



FACULDADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

# Introducción a las superficies minimales

Jimena García González - Redondo

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Trabajo Fin de Grado**

# Introducción a las superficies minimales

Jimena García González - Redondo

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Conocimiento: Geometría y Topología</b>
<b>Título: Introducción a las superficies minimales</b>
<b>Breve descripción del contenido</b>
El objetivo de este trabajo es abordar el estudio de las <i>superficies minimales</i> : desde su motivación, evolución e importancia histórica hasta sus propiedades matemáticas y físicas fundamentales.
<b>Recomendaciones</b>
<b>Otras observaciones</b>



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Variedades diferenciables . . . . .	1
1.2. Variedades de Riemann . . . . .	4
1.3. Superficies regulares . . . . .	8
<b>2. Superficies minimales</b>	<b>13</b>
2.1. Noción de superficie minimal . . . . .	13
2.2. Superficies minimales como puntos críticos del funcional área . . . . .	14
2.3. Conformalidad: parametrizaciones isotermas y conjugadas . . . . .	19
2.4. Superficies minimales de revolución y regladas . . . . .	23
<b>3. Representación de Weierstrass-Enneper</b>	<b>27</b>
3.1. Variable compleja . . . . .	27
3.2. Superficies conjugadas . . . . .	29
3.3. Teorema de Representación de Weierstrass-Enneper . . . . .	32
3.4. Omisión de puntos en la esfera . . . . .	36
<b>4. La curvatura media</b>	<b>45</b>

4.1. Generalidades sobre operadores lineales elípticos . . . . .	45
4.2. El operador curvatura media . . . . .	49
4.3. Comparación de superficies . . . . .	51
4.4. El Principio del máximo . . . . .	53
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>





## Resumen

La investigación de la teoría de superficies minimales, aún plenamente vigente, comenzó en el siglo XVIII con valiosas contribuciones de ilustres matemáticos como L. Euler o J. Lagrange. Iniciamos este trabajo recogiendo los primeros acercamientos y definiciones, a veces desde distintas perspectivas —como la física, la geométrica o la analítica— de las superficies minimales. Uno de los avances más significativos en esta materia sucedió entre 1861 y 1864 con la incorporación del Análisis Complejo al estudio de las superficies minimales, culminando en lo que hoy conocemos como Representación de Weierstrass-Enneper, que también tratamos en este texto. Por último, pasamos a estudiar una de las principales herramientas en el contexto de la teoría de superficies: el Principio del máximo. Este resultado permite comparar y distinguir superficies a través del análisis de sus respectivas curvaturas medias.

## Abstract

The investigation of the theory of minimal surfaces, which still remains fully in force, began in the 18th century with valuable contributions from illustrious mathematicians such as L. Euler or J. Lagrange. We begin this work by collecting the first approaches and definitions, sometimes from different perspectives —such as physic, geometric or analytic— of minimal surfaces. One of the most significant advances in this subject occurred between 1861 and 1864 with the incorporation of Complex Analysis to the study of minimal surfaces, culminating in what we know today as the Weierstrass-Enneper Representation, which we also discuss in this text. Finally, we move on to study one of the main tools in the context of surface theory: the Maximum Principle. This result allows us to compare and distinguish surfaces through the analysis of their respective mean curvatures.



# Introducción

¿Qué tienen en común un catenoide y una pompa de jabón? El lector puede pensar que se trata de objetos sin ningún tipo de relación. Sin embargo, bajo esta pregunta de sencillo planteamiento se esconden siglos de rigurosa investigación en torno a la teoría de superficies minimales. De hecho, subyace en la propia pregunta que las superficies minimales surgen y se investigan atendiendo a diferentes perspectivas de las matemáticas e incluso de la ciencia.

Es más, la introducción del Cálculo Variacional en el siglo XVII trajo consigo la convicción de que muchas de las formas perfectas observadas en la naturaleza, así como las leyes más fundamentales de la física, podían entenderse como el resultado de optimizar una cantidad señalada. En este periodo adquiere particular relevancia el *Principio de Fermat*, según el cual la luz se propaga entre dos puntos siguiendo un trayecto tal que el tiempo empleado es mínimo. No obstante, este principio puede refinarse exigiendo que el tiempo empleado sea, en lugar de mínimo, estacionario frente a variaciones de la trayectoria. De forma análoga, y para contextualizar nuestra pregunta, en este Trabajo de Fin de Grado caracterizaremos las superficies minimales como aquellas que constituyen un punto crítico para el funcional área.

En esta línea, el *catenoide*, que mencionábamos al comienzo de esta introducción, fue descubierto en 1741 por L. Euler y constituye el primer ejemplo de superficie de revolución que minimiza el área. Dos décadas más tarde, en 1762, J. Lagrange generalizó el problema de encontrar una superficie de área mínima. En términos más precisos, consideremos una superficie regular definida como el grafo de una función diferenciable  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Esta superficie tendrá área mínima si  $f$  satisface la que hoy conocemos como *ecuación de Euler-Lagrange*, es decir,

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Además, y pasando a un punto de vista más geométrico, esta ecuación expresa la anulación de una cantidad geométrica asociada a la forma en que se curva una superficie que, en 1776, J. Meusnier bautizaría como *curvatura media*. Aunque durante el siglo XVIII esta curvatura compartía protagonismo con la de Gauss,  $K$ , en el estudio geométrico de las superficies, el teorema Egregium de Gauss reveló, de forma sorprendente, que  $K$  es una propiedad intrínseca

de cada superficie. No obstante, el eje central de este trabajo será la curvatura media, debido a las extraordinarias consecuencias que trae consigo.

En cualquier caso, Meusnier, además de descubrir el *helicoide* como una nueva superficie minimal —que años más tarde E. Catalan identificaría como la única minimal reglada no plana— estableciese la definición de superficie minimal que se emplea en nuestros días y que por tanto adoptaremos en este texto:

*Una superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice minimal si su curvatura media es nula.*

Entre 1784 y 1787, G. Monge y A. M. Legendre introdujeron el Análisis Complejo en la teoría de las superficies minimales al proporcionar las primeras fórmulas de representación integral para las componentes de las soluciones de la *ecuación de Euler-Lagrange*. Estas fórmulas inspiraron a F. Scherk para que, casi 50 años después, presentase explícitamente cinco nuevas superficies minimales que hoy llevan su nombre.

En este contexto de desarrollo de fórmulas de representación mediante funciones de variable compleja, K. Weierstrass y A. Enneper establecieron, en la década de 1860, lo que hoy se conoce como *Representación de Weierstrass-Enneper*. Esta formulación no solo facilitó la obtención de nuevos ejemplos —como la *superficie de Enneper*— sino que también permitió abordar cuestiones más técnicas sobre la geometría de las superficies minimales completas, como el estudio del comportamiento de su aplicación de Gauss. En esta línea y motivado por el hecho de que hasta hace apenas 30 años todos los ejemplos conocidos de superficies minimales completas cubrían, bajo su aplicación de Gauss, toda la esfera salvo a lo sumo cuatro puntos, R. Osserman retomó el trabajo de Weierstrass y Enneper con el propósito de determinar si esta omisión era la mayor posible. Sería H. Fujimoto [16] quien, en 1988, respondería afirmativamente esta cuestión.

El repertorio de superficies minimales se amplió en 1865 con la incorporación de la primera superficie minimal no orientable: la *superficie de Henneberg*. No obstante, habría que esperar hasta la década de 1980 para que C.C. Chen y F. Gackstatter descubriesen los dos primeros ejemplos orientables con topología no trivial. Finalmente, la *superficie de Costa* marcó un hito al tratarse de la primera superficie minimal propiamente embebida.

Aunque el siglo XX no trajo consigo grandes avances en materia de superficies minimales, cabe destacar el nacimiento y posterior desarrollo de la teoría de integración y de la medida, así como la teoría del Análisis Funcional. En este contexto se demuestra el teorema de Bernstein [6], uno de los más fascinantes resultados en la teoría de las ecuaciones, afirmando que el único grafo mínimo definido en todo el plano es el inducido por una función afín.

Además de la *Representación de Weierstrass-Enneper*, otra de las herramientas fundamentales para trabajar con superficies minimales es lo que hoy conocemos como *Principio del máximo*,

con aplicaciones como el *método de reflexión de Alexandrov*, que sirvió para caracterizar a la esfera como la única superficie regular conexa y compacta de curvatura media constante; o la *desigualdad isoperimétrica*, que caracteriza a la circunferencia como la curva de Jordan  $\Gamma$  plana con longitud fija que encierra mayor área.

Como ya anticipábamos arriba, y retomando en cierto modo la pregunta con la abrimos esta introducción, las superficies minimales admiten más perspectivas que la de minimizar el área, resolver la *ecuación de Euler-Lagrange* o anular una de las principales nociones de curvatura de una superficie.

En 1847, J. Plateau aportó el enfoque físico al estudio de las superficies minimales. Mediante un contorno de alambre prefijado sumergido en una solución jabonosa, Plateau observó que era posible reproducir este tipo de superficies siguiendo la configuración que adopta una pompa de jabón. De esta manera, al igual que el catenoide, una pompa de jabón representa un modelo físico concreto de superficie minimal. A partir de estas observaciones experimentales, Plateau estableció lo que hoy conocemos como el *problema de Plateau*. Este problema consiste en demostrar que cualquier curva cerrada y simple  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  puede ser frontera de una superficie minimal. Aunque la primera prueba de existencia general de solución en su versión no paramétrica fue obtenida por el matemático húngaro A. Haar [18] en 1928 y perfeccionada por su compatriota T. Radó, la resolución al problema con contorno general llegaría poco más de un año después de la mano de R. Garnier, con posteriores modificaciones de J. Douglas [12, 13] y Radó [28].

Aunque el problema ya ha sido resuelto, su relevancia continúa no solo por servir de nexo entre distintas ramas de las matemáticas —como la Geometría Diferencial, el Cálculo Variacional o el Análisis Complejo— sino también por estar presente en disciplinas tan diversas como la biología o incluso la arquitectura o el arte.

Otro de los problemas que ilustran la profundidad de la teoría de las superficies minimales, y que merece una mención especial es el *problema de Calabi*, que consiste en demostrar que no existe ninguna superficie minimal completa contenida en un semiespacio de  $\mathbb{R}^3$  que no sea un plano paralelo a la frontera de dicho semiespacio.

Hoy en día, dentro de la teoría de subvariedades, las superficies minimales siguen jugando un papel fundamental, pues tanto su atractivo como enorme dificultad continúan despertando un gran interés en la comunidad investigadora.

Estructuramos el desarrollo de nuestro estudio en 4 capítulos.

En el Capítulo 1 revisamos brevemente la teoría de variedades diferenciables vista en el grado con el fin de introducir la noción de *variedad de Riemann* y establecer el marco geométrico sobre el que se asienta la mayor parte de los resultados dados en este texto: las *superficies regulares*.

En el Capítulo 2 presentamos distintas definiciones de superficie minimal que surgieron a lo largo de la historia y analizamos la relación entre ellas, probando algunas equivalencias e indicando las referencias donde encontrar las que omitimos.

Comenzamos el Capítulo 3 con una pequeña revisión de la teoría del Análisis Complejo para dar paso a la *Representación de Weierstrass-Enneper* y al concepto de *superficie minimal global*, sentando así las bases para el estudio de omisión de puntos en la esfera.

Finalizamos este texto con el Capítulo 4, destinado a enunciar y probar el *Principio del máximo*. Para ello, introducimos algunos resultados sobre operadores lineales elípticos, los adaptamos al operador de curvatura media y establecemos las nociones necesarias para la comparación de superficies.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo introducimos la terminología, notación y resultados de Geometría Diferencial que serán empleados a lo largo del texto. Aunque principalmente desarrollaremos los resultados de este texto sobre superficies regulares, también emplearemos las variedades de Riemann. Así, comenzamos en la Sección 1.1 revisando el concepto de variedad topológica, para luego ver que trasladar a esta las ideas del cálculo diferencial nos lleva de modo natural a la noción de variedad diferenciable. Posteriormente, en la Sección 1.2, analizamos cómo dotar de estructura métrica a una variedad diferenciable, lo que nos lleva precisamente a la idea variedad de Riemann. Finalmente, la Sección 1.3 abarca, como anticipamos, un elemento clave en el desarrollo de este texto: las superficies regulares. Estas pueden verse como cierta clase de subvariedades 2-dimensionales del espacio euclídeo, pensando este último como una variedad de Riemann con la métrica usual. En este capítulo seguimos principalmente [21] y [22].

### 1.1. Variedades diferenciables

Si bien este texto está principalmente escrito en términos de superficies regulares de  $\mathbb{R}^3$ , para el desarrollo de nuestro cometido será de gran utilidad la noción de *variedad de Riemann*. Para formalizar este concepto comenzaremos con la definición de *variedad topológica*.

**Definición 1.1.** Definimos una *variedad topológica*  $M$  como un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y localmente euclídeo<sup>1</sup>.

**Definición 1.2.** Una *variedad topológica con borde*  $M$  de dimensión  $n$  es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y localmente homeomorfo a un abierto relativo de  $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ . Denotamos el borde de  $M$  por  $\partial M$ .

---

<sup>1</sup>Para cada  $p \in M$  existe un homeomorfismo  $\varphi: U \subseteq M \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  entre los abiertos  $U$  y  $\hat{U}$ . El par  $(U, \varphi)$  se denomina *carta local de  $M$  en  $p$* .

En lo que sigue omitiremos, por comodidad, el calificativo “topológica” cuando nos refiramos a una variedad de este tipo. Esta definición será suficiente para abordar cuestiones topológicas como la completitud o la compacidad.

A la hora de trasladar las ideas del cálculo diferencial a una variedad topológica  $M$ , una primera dificultad es dotar de sentido al hecho de que una función  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  sea diferenciable en  $p \in M$ . Como primera respuesta, uno puede tomar una carta local  $(U, \varphi)$  de  $M$  con  $p \in U$ , y decir que  $f$  es diferenciable en  $p$  si  $f \circ \varphi^{-1}$  es diferenciable en el sentido usual entre abiertos del espacio euclídeo. Ahora bien, ¿depende esta definición de la carta  $(U, \varphi)$  escogida? Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.3.** Diremos que dos cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  de una variedad topológica  $M$  son *compatibles* si  $U \cap V = \emptyset$  o el cambio de coordenadas  $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  es un difeomorfismo.

Recordemos que un *atlas en  $M$*  es una colección de cartas  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  tales que  $\cup_{i \in I} U_i = M$ . En el contexto de variedades diferenciables exigimos, además de que las cartas sean compatibles, una cuestión técnica fundamental: que el atlas diferenciable sea maximal.

**Definición 1.4.** Definimos un *atlas maximal en  $M$*  como el mayor atlas diferenciable, es decir, el mayor conjunto de cartas diferenciables que cubren  $M$  tal que los cambios de coordenadas siguen siendo compatibles.

De hecho, este atlas maximal será la estructura diferenciable que buscábamos para poder hacer cálculo diferencial en nuestra variedad  $M$ .

**Definición 1.5.** Diremos que un par  $(M, \mathcal{A})$ , donde  $M$  es una variedad y  $\mathcal{A}$  es un atlas maximal, es una *variedad diferenciable*.

Ahora, ya estamos en posición para dar la siguiente definición.

**Definición 1.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $(U, \varphi)$  una carta local de  $p \in M$  tal que  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diremos que  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una *función diferenciable en  $p$*  si la composición  $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable en  $\varphi(p)$  en el sentido usual. Si  $f$  es diferenciable en todo  $p \in M$  escribiremos  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

*Observación 1.7.* Cuando cubrimos una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$  con un atlas de parametrizaciones de abiertos de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ , la estructura diferenciable de  $\mathbb{R}^3$  garantiza la diferenciable de todos los cambios de coordenadas ([19, Teorema 2.1.8]).

**Definición 1.8.** Decimos que una aplicación  $F: M \rightarrow N$  entre dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$  de dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente, es *diferenciable* si para todo  $p \in M$  existen

dos cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  conteniendo a  $p$  y  $F(p)$ , respectivamente, tales que  $F(U) \subseteq V$  y la composición

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

es diferenciable como una aplicación entre abiertos del espacio euclídeo.

En el contexto de variedades diferenciables, el espacio tangente a un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  generaliza el concepto de vector tangente a  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, cuando consideramos una variedad diferenciable arbitraria  $M$  (no necesariamente contenida en el espacio euclídeo), el espacio tangente  $T_p M$  se define del modo que sigue.

**Definición 1.9.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . Definimos una *derivación en  $p$*  como una aplicación lineal  $v: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  verificando

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \quad \text{para toda } f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

De esta manera, el conjunto de todas las derivaciones de  $\mathcal{C}^\infty(M)$  en  $p \in M$ , llamadas ahora *vectores tangentes a  $M$  en  $p$* , se denomina *espacio tangente a  $M$  en  $p$*  y lo denotamos por  $T_p M$ .

*Observación 1.10.* Dada  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  una carta local de  $M$  en  $p \in M$ , definimos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : \mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}), \end{aligned}$$

que resulta ser un elemento del espacio tangente a  $M$  en  $p$ . Además,  $T_p M$  es precisamente el espacio vectorial generado por  $\{\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : i = 1, \dots, n\}$ . De este modo, todo  $v \in T_p M$  se puede escribir como  $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  para ciertos  $v_i \in \mathbb{R}$ .

Sin embargo, esta no es la única interpretación geométrica de  $T_p M$ . Sea  $\alpha: I \rightarrow M$  una *curva diferenciable en  $M$*  definida en un abierto  $I \subset \mathbb{R}$  con  $\alpha(0) = p$ . Podemos definir

$$\begin{aligned} \alpha'(0) : \mathcal{C}^\infty(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \alpha'(0)(f) = (f \circ \alpha)'(0), \end{aligned}$$

una derivación en  $p$  puesto que si  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$  entonces

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(fg) &= (fg \circ \alpha)'(0) = [(f \circ \alpha)(g \circ \alpha)]'(0) = f(\alpha(0))(g \circ \alpha)'(0) + g(\alpha(0))(f \circ \alpha)'(0) \\ &= f(\alpha(0))\alpha'(0)(g) + g(\alpha(0))\alpha'(0)(f). \end{aligned}$$

Así,  $\alpha'(0) \in T_p M$  y podemos reinterpretar este espacio tangente como el conjunto de todas las derivaciones inducidas mediante curvas diferenciables  $\alpha$  tales que  $\alpha(0) = p$ , es decir

$$T_p M = \{\alpha'(0) : \alpha : I \rightarrow M \text{ es una curva diferenciable tal que } \alpha(0) = p\}.$$

**Definición 1.11.** Sea  $F: M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$ . Definimos la *diferencial de  $F$  en  $p$*  como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} dF_p: T_p M &\rightarrow T_{F(p)} N \\ v &\mapsto dF_p(v): f \in \mathcal{C}^\infty(N) \mapsto dF_p(v)(f) = v_p(f \circ F) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Observación 1.12.* En las hipótesis de la Definición 1.11, definimos el *rango de  $F$  en  $p$*  como el rango de la aplicación lineal  $dF_p$ . De esta manera, si  $F$  tiene el mismo rango para todo  $p \in M$  entonces diremos que  $F$  tiene *rango constante*.

**Definición 1.13.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Definimos un *campo de vectores  $X$  en  $M$*  como la aplicación que asigna a cada punto  $p \in M$  un vector tangente  $X_p \in T_p M$ , es decir

$$X: p \in M \mapsto X_p \in T_p M.$$

Además, si  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  es una carta de  $p \in M$  entonces

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

donde  $X = (X^1, \dots, X^n)$  y  $X^i: U \rightarrow \mathbb{R}$  son las *funciones componentes de  $X$* .

*Observación 1.14.* En las hipótesis de la Definición 1.13, diremos que el campo de vectores  $X$  es *diferenciable* si lo son sus funciones componentes  $X^i$  en el sentido de la Definición 1.6. Además, denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  al conjunto de todos los campos de vectores diferenciables en  $M$ .

## 1.2. Variedades de Riemann

Ahora que hemos introducido las variedades diferenciables junto con diversas herramientas para trabajar con ellas, es necesario introducir la noción de *tensor* para poder definir una variedad de Riemann.

En lo que sigue consideraremos  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita, cuyos elementos se llamarán *vectores*, y su espacio dual  $V^*$ , cuyos elementos denominaremos *covectores*.

**Definición 1.15.** Definimos un *tensor de tipo  $(k, l)$*  como una aplicación multilineal

$$T: V^* \times \overset{k}{\dots} \times V^* \times V \times \overset{l}{\dots} \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Además  $T^{(k, l)}(V)$  denota el conjunto de tensores de tipo  $(k, l)$ . En ese caso, diremos que los elementos de  $T^{(k, l)}(V)$  tienen *rango  $k + l$* .

**Definición 1.16.** Decimos que un tensor de tipo  $(0, l)$  es un *tensor  $l$ -covariante*, mientras que un tensor de tipo  $(k, 0)$  es un *tensor  $k$ -contravariante*.

**Definición 1.17.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Definimos el *fibrado de los  $(k,l)$ -tensores en  $M$*  como la unión disjunta

$$T^{(k,l)}(M) = \bigsqcup_{p \in M} T^{(k,l)}(T_p M).$$

Además, un *campo de tensores en  $M$*  es una sección del fibrado tensorial  $T^{(k,l)}(M)$ . Denotaremos por  $\tau^l(M)$  al espacio de los campos de  $l$ -tensores covariantes.

**Proposición 1.18.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un campo de tensores  $l$ -covariantes en  $M$  será diferenciable si, y solo si, la aplicación

$$\begin{aligned} T(X_1, \dots, X_l): M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto T(X_1, \dots, X_l)(p) = T_p(X_1|_p, \dots, X_l|_p) \end{aligned}$$

es diferenciable, donde  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$  para  $i \in \{1, \dots, l\}$ .

Estamos ahora en condiciones de definir una métrica de Riemann sobre una variedad diferenciable  $M$  que, como veremos, asigna a cada  $p$  en  $M$  un producto escalar en  $T_p M$  que varía de forma diferenciable a lo largo de la variedad.

**Definición 1.19.** Una *métrica de Riemann  $g$*  en una variedad diferenciable  $M$  es un campo de tensores diferenciable 2-covariante, simétrico y definido positivo. Es decir, para cada  $p \in M$  se tiene:

1.  $g_p(v, w) = g_p(w, v)$ , para todo  $v, w \in T_p M$ ,
2.  $g_p(v, v) > 0$ , para todo  $v \in T_p M \setminus \{0\}$ .

**Ejemplo 1.20.** El ejemplo más básico de métrica de Riemann es la *métrica euclídea en  $\mathbb{R}^n$* , dada por

$$g = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2,$$

donde  $\delta_{ij}$  denota la delta de Kronecker y  $(x^1, \dots, x^n)$  son las coordenadas cartesianas. Si aplicamos esta métrica a dos vectores  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , con coordenadas  $(v^1, \dots, v^n)$  y  $(w^1, \dots, w^n)$ , es claro que

$$g_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} v^i \otimes w^j = \sum_{i=1}^n v^i \cdot w^i = \langle v, w \rangle.$$

De esta manera,  $g$  es un campo de tensores diferenciable 2-covariante que representa localmente el producto escalar usual en cada punto.

**Definición 1.21.** Una *variedad de Riemann* es un par  $(M, g)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $g$  es una métrica de Riemann en  $M$ .

Aunque en este texto omitiremos la demostración, se puede probar que toda variedad diferenciable admite una métrica de Riemann ([22, Proposición 13.3]). Así pues, toda variedad diferenciable puede dotarse de estructura de variedad de Riemann.

**Definición 1.22.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables,  $F: M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable y  $g$  una métrica de Riemann en  $N$ . Definimos el *pullback*  $F^*g$  como el campo de tensores diferenciable 2-covariante en  $M$  dado por

$$(F^*g)_p(v, w) = g_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(w)), \quad \text{con } p \in M \text{ y } v, w \in T_pM.$$

*Observación 1.23.* En las hipótesis de la Definición 1.22, si  $F^*g$  es definido positivo entonces es una métrica de Riemann en  $M$ , denominada *métrica pullback determinada por  $F$* . Además,  $F^*g$  es una métrica de Riemann en  $M$  si, y solo si,  $F$  es una inmersión diferenciable ([22, Proposición 13.9]) o, equivalentemente, si  $dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  es inyectiva.

**Definición 1.24.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con dos métricas de Riemann  $g$  y  $\tilde{g}$ . Diremos que  $g$  y  $\tilde{g}$  son *conformemente equivalentes* si existe una función estrictamente positiva  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  tal que  $\tilde{g} = fg$ .

Como consecuencia de las dos anteriores definiciones tenemos la siguiente.

**Definición 1.25.** Dos variedades de Riemann  $(M, g)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  se dicen *conformemente equivalentes* si existe un difeomorfismo  $F: M \rightarrow \tilde{M}$  tal que la métrica  $F^*\tilde{g}$  es conformemente equivalente a  $g$ .

Sea  $M$  una variedad de Riemann conexa y  $p, q \in M$ . Definimos la *distancia Riemanniana*  $d(p, q)$  como el ínfimo de las longitudes de las curvas regulares a trozos  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ , con  $p = \gamma(0)$  y  $q = \gamma(1)$ , que conectan  $p$  y  $q$ . De esta manera,  $(M, d)$  resulta ser un espacio métrico ([21, Lema 6.2]).

**Definición 1.26.** Decimos que una variedad de Riemann  $M$  es *completa* si  $(M, d)$  es un espacio métrico completo.

**Definición 1.27.** Decimos que una variedad de Riemann  $M$  es *geodésicamente completa* para todo  $p \in M$  si toda geodésica maximal, con punto inicial en  $p$ , está definida para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ .

Aunque las Definiciones 1.26 y 1.27 pueden parecer de naturaleza independiente, el teorema que enunciamos a continuación, y que incluye otras caracterizaciones, establece su equivalencia.

**Teorema 1.28 (Teorema de Hopf-Rinow, [9, §7, Teorema 2.8]).** *Sea  $M$  una variedad de Riemann dotada con la distancia Riemanniana  $d$  inducida. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $M$  es completa,
2.  $M$  es geodésicamente completa,
3. La función exponencial  $\exp_p$  está definida en todo  $T_pM$  para cualquier  $p \in M$ ,
4. Si  $U$  es un subconjunto acotado del espacio métrico  $(M, d)$ , entonces  $\bar{U}$  es compacto.

Buscamos ahora dar otra caracterización de completitud, que será particularmente útil en el desarrollo de la Sección 3.4. Para esto debemos definir lo que entendemos por un camino divergente.

**Definición 1.29.** Sea  $M$  una variedad de Riemann y  $\gamma: [0, 1) \rightarrow M$  una curva tal que para todo compacto  $K \subset M$  existe un  $t_0(K) \in [0, 1)$  verificando que  $\gamma(t) \in M \setminus K$  para todo  $t > t_0(K)$ . Diremos entonces que  $\gamma$  es un *camino divergente en  $M$* .

**Proposición 1.30.** Sea  $M$  una variedad de Riemann. Entonces  $M$  es completa si, y solo si, todo camino divergente  $\gamma: [0, 1) \rightarrow M$  en  $M$  tiene longitud infinita.

*Demostración.* Comencemos suponiendo que  $M$  es completa y que  $\gamma$  es una curva arbitraria de longitud finita. Así,  $\gamma([0, 1))$  es acotado y, por el apartado 4 del Teorema 1.28,  $\overline{\gamma([0, 1))}$  es compacto, de donde se sigue que  $\gamma$  es un camino no divergente.

Recíprocamente, supongamos que  $M$  es no completa. Podemos entonces encontrar, como consecuencia de los apartados 1 y 2 del Teorema 1.28, una geodésica  $\gamma: [0, 1) \rightarrow M$  tal que  $[0, 1)$  es su dominio maximal. Ahora bien, dado que si existiese  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \gamma(t)$  entonces podríamos extender  $\gamma$  más allá de  $t = 1$ , se tiene que  $\gamma$  es un camino divergente. Por definición, el módulo de la velocidad de  $\gamma$  es constante, de donde concluimos que la longitud de  $\gamma$  será finita.  $\square$

Para acabar con esta sección proporcionaremos algunos resultados relacionados con el área de topología que serán de gran ayuda en la Sección 3.4. Seguiremos para esto la exposición dada en [17].

**Definición 1.31.** Sean  $\tilde{X}$  y  $X$  dos espacios topológicos. Diremos que una aplicación continua  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  es una *proyección de revestimiento de  $X$*  si todo  $x \in X$  posee un abierto  $U$  tal que  $\pi^{-1}(U)$  es la unión disjunta de abiertos en  $\tilde{X}$ , cada uno de ellos homeomorfo a  $U$  mediante  $\pi$ . En este caso diremos que  $\tilde{X}$  es un *revestimiento de  $X$* .

Se puede probar que si  $X$  posee un revestimiento  $\tilde{X}$  simplemente conexo, entonces este es único salvo homeomorfismos ([17, (6.5)]) y se denomina *revestimiento universal*. Acabamos esta sección con el siguiente resultado.

**Teorema 1.32** ([17, (6.8)]). *Toda variedad diferenciable conexa posee un revestimiento universal.*

### 1.3. Superficies regulares

La estructura geométrica principal sobre la que escribimos este texto son las superficies regulares de  $\mathbb{R}^3$ . Estas pueden entenderse como una generalización bidimensional del concepto de *curva regular*, definiendo esta última como una aplicación diferenciable  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $I$  denota un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.33.** Decimos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una *superficie regular de  $\mathbb{R}^3$*  si para todo  $p \in S$  existen un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , con  $p \in U$ , un abierto  $V$  de  $p$  en  $S$  y una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \end{aligned}$$

denominada *parametrización*, tal que  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{X}(U) = V$  es un homeomorfismo y  $d\mathbb{X}_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva para todo  $q = (u, v) \in U$ .

Mientras que en el caso de las curvas regulares el interés principal recae en la parametrización utilizada, que en particular nos da una idea de cómo se recorre la imagen, en el caso de las superficies regulares centraremos nuestra atención en el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que define la superficie como un objeto independiente de la parametrización escogida. Bajo este enfoque, en esta sección mostraremos que una superficie regular no es más que una subvariedad regular 2-dimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Con este fin, es necesario primero introducir algunos conceptos importantes, los cuales se pueden consultar en [22, §4, §5].

**Definición 1.34.** Sea  $F: N \rightarrow M$  una aplicación diferenciable tal que su diferencial

$$dF_p: T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$$

es inyectiva para todo  $p \in N$ , es decir,  $F$  tiene rango  $n$ . En este caso decimos que  $F$  es una *inmersión*. Si además  $F: N \rightarrow F(N)$  es un homeomorfismo con la topología relativa de  $F(N)$  como subespacio topológico de  $M$ , entonces se dice que  $F$  es un *embebimiento*.

Ahora bien, consideremos  $S \subseteq M$  un subconjunto de una variedad diferenciable  $M$  dotado de cierta topología. Entonces  $S$  es una *subvariedad diferenciable* si es una variedad topológica respecto a esa topología y está dotada de una estructura diferenciable respecto de la cual  $i: S \hookrightarrow M$  es una inmersión.

**Definición 1.35.** Sea  $S \subseteq M$  una subvariedad diferenciable de  $M$ . Decimos que  $S$  es una *subvariedad regular* (o *embebida*) de  $M$  si la inclusión  $i: S \hookrightarrow M$  es un embebimiento.

La siguiente proposición supone un método natural para obtener subvariedades regulares.

**Proposición 1.36** ([22, Proposición 5.2]). *Sea  $F: N \rightarrow M$  un embebimiento entre dos variedades diferenciables  $N$  y  $M$  tal que  $S = F(N)$ . Entonces, con la topología relativa,  $S$  es una subvariedad topológica que admite una única estructura diferenciable que la convierte en una subvariedad regular de  $M$  de igual dimensión que  $N$ .*

Por tanto, se sigue que toda superficie regular de  $\mathbb{R}^3$  es una subvariedad regular de  $\mathbb{R}^3$  2-dimensional. Sea  $\mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrización que define a nuestra superficie regular  $S$ . Por definición,  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{X}(U) = S$  es un homeomorfismo y  $d\mathbb{X}_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva para todo  $q = (u, v) \in U$ . Así, por la Proposición 1.36, concluimos que toda superficie regular de  $\mathbb{R}^3$  es una subvariedad regular de  $\mathbb{R}^3$ . En lo que sigue de sección,  $M$  pasará a denotar una superficie regular.

Una vez resuelta la cuestión de cómo hacer cálculo diferencial en nuestra superficie regular, queremos iniciar el estudio geométrico de la misma. Es en este punto del desarrollo cuando cobra importancia todo lo expuesto en la Sección 1.2, pues es natural entender  $\mathbb{R}^3$  como una variedad de Riemann dotada con la métrica dada en el Ejemplo 1.20: el producto escalar usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Así pues, toda superficie regular  $M$  puede verse como una subvariedad regular 2-dimensional de la variedad de Riemann  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Definición 1.37.** Definimos la *primera forma fundamental de  $M$  en  $p$*  como la forma cuadrática

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p: T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \mathbb{I}_p(v, w) = \langle v, w \rangle_p = \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

con  $\mathbb{X}(u, v) = p \in M$ . Además, se denominan *coeficientes<sup>2</sup> de la primera forma fundamental* ( $E$ ,  $F$  y  $G$ ) a los coeficientes de su matriz de Gram respecto a la base dada por  $\mathbb{X}_u$  y  $\mathbb{X}_v$ , esto es

$$\begin{aligned} \blacksquare E &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle, & \blacksquare F &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle, & \blacksquare G &= \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle. \end{aligned}$$

*Observación 1.38.* En la anterior definición y en lo que sigue, entendemos  $\mathbb{X}_u = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial u}$  y  $\mathbb{X}_v = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial v}$ . Además,  $T_p M = \text{span} \{ \mathbb{X}_u(u, v), \mathbb{X}_v(u, v) \}$ .

Puesto que  $T_p M$  es un plano vectorial en el espacio métrico  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , podemos entender la primera forma fundamental de una superficie como el producto escalar inducido sobre su tangente en cada punto, convirtiéndose así en una herramienta fundamental para calcular ángulos, longitudes o áreas; en definitiva, para hacer geometría.

**Definición 1.39.** Sea  $R \subset M$  una región de  $M$  y  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización tal que  $R \subset \mathbb{X}(U)$ . Definimos el *área de  $R$*  como

$$A(R) = \int \int_{\mathbb{X}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

<sup>2</sup>Formalmente se escriben evaluados en  $(u, v)$  pero por comodidad omitimos las variables.

Distinguir una superficie regular de otra a través de invariantes de naturaleza geométrica constituye una de las cuestiones centrales en el estudio de la geometría de superficies. Por ende, dedicaremos lo que queda de sección a profundizar en dicho problema.

Para motivar este análisis geométrico, comencemos considerando curvas planas. Es bien sabido que no podemos diferenciar una curva de otra desde una perspectiva íntinseca; para ello debemos estudiar sus curvaturas, es decir, la variación del vector normal a lo largo de la misma. Este será el enfoque que seguiremos en el caso de las superficies regulares, con la excepción de que ahora el vector normal es una aplicación definida en un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y en lugar de su derivada analizamos su diferencial.

Dada una superficie regular  $M$  localmente definida por una parametrización  $\mathbb{X}$  cuyo dominio de parámetros es un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , podemos definir un campo de vectores diferenciable, normal y unitario

$$N(\mathbb{X}(u, v)) = \frac{\mathbb{X}_u(u, v) \times \mathbb{X}_v(u, v)}{\|\mathbb{X}_u(u, v) \times \mathbb{X}_v(u, v)\|} \quad (u, v) \in U, \quad (1.1)$$

conocido como *aplicación de Gauss*. Sin embargo, no siempre es posible definir un campo de vectores diferenciable, normal y unitario de manera global en  $M$ . Las superficies regulares para las que esto es posible se denominan *orientables* (véase [19, Definición 3.1.3]) y cuando tratamos con estas en particular, podemos interpretar su aplicación de Gauss como una aplicación diferenciable entre dos superficies

$$N: M \rightarrow \mathbb{S}^2.$$

*Observación 1.40.* Nótese que si  $p' \in \mathbb{S}^2$  entonces  $N(p') = \pm p'$ . De esta manera, los tangentes  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$  y  $T_pM$  son el mismo en cada punto.

Lo que realmente nos interesa, como ya anticipamos, no es tanto la aplicación  $N$  en sí, sino cómo varía al desplazarnos por la superficie  $M$ . Si  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  es una curva diferenciable en las condiciones de la Observación 1.10, definimos la aplicación diferencial de  $N$  en  $p \in M$  como el endomorfismo

$$\begin{aligned} dN_p: T_pM &\rightarrow T_pM \\ v &\mapsto dN_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t). \end{aligned}$$

**Definición 1.41.** Sea  $M$  una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss  $N$  y  $p \in M$ . Definimos el *endomorfismo de Weingarten*  $A_p$  de  $M$  en  $p$  como la aplicación

$$A_p = -dN_p: T_pM \rightarrow T_pM.$$

**Definición 1.42.** Definimos la *segunda forma fundamental* de  $M$  en  $p$  como la forma bilineal

simétrica dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p: T_pM \times T_pM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \mathbb{I}_p(v, w) = \langle A_p(v), w \rangle_p = \langle A_p(v), w \rangle. \end{aligned}$$

Además, se denominan *coeficientes de la segunda forma fundamental* ( $e$ ,  $f$  y  $g$ ) a los coeficientes de su matriz de Gram respecto a la base dada por  $\mathbb{X}_u$  y  $\mathbb{X}_v$ , esto es

$$\blacksquare e = \langle A_p(\mathbb{X}_u), \mathbb{X}_u \rangle, \quad \blacksquare f = \langle A_p(\mathbb{X}_u), \mathbb{X}_v \rangle, \quad \blacksquare g = \langle A_p(\mathbb{X}_v), \mathbb{X}_v \rangle.$$

La matriz de Gram de la forma bilineal  $\mathbb{I}_p$  recoge la información geométrica dada por la diferencial de la aplicación de Gauss  $N$  y nos permitirá entender cómo se encuentra situada la superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

*Observación 1.43.* Se puede probar que  $e = \langle N, \mathbb{X}_{uu} \rangle$ ,  $f = \langle N, \mathbb{X}_{uv} \rangle$  y  $g = \langle N, \mathbb{X}_{vv} \rangle$ .

**Definición 1.44.** Dado  $v \in T_pM$  unitario, definimos la *curvatura normal de  $M$  en  $p$  en la dirección de  $v$*  como  $k_n(p, v) = \mathbb{I}_p(v) = \langle A_p(v), v \rangle$ .

La curvatura normal tiene una interpretación geométrica de gran interés: es la curvatura de la curva plana que resulta de intersecar  $M$  con el plano afín que pasa por  $p$  y que está generado por  $v \in T_pM$  y por  $N(p)$ . Esta curva, que resulta ser regular ([19, pág. 116]), se denomina *sección normal*.

Ahora bien, el endormorfismo de Weingarten es una aplicación autoadjunta en cada punto ([19, Proposición 3.3.2]). De esta manera, su matriz asociada con respecto a una base ortonormal será simétrica y, en consecuencia, diagonalizable.

**Definición 1.45.** Sea  $p$  un punto de la superficie regular  $M$  y  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormal de  $T_pM$  que diagonaliza  $A_p$ . Llamaremos *curvaturas principales de  $M$  en  $p$*  a los autovalores  $k_1(p) = \langle A_p(e_1), e_1 \rangle$  y  $k_2(p) = \langle A_p(e_2), e_2 \rangle$ .

*Observación 1.46.* Por convenio,  $k_1(p) \leq k_2(p)$ . Además, dado que para  $i \in \{1, 2\}$  se tiene que

$$k_i(p) = \langle A_p(e_i), e_i \rangle = \mathbb{I}_p(e_i) = k_n(e_i, p),$$

entonces las curvaturas principales no son más que las curvaturas normales en las direcciones  $e_1$  y  $e_2$ , denominadas *direcciones principales*. Así, las curvaturas principales están determinadas salvo el signo, pues la curvatura normal depende de la orientación de la superficie, variando su signo según la elección de  $N$ . Además, constituyen el máximo y mínimo de las curvaturas de las curvas sección normal ([19, Teorema 3.4.2]).

**Definición 1.47.** Sea  $M$  una superficie regular orientada por  $N$  y  $p \in M$ . Definimos la *curvatura de Gauss  $K$  de  $M$  en  $p$*  como

$$K(p) = \det(A_p) = k_1(p)k_2(p).$$

Asimismo, definimos la *curvatura media*  $H$  de  $M$  en  $p$  como

$$H(p) = \frac{1}{2}\text{tr}(A_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

*Observación 1.48.* Por ser una aplicación lineal,  $\det(A_p)$  y  $\text{tr}(A_p)$  son invariantes; es decir, no dependen de la base escogida. Además, se puede probar (ver [1, Teorema 13.25]) que

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right). \quad (1.2)$$

## Capítulo 2

# Superficies minimales

Como ya mencionábamos en la introducción de este trabajo, la noción de superficie minimal surge en el siglo XVIII y es posible aproximarse a ella desde diferentes perspectivas. De este modo, el objetivo principal de este capítulo es precisamente hacer un recorrido por estas distintas perspectivas o definiciones del concepto de superficie minimal, así como analizar las relaciones o equivalencias entre algunas de ellas. En términos más precisos, y aunque definiremos las superficies minimales como aquellas de curvatura media nula, veremos que, localmente, no solo pueden expresarse como grafos de funciones que satisfacen la ecuación de *Euler-Lagrange* (Sección 2.1), sino que también se corresponden con puntos críticos de un funcional asociado al área (Sección 2.2). Además, las superficies minimales —junto con las esferas— están caracterizadas por tener aplicación de Gauss conforme y, como se mostrará en la Sección 2.3, admiten un tipo de parametrizaciones muy específico: las isotermas armónicas. Cerramos este capítulo introduciendo la noción de superficie conjugada, que más adelante trataremos en detalle, para así dar paso al estudio de la relación entre la minimalidad y algunas familias importantes de superficies regulares, como las regladas o las de revolución (Sección 2.4). En este capítulo seguimos fundamentalmente [1] y [19].

### 2.1. Noción de superficie minimal

El problema de encontrar una superficie con contorno prefijado y cuya área fuese mínima cobró cada vez más importancia como objeto de estudio por algunos de los matemáticos más relevantes de la historia.

Comencemos por establecer la definición central de este texto.

**Definición 2.1.** Una superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice *minimal* si su curvatura media es nula.

A pesar de que esta definición de superficie minimal, dada por J. Meusnier en 1776, es la que se toma en nuestros días —y, por tanto, la que adoptaremos en este texto— probablemente no fue con ella que surgió originariamente el concepto. De hecho, sea  $M$  una superficie regular definida como el grafo de una función diferenciable  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U \subset \mathbb{R}^2$  un abierto. En 1762, J. Lagrange se interesó en minimizar el área de dicha superficie, lo que le condujo a formular la ecuación

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0, \quad (2.1)$$

actualmente conocida como *ecuación de Euler-Lagrange*. En el siguiente resultado precisamos la relación entre la Definición 2.1 (la definición estándar de superficie minimal) y esta ecuación. En términos informales, dicha ecuación expresa que el numerador de la curvatura media  $H$  de la superficie  $M$ , definida como grafo de  $f$ , sea nulo.

**Proposición 2.2.** *Sea  $M$  una superficie regular que admite una expresión local como la gráfica de una función diferenciable  $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $M$  es una superficie minimal si, y solo si,  $f$  verifica la ecuación de Euler-Lagrange dada en (2.1).*

*Demostración.* Si parametrizamos  $M$  como  $\mathbb{X}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , entonces obtenemos por un lado los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2,$$

y por otro lado los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Ahora bien, aplicando (1.2) entonces tenemos que

$$H = \frac{1}{2} \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_{uv}f_u f_v}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}},$$

de donde se sigue que  $H = 0$  si, y solo si,  $f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_{uv}f_u f_v = 0$ .  $\square$

Como consecuencia de la Proposición 2.2, la siguiente definición de superficie minimal es equivalente a la Definición 2.1.

**Definición 2.3.** Una superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  se dice *minimal* si se puede expresar localmente como la gráfica de una solución de la *ecuación de Euler-Lagrange* (2.1).

## 2.2. Superficies minimales como puntos críticos del funcional área

Con el nacimiento del Cálculo de Variaciones, surgió entre los matemáticos de la época la convicción de que las formas perfectas de la naturaleza y las leyes más relevantes desde una perspectiva científica eran aquellas que, de alguna manera, optimizaban una magnitud señalada.

En el contexto de búsqueda de máximos y mínimos para el funcional área, definido como  $A(t) = \text{Área}(\mathbb{X} + tuN)(\Omega)$ , donde  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\Omega$  es un abierto simplemente conexo con clausura compacta en  $M \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{X}$  es la parametrización de la superficie regular y  $N$  su vector normal, la *primera fórmula de variación del área* proporciona la primera derivada:

$$A'(0) = -2 \int_{\Omega} u H dA, \quad (2.2)$$

donde  $dA^1$  denota el elemento de área de  $M$ .

**Definición 2.4.** Una superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  será *minimal* si constituye un punto crítico para el funcional área asociado a cualquier variación normal con soporte compacto.

Buscaremos ahora probar la equivalencia entre las Definiciones 2.1 y 2.4. Para esto, comenzaremos introduciendo la siguiente definición.

**Definición 2.5.** Sea  $\mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^2$ , una parametrización de la superficie regular  $\mathbb{X}(U)$  y  $B \subset \mathbb{R}^2$  una bola abierta con clausura contenida en el abierto  $U$ , esto es,  $\bar{B} \subset U$ . Así,  $\mathbb{X}(B)$  es una superficie regular con parametrización  $\mathbb{X}|_B$ . Sea ahora  $h: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que  $h(x) = 0$  si  $x \in \partial B$ . Llamaremos *variación normal de  $\mathbb{X}(B)$  determinada por  $h$*  a la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: \bar{B} \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) &\mapsto \phi(u, v, t) = \mathbb{X}(u, v) + t h(u, v) N(\mathbb{X}(u, v)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $N$  denota el vector unitario y normal a  $\mathbb{X}(B)$  y  $\varepsilon > 0$  es tal que  $\mathbb{X}^t: (u, v) \in B \rightarrow \mathbb{X}^t(u, v) = \phi(u, v, t) \in \mathbb{R}^3$  es una parametrización de la superficie regular  $\mathbb{X}^t(B)$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

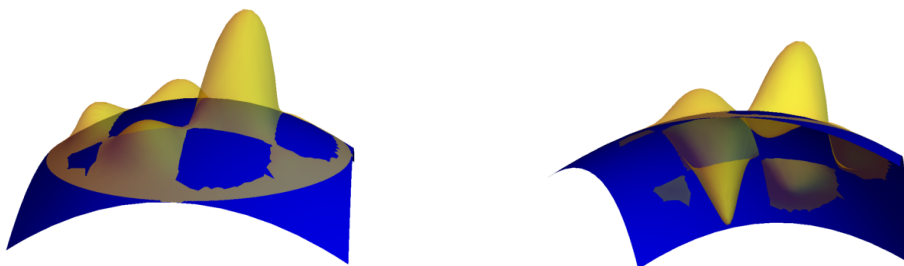


Figura 2.1: Variación normal.

*Observación 2.6.* Lo que se consigue con la variación normal es deformar una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$  desplazando sus puntos en la dirección normal para así obtener una familia de superficies. Estas superficies tendrán el mismo borde dado que, como  $h$  se anula en la frontera, entonces esta se mantiene invariante (véase la Figura 2.1).

<sup>1</sup>Dado  $p \in M$  y  $v, w \in T_p M$ , se tiene que  $dA(p)(v, w) = \det(v, w, N(p))$ . Además,  $dA(p)$  es una forma bilineal antisimétrica.

Para poder probar el teorema de caracterización de las superficies minimales como puntos críticos del funcional área debemos antes establecer un resultado auxiliar que nos asegurará la existencia de lo que se conoce como *función meseta*.

**Lema 2.7 (Existencia de funciones meseta).** *Sea  $B \subset \mathbb{R}^2$  una bola abierta con centro  $q \in B$  y radio  $r > 0$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(q, \varepsilon) \subset B$  existe una función meseta  $\tilde{h}: B \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:*

- $\text{sop}(\tilde{h}) \subset B(q, \varepsilon)$
- $0 \leq \tilde{h} \leq 1$
- $\tilde{h} = 1$  en  $B(q, \varepsilon/2)$ .

*Demostración.* Vamos a construir la función meseta de manera explícita. Definimos para esto una función diferenciable  $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$t \mapsto \tilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-1/t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Sea ahora  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x) = \frac{\tilde{g}(\varepsilon^2 - \|x\|^2)}{\tilde{g}(\varepsilon^2 - \|x\|^2) + \tilde{g}(\|x\|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2)}.$$

Es sencillo ver que el denominador nunca se anula, puesto que si  $\varepsilon^2 - \|x\|^2 \leq 0$  y  $\|x\|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \leq 0$  entonces  $\varepsilon^2 \leq \|x\|^2 \leq \frac{1}{4}\varepsilon^2$  y esto es imposible. Así pues,  $g$  es también diferenciable.

Además,  $g(x) = 0$  si, y solo si,  $\tilde{g}(\varepsilon^2 - \|x\|^2)$ , es decir, si, y solo si,  $\|x\| \geq \varepsilon$ . Se tiene entonces que  $g(x)$  es positivo para todo  $x \in B(0, \varepsilon)$ , por lo que  $\text{sop}(g) \subset B(0, \varepsilon)$  y  $0 \leq g \leq 1$ . Ahora bien, si  $x \in B(0, \varepsilon/2)$  entonces  $g(x) = 1$ .

Acabamos de demostrar que  $g$  verifica todas las condiciones de función meseta en la bola  $B(0, \varepsilon)$ . Bastará entonces tomar una traslación de  $g$  como función meseta, es decir, definimos  $\tilde{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\tilde{h}(x) = g(x - q)$ . □

Podemos finalmente establecer el teorema que, además de caracterizar a las superficies minimales como puntos críticos del funcional área, nos dará la equivalencia entre las Definiciones 2.1 y 2.4.

**Teorema 2.8 (Caracterización de las superficies minimales como puntos críticos del funcional área).** *Sea  $\mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^2$ , una parametrización de la superficie regular  $\mathbb{X}(U)$  y  $B \subset \mathbb{R}^2$  una bola abierta tal que  $\bar{B} \subset U$ . Entonces  $\mathbb{X}(B)$  es una superficie minimal si, y solo si,  $A'(0) = 0$ , donde  $A(t)$  denota el área de  $\mathbb{X}^t(B)$ , para toda variación normal  $\phi$  de  $\mathbb{X}(B)$ .*

*Demostración.* Comencemos por la primera implicación. Sea  $\mathbb{X}(B)$  una superficie minimal. Por definición de  $A(t)$  se tiene que

$$A(t) = \int_{\mathbb{X}^t(B)} dA = \int \int_B \sqrt{E_t G_t - F_t^2} dudv. \quad (2.4)$$

Recordemos de la Definición 2.5 que  $\mathbb{X}^t(u, v) = \phi(u, v, t) = \mathbb{X}(u, v) + t h(u, v) N(\mathbb{X}(u, v))$ , para cierta aplicación diferenciable  $h: B \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora bien, como

$$\mathbb{X}_u^t = \mathbb{X}_u + t h_u N + t h N_u \quad \text{y} \quad \mathbb{X}_v^t = \mathbb{X}_v + t h_v N + t h N_v,$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} E_t &= \langle \mathbb{X}_u^t, \mathbb{X}_u^t \rangle = E - 2th_e + t^2(h_u^2 + h^2 \langle N_u, N_u \rangle) = E - 2th_e + t^2 R_1, \\ F_t &= \langle \mathbb{X}_u^t, \mathbb{X}_v^t \rangle = F - 2th_f + t^2(h_u h_v + h^2 \langle N_u, N_v \rangle) = F - 2th_f + t^2 R_2, \\ G_t &= \langle \mathbb{X}_v^t, \mathbb{X}_v^t \rangle = G - 2th_g + t^2(h_v^2 + h^2 \langle N_v, N_v \rangle) = G - 2th_g + t^2 R_3, \end{aligned}$$

para ciertas funciones diferenciables  $R_1, R_2, R_3$ . Tomando  $R_4 = t^2(R_1 R_3 - R_2^2) - 2th(eR_3 + gR_1 - 2fR_2) + 4h^2(eg - f^2) - 2FR_2 + GR_1 + ER_3$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E_t G_t - F_t^2 &= EG - F^2 - 2ht(eG - 2fF + gE) + t^2 R_4 \\ &= (EG - F^2) \left( 1 - 2ht \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) + t^2 R_4 \\ &= (EG - F^2)(1 - 4htH + R), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado la ecuación (1.2) y que  $R = t^2 \frac{R_4}{EG - F^2}$  es tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} R/t = 0$ . Sustituyendo ahora en (2.4) obtenemos

$$A(t) = \int \int_B \sqrt{EG - F^2} \sqrt{1 - 4htH + R} dudv,$$

y si derivamos

$$A'(t) = \int \int_B \sqrt{EG - F^2} \frac{-4hH + 2t\tilde{R}}{2\sqrt{1 - 4htH + R}} dudv,$$

con  $\tilde{R} = 2t \frac{R_4}{EG - F^2}$ , de donde se sigue que  $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{R} = 0$ . Tomando  $t = 0$ ,  $\frac{-4hH + 2t\tilde{R}}{2\sqrt{1 - 4htH + R}} = -2hH$  obtenemos la siguiente expresión:

$$A'(0) = -2 \int \int_B hH \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Como nuestra hipótesis era que  $\mathbb{X}(B)$  es una superficie minimal entonces  $H(\mathbb{X}(u, v)) = 0$  para cada  $(u, v) \in B$ , de donde se sigue que  $A'(0) = 0$ .

Pasamos ahora a probar el recíproco. Dada una variación normal arbitraria de  $\mathbb{X}(B)$ , suponemos que  $A'(0) = 0$  pero que existe un punto  $p = \mathbb{X}(q)$  en  $\mathbb{X}(B)$  tal que  $H(p) \neq 0$ . Podemos

entonces encontrar por continuidad una bola abierta  $B(q, r_1) \subset B$  tal que  $(H \circ \mathbb{X})|_{B(q, r_1)} \neq 0$  conservando el mismo signo que  $H(p)$  en todos los puntos. Supongamos, sin pérdida de generalidad e invirtiendo la orientación si es necesario, que  $H(p) > 0$ . Por el Lema 2.7 sabemos que existe una función meseta  $\tilde{h}: B \rightarrow \mathbb{R}$  en  $B(q, r_1)$  diferenciable verificando que  $0 \leq \tilde{h} \leq 1$ , con  $\text{sop}(\tilde{h}) \subset B(q, r_1)$  y tal que existe un  $r_2 < r_1$  de manera que  $\tilde{h}|_{B(q, r_2)} = 1$ .

Como  $A'(0) = 0$  para cualquier variación normal de  $\mathbb{X}(B)$ , en particular se anulará para la determinada por la función  $\tilde{h}$  definida anteriormente. Podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} 0 = A'(0) &= -2 \int \int_B \tilde{h} H \sqrt{EG - F^2} \, dudv = -2 \int \int_{B(q, r_1)} \tilde{h} H \sqrt{EG - F^2} \, dudv \\ &= -2 \int \int_{B(q, r_1) \setminus B(q, r_2)} \tilde{h} H \sqrt{EG - F^2} \, dudv - 2 \int \int_{B(q, r_2)} \tilde{h} H \sqrt{EG - F^2} \, dudv < 0, \end{aligned}$$

dado que  $H$  y  $\sqrt{EG - F^2}$  son estrictamente positivos, en la primera integral  $\tilde{h} \geq 0$  y en la segunda  $\tilde{h} = 1$ , por lo que esta última nunca se anula.

Llegamos así a una contradicción con el hecho de que  $A'(0) = 0$ . Dicha contradicción viene de suponer  $H(p) \neq 0$ . Por tanto  $H(p) = 0$  para todo  $p \in \mathbb{X}(B)$ , es decir, concluimos que  $\mathbb{X}(B)$  es una superficie minimal.  $\square$

A la luz del Teorema 2.8, la siguiente definición de superficie minimal es equivalente a la Definición 2.1, puesto que, dada una variación normal arbitraria, la anulación de la primera variación del área implica que, en dominios suficientemente pequeños, la superficie minimiza localmente el área de entre todas aquellas que comparten frontera.

**Definición 2.9.** Una superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  será *minimal* si para cualquier punto  $p \in M$  existe un entorno que minimiza el área de entre todas las superficies cuya frontera es la misma.

*Observación 2.10.* Aunque no probaremos en detalle en este trabajo la equivalencia entre las Definiciones 2.1 y 2.9, esta propiedad local explica el uso del adjetivo “minimal” para las superficies que trataremos. Cabe mencionar que la minimización global del área es una condición muy restrictiva y que el plano es la única superficie completa en  $\mathbb{R}^3$  que la verifica (consultar [25]). Además, las Definiciones 2.1 y 2.9 caracterizan a las superficies minimales como el análogo bidimensional a las geodésicas en la Geometría de Riemann.

En 1847, sería J. Plateau quien aportaría un nuevo punto de vista: el físico. Junto a T. Young, Plateau observó que la curvatura media de una membrana que separa dos medios homogéneos entre sí es igual a la diferencia de presiones a ambos lados de la superficie (*ley de Laplace-Young*). Cuando esta diferencia es cero, como en el caso de las películas de jabón, entonces la curvatura media es nula.

**Definición 2.11.** Una superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  será *minimal* si todo punto  $p \in M$  admite un entorno  $D_p$  que coincide con la (única) película de jabón que forma la frontera  $\partial D_p$ .

Pese a no analizar la equivalencia entre la Definición 2.1 y la 2.11 en el desarrollo de este trabajo, el lector puede consultar [27] para más información.

## 2.3. Conformalidad: parametrizaciones isotermas y conjugadas

Esta sección estará dedicada a dar una nueva definición de superficie minimal en términos de *parametrizaciones isotermas*. Estas parametrizaciones son de especial interés puesto que trasladan propiedades geométricas importantes, como ángulos y distancias, de la superficie al plano de parámetros. De esta manera, basta con observar el dominio de estas parametrizaciones para obtener una idea acerca de la geometría de la superficie.

**Definición 2.12.** Decimos que un difeomorfismo local  $f: M \rightarrow N$  entre las superficies regulares  $M$  y  $N$  es *conforme* si existe una función  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$  positiva tal que

$$f^*\langle v, w \rangle_p = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle = \lambda(p)\langle v, w \rangle \quad \text{para todo } p \in M \text{ y todo } v, w \in T_pM.$$

Además, si existe tal función  $\lambda$  entonces esta será necesariamente diferenciable.

El siguiente resultado caracterizará de manera única a las esferas y superficies minimales, puesto que si la aplicación de Gauss de una superficie regular es siempre conforme entonces esta superficie será o bien una esfera o bien minimal.

**Proposición 2.13.** *Sea  $M$  una superficie regular sin puntos umbílicos<sup>2</sup>, entonces  $M$  será minimal si, y solo si, la aplicación de Gauss es conforme.*

*Demostración.* Comencemos suponiendo que  $M$  es minimal. De las Definiciones 1.45 y 1.47 deducimos que

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} = 0$$

para todo  $p \in M$ , de donde se sigue que  $k_1^2(p) = k_2^2(p)$ , pues  $k_1(p) = -k_2(p)$ . Consideremos  $v, w \in T_pM$ . Si  $\{e_1, e_2\}$  es la base ortonormal de direcciones principales de  $T_pM$ , podemos escribir  $v = v_1e_1 + v_2e_2$  y  $w = w_1e_1 + w_2e_2$ . Un sencillo cálculo permite obtener que

$$\begin{aligned} \langle dN_p(v), dN_p(w) \rangle &= \langle -v_1k_1(p)e_1 - v_2k_2(p)e_2, -w_1k_1(p)e_1 - w_2k_2(p)e_2 \rangle \\ &= v_1w_1k_1^2(p) + v_2w_2k_2^2(p) = (v_1w_1 + v_2w_2)k_1^2(p) \\ &= k_1^2(p)\langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Es obvio que  $\lambda(p) = k_1(p)$  es diferenciable y no nula, puesto que si  $k_1(p) = 0$  entonces como  $H(p) = 0$  se tendría que  $k_2(p) = 0$  y el punto sería umbilical.

<sup>2</sup>Diremos que  $p \in M$  es umbílico si  $k_1(p) = k_2(p)$ .

Pasamos ahora a probar el recíproco. Sea  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable no nula tal que  $\langle dN_p(v), dN_p(w) \rangle = \lambda(p)^2 \langle v, w \rangle$  para  $v, w \in T_pM$  y  $p \in M$  arbitrarios. En particular,

$$\begin{aligned}\lambda(p)^2 &= \lambda(p)^2 \langle e_1, e_1 \rangle = \langle dN_p(e_1), dN_p(e_1) \rangle = \langle -k_1(p)e_1, -k_1(p)e_1 \rangle = k_1(p)^2, \\ \lambda(p)^2 &= \lambda(p)^2 \langle e_2, e_2 \rangle = \langle dN_p(e_2), dN_p(e_2) \rangle = \langle -k_2(p)e_2, -k_2(p)e_2 \rangle = k_2(p)^2,\end{aligned}$$

y por tanto  $\lambda^2(p) = k_1^2(p) = k_2^2(p)$ . Como  $p$  es no umbilical entonces  $k_1(p) = -k_2(p)$ , de donde se sigue que  $H(p) = 0$ .  $\square$

*Observación 2.14.* En las hipótesis de la Proposición 2.13, dado que  $\lambda^2 = k_1^2 = -k_1k_2 = -K$ , entonces toda superficie minimal sin puntos umbílicos tiene curvatura de Gauss  $K$  estrictamente negativa.

Introduciremos ahora un nuevo concepto que nos conducirá a una nueva caracterización de las superficies minimales: las parametrizaciones isotermas. A continuación seguiremos la exposición dada en [1, §16.7], donde los resultados se enuncian en  $\mathbb{R}^n$ , aunque nosotros nos restringiremos al caso de las superficies regulares  $M \subset \mathbb{R}^3$  —pues recordemos que estas son las de nuestro interés.

**Definición 2.15.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  un abierto, diremos que la parametrización  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es *isoterma* si existe una función  $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada *función escalar*, tal que

$$\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = \lambda^2 \quad \text{y} \quad \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = 0. \quad (2.5)$$

*Observación 2.16.* Nótese que  $\lambda$  es no nula puesto que  $\mathbb{X}$  define una superficie regular. Además, es claro que  $\lambda$  es diferenciable. La primera condición en (2.5) establece que  $\mathbb{X}_u$  y  $\mathbb{X}_v$  tienen la misma longitud ( $E = G$ ), mientras que la segunda condición nos dice que son ortogonales ( $F = 0$ ).

Como consecuencia de la Definición 2.15 se tiene el siguiente resultado.

**Lema 2.17.** *Una parametrización  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  será isoterma si, y solo si, considerada como una aplicación,  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{X}(U)$  es conforme.*

Surge de manera natural cuestionarse cuáles serán las superficies que admiten una parametrización isoterma. En el caso de las superficies regulares, dado que la parametrización que las define es de clase  $\mathcal{C}^2$ , se puede enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 2.18** ([20, pág. 3]). *Sea  $M$  una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces existe una parametrización  $\mathbb{X}: U \rightarrow M$  isoterma.*

Dado que la demostración de la Proposición 2.18 es de considerable dificultad y que las superficies que nos interesan en el desarrollo de este texto son las minimales, nos limitamos a enunciar y probar un resultado análogo para nuestro caso particular.

**Proposición 2.19** ([15, pág. 54]). *Sea  $M$  una superficie minimal. Entonces, para cada  $p \in M$ , existe un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  y una parametrización  $\mathbb{X}: U \rightarrow M$  isoterma.*

*Demostración.* Comencemos expresando  $M$  localmente como la gráfica de una función diferenciable  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\hat{p}) = 0$ , con  $\hat{p} \in U$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $U \subset \mathbb{R}^2$  es simplemente conexo. Por la Proposición 2.2 se tiene que, como  $M$  es minimal, entonces  $f$  verifica la ecuación de Euler-Lagrange (2.1). Ahora bien, tomando  $p = f_x$ ,  $q = f_y$  y  $w = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+p^2}{w}\right)_y - \left(\frac{pq}{w}\right)_x &= -\frac{f_y}{w}[(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}] = 0, \\ \left(\frac{1+q^2}{w}\right)_x - \left(\frac{pq}{w}\right)_y &= -\frac{f_x}{w}[(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}] = 0. \end{aligned}$$

Así pues, existen dos funciones  $F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1+p^2}{w}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{pq}{w} = \frac{\partial G}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1+q^2}{w}.$$

Tomando ahora  $u(x, y) = x + F(x, y)$  y  $v(x, y) = y + G(x, y)$  entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{1+p^2}{w}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{pq}{w} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{1+q^2}{w}$$

y si definimos  $\phi(x, y) = (u, v)$  se tiene que  $\text{Jac}(\phi) = (1+w)^2/w > 0$ . Así, por el teorema de la función inversa, existe un entorno del origen tal que  $\phi^{-1}$  es diferenciable con matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+w)^2} \begin{pmatrix} 1+w+q^2 & -pq \\ -pq & 1+w+p^2 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, la superficie que  $M$  definida por  $\mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  tiene por coeficientes de la primera forma fundamental los siguientes:

$$E = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = \frac{w^2}{(1+w)^2} = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = G \quad \text{y} \quad F = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = 0.$$

Podemos entonces concluir que  $\mathbb{X}$  es isoterma. □

*Observación 2.20.* Como consecuencia de la Proposición 1.30 podremos suponer, siempre que sea necesario, que la parametrización que define a una superficie minimal es isoterma.

Introducimos ahora una definición de superficie minimal que se apoya en una propiedad de cualquiera de sus parametrizaciones isotermas.

**Definición 2.21.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular definida por una parametrización isoterma  $\mathbb{X}$ . Se dice que  $M$  es *minimal* si las funciones coordenadas de  $\mathbb{X}$  son armónicas, es decir, si  $\Delta \mathbb{X} = 0$ , donde  $\Delta \mathbb{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$  denota el laplaciano usual.

Estableceremos ahora un resultado necesario para posteriormente probar la equivalencia entre las Definiciones 2.1 y 2.21.

**Lema 2.22.** *Sea  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización isoterma de una superficie regular. Entonces*

$$\Delta\mathbb{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = 2\lambda^2 HN, \quad (2.6)$$

donde  $\lambda$  es la función escalar asociada a  $\mathbb{X}$  y  $N$  es el vector unitario y normal a  $\mathbb{X}$ .

*Demostración.* Dado que  $\mathbb{X}$  es isoterma, si derivamos la segunda ecuación en (2.5) con respecto a  $u$  y  $v$  obtenemos

$$\langle \mathbb{X}_{uu}, \mathbb{X}_v \rangle + \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_{vu} \rangle = 0, \quad \langle \mathbb{X}_{uv}, \mathbb{X}_v \rangle + \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_{vv} \rangle = 0,$$

mientras que si derivamos ahora la primera ecuación en (2.5) se tiene que

$$\langle \mathbb{X}_{uu}, \mathbb{X}_u \rangle - \langle \mathbb{X}_{vu}, \mathbb{X}_v \rangle = 0, \quad \langle \mathbb{X}_{uv}, \mathbb{X}_u \rangle - \langle \mathbb{X}_{vv}, \mathbb{X}_v \rangle = 0.$$

Sumando, concluimos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv}, \mathbb{X}_u \rangle &= \langle \mathbb{X}_{uu}, \mathbb{X}_u \rangle + \langle \mathbb{X}_{vv}, \mathbb{X}_u \rangle = \langle \mathbb{X}_{vu}, \mathbb{X}_v \rangle - \langle \mathbb{X}_{uv}, \mathbb{X}_v \rangle = 0, \\ \langle \mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv}, \mathbb{X}_v \rangle &= \langle \mathbb{X}_{uu}, \mathbb{X}_v \rangle + \langle \mathbb{X}_{vv}, \mathbb{X}_v \rangle = -\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_{vu} \rangle + \langle \mathbb{X}_{uv}, \mathbb{X}_u \rangle = 0. \end{aligned}$$

Se sigue entonces que  $\mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv}$  será ortogonal a  $T_pM$ , es decir,  $\mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv}$  es un múltiplo de  $N$ . Veamos cuál. Dado que  $\langle \mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv}, N \rangle = \langle \mathbb{X}_{uu}, N \rangle + \langle \mathbb{X}_{vv}, N \rangle = e + g$  y sabiendo que por definición  $E = G = \lambda^2$  y  $F = 0$ , podemos entonces concluir que

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) = \frac{e + g}{2\lambda^2} = \frac{\langle \mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv}, N \rangle}{2\lambda^2},$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

El siguiente resultado prueba que la Definición 2.1 de superficie minimal adoptada en este texto es equivalente a la Definición 2.21 dada en términos de sus parametrizaciones isotermas.

**Proposición 2.23.** *Sea  $\mathbb{X}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización isoterma de una superficie regular. La superficie definida por  $\mathbb{X}$  será minimal si, y solo si, las funciones coordenadas son funciones armónicas, es decir, si, y solo si,  $\Delta\mathbb{X} = 0$ .*

*Demostración.* Como estamos suponiendo que  $\mathbb{X}$  es isoterma entonces, por el Lema 2.22, se tiene que  $\Delta\mathbb{X} = \mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv} = 2\lambda^2 HN$ . Así pues, la superficie definida por  $\mathbb{X}$  será minimal si, y solo si,  $H = 0$  o, equivalentemente si  $\Delta\mathbb{X} = \mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv} = 0$ . En términos de las funciones coordenadas,

$$\Delta\mathbb{X} = \mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv} = (x_{uu} + x_{vv}, y_{uu} + y_{vv}, z_{uu} + z_{vv}) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0, 0, 0). \quad \square$$

## 2.4. Superficies minimales de revolución y regladas

Dedicamos esta sección al estudio de la minimalidad en dos casos particulares de superficies regulares: las de revolución y las regladas. Para esto, debemos primero introducir la noción de *superficie conjugada* de  $\mathbb{R}^3$ . Seguiremos con este fin la exposición dada en [1, §22].

**Definición 2.24.** Diremos que dos superficies regulares minimales  $M$  y  $N$  son *conjugadas* si sus parametrizaciones isotermas  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  son armónicas conjugadas, es decir si

$$\mathbb{X}_u = \mathbb{Y}_v \quad \text{y} \quad \mathbb{X}_v = -\mathbb{Y}_u. \quad (2.7)$$

*Observación 2.25.* En las hipótesis de la Definición 2.24, la superficie conjugada de  $M$  está unívocamente determinada salvo una traslación, dado que si  $\mathbb{Y} = \mathbb{X} + c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ , entonces se siguen verificando las ecuaciones en (2.7).

**Definición 2.26.** Sean  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones isotermas de superficies regulares asociadas a las superficies minimales  $M$  y  $N$ , respectivamente. Llamamos *familia asociada* a  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  a la familia de parametrizaciones que dependen de un solo parámetro  $t \in \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^t: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \mathbb{Z}^t(u, v) = \cos(t)\mathbb{X}(u, v) + \sin(t)\mathbb{Y}(u, v). \end{aligned}$$

*Observación 2.27.* Se puede ver que la parametrización  $\mathbb{Z}^t$  define una superficie regular para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 2.28.** Sean  $M$  y  $N$  dos superficies minimales definidas por las parametrizaciones isotermas armónicas conjugadas  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y sea  $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}^t$  la familia asociada dada por la Definición 2.26. Entonces, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la parametrización  $\mathbb{Z}^t$  es isoterma, define una superficie minimal y tiene la misma primera forma fundamental que  $\mathbb{X}$ .

*Demostración.* Primeramente, como  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  son parametrizaciones isotermas conjugadas entonces verifican las ecuaciones en (2.7) y se tiene que  $\mathbb{X}_u = \mathbb{Y}_v$  y  $\mathbb{X}_v = -\mathbb{Y}_u$ . Derivando  $\mathbb{Z}^t(u, v) = \cos(t)\mathbb{X} + \sin(t)\mathbb{Y}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_u^t &= \cos(t)\mathbb{X}_u + \sin(t)\mathbb{Y}_u = \cos(t)\mathbb{X}_u - \sin(t)\mathbb{X}_v, \\ \mathbb{Z}_v^t &= \cos(t)\mathbb{X}_v + \sin(t)\mathbb{Y}_v = \cos(t)\mathbb{X}_v + \sin(t)\mathbb{X}_u, \end{aligned}$$

y como  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  son isotermas entonces

$$\begin{aligned} E^t &= \langle \mathbb{Z}_u^t, \mathbb{Z}_u^t \rangle = \cos^2(t)\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle + \sin^2(t)\langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = \cos^2(t)E + \sin^2(t)G = E, \\ F^t &= \langle \mathbb{Z}_u^t, \mathbb{Z}_v^t \rangle = \cos(t)\sin(t)[\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle - \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle] = \cos(t)\sin(t)(E - G) = 0, \\ G^t &= \langle \mathbb{Z}_v^t, \mathbb{Z}_v^t \rangle = \cos^2(t)\langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle + \sin^2(t)\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = \cos^2(t)G + \sin^2(t)E = E. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Estas ecuaciones se pueden interpretar como *ecuaciones de Cauchy-Riemann* y las estudiaremos en detalle en la Sección 3.1.

Se sigue así que cada  $\mathbb{Z}^t$  es isoterma y tiene la misma primera forma fundamental que  $\mathbb{X}$ . Además, como  $\Delta\mathbb{Z}^t = \mathbb{Z}_{uu}^t + \mathbb{Z}_{vv}^t = \cos(t)(\mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{vv}) = 0$ , queda probado que  $\mathbb{Z}^t$  define una superficie minimal para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Definición 2.29.** Sea  $\mathbb{Z}^t$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , la familia asociada dada por la Definición 2.26. Decimos que  $\mathbb{Z}^t$  es una *deformación isométrica de  $\mathbb{X}$  en  $\mathbb{Y}$* .

Acabamos de demostrar que dada una superficie minimal, podemos encontrar su conjugada si la deformamos mediante una familia de superficies minimales localmente isométricas que dependen de un parámetro  $t$ . Como aplicación de este resultado, consideremos el helicoido y el catenoide localmente parametrizados mediante las aplicaciones  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{Y}$  dadas por la expresiones

$$\begin{aligned}\mathbb{X}(u, v) &= (\sinh(v) \sin(u), -\sinh(v) \cos(u), u), & (u, v) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \mathbb{Y}(u, v) &= (\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v), & (u, v) &\in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.\end{aligned}$$

respectivamente. Estas dos superficies constituyen los puntos inicial y final de la deformación isométrica (ver Figura 2.2) dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^t(u, v) &= \cos(t) (\sinh(v) \sin(u), -\sinh(v) \cos(u), u) \\ &\quad + \sin(t) (\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v),\end{aligned}\tag{2.8}$$

$0 \leq t \leq \pi/2$ .

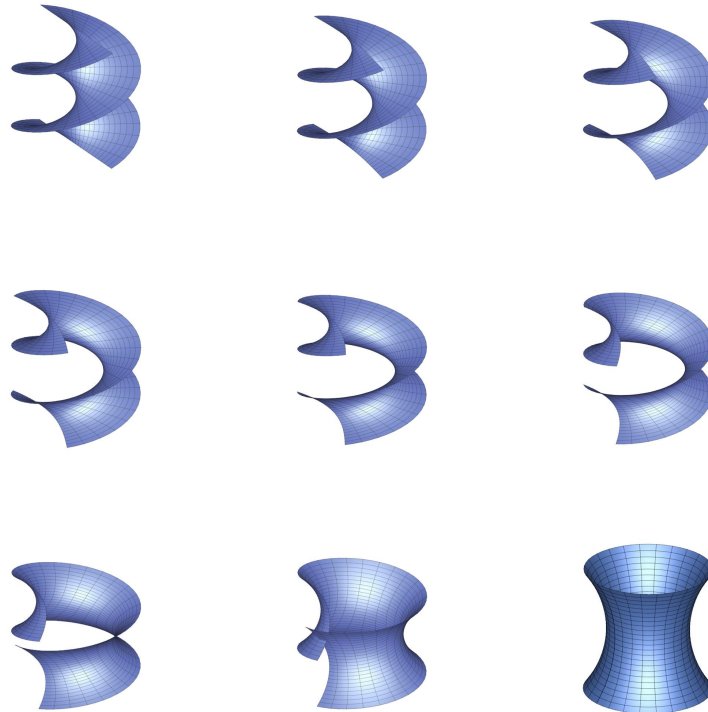


Figura 2.2: Deformación del helicoido en el catenoide  $\mathbb{Z}^{n\pi/16}$  para  $0 \leq n \leq 8$ .

Nótese que el catenoide es la única superficie de revolución de la deformación isométrica  $\mathbb{Z}^t$  dada en (2.8). Presentaremos ahora un resultado de unicidad que caracterizará a las superficies minimales de revolución distintas del plano.

**Proposición 2.30.** *Sea  $M$  una superficie minimal de revolución y no plana. Entonces  $M$  es un trozo de catenoide.*

*Demostración.* Sea  $\mathbb{X}(u, v) = (\varphi(v) \cos(u), \varphi(v) \sin(u), \psi(v))$  una parametrización local de nuestra superficie minimal de revolución no plana  $M$ , con  $(u, v) \in U$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ , y denotemos por  $\alpha(v) = (\varphi(v), 0, \psi(v))$  a la curva generatriz. Supongamos que  $\psi'(v) \neq 0$ . Por el teorema de la función inversa, existe  $\psi^{-1}$  inversa de  $\psi$  de manera que podemos definir una nueva curva generatriz  $\beta(s) = (\alpha \circ \psi^{-1})(s)$  y una nueva parametrización  $\mathbb{Y}(u, v) = (h(v) \cos(u), h(v) \sin(u), v)$ , con  $h = \varphi \circ \psi^{-1}$ . Ahora bien, como  $\beta$  es una reparametrización de  $\alpha$ ,  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  tienen la misma traza. Bastará entonces con probar que la superficie de revolución definida por  $\mathbb{Y}$  es un trozo de catenoide.

Tras realizar varios cálculos, las curvaturas principales de la superficie de revolución definida al rotar  $\beta$  vienen dadas por

$$k_1(\beta(s)) = \frac{-h''(s)}{(1 + h'(s)^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad k_2(\beta(s)) = \frac{1}{h(s)\sqrt{1 + h'(s)^2}}.$$

Como  $M$  es minimal, aplicando las Definiciones 1.47 y 2.1 obtenemos que

$$\frac{-h''(s)}{(1 + h'(s)^2)^{3/2}} + \frac{1}{h(s)(1 + h'(s)^2)^{1/2}} = 0,$$

o equivalentemente,

$$h(s)h''(s) - h'(s)^2 = 1. \tag{2.9}$$

Con el fin de resolver (2.9), escribimos

$$\frac{2h'h''}{1 + h'^2} = \frac{2h'}{h},$$

y si integramos a ambos lados obtenemos que  $\log(1 + h'^2) = \log(h^2) - \log(c^2)$ , con  $c \neq 0$  una constante arbitraria. Exponenciando se tiene que  $1 + h'^2 = (h/c)^2$ , de donde se sigue que

$$\frac{h'/c}{\sqrt{(h/c)^2 - 1}} = \frac{1}{c}.$$

Si integramos de nuevo ambos lados de la última igualdad obtenemos que  $\operatorname{arcosh}(h/c) = (v/c) + b$ , de manera que la solución a la ecuación diferencial (2.9) viene dada por la catenaria

$$h(v) = c \cosh\left(\frac{v}{c} + b\right).$$

Concluimos así que  $M$  es un trozo de catenoide.

Veamos ahora por qué podemos suponer que  $\psi'(v) \neq 0$ . Si  $\psi'$  fuese idénticamente 0 entonces  $\alpha$  sería una línea horizontal y  $M$  estaría contenida en el plano ortogonal al eje de rotación, contradiciendo que  $M$  sea una superficie no plana. De igual manera, si  $\psi(v_0) = 0$  y  $\psi(v) \neq 0$ , en particular  $\psi(v) > 0$  para  $v < v_0$ , entonces la curva  $\alpha(v)$  sería una catenaria con pendiente  $\varphi'/\psi'$  y como  $\psi'(v_0) = 0$  entonces esta se haría infinitamente grande en  $v_0$ , lo cual es imposible dado que  $h$  es una función de cosh.  $\square$

Asimismo, en medio de la época dorada en el estudio de la superficies minimales, E. Catalan probó entre 1842 y 1843 que el helicoides es la única superficie reglada no plana con curvaturas principales iguales y de signos opuestos.

**Proposición 2.31** ([10]). *Sea  $M$  una superficie minimal reglada no plana con curvatura media nula. Entonces  $M$  es un helicoides.*

## Capítulo 3

# Representación de Weierstrass-Enneper

La teoría de superficies minimales vivió, gracias a herramientas del Análisis Complejo, uno de sus principales impulsos con lo que hoy conocemos como *representación de Weierstrass-Enneper*. En la Sección 2.3 expusimos un método para generar una nueva superficie regular minimal a partir de una inicial mediante una deformación isométrica. No obstante, esto plantea un problema fundamental: uno debe conocer una superficie regular minimal de partida, y por aquel entonces construir nuevos ejemplos no era fácil en absoluto. En este contexto, comenzamos el capítulo con unos preliminares de variable compleja en la Sección 3.1 y tratamos —ahora en más detalle— la noción de superficie conjugada en la Sección 3.2. El objetivo principal de este capítulo es precisamente la *Representación de Weierstrass-Enneper* que, dicho de forma informal, nos permite identificar cada superficie minimal con un par funciones variable compleja (véase la Sección 3.3 para una exposición detallada), facilitando la obtención de nuevos ejemplos de superficies minimales. Por último, en la Sección 3.4, aplicamos estas herramientas para investigar la imagen de la aplicación de Gauss de las superficies minimales completas. En este capítulo seguimos principalmente [11].

### 3.1. Variable compleja

Aunque pueda no resultar muy intuitivo, el Análisis Complejo desempeña un papel fundamental en el estudio de las superficies minimales. En línea con la exposición dada en [4] y [8], en esta sección motivaremos las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*, que cobrarán especial relevancia en el posterior desarrollo de este texto.

Comencemos considerando  $u$  y  $v$  dos funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  tales que  $f = u + iv$  y sea  $z_0 = x_0 + iy_0$  un punto en el abierto simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Supongamos además que existe

la derivada de  $f$  en  $z_0$ , es decir, que existe el límite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

con  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ . Teniendo en cuenta que si  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  horizontalmente por los puntos  $(\Delta x, 0)$  entonces  $\Delta y = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[f'(z_0)] &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \left[ \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}, \\ \operatorname{Im}[f'(z_0)] &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Im} \left[ \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

De manera análoga, si  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  verticalmente por los puntos  $(0, \Delta y)$  entonces  $\Delta x = 0$ . Obtenemos así las siguientes ecuaciones:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \quad \circ \quad f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0), \quad (3.1)$$

que no sólo proporcionan la derivada  $f$  en  $z_0$  en términos de derivadas parciales de  $u$  y  $v$  sino que también son una condición necesaria para su existencia. Igualando partes real e imaginaria en las ecuaciones (3.1) obtenemos lo que hoy en día conocemos como *ecuaciones de Cauchy-Riemann*:

$$u_x = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -v_x. \quad (3.2)$$

**Definición 3.1.** Decimos que una función compleja  $f$  es *holomorfa en*  $\Omega \subset \mathbb{C}$  si posee derivada en todo  $z_0 \in \Omega$ . En particular,  $f$  será *holomorfa en un punto*  $z_0$  si lo es en un entorno de dicho punto.

*Observación 3.2.* Si  $f$  no es holomorfa en un punto  $z_0 \in \Omega$ , decimos que este punto es una *singularidad*. Además, diremos que una singularidad  $z_0$  es *aislada* si  $f$  es holomorfa en un entorno punteado  $0 < |z - z_0| < r$  de dicho punto.

**Definición 3.3.** Sea  $f$  una función holomorfa en  $z_0 \in \Omega$  con  $f(z_0) = 0$ . Si existe un entero positivo  $m$  tal que  $f^{(m-1)}(z_0) = 0$  y  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ , entonces diremos que  $z_0$  es un *cero de orden*  $m$  de  $f$ .

Ahora bien, decimos que una función  $f: (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ , con  $U$  abierto, tal que posee derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en un abierto simplemente conexo  $\Omega$  es *armónica* si verifica que

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0,$$

donde  $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  y  $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , es decir si verifica la *ecuación de Laplace*. Debido a la simetría de las derivadas parciales segundas mixtas, se tiene que las funciones  $u$  y  $v$  verificando (3.2) son siempre armónicas y las denominaremos funciones *armónicas conjugadas*.

Ahora bien, si  $f$  es una función holomorfa en la corona circular  $A(r_1, r_2)$  centrada en  $z_0 \in \Omega$  entonces por el teorema de Laurent ([8, §47] sabemos que, para todo  $z \in A(r_1, r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz.$$

La parte de la *serie Laurent* que contiene potencias negativas de  $(z - z_0)$  se denomina *parte principal de  $f$  en  $z_0$*  y es clave en el estudio de las singularidades aisladas de dicha función.

Con la notación establecida, estamos en posición de introducir los siguientes conceptos.

**Definición 3.4.** Sea  $z_0$  una singularidad aislada de una función  $f$  holomorfa en  $\Omega \setminus \{z_0\}$ . Decimos que  $z_0$  es un *polo de orden  $m$*  si existe un entero positivo  $m$  tal que  $b_m \neq 0$  y  $b_k = 0$  para todo entero  $k > m$ . Además, si  $f$  es una función holomorfa salvo en un conjunto de polos entonces diremos que  $f$  es *meromorfa*.

*Observación 3.5.* La Definición 3.4 es equivalente a que la parte principal de  $f$  en  $z_0$  tenga un número finito de términos no nulos, mientras que si posee infinitos términos no nulos entonces diremos que  $z_0$  es una *singularidad esencial*.

## 3.2. Superficies conjugadas

En lo que sigue, sea  $M$  una superficie minimal cuya parametrización  $\mathbb{X}$  está definida en un abierto simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Supongamos además que  $\mathbb{X}$  es isoterma armónica tal que

$$\mathbb{X}: (u, v) \in \Omega \mapsto \mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3,$$

verificando las ecuaciones (2.5).

El lector puede encontrar información más detallada acerca de los resultados a continuación expuestos en [11, §3.1].

**Definición 3.6.** Llamaremos *superficie conjugada de  $M$*  a la superficie regular  $M^*$  definida por la parametrización

$$\mathbb{X}^*: (u, v) \in \Omega \mapsto \mathbb{X}^*(u, v) = (x^*(u, v), y^*(u, v), z^*(u, v))$$

tal que es solución de las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*:

$$\mathbb{X}_u = \mathbb{X}_v^*, \quad \mathbb{X}_v = -\mathbb{X}_u^*. \quad (3.3)$$

*Observación 3.7.* Toda superficie conjugada  $M^*$  de una superficie minimal  $M$  es también minimal. Esto se sigue de la Definición 2.21 y las ecuaciones en (2.5) y (3.3), puesto que

$$\Delta \mathbb{X}^* = 0, \quad \langle \mathbb{X}_u^*, \mathbb{X}_u^* \rangle = \langle \mathbb{X}_v^*, \mathbb{X}_v^* \rangle \quad \text{y} \quad \langle \mathbb{X}_u^*, \mathbb{X}_v^* \rangle = 0.$$

**Definición 3.8.** Diremos que una curva holomorfa  $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto simplemente conexo, es *isótropa* si  $\langle \phi', \phi' \rangle = 0$ , donde  $\phi'$  denota su derivada compleja.

Estas curvas fueron estudiadas por primera vez en 1879 por Lie (para información más detallada ver [23]), y suponen una generalización de una curva en  $\mathbb{R}^n$  con la particularidad de que la velocidad de estas es nula en todo su dominio de definición.

**Definición 3.9.** Sea  $\omega = u + iv$  en el abierto simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Los dos *operadores de Wirtinger* vienen dados por

$$\frac{\partial}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right). \quad (3.4)$$

Es claro que estos operadores verifican

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(\omega) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}}(\bar{\omega}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}}(\omega) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \omega}(\bar{\omega}) = 1,$$

de manera que si  $\mathbb{X}$  es una parametrización isoterma armónica entonces podemos escribir  $\mathbb{X}_{\omega\bar{\omega}} = 0$  y  $\langle \mathbb{X}_\omega, \mathbb{X}_\omega \rangle = 0$ .

*Observación 3.10.* Nótese que una condición necesaria y suficiente para que una curva holomorfa  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  sea isótropa es que  $\phi_1'^2 + \phi_2'^2 + \phi_3'^2 = 0$ .

El siguiente resultado relaciona las curvas isótropas con las parametrizaciones isotermas de superficies minimales.

**Proposición 3.11.** *Sea  $M$  una superficie minimal dada por la parametrización  $\mathbb{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto simplemente conexo, y  $M^*$  su superficie conjugada, definida por  $\mathbb{X}^*$ . La curva holomorfa*

$$\begin{aligned} \phi: \Omega &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ \omega &\mapsto \phi(\omega) = \phi(u + iv) = \mathbb{X}(u, v) + i\mathbb{X}^*(u, v) \end{aligned} \quad (3.5)$$

*es una curva isótropa no constante. Recíprocamente, si  $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$  es una curva isótropa no constante entonces*

$$\mathbb{X}(u, v) := \operatorname{Re}[\phi(u + iv)] \quad \text{y} \quad \mathbb{X}^*(u, v) := \operatorname{Im}[\phi(u + iv)]$$

*definen dos superficies regulares minimales  $M$  y  $M^*$ .*

*Demostración.* Por definición,  $\phi$  es una curva holomorfa tal que

$$\phi_1(u + iv) = x(u, v) + ix^*(u, v), \quad \phi_2(u + iv) = y(u, v) + iy^*(u, v), \quad \phi_3(u + iv) = z(u, v) + iz^*(u, v),$$

y cuya derivada compleja viene dada por  $\phi' = \mathbb{X}_u + i\mathbb{X}_u^* = \mathbb{X}_u - i\mathbb{X}_v$ . Así pues, por definición,

$$\langle \phi', \phi' \rangle = \langle \mathbb{X}_u - i\mathbb{X}_v, \mathbb{X}_u - i\mathbb{X}_v \rangle = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle - \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle - 2i\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = 0.$$

Recíprocamente, sea  $\omega = u + iv \in \Omega$ . Entonces

$$\phi_u(\omega) = \phi'(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial u} = \phi'(\omega) \quad y \quad \phi_v(\omega) = \phi'(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial v} = i\phi'(\omega),$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_u(u, v) &= \operatorname{Re}[\phi_u(u + iv)] = \operatorname{Re}[\phi'(\omega)] = \operatorname{Im}[i\phi'(\omega)] = \operatorname{Im}[\phi_v(u + iv)] = \mathbb{X}_v^*(u, v) \\ \mathbb{X}_v(u, v) &= \operatorname{Re}[\phi_v(u + iv)] = \operatorname{Re}[i\phi'(\omega)] = -\operatorname{Im}[\phi'(\omega)] = -\operatorname{Im}[\phi_u(u + iv)] = -\mathbb{X}_u^*(u, v). \end{aligned}$$

Queda así probado que  $M$  y  $M^*$  son superficies minimales conjugadas. Ahora, como  $\langle \phi', \phi' \rangle = 0$  entonces

$$\begin{aligned} \langle \phi', \phi' \rangle &= \langle \mathbb{X}_u + i\mathbb{X}_u^*, \mathbb{X}_u + i\mathbb{X}_u^* \rangle \\ &= \langle \operatorname{Re}[\phi'], \operatorname{Re}[\phi'] \rangle - \langle \operatorname{Im}[\phi'], \operatorname{Im}[\phi'] \rangle - 2i\langle \operatorname{Re}[\phi'], \operatorname{Im}[\phi'] \rangle = 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue que  $\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v \neq 0$  y  $\mathbb{X}_u^* \times \mathbb{X}_v^* \neq 0$ . Por tanto,  $\mathbb{X}$  y  $\mathbb{X}^*$  son dos inmersiones que en particular constituyen dos embebimientos locales ([22, Teorema 4.25]). De esta manera, queda probado que  $M$  y  $M^*$  son también superficies regulares.  $\square$

**Proposición 3.12.** *Sea  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$  una aplicación holomorfa no nula tal que*

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0 \tag{3.6}$$

*en el abierto simplemente conexo  $\Omega$ . Si  $\omega, \omega_0 \in \Omega$ , entonces*

$$\mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}(\omega_0) + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} \psi(\zeta) d\zeta \quad y \quad \mathbb{X}^*(\omega) = \mathbb{X}^*(\omega_0) + \operatorname{Im} \int_{\omega_0}^{\omega} \psi(\zeta) d\zeta$$

*definen una superficie minimal  $M$  y su conjugada  $M^*$ , respectivamente.*

*Recíprocamente, si  $M$  es una superficie minimal definida por  $\mathbb{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\Omega$  simplemente conexo, entonces existe una aplicación holomorfa  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$  verificando (3.6) y tal que*

$$\mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}(\omega_0) + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} \psi(\zeta) d\zeta, \tag{3.7}$$

*para  $\omega, \omega_0 \in \Omega$  arbitrarios.*

*Demostración.* Dado que  $\psi$  es una curva holomorfa verificando (3.6), entonces por la Observación 3.10 se tiene que  $\psi = \phi'$ , donde  $\phi$  es una curva isótropa no constante. Así pues, por la Proposición 3.12, existen dos superficies minimales  $M$  y  $M^*$  de manera que, aplicando el Teorema fundamental del cálculo integral, se obtiene

$$\mathbb{X}(\omega) = \operatorname{Re}[\phi(\omega)] = \mathbb{X}(\omega_0) + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} \psi(\zeta) d\zeta \quad \text{y} \quad \mathbb{X}^*(\omega) = \operatorname{Im}[\phi(\omega)] = \mathbb{X}^*(\omega_0) + \operatorname{Im} \int_{\omega_0}^{\omega} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Recíprocamente, supongamos que  $M$  es una superficie minimal y  $M^*$  su conjugada. De nuevo, por la Proposición 3.11, existe una curva isótropa no constante  $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ , con  $\phi(u + iv) = \mathbb{X}(u, v) + i\mathbb{X}^*(u, v)$ , tal que la curva holomorfa  $\psi = \phi'$  verifica (3.6). Además, como  $\mathbb{X}(\omega) = \operatorname{Re}[\phi(\omega)]$ , entonces  $\psi$  verifica (3.7).  $\square$

*Observación 3.13.* Sea ahora  $\mathbb{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  la parametrización isoterma armónica que define una superficie minimal  $M$  como  $\mathbb{X}(\omega) = \operatorname{Re}(\phi(\omega))$  y  $\phi$  una curva isótropa con derivada  $\phi' = \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ . Como  $\phi' = \psi = \mathbb{X}_u - i\mathbb{X}_v$ , donde  $\mathbb{X}_u = \operatorname{Re}(\psi)$  y  $\mathbb{X}_v = \operatorname{Im}(\psi)$ , entonces  $\bar{\phi}' = \bar{\psi} = \mathbb{X}_u + i\mathbb{X}_v$  y se tiene que  $\psi \times \bar{\psi} = 2i(\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v)$ . Ahora bien, sabiendo que  $a \times \bar{a} = 2i \operatorname{Im}(a_2 \bar{a}_3, a_3 \bar{a}_1, a_1 \bar{a}_2)$  para todo  $a \in \mathbb{C}^3$ , entonces  $\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v = \operatorname{Im}(\psi_2 \bar{\psi}_3, \psi_3 \bar{\psi}_1, \psi_1 \bar{\psi}_2)$ . Así pues, la aplicación de Gauss de  $M$  vendrá dada por

$$N = \frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|} = \frac{(\psi \times \bar{\psi})/(2i)}{|\psi|^2/2} = 2 \frac{\operatorname{Im}(\psi_2 \bar{\psi}_3, \psi_3 \bar{\psi}_1, \psi_1 \bar{\psi}_2)}{|\psi|^2}.$$

### 3.3. Teorema de Representación de Weierstrass-Enneper

Siguiendo la notación de la Sección 3.2 así como lo establecido en la segunda equivalencia de la Proposición 3.12, nuestro objetivo ahora será determinar todas las aplicaciones holomorfas no nulas  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$  tales que verifican la ecuación (3.6). Posteriormente, utilizaremos estas curvas, que en particular son la derivada de una curva isótropa, para construir superficies minimales de manera inmediata. Seguiremos de nuevo la exposición dada en [11].

**Lema 3.14.** *Sea  $\mu$  una función holomorfa no nula y  $\nu$  una función meromorfa, ambas definidas en el abierto simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , tales que si  $\omega_0 \in \Omega$  es un polo de orden  $n$  de  $\nu$  entonces  $\omega_0$  es también un cero de  $\mu$  de orden  $2n$ . Así, las funciones*

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\mu(1 - \nu^2), \quad \psi_2 = \frac{i}{2}\mu(1 + \nu^2) \quad \text{y} \quad \psi_3 = \mu\nu \quad (3.8)$$

son holomorfas en  $\Omega$  y la terna  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \neq 0$  cumple que  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ .

Recíprocamente, cada terna  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \neq 0$  de funciones holomorfas tales que  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$  se puede representar como (3.8) si, y solo si,  $\psi_1 - i\psi_2 \neq 0$ .

*Demostración.* La primera implicación es inmediata. Para probar la segunda, nótese que para que se verifiquen las ecuaciones (3.8) es necesario que  $\psi_1 - i\psi_2 \neq 0$ . De hecho,

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = (\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi_2) + \psi_3^2 = 0. \quad (3.9)$$

Comencemos suponiendo que  $\psi_1 - i\psi_2 = 0$ . Por la ecuación (3.9) tendríamos que  $\psi_3 = 0$ , de donde se sigue que  $\mu = 0$  o bien  $\nu = 0$ . Tomando  $\mu = 0$  tendríamos que  $\psi = 0$ , contradiciendo la hipótesis  $\psi \neq 0$ . Escogemos entonces  $\nu = 0$ . Por las ecuaciones en (3.8),  $\psi_1 = \frac{\mu}{2}$  y  $\psi_2 = i\frac{\mu}{2}$ , de donde se sigue que  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ , pues  $\psi_1 + i\psi_2 = 0$ . Hemos llegado de nuevo a una contradicción con la hipótesis  $\psi \neq 0$ .

Supongamos ahora que  $\psi_1 - i\psi_2 \neq 0$ . Si definimos  $\mu$  y  $\nu$  como sigue

$$\mu := \psi_1 - i\psi_2 \quad \text{y} \quad \nu := \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2},$$

entonces  $\mu$  es holomorfa mientras que  $\nu$  es meromorfa y  $\psi_3 = \mu\nu$ . De la ecuación (3.9) deducimos que

$$\psi_1 + i\psi_2 = \frac{-\psi_3^2}{\psi_1 - i\psi_2} = -\mu\nu^2,$$

y por la definición de  $\mu$  concluimos que

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\mu(1 - \nu^2) \quad \text{y} \quad \psi_2 = \frac{i}{2}\mu(1 + \nu^2).$$

Finalmente, como  $\mu\nu^2 = -(\psi_1 + i\psi_2)$  entonces  $\mu\nu^2$  es holomorfa, de donde se sigue que si  $\omega_0 \in \Omega$  es un polo de orden  $n$  de  $\nu$  entonces será un cero de orden al menos  $2n$  de  $\mu$ .  $\square$

Aunque no las abordaremos en el desarrollo de este texto, G. Monge y A.-M. Legendre fueron pioneros, en 1787, al proporcionar unas fórmulas integrales de representación, en términos de funciones holomorfas, para las componentes de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange (2.1). Estas fórmulas permitieron que, entre 1831 y 1835, F. Scherk estableciese explícitamente las ecuaciones para cinco nuevas superficies minimales.

Recuperando ahora la ecuación (3.7) obtenemos finalmente la representación de la que toma nombre este capítulo: la *Representación de Weierstrass-Enneper*.

**Teorema 3.15 (Teorema de representación de Weierstrass-Enneper).** *Sea  $M$  una superficie minimal no plana definida por una parametrización  $\mathbb{X} = (x, y, z): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un abierto simplemente conexo. Entonces existen dos funciones no nulas,  $\mu$  holomorfa y  $\nu$  meromorfa, tales que  $\mu\nu^2$  es holomorfa y para todo  $\omega, \omega_0 \in \Omega$  se tiene que*

$$\begin{aligned} x(\omega) &= x(\omega_0) + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{2}\mu(1 - \nu^2)d\zeta, \\ y(\omega) &= y(\omega_0) + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{i}{2}\mu(1 + \nu^2)d\zeta, \\ z(\omega) &= z(\omega_0) + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} \mu\nu d\zeta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Recíprocamente, dadas dos funciones  $\mu$  y  $\nu$  en las condiciones anteriores, entonces estas dan lugar, mediante las ecuaciones en (3.10), a una parametrización  $\mathbb{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  que define una superficie minimal.

*Demostración.* Dado que  $M$  es una superficie minimal entonces, por la segunda implicación de la Proposición 3.12, existe una función holomorfa no nula  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ , con  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ , tal que

$$\mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}(\omega_0) + \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega} \psi(\zeta) d\zeta,$$

donde  $\omega_0 \in \Omega$ . Además, como  $\mu\nu^2 \neq 0$  entonces  $\psi_1 - i\psi_2 \neq 0$  y, como consecuencia del Lema 3.14, la curva  $\psi$  verifica las ecuaciones en (3.10).

Recíprocamente, y como consecuencia de la primera implicación del Lema 3.14, la función definida como

$$\psi = \left( \frac{1}{2}\mu(1 - \nu^2), \frac{i}{2}\mu(1 + \nu^2), \mu\nu \right),$$

es holomorfa no nula en  $\Omega$  y verifica que  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ . Ahora bien, por la primera equivalencia de la Proposición 3.12, se tiene que (3.10) define una superficie minimal.  $\square$

*Observación 3.16.* En las hipótesis del Teorema 3.15, nos referiremos al par de funciones  $(\mu, \nu)$  como los *datos de Weierstrass* de la superficie regular minimal  $M$ .

**Ejemplo 3.17.** Como aplicación de la representación de Weierstrass-Enneper dada en el Teorema 3.15 y en la línea de [29, §4.3], vamos a construir algunos ejemplos de superficies minimales (ver Figura 3.1) utilizando los datos de Weierstrass:

(a) Tomando  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $\omega_0 = 0$ ,  $\mu(\omega) = 2$  y  $\nu(\omega) = 0$  entonces obtenemos el plano:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(\omega) &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{\omega} \frac{1}{2}\mu(1 - \nu^2)d\zeta, \int_0^{\omega} \frac{i}{2}\mu(1 + \nu^2)d\zeta, \int_0^{\omega} \mu\nu d\zeta \right) = \operatorname{Re} [(\omega, i\omega, 0)] \\ &= (\operatorname{Re}(\omega), -\operatorname{Im}(\omega), 0) = (u, v, 0). \end{aligned}$$

(b) Tomando  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $\omega_0 = 0$ ,  $\mu(\omega) = -ie^{-i\omega}$  y  $\nu(\omega) = e^{i\omega}$  entonces obtenemos el catenoide:

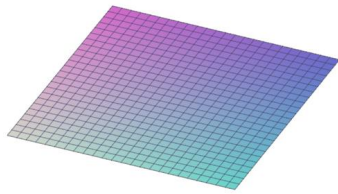
$$\begin{aligned} \mathbb{X}(\omega) &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{\omega} \frac{1}{2}\mu(1 - \nu^2)d\zeta, \int_0^{\omega} \frac{i}{2}\mu(1 + \nu^2)d\zeta, \int_0^{\omega} \mu\nu d\zeta \right) = \operatorname{Re} [(\cos(\omega), \sin(\omega), -i\omega)] \\ &= (\operatorname{Re}(\cos(\omega)), \operatorname{Re}(\sin(\omega)), -\operatorname{Im}(\omega)) = (\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v). \end{aligned}$$

(c) Tomando  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $\omega_0 = 0$ ,  $\mu(\omega) = e^{-i\omega}$  y  $\nu(\omega) = e^{i\omega}$  entonces obtenemos el helicoid:

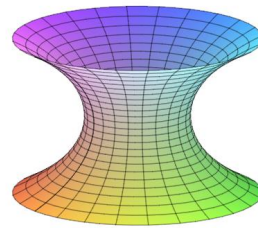
$$\begin{aligned} \mathbb{X}(\omega) &= \operatorname{Re} \left( \int_0^{\omega} \frac{1}{2}\mu(1 - \nu^2)d\zeta, \int_0^{\omega} \frac{i}{2}\mu(1 + \nu^2)d\zeta, \int_0^{\omega} \mu\nu d\zeta \right) = \operatorname{Re} [(i(\cos(\omega) - 1), i \sin(\omega), \omega)] \\ &= (\operatorname{Im}(\cos(\omega)), \operatorname{Im}(\sin(\omega)), \operatorname{Re}(\omega)) = (\sinh(v) \sin(u), -\sinh(v) \cos(u), u). \end{aligned}$$

(d) Tomando  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $\omega_0 = 0$ ,  $\mu(\omega) = 2$  y  $\nu(\omega) = \omega$  entonces obtenemos la superficie de Enneper:

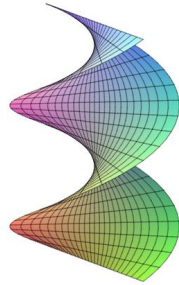
$$\begin{aligned} \mathbb{X}(\omega) &= \operatorname{Re} \left( \int_0^\omega \frac{1}{2} \mu(1 - \nu^2) d\zeta, \int_0^\omega \frac{i}{2} \mu(1 + \nu^2) d\zeta, \int_0^\omega \mu \nu d\zeta \right) = \operatorname{Re} \left[ \left( \omega - \frac{\omega^3}{3}, i\omega + i\frac{\omega^3}{3}, \omega^2 \right) \right] \\ &= \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2 \right). \end{aligned}$$



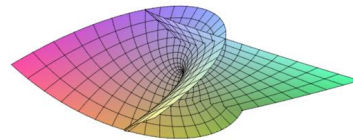
(a) Plano.



(b) Catenoide.



(c) Helicoide.



(d) Superficie de Enneper.

Figura 3.1: Ejemplos de superficies minimales obtenidas con sus datos de Weierstrass.

Ahora bien, la función  $\nu$  posee una interpretación geométrica de gran interés, pues resulta ser la proyección estereográfica en el plano  $z = 0$  de la aplicación de Gauss  $N$  de la superficie minimal definida por  $\mathbb{X}$ . Para probar esto, comenzaremos escribiendo  $N$  en términos de la función  $\nu$ . Recuperando los cálculos hechos en la Observación 3.13, deducimos que

$$\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\| = \frac{|\psi|^2}{2} = \frac{1}{4} |\mu|^2 (1 + |\nu|^2)^2. \quad (3.11)$$

Finalmente, como  $\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v = \text{Im}(\psi_2\bar{\psi}_3, \psi_3\bar{\psi}_1, \psi_1\bar{\psi}_2)$ , la aplicación de Gauss  $N$  viene dada por

$$N = \frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|} = \frac{1}{1 + |\nu|^2} (2 \text{Re}(\nu), 2 \text{Im}(\nu), |\nu|^2 - 1). \quad (3.12)$$

Identifiquemos ahora el plano complejo  $\mathbb{C} = \{x+iy : x, y \in \mathbb{R}\}$  con el plano  $z = 0$  y denotemos por  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  a la compactificación de  $\mathbb{C}$  con el infinito.

**Definición 3.18.** Definimos la *proyección estereográfica* como la aplicación  $\sigma: \mathbb{S}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  que asocia a cada punto  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  la intersección de la recta que pasa por  $(0, 0, 1)$  y  $(x, y, z)$  con el plano  $z = 0$ , esto es

$$\sigma(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z},$$

mientras que  $\sigma(0, 0, 1) = \infty$ .

Sea  $\rho: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$  la inversa de  $\sigma$  tal que  $\rho(\infty) = (0, 0, 1)$  y  $\rho(\xi + i\eta) = (x, y, z)$ , donde

$$x = \frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \quad z = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{1 + \xi^2 + \eta^2}. \quad (3.13)$$

Tomando  $\omega = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ , podemos escribir las ecuaciones en (3.13) como

$$\rho(\omega) = \frac{1}{1 + |\omega|^2} (2 \text{Re}(\omega), 2 \text{Im}(\omega), |\omega|^2 - 1), \quad (3.14)$$

de donde se sigue que  $\rho(\omega) \rightarrow (0, 0, 1)$  cuando  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Obtenemos, de las ecuaciones (3.12) y (3.14), que  $N = \rho \circ \nu$ , concluyendo así que  $\nu = N \circ \sigma$ .

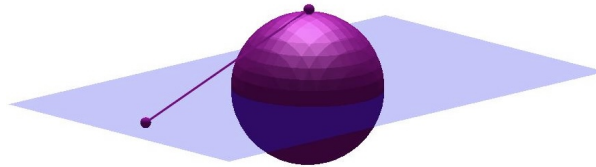


Figura 3.2: Proyección estereográfica del polo norte.

### 3.4. Omisión de puntos en la esfera

Dedicamos esta sección a una cuestión de formulación aparentemente simple que llamó la atención de S. Bernstein, pero cuya resolución revela una notable complejidad. Si uno considera una superficie minimal definida sobre un grafo, entonces la imagen de la aplicación de Gauss omite como mínimo un hemisferio de la esfera. Bernstein se preguntó hasta qué punto esto podría mejorarse.

Con el objetivo de responder a esta pregunta, y en línea con la exposición dada en [11], es necesario introducir la noción de *superficie minimal global* a través del concepto de *superficie de Riemann*. Seguiremos para esto la exposición dada en [2] y [14].

**Definición 3.19.** Una variedad topológica conexa 2-dimensional se dice *superficie de Riemann* si está además dotada de un atlas<sup>1</sup> maximal  $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  tal que todo cambio de coordenadas

$$z_\alpha \circ z_\beta^{-1}: z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \quad (3.15)$$

es una aplicación holomorfa siempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Además, todo atlas (no necesariamente maximal) que verifique esta condición se denominará *atlas holomorfo*.

**Teorema 3.20.** *Toda superficie de Riemann es orientable.*

*Demostración.* Consideremos dos cartas  $(U, z)$  y  $(W, \omega)$  de  $M$  tales que  $U \cap W \neq \emptyset$ . Entonces se tiene que

$$(z \circ \omega^{-1})(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es holomorfa y por tanto verifica las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* (3.2). De esta manera,  $\text{Jac}(z \circ \omega^{-1}) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 > 0$ . Podemos entonces encontrar un recubrimiento de  $M$  por abiertos de manera que el cambio de coordenadas siempre tenga jacobiano positivo. Concluimos así que  $M$  es orientable.  $\square$

*Observación 3.21.* Si bien el lector puede interpretar las superficies de Riemann como el equivalente a las superficies regulares orientables —pues estas últimas pueden dotarse de una estructura compleja que las convierte en superficies de Riemann ([7, §5.8, Teorema 2])— la literatura existente y más avanzada considera parametrizaciones definidas en este tipo de superficies. Es por esto que desarrollamos esta sección en términos de superficies de Riemann.

De manera análoga al caso real (véase la Definición 1.8), podemos establecer la noción de aplicación diferenciable entre dos superficies de Riemann, que en particular son variedades complejas, tomando cartas en cada una de ellas.

**Definición 3.22.** Sean  $M$  y  $N$  dos superficies de Riemann. Decimos que una aplicación continua  $F: M \rightarrow N$  es una *aplicación holomorfa* (o *analítica*) en  $p \in M$  si existen dos cartas  $(U, z)$  y  $(V, \zeta)$  conteniendo a  $p$  y  $F(p)$ , respectivamente, tales que la composición

$$\zeta \circ F \circ z^{-1}: z(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \zeta(V),$$

con  $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$ , es holomorfa como aplicación de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ . Además, denotaremos por  $\mathcal{O}(M)$  al conjunto de aplicaciones holomorfas sobre  $M$ .

<sup>1</sup>Es decir,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es un recubrimiento por abiertos de  $M$  y  $z_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$  es un homeomorfismo en un abierto del plano complejo para cada  $\alpha \in A$ .

**Teorema 3.23 (Teorema de la función abierta, [26, Teorema 3.30]).** *Sea  $F: M \rightarrow N$  una aplicación holomorfa y no constante entre dos superficies de Riemann. Entonces  $F$  es abierta.*

**Teorema 3.24.** *Sea  $F: M \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación holomorfa y no constante, entonces  $|F|$  no alcanza su máximo.*

*Demostración.* Sea  $a \in M$  tal que  $|F(a)| \geq |F(x)|$  para todo  $x \in M$ . Se tiene entonces que  $F(M) \subset \overline{B}(0, |F(a)|)$  y, como  $F$  es abierta por el Teorema 3.23, se sigue que  $F(M) \subset B(0, |F(a)|)$ . En consecuencia  $|F(a)| < |F(a)|$ , llegando así a una contradicción.  $\square$

Ahora bien, de la misma manera que definimos en la Sección 1.2 lo que entendíamos por variedades de Riemann conformemente equivalentes, definimos a continuación el análogo para las superficies de Riemann.

**Definición 3.25.** Diremos que dos superficies de Riemann  $M$  y  $N$  son *conformemente equivalentes*, y lo denotaremos por  $M \sim N$ , si existe un biholomorfismo  $F: M \rightarrow N$ , es decir una función holomorfa, biyectiva y con inversa holomorfa.

El siguiente teorema permite clasificar superficies de Riemann simplemente conexas según su estructura compleja.

**Teorema 3.26 (Teorema de uniformización de Koebe, [14, §IV.4]).** *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  o a  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .*

Estamos ahora en condiciones de definir lo que entendemos por una superficie minimal de manera global. Seguiremos para esto la exposición dada en [11].

**Definición 3.27.** Sea  $(U, \varphi)$  una carta local de una superficie de Riemann  $M$ . Diremos que la aplicación no constante  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  define una *superficie minimal* si la parametrización  $\mathbf{X} = \mathbb{X} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es armónica e isoterma, es decir, si

$$\Delta \mathbf{X} = 0, \quad \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle, \quad \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0. \quad (3.16)$$

En ese caso, decimos que la superficie de Riemann  $M$  es una *superficie minimal global*, que diremos *regular* si  $\mathbf{X} = \mathbb{X} \circ \varphi^{-1}$  define una superficie regular.

Tomemos ahora como dominio de parámetros la propia superficie  $M$ . Podemos entonces construir en  $M$  una métrica de Riemann  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  definida como el pullback de la métrica euclídea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$  por medio de la aplicación  $\mathbb{X}$ .

Supongamos que  $\varphi: w \in U \mapsto \varphi(w) = u^1 + iu^2$ , entonces la métrica inducida vendrá dada por

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta,$$

donde  $\xi = (\xi^1, \xi^2)$  y  $\eta = (\eta^1, \eta^2)$  son dos vectores tangentes a  $T_p M$  y

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{X}_{u^\alpha}, \mathbf{X}_{u^\alpha} \rangle & \langle \mathbf{X}_{u^\alpha}, \mathbf{X}_{u^\beta} \rangle \\ \langle \mathbf{X}_{u^\beta}, \mathbf{X}_{u^\alpha} \rangle & \langle \mathbf{X}_{u^\beta}, \mathbf{X}_{u^\beta} \rangle \end{pmatrix},$$

con  $\mathbf{X}_{u^k} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^k}$  para  $k \in \{\alpha, \beta\}$ , es la primera forma fundamental de  $M$ .

**Definición 3.28.** Diremos que una superficie global regular minimal  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es *completa* si su dominio  $M$  dotado con la métrica de Riemann  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  es una variedad de Riemann completa.

En lo que sigue, omitiremos el calificativo “global” cuando consideramos superficies minimales en las condiciones de la Definición 3.27.

Si  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  define una superficie minimal  $M$  y  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  es una proyección de revestimiento de  $M$  tal que  $\tilde{M}$  es su revestimiento universal, entonces  $\tilde{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \circ \pi: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  define de nuevo una superficie minimal  $\tilde{M}$  que llamaremos *revestimiento universal de la superficie minimal  $M$* .

*Observación 3.29.* Nótese que  $\tilde{M}$  será regular si, y solo si,  $M$  lo es, y que las imágenes de las aplicaciones de Gauss de ambas superficies coinciden (pues  $\pi$  es sobreyectiva).

Aunque la siguiente proposición se puede enunciar para superficies minimales arbitrarias (consultar [11, pág. 188, Proposición 2]), nos limitaremos a enunciarla y probarla para superficies minimales globales que en particular son regulares, pues son las de nuestro interés.

**Proposición 3.30.** *Sea  $M$  una superficie regular minimal definida por  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\tilde{M}$  revestimiento universal, dado por  $\tilde{\mathbb{X}}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Entonces  $M$  será completa si, y solo si,  $\tilde{M}$  lo es.*

*Demostración.* Comencemos considerando la proyección revestimiento  $\pi: (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ . Ahora bien, dado que  $\pi^*g = \tilde{g}$  entonces el difeomorfismo  $\pi$  es, en particular, una isometría local y por tanto preserva geodésicas. El resultado se sigue de los apartados 1 y 2 del Teorema 1.28.  $\square$

**Proposición 3.31.** *Sea  $M$  una superficie minimal, entonces  $M$  nunca es compacta.*

*Demostración.* Procederemos por reducción al absurdo. Sea  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación que define a la superficie minimal  $M$ . Si  $M$  fuese compacta entonces cada componente  $\mathbb{X}^j(p)$  alcanzaría su máximo en  $p_j \in M$  y dado que, por definición, las  $\mathbb{X}^j(p)$  son armónicas en  $M$  entonces por

el Teorema 3.24 estas funciones serían constantes. Hemos llegado así una contradicción con la definición de  $\mathbb{X}$ , dado que no puede ser constante.  $\square$

Ahora bien, como consecuencia del Teorema 3.26 y de la Proposición 3.31, se tiene que una superficie de Riemann  $M$  simplemente conexa nunca podrá ser conformemente equivalente a la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

**Proposición 3.32.** *Sea  $M$  una superficie minimal definida por  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si  $M$  es simplemente conexa, entonces  $M$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$  o a la bola unidad  $B = \{z : |z| < 1\}$ .*

La Proposición 3.32 nos permite clasificar las superficies minimales globales simplemente conexas según su equivalencia conforme. Esta clasificación nos conduce a la siguiente definición.

**Definición 3.33.** *Sea  $M$  una superficie minimal definida por  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Diremos que  $M$  será de tipo parabólico si  $M \sim \mathbb{C}$ , o bien de tipo hiperbólico si  $M \sim B$ , donde  $B = \{z : |z| < 1\}$ .*

*Observación 3.34.* Si  $M$  no es simplemente conexa entonces será conveniente pasar su revestimiento universal definido por  $\mathbb{X}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que sabemos que siempre existe por el Teorema 1.32, pues toda superficie de Riemann es una variedad conexa por definición. De esta manera  $\tilde{M}$ , el revestimiento universal de la superficie minimal  $M$ , será simplemente conexo por definición y  $\mathbb{X}$  será de tipo parabólico o hiperbólico según lo sea  $\tilde{\mathbb{X}}$ .

Exceptuando el plano, la imagen de la aplicación de Gauss de cualquier superficie minimal conocida coincide con la esfera salvo, a lo sumo, cuatro puntos. Presentaremos a continuación los resultados que llevaron a matemáticos como R. Osserman y H. Fujimoto a consolidar la idea de que esta era, en efecto, la mejor cota posible para el número de puntos excluidos. Con este fin, en lo que sigue consideraremos  $M$  una superficie minimal global sin borde; es decir, trabajaremos con superficies  $M$  tales que  $\partial M = \emptyset$ .

**Teorema 3.35 (Gran teorema de Picard, [31]).** *Sea  $M$  una superficie de Riemann,  $\omega \in M$  y  $f: M \setminus \{\omega\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  una función holomorfa no constante con una singularidad esencial en  $\omega$ . Entonces la imagen de  $f$  omite a lo sumo dos puntos de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .*

Como aplicación del Teorema 3.35 se tiene el siguiente resultado, fundamental en la prueba de la Proposición 3.37.

**Lema 3.36.** *Sea  $M$  una superficie minimal global de tipo parabólico,  $M \sim \mathbb{C}$ , definida por  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  y tal que  $\mathbb{X}(M)$  no está contenida en un plano. Entonces la aplicación de Gauss de  $M$  omite a lo sumo dos puntos de la esfera.*

*Demostración.* Aplicando la *Representación de Weierstrass-Enneper* dada en el Teorema 3.15 con  $\omega_0 = 0$  obtenemos

$$\mathbb{X}(\omega) = \mathbb{X}(0) + \operatorname{Re} \left( \int_0^\omega \frac{1}{2} \mu(1 - \nu^2) d\zeta, \int_0^\omega \frac{i}{2} \mu(1 + \nu^2) d\zeta, \int_0^\omega \mu \nu d\zeta \right), \quad (3.17)$$

donde  $\mu$  es holomorfa,  $\nu$  es meromorfa, ambas son no nulas y  $\mu\nu^2$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ .

Como hemos visto al final de la Sección 3.3, la función  $\nu$  verifica que  $N = \sigma^{-1} \circ \nu$ , donde  $\sigma$  denota la proyección estereográfica. Ahora bien, si aplicamos el Teorema 3.35 a  $\nu$  entonces se tiene que  $\nu$  omite como máximo dos puntos de  $\mathbb{S}^2$ . Además, si  $\nu$  fuera constante entonces  $N$  también lo sería y por tanto nuestra superficie sería un plano.  $\square$

**Proposición 3.37.** *Sea  $M$  una superficie minimal global de tipo parabólico,  $M \sim \mathbb{C}$ , definida por  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  y tal que  $\mathbb{X}(M)$  no está contenida en un plano. Entonces la aplicación de Gauss de  $M$  omite a lo sumo dos puntos.*

*Demostración.* Por definición, como  $M$  es de tipo parabólico entonces su revestimiento universal  $\tilde{M}$ , definido por  $\tilde{\mathbb{X}}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es tal que  $\tilde{M} \sim \mathbb{C}$ . Ahora bien, como la imagen por las aplicaciones de Gauss de  $M$  y  $\tilde{M}$  coinciden, entonces por el Lema 3.36 queda probado el resultado.  $\square$

Vamos ahora a construir ejemplos utilizando la ecuación (3.17) dada en el Lema 3.36. Comencemos tomando  $\mathbb{C}$  o la bola unitaria abierta,  $B$ , como el abierto simplemente conexo  $\Omega$ . Supongamos además que  $\mu$  y  $\mu\nu^2$  son holomorfas y no nulas en  $\Omega$ . De esta manera, toda superficie minimal global definida por  $\mathbb{X}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  verifica que  $ds = \frac{1}{2} |\mu| (1 + |\nu|^2) |d\omega|$ . Podemos así comparar el elemento de línea  $ds$  en  $\Omega$  con el elemento de línea euclídeo usual  $|d\omega|$ . Además, los compactos de  $(\Omega, ds)$  se corresponden con los compactos de  $(\Omega, |d\omega|)$  y viceversa, así como los caminos divergentes. Recuperando la Definición 1.26 de variedad de Riemann completa,

$$\int_\gamma \lambda |d\omega| = \frac{1}{2} \int_\gamma |\mu| (1 + |\nu|^2) |d\omega| = \infty.$$

Obtenemos así los siguientes ejemplos:

- Sean  $\mu(\omega) = \omega^2$  y  $\nu(\omega) = p(\omega)/\omega$ , con  $p$  un polinomio tal que  $\operatorname{grad}(p) \geq 2$  y  $p(0) \neq 0$ . Así,  $\mu$  y  $\mu\nu^2$  son funciones holomorfas y  $\nu$  lleva  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ . Además, existe  $\delta > 0$  tal que  $|\lambda(z)| \geq \delta$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . De esta manera, para todo camino divergente  $\gamma: [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  se tiene que

$$\int_\gamma \lambda |d\omega| \geq \delta \int_\gamma |d\omega|,$$

y entonces la parametrización en (3.17) define una superficie minimal completa cuya aplicación de Gauss no omite ningún punto de  $\mathbb{S}^2$ .

- Sean  $\mu(\omega) = c$ , con  $c \neq 0$ , y  $\nu(\omega) = p(\omega)$  un polinomio tal que  $\text{grad}(p) \geq 1$ . Entonces  $\nu$  lleva  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  y, razonando de manera similar al anterior caso, la ecuación (3.17) define una superficie minimal completa cuya aplicación de Gauss omite exactamente un punto de  $\mathbb{S}^2$ : el polo norte. Es más
- Sean  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $\mu(\omega) = 1$  y  $\nu(\omega) = e^\omega$ . Entonces  $\nu$  omite únicamente el origen y la ecuación (3.17) define, de nuevo, una superficie minimal completa cuya aplicación de Gauss omite dos puntos de  $\mathbb{S}^2$ : el polo norte y el polo sur.

**Lema 3.38.** *Sea  $f: B \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa tal que  $\{\omega \in B : f(\omega) = 0\}$  es finito. Entonces existe un camino divergente  $\gamma: [0, 1) \rightarrow B$  continuamente diferenciable tal que*

$$\int_{\gamma} |f(\omega)| |d\omega| < \infty.$$

*Demostración.* Comencemos suponiendo que  $f$  no posee ningún cero. Por el teorema de la función inversa existe un entorno de  $0 \in B$  tal que la función

$$F: \omega \in B \mapsto F(\omega) := \int_0^\omega f(\zeta) d\zeta$$

es invertible. Sea  $G(z)$  la inversa local de  $F$  entorno a  $z = 0$ , definida en una bola  $B_R(0)$ , donde  $R$  denota el radio de convergencia del desarrollo de Taylor de  $G$ , dado por  $G(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ . Nótese que  $R = \infty$  cuando  $f(\omega) = 1$ . Sea  $I$  el conjunto de todos los  $\rho \in (0, R]$  tales que  $\Omega_\rho := G(B_\rho(0)) \subset B$  y la aplicación  $G: B_\rho(0) \rightarrow \Omega_\rho$  es biyectiva.

Si es  $G$  es constante entonces

$$G'(F(\omega)) = \frac{1}{F'(\omega)} = \frac{1}{f(\omega)} = 0,$$

por lo que  $\omega$  sería un cero de  $1/f$  y por tanto un polo de  $f$ , en contradicción con el hecho de que  $f$  es holomorfa y  $f(\omega) \neq 0$ . Concluimos entonces que  $G$  es no constante. Por el teorema de Liouville,  $G$  no puede ser biyectiva en bolas arbitrariamente grandes (pues de serlo sería constante). Así  $r := \sup I < \infty$ .

Supongamos que existe  $z_0 \in \partial B_r(0)$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow 1} |G(tz_0)| = 1, \tag{3.18}$$

de donde se sigue que  $\gamma(t) := G(tz_0)$ , con  $t \in [0, 1]$ , es divergente en  $B$ . Sin embargo,

$$\int_{\gamma} |f(\omega)| |d\omega| = \int_{\gamma} |F'(\omega)| |d\omega| = \int_{F(\gamma)} |dz| = |z_0| = r < \infty,$$

probando así el resultado bajo esta hipótesis adicional.

Por reducción al absurdo, supongamos que no existe  $z_0 \in \partial B_r(0)$  verificando (3.18). Podemos entonces encontrar una sucesión  $\{t_n\}$ , con  $t_n \in (0, 1)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $\{t_n\} \rightarrow 1$  y  $\{G(t_n z_0)\} \rightarrow \omega_0 \in B$ . Como  $F'(\omega_0) \neq 0$  entonces existe, de nuevo por el teorema de la función inversa, un entorno  $W$  de  $\omega_0$  en el que  $F$  es invertible. Denotemos por  $\tilde{G}$  la inversa de  $F$  en  $W$ . Ahora bien, dado que

$$F(\omega_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(G(t_n z_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n z_0 = z_0,$$

entonces  $F(W) \cap B_r(0) \neq \emptyset$ , de donde se sigue que  $\tilde{G}$  es la extensión de  $G$  en un entorno de  $z_0$ . Como  $\partial B_r(0)$  es compacta,  $G$  admite una extensión holomorfa en cierta bola  $B_{\rho'}(0)$ , con  $r < \rho' < R$ , tal que  $G(B_{\rho'}(0)) \subset D$ . Ahora bien, por el Principio de continuación única (ver [30, §16]) deducimos que  $G$  es biyectiva en  $B_{\rho'}(0)$ , pues  $F(G(z)) = z$  para todo  $z \in B_{\rho'}(0)$  con  $0 < \rho < r$ . Sin embargo, la mera existencia de  $\rho'$  contradice la definición de  $r$  y entonces el resultado queda probado para  $f(\omega) \neq 0$  en  $B$ .

Probémoslo ahora en el caso general de que  $f$  posea un número finito de ceros  $\omega_1, \dots, \omega_n \in B$  de orden  $\nu_1, \dots, \nu_n$ , respectivamente. La función

$$\tilde{f}(\omega) := f(\omega) \prod_{k=1}^n \left( \frac{1 - \bar{\omega}_k \omega}{\omega - \omega_k} \right)^{\nu_k}$$

no se anula en  $B$ . Además, para cada  $a \in B$ , la transformación

$$\omega \in B \mapsto \frac{\omega - a}{1 - \bar{a}\omega} \in B$$

es conforme y cumple que  $|\tilde{f}(\omega)| \geq |f(\omega)|$  para todo  $\omega \in B$ . Finalmente, existe un camino divergente  $\gamma: [0, 1) \rightarrow B$  tal que

$$\int_{\gamma} |f(\omega)| |d\omega| \leq \int_{\gamma} |\tilde{f}(\omega)| |d\omega| < \infty,$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado que  $\tilde{f}(\omega) \neq 0$  en  $B$ . Queda así probado el resultado.  $\square$

El siguiente teorema, enunciado por R. Osserman en 1959 y cuya prueba se basa en el Lema 3.38, facilitará el camino para demostrar el resultado más relevante de los primeros años del siglo XX: el teorema de Bernstein.

**Teorema 3.39.** *Sea  $M$  una superficie minimal completa definida por  $\mathbb{X}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\mathbb{X}(M)$  no es un plano. Entonces la aplicación de Gauss de  $M$  es densa en la esfera  $\mathbb{S}^2$ .*

*Demostración.* Pasando al revestimiento universal de  $M$  podemos asumir que esta superficie es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$  o la bola abierta unitaria  $B$ . Procederemos por reducción al absurdo, suponiendo que  $N$  no es densa en  $\mathbb{S}^2$  y que por tanto omite más de dos puntos.

Si  $M$  es de tipo parabólico ( $M \sim \mathbb{C}$ ) entonces por la Proposición 3.37 se tiene que  $\mathbb{X}(M)$  está contenida en un plano. Ahora bien, como  $\mathbb{X}$  define una superficie minimal completa concluimos que  $\mathbb{X}(M)$  debe ser el plano entero, en contradicción con el enunciado.

Si  $M$  es de tipo hiperbólico ( $M \sim B$ ), entonces como la aplicación de Gauss no es densa en  $\mathbb{S}^2$  se tiene que  $N$  omite un abierto. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que ese abierto es un entorno del polo norte de  $\mathbb{S}^2$ . Representando  $\mathbb{X}$  por la ecuación (3.17), se tiene que  $\nu$  es una función holomorfa acotada en  $B$ , de donde se sigue que  $\mu$  no posee ceros en  $B$  (aunque podríamos admitir una cantidad finita de ellos). Por otro lado, la longitud de  $\Gamma := \mathbb{X} \circ \gamma$  verifica que

$$L(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds = \frac{1}{2} \int_{\gamma} |\mu|(1 + |\nu|^2)|d\omega| \leq c \int_{\gamma} |\mu||d\omega| < \infty,$$

para cierto  $c \in \mathbb{R}$ , donde en la última desigualdad hemos aplicado el Lema 3.38 a la función no nula  $\mu$ . Esto contradice la completitud de la superficie minimal definida por  $\mathbb{X}$ , puesto que hemos encontrado un camino divergente con longitud finita.  $\square$

Como consecuencia inmediata del Teorema 3.39 se tiene el teorema de Bernstein, que estableció que si un grafo mínimo está definido por una función afín entonces este es el único definido en todo el plano. Para más información consultar [6].

**Teorema 3.40 (Teorema de Bernstein).** *Sea  $M$  una superficie minimal definida por la ecuación  $z = f(x, y)$ , donde  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ . Entonces  $M$  es un plano.*

*Demostración.* Si nuestra superficie minimal  $M$  está definida por la parametrización  $\mathbb{X}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  para todo  $(x, y) \in M = \mathbb{R}^2$ , entonces  $M$  será una superficie minimal completa. Ahora bien, como su aplicación de Gauss está contenida en un único hemisferio entonces omite un abierto de  $\mathbb{S}^2$ . Se sigue así, del Teorema 3.39, que  $\mathbb{X}(M)$  es un plano.  $\square$

Como consecuencia de los trabajos intermedios de R. Osserman en [25], quien estableció una primera cota, y de F. Xavier en [32], quien la mejoró a 6, se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 3.41** ([16, Corolario 1.3]). *La aplicación de Gauss de una superficie minimal completa no plana  $M$  omite, a lo sumo, cuatro puntos de la esfera  $\mathbb{S}^2$ .*

## Capítulo 4

# La curvatura media

Dedicamos este capítulo a introducir una de las herramientas más importantes para trabajar con superficies minimales: el *Principio del máximo*. Para ello, iniciamos la Sección 4.1 con unos preliminares sobre operadores lineales elípticos. A continuación, en la Sección 4.2, vemos cómo trasladar estos resultados al operador curvatura media de una superficie regular, a pesar de que este no sea lineal. En la Sección 4.3 introducimos las nociones y terminología necesaria para comparar superficies y finalmente, en la Sección 4.4, enunciaremos y demostramos el *Principio del máximo*. Por motivos de extensión —y aunque se trata de una herramienta clave— no podemos aplicarlo a problemas concretos, como ciertos resultados vinculados con el teorema fuerte del semiespacio o la desigualdad isoperimétrica (véase [24, §6, §8]). Asimismo, el alcance de este principio se extiende a contextos más amplios como el de superficies de curvatura media constante con, por ejemplo, la celebrada caracterización de la esfera como la única superficie regular conexa y compacta de curvatura media constante [3]. Seguimos la exposición dada en [24, §5].

### 4.1. Generalidades sobre operadores lineales elípticos

Para poder trabajar con el operador curvatura media como un operador cuasilineal elíptico, debemos primero entender los *operadores lineales elípticos*, así como enunciar algunos resultados esenciales para el desarrollo de las posteriores secciones.

**Definición 4.1.** Sea  $L: \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  un operador diferencial lineal, con  $\Omega$  un dominio regular<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^2$ , tal que para todo  $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ , podemos escribir

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^2 b_i u_i,$$

---

<sup>1</sup>Decimos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio regular si  $\partial\Omega$  es la unión finita de curvas regulares de  $\mathbb{R}^2$ .

donde  $a_{ij}, b_i \in C^\infty(\bar{\Omega})$  y  $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$  para  $i, j \in \{1, 2\}$ . Diremos que  $L$  es *elíptico* si la matriz  $A = (a_{ij})_{i,j}$  es simétrica y definida positiva.

*Observación 4.2.* Otra manera de escribir un operador lineal elíptico  $L$  es la siguiente:

$$L(u) = \langle A, \nabla^2 u \rangle + \langle b, \nabla u \rangle, \quad (4.1)$$

donde  $b \in \mathbb{R}^2$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^2$  o en el espacio de matrices simétricas ( $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B)$ ), según corresponda.

Como consecuencia del teorema espectral ([5, Teorema 7.29]) se tiene que  $A$  es diagonalizable en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Denotemos ahora por  $\lambda_1, \lambda_2$  a los autovalores de  $A$  y sea  $\{e_1, e_2\}$  la base ortonormal asociada. Mediante un cambio de base obtenemos que

$$\langle A, \nabla^2 u \rangle = \sum_{i=1}^2 \lambda_i (\nabla^2 u)(e_i, e_i). \quad (4.2)$$

Como hasta ahora en este capítulo, seguimos denotando por  $\Omega$  a un dominio regular en  $\mathbb{R}^2$ .

**Lema 4.3.** *Sea  $L: C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$  un operador diferencial lineal elíptico definido en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .*

1. *Si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  es tal que  $L(u) > 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u$  no puede alcanzar un máximo local en  $\Omega$ .*
2. *Si  $\Omega$  es acotado y  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  es tal que  $L(u) > 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u \leq \max_{\partial\Omega} u$ .*
3. *Si  $\Omega$  es acotado y  $u, v \in C^\infty(\bar{\Omega})$  son tales que  $L(u) \geq 0$  y  $L(v) < 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u \leq v$  en  $\partial\Omega$  implica que  $u \leq v$  en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo, que  $x_0 \in \Omega$  es un máximo local de  $u$ . Por definición,  $\nabla u(x_0) = 0$  y  $(\nabla^2 u)(x_0)$  es semidefinida negativa. Así

$$L(u)(x_0) = \langle A(x_0), (\nabla^2 u)(x_0) \rangle + \langle b(x_0), \nabla u(x_0) \rangle = \langle A(x_0), (\nabla^2 u)(x_0) \rangle = \sum_{i=1}^2 \lambda_i (\nabla^2 u)(e_i, e_i),$$

donde en la primera igualdad hemos aplicado la ecuación (4.1) y en la última la (4.2). Ahora bien, como  $A$  es semidefinida positiva, pues  $L$  es elíptico, entonces  $\lambda_i > 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , pero como  $(\nabla^2 u)(x_0)$  es semidefinida negativa entonces  $L(u)(x_0) \leq 0$  contradice que  $L(u) > 0$ , que es la hipótesis de partida. Esta contradicción viene de suponer que hay máximo local.

Demostremos ahora el punto 2. Como consecuencia del apartado 1,  $u$  no alcanzará el máximo local en  $\Omega$ . Si suponemos ahora que  $\Omega$  es acotado entonces  $\bar{\Omega}$  también será acotado y, en particular, compacto. El resultado se sigue entonces del teorema de Weierstrass.

Para probar el apartado 3, sea  $w := u - v$ . De esta manera,  $L(w) = L(u - v) = L(u) - L(v) > 0$  y por el apartado 2 se tiene que  $u - v \leq \max_{\partial\Omega} \{u - v\}$ . Así, si  $u - v \leq 0$  en  $\partial\Omega$  entonces  $u \leq v$  en  $\Omega$ .  $\square$

**Lema 4.4.** *Sea  $L: C^\infty(\overline{A(r_1, r_2)}) \rightarrow C^\infty(\overline{A(r_1, r_2)})$  un operador lineal elíptico, donde  $A(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : r_1 < \|x\| < r_2\}$  con  $0 < r_1 < r_2$ . Entonces, existe  $v \in C^\infty(\overline{A(r_1, r_2)})$  tal que:*

1.  $v(x) = 0$  para todo  $x$  en la circunferencia  $C(0, r_2)$ .
2.  $v$  es una función radial, es decir,  $v$  es constante sobre cada circunferencia  $C(0, r)$ , con  $r \in [r_1, r_2]$ .
3.  $\frac{dv}{dr} > 0$  en  $[r_1, r_2]$  y, en particular,  $v < 0$  en  $[r_1, r_2)$ .
4.  $L(v) < 0$ .

*Demostración.* Dado un  $\alpha > 0$  a determinar, sea  $v(x) = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha \|x\|^2}$ . Si consideramos  $r(x) = \|x\|$  y  $f(t) = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha t^2}$  entonces podemos escribir  $v = f \circ r$ . Así, es trivial que  $v(x) = 0$  para todo  $x \in C(0, r_2)$ . Además, si consideramos  $x \in C(0, r)$ , con  $r \in [r_1, r_2]$ , entonces  $v(x) = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha \|x\|^2} = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha r^2}$  es constante. Quedan así probados los apartados 1 y 2.

Ahora bien, para todo  $r \in [r_1, r_2]$  se tiene que

$$\frac{dv}{dr} = 2r\alpha e^{-\alpha r^2} > 0.$$

Además, si  $x \in C(0, r)$  con  $r \in [r_1, r_2)$  entonces  $v(x) = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha r^2} < 0$  dado que la función exponencial es una función monótona creciente, concluyendo así la prueba del apartado 3.

Finalmente, para probar el apartado 4, observemos que como  $v = f \circ r$ , con  $r(x) = \|x\|$  y  $f(t) = e^{-\alpha r_2^2} - e^{-\alpha t^2}$  entonces, para cualesquiera  $X, Y \in \mathbb{R}^2$ , se tiene que

$$\nabla v = f'(r)\nabla r \quad \text{y} \quad (\nabla^2 v)(X, Y) = f''(r)\langle \nabla r, X \rangle \langle \nabla r, Y \rangle + f'(r)(\nabla^2 r)(X, Y),$$

donde  $f'(t) = 2\alpha t e^{-\alpha t^2}$ ,  $f''(t) = 2\alpha e^{-\alpha t^2} - 4\alpha^2 t^2 e^{-\alpha t^2}$ ,  $\nabla r = \frac{x}{r}$  y

$$(\nabla^2 r) = \nabla(\nabla r) = \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Así pues,

$$\nabla v = 2\alpha e^{-\alpha r^2} x \quad \text{y} \quad (\nabla^2 v) = 2\alpha e^{-\alpha r^2} \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha x_1^2 & 2\alpha x_1 x_2 \\ 2\alpha x_1 x_2 & 1 - 2\alpha x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Podemos entonces calcular  $L(v)$  utilizando la ecuación (4.1) como sigue:

$$L(v) = \langle A, (\nabla^2 v) \rangle + \langle b, \nabla v \rangle = 2\alpha e^{-\alpha r^2} (\text{tr}(A) - 2\alpha x^t A x + \langle b, x \rangle), \quad (4.3)$$

con  $x^t = (x_1, x_2) \in \overline{A(r_1, r_2)}$ . Ahora bien, como  $A$  es definida positiva,  $\overline{A(r_1, r_2)}$  es compacto y  $h(x) = \frac{x^t A x}{\|x\|^2}$  es continua en la corona circular  $A(r_1, r_2)$ , existe  $\mu > 0$  verificando que  $x^t A x \geq \mu \|x\|^2$  en  $\overline{A(r_1, r_2)}$ . De (4.3) se sigue que

$$L(v) \leq 2\alpha e^{-\alpha r^2} (\operatorname{tr}(A) - 2\alpha\mu\|x\|^2 + \langle b, x \rangle) \leq 2\alpha e^{-\alpha r^2} (\operatorname{tr}(A) - 2\alpha\mu r_1^2 + \langle b, x \rangle).$$

Finalmente, como  $\operatorname{tr}(A)$  y  $\langle b, x \rangle$  están acotados en  $A(r_1, r_2)$ , entonces podemos tomar un  $\alpha > 0$  suficientemente grande de manera que  $\operatorname{tr}(A) - 2\alpha\mu r_1^2 + \langle b, x \rangle < 0$  en  $A(r_1, r_2)$ . Concluimos así la prueba del resultado.  $\square$

**Definición 4.5.** Definimos el *campo conormal unitario exterior* a  $\Omega$  a lo largo de  $\partial\Omega$  como el campo diferenciable unitario  $\eta: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$  verificando, para todo  $x \in \partial\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \eta(x) \perp \partial\Omega, & \quad \blacksquare \quad x + t\eta(x) \in \Omega \text{ para } t \in (-\varepsilon, 0). \end{aligned}$$

*Observación 4.6.* En la definición anterior, hemos escogido  $\varepsilon$  de tal manera que nunca nos salimos de  $\Omega$  y  $\eta$  apunta siempre hacia fuera.

El *Principio del máximo débil* (apartado 2 del Lema 4.3) establece que si  $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ,  $u < 0$  y  $L(u) > 0$  en  $\Omega$  acotado, entonces  $u \leq \max_{\partial\Omega} u \leq 0$ . Supongamos que existe  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $u(x_0) = 0$ . Es claro que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \langle \nabla u(x_0), \eta(x_0) \rangle \geq 0. \quad (4.4)$$

Como veremos, el siguiente resultado probará que  $\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0$  bajo la hipótesis  $L(u) \geq 0$ .

**Lema 4.7.** *Sea  $L$  un operador diferenciable lineal elíptico en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $L(u) \geq 0$ , para  $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  y  $u < 0$ . Si existe  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $u(x_0) = 0$ , entonces  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$ .*

*Demostración.* Como  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio regular, tenemos asegurada la existencia de una bola  $B \subset \Omega$  tal que  $\partial B$  y  $\partial\Omega$  son tangentes en  $x_0$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $B = B(0, r)$  y, como consecuencia del Lema 4.4, existe una función radial  $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{A(r/2, r)})$  tal que  $v = 0$  en  $C(0, r)$ ,  $v < 0$  en  $[r/2, r)$ ,  $\frac{dv}{dr} > 0$  en  $[r/2, r)$  y  $L(v) < 0$ . Además, como  $C(0, r/2)$  es compacto y  $u < 0$  en  $B$ , entonces para todo  $x \in C(0, r/2)$  se tiene que  $u(x) \leq \max_{x \in C(0, r/2)} u(x) < 0$ . Así, existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que  $\max_{x \in C(0, r/2)} u(x) \leq \varepsilon v(r/2)$ , de donde se sigue que  $u \leq \varepsilon v$  en  $C(0, r/2)$ . En  $C(0, r)$  se tiene que  $u \leq 0 = v(r)$  y por tanto podemos concluir que  $u \leq \varepsilon v$  en  $\partial A(r/2, r)$ . Ahora bien, si aplicamos el apartado 3 del Lema 4.3 a las funciones  $u$  y  $\varepsilon v$ , pues  $L(u) \geq 0$  y  $L(\varepsilon v) \leq 0$  en  $A(r/2, r)$ , entonces obtenemos que  $u \leq \varepsilon v$  en  $A(r/2, r)$  y  $u(x_0) = \varepsilon v(x_0) = 0$ .

Aplicando la ecuación (4.4) a  $u - \varepsilon v$  se sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) \geq \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = \varepsilon \frac{dv}{dr}(r) > 0, .$$

Concluimos así la prueba del lema.  $\square$

**Teorema 4.8 (Principio del máximo fuerte).** *Sea  $L$  un operador diferenciable lineal elíptico en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  es tal que  $u \leq 0$  y  $L(u) \geq 0$  en  $\Omega$ , entonces  $u < 0$  o  $u = 0$  en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $u$  es una función no nula tal que se anula en algún punto de  $\Omega$ . Cabe destacar que, aunque  $u$  alcanza un máximo local en cada uno de los puntos en los que se anula (sus ceros), no podemos aplicar el apartado 1 del Lema 4.3, pues  $L(u)$  no es estrictamente positivo por hipótesis.

Sea  $X = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ . Como  $u$  es no nula y posee al menos un cero en  $\Omega$ , entonces  $X \neq \Omega$  y  $X \neq \emptyset$ . Dado que  $X$  es cerrado y  $\Omega$  conexo concluimos que  $X$  no puede ser abierto. Sea  $x \in X \setminus \overset{\circ}{X}$ . Ahora bien, como  $\Omega$  es abierto existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, 2\varepsilon) \subset \Omega$ . Además, como  $x \in X \setminus \overset{\circ}{X}$ , ningún entorno de  $x$  está contenido en  $X$  y podemos encontrar un punto  $y \in B(x, \varepsilon) \setminus X$  tal que  $d(y, \partial\Omega) > \varepsilon$ . Si definimos ahora  $\delta := d(y, X)$ , entonces es claro que  $\delta \neq 0$ , pues  $y \notin X$  y  $X$  es cerrado. Además,  $\delta \leq d(y, x) < \varepsilon$  y, puesto que  $\delta < \varepsilon < d(y, \partial\Omega)$ , entonces  $B(y, \delta) \subset \Omega$ .

Ahora bien, como  $B(y, \delta) \subset \Omega \setminus X$  se tiene que  $u < 0$  en  $B(y, \delta)$ . Por definición de  $d(y, X)$  existe un  $x_0 \in \partial B(y, \delta) \cap X$ , de donde se sigue que  $u(x_0) = 0$ . Así,  $x_0 \in \Omega$  es un máximo de  $u$  y  $(\nabla u)(x_0) = 0$ . Si aplicamos el Lema 4.7 a  $u$  en  $B(y, \delta)$  entonces  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0$ , contradiciendo el hecho de que el gradiente de  $u$  se anule en  $x_0$ .  $\square$

*Observación 4.9.* En las hipótesis del *Principio del máximo fuerte*,  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  no puede alcanzar su máximo en ningún punto interior de  $\Omega$  a menos que  $u = 0$ .

## 4.2. El operador curvatura media

Puesto que no podemos aplicar el Teorema 4.8 al operador curvatura media  $H$  ya que, como adelantamos, se trata un *operador cuasilineal elíptico* —y por tanto no lineal— debemos encontrar un análogo a este resultado que pueda ser aplicable en nuestro caso. Consideremos con este fin la aplicación  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2(\mathbb{R})^2$  dada por

$$A(y_1, y_2) = \frac{1}{2(1 + \|y\|^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 + y_2^2 & -y_1 y_2 \\ -y_1 y_2 & 1 + y_1^2 \end{pmatrix}.$$

De esta manera,  $A$  es definida positiva en cada  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  y podemos escribir el operador curvatura media como

$$H(u) = \frac{1}{2(1 + \|\nabla u\|^2)^{3/2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 + u_2^2 & -u_1 u_2 \\ -u_1 u_2 & 1 + u_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A(\nabla u), \nabla^2 u \rangle. \quad (4.5)$$

<sup>2</sup> $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$  denota el conjunto de matrices simétricas reales de orden 2.

Como viene siendo habitual en este capítulo, denotaremos mediante  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regular.

**Definición 4.10.** Diremos que una aplicación  $Q: \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  es un *operador cuasilineal elíptico* si para toda  $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  se tiene que

$$Q(u) = \langle A(\nabla u), \nabla^2 u \rangle + \langle b(\nabla u), \nabla u \rangle,$$

donde  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2(\mathbb{R})$  y  $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  son aplicaciones diferenciables y  $A(y)$  es definida positiva para todo  $y \in \mathbb{R}^2$ .

Tal y como hemos definido el operador curvatura media en (4.5), es claro que  $H$  se trata de un operador cuasilineal elíptico. Sin embargo, los operadores lineales elípticos y los cuasilineales elípticos están estrechamente relacionados como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 4.11.** *Sea  $Q: \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  un operador cuasilineal elíptico y  $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ . Entonces existe un operador lineal elíptico  $L$ , dependiente de la elección de  $u_1$  y  $u_2$ , tal que*

$$Q(u_1) - Q(u_2) = L(u_1 - u_2).$$

*Demostración.* Comencemos considerando  $u_t = tu_1 + (1-t)u_2$ , con  $t \in [0, 1]$ , de manera que  $\frac{du_t}{dt} = u_1 - u_2$ . Aplicando la regla de Barrow se tiene que

$$\begin{aligned} Q(u_1) - Q(u_2) &= \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} Q(u_t) \right] dt = \int_0^1 \left[ \frac{d}{dt} \langle A(\nabla u_t), \nabla^2 u_t \rangle + \frac{d}{dt} \langle b(\nabla u_t), \nabla u_t \rangle \right] \\ &= \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial A}{\partial y_i}(\nabla u_t), \nabla^2 u_t \right\rangle \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x_i} \right] dt + \int_0^1 \langle A(\nabla u_t), \nabla^2(u_1 - u_2) \rangle dt \\ &\quad + \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial b}{\partial y_i}(\nabla u_t), \nabla u_t \right\rangle \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x_i} \right] dt + \int_0^1 \langle b(\nabla u_t), \nabla(u_1 - u_2) \rangle dt. \end{aligned}$$

Si tomamos  $\bar{A} = \int_0^1 A(\nabla u_t) dt$  entonces se tiene que

$$\int_0^1 \langle A(\nabla u_t), \nabla^2(u_1 - u_2) \rangle dt = \langle \bar{A}, \nabla^2(u_1 - u_2) \rangle.$$

Ahora bien, si

$$\bar{b}_i = \int_0^1 \left[ \left\langle \frac{\partial A}{\partial y_i}(\nabla u_t), \nabla^2 u_t \right\rangle + \left\langle \frac{\partial b}{\partial y_i}(\nabla u_t), \nabla u_t \right\rangle \right] dt + \int_0^1 b(\nabla u) dt,$$

para  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $Q(u_1) - Q(u_2) = L(u_1 - u_2)$ , donde  $L(v) = \langle \bar{A}, \nabla^2 v \rangle + \langle \bar{b}, \nabla v \rangle$ . Además, como  $A$  es simétrica y definida positiva en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\bar{A}$  lo será también en  $\Omega$ . Queda así probado que  $L$  es un operador lineal elíptico.  $\square$

**Teorema 4.12.** *Sea  $Q: C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$  un operador cuasilineal elíptico y  $u_1, u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$  tales que  $Q(u_1) \geq Q(u_2)$  en  $\Omega$ .*

1. *Si  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo en  $\Omega$ , entonces  $u_1 - u_2$  es constante.*
2. *Si  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo en  $x_0 \in \partial\Omega$ , entonces  $u_1 - u_2$  es constante o bien  $\frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x_0) > \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(x_0)$ , donde  $\eta$  denota el campo conormal unitario exterior a  $\Omega$  a lo largo de  $\partial\Omega$ .*
3. *Sea  $\Omega$  acotado. Si  $u_1 \leq u_2$  en  $\partial\Omega$ , entonces  $u_1 \leq u_2$  en  $\Omega$ .*
4. *Sea  $\Omega$  acotado,  $Q(u_1) = Q(u_2)$  en  $\Omega$  y  $u_1 = u_2$  en  $\partial\Omega$ . Entonces  $u_1 = u_2$  en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Probaremos cada apartado por separado.

1. Por la Proposición 4.11 podemos asegurar la existencia de un operador lineal elíptico  $L$  tal que  $Q(u_1) - Q(u_2) = L(u_1 - u_2)$ . Sea  $x_0 \in \Omega$  el punto en el que  $u_1 - u_2$  alcanza su máximo  $c := (u_1 - u_2)(x_0)$ . De esta manera, si  $u := u_1 - u_2 - c \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , con  $u \leq 0$ , entonces

$$L(u) = L(u_1 - u_2 - c) = L(u_1 - u_2) - L(c) = Q(u_1) - Q(u_2) \geq 0.$$

Por el Teorema 4.8 se tiene que  $u < 0$  o bien  $u = 0$  en  $\Omega$ , pero como  $u(x_0) = 0$  entonces concluimos que  $u = 0$  en  $\Omega$ , de donde se sigue que  $u_1 - u_2 = c \in \mathbb{R}$ .

2. De manera análoga al apartado 1, sea  $u := u_1 - u_2 - c \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , con  $u \leq 0$  donde  $x_0 \in \partial\Omega$  es tal que  $(u_1 - u_2)(x_0) = c$  es el máximo de  $u_1 - u_2$ . Si  $u = 0$ , entonces  $u_1 - u_2 = c \in \mathbb{R}^2$ . Si  $u < 0$ , como consecuencia del Lema 4.7 se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x_0) - \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

3. Supongamos que  $\Omega$  es acotado y que  $u_1 - u_2 \leq 0$  en  $\partial\Omega$ . Si  $u_1 - u_2$  alcanza el máximo en  $\Omega$ , por el apartado 1 se tiene que  $u_1 - u_2$  es constante. Si no alcanza el máximo en  $\Omega$  entonces lo alcanzará en  $\partial\Omega$  dado que  $\bar{\Omega}$  es compacto como consecuencia del teorema de Heine-Borel.

4. Es consecuencia directa de aplicar el apartado 3 dos veces a  $u_1 - u_2 \leq 0$  en  $\Omega$ . □

### 4.3. Comparación de superficies

Para el desarrollo de esta sección seguiremos la exposición dada en [24, §3.3]. Consideremos de nuevo una superficie regular  $M$  dotada con la métrica inducida de  $\mathbb{R}^3$ , el producto escalar usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , que la caracteriza como una variedad de Riemann. Dado  $p \in M$ , podemos expresar

localmente la superficie en cuestión como el grafo de una función diferenciable  $\varphi: U \rightarrow M$  definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\varphi(0,0) = p$ . Es decir, localmente  $M$  viene parametrizada por la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \\ (u, v) &\mapsto \mathbb{X}(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)). \end{aligned}$$

Derivando respecto a cada variable obtenemos que  $\mathbb{X}_u = (1, 0, \varphi_u)$  y  $\mathbb{X}_v = (0, 1, \varphi_v)$ . Como consecuencia de la Observación 1.43, la segunda forma fundamental de  $M$  en  $p$ ,  $\mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p$ , será el hessiano de  $\varphi$  en  $(0,0)$ , es decir

$$\mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p = (\nabla^2 \varphi)(0,0) = \begin{pmatrix} \varphi_{uu}(0,0) & \varphi_{uv}(0,0) \\ \varphi_{vu}(0,0) & \varphi_{vv}(0,0) \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue,  $M_1$  y  $M_2$  denotarán dos superficies regulares tangentes en  $p \in M_1 \cap M_2$  con la misma orientación ( $N_1(p) = N_2(p)$ ), definidas localmente por  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , respectivamente, y tales que  $T_p M_1 = T_p M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = 0\}$ , de donde se sigue que  $\nabla \varphi_1(0,0) = \nabla \varphi_2(0,0)$ .

Con las notaciones que venimos empleando, pasamos a comparar superficies mediante sus curvaturas.

**Definición 4.13.** Diremos que  $M_2$  está por encima de  $M_1$ , y lo denotaremos por  $M_2 \geq M_1$ , si  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \geq 0$ , es decir si  $\varphi_2 \geq \varphi_1$  en un entorno de  $(0,0)$ .

Así, si  $\varphi \geq 0$  en un entorno de  $(0,0)$ , entonces  $(0,0)$  es un mínimo local de  $\varphi$ . Como consecuencia del comportamiento local del hessiano en un mínimo, se tiene el siguiente resultado.

**Lema 4.14.** Con la notación dada anteriormente se tiene, para todo  $p \in M_1 \cap M_2$ , lo siguiente:

1. Si  $\mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p^2 > \mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p^1$ , entonces  $M_2 \geq M_1$ ,
2. Si  $M_2 \geq M_1$  en  $p$ , entonces  $\mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p^2 \geq \mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p^1$  y, en particular,  $H_2(p) \geq H_1(p)$ .

*Demostración.* Tomando  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(0,0) &= \varphi_2(0,0) - \varphi_1(0,0) = 0, \\ \nabla \varphi(0,0) &= \nabla \varphi_2(0,0) - \nabla \varphi_1(0,0) = 0, \\ (\nabla^2 \varphi)(0,0) &= (\nabla^2 \varphi_2)(0,0) - (\nabla^2 \varphi_1)(0,0) = \mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p^2 - \mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p^1 \geq 0, \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{I}\!\!\!\text{I}_p^i$  denota la segunda forma fundamental de  $M_i$  en  $p$  para  $i \in \{1,2\}$ . De esta manera  $(0,0)$  es un mínimo local de  $\varphi$ , es decir, existe un entorno  $W$  de  $(0,0)$  tal que  $\varphi(u,v) \geq \varphi(0,0) = 0$ , de donde se sigue que  $\varphi_2(u,v) \geq \varphi_1(u,v)$  para todo  $(u,v) \in W$ . Concluimos así que  $M_2 \geq M_1$ .

Supongamos ahora que  $M_2 \geq M_1$ . Si  $\varphi$  posee un mínimo local en  $(0, 0)$  entonces  $(\nabla^2 \varphi)(0, 0) \geq 0$ , de donde se sigue que  $\mathbb{I}_p^2 - \mathbb{I}_p^1 \geq 0$ . Ahora, como  $H_i(p) = \frac{e_i + g_i}{2}$  es la traza de  $\mathbb{I}_p^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces es claro que  $H_2(p) \geq H_1(p)$ .  $\square$

Acabamos esta sección con un resultado que establece una caracterización de los puntos elípticos<sup>3</sup>.

**Lema 4.15.** *Sea  $M$  una superficie regular y  $p \in M$ . Entonces  $K(p) > 0$  si, y solo si, existe una esfera de radio  $r > 0$  y centro  $p_r$ ,  $\mathbb{S}_{p_r}^2(r)$ , tangente a  $M$  en  $p$  tal que  $M \cap \overline{B(p_r, r)}$  es un entorno de  $p$  en  $M$ , con  $B(p_r, r)$  denotando la bola abierta de centro  $p_r$  y radio  $r$ .*

*Demostración.* Sea  $p$  un punto elíptico de  $M$ , es decir  $K(p) > 0$ . Podemos suponer, tras cambiar de orden las variables la parametrización que define localmente a  $M$  (y por tanto invertir el signo de la aplicación de Gauss) si es necesario, que las curvaturas principales  $k_1(p)$ ,  $k_2(p)$  de  $M$  en  $p$  son ambas estrictamente positivas. Dado  $r > 0$ , sea  $p_r = p + rN_p$  y consideremos la esfera  $\mathbb{S}_{p_r}^2(r)$  de manera que es tangente a  $M$  y  $N_p$  coincide con su normal interior en  $p$ . Si tomamos ahora  $r > 0$  tal que  $k_i(p) > \frac{1}{r}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces se tiene que la segunda forma fundamental de  $M$  en  $p$  será

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p(v, w) &= \langle A_p(v_1e_1 + v_2e_2), w_1e_1 + w_2e_2 \rangle = v_1w_1 \langle A_p(e_1), e_1 \rangle + v_2w_2 \langle A_p(e_2), e_2 \rangle \\ &= v_1w_1k_1(p) + v_2w_2k_2(p) > \frac{1}{r}(v_1w_1 + v_2w_2) = \frac{1}{r} \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Ahora bien, como la segunda forma fundamental de  $\mathbb{S}_{p_r}^2$  es exactamente el último miembro de la igualdad arriba desarrollada, se sigue por el apartado 1 del Lema 4.14 que  $M \geq \mathbb{S}_{p_r}^2(r)$ . Esto es, si  $\varphi_M$  denota el grafo que representa localmente a  $M$ , entonces  $(x, y, \varphi_M(x, y)) \in \overline{B(p_r, r)}$  para todo  $(x, y)$  en un entorno del  $(0, 0)$ . Podemos así concluir que  $M \cap \overline{B(p_r, r)}$  es un entorno de  $p$  en  $M$ .

Recíprocamente, sea  $\mathbb{S}_{p_r}^2(r)$  una esfera tal que  $M \cap \overline{B(p_r, r)}$  es un entorno de  $p$  en  $M$ . Razonando de manera similar a la anterior implicación se tiene que  $M \geq \mathbb{S}_{p_r}^2(r)$  y, por el apartado 2 del Lema 4.14, concluimos que  $\mathbb{I}_p \geq \frac{1}{r} \langle \cdot, \cdot \rangle > 0$ . Así,  $\mathbb{I}_p$  es definida positiva de donde se sigue que  $K(p) > 0$ .  $\square$

## 4.4. El Principio del máximo

Los dos teoremas que enunciaremos y probaremos a continuación constituyen el análogo geométrico del *Principio del máximo* para funciones armónicas.

<sup>3</sup>Decimos que un punto  $p$  es *elíptico* si  $K(p) > 0$ .

**Teorema 4.16 (Principio del máximo interior).** Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos superficies con curvaturas medias  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente, tales que  $H_1 \geq H_2$  y  $M_1 \leq M_2$  en  $p \in M_1 \cap M_2$ . Entonces existe un entorno  $W \subset \mathbb{R}^3$  de  $p$  tal que  $M_1 \cap W = M_2 \cap W$ .

*Demostración.* Alrededor de  $p$  podemos expresar las superficies  $M_1$  y  $M_2$  como la gráfica de dos funciones diferenciables  $u_1$  y  $u_2$  definidas en un entorno  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  del origen en el plano tangente común  $T_p M_1 = T_p M_2$ .

Como por hipótesis  $M_1 \leq M_2$  en  $p$ , entonces  $u_1 \leq u_2$  en un entorno de  $(0,0)$  en  $\Omega$ , que podemos suponer sin pérdida de generalidad que es el propio  $\Omega$ . La igualdad  $u_1 = u_2$  se da en el origen dado que  $u_1(0,0) = u_2(0,0) = p$ . Así pues,  $u_1 - u_2$  alcanza un máximo interior en  $(0,0)$ . Ahora bien, como  $H_1 \geq H_2$ , entonces por el apartado 1 del Teorema 4.12 se tiene que  $u_1 - u_2 = 0$  en  $\Omega$  y por tanto existe un entorno  $W$  de  $p$  donde  $M_1 = M_2$ .  $\square$

*Observación 4.17.* Recordemos que para suponer que  $M_2 \geq M_1$  en un punto  $p \in M_1 \cap M_2$  es necesario que los normales a ambas superficies coincidan en  $p$  (ver Sección 4.3).

**Definición 4.18.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos superficies regulares con borde y  $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ . Diremos que  $M_1$  y  $M_2$  son tangentes en  $p$  si

$$\begin{array}{ll} \blacksquare T_p M_1 = T_p M_2, & \blacksquare T_p \partial M_1 = T_p \partial M_2, \end{array}$$

en el sentido de que las aplicaciones de Gauss de  $M_1$  y  $M_2$  así como  $\eta_1$  y  $\eta_2$  (ver Definición 4.5), a lo largo de  $\partial M_1$  y  $\partial M_2$  respectivamente, coinciden en  $p$ .

**Definición 4.19.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos superficies regulares con borde que expresamos localmente alrededor de  $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$  como grafos de dos funciones diferenciables  $u_i: \bar{\Omega}_i \subset T_p \partial M_i \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1,2\}$ . Decimos que  $M_1$  está por debajo de  $M_2$ ,  $M_1 \leq M_2$ , si  $u_1 \leq u_2$  en  $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ .

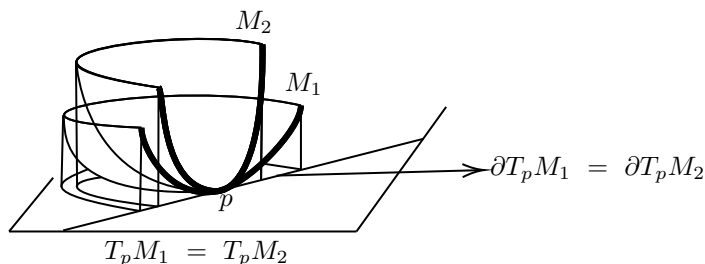


Figura 4.1:  $M_1$  está por debajo de  $M_2$  en  $p$ .

Como consecuencia del siguiente teorema, el operador curvatura media  $H$  de una superficie regular  $M$  puede entenderse como el equivalente geométrico del operador Laplaciano en funciones. Esta analogía permite, como consecuencia de la Definición 2.1, entender las superficies minimales como soluciones geométricas de la ecuación de Laplace.

**Teorema 4.20 (Principio del máximo en la frontera).** Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos superficies regulares con borde y curvaturas medias  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente, tales que  $H_1 \geq H_2$  y  $M_1 \leq M_2$  en  $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ . Entonces existe un entorno  $W \subset \mathbb{R}^3$  de  $p$  tal que  $M_1 \cap W = M_2 \cap W$ .

*Demostración.* Expresemos localmente ambas superficies alrededor de  $p$  como los grafos de dos funciones diferenciables  $u_1$  y  $u_2$  definidas en un entorno  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de  $(0,0)$  en los semiplanos cerrados determinados por  $T_p\partial M_1 = T_p\partial M_2$  dentro de  $T_pM_1 = T_pM_2$ .

Como por hipótesis  $M_1$  está por debajo de  $M_2$  en  $p$  entonces  $u_1 \leq u_2$  en  $\Omega$  y  $u_1(0,0) = u_2(0,0) = p$ . Así,  $u_1 - u_2$  alcanza un máximo en  $(0,0) \in \partial\Omega$ . Ahora bien, como  $H_1 \geq H_2$  entonces por el apartado 2 del Teorema 4.12 se tiene que  $u_1 - u_2 = 0$  en  $\Omega$  o bien

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta}(0,0) > \frac{\partial u_2}{\partial \eta}(0,0), \quad (4.6)$$

donde  $\eta$  denota el campo conormal unitario exterior a  $\Omega$  a lo largo de  $\partial\Omega$ . Necesariamente  $u_1 - u_2 = 0$  en  $\Omega$  dado que (4.6) contradice la igualdad  $T_pM_1 = T_pM_2$  pues, para que esta se cumpla, las derivadas direccionales en cualquier dirección deben coincidir en  $p$ . Finalmente, como  $u_1 - u_2 = 0$  entonces  $M_1 = M_2$  en un entorno de  $p$ .  $\square$



# Bibliografía

- [1] ABBENA, E., GRAY, A. Y SALAMON, S. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*<sup>®</sup>. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
- [2] ALARCÓN-LÓPEZ, A. *Introducción a las Superficies de Riemann*. Disponible en [https://wpd.ugr.es/~ geometry/seminar/files/talks/20050125AAlarc%C3%B3n.pdf](https://wpd.ugr.es/~geometry/seminar/files/talks/20050125AAlarc%C3%B3n.pdf) (mayo 2025).
- [3] ALEXANDROV, A. Uniqueness theorems for surfaces in the large. I. *Vestnik Leningrad. Univ.* **11** (1956), no. 19, 5–17.
- [4] APOSTOL, T. M. *Análisis matemático: introducción moderna al cálculo superior*. Reverté, 1974.
- [5] AXLER, S. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2024.
- [6] BERNSTEIN, S. Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. *Math. Z.* **26** (1927), no. 1, 551–558.
- [7] BERS, L. Y POLLACK, R. *Riemann Surfaces*. New York University, 1957.
- [8] BROWN, J. W. Y CHURCHILL, R. V. *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill, 2004.
- [9] CARMO, M. P. D. *Riemannian geometry*. Mathematics (Boston, Mass.). Birkhäuser, 1992.
- [10] CATALAN, E. Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum. *J. Math. Pures Appl.* **7** (1842), 203–211.
- [11] DIERKES, U., JAKOB, R., HILDEBRANDT, S., KÜSTER, A. Y SAUVIGNY, F. *Minimal Surfaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg, 2010.

- 
- [12] DOUGLAS, J. Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.* **33** (1931), no. 1, 263–321.
- [13] DOUGLAS, J. The problem of Plateau. *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1933), no. 4, 227–251.
- [14] FARKAS, H.M. Y KRA, I. *Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [15] FOMENKO, A.T. Y TUZHILIN, A. *Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1991.
- [16] FUJIMOTO, H. On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces. *J. Math. Soc. Japan* **40** (1988), no. 2, 235–247.
- [17] GREENBERG, M.J. Y HARPER, J.R. *Algebraic Topology: A First Course*. Mathematics lecture note series. W. A. Benjamin, 1981.
- [18] HAAR, A. Über das Plateausche Problem. *Math. Ann.* **97** (1927), no. 1, 124–158.
- [19] HERNÁNDEZ-CIFRE, M.A. Y PASTOR-GONZÁLEZ, J. A. *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*. Editorial CSIC, 2019.
- [20] HILDEBRANDT, S. Y VON DER MOSEL, H. On Lichtenstein’s theorem about globally conformal mappings. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **23** (2005), no. 4, 415–424.
- [21] LEE, J. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate texts in Mathematics, 176. Springer New York, 1997.
- [22] LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer New York, 2012.
- [23] LIE, S. Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. *Math. Ann.* **14** (1878), no. 3, 331–416.
- [24] MARTÍN, F. Y PÉREZ, J. *Superficies mínimas y de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$* . Disponible en <https://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/todo.pdf> (mayo 2025).
- [25] OSSERMAN, R. Global properties of minimal surfaces in  $E^3$  and  $E^n$ . *Ann. of Math. (2)* **80** (1964), no. 2, 340–364.
- [26] PÉREZ-GONZÁLEZ, F. J. *Curso de Análisis Complejo*. Disponible en [https://www.ugr.es/~fjperez/textos /funciones\\_variable\\_compleja.pdf](https://www.ugr.es/~fjperez/textos /funciones_variable_compleja.pdf) (mayo 2025).
- [27] PLATEAU, J. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, 1873.

- 
- [28] RADÓ, T. The problem of the least area and the problem of Plateau. *Math. Z.* **32** (1930), no. 1, 763–796.
- [29] RODRÍGUEZ-VÁZQUEZ, A. *Superficies minimais*. Trabajo de Fin de Grado (2017). Universidad de Santiago de Compostela.
- [30] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [31] SARIO, L. Picard's Great Theorem on Riemann Surfaces. *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), no. 7, 598–608.
- [32] XAVIER, F. The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Ann. of Math. (2)* **113** (1981), no. 1, 211–214.