ;$$

se tiene que $deg(q) = 2n + 2$.
Veamos que la fórmula de cuadratura no es exacta para q.
Por un lado, como $q(x_{n,j}) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$, obviamente tenemos que

$$\sum_{j=0}^{n} w_{n,j} q(x_{n,j}) = 0.$$

Por otra parte, q es un polinomio tal que $q \not\equiv 0$ y $q(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, en virtud de la condición (c) de la definición de función peso y de que $q\omega \geq 0$ en (a, b), tenemos que

$$\int_a^b q(x)\omega(x)dx > 0.$$

Así pues, la fórmula de cuadratura no es exacta para q. □

Proposición 3.12. *$w_{n,i} > 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, n$.*

Observación 3.13. Recordemos que los pesos $w_{n,i}$ vienen dados por la fórmula (3.7), pero no podemos obtener de esta fórmula la positividad de los pesos ya que $\phi_{n,i}(x)$ no tiene signo constante en el intervalo (a, b).

Demostración. Consideremos $\int_a^b (\phi_{n,i}(x))^2 \omega(x)dx$. Aplicando la condición (c) de la función peso obtenemos que esta integral es positiva, ya que $(\phi_{n,i}(x))^2 \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$ y $\phi_{n,i}(x) \not\equiv 0$. Por otro lado, $(\phi_{n,i}(x))^2$ tiene grado $2n$ y como la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n} \subset \mathbb{P}_{2n+1}$, tenemos que

$$\int_a^b (\phi_{n,i}(x))^2 \omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j} (\phi_{n,i}(x_{n,j}))^2 = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j} (\delta_{ij})^2 = w_{n,i}.$$

Queda así demostrado que $w_{n,i} > 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, n$. □

3.2.2. Fórmulas de Gauss-Radau

Sea ω una función peso en el intervalo $(-1, 1)$. Sea $n \geq 0$ un entero.
En esta sección y en la siguiente $p_n(x)$ denotará el polinomio ortogonal *mónico* de grado n respecto del peso ω.
Consideramos el polinomio

$$q(x) = p_{n+1}(x) + ap_n(x)$$

con $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(-1) = 0$; entonces $a = -\frac{p_{n+1}(-1)}{p_n(-1)}$; nótese que $p_n(-1) \neq 0$, ya que todas las raíces de p_n están en $(-1, 1)$.
Consideramos ahora el conjunto de las fórmulas de cuadratura de $n + 1$ nodos en $[-1, 1]$ que tienen -1 como uno de sus nodos. Nos planteamos ahora el problema de encontrar una fórmula

de cuadratura de este conjunto cuyo grado de exactitud sea el máximo posible. Veremos que dicho grado máximo de exactitud es $2n$ y cómo se contruye la única fórmula que permite alcanzarlo. Dicha fórmula es la **fórmula de Gauss-Radau** de $n+1$ nodos que incluye el extremo izquierdo -1 ($x_{n,0} = -1$).

Observación 3.14. Si una fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$, entonces es una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico.
En efecto, como $n \leq 2n$; $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_{2n}$. Por lo tanto, como la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$, también es exacta en $\mathbb{P}_n$ y entonces es una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico.

Como $q \perp \mathbb{P}_{n-1}$, por el teorema 1.14, q tiene al menos n raíces de multiplicidad impar en $(-1,1)$; como además $deg(q) = n+1$ y $q(-1) = 0$, q tiene exactamente n raíces simples en $(-1,1)$.

Proposición 3.15. *Los $n+1$ nodos de la fórmula de Gauss-Radau son las raíces de q.*

Demostración. Sea $\psi(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_{n,j})$; $deg(\psi) = n+1$. Tenemos que demostrar que $\psi = q$. Sea $s \in \mathbb{P}_{n-1}$ arbitario. El producto $\psi(x)s(x)$ tiene grado a lo sumo $2n$. Usando la hipótesis de que la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$, tenemos que

$$\int_{-1}^{1} \psi(x)s(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i}\psi(x_{n,i})s(x_{n,i}) = 0,$$

ya que $\psi(x_{n,i}) = 0$. Por lo tanto, ψ es ortogonal a $\mathbb{P}_{n-1}$ y como $\psi \in \mathbb{P}_{n+1}$, lo podemos escribir como

$$\psi(x) = \alpha p_{n+1}(x) + \beta p_n(x), \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como ψ y p_{n+1} son mónicos, $\alpha = 1$. Además, $x_{n,0} = -1$, por lo que $\psi(-1) = 0$; entonces $\beta = a$ y con esto obtenemos que

$$\psi(x) = p_{n+1}(x) + ap_n(x) = q(x).$$

Luego los nodos $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ son las raíces de q, como queríamos demostrar. □

De la Observación 3.14 y la Proposición 3.15 deducimos la *unicidad* de la fórmula, es decir, si existe una fórmula de cuadratura con las propiedades requeridas ésta es única. En efecto, los $n+1$ nodos (uno de ellos el punto -1) son las raíces de $q(x)$ y como la fórmula de cuadratura es interpolatoria polinómica, sus coeficientes quedan determinados por (3.7) (donde $a = -1$ y $b = 1$).

Establecemos ahora la *existencia* de la fórmula.

Proposición 3.16. *Sean* $-1 = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1$ *las* $n+1$ *raíces de* q *y sean* $w_{n,i} = \int_{-1}^{1} \phi_{n,i}(x)\omega(x)dx$, $i = 0, 1, \ldots, n$. *La fórmula de cuadratura*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f(x_{n,i})$$

es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}_{2n}$ arbitario. Haciendo la división euclídea de p entre q, tenemos que existen polinomios s y r únicos con $deg(s) \leq n-1$ y $deg(r) \leq n$ tales que

$$p = qs + r. \tag{3.14}$$

Tenemos que probar que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} p(x_{n,i}). \tag{3.15}$$

Tenemos que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)s(x)\omega(x)dx + \int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx \tag{3.16}$$

ya que $\int_{-1}^{1} q(x)s(x)\omega(x)dx = 0$, porque $s \in \mathbb{P}_{n-1}$ y $q \perp \mathbb{P}_{n-1}$. Como la fórmula de cuadratura (3.8) es interpolatoria polinómica, es exacta en $\mathbb{P}_n$. Como además $r \in \mathbb{P}_n$, tenemos que

$$\int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} r(x_{n,i}). \tag{3.17}$$

Dado que los $x_{n,i}$ son las raíces de $q(x)$, tenemos que

$$q(x_{n,i}) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

lo que, junto con (3.14), implica

$$p(x_{n,i}) = r(x_{n,i}), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.18}$$

Finalmente, usando (3.16), (3.17) y (3.18) obtenemos (3.15). Así pues, la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$, como queríamos demostrar. □

Construída la fórmula, estudiaremos su *optimalidad*.

Proposición 3.17. *No existe ninguna fórmula de cuadratura de* $n+1$ *nodos con* $x_{n,0} = -1$ *fijado, que sea exacta en* $\mathbb{P}_{2n+1}$.

Demostración. Sean $-1 = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} < 1$ los nodos y $w_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ los coeficientes de la fórmula.
Sea $s(x) = (x+1)\prod_{j=1}^{n}(x - x_{n,j})^2$; $deg(s) = 2n+1$. Tenemos que $s(x) \not\equiv 0$ y $s(x) \geq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$, entonces por la condición (c) de la definición de función peso obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} s(x)\omega(x)dx > 0.$$

Por otra parte, como $s(x_{n,i}) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} w_{n,i} s(x_{n,i}) = 0.$$

Así pues, la fórmula de cuadratura no es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$. □

Para terminar estudiaremos la positividad de los coeficientes.

Proposición 3.18. $w_{n,i} > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$

Demostración. La integral $\int_{-1}^{1} (\phi_{n,i}(x))^2 \omega(x)dx$ es positiva, en virtud de la condición (c) de la definición de función peso.
Por otra parte, el grado de $(\phi_{n,i}(x))^2$ es $2n$ y la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$, obteniendo así que

$$\int_{-1}^{1} (\phi_{n,i}(x))^2 \omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j} (\phi_{n,i}(x_{n,j}))^2 = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j} (\delta_{ij})^2 = w_{n,i}.$$

Concluímos así que $w_{n,i} > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$, como queriamos demostrar. □

De forma simétrica, es posible incluír como nodo el punto $+1$ en vez del punto -1. Los resultados para este caso obviamente son análogos. La fórmula de cuadratura de Gauss-Radau con $n+1$ puntos que incluye el extremo derecho $+1$ es la única fórmula de cuadratura con estas propiedades cuyo grado de precisión es $2n$.

3.2.3. Fórmulas de Gauss-Lobatto

Sea ω una función peso en $(-1, 1)$ y $n \geq 1$ un entero.
Consideramos ahora el polinomio

$$q(x) = p_{n+1}(x) + ap_n(x) + bp_{n-1}(x),$$

donde p_n es el polinomio ortogonal mónico de grado n. Veamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $q(-1) = q(1) = 0$. Para ello, tenemos que considerar el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_n(-1)a + p_{n-1}(-1)b & = & -p_{n+1}(-1) \\ p_n(1)a + p_{n-1}(1)b & = & -p_{n+1}(1) \end{array} \right. \tag{3.19}$$

y demostrar que el determinante de la matriz del sistema no es nulo.
Sea $\Delta = p_{n-1}(1)p_n(-1) - p_n(1)p_{n-1}(-1)$. Recordemos que las n raíces de p_n están en $(-1,1)$ y que $p_n(x)$ es mónico, es decir, es de la forma

$$p_n(x) = x^n + r(x), \quad \text{con} \quad deg(r) \leq n-1.$$

Por tanto, $p_n(1) > 0$, ya que p_n es una función continua que no se anula en $[1,+\infty)$ y $\lim_{x\to+\infty} p_n(x) = +\infty$. Análogamente $p_{n-1}(1) > 0$.
El signo de p_n y p_{n-1} en el punto -1, depende de que n sea par o impar.

- Caso n par:

$$\lim_{x\to-\infty} p_n(x) = +\infty; \quad \text{por tanto} \quad p_n(-1) > 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} p_{n-1}(x) = -\infty, \quad \text{por tanto} \quad p_{n-1}(-1) < 0.$$

  Entonces $\Delta > 0$ y por consiguiente el sistema (3.19) tiene solución única.

- Caso n impar:
  De manera análoga se obtiene que $p_n(-1) < 0$ y $p_{n-1}(-1) > 0$. Entonces $\Delta < 0$ y como consecuencia existen a y b solución única del sistema (3.19).

Concluímos así que $q(x)$ se puede construír de este modo.

Sean $-1 = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n-1} < x_{n,n} = +1$ los nodos de cuadratura.
La **fórmula de Gauss-Lobatto** de $n+1$ puntos es la fórmula de cuadratura de $n+1$ puntos que incluye los extremos -1 y $+1$ y tiene grado de exactitud $2n-1$.

Como $q \perp \mathbb{P}_{n-2}$, por el teorema 1.14, q tiene al menos $n-1$ raíces de multiplicidad impar en $(-1,1)$; como además $deg(q) = n+1$ y $q(\pm 1) = 0$, q tiene exactamente $n-1$ raíces simples de $(-1,1)$.

Observación 3.19. Si una fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$, entonces es una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico. En efecto, como $n \geq 1$ se cumple que $n \leq 2n-1$ y por consiguiente $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_{2n-1}$. Por tanto, como la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$, también lo es en $\mathbb{P}_n$ y entonces es de tipo interpolatorio polinómico.

Proposición 3.20. *Si la fórmula de cuadratura con $n+1$ nodos es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$, entonces los nodos $x_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ con $x_{n,0} = -1$ y $x_{n,n} = 1$ son las raíces de $q(x)$.*

Demostración. Sea $\psi(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_{n,j})$; $deg(\psi) = n+1$. Tenemos que probar que $\psi = q$.
Sea $s \in \mathbb{P}_{n-2}$ arbitario; el producto ψs tiene grado a lo sumo $2n-1$. Utilizando la hipótesis de que la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$, tenemos que

$$\int_{-1}^{1} \psi(x)s(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i}\psi(x_{n,i})s(x_{n,i}) = 0$$

ya que $\psi(x_{n,i}) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
Por tanto, ψ es ortogonal a $\mathbb{P}_{n-2}$, y como además $\psi \in \mathbb{P}_{n+1}$ lo podemos escribir como

$$\psi(x) = \alpha p_{n+1}(x) + \beta p_n(x) + \gamma p_{n-1}(x) \quad \text{con} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Como ψ y p_{n+1} son mónicos, $\alpha = 1$.
Además, $x_{n,0} = -1$ y $x_{n,n} = 1$; por tanto $\psi(-1) = 0$ y $\psi(1) = 0$, y entonces $\beta = a$ y $\gamma = b$. Con esto obtenemos que

$$\psi(x) = p_{n+1}(x) + ap_n(x) + bp_{n-1}(x) = q(x).$$

Luego los nodos $x_{n,i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ con $x_{n,0} = -1$ y $x_{n,n} = 1$ son las raíces de $q(x)$ como queriamos demostrar. $\square$

Con la Observación 3.19 y la Proposición 3.20 queda determinada la *unicidad* de la fórmula. En efecto, los $n+1$ nodos, dos de ellos el -1 y el 1, son las raíces de $q(x)$ y como la fórmula de cuadratura es de tipo interpolatorio polinómico, quedan determinados sus coeficientes por (3.7).

Determinaremos ahora la *existencia* de la fórmula.

Proposición 3.21. *Sean $-1 = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n-1} < x_{n,n} = 1$ las $n+1$ raíces de q y sean $w_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ los coeficientes dados por (3.7). Entonces la fórmula de cuadratura*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f(x_{n,i})$$

es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ arbitrario. Haciendo la división euclídea de p entre q, tenemos que existen s y r únicos con $deg(s) \leq n-2$ y $deg(r) \leq n$ tales que

$$p = qs + r. \tag{3.20}$$

Tenemos que probar que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} p(x_{n,i}). \tag{3.21}$$

Tenemos que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)s(x)\omega(x)dx + \int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx \tag{3.22}$$

ya que $\int_{-1}^{1} q(x)s(x)\omega(x)dx = 0$, porque $q \perp \mathbb{P}_{n-2}$ y $s \in \mathbb{P}_{n-2}$.
Como la fórmula de cuadratura (3.8) es interpolatoria polinómica, es exacta en $\mathbb{P}_n$. Como además $r \in \mathbb{P}_n$, tenemos que

$$\int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} r(x_{n,i}). \tag{3.23}$$

Dado que los $x_{n,i}$ son las raíces de $q(x)$, tenemos que

$$q(x_{n,i}) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

lo que, junto con (3.20), implica

$$p(x_{n,i}) = r(x_{n,i}), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.24}$$

Finalmente, usando (3.22), (3.23) y (3.24) obtenemos (3.21). Concluímos así que la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$, como queríamos demostrar. $\square$

Estudiaremos ahora la *optimalidad* de la fórmula.

Proposición 3.22. *No existe ninguna fórmula de cuadratura de $n+1$ nodos con $x_{n,0} = -1$ y $x_{n,n} = 1$ que sea exacta en $\mathbb{P}_{2n}$.*

Demostración. Sean $-1 = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n-1} < x_{n,n} = 1$ los nodos y $w_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ los coeficientes de la fórmula.
Sea $s(x) = (1+x)(1-x)\prod_{j=1}^{n-1}(x - x_{n,j})^2$; $deg(s) = 2n$.
Probemos que la fórmula de cuadratura no es exacta para s. Tenemos que $s(x) \not\equiv 0$ y $s(x) \geq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$, entonces por la condición (c) de la definición de función peso obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} s(x)\omega(x)dx > 0.$$

Por otro lado, como $s(x_{n,i}) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} w_{n,i} s(x_{n,i}) = 0.$$

Por lo tanto, la fórmula de cuadratura no es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$. $\square$

Proposición 3.23. $w_{n,i} > 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, n.$

Demostración.

- Para $i \neq 0$, consideramos $\int_{-1}^{1} \frac{(\phi_{n,i}(x))^2}{1+x}\omega(x)dx$; nótese que $\psi_i(x) := \frac{(\phi_{n,i}(x))^2}{1+x}$ es un polinomio de grado $2n-1$ y su factorización contiene el factor $1+x$, que es positivo en $(-1, 1)$; aplicando la condición (c) de la definición de función peso, tenemos que

  $$\int_{-1}^{1} \frac{(\phi_{n,i}(x))^2}{1+x}\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j}\psi_i(x_{n,j}) = \frac{w_{n,i}}{1+x_{n,i}} > 0.$$

  Como $1 + x_{n,i} > 0$, concluímos que $w_{n,i} > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

- Para $i = 0$, consideramos $\int_{-1}^{1} \frac{(\phi_{n,0}(x))^2}{1-x}\omega(x)dx$; análogamente $\psi_0(x) := \frac{(\phi_{n,0}(x))^2}{1-x}$ es un polinomio de grado $2n-1$ y $\psi_0(x) \geq 0$ para todo $x \in [-1,1]$; ahora tenemos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\phi_{n,0}(x))^2}{1-x}\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{n} w_{n,j}\psi_i(x_{n,j}) = \frac{w_{n,0}}{1-x_{n,0}} = \frac{w_{n,0}}{2} > 0.$$

□

En el caso especial de los pesos de Jacobi, hay una caracterización alternativa de los nodos de la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto de $n+1$ puntos ($n \geq 1$): son -1, 1 y las raíces de $p_n^{'}(x)$.
Nótese que, dado que $p_n(x)$ tiene n raíces distintas en $(-1,1)$, aplicando el Teorema de Rolle se deduce que las $n-1$ raíces de $p_n^{'}(x)$ son todas distintas y están en $(-1,1)$.
La proposición siguiente justifica la caracterización alternativa mencionada.

Proposición 3.24. *Sea $n \geq 1$ entero y sean $x_{n,0} = -1$, $x_{n,n} = 1$ y $x_{n,i}$, $i = 1, \dots, n-1$ las raíces de $p_n^{'}(x)$. La fórmula de cuadratura interpolatoria polinómica*

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_{n,i} f(x_{n,i}) \tag{3.25}$$

es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ arbitrario. Haciendo la división euclídea de p entre el polinomio $(1-x^2)p_n^{'}(x)$, obtenemos que existen polinomios s y r únicos con $deg(s) \leq n-2$ y $deg(r) \leq n$ tales que

$$p = (1-x^2)p_n^{'}s + r. \tag{3.26}$$

Tenemos que ver que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i}p(x_{n,i}). \tag{3.27}$$

Tenemos que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)p_n^{'}(x)s(x)\omega(x)dx + \int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx. \tag{3.28}$$

Por una parte, integrando por parte

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} (1-x^2)p_n^{'}(x)s(x)\omega(x)dx = \\
&= (1-x^2)s(x)p_n(x)\omega(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)s(x)\right]\omega(x) + (1-x^2)s(x)\omega^{'}(x) \right\} p_n(x)dx = \\
&= -\int_{-1}^{1} p_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)s(x)\right]\omega(x)dx - \int_{-1}^{1} p_n(x)s(x)(1-x^2)\frac{\omega^{'}(x)}{\omega(x)}\omega(x)dx
\end{aligned} \tag{3.29}$$

ya que $(1-x^2)\omega(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$ se anula en ± 1 (ya que $\alpha+1 > 0$ y $\beta+1 > 0$). Además en la primera integral, tenemos que $deg((1-x^2)s(x)) \leq n$, con lo cual $deg\left(\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)s(x)\right]\right) \leq n-1$ y como $p_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$,

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)s(x)\right]\omega(x)dx = 0. \tag{3.30}$$

Consideremos ahora la segunda integral.
Recordemos que $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$; es fácil comprobar que

$$(1-x^2)\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = -\alpha(1+x) + \beta(1-x),$$

con lo cual $deg\left((1-x^2)\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}s(x)\right) \leq n-1$ y como $p_n \perp \mathbb{P}_{n-1}$, obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)s(x)(1-x^2)\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\omega(x)dx = 0. \tag{3.31}$$

Usando (3.28)-(3.31), deducimos que

$$\int_{-1}^{1} p(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx. \tag{3.32}$$

Por otra parte, como la fórmula de cuadratura es interpolatoria polinómica, es exacta en $\mathbb{P}_n$. Como además $r \in \mathbb{P}_n$, tenemos que

$$\int_{-1}^{1} r(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_{n,i}r(x_{n,i}). \tag{3.33}$$

Dado que los $x_{n,i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ son las raíces de $p_n'(x)$, tenemos que

$$p_n'(x_{n,i}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

lo que, junto con $x_{n,0} = -1$, $x_{n,n} = 1$ y (3.26), implica

$$p(x_{n,i}) = r(x_{n,i}), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.34}$$

Finalmente, usando (3.32)-(3.34) obtenemos (3.27) como queríamos demostrar. □

Dado que la fórmula de cuadratura (3.25) tiene $n+1$ nodos, incluyendo -1 y 1, y es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$, dicha fórmula es la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto de $n+1$ puntos.

3.3. Ejemplos de fórmulas de cuadratura de tipo gaussiano

En esta sección veremos algunas cuadraturas de tipo gaussiano para los pesos de Legendre y de Tchebycheff.

LEGENDRE-GAUSS

Veamos cuál es la fórmula de cuadratura de Gauss de 3 nodos en $[-1,1]$ para el peso de Legendre.

Tenemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{2} w_{2,i} f(x_{2,i}) = w_{2,0} f(x_{2,0}) + w_{2,1} f(x_{2,1}) + w_{2,2} f(x_{2,2}). \tag{3.35}$$

Los nodos son las raíces del polinomio $P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$.

$$P_3(x) = 0 \iff \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) = 0 \iff x = 0 \;\text{ y }\; x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Por tanto, los nodos de la fórmula son:

$$x_{2,0} = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_{2,1} = 0, \quad x_{2,2} = +\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Ahora tenemos que calcular los pesos correspondientes y para eso imponemos exactitud en $\mathbb{P}_2$ tomando como base el conjunto $\left\{1, x, x^2\right\}$.

- Para $P_0(x) = 1$
$$w_{2,0} + w_{2,1} + w_{2,2} = \int_{-1}^{1} 1dx = 2.$$
- Para $P_1(x) = x$
$$-\sqrt{\frac{3}{5}} w_{2,0} + 0 + \sqrt{\frac{3}{5}} w_{2,2} = \int_{-1}^{1} xdx = 0.$$
- Para $P_2(x) = x^2$
$$\frac{3}{5} w_{2,0} + 0 + \frac{3}{5} w_{2,2} = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos que

$$w_{2,0} = w_{2,2} = \frac{5}{9} \quad \text{y} \quad w_{2,1} = \frac{8}{9}.$$

Finalmente substituyendo en (3.35) los nodos y pesos obtenidos tenemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{5}{9} f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

es la fórmula de cuadratura de Legendre-Gauss de 3 nodos en $[-1,1]$.

LEGENDRE-GAUSS-LOBATTO

Veamos cuál es la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto de 4 nodos en $[-1, 1]$ para el peso de Legendre.

Tenemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{3} w_{3,i}f(x_{3,i}) = w_{3,0}f(x_{3,0}) + w_{3,1}f(x_{3,1}) + w_{3,2}f(x_{3,2}) + w_{3,3}f(x_{3,3}). \quad (3.36)$$

Como la fórmula es de tipo Gauss-Lobatto tenemos que dos nodos son los extremos y los otros dos nodos están en el interior del intervalo $[-1, 1]$. Como además los polinomios de Legendre son un caso particular de los polinomios de Jacobi, los nodos interiores son las raíces de $P_3'(x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}$.

$$P_3'(x) = 0 \iff \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \iff x^2 = \frac{1}{5} \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

Por tanto, los nodos de la fórmula son:

$$x_{3,0} = -1, \quad x_{3,1} = -\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad x_{3,2} = +\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad x_{3,3} = 1$$

Ahora tenemos que calcular los pesos correspondientes y para eso imponemos exactitud en $\mathbb{P}_3$ tomando como base el conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$.

- Para $P_0(x) = 1$
$$w_{3,0} + w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} = \int_{-1}^{1} 1dx = 2.$$
- Para $P_1(x) = x$
$$-w_{3,0} - \sqrt{\frac{1}{5}}w_{3,1} + \sqrt{\frac{1}{5}}w_{3,2} + w_{3,3} = \int_{-1}^{1} xdx = 0.$$
- Para $P_2(x) = x^2$
$$w_{3,0} + \frac{1}{5}w_{3,1} + \frac{1}{5}w_{3,2} + w_{3,3} = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}.$$
- Para $P_3(x) = x^3$
$$-w_{3,0} - \frac{1}{5\sqrt{5}}w_{3,1} + \frac{1}{5\sqrt{5}}w_{3,2} + w_{3,3} = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0.$$

Además, como los nodos están simétricamente distribuídos y el peso es simétrico respecto del origen, aplicando la proposición 3.7, tenemos simetría en los pesos, de modo que

$$w_{3,0} = w_{3,3} \quad \text{y} \quad w_{3,1} = w_{3,2}$$

y así basta con resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2w_{3,0} + 2w_{3,1} = 2 \\ 2w_{3,0} + \frac{2}{5}w_{3,1} = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

de donde obtenemos que

$$w_{3,0} = w_{3,3} = \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad w_{3,1} = w_{3,2} = \frac{5}{6}.$$

Finalmente substituyendo en (3.36) los nodos y pesos obtenidos tenemos que la fórmula de cuadratura de Legendre-Gauss-Lobatto de 4 nodos en $[-1,1]$ es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{1}{6}f(-1) + \frac{5}{6}f(-\sqrt{\frac{1}{5}}) + \frac{5}{6}f(\sqrt{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6}f(1).$$

En este epígrafe y en los dos siguientes, para abreviar la notación suprimimos el índice n en los nodos y coeficientes de las fórmulas de cuadratura, de modo que consideraremos

$$x_i \quad \text{y} \quad w_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

<u>TCHEBYCHEFF-GAUSS</u>

Consideramos $n+1$ nodos, donde n es el grado de la interpolación polinómica subyacente. Veamos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \simeq I_n(f) = \frac{\pi}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f\left(\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right)\right)$$

es la fórmula de Tchebycheff-Gauss de $n+1$ nodos.
Los $n+1$ nodos son las raíces de $T_{n+1}(x)$. Recordemos que $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x))$. Haciendo el cambio de variable $\theta = \arccos(x)$, tenemos que

$$x = \cos(\theta) \quad \text{y} \quad T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta).$$

Por lo tanto,

$$T_{n+1}(x) = 0 \iff \cos((n+1)\theta) = 0 \iff (n+1)\theta = \frac{\pi}{2} + j\pi, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.37}$$

Además como $x \in [-1,1]$, tenemos que $\theta \in [0,\pi]$, con lo cual $(n+1)\theta \in [0,(n+1)\pi]$. De esto, junto con (3.37), deducimos que

$$(n+1)\theta = \frac{\pi}{2} + j\pi, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Introducimos θ_j, que son los valores de θ correspondientes:

$$\theta_j = \frac{\frac{\pi}{2} + j\pi}{n+1} = \frac{(2j+1)\pi}{2n+2}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que las raíces de $T_{n+1}(x)$ son

$$x_j = \cos(\theta_j) = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right), \quad \text{para} \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Además como la función coseno en $[0, \pi]$ decrece estrictamente, las raíces son distintas y están ordenadas de forma decreciente, es decir,

$$1 > x_0 > x_1 > \ldots > x_n > -1.$$

Comprobemos ahora que los pesos son $w_j = \frac{\pi}{n+1}$ para $j = 0, 1, \ldots, n$; para esto basta comprobar que la fórmula es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$.
Tomamos como base de $\mathbb{P}_{2n+1}$ el conjunto $\{T_0, T_1, \ldots, T_{2n+1}\}$.
Nótese que como $T_0 = 1$, en virtud de (2.20) tenemos que

$$\int_{-1}^{1} T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} T_k(x) T_0(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & para \quad k \geq 1 \\ \\ \pi & para \quad k = 0 \end{cases}$$

Ahora calcularemos el resultado de aplicar la fórmula de cuadratura a los T_k.

- Para $k = 0$,

$$I_n(T_0) = I_n(1) = \frac{\pi}{n+1}(n+1) = \pi.$$

- Para $1 \leq k \leq 2n+1$,

$$I_n = \frac{\pi}{n+1} \sum_{j=0}^{n} T_k \left(\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right)\right). \tag{3.38}$$

  Tenemos que

$$\sum_{j=0}^{n} T_k \left(\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right)\right) = \sum_{j=0}^{n} \cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2n+2}\right). \tag{3.39}$$

  Como los argumentos del coseno están en progresión aritmética, transformamos la suma en una progresión geométrica, cuya razón es $e^{\frac{k\pi i}{n+1}} \neq 1$; tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \cos\left(\frac{(2j+1)k\pi}{2n+2}\right) &= Re\left(\sum_{j=0}^{n} e^{\frac{(2j+1)k\pi i}{2n+2}}\right) = Re\left(\frac{e^{\frac{(2n+1)k\pi i}{2n+2}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{2n+2}} - e^{\frac{k\pi i}{2n+2}}}{e^{\frac{2k\pi i}{2n+2}} - 1}\right) = \\ &= Re\left(\frac{e^{\frac{(2n+3)k\pi i}{2n+2}} - e^{\frac{k\pi i}{2n+2}}}{e^{\frac{2k\pi i}{2n+2}} - 1}\right) = Re\left(\frac{e^{k\pi i} \cdot e^{\frac{k\pi i}{2n+2}} - e^{\frac{k\pi i}{2n+2}}}{e^{\frac{2k\pi i}{2n+2}} - 1}\right) = \\ &= Re\left(\frac{\left[(-1)^k - 1\right] e^{\frac{k\pi i}{2n+2}}}{e^{\frac{2k\pi i}{2n+2}} - 1}\right) \end{aligned}$$

y multiplicando numerador y denominador por $e^{\frac{-k\pi i}{2n+2}}$ obtenemos que

$$Re\left(\frac{\left[(-1)^k-1\right]e^{\frac{k\pi i}{2n+2}}}{e^{\frac{2k\pi i}{2n+2}}-1}\right)=Re\left(\frac{(-1)^k-1}{e^{\frac{k\pi i}{2n+2}}-e^{\frac{-k\pi i}{2n+2}}}\right)=Re\left(\frac{(-1)^k-1}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+2}\right)}\right)=0.$$

Esto, junto con (3.38) y (3.39) implica que $I_n(T_k)=0$ para todo $k=1,\ldots,2n+1$.

Luego la fórmula es exacta en $\mathbb{P}_{2n+1}$ y como tiene $n+1$ nodos, en efecto es la fórmula de Tchebycheff-Gauss de $n+1$ nodos.

TCHEBYCHEFF-GAUSS-LOBATTO

Consideramos $n+1$ nodos.
Veamos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \simeq I_n(f)=\frac{\pi}{2n}\left[f(-1)+f(1)\right]+\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n-1} f\left(\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right)$$

es la fórmula de Tchebycheff-Gauss-Lobatto de $n+1$ nodos.
Como la fórmula es de tipo Gauss-Lobatto tenemos dos nodos que corresponden a los extremos y los $n-1$ nodos restantes están en el interior del intervalo $[-1,1]$. Como además los polinomios de Tchebycheff son un caso particular de los polinomios de Jacobi, los nodos interiores son las raíces de $T_n^{'}(x)$. Tenemos que

$$T_n^{'}(x)=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin\left(n\arccos(x)\right)$$

y haciendo el cambio de variable $\theta=\arccos(x)$, tenemos que

$$x=\cos(\theta) \quad \text{y} \quad T_n^{'}(x)=\frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Por lo tanto,

$$T_n^{'}(x)=0 \iff \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}=0 \implies \sin(n\theta)=0 \iff n\theta=j\pi, \quad j\in\mathbb{Z}. \tag{3.40}$$

Además como $x\in(-1,1)$, tenemos que $\theta\in(0,\pi)$, con lo cual $n\theta\in(0,n\pi)$. De esto, junto con (3.40), deducimos que

$$n\theta=j\pi, \quad j=1,\ldots,n-1.$$

Introducimos θ_j, que son los valores de θ correspondientes:

$$\theta_j=\frac{j\pi}{n}, \quad j=1,\ldots,n-1.$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que las raíces de $T_n'(x)$ son

$$x_j = \cos(\theta_j) = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad \text{para} \ \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Por lo tanto, los nodos de la fórmula son $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$, $j = 0, \ldots, n$.
Comprobemos ahora que los pesos son

$$w_j = \begin{cases} \frac{\pi}{2n} & \textit{para} \quad j = 0, n \\ \\ \frac{\pi}{n} & \textit{para} \quad j = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Para esto basta comprobar que la fórmula de cuadratura es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$.
Tomamos como base de $\mathbb{P}_{2n-1}$ el conjunto $\{T_0, T_1, \ldots, T_{2n-1}\}$.
Recuérdese que

$$\int_{-1}^{1} T_k(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \textit{para} \quad k \geq 1 \\ \\ \pi & \textit{para} \quad k = 0 \end{cases}$$

Ahora calcularemos el resultado de aplicar la fórmula de cuadratura a los T_k.

- Para $k = 0$,
$$I_n(T_0) = I_n(1) = \frac{\pi}{2n} 2 + \frac{\pi}{n}(n-1) = \pi.$$
- Para $1 \leq k \leq 2n-1$, tenemos que
$$I_n(T_k) = \frac{\pi}{2n}\left[T_k(-1) + T_k(1)\right] + \frac{\pi}{n} S, \tag{3.41}$$
donde
$$S = \sum_{j=1}^{n-1} T_k\left(\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right).$$
Como los argumentos del coseno están en progresión aritmética, transformamos la suma en una progresión geométrica, cuya razón es $e^{\frac{k\pi i}{n}} \neq 1$; tenemos que
$$S = \sum_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{kj\pi}{n}\right) = Re\left(\sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{kj\pi i}{n}}\right) = Re\left(\frac{e^{\frac{(n-1)k\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{k\pi i}{n}} - e^{\frac{k\pi i}{n}}}{e^{\frac{k\pi i}{n}} - 1}\right) =$$
$$= Re\left(\frac{e^{k\pi i} - e^{\frac{k\pi i}{n}}}{e^{\frac{k\pi i}{n}} - 1}\right) = Re\left(\frac{(-1)^k - e^{\frac{k\pi i}{n}}}{e^{\frac{k\pi i}{n}} - 1}\right)$$
y multiplicando numerador y denominador por $e^{\frac{-k\pi i}{2n}}$ obtenemos que
$$S = Re\left(\frac{(-1)^k e^{\frac{-k\pi i}{2n}} - e^{\frac{k\pi i}{2n}}}{e^{\frac{k\pi i}{2n}} - e^{\frac{-k\pi i}{2n}}}\right) = Re\left(\frac{(-1)^k\left(-i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right) =$$
$$= Re\left(\frac{\left[(-1)^{k+1} - 1\right]\left(i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right) = Re\left(\frac{(-1)^{k+1} - 1}{2}\right) = \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2}. \tag{3.42}$$

Ahora calculemos $T_k(-1) + T_k(1)$. En virtud de (2.23) tenemos que

$$T_k(-1) + T_k(1) = (-1)^k T_k(1) + T_k(1) = \left[(-1)^k + 1\right] T_k(1) = (-1)^k + 1. \qquad (3.43)$$

Finalmente subtituyendo (3.42) y (3.43) en (3.41) obtenemos que $I_n(T_k) = 0$ para todo $k = 1, \ldots, 2n-1$.

Luego la fórmula es exacta en $\mathbb{P}_{2n-1}$ y como tiene $n+1$ nodos, en efecto es la fórmula de Tchebycheff-Gauss-Lobatto de $n+1$ nodos.

TCHEBYCHEFF-GAUSS-RADAU

Consideramos $n+1$ nodos. La fórmula de Tchebycheff-Gauss-Radau de $n+1$ nodos en $[-1,1]$ es

$$\int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \simeq I_n(f) = \frac{\pi}{2n+1} \left[f(1)\right] + \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=1}^{n} f\left(\cos\left(\frac{2j\pi}{2n+1}\right)\right).$$

Su obtención es similar ya que sabemos que un nodo es el 1 y los nodos interiores son las raíces de $T_{n+1}(x) - T_n(x)$; se obtienen esencialmente usando el mismo método que en los casos anteriores. Para los pesos, también basta con comprobar que la fórmula es exacta en $\mathbb{P}_{2n}$.

Anexo I

Función Gamma

La **función Gamma**, Γ, se define como

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad \text{para} \quad p > 0.$$

Esta función tiene varias propiedades que usamos en el capítulo 2.

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, para todo $p > 0$
- $\Gamma(p+1) = p!$ para todo $p \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Las demostraciones de estas propiedades pueden verse en [7].

Bibliografía

[1] Bernardi, C. y Maday, Y. (1992). *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Mathématiques et applications, 10, Springer-Verlag, Paris.

[2] Bulirsch, R. y Stoer, J. (1993). *Introduction to numerical analysis*, 2nd ed., Texts in applied mathematics, 12, Springer-Verlag, New York.

[3] Canuto, C., Hussaini M. Y., Quarteroni, A. y Zang, T. A. (1988). *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York.

[4] Crouzeix, M. y Mignot A. L. (1992). *Analyse numérique des équations différentielles*, 2ème. éd. révisée et augmentée, 2e tirage, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris.

[5] Davis, P.J. (1975). *Interpolation and approximation*, Dover ed., Dover, cop., New York.

[6] Isaacson, E. y Keller, H. B. (1994). *Analysis of numerical methods*, Dover ed., Dover Publications, New York.

[7] Simmons G. F. (1991). *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, 2nd ed., McGraw-Hill, United States of America.