

ACTAS DO SEMINARIO

DE

INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN

CURSO 2023 – 2024

Editores:

Víctor Cora Calvo

Juan Manuel Lorenzo Naveiro

Andrés Pérez Rodríguez

Miguel Picos Maiztegui

María Vidal García

© 2024 Seminario de Iniciación á Investigación.
Centro de Investigación y Tecnología Matemática de Galicia (CITMAga)

Coordina:

Seminario de Iniciación á Investigación (SII)
sii@citmaga.gal

Edita:

Centro de Investigación y Tecnología Matemática de Galicia (CITMAga)

Imprime:

Imprenta Universitaria
Pavillón de Servizos s/n
Campus Vida
15782 Santiago de Compostela
A Coruña

ISSN: 2171 - 6536

Depósito Legal: C 1758-2023

*In mathematics the art of proposing a question
must be held of higher value than solving it.*

Georg Cantor (1845 – 1918)

*Mathematics compares the most diverse phenomena
and discovers the secret analogies that unite them.*

Joseph Fourier (1768 – 1830)

Prefacio

Gustaríame empezar dicindo que é un pracer para min escribir este prefacio para as actas do Seminario de Iniciación á Investigación deste ano. Cando os editores deste volume me pediron se podía compartir unhas verbas non o dubidei nin por un momento, son firme admirador da idea destes seminarios xa que o SII sempre foi un espazo no que as matemáticas máis complexas se fan máis sinxelas, onde os camiños investigadores das persoas coas que convivimos na Facultade de Matemáticas ou no CITMAga se cruzan e se enriquecen. Aquí, as matemáticas transcenden as súas fronteiras tradicionais para converterse nunha linguaxe común que nos une e que fai crecer ás novas promesas no noso eido e a todos nós como comunidade.

Un dos grandes retos que afrontamos as persoas investigadoras é o de comunicarnos máis aló do noso propio ámbito, evitando así crear o muro que tan de moda parece estar na xeopolítica actual. Cada especialidade das matemáticas parece ás veces un universo complexo e independente, illado por conceptos e técnicas específicas que dificultan o diálogo. No SII, vai facer agora 20 anos que se propuxeron romper esas barreiras, creando un espazo onde cada charla sexa unha ponte cara as matemáticas que practican os nosos veciños e onde as nosas investigacións e aprendizaxes dun ou varios anos se converten en pezas capaces de ser comprendidas en menos dunha hora. Penso que ese espírito é importante mantelo para que todas as intervencións sexan accesibles, de forma que cada relato permita achegarnos un pouco máis ós enigmas cos que traballan as demais persoas do noso redor.

Porque dende o meu punto de vista a riqueza do SII radica niso: en coñecer as matemáticas da veciña e do veciño, en compartir os camiños que seguimos e os obstáculos que atopamos. Para darnos conta de que, ás veces, o desafío co que se atopa un estatístico é similar ó que se pode atopar un alxebrista, de que esa ferramenta de análise matemático que nos faltaba para obter un resultado é de sobra coñecida pola persoa que tiñamos ó lado na sala. Cada charla é unha oportunidade para descubrir as inxerencias doutros, para ampliar a nosa visión das matemáticas e, sobre todo, cada seminario é un convite á construción colectiva de coñecemento e ó apoio mutuo que tanto necesitamos nesta andaina e na que é importante non esquecer nos de que todos nós compartimos as mesmas raíces e que imos enfrontarnos a problemas similares durante a carreira investigadora.

Convidámosvos, entón, a deixarnos levar por esta experiencia, a cruzar as pontes que o SII nos ofrece e a descubrir o fascinante mundo das matemáticas que se agocha ó outro lado. Que esta edición sexa un paso máis cara unha comunidade máis unida

e aberta, onde todos teñamos a oportunidade de aprender uns dos outros e de compartir o noso propio camiño.

Grazas a todas as persoas que facedes posible este seminario e a ti, que estás a ler este texto, por formar parte desta aventura. Que este volume sexa só o comezo de moitas conversacións, de moitas colaboracións e de moita aprendizaxe.

Santiago de Compostela, febreiro de 2025

Jose Ameijeiras Alonso

Índice xeral

Introdución	1
Sandro Caeiro Oliveira “Buscades problemas? Pois demostrade un lema”	3
Paula Cambeses Franco “Modelando fluídos non newtonianos con ecuacións p -Laplacianas”	9
Lois Omil Pazos “Resolución de ecuacións diofánticas de orde superior”	17
Isaac Carcacía Campos “Conxuntos simpliciais, unha nova aproximación á topoloxía”	23
Carmen Pavón Souto “O problema de tres corpos”	29
Andrea Polo Rodríguez “Teoría de Morse discreta”	35
Javier López Pedrares “Modelos epidemiolóxicos en redes complexas”	41
Beatriz Piñeiro Lamas “Análise de supervivencia: unha aplicación á cardio-oncoloxía”	49
Javier Polo Noche “Formas modulares, símbolos modulares e aplicacións”	57
Naomi Diz-Rosales¹, María José Lombardía², Domingo Morales³ “Small Area Estimation: Mixed Models for Social Challenges”	63
Mario Julián Rodríguez Sánchez de Toca “Espacios simétricos y curvatura adaptada”	69
Iago Padín Domínguez “Gestión de una planta fotovoltaica mediante la aplicación de control estocástico con restricciones sobre el estado”	75
Unha xornada de divulgación. “Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2023”	83
Agradecementos	85

Introdución

Os Seminarios de Iniciación á Investigación (SII) nacen no 2005 impulsados por estudantes de doutoramento interesados en dar a coñecer o seu traballo ó resto da comunidade universitaria. Dende entón, estes encontros constitúen unhas das actividades fundamentais de comunicación científica na Facultade de Matemáticas, permitindo un achegamento amigable ó traballo de investigación, moitas veces tan críptico.

Estes case vinte anos de andadura só foron posibles grazas á contribución e compromiso de dúcias de persoas. Cada unha delas enriqueceu ós seus compañeiros e contribuíu a crear comunidade grazas ó tempo e traballo adicado a compartir a súa aprendizaxe. Algunhas delas son hoxe docentes en institutos, outras están en empresas ou institucións estatais, algunhas mesmo son xa profesores e profesoras na universidade, pero todas se beneficiaron deste espazo que actúa como punto de encontro entre as distintas áreas das Matemáticas.

Os obxectivos das actividades promovidas dende o SII son basicamente tres. En primeiro lugar, actúa como unha primeira plataforma para impulsar a novas investigadoras e investigadores. Saber comunicar ideas fóra de ambientes súper especializados é fundamental nunha carreira investigadora, só así poden xurdir sinerxias e colaboracións entre profesionais con bagaxes distintas que se poidan complementar mutuamente. O SII proporciona un espazo amable onde empezar a practicar e coller soltura neste aspecto. Esta faceta comunicativa sublímbase na xornada de divulgación Matemáticas: Habelas Hainas!, unha iniciativa impulsada dende decanato que se puxo en marcha en 2017 e se celebra cada outono dende entón. Esta actividade é aberta a un público xeral, o que incide nunha parte fundamental, pero ás veces esquecida, da labor científica: a comunicación dos avances á sociedade. Faino ademais en colaboración co Servizo de Normalización Lingüística promovendo, como no pode ser doutro xeito, o galego como lingua de comunicación científica e académica.

O segundo dos obxectivos está enfocado á mellora da propia investigación. A investigación matemática é a miúdo un camiño solitario, comprender o esencial dun artigo require un amplo coñecemento da literatura previa e certo manexo da linguaxe específica de cada área, o que afasta non só a investigadores doutras áreas, ás veces mesmo para compañeiros de departamento especializados en temas distintos é difícil atopar puntos de conexión. Paradoxicamente, aínda que os investigadores estean afastados, os problemas duns e outros están moitas veces moi próximos. O esforzo en facer os resultados máis accesibles é a clave para posibilitar unha abordaxe

conxunta e unha comprensión máis profunda dos temas.

Por último, o terceiro obxectivo é quizais o menos valorado pero pode que sexa o máis importante, e é xerar un tecido social dentro da facultade. Como calquera outro traballo, a investigación é unha actividade levada a cabo por persoas, e como tal establecer vínculos sociais cordiais e próximos facilita todos os aspectos da mesma. Un alumno pode verse intimidado ante a perspectiva dunha carreira investigadora, pero isto mitigarase se se ve acollido por compañeiras e compañeiros que o estiveron antes, se ve que outras puideron e se perciben que hai unha comunidade que lle vai servir de sostén e de axuda se o precisa. Neste sentido, dende o SII sempre se apostou por tratar de propoñer un programa inclusivo, combinando contribucións de estudantes de distintos niveis e áreas e tratando de xerar referentes para todos os membros da comunidade educativa, por exemplo buscando sempre unha representación paritaria.

Dende a comisión organizadora do curso 2023/2024, constituída por cinco estudantes de doutoramento das áreas de Álgebra, Análise Matemática, Estatística e Investigación Operativa, Matemática Aplicada e Xeometría e Topoloxía, queremos agradecer o traballo de todas as comisións previas que nos serviu de guía e referente, e por suposto, o de todas as participantes que ó longo dos anos fixeron posible a celebración de charlas quinquenais e das actividades de divulgación. A labor desta comisión inclúe buscar participantes, organizar as sesións e as xornadas, promocionalas, levar un seguimento da asistencia e participación e, finalmente, a edición destas actas que deixan constancia do traballo compartido polos magníficos relatores e relatoras do presente curso. A eles queremos agradecerlles especialmente o seu esforzo e compromiso.

Aos futuros comités do SII nos vindeiros cursos, queremos agradecerlles que manteñan viva esta iniciativa e desexarlles toda a sorte. E a ti, que estás lendo isto, queremos convidarte a participar das actividades do SII, xa sexa como público, como relatora ou como organizador, a aportación que podes facer é única e valiosa e esta comunidade está aquí para recibirte cos brazos abertos.

Buscades problemas? Pois demostrade un lema

Xeometría e Topoloxía

Sandro Caeiro Oliveira

Universidade de Vigo

18 de outubro de 2023

Introdución

Cando alguén alleo á facultade pensa en investigación en matemáticas, é probable que o primeiro que lle veña á mente é que se basea en aplicar resultados xa coñecidos para resolver problemas doutros ámbitos como a enxeñaría, a física ou ciencias da saúde. Porén, nas áreas menos aplicables rara vez ocorre isto. O obxectivo desta charla non é outro que amosar un exemplo de como se leva a cabo este traballo na área de xeometría, e máis concretamente para un problema de clasificación de métricas. Así pois, o que se recalcará neste resumo será o proceso seguido á hora de salvar as dificultades, non os propios resultados da investigación.

Presentación do problema

As *métricas de Einstein* son un tipo de métricas amplamente estudado tanto en xeometría riemanniana coma en física. Estas métricas son aquelas cuxa curvatura está mellor distribuída ao longo da variedade, xa que a súa curvatura de Ricci é proporcional á métrica en cada punto. Ademais, son as solucións das ecuacións de campo de Einstein.

Podemos definir as métricas de Einstein como puntos críticos dun funcional. Sexa M^n unha variedade de dimensión n e consideremos o espazo de todas as métricas pseudo-riemannianas en M . O funcional da curvatura escalar total, ou funcional de Hilbert-Einstein, defínese como $S_{HE}(g) = \int_M \tau dvol_g$, onde τ denota a curvatura escalar. Dado este funcional, unha métrica g é Einstein se, e só se, é crítica para a restrición de S_{HE} ao subconxunto de métricas co mesmo volume de g . Así, a ecuación de Euler-Lagrange correspondente (o que sería a “derivada do funcional igualada a cero”) equivale a que o tensor de curvatura de Ricci, ρ , sexa proporcional ao tensor métrico, g ,

$$\rho - \frac{\tau}{n}g = 0. \tag{1}$$

Dado que estas métricas foron amplamente estudadas, un bo punto de partida é intentar xeneralizar estas métricas. Por unha banda, pódense xeneralizar modificando a ecuación (1), como é o caso dos *solitóns de Ricci*, onde se deforma a ecuación

engadindo o termo que involucra a derivada de Lie do tensor métrico, ou das *métricas debilmente Einstein*, onde se substitúe o tensor de Ricci por outros tensores de curvatura semellantes.

Por outra banda, pódense xeneralizar modificando o funcional de partida. O funcional de Hilbert-Einstein definiuse como a integral de volume da curvatura escalar. Dita curvatura escalar é o único invariante escalar da curvatura de orde 1, polo que o seguinte paso natural é estudar que ocorre cos funcionais definidos a partir dos invariantes da curvatura de orde 2, que son xerados por $\{\tau^2, \|\rho\|^2, \|R\|^2, \Delta\tau\}$ [1]. En dimensións tres e catro, o funcional xerado por $\|R\|^2$ é unha combinación linear dos dous primeiros, e imos traballar localmente en veciñanzas compactas, polo que a integral de volume do laplaciano da curvatura escalar é cero en calquera caso. Así, os funcionais obxecto de estudo son os xerados por combinacións de τ^2 e $\|\rho\|^2$, logo traballaremos con

$$\mathcal{S} : g \mapsto \int_M \tau^2 dvol_g, \quad \mathcal{F}_t : g \mapsto \int_M \{\|\rho\|^2 + t\tau^2\} dvol_g.$$

Cabe destacar que o obxectivo é atopar as métricas críticas, polo que, aínda que $2\mathcal{F}_t \neq \mathcal{F}_t$, os puntos críticos si coinciden.

Do mesmo xeito que tiñamos a ecuación (1) para as métricas de Einstein, para as métricas críticas para os funcionais cuadráticos temos estoutras ecuacións de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : & \quad \text{Hes } \tau - \frac{1}{n} \Delta\tau g - \tau(\rho - \frac{1}{n} \tau g) = 0, \\ \mathcal{F}_t : & \quad -\Delta\rho + (1 + 2t) \text{Hes } \tau - \frac{2}{n} t \Delta\tau g - 2R[\rho] - 2t\tau\rho + \frac{2}{n} (\|\rho\|^2 + t\tau^2)g = 0, \end{aligned}$$

onde $\text{Hes } \tau$ e $\Delta\tau$ son o hessiano e o laplaciano da curvatura escalar, respectivamente, $\Delta\rho$ é o laplaciano do tensor de Ricci e $R[\rho]$ é o tensor obtido de contraer o tensor de curvatura co tensor de Ricci. A simple vista, as ecuacións son máis complexas que a correspondente ás métricas Einstein. Ademais, a presenza de hessianos e laplacianos fai que estas ecuacións sexan ecuacións diferenciais que, en xeral, non teñen por que ter solución. Polo tanto, resulta imposible afrontar o problema de achar as métricas críticas de xeito directo, polo que debemos restrinxirnos a certas familias de métricas, que veremos nas seguintes seccións.

Métricas homoxéneas de dimensión tres

Para simplificar as ecuacións podemos estudar aquelas métricas con curvatura escalar constante, xa que deste xeito eliminamos os termos dos Hessianos e Laplacianos da curvatura escalar. As máis estudadas son as métricas localmente homoxéneas, que intuitivamente son aquelas que se ven igual desde calquera sistema de referencia. Máis formalmente, para cada par de puntos da variedade, $p, q \in M$, existe unha isometría $\varphi_{pq} : U_p \rightarrow U_q$ entre veciñanzas de p e q tal que $\varphi_{pq}(p) = q$.

Ademais de teren curvatura escalar constante, as variedades localmente homoxéneas teñen unha vantaxe adicional: están clasificadas e caracterizadas. Polo teorema

de Sekigawa sabemos que en dimensións tres e catro toda variedade localmente homoxénea é localmente simétrica ou localmente isométrica a un grupo de Lie (variedade que tamén é un grupo). Por outra banda, en dimensión tres podemos utilizar a caracterización de Milnor [3] para dividir os grupos de Lie en unimodulares e non unimodulares, cada un destes dous casos dependendo de tres parámetros. Así, o caso tridimensional redúcese a un sistema de ecuacións polinómicas en función de tres incógnitas para cada un dos casos, que se pode resolver sen utilizar ferramentas especiais.

Polo tanto, restrinxindo o noso problema inicial ás métricas homoxéneas de dimensión tres, conseguiuuse o seguinte:

- Obtívose a clasificación completas das métricas críticas homoxéneas en dimensión tres.
- Confirmouse que todos os funcionais admiten polo menos unha métrica crítica.
- Descubriuse que hai funcionais que admiten dúas métricas críticas homoxéneas distintas.
- Atopouse unha relación entre as métricas críticas e os solitóns de Ricci, sendo estes últimos os únicos que son críticos con enerxía cero, isto é, $\|\rho\|^2 + t\tau^2 = 0$.

Métricas homoxéneas de dimensión catro

Resolto o caso tridimensional, un paso natural é comprobar que ocorre na seguinte dimensión. Porén, aínda que seguimos tendo un sistema de ecuacións polinómicas, estas son agora moito máis complexas, sendo imposibles de resolver directamente. Polo tanto, debemos utilizar algunha ferramenta alxébrica a maiores.

Supoñamos que temos un conxunto de polinomios que queremos igualar a cero. Estes polinomios xeran un ideal de xeito que, ao anular os polinomios, o resto do ideal tamén se anulará. Reciprocamente, se o ideal se anula, os xeradores tamén. Entón, se conseguimos un novo conxunto de polinomios máis sinxelos que xeren o mesmo ideal, ao anularmos estes novos polinomios estaremos anulando tamén os polinomios orixinais. Para aplicar esta idea utilizamos o algoritmo das *bases de Gröbner*, un algoritmo baseado no algoritmo da división de polinomios no que se obtén un conxunto xerador dun ideal de polinomios a partir dun conxunto de polinomios dado. Os novos polinomios dependen, ademais dos polinomios orixinais, da orde asignado ás variables e aos monomios (véxase [3]).

Utilizando isto e anulando os novos polinomios que xorden deste xeito, conseguiuuse o seguinte:

- Obtívose a clasificación completa das métricas críticas homoxéneas en dimensión catro.
- A diferenza do caso tridimensional, descubriuse que só os funcionais \mathcal{F}_t con $t < -\frac{1}{4}$ admiten métricas críticas homoxéneas.

- Descubriuse tamén que hai funcionais que admiten infinitas métricas críticas homoxéneas distintas.
- A relación cos solitóns de Ricci que tiñamos en dimensión tres agora é menos rixida: os solitóns alxébricos son críticos con enerxía cero pero non son os únicos.

Métricas curvatura homoxéneas

Dado o incremento da complexidade derivado de aumentar a dimensión das variedades homoxéneas, semella que seguir probando sorte en dimensións superiores non vai dar resultado. Polo tanto, o paso natural agora xa non é comprobar que ocorre en dimensión cinco, senón buscar outras métricas con curvatura escalar constante para manter as ecuacións simplificadas. Así, entre as posibilidades, temos as métricas curvatura homoxéneas de dimensión tres.

Unha métrica é *k-curvatura homoxénea* se para calquera par de puntos $p, q \in M$ existe unha isometría $\varphi_{pq} : T_p M \rightarrow T_q M$ tal que $\varphi_{pq}^* \nabla^i R_q = \nabla^i R_p$ para todo $i \leq k$. Estas métricas xeneralizan as homoxéneas, xa que nestas tense que $\varphi_{pq}^* \nabla^i R_q = \nabla^i R_p$ para calquera i .

Porén, estas métricas son menos manexables que as homoxéneas e as ecuacións deixan de ser polinómicas, polo que non somos quen de resolver o caso xeral. Polo tanto, restrinxímonos ás métricas semisimétricas, é dicir, aquelas cuxo tensor de curvatura satisfai $\nabla R = 0$. Así, centrarémonos nas métricas curvatura homoxéneas semi-simétricas, pero excluindo as métricas homoxéneas, que xa foron estudadas antes (véxase a Figura 1).

Con esta restrición conseguimos a clasificación completa, obtendo dúas familias de métricas críticas curvatura homoxéneas: unha familia de espazos de Kundt e unha de ondas de Brinkmann. Neste punto é natural preguntar que ocorre co caso xeral destes dous tipos de métricas. Os espazos de Kundt en xeral dependen de dúas funcións, o cal complica as ecuacións de Euler-Lagrange, mais as ondas de Brinkmann só dependen dunha función, polo que semellan unha boa vía para continuar.

Ondas de Brinkmann

As ondas de Brinkmann, ademais do seu interese xeométrico, son tamén interesantes no ámbito da Física. Dado que os nosos funcionais son potencialmente interesantes na física, cabe esperar que buscar as métricas críticas nas ondas de Brinkmann tamén pode ser de interese.

En dimensión tres, as coordenadas de Brinkmann veñen dadas pola métrica:

$$g(u, x, y) = 2dudy + dx^2 + \varphi dy^2.$$

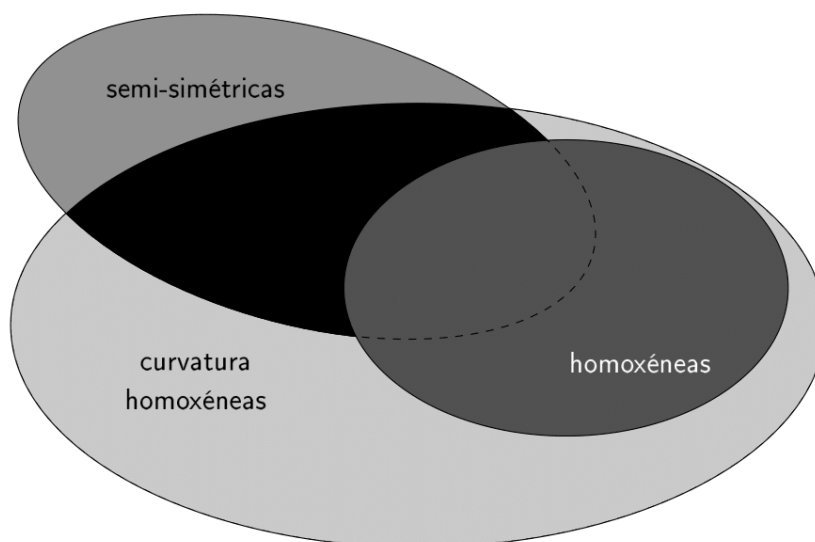


Figura 1: Representación das métricas que estamos estudando. Nesta sección traballamos coas métricas da rexión negra: curvatura homoxéneas semi-simétricas e non homoxéneas.

Polo tanto, os elementos da curvatura veñen dados en termos das derivadas parciais da función de Brinkmann φ . É dicir, as ecuacións de Euler-Lagrange son agora un sistema de ecuacións diferenciais.

Ao intentar resolver ditas ecuacións diferenciais, as solucións divídense en catro casos diferentes:

- Métricas críticas para todos os funcionais con curvatura escalar cero. Obtense a caracterización explícita desta familia de métricas.
- Métricas críticas só para \mathcal{F}_t con $t = -\frac{1}{3}$. A función de Brinkmann é un polinomio de grao 3 na variable u e os coeficientes están relacionados mediante unha ecuación diferencial.
- Métricas críticas só para \mathcal{F}_t con $t = -\frac{1}{4}$. A función de Brinkmann é unha función elíptica de Weierstrass.
- Métricas críticas só para \mathcal{F}_t con $t = -\frac{1}{2}$. Obtense un sistema de tres ecuacións diferenciais relacionadas entre si, o que non permite dar unha expresión explícita da solución, pero permite construír ondas de Brinkmann de dimensión 3 críticas a partir de ondas de Brinkmann de dimensión 2.

Conclusións

Aínda que o problema inicial de obter as métricas críticas para os funcionais cuadráticos da curvatura non se resolveu en xeral, afrontalo con certas restricións permitiu dar resultados parciais. Para as variedades homoxéneas conseguíuse a caracterización completa, ademais de algúns resultados que relacionan estas métricas con outras xeneralizacións das métricas de Einstein. Por outra banda, restrinxir o problema ás métricas curvatura homoxéneas non é suficiente e é necesario engadir a condición de seren semi-simétricas para poder obter resultados interesantes, pero permítenos dar o paso a estudar as ondas de Brinkmann.

Non temos a clasificación que queríamos, pero temos máis do que tiñamos ao principio. Polo tanto, podemos dicir que ás veces, no canto de buscar un teorema que resolva un problema, é mellor demostrar antes algún lema.

Bibliografía

- [1] Berger, M. (1970). *Quelques formules de variation pour une structure riemannienne*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **3**(4), pp. 285–294.
- [2] Caeiro Oliveira, S. (2022). *Métricas críticas para funcionais cuadráticos da curvatura*, Tese doutoral, Universidad de Santiago de Compostela.
- [3] Greuel, G. M., Pfister, G. e Schönemann, H. (2016). *SINGULAR – A computer algebra system for polynomial computations*, ACM Communications in Computer Algebra, **42**(3), pp. 180–181.
- [4] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329.

Modelando fluídos non newtonianos con ecuacións p -Laplacianas

Análise matemática

Paula Cambeses Franco

Universidade de Santiago de Compostela

2 de novembro de 2023

Introdución

Que pensariamos se vísemos a alguén camiñando sobre a auga? Creríamos que é un efecto visual ou, pola contra, que de verdade é posible? Efectivamente, existen unha serie de fluídos cuxo comportamento se afasta das leis clásicas da mecánica estudada por Newton. É o que acontece cos denominados fluídos non newtonianos, cuxa viscosidade varía coa temperatura ou a tensión cortante que se lles aplique. Noutras palabras, existen materiais aparentemente líquidos que, ao sometelos a unha mínima presión, se volven duros como unha pedra (e viceversa). Exemplos disto son a pintura ou a maionesa. O seu estudo é importante, pois teñen numerosas aplicacións como a fabricación de chalecos antibalas ou a reparación de fochancas.

Ao estudar este tipo de fluídos chégase a unha ecuación, denominada ecuación p -Laplaciana, de gran utilidade non só en fluídos non newtonianos, senón tamén en problemas de reacción-difusión ou en medios porosos.

Así, neste traballo comezamos definindo conceptos fundamentais de reoloxía e presentando as principais ecuacións de fluídos ata chegar á denominada ecuación p -Laplaciana [1]. Seguidamente, centrámonos no estudo dos autovalores de problemas p -Laplacianos non homoxéneos así como na busca de solución dalgúns problemas de contorno por medio do desenvolvemento da teoría espectral [4]. A continuación, analizamos a existencia de solución do problema $(\phi(u'))' = f(t, u, u')$ con condicións Neumann dadas sub e sobre solucións do mesmo ben ordenadas e, finalmente, analizamos o mesmo problema con sub e sobre solucións dadas en orde inversa [2].

Mecánica de fluídos

Cando un fluído se ve sometido a unha forza ou a un esforzo cortante, este presenta unha resistencia ao movemento debido a unha fricción interna do mesmo, denominada viscosidade. Newton propón unha lei que establece que, en movementos de fluídos laminares, existe unha relación lineal entre as tensións tanxenciais exercidas nun punto do fluído τ e o gradiente da velocidade $\frac{du}{dy}$ sendo a viscosidade

μ a constante de proporcionalidade [1]:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (1)$$

Existen fluídos que non seguen a ecuación (1), os fluídos non newtonianos, entre os que se atopan: os pseudo-plásticos, nos que a viscosidade diminúe coa velocidade de deformación (marmelada); os plásticos, cun comportamento similar, pero que necesitan unha tensión mínima para deformarse (pomadas); os dilatantes, nos que a viscosidade aumenta coa velocidade de deformación (area húmida); e os tixotrópicos e reopéticos, nos que a viscosidade depende, ademais, do tempo.

Ao analizar estes fluídos chégase a unha ecuación da forma

$$\tau = \mu \left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx}, \quad (2)$$

denominada ecuación p -Laplaciana. En función do valor de p distínguense: fluídos pseudo-plásticos ($1 < p < 2$), newtonianos ($p = 2$) e dilatantes ($p > 2$).

Espectro de problemas de contorno p -Laplacianos

Imos comezar analizando unha ecuación máis xenérica que a p -Laplaciana indicada anteriormente [4] (ecuación (2)) e dada por

$$(\phi_p(u'(t)))' + \lambda \phi_q(u(t)) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

baixo condicións Dirichlet ($u(0) = u(T) = 0$). $T > 0$, λ un parámetro real e p e q números reais maiores ca 1. Ademais, ϕ_m con $m \in \{p, q\}$ vén dada por

$$\phi_m(s) = \begin{cases} |s|^{m-2}s, & \text{para } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{para } s = 0. \end{cases}$$

En primeiro lugar, analizamos o seguinte problema:

$$(PVI) \begin{cases} (\phi_p(u'(t)))' + \lambda \phi_q(u(t)) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = a, \quad u'(t_0) = b, & t_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

para calquera $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, chegando a establecer a seguinte proposición.

Proposición 1. *Para calquera $\lambda \in [0, +\infty)$, o problema de valor inicial (PVI) ten unha solución única que está definida en todo \mathbb{R} .*

O seguinte paso é resolver o seguinte problema de valor inicial

$$(PVI)_0 \begin{cases} (\phi_p(u'))' + \lambda \phi_q(u) = 0, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha, \end{cases}$$

onde se pode considerar, sen perda de xeneralidade $\alpha > 0$. Para $\bar{\alpha} = -\alpha < 0$ bastaría tomar como solución $v(t) = -u(t)$.

Para iso é útil definir unha aplicación temporal $T(\alpha)$ como o primeiro punto no que $u'(t, \alpha) = 0$. Operando, chegamos a que

$$T(\alpha) = \left(\frac{q}{\lambda p^*} \right)^{1/p} \frac{1}{R^{\frac{q-p}{p}}} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^q)^{\frac{1}{p}}}. \quad (4)$$

Co anterior, para $\sigma \in [0, \frac{q}{2}]$ imos definir a función

$$\arcsen_{pq}(\sigma) := \frac{q}{2} \int_0^{\frac{2\sigma}{q}} \frac{ds}{(1-s^q)^{\frac{1}{p}}}, \quad (5)$$

que é converxente nese intervalo. Trátase dunha función continua e estritamente crecente, o cal nos vai permitir definir a súa inversa en todo \mathbb{R} tendo en conta argumentos de periodicidade e continuidade. Empregando o anterior, operando e reagrupando, chegamos a que a solución do $(PVI)_0$ ten a forma

$$u(t) = \frac{\alpha}{A_{pq}(|\alpha|, \lambda)} \text{sen}_{pq}(A_{pq}(|\alpha|, \lambda)t), \quad (6)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, con

$$A_{pq}(\alpha, \lambda) = \frac{(\lambda p^*)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q^*}}}{2} \alpha^{\frac{q-p}{q}}. \quad (7)$$

Sabendo que a ecuación é autónoma, unha solución xenérica para (PVI) será:

$$u(t) = \frac{\alpha}{A_{pq}(|\alpha|, \lambda)} \text{sen}_{pq}(A_{pq}(|\alpha|, \lambda)(t - t_0) + \delta), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Co anterior, xa estamos en disposición de estudar a solución particular para calquera condición inicial. No caso do problema de Dirichlet chégase ao seguinte teorema:

Teorema 1. *Para calquera $\alpha \neq 0$ o conxunto de autovalores do problema dado pola ecuación (3) con condicións de contorno Dirichlet é*

$$\lambda_n(\alpha) = \left(\frac{2n\pi pq}{T} \right)^q \frac{|\alpha|^{p-q}}{p^* q^{q-1}}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

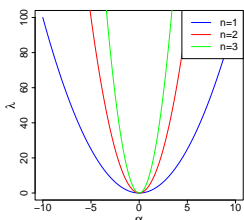
sendo as autofuncións correspondentes

$$u_{n,\alpha}(t) = \frac{\alpha T}{n\pi pq} \text{sen}_{pq} \left(\frac{n\pi pq}{T} t \right). \quad (10)$$

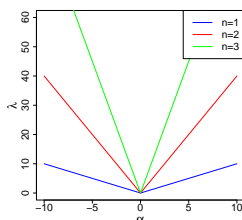
Se denotamos por $S_n = \{(\alpha, \lambda_n(\alpha)) : (\alpha, \lambda_n(\alpha)) \text{ satisfán (9)}\}$ entón $S(E_d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

■ Caso $q < p$

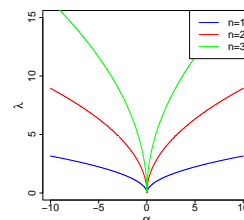
a) $q < p - 1$



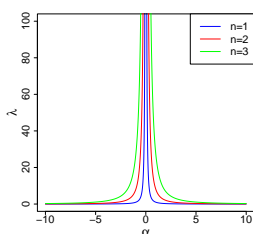
b) $q = p - 1$



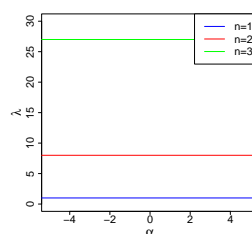
c) $p - 1 < q < p$



■ Caso $q > p$



■ Caso $q = p$



Problema de Neumann con sub e sobre soluciones ben ordenadas

A continuación, tratamos de probar la existencia de soluciones para el problema [3]

$$(\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)), \text{ para case todo } t \in I = [a, b] \quad (11)$$

con condiciones de Neumann sabiendo que existen sub e sobre soluciones ben ordenadas. Emplearemos las hipótesis:

(H_1) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é continua, estrictamente creciente e tal que $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(H_2) f é unha función de Carathéodory.

(H_3) Existe unha subsolución α e unha sobresolución β , con $\alpha(t) \leq \beta(t)$ para $t \in I$, e a función f satisfai unha condición de Nagumo relativa a α e β no conxunto Ω .

Tratamos de resolver el siguiente problema con condiciones Neumann dados $A, B \in \mathbb{R}$:

$$(N_{A,B}) \begin{cases} (\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t)), & \text{para case todo } t \in I, \\ u'(a) = A, \quad u'(b) = B, \end{cases}$$

para lo cual llegamos al siguiente teorema:

Teorema 2. *Asumindo que se verifican as hipóteses $(H_1) - (H_3)$ e que $\alpha'(a) = \beta'(a) = A$ e $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$, entón, para calquera $B \in [\alpha'(b), \beta'(b)]$ o problema $(N_{A,B})$ ten, polo menos, unha solución u satisfacendo*

$$u \in [\alpha, \beta] \text{ e } |u'(t)| \leq M, \text{ para todo } t \in I,$$

onde M depende soamente de α, β, ϕ, k e θ (k e θ constantes referidas á condición de Nagumo).

Problema de Neumann con sub e sobre solucións en orde inversa

Deseguido, seguindo [2], tratamos de estudar o problema [2]

$$-(\phi(u'(t)))' = f(t, u(t)), \text{ para case todo punto } t \in I, \quad u'(a) = 0 = u'(b), \quad (12)$$

baixo as hipóteses:

(A₁) $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é un homeomorfismo crecente que cumpre $\phi(0) = 0$.

(A₂) Para todo intervalo compacto $[k_1, k_2]$ existe $K > 0$ tal que para todo $u, v \in [k_1, k_2]$ satisfaise

$$(\phi(u) - \phi(v))(u - v) \geq K(u - v)^2.$$

Isto resulta equivalente a que a inversa de ϕ , ϕ^{-1} sexa localmente lipschitziana.

(A₃) $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función de Carathéodory.

Nalgúns resultados faremos mención ás condicións (L) e a (A₂^{*}).

(L) Unha función $f(t, u, u') \equiv f(t, u)$ é unha función de Carathéodory que satisfai unha condición de Lipschitz unilateral se

$$\forall t \in I, u, v \in [\beta(t), \alpha(t)], \quad u \leq v \implies f(t, u) - Mu \geq f(t, v) - Mv. \quad (13)$$

(A₂^{*}) Existe $K > 0$ tal que, para todo $u, v \in \mathbb{R}$, se verifica

$$(\phi(u) - \phi(v))(u - v) \geq K(u - v)^2.$$

A continuación, propoñemos unha serie de principios de comparación que son necesarios posteriormente para aplicar o método monótono ao problema (N).

Proposición 2. *Sexa ϕ satisfacendo as condicións (A₁) e (A₂^{*}) e*

$$M \in \left(-\infty, \frac{K\pi^2}{4(b-a)^2} \right).$$

Supoñamos que u_1, u_2 son tales que $u_i \in C^1(I)$, $\phi \circ u'_i \in W^{1,1}(I)$, $i = 1, 2$ e

$$-\frac{d}{dt}(\phi \circ u'_1)(t) - Mu_1(t) \geq -\frac{d}{dt}(\phi \circ u'_2)(t) - Mu_2(t).$$

Logo,

1. Se se cumpre:

$$u_1'(a) \leq u_2'(a), \quad u_1(b) \geq u_2(b),$$

entón $u_1 \geq u_2$ en I . Se ademais $M \geq 0$, temos que $u_1' \leq u_2'$ en I .

2. Se se cumpre:

$$u_1(a) \geq u_2(a), \quad u_1'(b) \geq u_2'(b),$$

entón $u_1 \geq u_2$ en I . Se ademais $M \geq 0$, entón $u_1' \geq u_2'$ en I .

3. Se se cumpre:

$$u_1'(a) \leq u_2'(a), \quad u_1'(b) \geq u_2'(b),$$

entón $u_1 \equiv u_2$ ou $u_1(t) < u_2(t)$ en I .

Tendo en conta as proposicións anteriores chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 3. Sexan $\phi(v)$ e $f(t, u)$ funcións que satisfán (A_1) , (A_2) e (A_3) . Supoñamos que o problema (12) ten unha subsolución α e unha sobresolución β tales que $\alpha(t) \geq \beta(t)$ para todo $t \in I$ e sexa $K > 0$ a constante dada en (A_2) no intervalo $[k_1(\alpha, \beta) = \phi^{-1}(-\|\psi\|_1), k_2(\alpha, \beta) = \phi^{-1}(\|\psi\|_1)]$. Asímesse, ademais, que f satisfai a condición (L) para algún $M \in (0, K\pi^2/4(b-a)^2)$.

Entón, existen dúas sucesións monótonas $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [\beta, \alpha]$ que son respectivamente decrecentes e crecentes e que converxen uniformemente ás solucións u_{\min} e u_{\max} de (12) tales que

$$\beta(t) \leq u_{\min}(t) \leq u_{\max}(t) \leq \alpha(t), t \in I.$$

Ademais, estas solucións son extremas, isto é, para calquera outra solución u de (12) tal que $\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t)$ satisfaise

$$u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t), t \in I.$$

As hipóteses das proposicións de comparación 2 e do Teorema 3 resultan óptimas no sentido de que, se non se cumpre a condición (A_2^*) na proposición 2 ou (A_2) no Teorema 3, pódense atopar contraexemplos para estes resultados.

Bibliografía

- [1] Astarita, G., Marrucci, G. (1974). *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*, McGraw-Hill
- [2] Cabada, A., Habets, P., Pouso, R.L. (2000). *Optimal existence conditions for ϕ -Laplacian equations with upper and lower solutions in the reversed order*, Journal of Differential Equations **166**(2), pp. 385-401.

-
- [3] Cabada, A., Pouso, R.L. (1999). *Existence results for the problem $(\phi(u) = f(t, u, u'))$ with non linear boundary conditions*, *Nonlinear Anal* **35**(2), pp. 221-231.
- [4] Drábek, P. (1999). *On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with p -Laplacian*, *Differential Integral Equations* **12**, 773.

Resolución de ecuacións diofánticas de orde superior

Álgebra

Lois Omil Pazos

Universidade de Santiago de Compostela

15 de Novembro de 2023

Introdución

Comezamos definindo os obxectos de estudo deste resumo: as ecuacións diofánticas e as súas solucións.

Definición 1. *Unha ecuación diofántica é unha expresión $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, sendo f unha función, $n \geq 2$ e x_i variables enteiras. Ademais, díse que unha n -upla (a, b, \dots, n) é solución da ecuación anterior se $f(a, b, \dots, n) = 0$ e todas as súas compoñentes son enteiras.*

Estas ecuacións deben o seu nome a Diofanto de Alexandria, o matemático que hoxe en día coñecemos como o “Pai da Álgebra”. A súa fama é debida en gran parte ao seu libro *Aritmética*, no cal Diofanto estudou tanto solucións de diferentes ecuacións alxébricas como Teoría de Números.

O obxectivo desta presentación é dar unha perspectiva sobre os diversos tipos de ecuacións diofánticas que existen, as súas posibles solucións e os diferentes métodos que se poden utilizar para tentar resolvelas (ou para probar a imposibilidade da súa resolución, de ser o caso). Con esta fin, seguíuse principalmente [1] para elaborar as catro seccións nas que se divide a presentación, pero no desenvolvemento da última das mesmas tamén se fará mención a [2] e [3]. Acompañarase cada sección cun exemplo práctico de resolución dalgún problema relacionado coas ecuacións diofánticas, para así amosar de xeito práctico a utilidade dos métodos e resultados expostos.

Métodos de resolución elementais

Introducimos a continuación seis métodos elementais para o estudo de ecuacións diofánticas, que se poden consultar en detalle en [1]:

- **Método de factorización:** o primeiro paso é illar un termo independente a no segundo membro da ecuación e logo factorizar todo o posible o primeiro membro. Factorizando despois o termo independente a tanto en termos positivos como negativos e facendo todas as posibles combinacións para igualalos

aos diferentes factores de f , obtemos diferentes sistemas de ecuacións diofánticas. Se os resolvemos todos obteremos todas as posibles solucións da ecuación diofántica de partida.

- **Resolución con desigualdades:** este método consiste en transformar a ecuación por procesos elementais ata atopar unha situación na que poidamos limitar os intervalos nos que se atopan as variables, utilizando para iso desigualdades.
- **Método paramétrico:** en moitas ocasións podemos escribir as posibles solucións dunha ecuación diofántica en función dunha cantidade finita de parámetros (por exemplo, en función do máximo común divisor das súas compoñentes). Isto pode simplificar, nalgúns casos, o estudo das mesmas.
- **Resolución con aritmética modular:** existen diversos casos nos que, utilizando aritmética modular, se pode probar que unha ecuación diofántica non ten solucións (ou, polo menos, pódese utilizar para limitar as posibles solucións da mesma).
- **Indución matemática:** o método de indución matemática é ben coñecido e utilizado en demostracións de moitas das áreas das matemáticas, incluíndo a Teoría de Números. No caso das ecuacións diofánticas, o método de indución pode resultar moi útil para probar feitos sobre os números enteiros non negativos na ecuación.
- **Descenso infinito de Fermat:** este proceso, tamén coñecido como “indución á inversa”, consiste en achar contradicións co feito de que “non pode existir ningunha sucesión estritamente decrecente e infinita de enteiros positivos”, para así restrinxir as posibles solucións dunha ecuación diofántica.

Como veremos, estes métodos pódense utilizar ás veces para resolver de xeito directo algunhas ecuacións sinxelas, pero normalmente serán utilizados como ferramentas para desenvolver métodos e demostracións máis complexos.

Exemplo 1. *Imos utilizar o método de factorización para resolver a ecuación diofántica*

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy).$$

Primeiro desfazemos o primeiro produto do lado esquerdo e o produto do lado dereito para obter a seguinte forma equivalente:

$$x^2y^2 + 1 - 2xy + x^2 + y^2 - 2xy + 2(x - y)(1 - xy) = 4.$$

Agrupamos en cadrados de diferenzas sucesivas veces para así chegarmos á igualdade $[(xy - 1) - (x - y)]^2 = 4$. Facendo a raíz cadrada a ambos lados e factorizando, deducimos que

$$(x + 1)(y - 1) = \pm 2.$$

Temos entón que estudar os dous posibles casos por separado. Centrémonos primeiro no caso $(x+1)(y-1) = 2$ e estudemos as catro posibles situacións:

$$x+1 = 1 \text{ e } y-1 = 2, \quad x+1 = -1 \text{ e } y-1 = -2,$$

$$x+1 = 2 \text{ e } y-1 = 1, \quad x+1 = -2 \text{ e } y-1 = -1.$$

Resolvendo cada un deles obtemos as solucións $(0, 3)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$ e $(-3, 0)$. De xeito análogo, do caso $(x+1)(y-1) = -2$ obtemos as solucións $(0, -1)$, $(-2, 3)$, $(1, 0)$ e $(-3, 2)$. En efecto, pódese comprobar que as oito solucións atopadas resolven a ecuación diofántica de partida.

Algunhas ecuacións diofánticas clásicas

Ecuacións diofánticas lineares

Definición 2. Unha ecuación diofántica linear é aquela que segue a forma

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c,$$

onde a_1, \dots, a_n e c son constantes enteiras. Imos supoñer ademais que $n \geq 2$ e que todos os coeficientes a_i son distintos de cero.

Como xa sabemos, temos o seguinte resultado de aritmética modular básica para o caso $n = 2$:

Teorema 1. Consideremos tres enteiros a, b e c , a e b non nulos, e sexa a ecuación diofántica linear $ax+by = c$. Tense que a ecuación ten solución se, e só se, o máximo común divisor de a e b , d , divide a c . Ademais, dada unha solución particular (x_0, y_0) , toda solución da ecuación é da forma $x = x_0 + \frac{b}{d}t$, $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, sendo t un enteiro.

No caso xeral das ecuacións lineares en $n \geq 3$ variables temos o seguinte resultado fundamental que as determina completamente (e que xeneraliza o do caso $n = 2$):

Teorema 2. A ecuación diofántica linear $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c$ é resoluble se, e so se, $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n) \mid c$. De ser o caso, pódense tomar $n - 1$ solucións da ecuación tales que calquera solución é unha combinación linear enteira das mesmas.

A proba dos dous resultados anteriores pódese consultar en [1].

Ternas pitagóricas

Definición 3. A ecuación pitagórica é a ecuación diofántica

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Defínese tamén unha solución primitiva da mesma como calquera solución da ecuación cuxas tres compoñentes sexan coprimas entre elas.

Obsérvese que se unha terna (x_0, y_0, z_0) satisfai a ecuación, entón todas as ternas (kx_0, ky_0, kz_0) con $k \in \mathbb{Z}$ tamén a satisfán. Ademais, resulta que exactamente unha das dúas primeiras compoñentes dunha solución primitiva ten que ser par: claramente non poden ser ambos pares, e se supuxésemos que ambos son impares entón chegaríamos a unha contradición considerando a ecuación en módulo 4. O seguinte teorema, cuxa proba se pode ler en [1], determina totalmente as solucións da ecuación pitagórica.

Teorema 3. *Todas as solucións primitivas en enteiros positivos (x, y, z) da ecuación pitagórica con y par son da forma*

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

onde m e n son enteiros coprimos positivos tales que $m > n$ e $m + n$ é impar.

Exemplo 2. *Imos utilizar o resultado anterior para achar as solucións da chamada ecuación pitagórica negativa:*

$$x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}.$$

Primeiro transformámola na forma equivalente $x^2 + y^2 = t^2$, con $t = \frac{xy}{z}$. Tomando $d = \text{mcd}(x, y, t)$ e extraendo factor común, temos $a^2 + b^2 = c^2$ e $z = \frac{abd}{c}$, onde $x = ad, y = bd$ e $t = cd$. Dedúcese que $c \mid d$, logo $d = kc$ e:

$$x = ad = kac, \quad y = bd = kbc, \quad t = cd = kc^2, \quad z = kab.$$

Grazas ao teorema previo, podemos escribir en termos de certos m e n os elementos a, b e c , do cal podemos concluír que as solucións son

$$x = k(m^4 - n^4), \quad y = 2kmn(m^2 + n^2), \quad z = 2kmn(m^2 - n^2).$$

Ecuacións de tipo Pell

Definición 4. *A ecuación de Pell clásica é*

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

con $D \in \mathbb{Z}$ libre de cadrados. Nótese que ten como solución trivial $(1, 0)$. Denotarémola por (x_0, y_0) .

O seguinte teorema, cuxa proba se pode consultar en [1], determina a resolubidade da ecuación de Pell clásica e proporciona fórmulas por recorrencia para o cálculo das súas solucións:

Teorema 4. *Dado D un enteiro libre de cadrados, a ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ ten infinitas solucións en enteiros non negativos. Ademais, todas son da forma (x_n, y_n) ,*

$$x_{n+1} = x_1x_n + Dy_1y_n, \quad y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n,$$

sendo (x_1, y_1) a solución con $y_1 > 0$ minimal.

Exemplo 3. *Imos probar que existen infinitas ternas de enteiros consecutivos tales que cada un deles é a suma de dous cadrados.*

Pódese comprobar por simple inspección que a primeira terna deste tipo é (8, 9, 10), logo semella unha boa idea estudar as ternas $(x^2 - 1, x^2, x^2 + 1)$ para os diferentes enteiros x . Consideremos pois a ecuación de Pell clásica $x^2 - 2y^2 = 1$, que ten por solución con $y > 0$ minimal a (3, 2). Sabemos polo teorema anterior que existen infinitas solucións (x_n, y_n) para esta ecuación, pois 2 é libre de cadrados, polo que existen infinitas ternas $(x_n^2 - 1, x_n^2, x_n^2 + 1)$ que, en particular, son ternas de enteiros consecutivos tales que cada un deles é a suma de dous cadrados.

Tamén podemos estudar esta nova ecuación de tipo Pell, máis completa que a anterior e que xeneraliza a mesma:

$$ax^2 - by^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{Z}, a, b > 0.$$

Definición 5. *Definimos a resolvente de Pell da ecuación anterior como a ecuación diofántica $x^2 - aby^2 = 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b > 0$.*

Os seguintes dous resultados, cuxas probas se obtiveron de [1], presentan un acercamento á resolución desta ecuación:

Teorema 5. *Se $ab = k^2$ con $k > 1$ enteiro, entón a ecuación non ten solucións en enteiros positivos.*

Teorema 6. *Se a ecuación ten solucións en enteiros positivos e (x_0, y_0) é a solución con $y_0 > 0$ minimal, entón a solución xeral é*

$$x_n = x_0 u_n + b y_0 v_n, \quad y_n = y_0 u_n + a x_0 v_n,$$

sendo (u_n, v_n) a solución xeral da resolvente de Pell.

Unha última ecuación interesante nesta sección é a chamada ecuación de Pell negativa, que resulta ser un caso particular da anterior con $a = D$ e $b = 1$:

$$x^2 - Dy^2 = -1.$$

Por suposto, os dous teoremas anteriores tamén son aplicables neste caso, pero tamén temos algún máis específico como pode ser o seguinte, cuxa proba se pode ler, novamente, en [1]:

Teorema 7. *A ecuación de Pell negativa con $D = p$ primo é resoluble se, e só se, $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.*

Métodos de resolución avanzados

A continuación explícanse brevemente algunhas ideas a considerar á hora de empregar conceptos máis avanzados no estudo das ecuacións diofánticas:

- **Enteiros de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ e aneis de enteiros cuadráticos en $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$:** empregando a norma usual destes aneis (consistente en multiplicar o elemento en cuestión polo seu conxugado), pódese probar que, para certos enteiros d axeitados, son dominios euclídeos, e isto permite buscar nas ecuacións diofánticas contradicións co feito de que só existe unha única forma de factorizar un elemento nestes dominios. Os resultados implicados no uso deste método, así como algúns exemplos de aplicación, pódense consultar en [3] e en [1], respectivamente.
- **Lei da reciprocidade cuadrática:** utilizando os símbolos de Legendre e as súas boas propiedades, pódese demostrar que certas ecuacións non son resolubles, como veremos máis adiante. Todo o referente á lei de reciprocidade cuadrática e a outros resultados relevantes ao respecto do estudo das ecuacións diofánticas pódese atopar en [2].
- **Divisores de certas expresións:** este método, que lle debemos a grandes matemáticos como Fermat e Lagrange, consiste en estudar as formas concretas que poden ter os divisores das expresións $a^2 + b^2$, $a^2 + 2b^2$ e $a^2 - 2b^2$, e con elas afondar en certas ecuacións diofánticas. Os teoremas pertinentes para a aplicación deste método pódense consultar en [1].

Exemplo 4. *Imos empregar o cálculo de símbolos de Legendre para probar que a seguinte ecuación diofántica (que é en certo sentido unha ecuación de tipo Pell) non ten solución:*

$$x^2 - 17y^2 = 12.$$

Traballando coa ecuación en módulo 17 temos que $x^2 \equiv 12 \pmod{17}$, mentres que, se estudamos o símbolo de Legendre $\left(\frac{12}{17}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{12}{17}\right) &= \left(\frac{3}{17}\right) \left(\frac{4}{17}\right) = \left(\frac{3}{17}\right) \left(\frac{2^2}{17}\right) = \left(\frac{3}{17}\right) \\ &= \left(\frac{17}{3}\right) (-1)^{\frac{3-1}{2} \frac{17-1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right) = -1, \end{aligned}$$

o cal nos di que 12 non é un residuo cuadrático módulo 17, co cal chegamos a unha contradición. Polo tanto, a ecuación non pode ter solución.

Bibliografía

- [1] Andreescu, T., Andrica, D. e Cucurezeanu, I. (2010). *An Introduction to Diophantine Equations. A Problem-Based Approach*, Birkhäuser.
- [2] Cohen, H. (2007). *Number Theory. Volume I: Tools and Diophantine Equations*, GTM 239, Springer.
- [3] Lehman, J. L. (2019). *Quadratic Number Theory. An Invitation to Algebraic Methods in the Higher Arithmetic*, DME 52, MAA Press.

Conxuntos simpliciais, unha nova aproximación á topoloxía

Xeometría e Topoloxía

Isaac Carcacía Campos

Universidade de Santiago de Compostela

29 de Novembro de 2023

Introducción

O obxectivo desta charla é presentar a idea de conxunto simplicial e dar unha aproximación a algunha das súas consecuencias. A idea intuitiva, ou perspectiva, que podemos dar de que é un conxunto simplicial ten que ver coa visión *xeométrica* dos mesmos que os describe basicamente como unha forma *combinatoria* de construír *espazos*. Isto pode verse da seguinte forma. Partimos dunha serie de elementos básicos para cada dimensión n como poden ser os puntos, os segmentos de rectas, os triángulos, os tetrahedros ... de forma que ademais do conxunto abstracto destes *ladrillos* temos formas de pegalos que sexan naturais. Por exemplo, temos que pensar que dado un segmento de recta temos que ter dous morfismos que asignan a este o punto inicial e final (os cales poden ser o mesmo). Ou por exemplo, dado un triángulo queremos asociarlle os seus lados. Todas estas relacións, como veremos, pódense atopar e definir á vez mediante unha definición que emprega as ferramentas da teoría de categorías.

Polo dito anteriormente, para entender que é un conxunto simplicial é importante dominar antes dous conceptos fundamentais en teoría de categorías. De forma máis precisa temos que definir que é unha categoría e un funtor.

Definición 1. *Unha categoría \mathcal{C} consiste en:*

- *Unha colección de obxectos.*
- *Unha colección de morfismos entre os obxectos. É dicir, todo morfismo f vai dun obxecto A a outro B , o que denotaremos como $f: A \rightarrow B$.*
- *Dados dous morfismos da forma $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, existe un único morfismo $g \circ f: A \rightarrow C$, o cal define unha forma de compondor morfismos que ademais é asociativa, isto é, que para todo f e g compondibles temos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*
- *Para cada obxecto A existe un morfismo $1_A: A \rightarrow A$ tal que $1_A \circ f = f$ e $g \circ 1_A = g$.*

PALABRAS CLAVE: Espacio clasificante, Conxunto simplicial, Homotopía, ∞ -categoría, Símplice

Ejemplo 1. *Un exemplo moi natural de categoría son os grupos os que podemos ver como unha categoría cun so obxecto e que ten por morfismos os elementos do grupo, de forma que a composición é a operación asociada o grupo.*

Observación 1. *Dada unha categoría \mathcal{C} definimos a categoría \mathcal{C}^{op} cos mesmos obxectos pero cos morfismos ó revés. É dicir, hai un morfismo $f: C \rightarrow D$ en \mathcal{C}^{op} se e só se hai un morfismo $f: D \rightarrow C$.*

Definición 2. *Un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dúas categorías \mathcal{C} e \mathcal{D} consiste nunha asignación do seguinte xeito:*

- *Para cada obxecto A de \mathcal{C} hai un obxecto $F(A)$ en \mathcal{D} .*
- *Para cada morfismo $f: A \rightarrow B$ existe un morfismo $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$.*

Tal que a asignación cumpre que: $F(1_A) = F_{1_A}$ e $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ sempre que exista a composición de f e g .

Observación 2. *Un funtor contravariante é aquel que dá a volta á composición, é dicir $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. Alternativamente pódese ver que un funtor contravariante $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é un funtor $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.*

Tendo estas nocións podemos xa definir que é un conxunto simplicial empregando a categoría simplex Δ .

Definición 3. *A categoría simplex Δ é a categoría tal que:*

- *Os obxectos son os conxuntos ordenados $[n]$ con n un número natural (o 0 é natural) onde $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$.*
- *Os morfismos $f: [n] \rightarrow [m]$ son as aplicacións que conservan a orde.*

Observación 3. *Pódese probar que todo morfismo en Δ vén dado como composición dos morfismos $d^i: [n-1] \rightarrow [n]$ e $s^i: [n+1] \rightarrow [n]$ denotados respectivamente como morfismo de cocara e de codexeneración. O morfismo d^i defínese como aquel que salta o elemento i e o morfismo s^i e o que repite o elemento i . Por exemplo, $d^1: [1] \rightarrow [2]$ actúa do seguinte xeito $d^1(0) = 0, d^1(1) = 2$, mentres que $s_1: [2] \rightarrow [1]$ ven definido por $s^1(0) = 0, s^1(1) = 1$ e $s^1(2) = 1$.*

Definición 4. *Un conxunto simplicial é un funtor contravariante $X: \Delta \rightarrow \mathbf{SET}$ onde \mathbf{SET} é a categoría de conxuntos. Denotaremos por X_n o conxunto $X([n])$ e diremos que é o conxunto de n -simplices.*

Observación 4. *Dado un conxunto simplicial X denotaremos os morfismos $X(d^i)$ e $X(s^i)$ por d_i e s_i .*

A idea intuitiva detrás da definición xa a explicamos superficialmente na introdución. Agora ben, neste intre xa temos as ferramentas para entendela. Dado un conxunto simplicial X e un número natural n , os elementos do conxunto X_n serían

precisamente os simplices xeométricos de dimensión n , concretamente os simplices de tamaño n que definiremos máis adiante na Definición 7. Da sua banda, as relacións de pegado que mencionamos antes non son máis que as que veñen inducidas polos morfismos de Δ , só que dados a volta. Desta forma tamén cabe representar os elementos dun conxunto simplicial como diagramas. Por exemplo, podemos ver os obxectos de X_2 como:

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & \nearrow & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \end{array}$$

Nesta representación os números indican os elementos de X_0 e as frechas entre eles son os elementos de X_1 .

Como este tema ten que ver coa teoría de categorías, é imprescindible que empreguemos un dos lemas máis importantes deste eido das matemáticas, a saber: para entender un obxecto é necesario saber cómo se comporta cos outros obxectos da mesma categoría, é dicir, temos que saber que clase de transformacións existen entre eles. Tendo isto en conta debemos definir que é un morfismo entre dous conxuntos simpliciais. Para iso empregaremos a idea de transformación natural, que é a ferramenta que aparece en teoría de categorías para explicar que é unha transformación entre dous funtores (por exemplo dous conxuntos simpliciais).

Definición 5. Sexan $F, G: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ dous funtores contravariantes. Diremos que unha transformación natural α entre eles é unha asignación para cada obxecto C de \mathcal{C} dun morfismo $\alpha_C: F(C) \rightarrow G(C)$ tal que temos o seguinte diagrama conmutativo para cada morfismo $f: D \rightarrow C$ de \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & G(C) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(D) & \xrightarrow{\alpha_D} & G(D) \end{array}$$

Definición 6. Un morfismo entre dous conxuntos simpliciais $X, Y: \Delta \rightarrow \mathbf{SET}$ é unha transformación natural entre eles.

Exemplos importantes

O principal exemplo e a orixe histórica dos conxuntos simplicial vén da topoloxía alxébrica. Concretamente son os simplices dun espazo topolóxico Y .

Definición 7. Para cada n natural definimos o espazo topolóxico

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}.$$

Un pode comprobar que estes espazos son puntos, rectas, triángulos, tetraedros...

Observación 5. Estes obxectos veñen con morfismos $\delta^i: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ e $\sigma^i: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$ onde

$$\delta^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, 0, \dots, t_{n-1})$$

onde o 0 está na posición i e

$$\sigma^i(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_n).$$

Definición 8. Dado un espazo topolóxico Y definimos o conxunto simplicial $SY: \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{SET}$ como aquel tal que

$$SY_n = \mathbf{Top}(\Delta_n, Y).$$

É dicir, as aplicacións continuas de Δ_n en Y . Os morfismos d_i e s_i veñen inducidos polos morfismos δ^i e σ^i definidos previamente. De forma máis precisa temos que: $d_i: \mathbf{Top}(\Delta_{n+1}, Y) \rightarrow \mathbf{Top}(\Delta_n, Y)$ vén dado por $d_i(f) = f \circ \delta_i$ e $s_i: \mathbf{Top}(\Delta_{n-1}, Y) \rightarrow \mathbf{Top}(\Delta_n, Y)$ vén dado por $s_i(f) = f \circ \sigma_i$.

Doutra banda temos un exemplo asociado as categorías.

Definición 9. Sexa \mathcal{C} unha categoría. Definimos o conxunto simplicial $N\mathcal{C}$, o cal chamamos nervio de \mathcal{C} , dado polo feito de que os n -simpleces $N\mathcal{C}_n$ son as cadeas de n morfismos compoñibles de \mathcal{C} . Por outra banda, os morfismos d_i consisten en compoñer os morfismos dos lugares i e $i+1$ se $i \neq 0, n$, xa que nestes casos consiste simplemente en eliminar o primeiro e último obxecto respectivamente. Doutra banda os morfismos s_i consisten en introducir o morfismo identidade na posición i .

Estas dúas construcións teñen un interese particular porque definen en si mesmos dous funtores. No primeiro caso temos un funtor que leva espazos topolóxicos en conxuntos simpliciais e noutro temos un funtor que leva categorías en conxuntos simpliciais. Unha propiedade importante do primeiro é que ten algo semellante a unha inversa (sendo máis exactos ten un funtor *adxunto*) chamada realización xeométrica, que se define do seguinte xeito.

Definición 10. Sexa X un conxunto simplicial. Definimos o espazo topolóxico $|X|$ que vén dado pola seguinte definición:

$$|X| := \sqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n / \sim,$$

onde X_n, Δ^n e \sim satisfán: $(d^i(x), \bar{t}) \sim (x, \delta^i(\bar{t}))$ con $x \in X_n$ e $\bar{t} \in \Delta^{n-1}$ e $(s^i(x), \bar{t}) \sim (x, \sigma^i(\bar{t}))$ con $x \in X_n$ e $\bar{t} \in \Delta^{n+1}$.

Con isto podemos definir de forma natural un espazo topolóxico asociado a unha categoría pequena, é dicir unha categoría onde os obxectos forman un conxunto. Dito espazo recibe o nome de espazo clasificante $B\mathcal{C}$ e defínese como $|N\mathcal{C}|$.

Proposición 1 ([Hat02], p. 89). Sexa G un grupo visto como categoría. Entón BG é o espazo topolóxico que ten todo os grupos de homotopía triviais salvo π_1 , que é isomorfo a G . Isto o que se coñece como o espazo de Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$.

Outro exemplo importante de conxunto simplicial que empregaremos na seguinte sección son os funtores representables da categoría Δ :

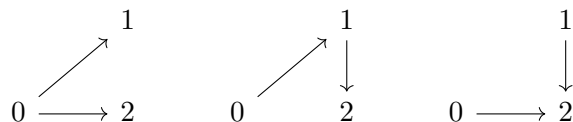
Definición 11. Para cada n natural definimos o conxunto simplicial $\Delta(-, [n])$ dado por $\Delta(-, [n])([m]) = \Delta([m], [n])$, é dicir os morfismos de Δ entre os obxectos $[m]$ e $[n]$. Denotamos este conxunto simplicial como $\Delta[n]$.

Este conxunto simplicial é importante porque pode demostrarse por un lema técnico chamado lema de Yoneda que se ten a seguinte igualdade: para todo conxunto simplicial X existe unha bixección natural entre X_n e as transformacións naturais de $\Delta[n]$ a X .

Dentro deste conxunto simplicial hai un subobxecto particular que debemos destacar: os cornos.

Definición 12. Para cada $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$ definimos o conxunto simplicial $\Lambda_k[n]$ como o formado para cada m polos subconxuntos de $\Delta([m], [n])$ de todos os morfismos que non factoricen por algunha cocara $[n-1] \rightarrow [n]$ distinta da k -ésima.

Como $\Lambda_k[n]$ está dentro de $\Delta[n]$, é dicir temos un morfismo $\Lambda_k[n] \rightarrow \Delta[n]$, todo morfismo $\Delta[n] \rightarrow X$ define tamén un morfismo $\Lambda_k[n] \rightarrow X$ por composición. Empregando as ideas visuais que definimos anteriormente podemos visualizar os cornos dunha maneira máis ou menos xeométrica. Por exemplo, se collemos os cornos $\Lambda_0[2], \Lambda_1[2]$ e $\Lambda_2[2]$ pódense ver, respectivamente, como:



Tipos de conxuntos simpliciais interesantes

Parte da importancia dos conxuntos simpliciais está en que permiten xeneralizar tanto a noción de categoría como a de grupoide a dimensións superiores.

Definición 13. Un corno de dimensión n e tipo k nun conxunto simplicial X é un morfismo de conxuntos simpliciais de $\Lambda_k[n]$ en X , é dicir, unha transformación natural $\alpha: \Lambda_k[n] \rightarrow X$. Diremos que un corno de dimensión n é exterior se $k = 0$ ou $k = n$, noutro caso diremos que é interior.

Definición 14. Sexa $\alpha: \Lambda_k[n] \rightarrow X$ un corno, diremos que podemos encher o corno se existe un morfismo $\Delta[n] \rightarrow X$ tal que temos o seguinte diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[n] & \longrightarrow & X \\
 \uparrow & \nearrow \alpha & \\
 \Lambda_k[n] & &
 \end{array}$$

Definición 15. Diremos que un conxunto simplicial X é un complexo de Kan ou ∞ -grupoide se podemos encher todos os seus cornos.

Observación 6. Un grupoide pode verse como unha categoría na cal todo morfismo ten un inverso. Isto pode obterse nos complexos de Kan se os vemos dunha forma categórica. Pensemos que temos o corno que aparece na esquerda, enchelo implica ter o diagrama conmutativo da dereita

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 f \nearrow & & \\
 A & \xrightarrow{1_A} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & B & \\
 f \nearrow & & \searrow g \\
 A & \xrightarrow{1_A} & A
 \end{array}$$

é dicir, temos unha inversa para f .

Definición 16. Diremos que un conxunto simplicial é unha ∞ -categoría se dado calquer $n \geq 1$ podemos encher todos os cornos do tipo $0 < k < n$.

Proposición 2. [Lur08, pp. 150–153] Dado un conxunto simplicial X , son equivalentes as seguintes afirmacións:

- Existe unha categoría \mathcal{C} tal que X é equivalente a $N\mathcal{C}$.
- Pódense encher todos os cornos interiores de X de forma única.

Conclusións

Con isto temos unha noción de cal é a diferenza entre unha categoría e unha ∞ -categoría. No primeiro caso a forma de encher os cornos internos é única, pero non na segunda. Isto ten importantes consecuencias pois implica que podemos ter diversas formas nas que un diagrama sexa conmutativo. Tamén a partir destas nocións pódese definir unha noción de transformación entre morfismos, transformación entre transformacións entre morfismos e así ata o infinito (disto provén o nome) que no caso das categorías sería trivial. Ademais de forma análoga a habitual podemos definir cando dous deses morfismos de orde superior son equivalentes.

Bibliografía

- [Hat02] Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press.
- [Rieh11] Riehl, R. (2011). *A leissure introduction to simplicial sets*. url: <https://math.jhu.edu/erielh/ssets.pdf>.
- [Lur08] Lurie, J., (2008). *Higher topos theory*. arXiv:math/0608040.

O problema de tres corpos

Análise Matemática

Carmen Pavón Souto

Universidade de Santiago de Compostela

31 de xaneiro de 2024

O problema de tres corpos consiste no estudo do movemento de tres corpos suxeitos unicamente á súa interacción gravitacional mutua. É un dos problemas máis famosos da historia da Física e supón unha ampliación natural do problema de dous corpos en interacción gravitatoria, ou problema de Kepler, que ten solución coñecida e relativamente simple. Sería normal imaxinar que, ao engadir un corpo máis a un sistema en aparencia tan sinxelo, a dificultade non debería aumentar moito. Porén, veremos que o que ocorre ao pasar de dous a tres corpos, e en xeral a N corpos con $N > 2$, é que obtemos un sistema non integrable, caótico e que constitúe un dos problemas máis difíciles de manexar da Mecánica Clásica. Nesta charla percorreuse a historia do problema, notando os seus resultados máis importantes.

O problema de tres corpos é proposto por primeira vez por Newton no *Principia*, en 1687. A súa definición pode xeralizarse a N corpos e queda da seguinte maneira:

Definición 1 (Problema de N corpos). *Chamamos problema de N corpos ao problema físico que consiste no estudo do movemento de N corpos, $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, con masas $m_i \in \mathbb{R}$ e posicións dadas por $r_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, para $i = 1, \dots, N$, que están sometidos unicamente á súa interacción mutua a través da **forza gravitatoria**. Esta forza caracterízase da seguinte maneira:*

Dados dous corpos i e j , a forza que exerce i sobre j será un vector coa dirección da liña que une os seus centros, con sentido cara a i e con módulo

$$|F_{ij}| = \frac{K m_i m_j}{|r_{ij}|^2}, \quad (1)$$

onde K é unha constante real e $r_{ij} = r_i - r_j \in \mathbb{R}^3$ é a posición relativa dos corpos i, j para todo $i, j \in 1, \dots, N$.

Coñecida a forza total, estamos en condicións de obter o sistema de ecuacións diferenciais que determina a traxectoria aplicando a segunda lei de Newton:

$$\ddot{r}_i = -K \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{|r_{ij}|^2} \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Newton, en concreto, intenta estudar as perturbacións causadas polo Sol na órbita da Lúa en torno á Terra. Esta iteración do problema ten unha serie de

características que permiten a súa resolución con bastante exactitude, pero o caso dun sistema xeral de tres corpos permanece aberto.

O interese neste problema é alto, xa que calquera das súas propiedades é directamente aplicable ao noso propio sistema solar. Preguntas como se é posible que colisionen planetas, se poderían ser exectados, se as súas órbitas son estables ou poderían sufrir grandes variacións baixo perturbacións pequenas... poderían ser respondidas a través do estudo do problema de N corpos. Así, ao longo dos anos o seu estudo foi extenso e foi acompañando o progreso da física; en varias ocasións, o estudo deste problema levou ao desenvolvemento de importantes conceptos que teñen aplicacións moito máis alá da Mecánica Celeste.

Debido á complexidade do problema e forte dependencia das condicións iniciais, gran parte do estudo centrouse en atopar casos concretos para os que se obteñen solucións periódicas particularmente simples ou vistosas, e tamén en obter aproximacións do problema. Un esforzo nesta dirección é a solución de Euler en 1767, que parte dos tres corpos aliñados e demostra que, para certas condicións iniciais, os tres se manteñen na liña, que xira en torno ao centro de masas do sistema, de maneira que os tres corpos describen órbitas elípticas periódicas. Outro é a solución de Lagrange, de 1772 que parte dos tres corpos situados nos vértices dun triángulo equilátero e demostra que, para certas condicións iniciais, os tres corpos rotan en órbitas elípticas e mantendo en todo momento a forma de triángulo equilátero, aínda que variando o lado.

No século XVIII haberá tamén intentos de estudar a estabilidade do sistema solar a través da teoría de perturbacións aplicada ao problema de tres corpos, isto é, a través de expansións en series de potencias dalgún parámetro pequeno. Os resultados non son conclusivos e a esperanza de aproximarse ao problema da estabilidade do sistema de N corpos a través das series de potencias queda abandonada, polo menos cos métodos e tecnoloxías dispoñibles na época.

No século XIX nace a Mecánica Hamiltoniana, que supón unha revolución na Física. As súas ideas aplícanse tamén ao problema de tres corpos e supoñen grandes avances; novos sistemas de coordenadas que dan lugar a ecuacións máis manexables, reducións dos sistemas de ecuacións, etc. En concreto, cobra importancia un concepto que será recorrente no estudo do problema de tres corpos: a lei de conservación.

Definición 2 (Lei de conservación). *Chamamos lei de conservación dun problema físico a calquera resultado que postule que durante a evolución temporal do sistema illado, é dicir, ao longo das traxectorias do sistema de ecuacións, certa magnitude (por exemplo, a enerxía, o momento angular, a velocidade dun corpo...) ten valor constante no tempo.*

Este concepto é bastante físico en natureza, pero podemos introducir unha idea matemática que se lle asemella:

Definición 3 (Integral primeira dun sistema de ecuacións diferenciais). *Sexa X unha función de clase \mathcal{C}^1 , $X : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con A un aberto, e sexa o sistema*

de ecuacións diferenciais ordinarias autónomo $\dot{x} = X(x)$. Se existe unha función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

- f é non constante en abertos de A , e ademais
- f^* , a derivada direccional de f na dirección do campo X , é tal que $f^*(x) = 0$ para todo $x \in A$,

diremos que f é unha **integral primeira** do sistema de ecuacións diferenciais.

A segunda condición pode expresarse doutra maneira tendo en conta a definición de derivada direccional dunha función ao longo dun campo: se f é unha integral primeira de X , entón será constante ao longo das traxectorias do campo. Volvendo á definición de lei de conservación, 2, vemos que está baseada nunha idea moi similar. A integral primeira é, de feito, a formalización dunha idea que inicialmente parecía moi física; igualmente, observando esta analogía podemos entender que a existencia de integrais primeiras está moi ligada ao trasfondo físico do problema.

En concreto, cada vez que atopemos unha cantidade conservada esta pode entenderse como integral primeira do sistema. As integrais primeiras teñen ademais a seguinte propiedade:

Teorema 1. *Sexa un problema nas condicións e notación da Definición 3, $V \subset A \subset \mathbb{R}^n$ un aberto, f_1, \dots, f_{n-1} integrais primeiras funcionalmente independentes de $X|_V$. Se $x_0 \in V$ é un punto regular para o campo X ($X(x) \neq (0, \dots, 0)$), entón a súa órbita vén dada implícita e localmente polo sistema de ecuacións alxebraicas*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x_0), \\ &\vdots \\ f_{n-1}(x) &= f_{n-1}(x_0). \end{aligned} \tag{3}$$

Así, se fora posible atopar, para un problema dado, tantas integrais primeiras como ecuacións do movemento menos unha sería posible ter solución analítica. Moita investigación na resolución do problema estivo constituída por intentos de obter ese tipo de expresións, os cales se detiveron tras a formulación do teorema de Bruns, que demostra, de feito, que é imposible chegar a unha solución analítica desta maneira:

Teorema 2 (Bruns). *O máximo número de integrais independentes que poden atoparse para o problema de N corpos con $N > 2$ son 10.*

Neste punto, comeza a centrarse a atención no uso de aproximacións para achegarse ao problema. Dentro deste campo, a simplificación máis importante é o problema circular restrinxido de tres corpos, que é probablemente a iteración do problema máis extensamente analizada. Esta simplificación considera que dous corpos xiran en torno ao seu centro de masas en órbitas circulares e o terceiro se move no mesmo plano ca eles e ten masa o suficientemente pequena como para non afectar ás súas

traxectorias. O problema pasa a consistir no estudo do movemento deste terceiro corpo baixo a influencia gravitatoria dos outros dous, pasando así a ter un sistema de orde 4, moito máis manexable ca o problema xeral.

é posible demostrar que a formulación do sistema pode escribirse en base a dúas coordenadas que levan a un sistema de ecuacións que só depende dun parámetro, μ , a masa dun dos corpos dividida entre a masa total. Quedaría:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = - \left[\mu \frac{(x+1-\mu)}{r_1^3} + (1-\mu) \frac{(x-\mu)}{r_2^3} \right], \quad (4)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = - \left[\frac{\mu y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3} \right], \quad (5)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x-\mu)^2 + y^2, \\ r_2^2 &= (x+1-\mu)^2 + y^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Pese a que nun primeiro momento podería parecer unha aproximación bastante restrictiva, en realidade existen moitos casos de sistemas de tres corpos que poden ser aproximados desta maneira: as teorías lunares (sistema Sol-Terra-Lúa), os problemas que teñen que ver con instalar un satélite nun sistema de dous corpos, busca de asteroides...

Podemos pensar na integrabilidade do sistema igual que no anterior caso, buscando integrais primeiras. Atopouse unha:

Proposición 1. *Para o problema restrinxido circular de tres corpos, existe unha integral primeira do sistema de ecuacións chamada a **integral de Jacobi**, da forma:*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C, \quad (7)$$

onde $\Omega(x, y) = \frac{1}{2} [(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$.

Ademais, demostrouse que é a única integral primeira independente que existe para o problema, mentres que hai catro ecuacións do movemento, polo que tampouco será posible a integración a través da busca de cantidades conservadas.

A integral de Jacobi foi ademais utilizada por Hill para delimitar as posibles rexións nas que o movemento do terceiro corpo está permitido, definidas polas chamadas curvas de velocidade cero.

Unha das contribucións máis importantes é a de Lagrange, que demostra a existencia dos cinco puntos de equilibrio que actualmente levan o seu nome. Os puntos de Lagrange son puntos de equilibrio do campo de vectores asociado ao problema restrinxido circular de tres corpos e correspóndense con puntos nos que as forzas gravitatorias dos dous corpos se compensan e provocan que a aceleración e velocidade do terceiro corpo sexa igual a cero. Isto ten aplicacións inmediatas, como o caso de intentar situar un satélite nun sistema de dous corpos. Os dous corpos orixinais e o satélite que queremos engadir dan lugar a un novo sistema

de tres corpos no que un deles ten masa moito menor, isto é, un sistema que é posible aproximar polo problema restrinxido circular. Coñecidas as posicións nas que a forza total sobre o terceiro corpo é cero, apenas faría falta combustible para manter o satélite nun deses puntos.

Os puntos de Lagrange agrúpanse en dous conxuntos: os puntos de Lagrange lineais, que son tres e están aliñados cos planetas grandes, e os triangulares, que forman dous triángulos equiláteros con eles. Coñecidos estes puntos, e utilizando as restriccións sobre o movemento do terceiro corpo introducidas por Hill, que comentamos en relación coa integral de Jacobi, é posible sacar conclusións moi útiles para distintos casos do problema, a pesar de non poder integralo de forma analítica. Por exemplo, os puntos de Lagrange xogaron un importante papel no descubrimento dos asteroides troianos na órbita de Xúpiter, que están dispostos nas proximidades de dous puntos de Lagrange estables. Así, as aproximacións teñen moita utilidade á hora de traballar co problema.

Apenas se chegou a cubrir na charla pola súa dificultade técnica, pero cabe notar que as aproximacións serán aínda máis importantes despois de que Poincaré realice as súas aportacións ao estudo do problema. No seu libro *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, publicado entre 1892 e 1899, mostra a forte dependencia do problema coas condicións iniciais e a súa gran susceptibilidade a perturbacións pequenas. Esta é de feito a primeira vez que se trata en física o fenómeno do caos, de enorme importancia na evolución posterior da disciplina. Estas son contribucións descomunais ao estudo do problema e foron presentadas á competición convocada polo rei óscar II de Suecia e Noruega con motivo do seu cumpleaños, onde gañou o premio, destinado á maior contribución á Mecánica Celeste.

Ademais de que cada vez está máis claro que as aproximacións analíticas son fútiles, nesta época os avances científicos e tecnolóxicos permiten que os intentos numéricos ou en serie de potencias sexan máis fructíferos que nos inicios do estudo do problema, polo que por fin se chega a resultados de peso por estas vías. A que quizá sexa a aportación máis importante será a solución completa de Sundman (1907), que é de feito unha solución ao problema xeral de tres corpos dada por unha serie de potencias. Unha expresión, incluso aproximada, da solución do problema xeral sería de valor incalculable, pero na práctica a solución de Sundman converxe de forma tan lenta que é practicamente inutilizable para problemas prácticos.

Posterior á solución de Sundman é o teorema KAM (probado en 1962 por Moser), que resulta moi útil para o estudo da estabilidade das órbitas periódicas do problema xeral de tres corpos.

A día de hoxe, os principais esforzos seguen orientados á busca de solucións periódicas por métodos numéricos, e as tecnoloxías actuais fan que este sexa un campo de estudo moi fructífero.

Bibliografía

- [1] Szebehely, V. e Grebenikov, E. (1969). *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic press.
- [2] Valtonen, M. e Karttunen, H. (2006). *The Three-Body Problem*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [3] Whittaker, E. T. (1988). *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge: Cambridge University Press.



Teoría de Morse discreta

Xeometría e Topoloxía

Andrea Polo Rodríguez

Universidade de Santiago de Compostela

14 de febreiro de 2024

Introdución

Un dos grandes obxectivos da topoloxía é clasificar os espazos topolóxicos, salvo homeomorfismos. Porén, determinar que non existe un homeomorfismo entre dous espazos é unha tarefa ardua a meirande parte das veces. Por iso, unha estratexia alternativa é estudar nocións máis febles que permitan garantir cando dous espazos topolóxicos non poden ser homeomorfos; é o caso das equivalencias de homotopía. Así, podemos asociar a cada espazo unha serie de invariantes homotópicos, cuxo estudo é interesante dende o anterior punto de vista. Algúns exemplos destes invariantes son o grupo fundamental ou os grupos de homoloxía, de natureza alxébrica.

A teoría de Morse clásica, iniciada arredor de 1930 e de grande importancia no ámbito da topoloxía diferencial, conseguiu relacionar mediante as desigualdades de Morse o rango dos grupos de homoloxía dun espazo topolóxico co número de puntos críticos dunha función de Morse definida sobre o espazo en cuestión. Tendeuse así unha ponte entre as propiedades topolóxicas dun espazo e as dinámicas que poden existir nel. Cos recentes avances no ámbito da computación e da informática, unha das liñas de investigación máis prometedoras dentro da topoloxía aplicada é a adaptación computacional da teoría de Morse clásica. Así, nace entre finais do século XX e comezos do século XXI, da man de Robin Forman, a teoría de Morse discreta. Co obxectivo de facilitar a súa implementación no ordenador, é fundamental atopar uns espazos topolóxicos axeitados sobre os que desenvolver devandita teoría. Os complexos simpliciais son espazos topolóxicos construídos a partir dunhas pezas elementais denominadas símplies e, neste senso, as súas propiedades convírtenos nunha escolla moi apropiada.

O obxectivo da charla é facer unha introdución á teoría de Morse discreta sobre complexos simpliciais e presentar as desigualdades de Morse como consecuencia de resultados do ámbito da homoloxía simplicial (e non da teoría de homotopía, que adoita ser a vía máis frecuente). Para iso, comezarase por presentar os conceptos de complexo simplicial e colapso simplicial. Isto permitirá introducir o concepto de

PALABRAS CLAVE: colapso simplicial; complexo simplicial; desigualdades de Morse; homoloxía simplicial; símlice.

“dinámica discreta”. Posteriormente, verase algunha ferramenta da homoloxía simplicial que permite dar unha proba das desigualdades de Morse, cuxa presentación dá final á charla.

Símplices: nocións básicas

Definición 1. *Sexa $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conxunto de puntos de \mathbb{R}^m . Diremos que os puntos son xeometricamente independentes se o conxunto é non baleiro e cumpre que para calquera colección de números reais $\{t_i\}_{i=0}^n$ verificando:*

1. $\sum_{i=0}^n t_i = 0$,
2. $\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0 \in \mathbb{R}^m$;

entón, $t_i = 0$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.

Definición 2. *Sexa $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conxunto de puntos de \mathbb{R}^m xeometricamente independentes. Defínese o n -símplice σ xerado por $\{a_0, \dots, a_n\}$, e denotáremolo por $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$, como o conxunto de puntos de \mathbb{R}^m que verifican:*

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i,$$

onde $\{t_i\}_{i=0}^n$ é unha colección de números reais non negativos e tales que $\sum_{i=0}^n t_i = 1$.

O natural n denomínase dimensión de σ e denotáremolo por $\dim \sigma$.

Definición 3. *Un complexo simplicial abstracto finito é unha colección finita S de conxuntos finitos e non baleiros, de xeito tal que se A é un elemento de S e B é un subconxunto non baleiro de A , B tamén é un elemento de S .*

Calquera elemento A dun complexo simplicial abstracto finito S dise que é un símplice de S , e calquera subconxunto finito non baleiro dun símplice recibe o nome de cara. Defínese a dimensión de A como $n-1$, onde n é o seu número de elementos.

Definición 4. *Sexa σ un símplice, que pode ser xeométrico ou abstracto. Dise que dúas ordenacións dos seus vértices son equivalentes se unha é unha permutación par da outra. Se $\dim \sigma > 0$, as ordenacións de vértices de σ poden agruparse en dúas clases de equivalencia. Cada unha das clases anteriores recibe o nome de orientación de σ . Un símplice orientado é un símplice σ xunto cunha orientación de σ previamente fixada.*

Un símplice orientado represéntase graficamente de xeito intuitivo, indicando mediante unha frecha o sentido de percorrido (ver Figura 1).

Agora, estase en disposición de introducir a noción de “complexo simplicial”, isto é: o tipo de espazo sobre o que se desenvolve a teoría posterior. Poderemos diferenciar entre complexo simplicial xeométrico ou abstracto; aínda que, como se verá, ambas nocións son equivalentes. En xeral, pode traballarse con complexos de dimensión finita ou infinita, mais este documento se centra no caso particular de complexos de dimensión finita.

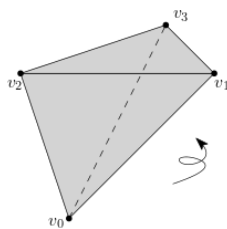


Figura 1: Un exemplo de símplice orientado.

Definición 5. *Un complexo simplicial xeométrico finito K en \mathbb{R}^m é unha colección finita e non baleira de símplices en \mathbb{R}^m verificando:*

1. *Se σ é un símplice de K e β é unha cara de σ , entón β é un símplice de K .*
2. *Dados dous símplices σ e β de K tense que, ou ben $\sigma \cap \beta$ é baleiro, ou ben $\sigma \cap \beta$ é un símplice de K . Neste segundo caso terase en particular que $\sigma \cap \beta$ é unha cara de ámbolos dous símplices anteriores.*

Defínese a dimensión do complexo como a maior entre as dimensións dos seus símplices.

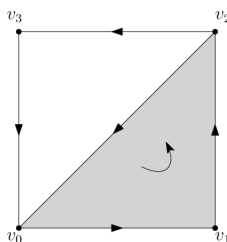


Figura 2: Exemplo de complexo simplicial xeométrico orientado.

Definición 6. *Un complexo simplicial abstracto finito é unha colección finita S de conxuntos finitos e non baleiros, de xeito tal que se A é un elemento de S e B é un subconxunto non baleiro de A , B tamén é un elemento de S .*

A calquera elemento A dun complexo simplicial abstracto finito S denomínaselle símplice. Sexa n o número de elementos do símplice A de S , defínese a dimensión de A como $n - 1$. Unha cara de A é un subconxunto non baleiro de A .

Defínese a dimensión de A como a maior das dimensións dos seus símplices.

Existe unha correspondencia biunívoca entre os complexos simpliciais xeométricos e os complexos simpliciais abstractos. Por cuestión de espazo, esta relación ilústrase mediante un exemplo sinxelo no que se pon de manifesto o mecanismo fundamental que nos permite “pasar” dun complexo simplicial xeométrico a un complexo simplicial abstracto e viceversa: unha aplicación bixectiva entre os símplices do complexo simplicial abstracto e os xeométricos de maneira que un n -símplice se fai corresponder con outro de exactamente a mesma dimensión. Por exemplo:

Como complexo simplicial abstracto, un triángulo pode describirse mediante: $\{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$.

Como complexo simplicial xeométrico, teríamos o triángulo habitual:

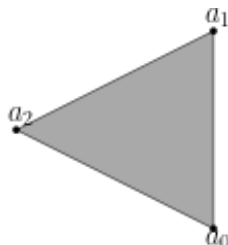


Figura 3: Triángulo como complexo simplicial xeométrico.

No exemplo anterior, basta identificar a_0 con v_0 , a_1 con v_1 e a_2 con v_2 e definir a bixección que xorde de maneira natural entre ambos complexos.

A continuación, procédese a presentar o apartado relativo á “dinámica discreta”.

Definición 7. *Sexa K un complexo simplicial, e sexan σ un n -símplice e β un $(n-1)$ -símplice de K . Dicimos que $\beta < \sigma$ é unha cara libre de σ se non é cara de ningún outro símplice de K .*

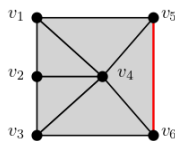


Figura 4: Exemplo dunha cara libre (vermello).

Definición 8. *Se $\sigma^{(n)}$ é cara libre de $\tau^{(n+1)}$, chamamos colapso á operación:*

$$K - (\sigma \cup \tau).$$

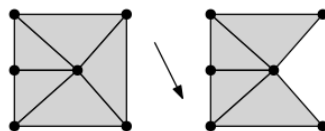


Figura 5: Ilustración dun colapso.

A partir da imaxe anterior, é claro que os colapsos manteñen o tipo de homotopía.

Cando se fala de “dinámica” no caso continuo, a idea é a dun campo vectorial definido sobre unha superficie. No caso dos complexos simpliciais, a seguinte definición persegue discretizar o concepto anterior:

Definición 9. *Un campo vectorial discreto V sobre K é unha colección de pares $\{\sigma^{(n)} < \tau^{(n+1)}\}$ de xeito que ningún símpace de K pertence a máis dun par.*

Dise que un símpace do complexo é crítico para o campo cando non pertence a ningún par do mesmo.

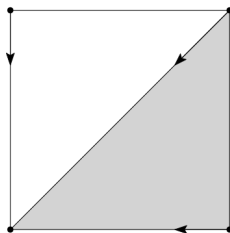


Figura 6: Campo vectorial discreto.

A continuación, introdúcese a primeira relación entre dinámica e topoloxía, indicando un xeito alternativo de calcular a característica de Euler dun complexo simplicial, que se define como:

Definición 10. *Definimos a característica de Euler de K como:*

$$\chi(K) = \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n \#\{n\text{-símpace de } K\}.$$

En [1] preséntase un xeito alternativo para calcular a característica de Euler dun complexo simplicial:

Teorema 1. *A característica de Euler pode calcularse como:*

$$\chi(K) = \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n \#\{n\text{-símpace críticos de } V\}.$$

Unha introdución á teoría de Morse

En xeral, traballar computacionalmente con pares de símpace non parece demasiado doado. Por iso, búscase introducir un concepto alternativo: as funcións de Morse discretas, ás que logo lles serán asociados certos campos vectoriais.

Definición 11. *Unha función de Morse discreta é unha función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, constante en cada símpace e de xeito tal que para calquera n -símpace σ :*

1. $\#\{\tau^{(n+1)} > \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1.$
2. $\#\{\beta^{(n-1)} < \sigma \mid f(\beta) \geq f(\sigma)\} \leq 1.$

Como foi mencionado, pode asociarse un campo vectorial discreto a cada función de Morse, idea que trata de reproducir o concepto de “campo vectorial gradiente”. Definir axeitadamente unha función de Morse discreta é un problema combinatorio. Deste xeito, é interesante obter algunha condición que nos permita saber rapidamente se unha función de Morse está ben definida ou non; aquí entran en xogo as desigualdades de Morse. Un xeito de dar unha proba bastante elemental delas é recorrer a distintos resultados de homoloxía simplicial (a sucesión exacta de homoloxía dun par e a sucesión exacta de homoloxía dun triplo; ver [4] e [5]) e ao resultado que se expón a continuación e que pode atoparse en [2].

Proposición 1. *Para dous complexos simpliciais K_1 e K_2 tales que K_2 é un colapso de K_1 , tense que os respectivos grupos de homoloxía son isomorfos.*

Teorema 2 (Desigualdades febles de Morse). *Sexa K un complexo simplicial de dimensión n e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ unha función de Morse discreta. Para cada p en $\{0, 1, \dots, n\}$, sexa β_p o p -ésimo número de Betti de K , e sexa m_p o número de p -símplices críticos de f . Tense:*

$$m_p \geq \beta_p.$$

Ademais, pode calcularse a característica de Euler de K como:

$$\chi(K) = m_0 - m_1 + \dots + (-1)^n m_n = \beta_0 - \beta_1 + \dots + (-1)^n \beta_n.$$

Teorema 3 (Desigualdades fortes de Morse). *Sexa K un complexo simplicial de dimensión n e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ unha función de Morse discreta. Para cada p en $\{0, 1, \dots, n\}$, sexa m_p o número de p -símplices críticos de f e β_p o p -ésimo número de Betti de K . Tense:*

$$m_p - m_{p-1} + \dots \pm m_0 \geq \beta_p - \beta_{p-1} + \dots \pm \beta_0.$$

Bibliografía

- [1] Knudson, Kevin P. (2015). *Morse Theory. Smooth and discrete*. Hackensack, NJ: World Scientific.
- [2] Kozlov, Dmitry N. (2020). *Organized Collapse. An Introduction to discrete Morse theory*, Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). University Press.
- [3] Milnor, J. W. (1963). *Morse Theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells*, Vol. 22. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [4] Munkres, James R. (1984). *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California.
- [5] Spanier, E.H. (1966). *Algebraic Topology*. Springer, New York, NY.



Modelos epidemiolóxicos en redes complexas

Matemática Aplicada

Javier López Pedrares

Universidade de Santiago de Compostela

28 de febreiro de 2024

Introdución

A propagación de virus e de enfermidades contaxiosas son fenómenos complexos que foron estudados nos últimos anos con detemento. Ao longo dos séculos XX e XXI producíronse moitos avances en matemática aplicada no campo da medicina e da bioloxía referidos a este tema. Na situación de pandemia mundial, vivida no ano 2020, as matemáticas tiveron un rol fundamental no estudo dos efectos a curto e longo prazo.

Nun mesmo organismo cohabitan miles de microorganismos de diferente natureza, por iso é de interese o estudo da competición viral dentro dun hóspede polos mesmos recursos. Modelizar matematicamente a competición viral resulta novidoso. Non obstante, os modelos de competición xa foron estudados anteriormente. Son ben coñecidas as ecuacións de Lotka-Volterra para a competición entre especies existen diversas modificacións para modelar os diferentes casos que poden xurdir na natureza.

Na vida real, a propagación dunha enfermidade é moito máis complicada do que se describe neste escenario xa que os posibles hóspedes interactúan entre eles favorecendo a propagación da enfermidade e as súas defensas naturais combaten a enfermidade matando todos os microorganismos da cepa. Así, podemos identificar polo menos tres mecanismos que actúan simultaneamente: a propagación dunha determinada cepa de virus, a competencia entre as diferentes cepas virais e as interaccións entre os posibles hóspedes. Aínda que existe unha ampla literatura que modela a propagación de enfermidades [1] e algúns modelos tamén describen a competencia de especies similares [2]. O papel desempeñado polas interaccións entre os hóspedes potenciais non foi completamente analizado [3] e preténdese dar unha breve introdución ao rol que desenvolven ditas conexións nos modelos [4].

PALABRAS CLAVE: modelo de competición; modelo epidemiolóxico; ecuación diferencial ordinaria; virus; pandemia; rede complexa.

Estado da arte e nocións básicas

Modelos de crecemento poboacional e competición

O modelo máis básico é o proposto por Malthus, que supón que o crecemento é proporcional á poboación en cada instante de tempo t . Podemos describilo mediante a seguinte ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP, \quad (1)$$

onde $P(t)$ é a poboación en cada instante de tempo e r é a taxa de crecemento da poboación.

A proposta de Verhulst para modelizar o crecemento dunha poboación presenta un crecemento exponencial, mais a partir dun determinado instante de tempo este crecemento ralentízase. A ecuación de Verhulst vén dada para unha poboación $P(t)$ no instante de tempo t pola seguinte ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right), \quad (2)$$

onde r é a taxa de crecemento e K denota a capacidade de carga.

Os modelos comentados consideran unicamente o crecemento dunha única poboación ou especie, pero na realidade nun mesmo ecosistema cohabitan máis especies. Por isto, é de interese introducir modelos que teñan en conta o crecemento, de alomenos de dúas especies, que adoitan competir polos mesmos recursos. O primeiro modelo de interacción entre dúas especies foi o proposto por Lotka e Volterra. Os modelos propostos estudan diferentes situacións presentes na natureza, como a competición depredador-presa, a coexistencia ou a simbiose.

O modelo de Lotka-Volterra pode extenderse a N especies que compiten entre sí e vén dado por:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right) x_i, \quad (3)$$

para $i = 1, \dots, N$ e onde x_i denota as poboacións, α_{ij} mide as interaccións entre as poboacións, K_i é a capacidade de carga de cada unha delas e r_i denota a taxa de crecemento de cada unha das especies.

O modelo baseado en ecuacións diferenciais proposto en (3) foi a base de moitos estudos en ecoloxía e vai ser a base do modelo que empregaremos para describir a dinámica de competición viral ao longo deste texto.

Modelos epidemiolóxicos

Os modelos epidemiolóxicos en xeral, son modelos compartimentais nos que a poboación se divide en grupos diferenciados, segundo o período de infección no que se atopan. O modelo máis simple é o modelo SIR proposto por Kermack e McKendrick. Neste modelo a poboación divídese en tres grupos: susceptibles, infectados e recuperados, denotados por S , I e R , respectivamente. O modelo vén dado polo

seguinte sistema de ecuacións diferenciais ordinarias que mide o ratio de cambio temporal dos tres grupos poboacionais:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I,\end{aligned}\tag{4}$$

onde β é a taxa de transmisión e γ a taxa de recuperación.

O modelo adáptase bastante á realidade, mais asume condicións que non son realistas. Un exemplo é que todos os individuos teñen a mesma probabilidade de entrar en contacto cos outros, entón será preciso modificar o modelo se desexamos que acade unha maior fiabilidade. Introducir o efecto da vacinación, a posibilidade de reinfección ou confinar á poboación serán de interese.

Redes complexas

Matematicamente a teoría de redes complexas pode estudarse dende a teoría de grafos. Esta última teoría nace co problema das pontes de Königsberg no século XVIII. Dados dous conxuntos $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_N\}$ e \mathcal{E} , o conxunto de nodos e o conxunto de enlaces, respectivamente; ao conxunto de todos os nodos e todos os enlaces denomínase rede complexa, $\mathcal{R} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$.

Dous nodos n_1, n_2 están enlazados se existe un enlace entre eles, $\varepsilon(n_i, n_j)$. Se se verifica que $\varepsilon(n_i, n_j) = \varepsilon(n_j, n_i)$ diremos que a conexión entre os nodos é non dirixida, e en caso de que teñamos $\varepsilon(n_i, n_j) \neq \varepsilon(n_j, n_i)$ diremos que a conexión entre os nodos é dirixida. Segundo as conexións da rede sexan dirixidas ou non dirixidas, teremos redes dirixidas e non dirixidas, respectivamente. No caso de que nunha rede existan os dous tipos de conexións diremos que é unha rede mixta.

Podemos observar diferentes situacións, así pois existen redes nas que atopamos nodos illados que unicamente están conectados entre sí formando o que se coñece como illa. A illa máis grande, a que posúe maior número de nodos, denomínase compoñente conexa.

A maneira máis eficiente de describir unha rede é describir todos os seus enlaces, é por isto que a matriz de adxacencia, descrita a continuación, será un dos elementos fundamentais para as redes. No noso estudo, empregaremos a matriz de adxacencia da rede para acoplar os modelos de competición e epidemiolóxicos.

A matriz de adxacencia para unha rede de N nodos é unha matriz cadrada, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{N \times N}$, cuxas entradas veñen dadas por:

$$\mathcal{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se os nodos } i \text{ e } j \text{ están conectados.} \\ 0, & \text{noutro caso.} \end{cases}\tag{5}$$

Na meirande parte das situacións realistas as redes complexas de interacción que aparecen non son regulares, como a que poderíamos observar nun diamante, senón

que aparece aleatoriedade. Así xorde a necesidade de introducir o concepto de redes aleatorias por Erdős e Rényi que introducen a definición de rede aleatoria como segue: Unha rede aleatoria son N nodos etiquetados conectados por L conexións aleatorias.

Os modelos “scale-free” tamén son útiles para modelizar a realidade. Estes modelos foron estudados por múltiples persoas, pero foron Barabási e Albert, os cales acuñaron o modelo de rede coñecido como rede Barabási-Albert. Neste modelo as redes son construídas en etapas. Nunha etapa inicial dispoñemos de n_0 nodos e en cada etapa temporal engadimos un nodo con n conexións que conectan o novo nodo con n nodos que xa pertencían á rede, sendo $n \leq n_0$.

Finalmente, tamén se inclúen exemplos con modelos “small-world”. As redes Watts-Strogatz, propostas por Watts e Strogatz permiten describir a situación intermedia entre as redes regulares e as redes completamente aleatorias. Moitas das redes sociais actuais seguen a dinámica destas redes.

Modelo de competición nun único hóspede

Un microorganismo, en particular, un virus pode modelizarse atendendo a rasgos característicos do seu fenotipo. Se nos introducimos no fenotipo destes, podemos destacar certos parámetros como a taxa de reprodución do virus, a taxa de letalidade, o tempo de incubación ou o tempo que pode durar a infección dentro do organismo hóspede.

Consideremos entón r e k , a taxa de reprodución e a taxa de competición, respectivamente, dous parámetros característicos do fenotipo dos virus. O parámetro de competición k no noso caso englobará outras características como poden ser a letalidade do virus en cuestión. A partir destes dous, describiremos un modelo matemático que mida a competición evolutiva dos virus nun hóspede. Consideremos tamén n virus de distinta natureza que infectan a un único organismo hóspede. O modelo proposto mide a densidade de cada tipo de virus, $V_i(t)$, no instante de tempo t dentro do infectado mediante un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias. Temos entón o seguinte modelo baseado nun sistema de n ecuacións diferenciais ordinarias:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = r_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^n V_j(t)}{k_i} \right) V_i(t), \quad (6)$$

para $i = 1, \dots, n$ e onde r_i e k_i son as taxas de reprodución e competición do i -ésimo virus, respectivamente.

O parámetro k_i ademais de englobar a competición entre os distintos tipos de virus, tamén ten en conta a capacidade de carga, K_i . Neste caso estamos considerando a capacidade de carga do organismo hóspede infectado polos n virus. En bioloxía, máis concretamente en viroloxía, a capacidade de carga é o máximo de poboación vírica que pode soportar o hóspede infectado nun determinado instante de tempo t .

Ao entrar no marco da simulación numérica é interesante estudar o comportamento do modelo ao cabo de períodos de tempo longos. No noso problema, este estudo pode ser útil para analizar os efectos dunha crise sanitaria como pode ser unha pandemia. Co obxectivo de simular estes períodos de tempo implementamos o modelo en *Python*.

O obxectivo da simulación é observar que virus, de entre todos os demais, sobrevive ou predomina ao longo do tempo dentro do noso organismo infectado. Dito doutra forma, buscamos estimar estatisticamente un rango de posibles valores para os parámetros r e k dos virus que prevalecen no organismo infectado ao cabo da simulación.

Á vista dos resultados obtidos despois de facer unha análise estatística de todas as simulacións podemos concluír que os virus que prevalecen ao longo do tempo son aqueles que presentan unha taxa de competición k elevada tendendo á fixada como máxima. Ademais, podemos afirmar que a taxa de reprodución, r , non é un parámetro significativo. Isto concorda coa realidade pois aqueles patóxenos que tenden a sobrevivir son os máis contaxiosos e os menos nocivos para a saúde.

Modelo acoplado con reinfección

Agora ben, queremos estudar que ocorre cando existen varios hóspedes susceptibles de contraer unha infección. Os hóspedes interactúan entre sí en diferentes ámbitos. Se nos centramos en persoas podemos convivir con outras nunha mesma vivenda, pero tamén interactúamos diariamente con familiares, veciños, compañeiros de traballo..., nunha mesma localidade ou en diferentes lugares se o tipo de traballo implica constantes desprazamentos.

Será clave considerar as interaccións descritas anteriormente se queremos estudar a dinámica dunha epidemia dentro dunha poboación. As conexións entre individuos van ser descritas mediante redes complexas de interacción, e diremos que dous individuos i e j están conectados se a entrada \mathcal{A}_{ij} da matriz de adxacencia da rede é non nula.

O punto álxido é acoplar o modelo de competición viral proposto para un único hóspede con diferentes modelos epidemiolóxicos, para así estudar a resposta do modelo acoplado e a dinámica viral obtida.

Un clásico en epidemioloxía é o modelo SIR, descrito polo sistema (4). Aínda que como se comentaba o modelo posúe a limitación de que os individuos acadan unha inmunidade total tras superar a enfermidade, e por iso vamos a considerar o modelo con que permite reinfección.

Para acoplar este modelo co modelo de competición será preciso introducir máis parámetros que describan fenotipicamente aos nosos patóxenos. Consideremos r , k , p_{inf} , t_{sick} e t_{reinf} que denotan a taxa de reprodución, a taxa de competición, o tempo de enfermidade e o tempo reinfección, respectivamente. A partires destes cinco parámetros, describiremos un modelo matemático acoplado que mida a competición evolutiva dos virus nunha rede de hóspedes.

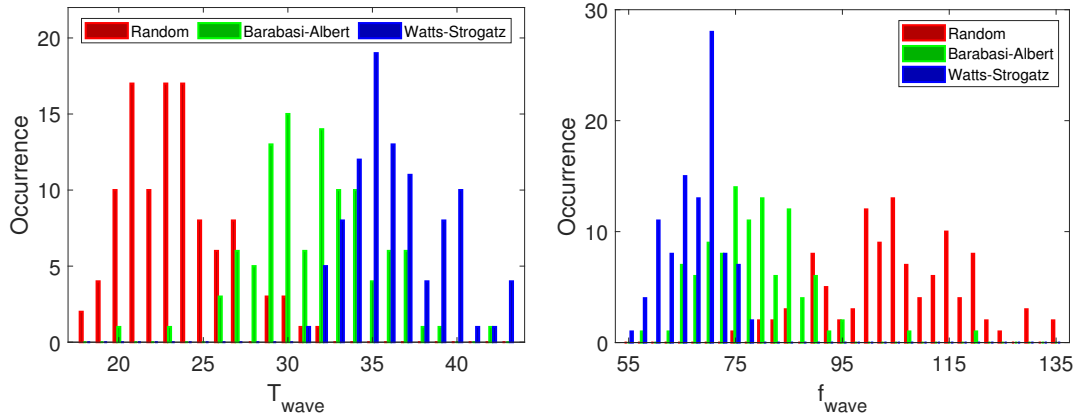


Figura 1: Á esquerda resultado do período das vagas da epidemia, T_{wave} , para as tres topoloxías estudadas. Á dereita resultado da frecuencia coa que se suceden as vagas da epidemia, f_{wave} , para as tres topoloxías.

O modelo de competición viral virá dado polo sistema (6) e en cada paso de tempo os virus competirán en cada hóspede para despois acoplar á rede de interacción empregando a matriz de adxacencia xunto ao modelo SIR con reinfección.

Ao introducir a posibilidade de reinfección o que obtivemos foron as sinais ruidosas que se corresponden coa sucesión de ondas ou vagas epidemilóxicas. Agora ben coa sucesión destas ondas os virus conseguen seguir competindo ata acadar a supervivencia dunha única cepa.

Observamos unha tendencia clara para as frecuencias e os períodos, que podemos calcular empregando transformadas de Fourier. Se analizamos a parte esquerda da Figura 1, as redes aleatorias fan que as vagas epidémicas teñan un período maior e pola contra serán as redes de tipo Watts-Strogatz as que teñan períodos menores. Inversamente, se observamos a parte dereita da Figura 1 obsérvase a tendencia contraria, cando falamos de frecuencia das vagas da pandemia.

Bibliografía

- [1] Carballosa, A., Mussa-Juane, M., & Muñuzuri, A. P. (2021). *Social Opinion Influence on Epidemic Scenarios*, Analysis of Infectious Disease Problems (Covid-19) and Their Global Impact, 465-482.
- [2] Waltman, P. (1983). *Competition models in population biology*, Society for industrial and applied mathematics.
- [3] Zhang, X., Ruan, Z., Zheng, M., Zhou, J., Boccaletti, S., & Barzel, B. (2022). *Epidemic spreading under mutually independent intra-and inter-host pathogen evolution*, Nature communications, **13**(1), 6218.

- [4] López-Pedrares, J., Vázquez-Cendón, M. E., & Muñuzuri, A. P. (2023). *Interactions between hosts affect virus competition mechanism within an infectious strain*, *Chaos, Solitons & Fractals*, **170**, 113344.

Análise de supervivencia: unha aplicación á cardio-oncoloxía

Estadística e Investigación Operativa

Beatriz Piñeiro Lamas

Universidade da Coruña

13 de marzo de 2024

Que é a análise de supervivencia? E os modelos de curación?

A análise de supervivencia é unha rama da estatística que analiza o tempo ata que ocorre un determinado suceso de interese (por exemplo, a morte por cancro ou a recaída dunha enfermidade). Os modelos clásicos de supervivencia asumen que todos os individuos son susceptibles a sufrir o evento final. Isto non sempre é realista na práctica, e por este motivo xorden os modelos de curación. Estes modelos consideran, como novidade, a posibilidade de que algúns individuos, denominados *curados*, non sufran nunca o evento de interese. Os modelos de curación xogan un importante papel nos estudos relacionados co cancro. Grazas a todos os avances acadados nas últimas décadas, afortunadamente hai pacientes oncolóxicos que responden ben ao tratamento e que nunca morrerán a causa do cancro nin sufrirán recaídas.

Cancro de mama e cardiotoxicidade

O tipo de cancro máis frecuente entre as mulleres é o de mama. Segundo a Organización Mundial da Saúde, en 2020 diagnosticouse cancro de mama a 2.3 millóns de mulleres en todo o mundo, e 685000 morreron por esta causa [1]. Ao redor do 20% de todos os cancros de mama presentan niveis elevados da proteína HER2, que favorece a proliferación das células cancerosas. Estes cancros, coñecidos como como HER2-positivos (HER2+), tenden a crecer e estenderse rapidamente, pero normalmente responden ben ao tratamento con fármacos dirixidos a HER2. Estas terapias dirixidas teñen un forte efecto antitumoral, mellorando a supervivencia global e a supervivencia libre de progresión. Non obstante, poden causar cardiotoxicidade. Ademais, poden combinarse con outros fármacos antineoplásicos que tamén poden ter efectos cardiotóxicos. As toxicidades cardiovasculares poden presentarse de moitas formas, pero unha das manifestacións máis notables é a disfunción cardíaca, que ten importantes implicacións pronósticas e pode progresar a insuficiencia cardíaca co tempo. Por este motivo, a súa detección precoz resulta de capital importancia.

PALABRAS CLAVE: bioestatística; cardiotoxicidade; datos censurados; modelos de curación.

Para modelar este efecto, consideramos que o suceso de interese é a aparición da cardiotoxicidade e, por tanto, a variable que queremos estudar é o tempo ata a súa aparición. Neste marco está claro que deben considerarse modelos de curación en lugar de modelos de supervivencia clásicos xa que haberá pacientes que nunca experimentarán este efecto secundario.

Obxectivos

Coa finalidade de mellorar a calidade de vida das pacientes oncolóxicas, xorden de xeito natural as seguintes cuestións:

- Cal é a probabilidade de sufrir cardiotoxicidade? Hai algún factor que fai que dita probabilidade aumente ou diminúa?
- Para as mulleres que experimentan o efecto adverso, como se distribúe o tempo ata a súa aparición? Aparece ao pouco tempo de iniciar o tratamento ou é máis ben un efecto a longo prazo? Hai algún factor que pode acelerar ou retardar a aparición da complicación cardiovascular?

Este traballo ten dous obxectivos: atopar variables que poidan axudar a predicir a cardiotoxicidade e estudar o efecto de certas variables no tempo ata a súa aparición. O primeiro permitiría ao persoal médico propoñer unha terapia alternativa ou avaliar máis a miúdo a unha muller se se lle estima un alto risco de cardiotoxicidade. O segundo posibilita detectar o período de maior risco de sufrila. Todo isto podería conducir a unha medicina máis personalizada, aumentando a capacidade de predicir se as terapias oncolóxicas serán seguras e eficaces ou non, en función das características da paciente. Para acadar estes obxectivos, nas seguintes seccións usaranse datos correspondentes a 531 mulleres diagnosticadas con cancro de mama HER2+ entre 2007 e 2021, que foron tratadas con terapias potencialmente cardiotóxicas no Complexo Hospitalario Universitario de A Coruña (CHUAC). Os datos poden descargarse gratuitamente en [2] e están detallados en [3]. Para cada muller dispónse de certas variables medidas con posterioridade ao diagnóstico e antes de comezar o tratamento, como a idade, o peso, a altura, a frecuencia cardíaca, a fracción de exacción do ventrículo esquerdo e outras medidas relacionadas co corazón. Ademais, coñécense datos interesantes da historia clínica da paciente, como por exemplo se é diabética ou se tivo algún problema cardiovascular previo.

Modelos de curación de tipo mestura cunha covariable unidimensional

Os modelos de curación de tipo mestura asumen que os doentes se dividen en dous grupos: os curados (que nunca experimentarán o evento final) e os non curados ou susceptibles a sufrilo. No que segue, denotaremos por Y á variable temporal de interese: $Y =$ “tempo ata a aparición de cardiotoxicidade en pacientes con cancro de

mama HER2+ que reciben terapias potencialmente cardiotoxícas”. Dende un punto de vista estatístico, se seguimos a un grupo de n mulleres con estas características, o ideal sería dispoñer dunha mostra Y_1, \dots, Y_n co valor de Y observado para cada unha delas. Porén, isto non sempre é posible na práctica debido ao que se coñece en análise de supervivencia como censura: pode darse o caso de que algunhas mulleres cheguen ó final do período de seguimento sen ter experimentado cardiotoxicidade. Para estas pacientes só podemos observar o tempo transcorrido ata a perda do seu seguimento, o cal se define como tempo de censura e se denota por C . Neste caso, dise que a observación está censurada pola dereita. Este tipo de censura tamén pode deberse á perda de seguimento por outros motivos (por exemplo, cando a paciente non regresa ás visitas médicas ou cando ocorre outro evento que impide observar o de interese, como a morte por unha causa allea ao estudo). Polo tanto, na práctica non se observará Y para todas as doentes senón un par (T, δ) , onde $T = \min(Y, C)$ é o tempo de vida observado e $\delta = I(Y \leq C)$ o indicador de non censura ($\delta = 1$ se se observa a cardiotoxicidade durante o seguimento e $\delta = 0$ en caso contrario). A dificultade engadida dos modelos de curación de tipo mestura radica en que entre as observacións censuradas están mesturadas aquelas pacientes que experimentarán o evento de interese pero nun instante posterior á fin do estudo (pacientes susceptibles) e aquelas pacientes que xamais experimentarán este evento (pacientes curadas para o evento cardiotoxicidade). Para modelar este feito introdúcese a variable binaria indicador de cura ν que tomará o valor $\nu = 1$ para mulleres curadas e $\nu = 0$ para susceptibles. Este indicador de cura só é parcialmente observable: as mulleres que amosan o evento de interese ($\delta = 1$) sabemos que son susceptibles ($\nu = 0$), pero no caso das pacientes con observacións censuradas ($\delta = 0$) descoñecemos o valor de ν . Na práctica clínica é común ademais contar con información sobre certas variables explicativas ou covariables que denotaremos por X .

En análise de supervivencia, para caracterizar á variable de interese Y é común utilizar a función de supervivencia: $S(t) = 1 - F(t) = P(Y > t)$. Esta función indica a probabilidade de sobrevivir máis aló dun determinado tempo t . Os modelos de curación de tipo mestura permiten expresar a función de supervivencia condicional a unha covariable unidimensional X como segue:

$$S(t|x) = 1 - p(x) + p(x)S_0(t|x),$$

onde $1 - p(x)$ é a probabilidade de curación (no noso caso, de nunca ter cardiotoxicidade) condicionada a x e a función S_0 é o que se coñece como latencia. A latencia é a función de supervivencia condicional dos individuos susceptibles. É dicir, no contexto da cardiotoxicidade é a función que nos informará sobre como se distribúe o tempo ata a aparición do efecto adverso nas mulleres que o padecen. Ao longo das últimas décadas, na literatura propuxéronse diversos estimadores para as funcións $1 - p$ e S_0 . Neste traballo centrámonos nos estimadores non paramétricos introducidos en [4], [5] e [6]. Aplicando ditos estimadores aos datos de cardiotoxicidade do CHUAC, considerando $X =$ idade, obtéñense os resultados da Figura 1. Á esquerda móstrase como varía a probabilidade de padecer cardiotoxicidade dependendo

da idade á que a muller foi diagnosticada. Conclúese que a idade parece non xogar un papel moi relevante, pois non se observan grandes cambios na probabilidade estimada. Por outra banda, á dereita pódese observar a latencia para tres idades distintas: 45, 55 e 65 anos. Canto maior é a idade, máis por debaixo está a función de supervivencia condicional correspondente. Isto indica que canto máis maior sexa unha muller susceptible, máis cedo padecerá o efecto adverso. Polo tanto, esta análise estatística mostra que a idade pode verse coma un factor de risco no contexto da cardiotoxicidade. Se ben o seu efecto sobre a probabilidade de experimentar o dano no corazón non parece relevante, si que o é no tempo ata a súa aparición.

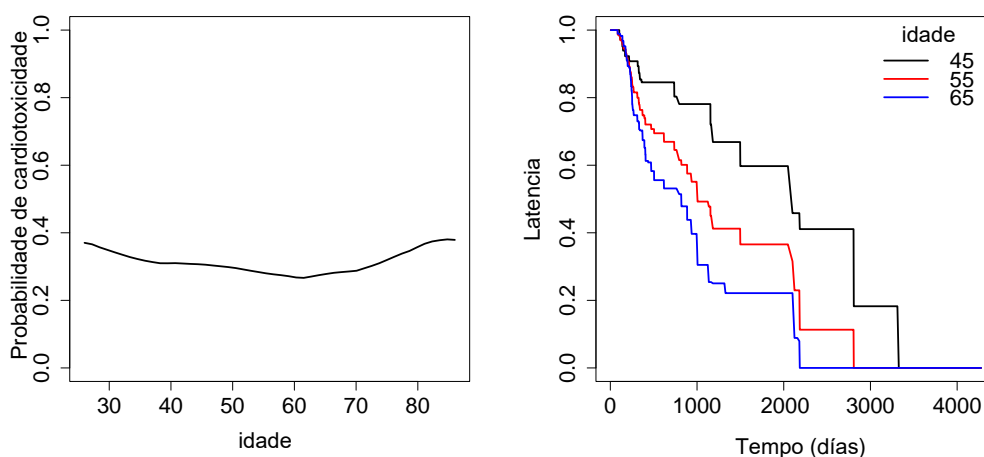


Figura 1: Estimación da probabilidade de cardiotoxicidade e da latencia dependendo da idade da muller.

Modelos de curación de tipo mestura con covariables vectoriais e funcionais

En moitas ocasións, debido á gran cantidade de datos que se almacenan hoxe en día, non só se dispón dunha variable de interese senón dun conxunto delas. Ademais, no ámbito da medicina é común dispoñer de datos funcionais ou de imaxes (electrocardiogramas ou ecocardiogramas). Os modelos de curación de tipo mestura previamente introducidos poden estenderse a dimensión maior que un na covariable. Para evitar a coñecida maldición da dimensión (que se refire ás dificultades que xorden ao traballar con datos de alta dimensión en estatística), utilízase un enfoque *single-index* para reduci-la. Os modelos *single-index* de curación de tipo mestura en presenza dun vector de covariables $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ pódense expresar como segue:

$$S(t|\mathbf{x}) = 1 - p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})S_0(t|\mathbf{x}) = 1 - p_{SI}(\boldsymbol{\theta}'_0\mathbf{x}) + p_{SI}(\boldsymbol{\theta}_0\mathbf{x})S_{0,SI}(t|\boldsymbol{\theta}'_0\mathbf{x}),$$

onde $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ é un vector descoñecido de parámetros que haberá que estimar, $S, S_0 : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow [0, 1]$, $p : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, $p_{SI} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ and $S_{0,SI} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Nótese que a función de supervivencia condicional a \mathbf{x} pódese expresar en termos de $1 - p_{SI}(\theta'_0 \mathbf{x})$ e $S_{0,SI}(t|\theta'_0 \mathbf{x})$, onde aínda que \mathbf{x} é d -dimensional, a covariable $\theta'_0 \mathbf{x}$ é de novo unidimensional (combinación linear). Unha vez obtido o estimador de máxima verosimilitude de θ_0 (denotado por $\hat{\theta}_n$), é posible construír a variable $\hat{\theta}'_n \mathbf{X}$. Ao ser unha variable unidimensional, pódense utilizar os estimadores da probabilidade de cura e da latencia propostos en [4], [5] e [6].

Voltando de novo aos datos de cardiotoxicidade, imos considerar o vector de covariables \mathbf{X} que inclúe a frecuencia cardíaca, a idade, o peso, a altura, a fracción de execución do ventrículo esquerdo, o grosor da parede posterior do corazón, o diámetro da aurícula esquerda e o diámetro do ventrículo esquerdo en telediástole e telesístole. Ademais, considérase tamén a Imaxe Doppler Tisular (ou TDI polas súas siglas en inglés), que é unha variable de tipo imaxe que se pode transformar nun dato funcional usando o algoritmo proposto en [3]. Posto que mediante unha representación en bases as variables funcionais poden reducirse ao caso vectorial, é posible xuntar nunha variable vectorial conxunta o vector \mathbf{X} e a imaxe TDI (por simplicidade, omítense os detalles e a notación). Axustando un modelo single-index de curación de tipo mestura pódese estimar $\theta'_0 \mathbf{x}$, unha variable resumo unidimensional que ten en conta a información do vector \mathbf{X} e da variable tipo imaxe. Na Figura 2 (esquerda) móstrase como varía a probabilidade de cardiotoxicidade dependendo da variable single-index estimada. Dita variable resumo compórtase, en xeral, coma un factor de risco: canto maior é o seu valor, maior é a probabilidade de sufrir o efecto secundario. Porén, a variable resumo parece non dar información relevante sobre a distribución do tempo ata que aparece o dano cardiovascular (Figura 2, dereita).

Conclusións

Este traballo pretende ilustrar a aplicación dos modelos de curación de tipo mestura ao eido da cardio-oncoloxía. Os modelos single-index de curación de tipo mestura, que permiten traballar con covariables vectoriais e funcionais evitando a maldición da dimensión, son parte da investigación realizada ao longo da miña tese de doutoramento [7]. Os resultados obtidos aplicando a metodoloxía proposta aos datos de cardiotoxicidade do CHUAC permitiron atopar dous factores de risco no contexto da cardiotoxicidade. Por unha banda, se o interese se centra en estimar a probabilidade que ten unha muller de padecer cardiotoxicidade ao recibir certas terapias, a variable single-index estimada na anterior sección é unha boa ferramenta. Por outra banda, se o interese radica en detectar o período de maior risco de padecer o efecto secundario, entón a idade da muller é máis informativa. Estes achados poderían axudar ao persoal médico a tomar decisións máis informadas sobre o tratamento e coidado das mulleres con cancro de mama, coa finalidade de minimizar

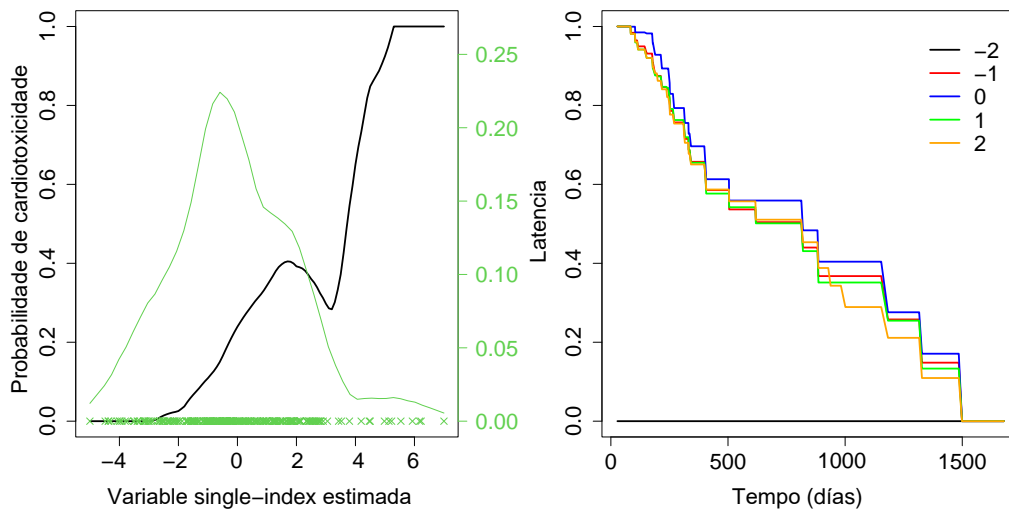


Figura 2: Esquerda: Probabilidade estimada de cardiotoxicidade en función da variable single-index estimada a partir do vector \mathbf{X} e da imaxe TDI. En verde, estimación non paramétrica da densidade da variable single-index estimada. Dereita: Latencia estimada para cinco valores da variable single-index estimada.

os riscos aos que son expostas e en consecuencia maximizar a súa calidade de vida.

Bibliografía

- [1] World Health Organization. (2023). *Breast cancer*. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/breast-cancer>. (Accessed: 30-November-2023)
- [2] Piñeiro-Lamas, B., López-Cheda, A., Cao, R., Ramos-Alonso, L., González-Barbeito, G., Barbeito-Caamaño, C. e Bouzas-Mosquera, A. (2023). *BC cardiotox: A cardiotoxicity dataset for breast cancer patients*. doi: 10.6084/m9.figshare.22650748
- [3] Piñeiro-Lamas, B., López-Cheda, A., Cao, R., Ramos-Alonso, L., González-Barbeito, G., Barbeito-Caamaño, C. e Bouzas-Mosquera, A. (2023). *A cardiotoxicity dataset for breast cancer patients*, *Scientific Data*, **10**, 527.
- [4] Xu, J. e Peng, Y. (2014). *Nonparametric cure rate estimation with covariates*, *Canadian Journal of Statistics*, **42**, pp. 1–17.
- [5] López-Cheda, A., Cao, R., Jácome, M. A. e Van Keilegom, I. (2017). *Nonparametric incidence estimation and bootstrap bandwidth selection in mixture cure models*, *Computational Statistics & Data Analysis*, **105**, pp. 144–165.
- [6] López-Cheda, A., Jácome, M. A. e Cao, R. (2017). *Nonparametric latency estimation for mixture cure models*, *TEST*, **26**, pp. 353–376.

- [7] Piñeiro-Lamas, B. (2024). *High dimensional single-index mixture cure models*, Tesis doctoral, Universidade da Coruña.

Formas modulares, símbolos modulares e aplicacións

Álgebra

Javier Polo Noche

Universidade de Santiago de Compostela

3 de abril de 2024

Introdución e conceptos preliminares

En termos resumidos, as formas modulares son funcións definidas sobre \mathbb{C} que verifican unhas certas propiedades de simetría e invariancia que xogan un papel fundamental na Teoría de Números. Porén, para poder comprender o seu significado precisamos definir algúns conceptos previos relativos a ferramentas que imos empregar e conxuntos sobre os que imos traballar. As principais referencias bibliográficas para esta parte son [1], [4] e [5].

Definición 1. *O semiplano superior complexo é o conxunto $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}(z) > 0\}$, onde $\mathcal{I}(z)$ denota á parte imaxinaria de z .*

Denotamos $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Estes puntos denominaranse cúspides. Tamén podemos escribilo como $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. De xeito análogo defínese $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Definición 2. *O semiplano superior complexo estendido é o conxunto $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$*

Os seguintes conceptos relacionaranse coas matrices. $GL_2(\mathbb{R})$ denotará o grupo linear xeral, é dicir, o grupo de matrices cadradas de orde 2, invertibles e con entradas reais. Contén como subgrupo as que teñen determinante positivo, $GL_2^+(\mathbb{R})$.

Definición 3. *Denomínase grupo linear especial ao conxunto $SL_2(\mathbb{R}) = \{\gamma \in GL_2(\mathbb{R}) : \det(\gamma) = 1\}$. De xeito análogo defínese $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Definimos a seguinte operación:

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (\gamma, z) &\longmapsto \gamma z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

Definición 4. *Defínese como factor de automorfía a función*

$$\begin{aligned} j : GL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\gamma, z) &\longmapsto cz + d. \end{aligned}$$

PALABRAS CLAVE: formas modulares; símbolos modulares; operadores de Hecke; subgrupo de congruencia.

Definición 5. Sean $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in GL_2^+(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{Z}$. Defínese o operador barra de peso k como a aplicación $f|_k\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$(f|_k\gamma)(z) = (\det \gamma)^{k-1} j(\gamma, z)^{-k} f(\gamma z).$$

Nótese que $f|_k(\gamma_1\gamma_2) = f|_k(\gamma_1)|_k(\gamma_2)$.

Formas modulares e subgrupos de congruencia

Xa temos introducidos os conceptos necesarios para achegarnos á definición de forma modular, pero cómpre xustificar algunha cuestión previa máis. Para esta parte as principais referencias bibliográficas son [1], [3], [4] e [5].

Definición 6. Unha función holomorfa $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ dise que é feblemente modular de peso $k \in \mathbb{Z}$ en $SL_2(\mathbb{Z})$ se $f|_k\gamma = f$ para toda matriz $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. É dicir, se $f(\gamma z) = j(\gamma, z)^k f(z)$.

Como $SL_2(\mathbb{Z})$ está xerado por $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é suficiente comprobar que a igualdade da definición anterior se cumpre para estas dúas matrices.

Proposición 1. Se $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ é unha función feblemente modular, entón f admite unha expansión da forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}.$$

Definición 7. Unha función feblemente modular $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa no infinito se $f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) e^{2\pi i n z}$. Nestas condicións, $f(\infty) = a(0)$, e dise que f se esvaece no infinito se $f(\infty) = 0$.

Definición 8. Unha forma modular de peso $k \in \mathbb{Z}$ consiste nunha función holomorfa $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ feblemente modular de peso $k \in \mathbb{Z}$ en $SL_2(\mathbb{Z})$ que tamén é holomorfa no infinito. Ademais, se f se esvaece no infinito dise que f é forma cuspidal.

A modo de notación, $M_k = M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ e $S_k = S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ denotarán aos \mathbb{C} -espazos vectoriais de dimensión finita de formas modulares e de formas cuspidais de peso k , respectivamente. En particular, as matrices que máis nos van interesar son as dos subgrupos de congruencia de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Definición 9. Sexa $N \in \mathbb{Z}^+$. O subgrupo $\Gamma(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$, onde

$$\Gamma(N) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : a, d \equiv 1 \pmod{N} \text{ e } c, b \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

denomínase subgrupo principal de congruencia de nivel N .

Definición 10. *Dise que Γ é subgrupo de congruencia de $SL_2(\mathbb{Z})$ se para algún enteiro positivo N se verifica*

$$\Gamma(N) \subset \Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z}).$$

Se N é o menor enteiro que cumpre esta condición, N denomínase nivel de Γ .

Exemplo 1 (Familias de subgrupos de congruencias). *As familias de subgrupos de congruencias coas que máis imos traballar son as que seguen:*

- $\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$.
- $\Gamma_1(N) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : a, d \equiv 1 \text{ e } c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$.

Observación 1. *Podemos considerar os espazos $M_k(\Gamma)$ e $S_k(\Gamma)$ pedindo que as funcións se transformen do xeito habitual pola acción do subgrupo de congruencia Γ . Pódese consultar con máis detalle en [1] ou [5].*

Operadores e álxebras de Hecke

Agora xa temos definidas as formas modulares e especificados os conxuntos de matrices cos que imos traballar maiormente. O obxectivo desta sección é proporcionar algunhas noicións que desenvolven unha teoría espectral empregando as formas modulares. Non afondaremos en exceso neste aspecto porque posúe unha elevada complexidade, aínda que se trata de ferramentas de bastante utilidade na práctica. As principais referencias aquí son [3], [4] e [5].

Proposición 2. *Sexan Γ_1 e Γ_2 dous subgrupos de congruencia e $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$. Entón, levando cada f en $f|_k \Gamma_1 \alpha \Gamma_2$ inducimos unha aplicación entre os espazos $M_k(\Gamma_1)$ e $M_k(\Gamma_2)$.*

Definición 11. *Sexa p un primo e tomemos $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_1(N)$. O operador de Hecke en p defínese como*

$$T_p f = f|_k \Gamma_1(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma_1(N),$$

que actúa sobre $M_k(\Gamma_1(N))$. En termos da expansión de Fourier,

$$T_p f = \sum_{d>0, ad=p} \sum_{b=0}^{d-1} f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Observación 2. *Estes operadores poden definirse para enteiros non primos de xeito análogo. Nese caso, é evidente que na suma anterior, que para p primo ten $p + 1$ termos, tería máis sumandos.*

Proposición 3. $T_p : M_k \rightarrow M_k$ é unha aplicación lineal.

Esta proposición dá pé á vindeira definición.

Definición 12. Sexan $N \in \mathbb{Z}^+$ e $k \in \mathbb{Z}$. A álgebra de Hecke actuando sobre $M_k(\Gamma_1(N))$ é a \mathbb{C} -subálgebra conmutativa dos $\text{End}_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma_1(N))$ xerada polo conxunto

$$\langle T_p, p \text{ primo}, \langle d \rangle : d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^x \rangle,$$

onde

$$\begin{aligned} \langle d \rangle : M_k(\Gamma_1(N)) &\longrightarrow M_k(\Gamma_1(N)) \\ f &\longmapsto \langle d \rangle_f := f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$d \equiv d' \pmod{N} \text{ e } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

A álgebra de Hecke denótase por $\mathbb{T}(M_k(\Gamma_1(N)))$. $\mathbb{T}(S_k(\Gamma_1(N)))$ é unha subálgebra conmutativa de $\text{End}_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma_1(N))$.

Definición 13. Dise que $f \in M_k(\Gamma_1(N))$ é forma propia de Hecke se é autovector para todos os elementos de $\mathbb{T}(M_k(\Gamma_1(N)))$.

Se f é forma propia, pódese comprobar que $T_n f = \lambda_n f$ para todo n e entón $a(n) = \lambda_n a(1)$. Grazas a propiedades de T_p e de $\langle d \rangle$ podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 1. Se n e N son enteiros coprimos, o espazo $S_k(\Gamma_1(N))$ ten unha base de formas propias para T_n e $\langle n \rangle$.

Isto dedúcese de que baixo as hipóteses anteriores os operadores T_n son normais (é dicir, conmutan co seu adxunto).

Símbolos modulares

Imos pasar a algo bastante diferente do da sección anterior, aínda que como veremos tamén se conecta coas formas modulares. Para iso, imos definir unha acción semellante á operación que aparece na introdución. Para esta parte baseámonos en [3].

Definición 14. Definimos a seguinte acción:

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ (\gamma, z) &\longmapsto \gamma z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

Estas transformacións fraccionais lineares coñécense co nome de transformacións de Möbius. Nótese que se $z = \infty$, $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} \equiv \frac{a}{c}$.

O caso que máis nos vai interesar de novo é restrinxirnos ás matrices de subgrupos de congruencia de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixémonos en que, baixo a acción dun subgrupo de congruencia, o infinito e os puntos racionais son “equivalentes” no seguinte sentido: para calquera número racional escollido, polo Teorema de Bezout, poderemos atopar unha matriz de orde 2 con coeficientes enteiros e determinante 1 (é dicir, pertencente a $SL_2(\mathbb{Z})$) de xeito que a devandita matriz actuando sobre o infinito nos dea o número racional escollido. Así, pódese ver \mathbb{H}^* como a compactificación por un punto de \mathbb{H} . Polo tanto, o conxunto de órbitas de \mathbb{H}^* baixo un subgrupo de congruencia Γ , $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$, pode ser dotado dunha certa estrutura xeométrica que se denominará curva modular compactificada e se denotará por $X(\Gamma)$.

Teorema 2. *Existe un isomorfismo entre $S_{2k}(\Gamma)$ e o espazo de k -formas diferenciais sobre $X(\Gamma)$.*

Observación 3. *Unha f -forma diferencial podemos pensala como un operador multilinear sobre unha certa superficie que poderemos integrar, o que nos serve para definir os símbolos modulares. $\Omega^1(X(\Gamma))$ denota o espazo de 1-formas diferenciais sobre $X(\Gamma)$.*

Con todas estas ferramentas un paso natural é tratar de integrar as 1-formas (ou equivalentemente, as formas cuspidais de peso 2).

Teorema 3. *O emparellamento de integración*

$$\left(\sum_i \lambda_i [\mu_i], \omega \right) \mapsto \sum_i \lambda_i \int_{\mu_i} \omega \in \mathbb{C},$$

onde $\omega \in \Omega^1(X(\Gamma))$ é non dexenerado.

Definición 15. *Sexan $r, s \in \mathbb{H}^*$. O símbolo modular $\{r, s\}$ para Γ é o elemento que se corresponde, mediante o emparellamento anterior, con*

$$\left(\omega \mapsto \int_r^s \pi^*(\omega) \right) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X(\Gamma)), \mathbb{C}),$$

onde π^* denota ao pullback da aplicación proxección por paso ao cociente.

Hai outras maneiras de definir estes símbolos modulares, e na literatura poden comprobarse as propiedades que cumpren e a súa utilidade. Unha forma de conectalos coas formas modulares é mediante o isomorfismo de Eichler-Shimura, que non enunciaremos porque precisaría de notación e conceptos previos, pero que pode consultarse en [4].

Conclusións

As formas modulares son empregadas en diversas cuestións dentro da Teoría de Números e posúen aplicacións interesantes na vida real ou noutras áreas da matemática. Comentamos aquí algunhas delas (en [6] explícanse algunhas destas cuestións):

- Demostración do Último Teorema de Fermat: por exemplo, no Teorema de Taniyama-Shimura ou Teorema de Modularidade (véxase [2]).
- Técnicas de resolución de ecuacións diofánticas.
- Problema do número congruente (formas modulares de peso semienteiro).
- Conxectura de Birch e Swinnerton-Dyer: no cálculo de valores dunhas series moi importantes en teoría de números, as funcións L (un caso particular é a función zeta de Riemann).
- Teoría de códigos e criptografía: na mellora da eficiencia de algoritmos de curvas elípticas.
- Grafos de Ramanujan, importantes na teoría de redes de comunicación.

Bibliografía

- [1] Diamond F., Shurman J. (2000). *A First Course in Modular Forms*, Springer.
- [2] Freitas, N. (2016). *Un vistazo al trabajo de Andrew Wiles*, RSME. URL: <https://www.rsme.es/wp-content/uploads/2016/04/AndrewWiles.pdf>
- [3] Gispert, F. (2016). *Modular Symbols*, Tráballo de Fin de Grao, Universitat Politècnica de Catalunya.
- [4] Masdeu, M. (2020) *Modular Forms*, lecture notes. URL: <https://mat.uab.cat/masdeu/wp-content/uploads/2020/02/ModularForms.pdf>
- [5] Omil, L. (2024) *Introducción ás formas modulares*, lecture notes.
- [6] Stein W.A. (2007) *Modular forms, a computational approach*. Graduate Studies in Mathematics, volume 79. URL: <https://wstein.org/books/modform/modform/index.html>



Small Area Estimation: Mixed Models for Social Challenges

Estadística e Investigación Operativa

Naomi Diz-Rosales¹, María José Lombardía², Domingo Morales³

^{1,2}Universidade da Coruña, CITIC, España,

³Universidad Miguel Hernández de Elche, IUICIO, España

17th April, 2024

Abstract

Small area estimation is a multidisciplinary branch of statistics that aims to produce accurate estimates on variables of interest in domains with small or even zero sample size. In view of its great potential, we propose to develop, for the first time in the field, generalised linear mixed models of random slope to deal with two highly relevant social problems: the estimation of poverty indicators by province and sex in Spain and the estimation of welfare collapse indicators in pandemic contexts.

Introduction

Small area estimation (SAE) is a multidisciplinary branch of statistics that aims to obtain precise estimates in areas or domains, geographical or otherwise, in which the number of observations available is very small or even zero.

Since its definition, with the study by Fay and Herriot in 1979 [1], research has followed one after the other, increasing significantly in recent years, driven by international institutions such as the United Nations, Eurostat or the World Bank, in the context of the Sustainable Development Goals (SDGs) and the 2030 Agenda. Applications are also expanding to a multitude of fields, such as obtaining detailed indicators of living conditions, health, environment, etc. Consequently, we strongly recommend reviewing the Morales et al. [2] book, which provide an exhaustive and clear monitoring of development in SAE.

Given the wide range of methodological approaches, in this research we work with mixed models. Mixed models are regression models whose definition integrates random effects (variables that follow a probability distribution and capture the variability among unobserved levels of a factor) in addition to fixed effects (variables whose levels are constant and specific in the analysis). It is interesting to consider these models in the context of SAE, as they allow to increase the number of effective observations by modelling the variability between and within areas or domains.

KEYWORDS: small area estimation; mixed models; random slopes; poverty ratio; Intensive Care Units occupancy ratio.

Thus, if the same random effect is assigned to areas that share similar characteristics, a greater number of effective observations is obtained for estimation purposes than if only each area is taken into account individually. Based on this principle, several approaches have been developed in SAE, consisting of the definition of Linear Mixed Models (LMMs) and Generalized linear mixed models (GLMMs) with random intercept [3]. The results shown, both in simulation and in application to real data, illustrate the improvement in estimates compared to models without such effects.

However, continuing to consider the regression coefficients as fixed effects may be too rigid an approximation when the relationship between the target variable and the auxiliary variables is not constant across all areas. To add flexibility to the modelling process, in 1981 Dempster et al. [4] defined random slope (or random regression coefficient) mixed models for the first time in SAE. Despite these early advances, research is still limited on this topic and has always been restricted to the context of LMMs [5]. In fact, to our present knowledge, GLMMs with random slope had not been defined in SAE yet, the first contribution being the work resulting from this research [6, 7].

Therefore, this work aims to develop GLMMs with random slope to estimate complex indicators of socio-economic and health relevance in small areas, such as the estimation of the poverty ratio by province and sex in Spain and the Intensive Care Units (ICU) occupancy rate in epidemic contexts by health area and day in Spain. In the following sections we first provide a definition of the model developed, which we call ARRCP (area-level random regression coefficient Poisson model). Once defined, the main results obtained in the two target social challenges are summarised. Finally, the key references used are provided.

The ARRCP Model

This section defines the ARRCP model and details the basic principles on which it is based. More details can be consulted in [6].

Let y_{ij} be the target variable that takes values in $\mathbb{N} \cup \{0\}$, where $i \in \mathbb{I} = \{1, \dots, I\}$, $j \in \mathbb{J} = \{1, \dots, J\}$. For example, the number of people at risk of poverty in province i and sex j or the number of people with COVID-19 admitted to the ICU in health area i on day j . The total number of values y_{ij} is given by the number of domains $D = IJ$. For example, $D = 104$ in the case of the study of poverty, since there are 52 provinces i in Spain with both sexes j studied in each one, and $D = 8820$ in the case of the study of ICU occupation, since 18 health areas i are studied in a total of 490 days j . Likewise, random slopes are defined at the level of K clusters of domains, where each domain belongs to a single cluster, so that each cluster has m_k domains. For example, in the case of poverty, we can cluster the domains according to the income group and in the case of COVID-19, we can cluster, for each health area, the daily observations in weeks. The target parameter, p_{ij} , corresponds to the poverty rate and the ICU occupancy ratio due to COVID-19,

defined as

$$p_{ij} = \frac{y_{ij}}{n_{ij}}, i \in \mathbb{I} = \{1, \dots, I\}, j \in \mathbb{J} = \{1, \dots, J\}$$

where n_{ij} is the sample size in each domain.

We will consider a GLMM for y_{ij} . The model will include the effects of p explanatory variables with values $x_{\ell,ij}$, $\ell \in \mathbb{P} = \{1, \dots, p\}$, $i \in \mathbb{I}$, $j \in \mathbb{J}$ and $x_{1,ij} = 1$ for all i and j in models with intercept. The effect of these auxiliary variables is weighted by the regression coefficients included in the column vector $\boldsymbol{\beta} = \beta_\ell$. Such a model includes the following elements:

- Fixed effects, corresponding to the auxiliary variables $x_{\ell,ij}$ whose β_ℓ are constant for all domains.
- Random effects, differencing a random intercept denoted as $u_{ij} \in N(0, 1)$ with σ being its variance parameter, and a vector of random regression coefficients $\mathbf{v}_k = (v_{1,k}, \dots, v_{p,k}) \in N_p(0, V_{vk})$, where:

$$V_{vk} = \text{var}(v_k) = \text{diag}(\phi_\ell^{-1}) V_{vk}^\phi \text{diag}(\phi_\ell^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

with

$$V_{vk}^\phi = \begin{pmatrix} \phi_1^2 & \phi_1 \phi_2 \rho_{12} & \dots & \phi_1 \phi_p \rho_{1p} \\ \phi_2 \phi_1 \rho_{12} & \phi_2^2 & \dots & \phi_2 \phi_p \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_p \phi_1 \rho_{1p} & \phi_p \phi_2 \rho_{2p} & \dots & \phi_p^2 \end{pmatrix}.$$

$\phi_\ell > 0$ being the standard deviation with $\ell \in \mathbb{P}$, and $\rho_{rs} \in (-1, 1)$, $r < s$, $r, s \in \mathbb{P}$ being the correlation parameter.

The resulting GLMM is formulated as follows:

$$\log \mu_{ij} = \log \nu_{ij} + \sum_{\ell=1}^p \beta_\ell x_{\ell,ij} + \sigma u_{ij} + \sum_{\ell=1}^p \phi_\ell v_{\ell,k(i)} x_{\ell,ij}, \quad i \in \mathbb{I}, j \in \mathbb{J}.$$

where $\mu_{ij} = E[y_{ij} | u_{ij}, v_{1,k(i)}, v_{p,k(i)}]$ and the y_{ij} values are independently conditioned on u and v .

Finally, since y_{ij} are counting variables,

$$y_{ij} | u_{ij}, v_{1,k(i)}, \dots, v_{p,k(i)} \sim \text{Poisson}(\nu_{ij} p_{ij}), \quad i \in \mathbb{I}, j \in \mathbb{J}.$$

with ν_{ij} being the size parameter or offset and p_{ij} the objective parameter.

Thus, the vector of unknown parameters is $\theta = (\boldsymbol{\beta}, \sigma, \phi, \rho)$. The estimation of the θ and the random effects modes are performed by the ML-Laplace approximation, using the statistical software implemented in the *glmer* function of the *lme4* package

of R, consolidated for the study in SAE. In this way, once the model was defined, the workflow carried out consisted of: a) the definition of the best predictors for the target rates; b) the definition of bootstrap estimators for the estimation of the root mean squared error (RMSE); and c) simulation studies to evaluate the performance of the predictors and the MSE estimators. Once the performance of the ARRCP model is assessed via simulations, the method is applied to the two proposed datasets.

Estimation of the poverty ratio

The Instituto Nacional de Estadística (INE) specifies that the poverty ratio is defined as the proportion of people whose equivalised disposable income is less than 60% of the national median equivalised disposable income. In Spain, INE provides precise estimates of the poverty ratio at Autonomous Community level through the Living Conditions Survey (LCS). However, the sample size of the LCS is not sufficient to obtain precise estimates at lower levels of aggregation.

We apply the ARRCP model to the estimation of the poverty ratio by province and sex in Spain. As auxiliary variables, we take variables related to age, employment status, citizenship and educational level, extracted from the Labour Force Survey. We define a random intercept for each domain, and two random slopes, associated to the variables of age and labour status, defined for both sexes in 5 groups of provinces, k , according to their socio-economic income level. In Figure 1, we plot the RMSE for each of the 104 target domains, ordered from smallest to largest sample size. Specifically, triangles represent the error with traditional estimators (DIR) and circles indicate the predictor we defined under our model (IN).

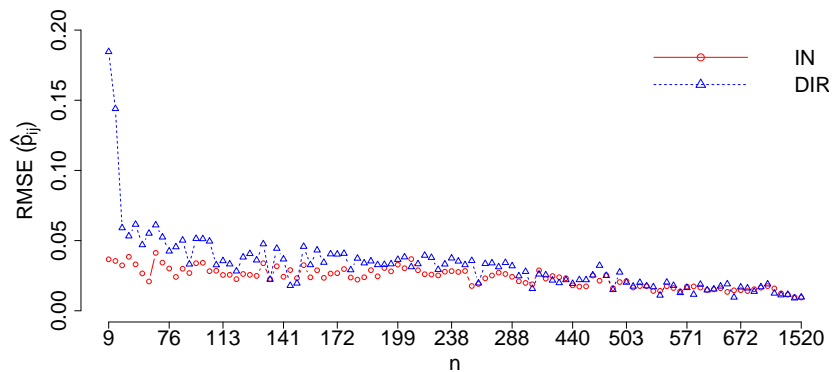


Figure 1: RMSE of poverty ratio estimates ordered by domain sample size [6]

It can be seen that the IN predictor performs better and has a smoother behaviour in terms of RMSE, especially at small sample sizes, compared to DIR, which performs poorly in this circumstance. Moreover, as the sample size increases the behaviour of both estimators becomes more similar as expected. Finally, the poverty

ratio estimates can be plotted on geographical maps, identifying possible patterns of inequality, both overall and by sex. In fact, we detect an increase in poverty ratios from north to south and from east to west. Looking at the differences by gender, it can be seen that the highest rates predominate among women [6].

Estimation of ICU occupancy rate

The second challenge of this research is the estimation and prediction of the ICU occupancy rate due to COVID-19 in each of the health areas of Castilla y León and Galicia, in a time range between 02-11-2020 and 06-03-2022. It should be noted that we created the database from scratch and made it open to the public [7].

Thus, we applied the ARRCP model, incorporating variables for levels of transmission, severity and COVID-19 care pressure, defining random effects at the intercept level for each health area and week, and a random slope associated with the care pressure variable for each health area. Beginning with the estimation, we evaluate the adjustment capacity between 02-11-2020 and 02-05-2021. After that, we also use the fitted model to predict into the future, giving predictions between 03-05-2021 and 06-03-2022. The results are plotted in Figure 2. The solid line represents the observed rate, the dotted line represents the estimated and predicted rate (left and right figures respectively) and the bands represent the estimated RMSE. The margins of error are wider in the prediction, which is consistent with the greater inherent uncertainty, but the results remain highly favorable.

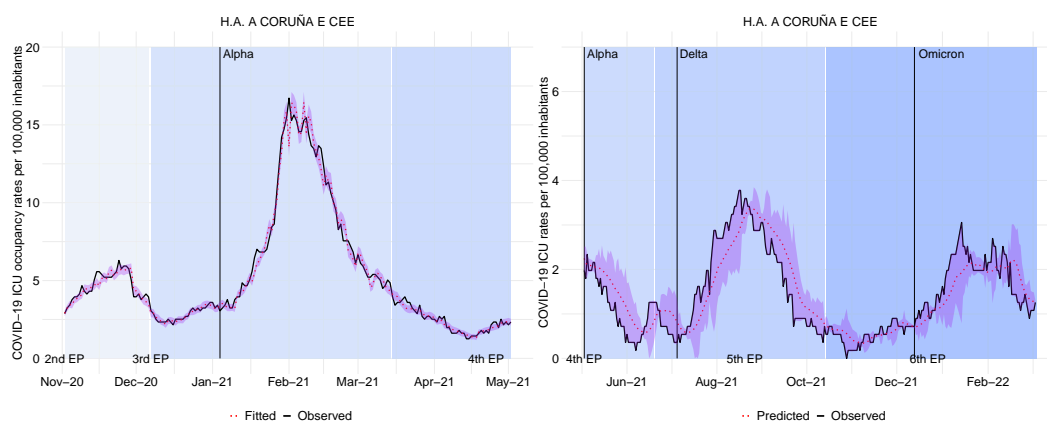


Figure 2: Estimation (left) and prediction (right) of COVID-19 ICU occupancy rate

In conclusion, evaluation the results over a wider time range illustrates the robust behaviour of the estimates and predictions in all types of high and low healthcare pressures scenarios, showing that this methodology can be used as a tool for healthcare resource management.

Acknowledgements

This research is part of the grant PID2020-113578RB-I00, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033/. It has also been supported by the Spanish grant PID2022-136878NB-I00, the Valencian grant Prometeo/2021/063, by the Xunta de Galicia (Grupos de Referencia Competitiva ED431C-2020/14) and by CITIC that is supported by Xunta de Galicia, convenio de colaboración entre la Consellería de Cultura, Educación, Formación Profesional e Universidades y las universidades gallegas para el refuerzo de los centros de investigación del Sistema Universitario de Galicia (CI-GUS). The first author was also sponsored by the Spanish Grant for Predoctoral Research Trainees RD 103/2019 being this work part of grant PRE2021-100857, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ and ESF+. In addition, we thank the Centro de Supercomputación de Galicia (CESGA) for providing their services.

References

- [1] Fay, R.E. and, Herriot, R.A. (1979). *Estimates of income for small places: an application of James-Stein procedures to census data*, Journal of the American Statistical Association, **74**(366a), pp. 269–277.
- [2] Morales, D., Esteban, M.D., Pérez, A. and Hobza, T. (2021). *A course on small area estimation and mixed models. Methods, theory and applications in R*, Springer.
- [3] Boubeta, M. (2017). *Poisson mixed models: applications to small area data*, Tesis doctoral, Universidade da Coruña.
- [4] Dempster, A.P., Rubin, D.B. and Tsutakawa, R.K. (1981). *Estimation in covariance components models*, Journal of the American Statistical Association, **76**(374), pp. 341–353.
- [5] Hobza, T. and Morales, D. (2013). *Small area estimation under random regression coefficient models*, Journal of Statistical Computation and Simulation, **83**, pp. 2160–2177.
- [6] Diz-Rosales, N., Lombardía, M.J. and Morales, D. (2024). *Poverty Mapping Under Area-Level Random Regression Coefficient Poisson Models*, Journal of Survey Statistics and Methodology, **12**(2), pp. 404–434.
- [7] Diz-Rosales, N., Lombardía, M.J. and Morales, D. (2024). *An statistical analysis of COVID-19 intensive care unit bed occupancy data*, arXiv, arXiv:2404.18493.
- [8] Diz-Rosales, N., Lombardía, M.J. and Morales, D. (2024). COVID-19 databases by health area and day in Spain, *GitHub: COVID19-DATA-SPAIN*. Available at: <https://github.com/NDiz-Rosales/COVID19-DATA-SPAIN.git>. (Accessed: April 2024).

Espacios simétricos y curvatura adaptada

Geometría y Topología

Mario Julián Rodríguez Sánchez de Toca

Universidade de Santiago de Compostela

2 de mayo de 2024

Nuestro objetivo es presentar una breve introducción a la geometría de Riemann, y más particularmente al estudio de las subvariedades de una variedad de Riemann, llegando a mostrar aquellas que se conocen como *de curvatura adaptada*.

En este sentido, partiremos de los conceptos básicos de la geometría de Riemann, para posteriormente centrarnos en subvariedades con un alto grado de simetría, las conocidas como subvariedades homogéneas, dentro de los espacios simétricos. Finalmente, introduciremos las subvariedades de curvatura adaptada, que poseen la propiedad adicional de tener bien adecuada su curvatura extrínseca a la curvatura intrínseca de la variedad ambiente.

Variedades de Riemann

Comenzaremos por recordar los conceptos elementales de variedad diferenciable y, más particularmente, de variedad de Riemann. El concepto de variedad diferenciable surge de generalizar la definición usual de superficies en \mathbb{R}^3 , mientras que las variedades de Riemann poseen una métrica, que generaliza lo que en superficies se conoce como la primera forma fundamental.

Una *variedad topológica* de dimensión n es un espacio topológico localmente euclidiano; es decir, para cualquier punto existe un entorno del mismo que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n . Una *variedad diferenciable* es una variedad topológica para la cual los cambios de coordenadas en las intersecciones de los abiertos tienen cambios de coordenadas diferenciables (en el sentido de que son funciones de clase \mathcal{C}^∞ entre abiertos de \mathbb{R}^n). Ejemplos de variedades diferenciables pueden ser las superficies dentro de \mathbb{R}^3 y los espacios euclidianos o proyectivos. Una *métrica de Riemann* sobre una variedad diferenciable M es un tensor $g: M \rightarrow T^*M \otimes T^*M$ de tipo $(0, 2)$ diferenciable, simétrico y definido positivo, dado por $p \in M \mapsto g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, siendo T_pM el espacio tangente (concepto extendido a dimensión n a partir del plano tangente a una superficie) a M en el punto p y $T^*M \otimes T^*M$ es fibrado cuya fibra tipo son las aplicaciones bilineales. Una variedad diferenciable dotada con una métrica de Riemann se conoce como *variedad de Riemann*. La métrica nos permite calcular, por ejemplo, distancias o ángulos en espacios no euclidianos.

PALABRAS CLAVE: variedad; homogénea; curvatura; cohomogeneidad.

En nuestro estudio de las subvariedades de curvatura adaptada, entrará en juego el concepto de geodésica. Recordemos que el camino más corto entre dos puntos en una superficie de \mathbb{R}^3 se consigue al desplazarnos por una curva geodésica que une estos dos puntos, del mismo modo que en un espacio euclidiano el camino más corto nos lo daría la línea recta que los une. Las geodésicas en variedades de Riemann generalizan precisamente las curvas geodésicas que tenemos en una superficie. Recordemos también que, en el caso de superficies, se puede construir una derivada covariante operando con vectores de distintos planos tangentes a la superficie ya que el espacio ambiente es \mathbb{R}^3 , pero esto no sucede en el caso de variedades de Riemann arbitrarias, dado que ya no estamos dentro de un espacio euclidiano ambiente donde operar. Es necesario introducir una *conexión*, una herramienta que permite, a partir de dos campos de vectores diferenciables X e Y , obtener un tercer campo de vectores diferenciable $\nabla_X Y$. Esto nos permite construir una derivada covariante en una variedad de Riemann, así como generalizar el transporte paralelo para campos de vectores. La definición de *geodésica* se extiende a variedades de Riemann arbitrarias como aquellas curvas que satisfagan $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0$; es decir, el campo de vectores velocidad de la curva se traslada paralelamente a lo largo de la curva.

Un resultado de gran relevancia en la geometría de Riemann es el teorema de Hopf-Rinow, que nos indica la relación entre la completitud geodésica de una variedad de Riemann (en el sentido de que toda geodésica se puede definir para cualquier $t \in \mathbb{R}$, es decir, podemos movernos sobre la misma sin detenernos por la presencia de bordes) y la completitud (en el sentido de Cauchy) de dicha variedad.

Teorema 1 (de Hopf-Rinow, [7, Teorema 6.13]). *Si M es una variedad de Riemann conexa, entonces M es completa si, y solo si, M es geodésicamente completa.*

Subvariedades homogéneas y espacios simétricos

El estudio de las simetrías de una variedad de Riemann es una forma de conocer las propiedades geométricas de tal variedad. Es natural entonces hacer este tipo de estudios en variedades con una gran cantidad de simetrías. Con el objetivo de introducir los espacios simétricos, comenzaremos por tratar con las subvariedades homogéneas, aquellas donde las propiedades son las mismas en cada punto.

Recordemos que un *grupo de Lie* es un grupo abstracto $(G, *)$, dotado de una estructura de variedad diferenciable para la cual tanto su aplicación producto $*$ como su aplicación inversión $(\cdot)^{-1}$ son diferenciables. Algunos ejemplos de grupos de Lie son los espacios euclidianos con la suma de vectores o el grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$ (de matrices invertibles) con el producto de matrices. Por otra parte, se define una *acción isométrica* de un grupo G sobre una variedad M como una aplicación diferenciable $\varphi: G \times M \rightarrow M$ tal que, para cualquier $p \in M$ y cualesquiera $g, h \in G$, se tiene que $\varphi(e, p) = p$ (con $e \in G$ el elemento neutro del grupo) y $\varphi(g, \varphi(h, p)) = \varphi(g * h, p)$, y además $g \in G$ es una isometría en M , en el sentido de que $g: M \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable que preserva la métrica de M . Dada una acción isométrica de un grupo G sobre una variedad M , definimos la *órbita* de

la acción por un punto $p \in M$ como el conjunto $G \cdot p = \{\varphi(g, p) \in M : g \in G\}$. Un ejemplo de acción isométrica podría ser la acción del grupo de rotaciones $SO(2)$ del plano sobre \mathbb{R}^2 , que tiene por órbitas el origen de \mathbb{R}^2 y las circunferencias con centro el origen.

Una *subvariedad homogénea* $P \subset M$ se define como aquella para la cual, dados dos puntos $p, q \in P$, existe una isometría, $f: M \rightarrow M$ que lleva p en q y es P -invariante; es decir, $f(P) \subset P$. Cuando tratamos con subvariedades cerradas esta definición se puede reformular en términos de órbitas de una acción isométrica, pudiendo considerarse una subvariedad homogénea como aquella para la cual existe un subgrupo de Lie H del grupo (que resulta ser grupo cerrado, véase [8]) de isometrías de M tal que $P = H \cdot p$, con $p \in P$.

Teniendo en cuenta esta definición alternativa de subvariedad homogénea, es natural tener interés en aquellas variedades de Riemann que tengan un gran número de isometrías. Los espacios simétricos precisamente tienen esta peculiaridad, ya que, cuanto menos, tienen una simetría por cada punto que los conforma. Definimos un *espacio simétrico* como una variedad de Riemann tal que en cada punto $p \in M$ existe una isometría $s_p: M \rightarrow M$ que satisface $s_p(p) = p$ (fija el punto p) y $d(s_p)_p = -\text{id}$ (refleja el espacio tangente). Una propiedad básica de los espacios simétricos es el hecho de que las isometrías s_p reflejan geodésicas, por lo que usualmente reciben el nombre de *reflexiones geodésicas*. Además, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. *Los espacios simétricos son completos. Además, el grupo de isometrías de un espacio simétrico actúa transitivamente¹ sobre el mismo, haciendo que sea un espacio homogéneo.*

Demostración:

La completitud se sigue del teorema de Hopf-Rinow (Teorema 1). Podemos definir localmente una geodésica γ en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Tomando un punto t_0 suficientemente cerca del extremo del intervalo y reflejando la geodésica por $\gamma(t_0)$, podemos extender el dominio de definición de γ a un intervalo más grande. Este proceso se puede repetir cuantas veces se quiera, siguiéndose la completitud geodésica del espacio simétrico, y en consecuencia la completitud métrica del mismo. De esta completitud geodésica se deduce que podemos unir cualesquiera dos puntos p y q de un espacio simétrico mediante una geodésica.

Si consideramos el punto medio entre p y q y la reflexión geodésica asociada a ese punto intermedio, resulta que ésta lleva p en q y viceversa, siguiéndose la homogeneidad del espacio. \square

Algunos ejemplos de espacios simétricos pueden ser los espacios euclidianos \mathbb{R}^n , las esferas \mathbb{S}^n o los espacios hiperbólicos reales $\mathbb{R}H^n$.

Un espacio simétrico M simplemente conexo se puede descomponer como producto cartesiano de $n+1$ espacios simétricos simplemente conexos, $M = M_0 \times M_1 \times \dots \times M_n$, donde M_0 es un factor euclidiano (isométrico a un espacio euclidiano) y los M_i son espacios simétricos que no son isométricos a un producto no trivial. Cada

¹Dados dos puntos cualesquiera del espacio, existe una isometría que lleva uno en otro.

uno de los M_i se conoce como un espacio simétrico *irreducible*. Dado un espacio simétrico irreducible, este puede ser de tres tipos diferentes: compacto, no compacto o euclidiano, según el espacio sea compacto, no compacto o \mathbb{R}^n sea su recubridor universal, respectivamente. Más generalmente, un espacio simétrico será irreducible (de tipo compacto, no compacto o euclidiano) si, y solo si, su recubrimiento universal es irreducible (de tipo compacto, no compacto o euclidiano) (véase [5]).

Un caso particular de acciones isométricas que nos serán de interés son aquellas cuyas órbitas de dimensión máxima sean hipersuperficies. Este tipo de acciones se conocen como *de cohomogeneidad uno*. En espacios simétricos, este tipo de acciones están completamente clasificadas tanto en espacios simétricos euclidianos [9] como en espacios simétricos de tipo compacto irreducibles [6]. En el caso no compacto, la clasificación sigue incompleta actualmente. Existen dos tipos de acciones de cohomogeneidad uno en estos espacios: aquellas para las cuales hay una única órbita que no es hipersuperficie (*órbita singular*), y aquellas en las que todas las órbitas son hipersuperficies, que se conocen como *foliaciones*. Las acciones de cohomogeneidad uno que inducen foliaciones están completamente clasificadas [2], así como aquellas que tienen una órbita singular totalmente geodésica² [3]. El caso de las acciones de cohomogeneidad uno con una órbita singular no totalmente geodésica sigue incompleto en la actualidad.

Curvatura adaptada

Dada una variedad de Riemann, nos interesa estudiar la forma en que esta se curva. En superficies en \mathbb{R}^3 se introduce la *curvatura de Gauss* con tal propósito. La curvatura de Gauss en cada punto puede ser positiva, negativa o nula. Cuando la curvatura de Gauss en un punto es positiva, localmente, la superficie queda a un mismo lado del plano tangente a la misma en el punto. Cuando es negativa, la superficie tiene puntos a ambos lados del plano tangente. En caso de tenerse curvatura de Gauss nula, o bien la superficie es localmente plana, o bien corta al plano tangente localmente en una curva. Los ejemplos clásicos de los distintos tipos de curvatura son la esfera (con curvatura de Gauss positiva en todo punto), los hiperboloides (con curvatura de Gauss negativa en todo punto), y los planos o cilindros (con curvatura de Gauss nula).

La forma de extender la noción de curvatura a variedades de Riemann arbitrarias se basa en la *aplicación exponencial*. Dados un punto $p \in M$ y un vector del espacio tangente $v \in T_pM$, podemos considerar la única geodésica $\gamma_{p,v}$ tal que $\gamma_{p,v}(0) = p$ y $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$ (pasa por p con velocidad v en tiempo 0). La aplicación exponencial en p se define como aquella aplicación que asocia a cada vector $v \in T_pM$ el punto por el que pasa $\gamma_{p,v}$ en tiempo 1; es decir, $\exp_p: T_pM \rightarrow M$ viene dada por $v \mapsto \gamma_{p,v}(1)$. Usando esta aplicación exponencial, podemos introducir la *curvatura seccional* de una variedad de Riemann M en un punto $p \in M$. Para ello, consideremos un subespacio Π de dimensión dos en el espacio tangente T_pM , y además sea \mathcal{V} un

²Toda geodésica de la subvariedad es geodésica en la variedad ambiente.

entorno del $0 \in T_p M$ en el que \exp_p es un difeomorfismo. Con estas dos elecciones, la *sección plana* determinada por Π será $S_\Pi = \exp_p(\Pi \cap \mathcal{V})$. Para las secciones planas, se puede calcular la curvatura de Gauss de la forma usual, con lo que definimos la *curvatura seccional* de M en p asociada a Π como la curvatura de Gauss de S_Π en p . Obsérvese que la curvatura seccional depende de la elección de Π .

Una vez introducido el concepto de curvatura seccional en variedades de Riemann, llega el momento de tratar con el punto principal de este texto, las *subvariedades de curvatura adaptada*. El concepto de subvariedad de curvatura adaptada pretende generalizar la noción de hipersuperficie con curvaturas principales constantes. Bajo la denominación de *amenable hypersurfaces*, D'Atri [4] introduce este tipo de hipersuperficies en la década de 1970, y la década de 1990 Berndt y Vanhecke profundizan más en su estudio y propiedades, generalizando la definición a subvariedades en general [1]. El adjetivo “adaptada” hace referencia a que las subvariedades de curvatura adaptada tienen bien adecuada su curvatura como subvariedades de una variedad ambiente (su curvatura extrínseca) a la curvatura (intrínseca o propia) de la variedad ambiente.

Sea M una subvariedad de Riemann de una variedad de Riemann \widetilde{M} , y sea ξ un vector normal a M en un punto $p \in M$ (esto es, ξ pertenece al complemento ortogonal $T_p^\perp M$ de $T_p M$ en $T_p \widetilde{M}$). Hay dos operadores que permiten medir tanto la curvatura intrínseca de \widetilde{M} como la curvatura extrínseca de M . El *operador forma* \mathcal{S}_ξ permite medir la curvatura extrínseca de M con respecto del vector ξ , mientras que el *operador de Jacobi*³ R_ξ permite medir la curvatura intrínseca de la variedad \widetilde{M} con respecto del vector ξ . Estos dos operadores tienen tres propiedades comunes que motivarán nuestra definición: ambos son operadores autoadjuntos, sus autovalores representan las curvaturas extremas respecto de ξ y sus autoespacios dan las direcciones en las que se tienen tales curvaturas extremas. Teniendo esto en cuenta y que dos operadores autoadjuntos diagonalizan simultáneamente si, y solo si, éstos conmutan entre sí, la definición de una subvariedad de curvatura adaptada natural que surge es la siguiente. Diremos que M es *de curvatura adaptada* a \widetilde{M} si $R_\xi(T_p M) \subset T_p M$ (dado que el operador forma está definido exclusivamente sobre $T_p M$ y no en todo $T_p \widetilde{M}$) y

$$R_\xi|_{T_p M} \circ \mathcal{S}_\xi = \mathcal{S}_\xi \circ R_\xi|_{T_p M}, \text{ para cualquier } \xi \in T_p^\perp M.$$

Por ejemplo, toda hipersuperficie de una variedad de Riemann con curvatura seccional constante (espacio forma) es una subvariedad de curvatura adaptada.

Un problema abierto en la actualidad es el de determinar las subvariedades de curvatura adaptada en espacios simétricos arbitrarios. A este respecto, un primer paso se da con el siguiente resultado.

Teorema 2 ([1, Corolario 1]). *Sea M una subvariedad en un espacio (localmente) simétrico \widetilde{M} . Entonces M es de curvatura adaptada a \widetilde{M} si, y solo si, todos los tubos en torno a M (suficientemente pequeños y al menos definidos localmente) son de curvatura adaptada a \widetilde{M} .*

³Las definiciones formales de estos operadores pueden encontrarse en [7].

En este resultado, el tubo de radio r en torno a M es el conjunto de puntos de \widetilde{M} a distancia r de M . El ejemplo usual de un tubo en torno a una variedad es el de un cilindro, que es un tubo en torno a la recta que conforma su eje.

Dado que los tubos suficientemente próximos a una subvariedad son hipersuperficies, podemos abordar el problema de determinar las subvariedades de curvatura adaptada estudiando esta propiedad en las órbitas de acciones de cohomogeneidad uno. Con este enfoque, hemos determinado las subvariedades de curvatura adaptada que son órbita de una foliación en espacios simétricos de tipo no compacto. La continuación natural de este trabajo será determinar qué órbitas de acciones de cohomogeneidad uno en espacios simétricos de tipo no compacto con una órbita singular son de curvatura adaptada.

Bibliografía

- [1] Berndt, J. y Vanhecke, L. (1992). *Curvature-adapted submanifolds*, *Nikonhai Math J.*, **3** (2), pp. 177-185.
- [2] Berndt, J. y Tamaru, H. (2003). *Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces*, *J. Differential Geom.*, **63** (1), pp. 1-40.
- [3] Berndt, J. y Tamaru, H. (2004). *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit*, *Tohoku Math. J.*, **56** (2), pp. 163-177.
- [4] D'Atri, J. E. (1979). *Certain isoparametric families of hypersurfaces in symmetric spaces*, *J. Differential Geom.*, **14** (1), pp. 21-40.
- [5] Helgason, S. (1978). *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic press.
- [6] Kollross, A. (2002). *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2), pp. 571-612.
- [7] Lee, J. M. (1997). *Introduction to Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer.
- [8] Myers, S. B. y Steenrod, N. E. (1939). *The group of isometries of a Riemannian manifold*, *Ann. of Math*, **40** (2), pp. 400-416.
- [9] Segre, B. (1937). *Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni*, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **27** (6), pp. 203-207.

Gestión de una planta fotovoltaica mediante la aplicación de control estocástico con restricciones sobre el estado

Matemática Aplicada

Iago Padín Domínguez

CITMAga - Universidade de Santiago de Compostela

15 de mayo de 2024

Introducción

La actual transición energética hacia energías más limpias promueve el uso de energías renovables y sistemas de almacenamiento energético. Sin embargo, la incertidumbre inherente a este tipo de recursos implica ciertas complicaciones a la hora de predecir su comportamiento. Así pues, tratar de controlar dicho carácter variable se ha convertido en un problema de especial atención en diversos ámbitos, como es el caso del mercado eléctrico.

En este resumen, se presenta una metodología que permite tanto controlar una planta de generación renovable con baterías en tiempo real, como fijar las ofertas óptimas que se deben hacer en las subastas de electricidad del mercado eléctrico para el día siguiente. En concreto, se pondrá el foco en la combinación de una planta fotovoltaica y una batería. En [2], se ha hecho lo propio para una planta eólica.

Para alcanzar los objetivos propuestos, se plantea un problema de control óptimo estocástico con restricciones sobre el estado y se hace uso del Principio de la Programación Dinámica y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para resolverlo. Además, aprovecharemos el hecho de que es posible reescribir el problema original como un problema de control óptimo determinista vía la ecuación de Fokker-Planck.

Problema de control óptimo estocástico

En primer lugar, se introduce cierta notación que nos permitirá modelar la planta fotovoltaica y la batería. Dado que se trabaja un marco estocástico, se introducen los siguientes procesos estocásticos para un instante de tiempo $s \in [0, T]$:

- Π_s es el precio de la electricidad en el instante s (€/MWh).
- \mathcal{E}_s es la energía contenida en la batería en el instante s (MWh).

PALABRAS CLAVE: Control estocástico; Energía renovable; Ecuación de Fokker-Planck; Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

- I_s es la irradiancia solar global horizontal en el instante s (W/m^2).
- X_s es el índice de día despejado en el instante de tiempo s (-). Se define como

$$X_s = \frac{I_s}{I_{DD}(s)},$$

donde $I_{DD}(s)$ es una fórmula empírica que proporciona la irradiancia de un día despejado, [1].

- $P_{bat,s}$ denota la potencia entregada por la batería en el instante de tiempo s (MW). Criterio de signo: $P_{bat,s}$ es positivo cuando se descarga la batería y, negativo en la carga. Este proceso es la variable de control del problema.
- $P_{solar,s}$ es la potencia producida por la planta fotovoltaica en el instante de tiempo s (MW). Se tiene que

$$P_{solar,s} = \hat{P}(I_s) = \hat{P}(X_s I_{DD}(s)),$$

donde $\hat{P}(I)$ es una función determinista que permite obtener la potencia producida en función de la irradiancia I_s .

- $P_{grid,s}$ es la potencia vendida (positiva) o comprada (negativa) a la red eléctrica en el instante de tiempo s (MW). Se verifica que

$$P_{grid,s} = P_{solar,s} + P_{bat,s} = \hat{P}(I_s) + P_{bat,s}.$$

Bajo estas definiciones, se introduce el problema de control óptimo estocástico:

- El estado es el proceso estocástico $\mathbf{X}_s^{0,\mathbf{x}}$ de dimensión 3 dado por

$$\mathbf{X}_s^{0,\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} X_s \\ \Pi_s \\ \mathcal{E}_s \end{pmatrix},$$

tal que verifica la ecuación diferencial estocástica

$$d\mathbf{X}_s^{0,\mathbf{x}} = \mathbf{b}(s, \mathbf{X}_s^{0,\mathbf{x}}, P_{bat,s})ds + \mathbf{\Sigma}(s, \mathbf{X}_s^{0,\mathbf{x}})d\mathbf{B}_s, \quad (1)$$

$$\mathbf{X}_0^{0,\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad s \in [0, T]. \quad (2)$$

En concreto, para los procesos estocásticos X_s y Π_s se considera un modelo estocástico similar a un modelo de reversión a la media, mientras que para \mathcal{E}_s se toma un modelo *bucket*. Bajo estas consideraciones, el sistema diferencial estocástico anterior, se reescribe como

$$dX_s = \kappa_X (\theta_X(s) - X_s) ds + \sigma_{X,X} X_s (1 - X_s) dB_{X,s} + \sigma_{X,\Pi} X_s dB_{\Pi,s},$$

$$d\Pi_s = \kappa_\Pi \left(\theta_\Pi(s) + \frac{1}{\kappa_\Pi} \frac{d\theta_\Pi}{ds}(s) - \Pi_s \right) ds + \sigma_{\Pi,X} \Pi_s dB_{X,s} + \sigma_{\Pi,\Pi} \Pi_s dB_{\Pi,s},$$

$$d\mathcal{E}_s = -P_{bat,s} ds + \sigma_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \mathcal{E}_s dB_{\mathcal{E},s},$$

$$X_0 = X^0, \quad \Pi_0 = \Pi^0, \quad \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}^0.$$

En este sistema, las funciones θ_X y θ_Π son dadas, así como los parámetros constantes κ_X , κ_Π y $\sigma_{i,j}$ con $i, j = X, \Pi, \mathcal{E}$.

- La función objetivo representa el beneficio esperado por la planta:

$$J(P_{bat,s}) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \Pi_s (\hat{P}(X_s I_{DD}(s)) + P_{bat,s}) ds + \beta \mathcal{E}_T \right],$$

donde β es el precio de la energía contenida en la batería en tiempo final.

- Se tiene la restricción sobre el control:

$$P_{bat,min} \leq P_{bat,s} \leq P_{bat,max}.$$

- Se tiene la restricción sobre el estado:

$$\mathcal{E}_{min} \leq \mathbb{E}[\mathcal{E}_s] \leq \mathcal{E}_{max}.$$

El problema de control óptimo estocástico que se desea tratar consiste en encontrar el control que maximice la función objetivo respetando las restricciones sobre el propio control y sobre el estado y verificando la ecuación de estado.

Para resolver dicho problema, se emplea el Principio de la Programación Dinámica, el cual permite determinar el control óptimo dividiendo el problema original en subproblemas más pequeños y resolviéndolos de manera recursiva. Además, este enfoque permite obtener *off-line* mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman una función determinista que proporciona el control óptimo en forma de *feedback*, es decir,

$$P_{bat,s} = \check{P}_{bat}(s, \mathbf{X}_s^{t,x}).$$

Así pues, esta función determinista permite conocer y aplicar el control óptimo en tiempo real s conociendo el valor del estado en ese instante. Dicho de otro modo, es posible controlar la planta fotovoltaica en tiempo real.

En el caso de las subastas de electricidad del mercado eléctrico para el día siguiente, se necesita el control a priori. Dado que la función $\check{P}_{bat}(s, \mathbf{X}_s^{t,x})$ se obtiene *off-line*, para fijar las ofertas óptimas en tales subastas resulta conveniente utilizar

$$P_{bat}(s) = \mathbb{E}[P_{bat,s}] = \int_{\mathbb{R}^3} \check{P}_{bat}(s, \mathbf{y}) \varphi(s, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

donde $\varphi(s, \mathbf{y})$ es la función densidad de probabilidad conjunta del vector de estados.

En resumen, hemos visto como el Principio de la Programación Dinámica permite abordar los dos objetivos que se han propuesto para gestionar una planta fotovoltaica con batería. Ahora bien, es necesario conocer la función densidad de probabilidad $\varphi(s, \mathbf{y})$, para lo cual necesitaremos la ecuación de Fokker-Planck.

Reformulación del problema vía la ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker-Planck, [3], es una ecuación en derivadas parciales lineal cuya solución es la función densidad de probabilidad conjunta, φ , del proceso estocástico vectorial $\mathbf{X}_s^{t,x}$ que satisface (1)-(2). En concreto, la ecuación de Fokker-Planck se escribe como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, \mathbf{y}) + \operatorname{div}(\mathbf{b}(s, \mathbf{y}, P_{bat,s})\varphi(s, \mathbf{y})) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}(s, \mathbf{y})\boldsymbol{\Sigma}^T(s, \mathbf{y})\varphi(s, \mathbf{y})) = 0, \quad (3)$$

$$\varphi(0, \mathbf{y}) = \varphi_0(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad s \in [0, T]. \quad (4)$$

Por otro lado, esta ecuación permite reformular el problema de control óptimo estocástico original como uno determinista. A continuación, se muestra como hacerlo:

- El estado del sistema es la función densidad de probabilidad $\varphi(s, \mathbf{y})$. En consecuencia la ecuación de estado es la ecuación de Fokker-Planck dada en (3)-(4).
- El control es la función determinista en forma de *feedback*, \check{P}_{bat} , tal que

$$\check{P}_{bat}(s, \mathbf{y}) \in U = [P_{bat,min}, P_{bat,max}], \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad s \in [0, T].$$

- La función objetivo se reescribe como

$$J(\check{P}_{bat}) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} y_2(\hat{P}(y_1 I_{DD}(s)) + \check{P}_{bat,s})\varphi(s, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \, ds + \int_{\mathbb{R}^3} \beta y_3 \varphi(T, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

- La restricción sobre el estado es

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{y} \varphi(s, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \in \mathcal{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\mathcal{E}_{min}, \mathcal{E}_{max}], \quad s \in [0, T].$$

Sistema de optimalidad y algoritmo de los multiplicadores

Para resolver el problema de control óptimo determinista al que se ha llegado, se introducen multiplicadores de Lagrange $v(s, \mathbf{y})$ y $\boldsymbol{\mu}(s)$ asociados a la ecuación de estado y a las restricciones sobre el estado, respectivamente. Tras llevar a cabo el desarrollo necesario, es posible ver que el sistema de optimalidad que se debe resolver es el siguiente:

1. La primer condición de optimalidad es la ecuación de estado, esto es, la ecuación de Fokker-Planck (3) - (4).

2. La segunda condición es la ecuación del estado adjunto, la cual se trata de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, [4], dada por

$$\frac{\partial v}{\partial s}(s, \mathbf{y}) + \max_{u \in U} \left\{ \mathbf{b}(s, \mathbf{y}, u) \cdot \text{grad} v(s, \mathbf{y}) + y_2(\hat{P}(y_1 I_{DD}(s)) + u) \right\} + \frac{1}{2} \Sigma(s, \mathbf{y}) \Sigma(s, \mathbf{y})^T \cdot \mathbf{grad} \text{grad} v(s, \mathbf{y}) - \boldsymbol{\mu}(s) \cdot \mathbf{y} = 0, \quad (5)$$

$$v(T, \mathbf{y}) = \beta y_3, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad s \in [0, T]. \quad (6)$$

Nótese que es una ecuación en derivadas parciales no lineal y retrógrada en tiempo.

3. La caracterización del multiplicador de Lagrange asociado a la restricción sobre el estado, $\boldsymbol{\mu}(s)$, es

$$\boldsymbol{\mu}(s) = \frac{(I - P_{\mathcal{A}})}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{y} \varphi(s, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \lambda \boldsymbol{\mu}(s) \right),$$

donde $P_{\mathcal{A}}$ respresenta la proyección sobre el conjunto \mathcal{A} y λ es cualquier número real positivo.

4. La cuarta condición de optimalidad es

$$\check{P}_{bat}(s, \mathbf{y}) = \text{argmax}_{u \in U} \{ \mathbf{b}(s, \mathbf{y}, u) \cdot \text{grad} v(s, \mathbf{y}) + f(s, \mathbf{y}, u) \}.$$

El sistema de optimalidad anterior está totalmente acoplado. Por este motivo, se propone el siguiente algoritmo iterativo al que denominaremos algoritmo de los multiplicadores:

- Para $k = 0$, el multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\mu}^0(s)$ está dado.
- Para $k > 0$, se conoce $\boldsymbol{\mu}^{k-1}(s)$.
 1. Se calculan v^k y \check{u}^k resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman dada en (5)-(6).
 2. Se calcula φ^k resolviendo la ecuación de Fokker-Planck dada por (3)-(4).
 3. Se actualiza el multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\mu}^k(s)$:

$$\boldsymbol{\mu}^k(s) = \boldsymbol{\mu}^{k-1}(s) + \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{y} \varphi^k(s, \mathbf{y}) d\mathbf{y} - \frac{1}{\lambda} P_{\mathcal{A}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{y} \varphi^k(s, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \lambda \boldsymbol{\mu}^{k-1}(s) \right).$$

Aplicación a un caso concreto

Se ha resuelto el problema aplicado a un caso concreto durante un periodo de $T = 24$ (h). La batería considerada tiene una capacidad mínima de $\mathcal{E}_{min} = 0$ (MWh) y máxima de $\mathcal{E}_{max} = 4$ (MWh). Además, las cotas para la potencia de carga y descarga de la batería son $P_{bat,min} = -1$ (MW) y $P_{bat,max} = 1$ (MW). A continuación, se muestran algunos resultados obtenidos fijando los demás parámetros y funciones involucrados en el problema con datos reales o bibliográficos.

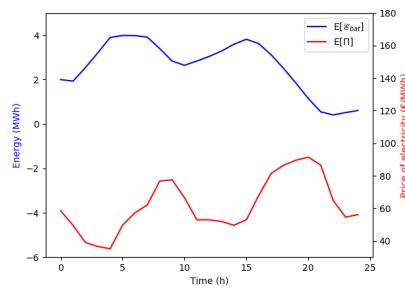


Figura 1: Esperanza de \mathcal{E}_s (arriba) y Π_s (abajo) a lo largo del tiempo.

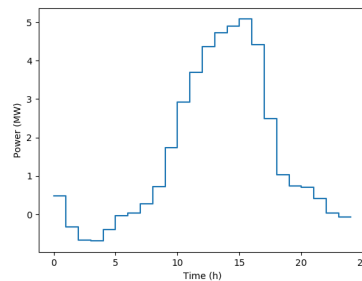


Figura 2: Potencia óptima ofrecida en la subasta de electricidad para el día siguiente (*capacity firming*).

En la Figura 1, se puede observar como la esperanza de \mathcal{E} verifica las restricciones sobre el estado que se han impuesto. Además, se tiene un buen comportamiento cualitativo ya que, cuando los precios aumentan, la batería tiende a vaciarse para obtener más beneficio. Por el contrario, cuando los precios bajan la tendencia de la batería es a llenarse.

Por su parte, en la Figura 2, se representa la potencia ofrecida en cada hora en la subasta del mercado eléctrico para el día siguiente. En este caso, cabe señalar que en algunos momentos del día se llega incluso a comprar energía de la red, coincidiendo con los instantes en los que el precio de la electricidad es más bajo.

Bibliografía

- [1] Badosa, J., Gobet, E., Grangereau, M., Kim, D. (2018). Day-Ahead Probabilistic Forecast of Solar Irradiance: A Stochastic Differential Equation Approach. In: Drobinski, P., Mougeot, M., Picard, D., Plougonven, R., Tankov, P. (eds) *Renewable Energy: Forecasting and Risk Management*. FRM 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 254. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99052-1_4
- [2] Bermúdez, A., Padín, I. *Stochastic control with state constraints via the Fokker-Planck equation. Application to renewable energy plants with batteries* Comptes Rendus. Mécanique, Volume 351 (2023) no. S1, pp. 89-110. doi : 10.5802/crmeca.236. <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mecanique/articles/10.5802/crmeca.236/>
- [3] R. Risken. (1996). *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, Springer, New York.
- [4] I. Smears. (2011). *Hamilton-Jacobi-Bellman equations: Analysis and Numerical Analysis*, Durham University.

Unha xornada de divulgación. “Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2023”

O xoves 23 de novembro de 2023 celebrouse a sétima edición das xornadas *Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2023* na Aula Magna da Facultade de Matemáticas. Ditas xornadas, promovidas pola Comisión de Normalización Lingüística da Facultade de Matemáticas e organizadas polo Comité do SII co apoio económico do Servizo de Normalización Lingüística, buscan a normalización do galego no ámbito da divulgación matemática. Tendo presente este obxectivo, as comunicacións orais pretenden amosar de maneira accesible e divulgativa algúns dos problemas ou aplicacións das matemáticas relacionados coa investigación levada a cabo na nosa facultade. Durante a xornada, tiveron lugar seis charlas de temática diversa e asociadas a diferentes ramas das matemáticas cuxos resumos se recollen a continuación:

- **“Sistemas dinámicos para explicar o noso mundo, e máis aló”**, por Begoña Nicolás Ávila.

Os sistemas dinámicos son sistemas que evolucionan no tempo. Se nos paramos a pensar, dámonos de conta de que temos moitísimos exemplos de sistemas dinámicos no noso mundo; físicos, biolóxicos, económicos... Dende o seu modelado matemático ata a súa análise e comprensión, debemos dar moitos pasos. Nesta charla centrarémonos en dar unha idea do que son, os tipos de sistemas que podemos atopar no noso mundo e tamén fóra del. Falaremos da mecánica celeste e da astrodinámica, onde os sistemas dinámicos nos axudan a entender e prever con precisión as órbitas e interaccións gravitacionais entre corpos celestes.

- **“Resolvendo ecuacións ao tic tac do reloxo”**, por Óscar Rivero Salgado.

O estudo dos polinomios e das ecuacións sobre os números enteiros sempre é complicado, pero unha das técnicas que a miúdo vén ao noso auxilio é a de reducir módulo un certo enteiro, xeralmente un primo. Na versión máis elemental, esta técnica permite demostrar que unha ecuación non ten solucións;

pero en aplicacións máis sutís, podemos considerar infinitos primos ao mesmo tempo (moitos reloxos!) e tirar conclusións menos triviais. Nesta xornada, faremos un percorrido polos diferentes usos destes particulares reloxos, que van desde a antigüidade ata problemas actuais de investigación, pasando por algúns dos resultados que obsesionaron aos matemáticos ao longo de moitos séculos.

- **“Mategami ”**, por Javier López Pedrares.

O origami é un tipo de arte milenario orixinado en Xapón. Consiste na formación de figuras mediante dobraduras de papel, sen cortes. Ao longo desta charla descubriremos algúns dos principios matemáticos que hai detrás desta técnica, así como algunhas aplicacións da mesma.

- **“Descifrando o mar ”**, por Marta Cousido Rocha.

A finalidade desta presentación é poñer de relevo a presenza das matemáticas e da estatística en áreas do coñecemento que non adoitamos asociar coa necesidade de ditas técnicas. En concreto, na charla abordarase a importancia do uso de técnicas matemáticas e estatísticas no eido da xestión e protección dos recursos pesqueiros. Para isto empregáranse, como exemplo ilustrativo, modelos de distribución de especies Bayesianos para a predición do comportamento espacial e temporal das especies, o cal permite identificar patróns espazo-temporais que proporcionan información relevante para a xestión da especie.

- **“Grupos, especies, e moitas cousas bonitas! ”**, por Tomás Otero Casal.

O dicionario da RAG define a simetría como a distribución regular das partes dunha cousa. Os Matemáticos, sempre dispostos a complicarnos a vida, a miúdo preferimos falar dela en termos de accións de grupos. Nesta charla veremos os grupos como transformacións dunha forma xeométrica e como as simetrías dun obxecto determinan a súa xeometría e viceversa.

- **“Buscando o punto óptimo da facultade ”**, por Sebastián Buedo Fernández e Daniel Cao Labora.

Ninguén discute que un obxectivo importante na vida consiste en tentarmos estar ben e, asemade, contribuírmos a que os demais o estean. Ademais dun benestar emocional ou material, tamén procuramos distintas condicións ambientais óptimas relativas a temperatura, luminosidade, humidade... Lamentablemente, estas últimas non se dan en todos os lugares, nin sequera na nosa benquerida Facultade. Aínda así, tal vez existan hipóteses suficientes para garantir que haxa algún punto onde si se dea este contexto óptimo. O obxectivo da nosa charla será amosar, co debido rigor matemático, a existencia de tal punto e dar unha aplicación real da solución matemática a este problema.

Agradecementos

O Comité Organizador do SII do curso académico 2023/2024 quere agradecer a colaboración de todas e cada unha das persoas que fan posible que este seminario goce de tan boa saúde e continúe a ser un referente dentro e fóra da nosa Universidade.

En primeiro lugar, gustaríanos agradecer o traballo do Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia, por facer posible que este seminario continúe a ser un altofalante para a mocidade investigadora galega. Grazas tamén a Facultade de Matemáticas por ter proporcionado un espazo para o desenvolvemento do SII ao longo de todos estes anos, e polo apoio e motivación na organización das xornadas “Matemáticas: habelas, hainas!”.

Por suposto, tamén debemos agradecer ás e aos relatores desta edición do seminario, sen os cales nada disto sería posible. Grazas a Sandro Caeiro Oliveira, Paula Cambeses Franco, Lois Omil Pazos, Isaac Carcacia Campos, Carmen Pavón Souto, Andrea Polo Rodríguez, Javier López Pedrares, Beatriz Piñeiro Lamas, Javier Polo Noche, Naomi Diz Rosales, Mario Julián Rodríguez Sánchez de Toca e Iago Padín Domínguez. Temos que agradecer tamén ao noso compañeiro Jose Ameijeiras Alonso pola elaboración do prefacio destas actas. Un ano máis, estendemos os nosos agradecementos ás e aos relatores das xornadas “Matemáticas: habelas, hainas!” Referímonos a Begoña Nicolás Ávila, Óscar Rivero Salgado, Javier López Pedrares, Marta Cousido Rocha, Tomás Otero Casal, Sebastián Buedo Fernández e Daniel Cao Labora. Tamén, a todas as entidades involucradas neste evento: o equipo decanal da Facultade de Matemáticas, o Servizo de Normalización Lingüística e a Comisión de Normalización Lingüística.

Rematamos pasando o testemuño ao novo comité organizador, agardando que este volva chegar á meta logo de animar ás novas xeracións a compartir as súas matemáticas e, por suposto, a descubrir as do veciño.

Santiago de Compostela, febreiro de 2025

O Comité Organizador do SII

