Tesis Doctoral

MODELIZACIÓN Y MATEMATIZACIÓN EN EL CONTEXTO DE TRES FENÓMENOS FÍSICOS

Jose Benito Búa Ares

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales

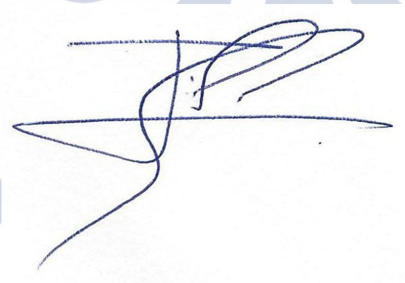
Programa de Doctorado de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática

Santiago de Compostela

2015

Tesis Doctoral

MODELIZACIÓN Y MATEMATIZACIÓN EN EL CONTEXTO DE TRES FENÓMENOS FÍSICOS



Fdo Jose Benito Búa Ares

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales
Programa de Doctorado de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática

Facultad de Ciencias de la Educación

Santiago de Compostela

2015

AUTORIZACIÓN DO DIRECTOR

Dna. Teresa Fernández Blanco

Profesora do Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais

Como Directora da Tese de Doutoramento titulada:

ñMODELIZACIÓN Y MATEMATIZACIÓN EN EL CONTEXTO DE TRES FENÓMENOS FÍSICOSò

Presentada por D. Jose Benito Búa Ares

Alumno do Programa de Doutoramento en Didáctica das Ciencias Experimentais e da Matemática

Autoriza a presentación da tese indicada, considerando que reúne os requisitos esixidos no artigo 34 do regulamento de Estudos de Doutoramento, e que como Director da mesma non incurre nas causas de abstención establecidas na lei 30/1992.

En Santiago de Compostela, a 11 de outubro de 2015

Asdo: Teresa Fernández Blanco

Modelización y matematización en el contexto de tres fenómenos físicos
Modelización e matematización no contexto de tres fenómenos físicos
Modelling and mathematization in the context of three physical phenomena

RESUMEN

El Real Decreto de reforma del sistema educativo español, aprobado en el año 2015, dedica el apartado del bloque de contenidos transversal *Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas,* a la modelización matemática y a la construcción de modelos matemáticos. Los múltiples factores involucrados en la modelización matemática hacen de esta actividad, en sí misma, un proceso complejo. La enseñanza-aprendizaje de la modelización matemática asume, al menos en parte, tal complejidad, pero se añade algunos elementos inherentes al entorno educativo en el que se desarrolla. Este trabajo presenta un estudio cualitativo de una propuesta para el aula basada en la modelización de tres fenómenos físicos. El análisis de resultados lleva a conclusiones sobre el proceso de construcción de modelos, la construcción del conocimiento matemático, en este caso centrado en parte del curriculum de funciones, y la necesidad de reflexión del profesor sobre su práctica docente.

Palabras clave: modelización, funciones, GeoGebra, fenómenos físicos, educación secundaria

RESUMO:

O Real Decreto de reforma do sistema educativo español, aprobado no ano 2015, adica o apartado do bloque de contidos transversal *Procesos, métodos e actitudes en Matemáticas*, á modelización matemática e á construción de modelos matemáticos. Os múltiples factores involucrados na modelización matemática fan desta actividade, en si mesma, un proceso complexo. O ensino-aprendizaxe da modelización matemática asume, polo menos en parte, tal complexidade, pero engáde algúns elementos inherentes á contorna educativa na que se desenvolve. Este traballo presenta un estudo cualitativo dunha proposta para a aula baseada na modelización de tres fenómenos físicos. A análise de resultados leva a conclusións sobre o proceso de construción de modelos, a construción do coñecemento matemático, neste caso centrado en parte do curriculum de funcións, e a necesidade de reflexión do profesor sobre a súa práctica docente.

Palabras chave: modelización, función, GeoGebra, fenómenos físicos, educación secundaria

ABSTRACT

The Spanish educational reform system, approved in 2015, includes a section related to mathematical modelling in the cross-contained block *Processes, methods and attitudes in mathematics*. The manifold factors involved in mathematical modelling render this activity a complex process. The learning-teaching of mathematics assumes, at least in part, such complexity, though adding some elements proper to a didactic environment. This paper presents a qualitative analysis of one propositions for the classroom based in modeling of three physical phenomena. The analysis of the results leds to conclusions, both from the point of view of the construction of mathematical knowledge, in this case focused on the content of the curricular block on functions, and from the process itself of drafting the models, as well as suggesting some reflections on our own teaching practice.

Keywords: modelling, functions, GeoGebra, physical phenomena, upper secondary school

AGRADECIMIENTOS

Realizar una tesis doctoral no es una tarea sencilla. Se trata de un proceso largo y laborioso en el que la ayuda y consejo de los especialistas y aquellos que te rodean es crucial.

Por ello, no se puede comprender esta memoria sin tener en cuenta la influencia y ayuda de las personas con las que me relacioné a partir de tomar la decisión de realizar los cursos de doctorado. Por desgracia, existe un enorme desconocimiento entre los profesores de Matemáticas de los Institutos de Enseñanza Secundaria de lo que es y puede aportar la Didáctica de la Matemática en su trabajo diario. Al matricularme en los cursos de doctorado ya había leído algunos libros y artículos de Didáctica de la Matemática, pero de una forma completamente anárquica, lo que no contribuía en forma alguna a comprender qué es y en qué consiste. La formación permanente del profesor de Enseñanza Secundaria de matemáticas no se fundamenta en que el profesor en activo adquiera conocimientos en Didáctica, sino que fija sus objetivos en otros fines que, al menos en mi caso, no contribuyeron ni contribuyen a mi formación como profesor de matemáticas. De esa forma, en aquellos momentos mis ideas sobre lo que pensaban y hacían los especialistas en Didáctica de la Matemática se alejaban mucho de la realidad. Una de las cosas que aprendí en los cursos de doctorado fue precisamente eso: qué es y cómo puede ayudar la Didáctica de la Matemática a un futuro profesor de matemáticas y a un profesor en activo.

Con tal motivo, mi primer agradecimiento es para los profesores del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la USC. Agradezco de forma especial las contribuciones y comentarios de Dña. Mª Jesús Salinas Portugal, profesora de la que aprendí cosas fundamentales sobre Didáctica durante los cursos de doctorado y también a posteriori.

Una vez que decidí presentar el proyecto de tesis, el protagonismo en mi formación recayó en el director de la tesis, D. José Antonio Cajaraville Pegito. Mi agradecimiento no se reduce únicamente al ámbito de lo profesional, sino que se extiende al ámbito de lo personal.

La posterior asunción de la responsabilidad de dirección de la tesis por Dña. Mª Teresa Fernández Blanco representó una decisión que agradezco profundamente. Soy consciente de lo que representa dirigir una tesis ya algo avanzada, por lo que el agradecimiento a Teresa es difícil de expresar en palabras. Los cambios que propuso en el esquema general de la tesis y su trabajo intenso en la presentación de comunicaciones a congresos y de artículos a revistas, representó para ella una inversión de tiempo y esfuerzos considerable. Su dedicación no se reduce a esos puntos, sino que va mucho más allá: por darme tiempo para aprender aquello que debía aprender sin presionarme, por estar siempre disponible para hablar y debatir, por no enfadarse conmigo cuando me enrocaba en una postura equivocada, etc.

Mi agradecimiento también para los integrantes del grupo de investigación de Didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM (GIDAM), que me ayudaron con sus consejos, comentarios y experiencia a tomar decisiones sobre cambios necesarios que me resultaba difícil adoptar. Describir sus contribuciones a esta tesis sería largo y no se limita solo a aspectos directamente relacionados con el tema central de la misma.

No puedo dejar de mencionar la contribución de otros profesores pertenecientes a la SEIEM y al grupo de trabajo *Applications and Modelling* del CERME 9, en una lista excesivamente larga como para mencionarlos a todos.

Mi agradecimiento especial a mis compañeros y amigos D. Flavio Piñeiro, D. Carlos Andión y D. Ricardo Artime que, al solicitarles su ayuda, no dudaron un instante en prestármela.

Sin la colaboración de mis alumnos de 1º de Bachillerato de los cursos 2010-2011 y 2011-2012 esta memoria no hubiese sido posible. Cuanto más sabiendo que en su decisión de participar influyó, en mayor o menor medida y como expresaron algunos de los alumnos participantes, el ñ*echar una mano*ò a su profesor de matemáticas.

Por último, mi agradecimiento para mi familia, a la que dedico este trabajo. Por apoyarme en todo momento y animarme, aún en los momentos en los que el cansancio y los bloqueos me llevaban al mal humor. Sin ellos, este trabajo no se hubiese realizado jamás. Ni siquiera hubiese comenzado.

A Edith, Antonio y José Luis

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN

La modelización matemática se puede describir, de forma muy resumida, como un proceso que transforma una situación o problema real en una situación o problema matemático. El proceso de modelización se representa mediante esquemas que especifican los pasos que conducen desde una situación o problema real hasta una solución matemática y real, identificada con un modelo. Tales esquemas, denominados ciclos de modelización, involucran procesos complejos, entre los que destaca la matematización de la realidad. Los múltiples factores involucrados en la modelización matemática hacen de esta actividad, en sí misma, un proceso complejo.

La enseñanza-aprendizaje de la modelización matemática asume, al menos en parte, tal complejidad, pero añade elementos inherentes al entorno educativo en el que se desarrolla., La modelización y su introducción en las aulas es un campo de estudio en Didáctica de la Matemática desde hace más de 30 años. En ese ámbito, los objetivos que se fijan para la enseñanza-aprendizaje de la modelización matemática, basados fundamentalmente en la finalidad que debe cumplir, determinan perspectivas diferentes sobre modelización. De esa forma, en el marco del nuevo Real Decreto (1105/2014), que toma como referencia la enseñanza por competencias de los informes PISA, la modelización se integra en el contexto educativo español con unos objetivos concretos.

Partiendo de que la modelización matemática en España no es frecuente en las aulas, en esta investigación se plantean situaciones susceptibles de ser sometidas a un proceso de modelización y que den lugar a modelos matemáticos que tomarán la forma de una función. Las situaciones a modelizar se corresponden con tres fenómenos físicos en los que intervienen dos variables, relacionadas entre sí mediante la expresión analítica de una función. La relación entre variables implica tanto lo real como lo matemático, de forma que involucra tanto los obstáculos y dificultades del concepto de función como los inherentes al proceso de modelización de las actividades concretas que se proponen. Por otro lado, las tres modelizaciones se plantean a los alumnos en un contexto educativo en el que las competencias PISA juegan un papel de gran importancia.

Los antecedentes y el marco teórico de la investigación se describirán en el Capítulo 1. Este capítulo se estructura basándose en tres puntos de interés: (1) El proceso de modelización y las perspectivas en modelización matemática; (2) Las competencias PISA, sus antecedentes y la modelización en PISA; y (3) Concepciones y obstáculos del concepto de función.

Las modelizaciones que se presentan en este estudio requieren que los alumnos generen los datos experimentalmente en el laboratorio y obtengan un modelo a partir de esos datos. Ese tipo de modelizaciones es poco frecuente en las investigaciones sobre modelización, por lo que se parte de una ausencia de referencias previas. Este hecho convierte en pertinente preguntarse si los alumnos son capaces de generar y obtener el modelo. Por otro lado, obtener un modelo no significa que se haya desarrollado adecuadamente el proceso de obtención del modelo. De ahí que los objetivos fundamentales de investigación se centren en comprobar si los alumnos son capaces de obtener un modelo matemático y si, en el proceso de obtención del modelo, consideran su complejidad y lo utilizan adecuadamente. El hecho de introducir la modelización matemática en la enseñanza, tiene, por otro lado, repercusiones sobre la actividad y toma de decisiones del profesor, lo que conlleva plantearse otro tipo de objetivos. Los objetivos fundamentales de la investigación, así como aquellos particulares relacionados con el profesor, junto con la metodología que ha guiado esta investigación se detallarán en el Capítulo 2.

Las tres actividades de modelización, llevadas a cabo con estudiantes de Matemáticas I de Primero de Bachillerato, se describen en el Capítulo 3. Ante la ausencia de experiencias previas de los alumnos en actividades de modelización matemática y la escasez de investigaciones sobre modelizaciones basadas en la obtención de datos experimentales, la investigación se plantea como un estudio exploratorio. En base a esa decisión, se formulan hipótesis de respuestas de los alumnos, basadas en sus conocimientos previos. Estas hipótesis de respuesta de los estudiantes se recogen también en este capítulo.

Para poder cumplir con los objetivos de investigación, cada una de las modelizaciones se divide en fases claramente diferenciadas. La primera fase consiste en la obtención de los datos experimentales. En la segunda fase, los alumnos usan los datos obtenidos previamente y un ordenador para obtener el modelo matemático. En la tercera fase, se plantean preguntas a los alumnos, centradas tanto en el proceso de modelización como en el modelo obtenido. Además, en una de las actividades, el modelo es modificado para poder ser aplicado a una situación real nueva, aunque relacionada con la situación original, que se corresponde con la cuarta fase. Así, las dos primeras fases se vinculan estrechamente a la obtención del modelo mientras que las dos restantes se vinculan a la comprobación de si los participantes asumen la complejidad del modelo y lo utilizan adecuadamente. Esa diferenciación en fases y su vinculación con los objetivos determina que el análisis de las respuestas de los alumnos se realice en dos capítulos independientes. Así, el Capítulo 4 se centra en el análisis de resultados de las dos primeras fases y el Capítulo 5 en el análisis de resultados de la tercera y cuarta fases.

Las respuestas de los alumnos a las preguntas directamente relacionadas con el proceso de obtención de los modelos y sobre los modelos obtenidos, así como las opiniones y valoraciones de estos, permiten obtener conclusiones en relación con los objetivos de investigación fijados. Ese conjunto de conclusiones se resumen en el Capítulo 6. En dicho capítulo también se establecen cuestiones que quedaron abiertas para futuras investigaciones.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES. MARCO TEÓRICO

En lo que sigue se tratarán aquellos temas relevantes para esta investigación, centrados en tres cuestiones claramente diferenciadas. En primer lugar, la problemática asociada a la modelización y su introducción en la enseñanza. En segundo, el contexto en el que se introduce la modelización en España. En tercer lugar, el concepto de función y sus concepciones y obstáculos.

1.1. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La modelización en la enseñanza es un campo de investigación relativamente joven, con una antigüedad de, aproximadamente, 30 años. En relación con la investigación sobre modelización en Europa, debemos hacer referencia a la ERME (European Society for Research in Mathematics Education), que organiza los congresos CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education). Los CERME incluyeron el grupo óApplications and modelingô entre los grupos de investigación a partir del CERME 4 (año 2005). En cuanto al ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), posee un grupo de estudio afiliado y dedicado específicamente a la modelización y aplicaciones (ICTMA, International Study Group for the Teaching of Mathematical Modelling and Applications,). El ICTMA organizó el primer congreso relevante sobre modelización en el año 1983 y desde entonces organiza congresos específicos bienales.

Por otro lado, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) concede importancia a la modelización integrada como parte de la resolución de problemas y los diferentes informes PISA (Programme for International Student Assessment) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, en adelante OCDE, consideran la modelización como parte del proceso de matematización de un problema matemático, incluyéndola por ejemplo en el informe del 2009 (OCDE, 2009) como una de las ocho capacidades que describe y analiza.

1.1.1. Las perspectivas en modelización matemática

El significado del término "modelización" en la enseñanza de las matemáticas está fuertemente ligada a la visión que se posea sobre la modelización matemática como parte de la actividad matemática. En los años 80, Kaiser (1986) distinguía dos posturas claramente diferenciadas al tratar el problema de la modelización. Por un lado, la “perspectiva pragmática”, cuyo máximo representante sería Pollak (1979, 1997a, 1997b, 2012), centrada en la habilidad para resolver problemas prácticos y con fines u objetivos pragmáticos o utilitaristas. Por otro lado, la “perspectiva científico-humanística”, cuyo mayor representante sería el primer Freudenthal (1973), más orientada hacia las matemáticas como una ciencia, a los ideales humanistas de la educación y enfocada hacia la capacidad de los alumnos para descubrir relaciones entre las matemáticas y la realidad.

Con el paso del tiempo esas dos perspectivas iniciales sobre la modelización se fueron ampliando o subdivididendo paulatinamente (Kaiser, 2005). Kaiser y Sriraman (2006) realizaron una descripción de la situación, siempre atendiendo a los objetivos de la modelización y buscando alcanzar una clasificación. Mediante un análisis de la literatura sobre modelización generada hasta ese momento, distinguían 5 perspectivas diferentes, a las que añadían una sexta que describían como “meta-perspectiva”:

- *Realista o modelización aplicada*: Objetivos pragmático-utilitaristas, es decir, resolver problemas del mundo real, comprender el mundo real y la promoción de competencias de modelación.
- *Modelización en contexto*: Objetivos relacionados con las matemáticas como objeto de estudio y la psicología, mediante la resolución de problemas enunciados textualmente
- *Modelo educacional:* Realizan una distinción entre:
    - Modelo didáctico: Objetivos centrados en la estructuración de los procesos de aprendizaje y su promoción.
    - Modelo conceptual: Objetivos centrados en la introducción y desarrollo de conceptos.
- *Modelo Socio-Crítico*: Objetivos pedagógicos como la comprensión crítica del mundo que nos rodea.
- *Epistemológico o modelización teórica*: Orientada a objetivos teóricos, es decir, a la promoción del desarrollo teórico
- *Meta-perspectiva:* Bajo dos objetivos de investigación diferenciados:
    - Análisis de procesos cognitivos que tienen lugar durante los procesos de modelación y comprensión de esos procesos.

- Metas psicológicas: Promoción de los procesos de pensamiento matemático mediante el uso de modelos como imágenes mentales o, incluso, imágenes físicas. Centrada en la modelización como proceso mental vinculado a la abstracción o generalización.

Entre las perspectivas mencionadas por Kaiser y Sriraman se encuentra, como se observa, la perspectiva realista o aplicada (*Realistic or applied modelling*), encaminada a la comprensión y solución de problemas del mundo real. En relación con ésta, nos encontramos con la pregunta de qué deben aprender los estudiantes para poder generar modelos matemáticos en el contexto de una situación nueva. La respuesta a esta pregunta es uno de los problemas que preocupan a la perspectiva *model-eliciting approach*. Esta perspectiva, aunque no se halla presente en la clasificación de Kaiser y Sriraman del año 2006, sí se menciona en la clasificación realizada en el CERME 5 (Kaiser, Sriraman, Blomhøj et al. 2007).

Otros investigadores se centran en los objetivos pedagógicos de la modelización, en la introducción de conceptos y nociones matemáticas nuevas mediante la modelización, en la modelización como forma de comprensión crítica del mundo que nos rodea o en el análisis de los procesos cognitivos que tienen lugar en el proceso de modelización.

Andresen (2007) sintetiza el significado de *modelización* para las diferentes perspectivas en dos visiones:

1) Modelización a un nivel funcional

2) Modelización a un nivel de formación de conceptos

La primera se corresponde con una visión en la que la modelización se plantea y desarrolla con el objetivo fundamental de obtener un modelo. Cumple, por tanto, una función centrada en la obtención de un resultado que represente una solución a una situación extramatemática. La segunda se centra en la formación de conceptos, nociones, etc. por medio de la modelización. Resulta evidente, tal y como afirma por ejemplo Blomhøj (2004), que esta distinción posee implicaciones didácticas.

En resumen, las perspectivas sobre modelización han ido aumentando en complejidad desde la primera distinción de dos perspectivas de Kaiser de los años 80. Así, se habla de modelización desde el uso de las nuevas tecnologías, de modelización centrada en actividades experimentales, de adquisición de competencias específicas en modelización, de modelización en el campo de la etnomatemática, etc., con un reflejo claro en las actas de los CERME e ICTMA. Todas y cada una de esas perspectivas pretende un fin determinado, de forma que el enfoque sobre la modelización se determina en función de esos fines. Dichos fines u objetivos se asocian a los fines de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Dicho de otro modo, la modelización se integra en una determinada opción didáctica.

Desde la historia del desarrollo histórico de las matemáticas, la modelización de un fenómeno o una situación no es extraña a la evolución de conceptos o nociones. Resulta fácil encontrar casos de modelizaciones en la Historia de las Matemáticas, que contribuyeron, de forma clara y en numerosas ocasiones, a su desarrollo y progreso. La vinculación de la modelización matemática al desarrollo de las matemáticas y, por tanto, al uso de la modelización como un medio para que surjan conceptos, nociones y definiciones matemáticas es compartida por muchos autores. Kaiser y Sriraman (2006) incluyen esta visión en la perspectiva epistemológica. Por ejemplo, para la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), representativa de la perspectiva epistemológica, gran parte de la actividad matemática es una actividad de modelización: ñgran parte de la actividad matemática puede identificarse (é) con una actividad de modelización matemáticaò (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 51).

La modelización, por tanto, no se limita a la matematización de problemas no matemáticos, que podríamos identificar o caracterizar como situaciones extramatemáticas. Así, la modelización intramatemática es considerada como un aspecto esencial e inseparable de las matemáticas, de la modelización extramatemática y de la integración del mundo intramatemático y extramatemático. Por supuesto, el significado preciso que concede la TAD a la actividad de modelización en la enseñanza, es una derivada de su modelo general de la actividad matemática (Bosch, García, Gascón et al., 2006). De esta forma y, desde esa perspectiva, la matematización y la modelización forman parte del desarrollo teórico, contribuyendo al proceso de creación de las matemáticas. De hecho, una idea central en la TAD es considerar que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial y, recíprocamente, todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial. Critican la forma usual de presentar y enseñar las matemáticas, bajo la influencia de lo que algunos autores denominan ôepistemología dominanteõ, como un conocimiento cerrado, construido a partir de una forma de estudiar las matemáticas inmersa en el euclidianismo (definición-especulación-teorema-prueba). La modelización no escapa a esta forma de presentar y estudiar las matemáticas (Barquero, Bosch y Gascón, 2005).

Esta perspectiva contrasta con la perspectiva realista o aplicada, que fija los objetivos de la modelización en la resolución de problemas auténticos y no para desarrollar una teoría matemática. La perspectiva realista o aplicada no comparte las ideas de la TAD y centra los objetivos de la modelización en que el alumno sea capaz de, a partir de una situación procedente del ômundo realõ, llevar a cabo un proceso de modelización. Ese proceso debe conducirle a un modelo útil para responder preguntas que suscita la situación real. Así, la atención se centra en el problema y su solución, de forma que un aspecto o finalidad fundamental es que el alumno ôaprendaõ a modelizar para poder obtener un resultado. Como consecuencia, las competencias en modelización y el uso de las matemáticas como útil que permite poner en práctica esas competencias, se convierten en objetivos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Lo mismo podríamos decir de las otras perspectivas descritas. Así, se puede afirmar que la perspectiva sobre la modelización se halla vinculada a un determinado marco teórico sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

1.1.2. El proceso de modelización y los primeros esquemas descriptivos

El término ômodelizaciónõ se refiere al proceso seguido para modelizar una situación problemática, normalmente procedente del mundo real, mientras que ômodeloõ se refiere al resultado o al producto de ese proceso, en forma de representación física, simbólica o abstracta. De esa forma, al tratar el tema de la modelización matemática, es común realizar una distinción entre ómodeloô y ómodelizaciónô, de la misma forma que se realiza la distinción entre óprocesoô y óproductoô. Además, para algunos autores, la matematización de un problema real no tiene porqué representar un proceso de modelización sino que la construcción de modelos matemáticos representa un proceso diferenciado y más complejo que la matematización de un problema real:

> Mientras que la matematización es el proceso que lleva un modelo real a las matemáticas, modelización o construcción de modelos significa todo el proceso que es necesario realizar para transformar un problema real original en contexto en un modelo real.
>
> (Blum y Niss, 1991, p. 39)

Dicho de otro modo, la matematización de la realidad es el proceso que permite pasar de un modelo real a las matemáticas. El proceso de modelización implica varios procesos, además del de matematización, por lo que su complejidad es mayor. Mientras que la modelización representa un conjunto formado por la situación real origen de la modelización, las entidades matemáticas puestas en juego en el proceso de modelización y las relaciones entre la situación real y las entidades matemáticas, la matematización se reduce al proceso de traslación de lo real a las matemáticas.

El proceso necesario en una modelización implica una conversión de la situación o problema real en problema matemático y su posterior resolución e interpretación como solución real. Para realizar la descripción del proceso se utilizan habitualmente esquemas. Dichos esquemas incluyen, por norma general, un proceso de validación de la solución real obtenida, lo que obliga en ocasiones a repetir el proceso. De esa forma, los esquemas son de tipo cíclico, por lo que son conocidos como ciclos de modelización. Los objetivos asignados a la modelización, que dan lugar a las diferentes perspectivas, determinan el número e importancia que se concede a los procesos del ciclo, lo que genera un gran número de ciclos de modelización diferentes.

Entre los elementos presentes en el ciclo se encuentra el mundo real. Blum y Niss (1991) describen el ómundo realô como el óresto del mundoô o mundo no matemático. Al hablar de las categorías en la resolución de problemas, distinguen solo dos tipos de problemas: resolución de problemas de las matemáticas puras y resolución de problemas de matemáticas aplicadas. Para estos autores, el proceso de resolución de un problema de matemática aplicada es el proceso que traslada al mundo matemático una situación del óresto del mundoô. Se parte de una situación procedente del mundo real que constituye una problema real. Éste debe ser simplificado, idealizado, estructurado y sometido a adaptaciones y asunciones para ser trasladado al mundo matemático. Todos esos procesos se hallan sometidos a los intereses del óresolutorô del problema. El proceso de construcción o generación del modelo lleva a un ómodelo realô. Ese modelo real se inserta en la situación original, de la que toma elementos propios, pero al que añade elementos con significado matemático. Es decir, el modelo real debe ser sometido a un proceso de matematización en el que se usan datos, conceptos, relaciones y condiciones de carácter propiamente matemático. El proceso de matematización da lugar a un ómodelo matemáticoô que integra œlementos básicosô de la situación original y objetos matemáticos. El modelo matemático también integra las relaciones entre los œlementos básicosô de la situación real original y los conceptos, nociones, etc. matemáticos. En un nuevo proceso, el ómodelo matemáticoô debe ser interpretado en relación con la situación original. Por último, se produce un proceso de validación para comprobar si el modelo obtenido cumple con las expectativas que justificaron su generación. Si no es así, el modelo debe ser modificado o incluso puede ser necesario repetir el proceso para construir un nuevo modelo.

A continuación, exponemos un esquema que describe los elementos fundamentales del ciclo propuesto por Blum y Niss (1991):

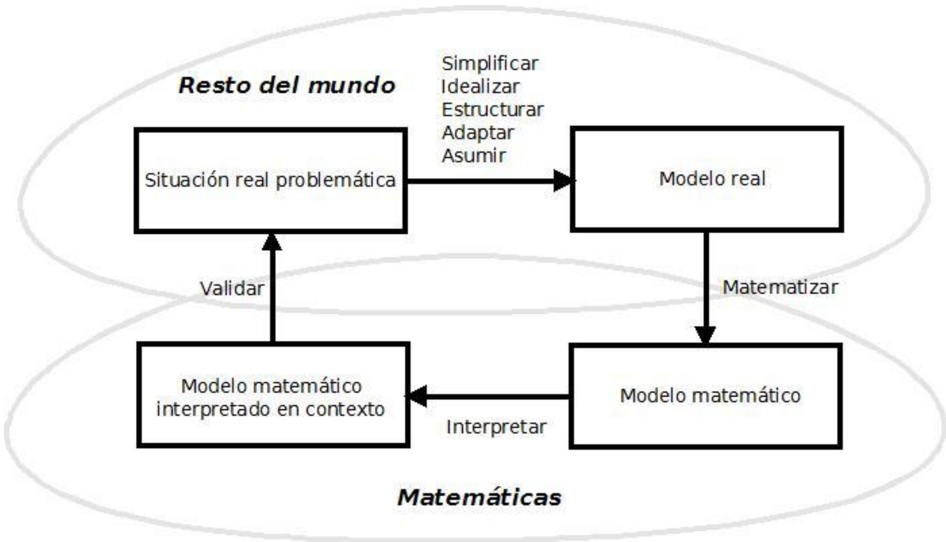


Figura 1. Ciclo de modelización de Blum y Niss

Uno de los elementos fundamentales presentes en el ciclo es el ómodelo matemáticoô. En base dicho esquema, Blum y Niss describen un modelo matemático como una tripleta que establece relaciones entre el mundo real y las matemáticas.

> Un modelo consiste en ciertos objetos matemáticos, correspondientes a "elementos básicos" de la situación original o del modelo real, y de ciertas relaciones entre estos objetos, que corresponden con relaciones entre los "elementos básicos ". Para ser un poco más precisos, un modelo matemático puede ser visto como un triple (S, M, R), consistente en una situación problemática real S, una colección de entidades matemáticas M y una relación R entre los objetos y relaciones de S y los objetos y las relaciones de M.
>
> (Blum y Niss, 1991, p. 39)

En general y de forma resumida, se puede afirmar que se asume que la modelización matemática centrada en situaciones o fenómenos provenientes de la realidad es ñ(é) el proceso que traslada el mundo real a las matemáticas en ambas direcciones.ò (Blum y Borromeo, 2009, p. 45).

La complejidad del proceso de modelización unido a la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, conlleva que existan diferencias sobre lo que la modelización puede y debe aportar en el ámbito de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, lo que da lugar a las perspectivas sobre modelización ya citadas. Esas diferencias influyen en la forma de definir qué es una modelización, qué procesos tienen lugar y qué fines pretende alcanzar. Schmidt (2010, p. 2067), por ejemplo, apunta que la definición depende de los objetivos que se le atribuyen a la modelización:

> Modelización matemática en general se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos. Al mismo tiempo, la definición exacta varía en función de los objetivos, qué modelo en el proceso de modelado se está utilizando y la naturaleza del contexto asignado a la tarea de modelización.

Cada perspectiva o aproximación a la modelización, intenta describir el proceso de modelización en pasos, cuya presencia e importancia se ve influenciada por las finalidades u objetivos asignados a la modelización en el marco más general de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En todos los casos, como ilustra la descripción que hemos realizado del esquema de Blum y Niss (1991), los procesos (que varían en número) se ordenan de forma que el ciclo se estructura en pasos fuertemente ligados entre sí. Aunque los pasos son sucesivos, las relaciones entre los mismos llevan o pueden llevar a retomar pasos anteriores, con lo que el proceso adopta un comportamiento complejo.

Galbraith y (1990, p. 139) hace referencia al esquema conocido como óOpen University seven-box diagramô, desarrollado por la Open University del Reino Unido en 1978, como primera referencia a un ciclo de modelización (Figura 2). En dicho diagrama, algo que se repite en los esquemas posteriores, se indican las conexiones entre los *mundos* presentes y las conexiones entre los diferentes pasos.

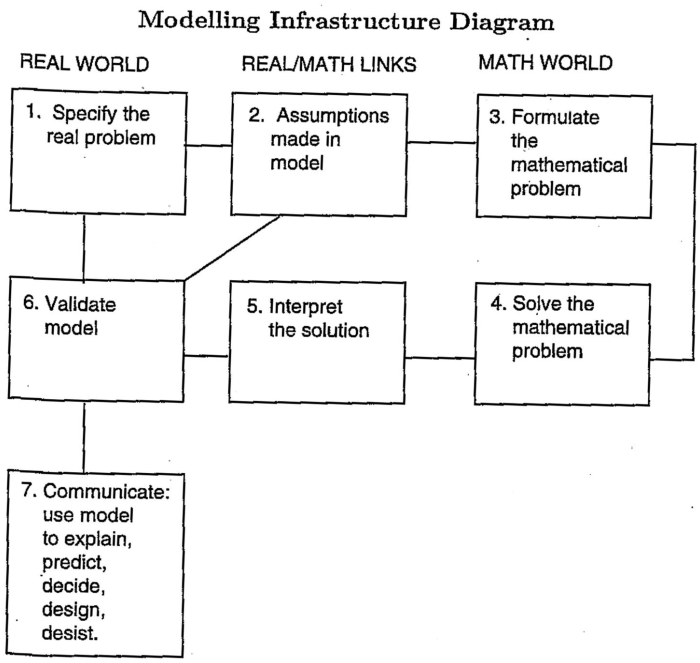


Figura 2. Ciclo de modelización de la Open University

Como se observa, como ocurre en el ciclo de Blum y Niss del año 1991, aparecen mencionados el mundo real, el matemático y una zona intermedia en la que se establecen relaciones entre ambos ómundosô.

Henry Pollak es uno de los investigadores que se ocupó de la modelización a finales de los setenta y que ha tenido gran influencia en la investigación posterior. De hecho, sus ideas son la base de la perspectiva pragmática (que se ha descrito anteriormente como óRealista o modelización aplicadaô).

Pollak (1979, p. 233) realizó un esquema descriptivo del ciclo de modelización:

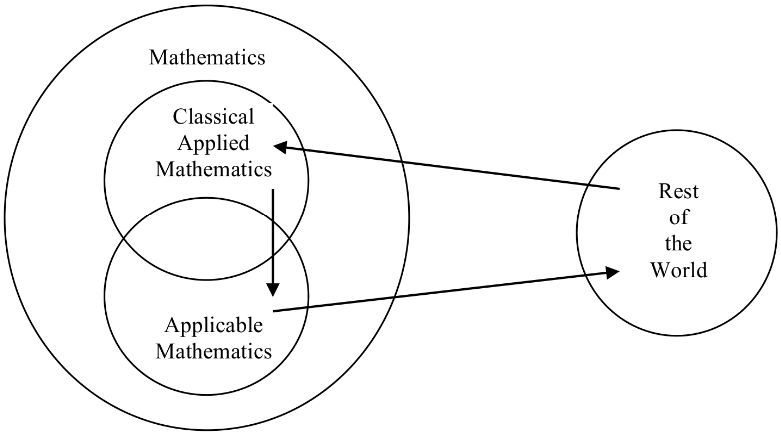


Figura 3. Ciclo de modelización de Pollak

Como en el caso de Blum y Niss, Pollak distingue entre el mundo de las matemáticas y el óResto del mundoô. El esquema establece relaciones entre esos dos elementos básicos, utilizando como justificación que es algo que hacen habitualmente los matemáticos:

> Los matemáticos tienen el hábito de dividir el Universo en dos partes: las matemáticas y todo lo demás, esto es, el resto del mundo, a veces denominado ñel mundo realò. La gente tiende a menudo a ver los dos como independientes entre sí - nada podría estar más lejos de la verdad. Cuando utilizas las matemáticas para comprender una situación del mundo real, y entonces tal vez lo utilizas para tomar medidas o incluso para predecir el futuro, tanto la situación del mundo real como las matemáticas resultantes se toman en serio.
>
> (Pollak, 2012, p. viii)

Los puntos en común con los ciclos ya descritos (Figura 1, Figura 2 y Figura 3) son evidentes, pero también se observan algunas diferencias de importancia. Dentro de las matemáticas, Pollak distingue entre aplicaciones clásicas y matemáticas que pueden ser aplicadas. Define las aplicaciones clásicas (Pollak, 1979, p. 233) como ñ(é) las ramas clásicas de análisis, incluyendo cálculo, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ecuaciones integrales, la teoría de funciones, así como un número de áreas relacionadas.ò Además, caracteriza las matemáticas aplicables como aquellas que pueden tener una aplicación práctica significativa. En su esquema representa ambos tipos de aplicaciones separadas pero con un área de intersección entre ambas. El resto del mundo incluye ñtodas las demás disciplinas del quehacer humano, así como la vida cotidianaò (p. 234). Esta diferenciación le lleva a considerar dos tipos de aplicaciones: las que surgen en el mundo real a través de una situación en un campo diferente a las matemáticas o en la vida real, y las que la gente utiliza realmente en su vida diaria.

La importancia concedida a la aplicabilidad de las matemáticas en el esquema de Pollak nos remite a la óperspectiva pragmáticaô mencionada por de Kaiser (1986) en su clasificación.

La influencia de las ideas de Pollak ha sido considerable desde los mismos inicios de la investigación sobre modelización en Didáctica de la Matemática. Es común que los grupos de investigación en los congresos de Didáctica de la Matemática dedicados a la modelización se denominen ñModelización y aplicacionesò. Pero inicialmente no era así. En el primer congreso del ICTMA, en el año 1983, los investigadores británicos, que comenzaban a introducir cursos de modelización en estudios politécnicos universitarios (Figura 2), tuvieron un mayor protagonismo. El congreso recibió el nombre de "International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling". La conferencia inaugural corrió a cargo de Henry Pollak y originó un debate acerca de la modelización durante el congreso y en los congresos posteriores. El debate que propició Pollak derivó en la inclusión de las *aplicaciones* en la denominación de los grupos dedicados a la modelización.

Con el paso del tiempo se introdujeron las diferenciaciones entre matematización y modelización, entre modelo y modelización y entre modelización y aplicaciones. Además, por ejemplo, se introdujeron nuevas palabras que intentaban clarificar los elementos de la tripleta presentes en el proceso de modelización (mundo real-relaciones-mundo matemático). Por ejemplo, Niss, Blum y Galbraith (2007) sostienen que la aplicación de las matemáticas siempre ocurre cuando son aplicadas en algún campo del mundo extra-matemático, con lo que las menciones a lo extra-matemático y lo intra-matemático son habituales en modelización. Los mismos autores sostienen que la vinculación entre modelización, modelo y aplicación es evidente, aunque indican que la modelización incide en el paso de la realidad a las matemáticas mientras que la aplicación incide en el paso de las matemáticas a la realidad. Además, indican que la modelización se centra en los procesos desarrollados mientras que la aplicación lo hace en los objetos (particularmente las partes del mundo real accesibles a un tratamiento matemático). Añaden que al aplicar las matemáticas siempre, de forma explícita o implícita, se halla presente un modelo matemático. De esa forma, el modelo matemático surge tanto en la aplicación de las matemáticas en un contexto real (o extra-matemático) como en la modelización matemática.

Como consecuencia de todas esas diferencias, en ocasiones aparecen mencionados en los esquemas descriptivos el mundo real, en otros el resto del mundo y en otros el mundo extra-matemático como forma de describir el mundo del que surge el problema. Además, la diferenciación entre modelización y aplicación conlleva que unos esquemas incidan en los procesos que tienen lugar durante la modelización y otros en los objetos reales y su tratamiento matemático.

En las sucesivas conferencias y congresos fue ampliándose el debate a la formas de introducir la modelización en todos los niveles educativos y se fueron incorporando investigadores de diferentes países: Alemania (ICTMA 3), Dinamarca (ICTMA 4), Holanda (ICTMA 5), etc. Se aumentaron también los temas de debate, muchos de ellos todavía motivo de investigación. Por ejemplo, las competencias necesarias en modelización representan actualmente un campo de investigación en modelización y representó un tema central de debate en el ICTMA 4 (año 1991). En resumen, la complejidad del estudio de la modelización y las aplicaciones en la enseñanza de las matemáticas ha ido en aumento desde la primera conferencia del ICTMA. En este largo camino surgieron las diferentes perspectivas, que ya se han mencionado.

De la complejidad y abundancia de ideas acerca de la modelización se deriva una gran abundancia de esquemas descriptivos de los elementos y procesos que tienen lugar durante la modelización. Se podría afirmar que cada investigador posee un ciclo *ideal* de modelización en el que explicita qué elementos son fundamentales, qué relaciones se establecen entre esos elementos y qué procesos considera más importantes. Los ciclos de modelización describen los elementos presentes en el ciclo -que siempre incluirán, aunque el nombre no coincida exactamente, el mundo real, el mundo matemático y las relaciones entre ambos- que constituyen la tripleta (S,M,R) de Blum y Niss que mencionamos anteriormente.

1.2. Los pasos del ciclo de modelización

El proceso de generación de un modelo matemático se realiza al aplicar las matemáticas en una situación perteneciente al óResto del mundoô (o el mundo extra-matemático). El proceso, de gran complejidad, suele dividirse en pasos, que varían en número, aunque se mantiene la presencia de los elementos fundamentales. A continuación, reproducimos la descripción de Pollak (2012) del proceso de modelización que conduce a la obtención de un modelo matemático:

> Un modelo matemático, como hemos visto, comienza con una situación en el mundo real que queremos comprender. (p. ix)
>
> (é) el proceso de "interacción" entre las matemáticas y el mundo real es el mismo: la situación real por lo general tiene tantas facetas que no se puede tener todo en cuenta, por lo que debes decidir qué aspectos son más importantes y mantenerlos. En este punto, tienes una versión idealizada de la situación del mundo real, que luego se puede traducir en términos matemáticos. ¿Qué tienes ahora? Un modelo matemático de la cuestión idealizada. A continuación, puedes aplicar tus intuiciones y conocimientos matemáticos al modelo, y obtener ideas interesantes, ejemplos, aproximaciones, teoremas y algoritmos. Vuelves a traducir todo esto de nuevo a la situación del mundo real, y esperas tener una teoría para la pregunta idealizada. Pero tienes que realizar comprobaciones: ¿son los resultados prácticos, las respuestas razonables, las consecuencias aceptables? Si es así, ¡excelente! Si no, debes echar otro vistazo a las opciones que tomaste al principio, y volver a intentarlo. Todo este proceso es lo que se llama modelización matemática. (p. viii)

Se parte de una situación del mundo real que debe ser trasladada a términos matemáticos, con lo que se obtiene un primer modelo matemático procedente de la situación real idealizada. Este primer modelo es usado matemáticamente y modificado para retornar a la situación real y obtener un modelo matemático adaptado a la situación real original. Entonces es puesto a prueba en el contexto real. Si el modelo proporciona respuestas a la situación real original, el proceso ha terminado. Si no es así, se reproduce el proceso a partir de lo ya obtenido, con lo que adopta un comportamiento cíclico. El proceso descrito por Pollak es común representarlo en un esquema descriptivo (Figura1) y es denominado ciclo de modelización. Como describe Pollak, el ciclo se divide en varios procesos necesarios para llevarlo a cabo, que suelen denominarse *pasos* (steps). Cada paso conduce a un óproductoô o elemento nuevo que se ve modificado a su vez mediante un nuevo paso, obteniendo un producto como consecuencia del proceso. Las diferentes perspectivas asociadas a la modelización y las aplicaciones inciden en mayor medida en determinados pasos y productos, con lo que existe un gran número de ciclos de modelización. Incluiremos a continuación aquellos que nos parecen más relevantes.

Kaiser (1995) describe un ciclo de modelización con muchos puntos en común con el ciclo de Blum y Niss (Figura 1):

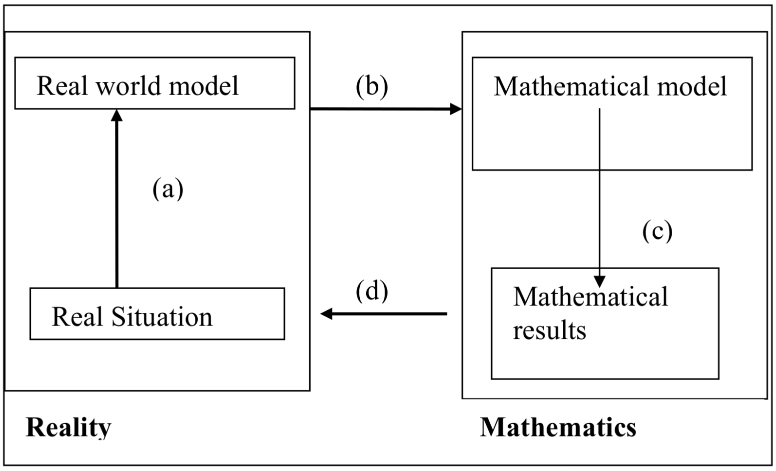


Figura 4. Ciclo de modelización de Kaiser (1995, p. 68)

Kaiser distingue dos mundos: óRealidadô y óMatemáticasö. Los procesos que conducen al planteamiento de un modelo contextualizado dentro del mundo real y a un modelo matemático y resultados matemáticos, que pueden ser interpretados en el marco de la situación real original, son los siguientes:

a) Idealizar, estructurar, simplificar.
b) Matematizar, trasladar al lenguaje de las matemáticas.
c) Trabajo matemático, operar.
d) Interpretar y validar.

La diferencia fundamental entre el esquema propuesto por Blum y Niss y el ciclo de Kaiser es que Kaiser sustituye el ómodelo en contextoô de Blum y Niss por unos ñresultados matemáticosò producto del trabajo matemático y de operar. De esa forma, Blum y Niss pasan, mediante una interpretación, del modelo matemático al modelo en contexto, mientras que Kaiser pasa del modelo matemático a unos resultados matemáticos. Esa sustitución del ómodelo en contextoô por óresultados matemáticosô trae como consecuencia un cambio importante en los procesos que se producen a partir de la obtención de un modelo matemático: Blum y Niss validan el modelo en contexto, mientras que Kaiser interpreta y valida los resultados matemáticos en la situación original.

Unos años más tarde, Blum y Leiss (2007) confeccionan el ciclo más citado al hablar de ciclos de modelización (Figura 5). Dicho esquema procede de una descripción anterior de un ciclo (Blum y Leiss, 2005), en el seno del proyecto DISUM (Didaktische Interventionsformen für einen Selbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht in Mathematik), sobre el que realizaron pequeñas modificaciones.

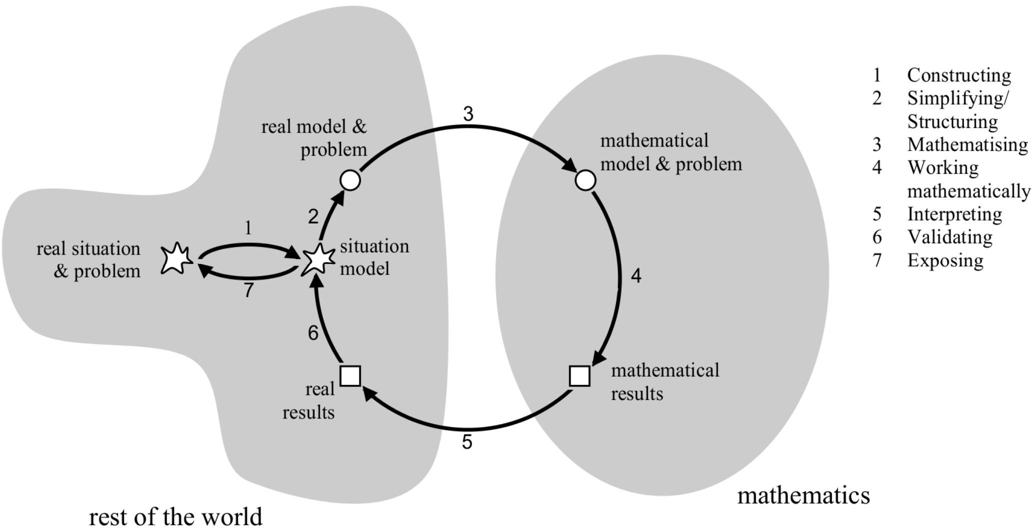


Figura 5. Ciclo de Blum y Leiss

En dicho esquema y, como ya hacían los ciclos precedentes, la modelización se sitúa en dos ámbitos diferentes: las ómatemáticasô y el óresto del mundoô.

Los cuatro procesos o pasos del ciclo de Kaiser (1995) se transforman en 7. Se parte de una situación o problema real ï *Real situation & problem*- susceptible de ser planteada como un situación a modelizar ï *Situation model*- que requiere para ello de un proceso de construcción -1 *Construction*-. La transformación de la situación a modelizar en un modelo y problema real precisa de una simplificación y estructuración -2 *Simplificación/Estructuración*-. La transformación de ese modelo o problema *real* en un problema matemático, que tomará la forma de un modelo matemático, se realiza mediante un proceso de matematización -3 *Matematización*-, pasando en ese punto a trabajar en el seno de la matemática o el mundo matemático. El resultado matemático (modelo matemático) obtenido mediante el paso 4 (*Trabajo matemático*) permite disponer de una respuesta al problema matemático, que debe ser interpretado -5 *Interpretación*- en el contexto original ï retornando de esa forma al óResto del Mundoô- para poder disponer de un resultado órealô. Por último, se inserta y contrasta el modelo obtenido con la situación y problema original, permitiendo dar respuesta a la cuestión o problema original (6 Validación y 7 Exposición) mediante un modelo órealô. Tanto la validación del modelo como su presentación pueden dar lugar a nuevas preguntas acerca del modelo obtenido, con lo que el proceso puede volver a ponerse en marcha. Los resultados, en forma de modelo, son ómatemáticosô y órealesô y ambos se hallan fuertemente conectados entre sí por los procesos descritos en el ciclo.

El ciclo de Blum y Leiss es más complejo y completo que el precedente de Kaiser e incide aún más en los aspectos cognitivos implícitos en la actividad de modelización. Así, la diferencia fundamental con el esquema de Pollak estriba en que en el esquema de Blum y Leiss la atención se centra en los procesos cognitivos, mientras que en el de Pollak se centra en la aplicabilidad. El hecho de conceder especial importancia a los procesos cognitivos que tienen lugar durante el proceso de modelización, ha dado lugar a estudios sobre cómo se desarrollan y explicitan esos procesos (mediante representaciones, descripciones textuales, etc.). La investigación al respecto ha arrojado varias conclusiones de gran importancia. Destacamos las siguientes:

- Los ciclos de modelización no se desarrollan de forma completa ni en el orden de los pasos que se indican en los esquemas. Como consecuencia los ciclos de modelización existentes (con mención especial al ciclo de Blum y Leiss) deben ser entendidos como "ciclos ideales" (Borromeo, 2006; Blum y Borromeo, 2009; Blum, 2011).

- Existen diferencias entre el ciclo de modelización que pone en práctica un investigador, un profesor y un alumno, con lo que se pueden desarrollar ciclos apropiados para investigadores, profesores y alumnos (Blum, 2007; Blum y Borromeo, 2009; Blum, 2011).

- Los alumnos no establecen conexiones entre los elementos presentes en el ciclo de la misma forma. Por tanto, es posible establecer esquemas individuales que describen cómo un alumno establece las conexiones entre los elementos del ciclo en una actividad concreta de modelización (Borromeo, 2004, 2007a, 2007b; Doerr, 2007; Galbraith y Stillman, 2001; Carreira y Baioa, 2011, 2015). Esas rutas de modelización o *modelling routes* (Borromeo, 2007a, 2007b; Doerr, 2007; Galbraith and Stillman, 2001; Carreira y Baioa, 2011) se hallan relacionadas con un determinado estilo de pensamiento que, por ejemplo, lleva a los alumnos a preferir el trabajo en el seno de las matemáticas o en el seno de la realidad. Los estilos de pensamiento, o *thinking styles* (Borromeo, 2004; Borromeo, 2007a; Borromeo y Blum, 2010), influyen en cómo desarrolla la actividad el alumno y, por tanto, en los resultados desde el punto de vista de la enseñanza-aprendizaje. El profesor posee su propio estilo de pensamiento que, a su vez, influye en el tipo de modelización que plantea y en los objetivos que fija para la modelización.

- La constatación de las rutas y estilos de pensamiento individuales lleva inevitablemente la conclusión de que la modelización matemática es una actividad abierta y poco predecible en su desarrollo, tanto para alumnos como para profesores (Blum y Niss, 1991; Blum y Borromeo, 2009; Blum, 2011). La apertura y falta de predecibilidad influye en las actitudes y creencias del profesor ante la modelización y lo lleva ante una toma de decisiones compleja. De esa forma el profesor debe buscar un equilibrio entre la modelización guiada por el profesor y la actividad autónoma del alumno durante el proceso (Lesh y Doerr, 2003; Blum y Borromeo, 2009).

Como se observa, se ha incidido en las dificultades de los alumnos en los procesos de modelización y la diferencia de ciclos apropiados para investigadores, profesores y alumnos. De hecho, Blum desarrolló un ciclo apropiado para alumnos en el mismo proyecto DISUM del que surgió el ciclo de Blum y Leiss (Figura 5). Reproducimos dicho ciclo, también en su versión traducida al inglés (Figuras 6 y 7; Blum y Borromeo, 2009, p. 54). Los puntos en común con el ciclo de Kaiser (Figura 4) son evidentes.

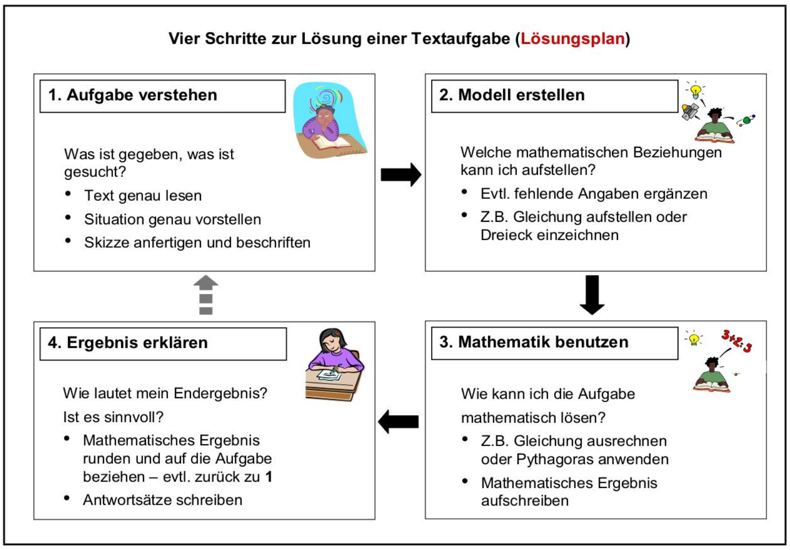


Figura 6. Ciclo apropiado para estudiantes (Blum, 2007, p. 21)

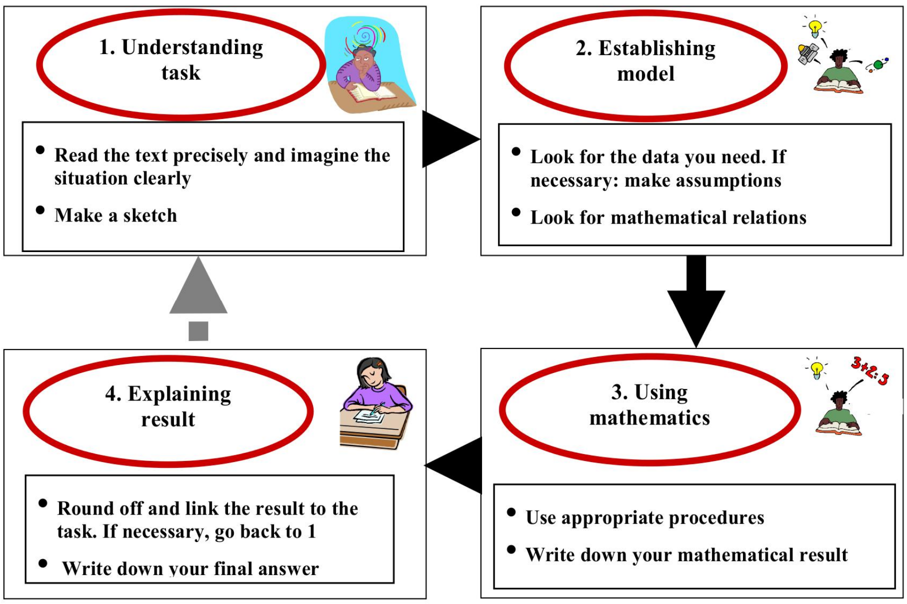


Figura 7. Ciclo apropiado para estudiantes (traducción al inglés de la Figura 6)

1.3. LAS COMPETENCIAS EN LA MODELIZACIÓN

Los cuatro puntos que se han destacado son, actualmente, motivo de investigación y debate al hablar de la modelización en la enseñanza pero no son, en modo alguno, los únicos. La modelización implica la puesta en acción de ócompetenciasô generales y específicas (Blum y Niss, 1991; Maaß, 2006; Blomhøj y Jensen, 2007), lo que conlleva determinar qué competencias son necesarias en una actividad de modelización, cuáles de ellas son generales y cuáles son específicas del proceso de modelización.

En relación directa con lo anterior, las competencias en modelización pueden considerarse competencias propias de los procesos de matematización. La matematización puede identificarse con el proceso que conlleva la resolución de un problema procedente de una situación del mundo real (como en el caso de las competencias PISA, de las que se hablará más adelante). También como una forma de pasar de la realidad a las matemáticas formales, como en el caso de la Realistic Mathematics Education, RME (Gravemeijer, 1999, Gravemeijer , 2007; Gravemeijer y Stephan, 2002). O considerar que la modelización puede ser usada como vehículo que permite el desarrollo de conceptos matemáticos, con lo que es preciso enseñar y aprender a modelizar en la enseñanza de las matemáticas como se sostiene desde la perspectiva Models and Modelling, MMP (Lesh y Doerr, 2003; Lesh y Lehrer, 2003; Lesh y Sriraman, 2005; Ärlebäck, Doerr y OďNeil, 2013). En el caso concreto de la RME y la MMP, ambas posturas pueden resultar compatibles, como intenta demostrar Carreira y Baioa (Carreira y Baioa, 2011, 2015) y afirma Niss (2012).

Si se incluye el uso de herramientas tecnológicas en la modelización, serán necesarias una serie de competencias y destrezas diferentes de si no se hace. Además, conllevará un ciclo de modelización específico que deberá incluir la herramienta o mundo tecnológico entre los elementos presentes. Destacamos como representativo de los ciclos que incluyen el *mundo tecnológico* el ciclo de Siller y Greefrath (2010, p. 2137 (Figura 8) y que los autores definen, por añadir el mundo tecnológico a los mundos real y matemático, como un ciclo extendido. Los pasos del ciclo de Blum y Leiss (Figura 5) se integran en el esquema, de forma que, por ejemplo, el resultado obtenido por medio del uso del ordenador debe ser interpretado (paso 5, Interpreting) como un resultado matemático que es validado en un proceso que lleva del mundo matemático al real.

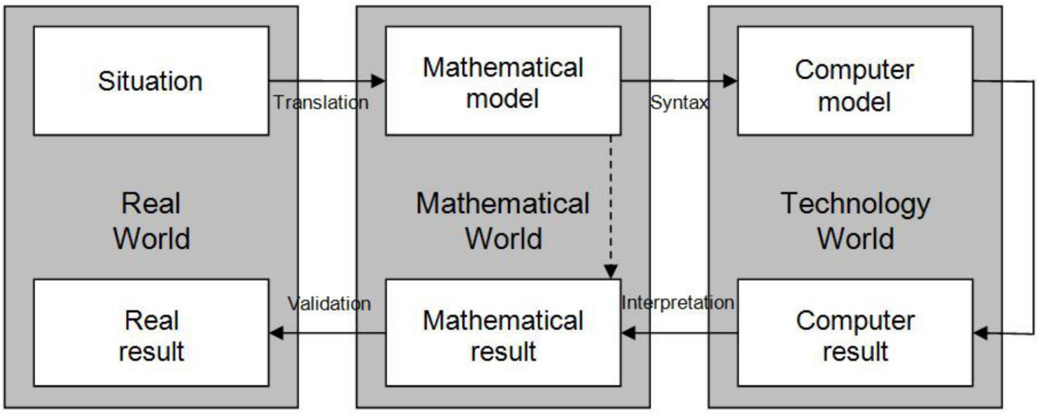


Figura 8. Ciclo de Siller y Greefrath que incluye el mundo tecnológico

Greefrath (2011, p. 301) afirma que:

> La solución a problemas de modelización usando herramientas digitales requiere que tengan lugar dos procesos importantes. En primer lugar, la situación real del problema debe ser comprendida y trasladada al lenguaje matemático. Este traslado conlleva, dependiendo del ciclo de modelización usado, diferentes pasos, por ejemplo, comprender la tarea, simplificar y matematizar.

Además, sostiene que las herramientas tecnológicas pueden resultar útiles en cualquiera de los pasos del ciclo de modelización: ñlas herramientas digitales pueden ser útiles en cualquier paso del ciclo de modelizaciónò (p. 304). Con tal motivo, la integración de la tecnología en el proceso de modelización conlleva un ciclo de modelización específico en el que se incluye el uso de herramientas tecnológicas y el mundo tecnológico que se observa en el ciclo de la figura 8.

La introducción del uso de herramientas tecnológicas en la modelización conlleva que tome protagonismo el uso y la forma en que el profesor usa la herramienta informática o tecnológica (Drijvers, 2003; Drivers y Trouche, 2008; Doorman, Boon et al., 2009; Drijvers, Doorman et al., 2010).

Qué opción tomará el profesor y qué ruta de modelización seguirá el alumno, dependerá en parte de las actitudes y creencias sobre modelización de profesores y alumnos. Por tanto, las creencias y actitudes ante la modelización, influyen en la manera en que se presenta y desarrolla una actividad de modelización (Kaiser, 2006). De esa forma, las actitudes y creencias sobre modelización se convierten en elemento importante de cara a su introducción (Blum y Niss, 1991). Sobre la importancia de la influencia de las creencias y actitudes del profesor, se propone como ejemplo el proyecto LEMA (Learning and Education in and through Modelling and Applications; años 2006-2009; http://www.lema-project.org/). LEMA se centraba en la introducción de la modelización en la enseñanza. El proyecto tenía entre sus principales actividades la generación de materiales para uso del profesor y la realización de cursos de formación. Se realizó un análisis de las necesidades de 563 profesores de los países participantes a través de sus creencias sobre las matemáticas, las tareas matemáticas que usaban y sus opiniones sobre las actividades de modelización.

Si se realiza una actividad de modelización en la que los datos son obtenidos de forma experimental por los alumnos, la experimentación jugará un gran papel en la actividad matemática vinculada al proceso de modelización (Halverscheid, 2008; Alsina, 2002, 2007; Carreira y Baioa, 2011, 2015). Las destrezas, competencias y actitud ante la actividad de profesor y alumno serán distintas de las necesarias si proporcionamos los datos en el texto suministrado al alumno en el que se plantea la actividad.

La experimentación de lo real lleva a la construcción de modelos matemáticos que dan respuesta a las preguntas que surgen de la experimentación precedente. Así, el proceso de modelización y la construcción de modelos matemáticos se integra con otras ciencias y abre el campo a considerar la modelización matemática como una parte de un estudio interdisciplinar. De esta forma, las matemáticas y la modelización matemática puede constituir una parte fundamental de proyectos de investigación multidisciplinares, mediante la enseñanza-aprendizaje basada en actividades Inquiry Based Learning (IBL; aprendizaje por investigación). Un ejemplo notable de esta tendencia y de la integración de las matemáticas y las ciencias en actividades presentadas como actividades IBL, es el proyecto internacional europeo PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics And Science Education Across Europe; años 2010-2013; http://www.primas-project.eu). El proyecto desarrolló actividades IBL y actividades de formación para profesores, muchas de ellas vinculadas a la generación de modelos.

Al mismo tiempo, se proponen actividades de modelización matemática o de construcción de modelos integradas en proyectos STEM (Science-Technology-

Engineering-Mathematics). Ese tipo de proyectos o actividades son potenciados desde la UE y desde el portal de educación Schoolnet de la UE (http://www.eun.org), que menciona los proyectos STEM como uno de los ejes de la enseñanza en Europa.

1.4. LOS ESTILOS DE PENSAMIENTO, LA RME Y LA MMP

Como ya se ha mencionado, Borromeo (Borromeo, 2004*;* Borromeo, 2007a; Borromeo y Blum, 2010) establece unos estilos de pensamiento que influyen en cómo se plantea y desarrolla una actividad de modelización. Caracteriza un estilo de pensamiento como la forma en que un individuo prefiere presentar, comprender y pensar hechos y conexiones matemáticas, usando para ello representaciones imaginarias internas y/o representaciones externas.

En el caso de los alumnos, determina tres estilos de pensamiento claramente diferenciados (Borromeo y Blum, 2010, p. 424): visual, analítico e integrado.

El *estilo visual* se caracteriza por el uso de representaciones pictóricas imaginarias internas y representaciones pictóricas externas y por una preferencia por la comprensión de los hechos y conexiones matemáticas mediante representaciones. Las representaciones internas se hallan poderosamente influenciadas por las situaciones experimentadas.

El *estilo analítico* se caracteriza por el uso de representaciones formales imaginarias internas y representaciones formales externas. Tiene preferencia por comprender los hechos matemáticos mediante representaciones verbales o simbólicas existentes y expresa sus ideas formalmente.

El *estilo integrado* combina los dos estilos precedentes.

Evidentemente, los estilos de pensamiento determinan la ruta de modelización, de forma que el proceso se centra en mayor medida en uno de los dos mundos (Resto del mundo o mundo de las matemáticas) y se concede mayor importancia a unos pasos del proceso de modelización frente a otros.

Como se deduce de lo anteriormente dicho, desde la perspectiva cognitiva -a la que pertenecen fundamentalmente los investigadores de habla alemana- los estilos de pensamiento y las rutas de modelización se hayan íntimamente unidos.

1.4.1. La modelización en la Realistic Mathematics Education (RME)

Freudenthal consideraba las matemáticas como una actividad humana conectada a la realidad (Freudenthal, 1977, 1991). En el ámbito de la RME, el término ŕealidadô no debe ser entendido como sinónimo de realidad física, sino que la realidad incluye también la realidad proporcionada por la imaginación. De esta forma, la realidad en la RME no se reduce a la asociada al mundo real sino que incluye también lo que llamaremos una realidad mental. Así, al hablar de la actividad matemática conectada a la realidad, la realidad incluye tanto la realidad física (o realidad asociada al mundo real) como la realidad de los símbolos. En dicha realidad, hablar de matemáticas es hablar de matematización hasta el punto que Freudenthal afirma que no hay matemáticas sin matematización (Freudenthal, 1973, p. 134): ñNo hay matemáticas sin matematización, en particular, no hay axiomática sin axiomatización, y no hay formalismo sin formalización.ò

De esa forma, aprender matemáticas representa que el alumno debe aprender a matematizar, aprender axiomas conlleva aprender a axiomatizar y aprender matemáticas formales, a formalizar.

El elemento central, como indica Freudenthal, se encuentra en el proceso de matematización de la realidad (entendida la órealidadô desde su significado en el seno de la RME). Dentro del proceso de matematización, Trefers (1978, 1987) distingue dos tipos: horizontal y vertical. La matematización horizontal surge a partir de una situación procedente del mundo real, que es trasladada al mundo de los símbolos. La matematización vertical se produce en el mundo de los símbolos. La matematización vertical y horizontal es asumida posteriormente en el seno de la RME (Freudenthal, 1991). De esa forma, en un problema o actividad matemática se produce una matematización progresiva que permite al alumno una matematización cada vez más profunda.

Centrados en la modelización y construcción de modelos, el esquema se reproduce. Partiendo de una situación real, se produce una matematización progresiva que da lugar a modelos óemergentesô (Gravemeijer, 1994) informales y formales. Los modelos informales se corresponden con ómodelos deô y los formales con ómodelos paraô (Gravemeijer, 1994; Treffers y Goffree, 1985; Treffers, 1987; Van der Heuvel-Panhuiven, 1995, 2002). En palabras de Gravemeier (2007, p. 139):

> La denominación emergente se refiere tanto al carácter del proceso por el cual los modelos emergen dentro de la RME, como al proceso por el cual estos modelos soportan la emergencia de las formas de conocimiento matemático formal. De acuerdo con el diseño heurístico del modelamiento emergente, el modelo primero se manifiesta como un *modelo de* las estrategias informales de un estudiante específico. Luego con el tiempo el modelo gradualmente va tomando vida por sí mismo, hasta convertirse en una entidad por propio derecho y comienza a servir como *modelo para* un razonamiento matemático más formal, todavía personalmente significativo.

Así, los ómodelos deô surgen de la matematización horizontal y los ómodelos paraô contestan preguntas que han ido surgiendo del proceso de matematización progresiva de forma natural. Así, la matematización horizontal se centra en ordenar y esquematizar la situación presentada para construir un ómodelo deô la realidad. En la modelización vertical se produce una matematización progresiva que ha partido de una situación en un contexto concreto, pero que se ha transformado en un modelo que puede ser aplicado a otras situaciones (Streefland, 1985; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Treffers, 1991). Así, se trata de un ómodelo paraô resolver problemas en otros contextos o situaciones. El proceso origina modelos emergentes cada vez más sofisticados, que pueden caracterizarse como pertenecientes a cuatro niveles de la actividad matemática del alumno: *Situacional, Referencial, General* y *Formal* (Gravemeier, 1994).

En el nivel óSituacionalô, la actividad de los estudiantes comienza con una situación concreta planteada en contexto. La actividad de los alumnos en la situación específica lleva a plantear la necesidad de un modelo, encuadrado en la situación original, con lo que el modelo posee un significado matemático en relación o referencia a la situación planteada originalmente. Nos encontramos en el nivel óReferencialô de la actividad matemática de los alumnos (ómodelo deô). Gradualmente y, con la ayuda del profesor, los estudiantes utilizan estrategias y establecen relaciones matemáticas relacionadas con el modelo en construcción. En este nivel óGeneralô, el modelo comienza a convertirse en un ómodelo paraô. En este nivel, se pasa de una actividad centrada en la situación concreta a una actividad centrada en el razonamiento, el establecimiento de relaciones, la identificación de objetos matemáticos que han surgido en el proceso, etc. Por último, los alumnos entran en una actividad matemática formal (nivel óFormalô) en la que la situación original deja paso a un razonamiento matemático formal en el sentido de proporcionar al estudiante un conocimiento matemático nuevo, trasladable o adaptable a otras situaciones y contextos. El modelo deja de ser un ómodelo paraô una situación concreta o real (en el sentido de la RME) para convertirse en un ómodelo deô una realidad matemática. Esto representa una nueva realidad matemática para el alumno, que se materializa en un nuevo lenguaje matemático (definiciones, nociones, conceptos, notaciones, etc.) y en algoritmos nuevos.

El profesor deberá decidir qué tipo de situación es conveniente plantear y cómo debe ser planteada. La actividad debe permitir una adecuada matematización horizontal y vertical que permita, a su vez, el paso de las matemáticas informales a las formales por medio de los cuatro niveles descritos. La actividad se integra en un contexto de aula concreta y, por tanto, a la hora de diseñar e implementar una actividad en el aula, el profesor debe tener en cuenta tres niveles (Streefland, 1991): nivel local o de clase, nivel global o de curso y nivel teórico. La actividad, dicho de otro modo, debe tener en cuenta las circunstancias concretas de los alumnos en su clase, el curso en el que se va a llevar a cabo la actividad y el nivel de formalización precedente y el que se pretende alcanzar mediante el proceso de matematización horizontal y vertical.

Evidentemente, para que todo lo dicho anteriormente tenga éxito, es precisa la actuación del profesor, tanto en el diseño y la implementación en el aula de las tareas como en la guía del alumno en el proceso de matematización progresiva que da lugar a los modelos integrados en cada nivel (Situacional, Referencial, General y Formal). Surge entonces el problema del equilibrio entre la autonomía del alumno, que debe ser el protagonista en el proceso de matematización progresiva y la intervención del profesor, que debe proponer y plantear la actividad de forma que los modelos emergentes formales e informales surjan como resultado de los esfuerzos de los alumnos (Gravemeijer, 1997).

Se incluye un esquema descriptivo de lo anteriormente dicho en relación a la modelización:

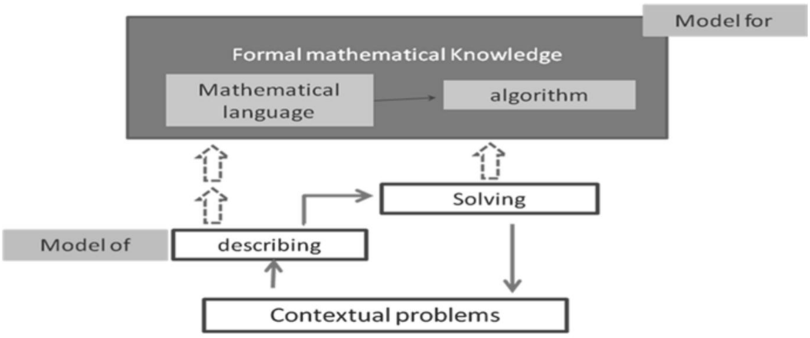


Figura 10. Modelización en la perspectiva de la RME. Adaptación de un esquema de Gravemeijer (1994), de Carreira y Baioa (2011, p. 215)

1.4.2. Modelización en la Perspectiva Models and modelling (MMP). Las Model eliciting activities (MEAs)

En la perspectiva Models & Modelling (MMP o M&M, modelos y modelización), se distingue entre modelo desarrollado por los investigadores -caracterizado como modelo ideal que pretende explicar los procesos que desarrolla el alumno- y el modelo que desarrolla el alumno en clase. El segundo modelo se desarrolla para construir, describir o explicar matemáticamente una situación:

> (é) los modelos que desarrollan los niños (explicitamente, no solo implícitamente) sirven para construir, describir, o explicar matemáticamente sistemas significativos que encuentran
>
> Lesh y Doerr, 2003, p. 9

Podríamos afirmar que la perspectiva M&M fija sus ideas fundamentales en el libro ñBeyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teachingò, editado en el año 2003 por Lesh y Doerr. Como se observa en el título del libro, la construcción de modelos mediante el proceso de modelización se considera una actividad matemática integrada en la resolución de problemas. Previamente al libro citado, Lesh et al. (2000) ya fijaban los principios fundamentales de la perspectiva M&M, desvinculando las actividades de modelización propias de la perspectiva M&M de las matemáticas aplicadas. Se trata de problemas con características propias de la resolución de problemas. Los problemas, contextualizados en el mundo real y con características y exigencias que los convierten en actividades de modelización, son denominados ómodel eliciting activitiesô (MEAs) y engloban tanto el proceso (modelización) como el producto (modelo). De esa forma, la perspectiva M&M representa una perspectiva integrada en la resolución de problemas en la que el problema (MEA) es, en sí mismo, el proceso de modelización y la obtención de un modelo. El problema planteado, no rutinario y procedente de una situación compleja perteneciente al mundo real, debe llevar al alumno a la necesidad de obtención de un modelo. Además, debe percibir la importancia de desarrollar, revisar, refinar e interpretar el modelo en el contexto del que ha surgido, lo que se encuentra directamente e íntimamente vinculado al proceso de obtención del modelo, es decir, al proceso de modelización.

Así, el planteamiento del problema debe permitir que el alumno fije criterios adecuados que le ayuden a decidir qué solución es la apropiada entre un conjunto de alternativas diferentes. También debe permitir que el alumno pueda juzgar por sí mismo la necesidad de mejorar las respuestas, refinarlas o extenderlas para un propósito determinado. También debe proporcionarle las claves para decidir en qué momento el trabajo ha terminado.

En el proceso de obtención del modelo, el alumno deberá poder explicitar qué están pensando acerca de la situación planteada y qué opciones ha tenido en cuenta para encontrar una solución posible. Deberá explicitar qué objetos, relaciones, operaciones, patrones y regularidades ha usado o sobre las que ha meditado.

Una vez obtenido el modelo, el alumno deberá determinar si es aplicable solo en la situación particular presentada en el problema o si, por el contrario, el modelo puede ser compartido, trasladable, fácilmente modificable y reutilizable en otro tipo de problemas o situaciones. También deberá decidir si la solución proporciona un prototipo que permite la interpretación de otras situaciones.

Por tanto, el problema debe cumplir una serie de condiciones para poder ser caracterizado como un MEA. Las condiciones o principios se resumen en seis. Lesh et al. (2000) los enuncian de la siguiente forma:

1.- Principio de construcción de modelos:

¿La tarea sitúa a los estudiantes en una situación en la que reconocen la necesidad de desarrollar un modelo que permita interpretar la situación, plantear objetivos y posibles procesos de resolución de problemas complejos? O bien, ¿solo se les pide que generen una respuesta a una pregunta que fue formulada por los demás? ¿Cómo puede la actividad crear la necesidad en los estudiantes de desarrollar, revisar, refinar y extender un modelo matemáticamente significativo? ¿El problema o actividad crea la necesidad a los estudiantes de desarrollar las descripciones y explicaciones en esta situación?

2.- Principio de Realidad:

¿El problema planteado podría suceder realmente en la vida real o cotidiana?

3.- Principio de Autoevaluación:

¿El enunciado del problema sugiere fuertemente criterios adecuados para evaluar la utilidad de soluciones alternativas? ¿Es claro el propósito (qué, cuándo, por qué, dónde y para quién)? ¿Son los estudiantes capaces de juzgar por sí mismos cuando sus respuestas deben ser mejorados, o si precisan ser refinadas o extendidas para un propósito determinado? ¿Los estudiantes saben cuándo han terminado? ¿O tienen que consultar continuamente al profesor: *"¿Es esto lo suficientemente bueno?"*

4.- Principio de Documentación:

¿ Exige la respuesta a la pregunta a los estudiantes incluir de forma explícita qué están pensando, utilizando los datos suministrados, las metas, y las posibles vías de solución que han tenido en cuenta? En particular, ¿tendrán que proporcionar una "guía de auditoría" que puede ser examinada para determinar qué tipo de sistemas (objetos, relaciones, operaciones, patrones y regularidades) han utilizado los estudiantes?

5.- Principio de Compartibilidad y Reutilización:

¿El modelo que se ha desarrollado es útil sólo para la persona que lo desarrolló y aplicable únicamente a la situación particular presentada en el problema. ¿O bien se proporciona una forma de pensar que es compartible, trasladable, fácilmente modificable, y reutilizable?

6.- Principio de Prototipo Eficaz:

¿La solución proporciona un prototipo útil, o metáfora, para la interpretación de otras situaciones?

El profesor debe diseñar la actividad de modelización como un problema que cumpla los seis principios, en grupos pequeños (3-4 alumnos) y con una duración corta (50-90 minutos).

De esta forma, la perspectiva M&M toma los elementos fundamentales de la resolución de problemas (contexto real, problema significativo, trabajo autónomo, etc.), integrándolos en una actividad de modelización. Así, en la perspectiva M&M, el rol del profesor en el diseño, implementación y desarrollo de la MEA en el aula es fundamental. Ello conlleva una preocupación por la intervención del profesor en el proceso, que no debe impedir el trabajo autónomo pero que, al mismo tiempo, debe guiarlo. Como consecuencia, el diseño e implementación de la MEA por parte del profesor, respetando los seis principios, conlleva una formación específica de los profesores.

1.5. Obstáculos a la introducción de la modelización matemática en la enseñanza

Hablar de la modelización en la enseñanza de las matemáticas conlleva, necesariamente, abrir el debate sobre los obstáculos a su introducción. Blum y Niss (1991) establece cuatro categorías de obstáculos: organizativos, en relación con los alumnos, en relación con los profesores y relacionados con el material que se debe usar. En muchos aspectos, las dificultades u obstáculos remarcados por Blum coinciden con los obstáculos mencionados por otros investigadores (Maaß, 2004).

- *Los obstáculos organizativos* se refieren fundamentalmente a la escasa duración de las clases de matemáticas (45-50 minutos generalmente).

- *Los obstáculos en relación con los alumnos* se centran en que la modelización convierte la clase de matemáticas en una clase más difícil y menos predecible. Las tareas rutinarias, como cálculos matemáticos, son más populares entre los estudiantes porque son mucho más fáciles de comprender y, a menudo, se pueden resolver simplemente siguiendo ciertas “recetas”. Esto facilita a los estudiantes obtener buenas calificaciones en las pruebas y exámenes. Los alumnos pueden tener dificultades para llevar a cabo los diferentes pasos del ciclo o el proceso de modelización en su conjunto.

- *Los obstáculos en relación con los profesores* presentan más variedad. La resolución de problemas y su uso fuera de las Matemáticas hacen la enseñanza más abierta y más exigente para los profesores porque conlleva cualificaciones “no matemáticas”, lo que hace más difícil la tarea de evaluar a los estudiantes. A esto se añade que los profesores no consideran la modelización como una actividad matemática “propia”, sino que se inserta en el campo de las aplicaciones de las matemáticas en otras asignaturas del curriculum.

Además, la clase se convierte en más abierta y menos predecible (que tienen su reflejo, por ejemplo, en los “thinking styles” y las “modelling routes”). Como consecuencia, el profesor precisa de competencias y habilidades que le permitan afrontar la introducción de la modelización en la enseñanza. Las competencias y habilidades específicas del profesor en modelización conlleva la necesidad de formación del profesorado, lo que representa una preocupación en todas las perspectivas sobre modelización. Por otro lado, el sistema de creencias y actitudes del profesor de matemáticas influye en su actitud ante la modelización, por lo que cualquier cambio en la práctica docente que incluya la introducción de la modelización en las aulas, debe tener en cuenta las actitudes y creencias del profesor (Hersh, 1986, Ernest, 1989, 1991; Thompson, 1992; Pehkonen, 1999; Gómez Chacón, 2000; Törner, 2002). Dada su complejidad, no nos extenderemos en la problemática asociada a las creencias y actitudes del profesor.

Dionne (1984) cita tres perspectivas (T, S, P) sobre las matemáticas que utilizan, por ejemplo, Törner y Pehkonen en un estudio de caso (1998):

(T) Matemáticas como un conjunto de habilidades (perspectiva tradicional). Hacer las matemáticas es hacer cálculos, mediante normas, procedimientos y fórmulas.

(S) Matemáticas basadas en la lógica y el rigor (perspectiva formalista). Hacer matemáticas se basa en la escritura rigurosa de demostraciones, utilizando un lenguaje preciso y riguroso, y utilizando conceptos unificadores.

(P) Matemáticas como un proceso constructivo (perspectiva constructivista). Hacer matemáticas es desarrollar procesos de pensamiento, construyendo reglas y fórmulas a partir de la experiencia y de la realidad y encontrar relaciones entre nociones o conceptos diferentes.

Ernest (1989, 1991) distingue tres perspectivas, con muchos puntos en común con las de Dionne: instrumentalista, platonista y de resolución de problemas. La perspectiva instrumentalista de Ernest coincide con la perspectiva tradicional de Dionne. La perspectiva platonista (identificada a menudo con el euclidianismo) se aproxima a la perspectiva formalista. A su vez, la perspectiva constructivista se asocia a menudo a la resolución de problemas. Grigutsch et al. (1998), menciona una categoría vinculada a la utilidad y la aplicabilidad. En esa categoría, las matemáticas poseen un rol instrumental, reducidas a su utilidad para ser aplicadas en la vida y en la sociedad. La influencia de una u otra perspectiva sobre los objetivos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son evidentes y tienen, por supuesto, un reflejo sobre la perspectiva de un profesor acerca de la modelización.

Sobre las diferentes perspectivas mencionadas y el modelo docente asociado, recomendamos el artículo de Gascón sobre modelos epistemológicos y docentes y la vinculación entre ambos (Gascón, 2001).

- *Los obstáculos relacionados con el material que se debe usar.*

Muchos profesores no se sienten capaces de hacer frente a ejemplos de aplicación que no provengan de materias que han estudiado ellos mismos. Muy a menudo los profesores no conocen suficientes ejemplos de aplicaciones y modelos adecuados para la enseñanza, o no tienen tiempo suficiente para generar ejemplos. Además, deben adaptar los ejemplos a la clase a la que se enfrentan en estos momentos y preparar la enseñanza de las aplicaciones o modelos adecuadamente, lo que conlleva decidir qué tipo de material deben usar.

1.6. La modelización matemática en el curriculum de matemáticas en España

Respecto a la enseñanza de las Matemáticas en España, la mención sobre la inclusión de actividades de modelización no apareció ni en el curriculum de enseñanza obligatoria ni en el Bachillerato, de forma expresa, hasta el año 2015. Las menciones relacionadas con la modelización aparecían, fundamentalmente, integradas en la descripción de las competencias matemáticas que los alumnos deben alcanzar en la resolución de problemas situados en el contexto del mundo real. Se seguía claramente la línea marcada por los informes PISA (OCDE, 2003, 2006, 2009). Así, en el Real Decreto 1631/2006, hablando de la competencia matemática en la ESO, se dice que:

> Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella.
>
> (Real Decreto 1631/2006, p. 687)

De esta forma, la competencia matemática se desarrolla al enfrentarse a una situación cotidiana identificada con un problema a resolver. Los conceptos, nociones, definiciones, etc. se ponen en juego en el proceso de resolución que debe llevarse a cabo.

Respecto al Bachillerato, en la Orden ESD/1729/2008, no se encuentran menciones expresas al uso de actividades centradas en la modelización, si bien se menciona la capacidad de *modelar* como parte de la resolución de problemas contextualizados o como solución de situaciones reales.

Sobre las Matemáticas, menciona que:

> Nacen de la necesidad de resolver problemas prácticos y se sustentan por su capacidad para tratar, explicar, predecir y modelar situaciones reales y dar rigor a los conocimientos científicos
>
> Las estrategias que se desarrollan constituyen una parte esencial de la educación matemática y activan las competencias necesarias para aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en contextos reales.
>
> (Orden ESD/1729/2008, p. 27574)

Vuelven a aparecer, por tanto, los elementos fundamentales ya mencionados en el Real Decreto que regula la ESO y que son herederas de las ideas contenidas en los informes PISA.

Esa situación ha cambiado radicalmente. El curriculum de la ESO y el Bachillerato (Real Decreto 1105/2014), en la descripción de los contenidos de Matemáticas, introduce un bloque denominado: óProcesos, métodos y actitudesô. Dicho bloque se describe como ócomún y transversalô y se indica que debe desarrollarse simultáneamente al resto de bloques, constituyendo óel hilo conductor de la asignaturaô (3º y 4º de ESO) o el óeje fundamental de la asignaturaô (1º y 2º de ESO, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales y Matemáticas I y II). No está claro porqué los procesos, métodos y actitudes representan un óhilo conductorô en 3º y 4º de ESO (tanto en las opciones orientadas a las enseñanzas aplicadas y las académicas) y pasan a ser un óeje fundamentalô en los restantes cursos y opciones (incluyendo las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Bachillerato).

En la descripción de los contenidos asociados a óProcesos, métodos y actitudes, tanto en Educación Secundaria como en Bachillerato, se incluye la matematización y modelización bajo, nuevamente, dos enunciados distintos:

- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

En los cursos de la ESO y de Bachillero (Matemáticas I y II), la forma adoptada es la primera (Real Decreto 1105/2014). En el caso de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, toma la segunda forma. Como en el caso anterior, no está clara la razón de esa diferenciación.

Evidentemente, dicho contenido tiene su correspondiente reflejo en los óEstándares de aprendizaje evaluablesô y los óCriterios de evaluaciónô. Incluimos a continuación los estándares y criterios de evaluación correspondientes a los óProcesos, métodos y actitudesô correspondientes a la óMatematización y modelizaciónô de Matemáticas I (1º de Bachillerato, pp. 414-415):

Criterios de evaluación:

8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.

9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.

Estándares de aprendizaje evaluables:

8.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

8.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios.

8.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.

8.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

8.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.

9.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.

En definitiva, el curriculum de la ESO y el Bachillerato ha sufrido una evolución reciente y de gran magnitud respecto a la importancia concedida a la construcción de modelos y a la modelización. La razón de ser del cambio es, por un lado, la influencia que han tenido los informes PISA en los Reales Decretos que regulan la enseñanza matemática en España y, por otro, las recomendaciones de la Comisión Europea. De hecho, la unión de óMatematización y Modelizaciónô como un único estándar de aprendizaje tiene su explicación, al menos en parte, en el tratamiento que hace el informe PISA del año 2012 de la modelización (MECD, 2013). Las influencias no se reducen a las competencias PISA de la OCDE y las recomendaciones de la UE juegan también un papel de importancia. Por ejemplo, en los meses en que estaba disponible el borrador del nuevo Real Decreto en la web del Ministerio, se podía leer lo siguiente[1]:

> Se proponen nuevos enfoques en el aprendizaje y evaluación, no dirigidos a la cantidad de lo memorizado sino a aquello que el alumno asimila y es capaz de hacer, sobre todo por lo que respecta a las competencias básicas: comunicación lingüística, y competencias STEM o en matemáticas, ciencia y tecnología e ingeniería, que se consideran prioritarias de cara al desarrollo de los alumnos y a su capacidad de

[1] Consultado por última vez en septiembre de 2015. Página web: http://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/participacion-publica/cerrados/2013/curriculo-basico.html

> desenvolverse en el mundo del conocimiento y la tecnología, pero sin olvidar el resto de competencias del aprendizaje permanente.

La mención a la STEM, que no aparece en el curriculum de matemáticas del nuevo Real Decreto ni en el borrador, no es casual y hay que buscar su origen en el informe Rocard (Rocard report, 2007) de la Comisión Europea y en las recomendaciones de la UE sobre la introducción de la STEM en las aulas europeas. La inclusión de la frase ñque el alumno asimila y es capaz de hacerò nos parece representativa de las intenciones del Ministerio en cuanto al tipo de formación que pretende. Al mismo tiempo, la mención al ñser capaz de hacerò o ñsaber hacerò nos sitúa en un contexto en el que la máxima preocupación es que el alumno *sepa hacer* cosas.

Una explicación a esta preocupación la encontramos en otro documento del Ministerio, publicado en su web en los primeros meses de redacción del nuevo Real Decreto. En el documento, de julio de 2012 y titulado ñPropuestas para el anteproyecto de ley orgánica para la mejora de la calidad educativaò (MECD, 2012), podemos leer que una de las cinco debilidades del sistema educativo en esos momentos eran los ñResultados internacionales desfavorables: PISA (Programme for International Student Assessment)ò (p. 3). Entre los objetivos generales de la reforma, figura ñMejorar los resultados de rendimiento de los alumnos en comparativas internacionales (como PISA)ò (p. 5). En definitiva, la obsesión por unos buenos resultados en el informe PISA lleva a considerar la mejora de esos resultados como una de las justificaciones para realizar una reforma del sistema educativo. Añadimos, como curiosidad, que en el mismo documento se dice que ñLa calidad educativa debe medirse en función del "output" (resultados de los estudiantes), no del "input" (inversión, nº profesores/unidades)ò (p. 4).

Es de suponer, si se tiene en cuenta lo dicho anteriormente, que el *output* se corresponderá con los resultados en el informe PISA. De hecho, el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte ha hecho públicas, a través del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), un listado de documentos en los que figuran las preguntas liberadas de las pruebas PISA y TIMSS. En el caso de la evaluación PISA de competencia matemática, la mayoría de esas preguntas son preguntas de tipo test. La intencionalidad del Ministerio en hacer públicas esas preguntas es evidente y se encuentra en clara relación con lo dicho anteriormente. Como veremos, no se trata de un caso excepcional y, cuando menos, la Comunidad Autónoma de Galicia comparte las mismas ideas.

A continuación se analizará lo que sostiene PISA respecto a la educación matemática. Antes, se realizará un recorrido por los antecedentes y sus consecuencias.

1.7. LOS ANTECEDENTES DE LAS COMPETENCIAS PISA

Las competencias PISA son producto de una evolución sobre qué es importante enseñar y cómo enseñarlo. El punto de inicio lo podemos situar en la crisis de la introducción de las matemáticas modernas.

1.7.1. La crisis de las matemáticas modernas

Las repercusiones del dominio del formalismo a lo largo del s. XX en la matemática tuvieron, como no podía ser de otro modo, profundas repercusiones en la enseñanza de las matemáticas. El formalismo se instaló con fuerza en los años 60 y 70 en los estudios universitarios y en la enseñanza de niveles inferiores al universitario. La introducción de las ómatemáticas modernasô en las aulas ponía el énfasis en la abstracción y, desde una visión dogmática, respondía a la idea de que las matemáticas servían para estructurar el pensamiento y que representaban el lenguaje genuino de la Ciencia.

En el proceso de transposición del formalismo al ámbito de la enseñanza-aprendizaje tuvo gran influencia el grupo Bourbaki. A modo de ejemplo de la ruptura con el tipo de enseñanza precedente, sirva la intervención del miembro de Bourbaki, Jean Dieudonné, en su discurso en el seminario internacional de Royaumont (Francia) en 1959: ñSi todo el programa que propongo tuviera que condensarse en un solo eslogan yo diría, ¡Abajo Euclides!ò. Con esa frase Dieudonné pretendía resumir el intento de abandono de la enseñanza de la geometría, basada en los óElementosô de Euclides, eje fundamental de la enseñanza de las matemáticas hasta ese momento. Para conseguirlo, era imprescindible estudiar la teoría de conjuntos desde edad temprana, para pasar a introducir el formalismo de manera paulatina. Así, aparecieron nuevos conocimientos en el curriculum que Núñez y Font concretan en:

> 1) el desarrollo consecuente del punto de vista conjuntista y vectorial; 2) el desarrollo sistemático y coherente de la geometría a través del concepto de transformación, y 3) el desarrollo de las estructuras algebraicas con aplicación inmediata a diferentes partes de la aritmética, del álgebra y de la geometría.
>
> (Núñez y Font, 1995, p. 294)

Según las ideas que sustentan la matemática moderna, la enseñanza de las matemáticas hasta ese momento no seguía las pautas propias de la matemática deductiva y se realizaba desde un deficiente enunciado de definiciones, conceptos poco generales, demostraciones poco rigurosas, etc.

El euclidianismo, en el que se insertan las matemáticas modernas, propone ñque todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas) que constan de términos perfectamente conocidos (términos primitivos)ò (Gascón, 2001, p. 131). De esa forma, se produce una ótrivialización del proceso de enseñanzaô (Gascón, 2001, p. 133), al suponer que es posible enseñar matemáticas a partir del enunciado de axiomas trivialmente verdaderos, de términos perfectamente conocidos y mediante un proceso deductivo. Dicho proceso está íntimamente ligado al óPrograma de Trivialización del conocimiento matemáticoô, criticado por Lakatos (1976), ya que obvia que las matemáticas son producto de un proceso cuasiempírico complejo y dilatado en el tiempo (basado, según Lakatos, en pruebas y refutaciones de las pruebas). De esta manera, la trivialización del conocimiento matemático conlleva una trivialización del proceso de enseñanza.

Al fundamentar la enseñanza de las matemáticas en las teorías axiomáticas ya cristalizadas o acabadas, enseñar y aprender matemáticas consiste en enseñar y aprender teorías, pues el conocimiento matemático lo forma el conjunto de teorías matemáticas considerada en su óversión finalô. La función del profesor consiste en ómostrarô las teorías al alumno en esa forma final, reduciéndolo a un mero receptor de conocimientos. Puesto que la enseñanza se basa en la exposición de teorías basadas en el enunciado de axiomas trivialmente seguros, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debería ser un proceso trivial basado en la exposición del proceso deductivo de la teoría a partir de los axiomas y términos primitivos. Puesto que el teoricismo considera la teoría como el elemento fundamental que debe ser enseñado y aprendido, la resolución de problemas juega un papel totalmente secundario y subordinado a la teoría. Así, la forma de presentar las teorías no deja lugar a la evolución histórica de la teoría, que carece de importancia, con lo que los problemas que jugaron un papel fundamental en el desarrollo histórico de los conceptos y nociones matemáticos carecen también de importancia.

El conocimiento se fragmenta, descontextualiza y deshistoriza (Brousseau, 1986; Chevallard, 1991; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Lo mismo ocurre con la resolución de problemas en general. Los problemas pueden ser planteados en el seno de la teoría estudiada pero al margen de la teoría formalizada, dónde no tienen cabida.

Al supeditar los problemas a la teoría, estos son presentados como elementos ilustrativos, con lo se transforman, en realidad, en ejercicios fácilmente resolubles mediante la teoría. El alumno únicamente debe elegir qué recurso o herramienta (técnica) debe usar para resolver el problema o ejercicio y utilizarla adecuadamente. El problema deja de ser un auténtico problema para convertirse en un ejercicio de aplicación, más o menos directa, de la teoría y que, en muchas ocasiones, puede calificarse de ejercicio rutinario. El método o vía de resolución del problema está prefijado por las posibilidades que ofrece la teoría para su resolución, de forma que es elegido para que la teoría proporcione el método de resolución y no al contrario. De esa forma, se ha dado la vuelta al proceso de generación del conocimiento matemático, que parte de problemas que dan lugar a teorías, para pasar a teorías que resuelven problemas ad hoc.

La resolución de problemas como eje de enseñanza intentó recuperar el problema como germen de las teorías y el conocimiento matemático. En la importancia concedida al problema en la actividad matemática destacamos dos informes: el informe Crockcroft y los Estándares de la NCTM.

1.7.2. El informe Crockcroft y los Estándares de la NCTM

El término ócompetencia matemáticaô no nace con los informes PISA. Tampoco es exclusiva de los informes PISA la concepción de la competencia matemática como el uso de conocimientos y capacidades en problemas contextualizados. Previos a los informes PISA, como antecedentes del mismo y por su importante influencia posterior, debemos destacar dos grandes informes. Se trata del informe elaborado durante los años 1978-1981 por un grupo de 22 expertos para el Gobierno Británico, cuyo título "Las matemáticas sí cuentan", es más conocido como "Informe Cockcroft" (Cockcroft Report, 1982) y los "Principios y Estándares para la Educación Matemática" del NCTM del año 2000. Ninguno de estos informes define la competencia matemática, aunque la palabra ócompetenciaô sí aparece en algunos momentos en los textos. En realidad, como veremos, lo importante al mencionar las competencias no se refiere a su origen o a su uso más o menos extendido, sino a aquello que engloba el término y lo que implica óser competenteô.

1.7.2.1. El informe Cockcroft

Se trata de un informe encargado por las autoridades de Inglaterra y Gales a finales de los años setenta y entregado en 1982 (Cockcroft Report, 1982). Para realizar el informe se constituyó un equipo de expertos bajo la coordinación del Dr. W.H. Cockcroft. Si bien el título del informe entregado era "Mathematics counts" (Las Matemáticas sí cuentan), es conocido por el nombre del coordinador. En un momento donde abundaban las críticas al modelo docente imperante, la intención del informe era mejorar la formación matemática de los alumnos, para lo que analizaba la situación y realizaba una serie de recomendaciones a través de 810 puntos. En el punto 243 se indica el proceso que el profesor debe seguir en el aula:

> La enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debe incluir:
>
> - exposición por parte del profesor;
>
> - discusión entre el profesor y los alumnos, y entre estos últimos;
>
> - trabajo práctico apropiado;
>
> - consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas;
>
> - resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana;
>
> - realización de trabajos de investigación.

La recomendación del informe Cockcroft rompe con la forma de enseñar matemáticas imperante en la época, al introducir el debate y la discusión, la inclusión de la resolución de problemas de la vida cotidiana y la realización de trabajos de investigación. La necesidad del debate al enseñar matemáticas volverá a aparecer en los Principios y Estándares de la NCTM como un elemento necesario en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Pero la importancia concedida a la consolidación y práctica de rutinas básicas (se supone que mediante ejercicios repetitivos y rutinarios) desaparece en los Principios y Estándares, que en este punto se alejan del tecnicismo.

En el punto 249 el informe Cockcroft aclara la razón por la que concede tanta importancia a la resolución de problemas:

> La habilidad para resolver problemas se encuentra en el corazón de las matemáticas. Las matemáticas sólo son "útiles" en la medida en que puedan aplicarse a una situación concreta y es esta habilidad para aplicar las matemáticas a diversas situaciones lo que denominamos ñresolución de problemasò.

Para el informe, la utilidad de las matemáticas se puede medir por medio de la capacidad para ser usadas para resolver problemas, lo que considera como el ócorazón de las matemáticasô. De esta forma, nos encontramos con la misma postura que se observa posteriormente en los informes PISA: la competencia matemática se mide por la capacidad o destreza demostradas al resolver un problema práctico o útil. La adquisición de conocimientos matemáticos por parte de los alumnos se reducen fundamentalmente a un saber-hacer algo, que el profesor expone en la presentación del tema tratado. De ahí la importancia concedida a la óconsolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicasô.

La componente teórica del proceso es impartida por el profesor, reduciendo al alumno a mero oyente y receptor de conocimientos en esa parte del proceso. La actividad del alumno se limita a la componente práctica, que diferencia entre una componente netamente rutinaria y algorítmica (consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas) y una componente más reflexiva y creativa (la resolución de problemas y la realización de trabajos de investigación).

1.7.2.2. Los principios y estándares del NCTM

El NCTM publicó en el año 2000 un documento (reformando y actualizando el publicado 10 años antes) conocido como "Principles and Standards for School Mathematics", traducido al castellano por la S.A.E.M. Thales en el año 2003 como ñPrincipios y Estándares para la Educación Matemáticaò. Tal y como dice en su prólogo (NCTM, 2000, p. ix), pretendía ser un "(...) recurso y una guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática" en las etapas desde Prekindergarten (preescolar) hasta K12 (último curso preuniversitario). Por tanto, el NCTM intentó realizar un estudio y obtener un documento que estableciese recomendaciones para mejorar la educación matemática para lo que tuvo en cuenta "(...) las aportaciones e influencia de fuentes muy distintas" (p. xii), como la investigación educativa, la práctica educativa anterior, la opinión de profesores, educadores, matemáticos, etc.

En el mismo título del estudio, el NCTM distingue entre óPrincipios y Estándaresô (p. 6-7): "Los Principios son enunciados que reflejan preceptos básicos fundamentales para una educación matemática de calidad", mientras que "Los Estándares son descripciones acerca de lo que la enseñanza de las matemáticas debería capacitar a los estudiantes para saber y hacer: los objetivos importantes de la educación matemática".

Encontramos, pues, unos principios fundamentales en los que se debe basar la educación matemática y que el NCTM enumera y analiza:

- *Principio de igualdad:* las matemáticas deben ser un objeto de estudio para todos y no solo unos pocos.
- *Principio curricular:* el curriculum debe estar bien estructurado.
- *Principio de enseñanza:* la enseñanza debe centrarse en aprender "matemáticas importantes".
- *Principio de aprendizaje:* principio que enumera la visión de la NCTM sobre cómo deben enseñarse las matemáticas.
- *Principio de evaluación:* trata sobre el papel de la evaluación en el proceso de enseñanza de las matemáticas.
- *Principio tecnológico:* analiza el papel de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

El número de estándares propuesto por el NCTM es de diez. Los cinco primeros (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida, Análisis de datos y probabilidad) describen los objetivos relativos a contenidos, mientras que los cinco restantes se refieren a procesos (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Conexiones, Comunicación, y Representación). El NCTM vincula *saber* (que podríamos asociar a los estándares relativos a contenidos) y *hacer,* que configuran conjuntamente un *saber-hacer,* (y que podríamos vincular a los estándares de procesos). De esa forma, el *saber* es necesario para el *saber-hacer* y el *saber-hacer* debe ser completado con el *saber.*

Aunque el NCTM divide los estándares en contenidos y procesos, éstos se desarrollan de forma conjunta, formando un todo en el proceso de aprendizaje: los contenidos pueden aprenderse dentro de un proceso y los procesos pueden desarrollarse dentro de los contenidos. Así, encontramos una división con ciertas similitudes con la estructura que, como veremos, se enuncia en términos de praxeologías en la TAD. El NCTM considera el *saber* y el *saber-hacer* "los objetivos importantes de la educación matemática" (p. 7). Para el NCTM (p. 20) "Si las ideas están bien conectadas y conceptualmente fundamentadas, son más fácilmente asequibles para su empleo en situaciones nuevas" pues "(...) la comprensión conceptual es un componente fundamental de la aptitud, junto con el conocimiento factual y la destreza de los procedimientos". Propone, pues, una enseñanza de las matemáticas que integre la comprensión y el uso de los conocimientos asociados a la técnica en la realización de tareas. De esa forma es posible enfrentarse a situaciones nuevas que conecten diferentes conocimientos matemáticos, algo fundamental en el conocimiento matemático y, por tanto, en su enseñanza.

La enseñanza de las matemáticas se construye paulatinamente, de forma que los contenidos y procesos se amplían, año a año, desde la base de la adecuada comprensión de los conocimientos de años precedentes.

> En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras, para que así profundice la comprensión y el conocimiento del alumnado y aumente su habilidad para aplicarlas.
>
> (p. 15).

Se trata, por tanto, de una evolución que el NCTM trata de describir, marcando qué estándares concretos son los apropiados para cada etapa (Pre-K-2, 3-5, 6-8, 9-12).

Ante la pregunta de cómo conseguir la adecuada comprensión de contenidos y el adecuado uso de procesos, el NCTM propone la resolución de problemas como el eje vertebrador de la enseñanza de las matemáticas, con evidentes puntos en común con el informe Cockcroft (1982). Así, "la mayoría de los conceptos o generalizaciones se pueden introducir eficazmente mediante un problema" (p. 335); "los alumnos pueden aprender conceptos matemáticos y profundizar en la comprensión de los mismos, trabajando con problemas cuidadosamente seleccionados que permitan aplicar las matemáticas a otros contextos" (p. 256). Para el NCTM la resolución de problemas permite, por un lado, introducir los nuevos conocimientos matemáticos y, por otro lado, usar esos conocimientos para resolver nuevos problemas:

El NCTM supone que es posible prever lo que ocurrirá al plantear un problema, de modo que el profesor puede conocer de antemano tanto los conocimientos que emergerán del problema como las preguntas que suscitará en los alumnos:

> Si al analizar y preparar un problema, se prevén las ideas matemáticas que puedan extraerse al trabajar con él y las preguntas de los alumnos, los profesores pueden decidir si el problema en cuestión ayudará a favorecer sus objetivos matemáticos para la clase"
>
> (p. 53)

En los ejemplos presentados en el texto, el NCTM procura ilustrar las ideas matemáticas emergentes, los procesos que aparecen y las preguntas y cuestiones que el problema suscitará durante el debate que se produce en la clase alrededor del problema. Intenta, por tanto, demostrar que es posible usar la resolución de problemas para conseguir las finalidades descritas.

El NCTM intenta caracterizar los óbuenos problemasô, a efectos de su uso como medio de enseñanza. Los problemas son buenos si permiten "(...) integrar múltiples temas e involucrar matemáticas significativas" (p. 52), de forma que algunos de los ejemplos propuestos en los Principios y Estándares se alejan del tipo de problemas prioritarios para PISA. Por ejemplo, el problema relativo al estudio mediante ordenador de la familia de funciones $f(x)=mx+b$ (p. 338), no se presenta vinculado en el enunciado a una situación real y pretende ilustrar cómo el problema permite establecer varias conexiones entre conocimientos y desarrollar varios procesos.

Pero lo que la NCTM ha dejado sin respuesta son dos preguntas cruciales vinculadas a la resolución de problemas como eje de la enseñanza de las matemáticas: ¿cómo conseguir una adecuada comprensión y uso de los conocimientos matemáticos por medio de la resolución de problemas? o, lo que es lo mismo, ¿cómo conseguir integrar adecuadamente el *saber* y el *saber hacer* por medio de la resolución de problemas? y ¿cómo, si ello fuese posible, seleccionar los problemas para evitar los fenómenos asociados al contrato didáctico descritos por Brousseau y Chevallard?

La respuesta a estas preguntas no es en modo alguno sencillo, sino todo lo contrario. Decidir qué problema es adecuado y qué ventajas e inconvenientes presenta no es algo fácil. Pensar que es posible predecir los conocimientos emergentes, los procesos que surgirán, las preguntas que el problema suscitará y la respuesta de los alumnos a las dificultades que se presenten es trivializar el proceso de enseñanza. Ni siquiera es sencillo distinguir, con anterioridad a su planteamiento, si un problema será considerado realmente como un problema cuando éste se plantee a alumnos concretos. Tampoco si un problema va a picar la curiosidad de los alumnos, circunstancia que eliminaría la virtud del problema como elemento motivador en la adquisición de conocimiento matemático.

El informe Cockcroft, los Principios y Estándares del NCTM y la evaluación por competencias PISA, son tres ejemplos de visiones diferentes pero que consideran la resolución de problemas como eje de la enseñanza. Pero creemos que no han resuelto adecuadamente el problema de cómo enseñar-aprender matemáticas por medio de la resolución de problemas.

Lo dicho en las últimas páginas es aplicable a la modelización matemática en la enseñanza. La modelización puede ser planteada como una de las formas genuinas de aplicación de las matemáticas (como en el caso de Pollak), como una actividad integrada en la resolución de problemas (como en el caso de la perspectiva M&M y los MEAs), como una actividad matemática centrada en la matematización que lleva de lo concreto e informal a lo general o formal (como en el caso de la RME), como un proceso complejo en el que intervienen múltiples factores cognitivos (como en el caso de Borromeo y otros), etc.

Todas las opciones o perspectivas mencionadas se encuentran ante problemas y dificultades, como ocurrió en el caso de las matemáticas modernas o en resolución de problemas en su momento. Las competencias PISA no escapan a las dificultades. Presentan elementos propios de los Estándares de la NCTM pero ha recibido otras influencias notables. En este punto, destacamos las conclusiones del proyecto KOM danés.

1.7.3. el proyecto KOM y el ejemplo danés

En Dinamarca, entre los años 2000 y 2002, se desarrolló un programa desde el Ministerio de Educación danés en colaboración con el National Council for Science and Mathematics Education y otras instituciones. El proyecto, llamado KOM, fue desarrollado por un comité formado por doce miembros y en el que Niss jugó un importante papel. El proyecto trataba definir las competencias matemáticas y la forma de conseguir su aprendizaje en el sistema de enseñanza danesa. El informe del mismo se publicó en el año 2002 (Niss y Jensen, 2002).

El proyecto KOM define la competencia matemática como:

> La habilidad para entender, judgar, hacer, y usar las matemáticas en situaciones en contextos y situaciones intra y extra-matemáticas en las que las matemáticas juegan o pueden jugar un rol.
>
> (Niss, 2011, p. 17-18)

Identifican un total de ocho competencias matemáticas fundamentales, subdivididas en dos grandes grupos (Niss, 2011). El primer grupo representa la habilidad de preguntarse y responder preguntas sobre y con las matemáticas:

- Pensar matemáticamente (dominio de los modos matemáticos de pensamiento).
- Plantear y resolver problemas matemáticos.
- Modelización matemática (es decir, análisis y construcción de modelos).
- Razonar matemáticamente (objetos y situaciones).

El segundo grupo de competencias representa la capacidad de utilizar adecuadamente el lenguaje y las herramientas matemáticas:

- Representación de entidades matemáticas (objetos y situaciones).
- Manipulación de símbolos y formalismos matemáticos.
- Comunicar en, con y acerca de las matemáticas.
- Hacer uso de ayudas y herramientas (Tecnologías de la Información incluidas).

Como se observa, incluyeron una competencia explícitamente ligada a la modelización matemática, centrada en el análisis y construcción de modelos relacionados con otras áreas diferentes a las matemáticas. Esta competencia incluía, para poder ser desarrollada adecuadamente, dos subcompetencias o habilidades:

> - analizar los fundamentos y propiedades de modelos existentes, y evaluar su alcance y validez;
>
> - llevar a cabo la modelización activa en contextos dados, es decir, estructurando y matematizando situaciones, usando el modelo resultante, describiendo conclusiones matemáticas, validando el modelo, analizándolo críticamente, comunicando sobre él, realizando un seguimiento y control de todo el proceso.
>
> (Niss, 2011, p. 18)

Como se puede observar con facilidad, el proyecto KOM incluía los elementos básicos del proceso o ciclo de modelización de Blum y Niss y de Blum y Leiss que ya hemos descrito anteriormente. La perspectiva sobre modelización del proyecto KOM limita la modelización matemática a un útil de aplicación en áreas no matemáticas (ñconstruir modelos matemáticos relacionados con otras áreas"*)*.

Asociado, y en clara conexión con el proyecto KOM, la Universidad de Roskilde, a la que se encuentran vinculados Niss, Jensen y el proyecto KOM, incluye la modelización como un elemento fundamental en su programa de formación. Tal y como Blomhøj indica (2007), la U. de Roskilde nació en el año 1972 con la intención de proponer una enseñanza universitaria que representase un cambio respecto a la formación universitaria tradicional danesa. La formación en la U. de Roskilde está basada desde su nacimiento en cuatro principios pedagógicos: interdisciplinaridad, orientación hacia los problemas, ejemplaridad y grupos organizados por proyectos de trabajo.

Así, la enseñanza de las ciencias se estructura alrededor de proyectos centrados en el estudio de problemas (problem based project work) y en los que la modelización matemática juega un papel de gran importancia. Según Blomhøj (2007), puede estimarse que de los cuatro semestres que consta su programa de formación, la cuarta parte de ellos contienen elementos substanciales y reflexiones relacionadas con la modelización matemática .

La mención a los proyectos centrados en la resolución de problemas y la enseñanza de las matemáticas integrada en proyectos interdisciplinares tienen, a su vez, su reflejo en el informe Rocard, la IBL y la STEM.

1.7.4. La UE, la STEM y el informe Rocard

El ejemplo de Dinamarca no es el único en Europa que se ha centrado en la modelización o en el trabajo alrededor de proyectos centrados en la resolución de problemas (en los que la modelización jugará un importante papel). Como ejemplos, citaremos tres proyectos concretos que ilustran este tipo de proyecto, si bien marcan una tendencia no plenamente coincidente con el ejemplo danés. Podemos decir que los daneses han sido los primeros en llevar a la práctica ideas ya compartidas previamente por una parte importante de los investigadores en Didáctica de la Matemática. Así, los proyectos que describiremos someramente no son herederos de ideas genuinas o características de investigadores daneses, si bien las ideas de éstos han tenido un eco temprano en la U. de Roskilde y en el proyecto KOM.

El proyecto LEMA **(**Learning and Education in and through Modelling and Applications. http://www.lema-project.org), al que ya nos hemos referido y en el que participaron seis socios europeos entre los años 2006 y 2009, se centra en la modelización matemática. El proyecto se resume en su página web con las siguientes palabras:

> Educadores matemáticos de seis países trabajaron para generar materiales para apoyar el desarrollo profesional de los profesores.
>
> El objetivo general del proyecto era facilitar un cambio en las prácticas de aula de los docentes a fin de incluir las actividades de modelización matemática.
>
> Para proporcionar más apoyo LEMA, junto con materiales de apoyo, desarrolló un programa de desarrollo profesional para los profesores.

Busca, por tanto, producir materiales basados en la modelización matemática que permitan un desarrollo profesional de los profesores. Además, el proyecto incluía cursos piloto de formación de profesores cuyo objetivo era que los profesores incluyesen la modelización en su práctica docente, generando en el seno del proyecto actividades de modelización como ejemplos. Con tal finalidad, se suministraba material para formadores de profesores interesados en un curso de desarrollo profesional del profesor centrado en la modelización matemática.

Entre la documentación accesible en la página web del proyecto se puede leer que sus objetivos incluyen:

- Trabajar en distintas tareas basadas en la realidad.
- Reflexionar sobre las características de estas tareas.

- Pensar en criterios para identificar tareas de modelización desde otras tareas basadas en la realidad.

El hecho de centrarse en cursos de formación de profesores en torno a la modelización, llevó al proyecto a realizar un primer análisis sobre creencias de profesores, su uso de las tareas y sus actitudes ante las actividades de modelización (Maaß y Gurlitt, 2009, 2011). Se observa, por tanto, la relevancia de las creencias y actitudes del profesor ante la modelización como elemento determinante en su introducción.

En el año 2007 la Comisión Europea, por medio de la Dirección General de Investigación, publica el conocido como Informe Rocard (Rocard Report, 2007). En dicho informe se considera la enseñanza de las ciencias como una prioridad para Europa y considera que la enseñanza de las mismas debe realizarse de forma integrada. De esa forma, las matemáticas se integran en la enseñanza general de las ciencias y pasan a ser un elemento más en la enseñanza de algo de mayor amplitud: la Ciencia.

La enseñanza, según el informe Rocard, debe realizarse de forma prioritaria por medio del Inquiry Based Learning, en adelante IBL. De hecho, sostiene que el uso de la estrategia IBL aplicado a la enseñanza de las ciencias, Inquiry Based Science Education (IBSE), incrementa el conocimiento e interés de los alumnos y estimula la motivación de los profesores:

> La Inquiry-based science education (IBSE) ha demostrado su eficacia en la enseñanza primaria y secundaria incrementando de logros y los niveles de interés de los niños y estudiantes y, al mismo tiempo, estimula la motivación de los profesores.
>
> (Informe Rocard, 2007, p. 2)

Por tanto, usa como medio la realización de ó investigacionesô que integren conocimientos científicos normalmente desvinculados o incluso aislados en la enseñanza tradicional. En definitiva, de lo que hablamos es de problemas o investigaciones, planteadas desde la interdisciplinaridad, en la que cada disciplina científica debe jugar un papel en una fase concreta de la investigación.

Siguiendo como base las recomendaciones del informe Rocard, se encuadran el proyecto COMPASS y, sobre todo, el proyecto PRIMAS.

El proyecto COMPASS (Common problem solving strategies as links between mathematics and science) es un proyecto de colaboración en el que participaron siete universidades europeas durante los años 2009 y 2011. En la página web del proyecto (http://www.compass-project.eu/) se puede leer:

> El proyecto COMPASS tiene como objetivo apoyar al profesorado en la implementación de tareas escolares que conecten las matemáticas y las ciencias entre sí, y con la realidad de sus estudiantes.
>
> (é)
>
> En las tareas diseñadas, los estudiantes trabajan sobre conceptos fundamentales que conectan las matemáticas y las ciencias, con especial énfasis en la resolución de problemas y en el aprendizaje basado en la investigación.

La influencia de las ideas del informe Rocard y la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas es evidente. La resolución de problemas debe llevarse a cabo mediante una estrategia basada en la investigación o indagación de problemas científicos en los que las matemáticas jueguen un papel de importancia. Hasta cierto punto, el proyecto se instala en una postura pragmática de las matemáticas y, por tanto y a nuestro entender, reduccionista de las mismas, pues son los problemas vinculados a otras ciencias (o a la órealidadô) los que interesan al proyecto.

De esa forma, la preeminencia de la aplicabilidad de las matemáticas, característica de Pollak, tiene un reflejo en COMPASS. Los problemas intramatemáticos pierden importancia hasta desaparecer de los objetivos del proyecto, en beneficio de los problemas extramatemáticos. Se aleja de la competencia matemática en el sentido dado por el proyecto KOM -que mencionaba la necesidad de plantear actividades centradas tanto en lo *intra* como en lo *extra* matemático- para acercarse a una visión de la competencia matemática en el sentido de PISA. Evidentemente, esa visión tiene su reflejo en la modelización matemática, que es puesta al servicio de la Ciencia.

El paso a la integración de las matemáticas en proyectos STEM (Science-Technology-Engineering-Mathematics) no es más que una consecuencia lógica de lo anterior.

El proyecto PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe) es un proyecto que involucró durante los años 2010 a 2013 a catorce importantes universidades europeas de doce países diferentes. En la página web del proyecto (http://www.primas-project.eu) se puede leer:

> PRIMAS tiene el objetivo de fomentar el aprendizaje por investigación en matemáticas y ciencias en la enseñanza primaria y secundaria de toda Europa.

La finalidad del proyecto es muy clara: se centra en el aprendizaje por investigación (inquiry-based learning). Lo que significa óaprendizaje por investigaciónô para el proyecto lo aclara de la siguiente forma:

> El aprendizaje por investigación implica explorar el mundo, formular preguntas, hacer descubrimientos y comprobar con rigor la validez de esos hallazgos en la búsqueda de nuevos conocimientos. El aprendizaje por investigación puede tener muchas vertientes: depende del contexto, del grupo objetivo y de los objetivos de aprendizaje. Sin embargo, los distintos enfoques del aprendizaje por investigación comparten el objetivo de fomentar la curiosidad, la participación y el aprendizaje en profundidad.

Sobre sus ventajas, afirma:

> En la sociedad del conocimiento, los alumnos deben desarrollar la capacidad de alcanzar el conocimiento y las competencias, así como las habilidades de resolución de problemas. En el siglo XXI, no basta con el mero conocimiento de la realidad. Los alumnos deben desarrollar las competencias para aplicar sus conocimientos en situaciones reales en las que deban resolver problemas. Igualmente, tienen que desarrollar las competencias para aprender de manera autónoma y explorar nuevas áreas de conocimiento. El aprendizaje por investigación ayuda al desarrollo de esas competencias.

En definitiva, PRIMAS intenta proponer la investigación como forma de conseguir una adecuada consecución de las competencias, tal y como recomendaba el informe Rocard. El aprendizaje por investigación se propone desde problemas o situaciones “reales” en las que las matemáticas y otras ciencias se integran. La “realidad” vuelve a ser, como en los anteriores casos y en las competencias PISA, algo fundamental, pero de forma que esa realidad motiva la “investigación” y justifica la adquisición y uso de conocimientos. La modelización vuelve a aparecer supeditada a la realidad y la aplicabilidad, como un caso particular de la resolución de problemas. En PRIMAS la resolución de problemas llega a la complejidad suficiente como para poder ser calificada como investigación en una vuelta de tuerca que pretende que los estudiantes reproduzcan en las aulas la forma de trabajar de un científico.

Por otra parte, esa integración de las matemáticas en proyectos científicos interdisciplinares puede transmitir la idea de que las matemáticas solo tienen sentido al ser usadas en problemas o situaciones propias de otras ciencias. De esa forma, se corre el riesgo de conceder excesiva importancia a la componente pragmática del conocimiento matemático, llevando al alumno a una concepción pragmática del conocimiento matemático. Además, es fácil caer en conceder más importancia al uso de técnicas que al conocimiento de teorías, primando solo una componente del conocimiento matemático.

Si se observan los años de realización de los proyectos descritos y tomamos dichos proyectos como una tendencia, la tendencia es abandonar la modelización matemática como un eje fundamental en la formación del profesorado de matemáticas (proyecto LEMA), para pasar al aprendizaje por investigación, dónde se vería integrada la modelización matemática como una actividad matemática que permite una matematización de la realidad (proyectos COMPASS y PRIMAS).

En ese contexto se sitúan los proyectos o actividades STEM, una de las prioridades de la Unión Europea, tal y como se observa en el portal Schoolnet de la UE (European Schoolnet. Transforming Education in Europe: http://www.eun.org/home). Schoolnet es una red en la que participan 31 ministros de educación europeos. De esa forma, las prioridades de la UE en Educación tienen un reflejo en el portal. En dicho portal, se establecen tres áreas fundamentales o *Focus areas*: Innovation, STEM y eSafety. Dicho de otro modo, la integración de las matemáticas en proyectos interdisciplinares STEM es una prioridad educativa para la UE. La razón de esa importancia, observable ya en el informe Rocard, se describe de la siguiente forma en la página web de Schoolnet:

> Las habilidades en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM) se están convirtiendo en una parte cada vez más importante de la alfabetización básica en el conocimiento económico actual. Para mantener una Europa en crecimiento, vamos a necesitar un millón de investigadores más para el año 2020. Sin embargo, la educación científica ya no puede ser considerada como un entrenamiento de una élite de futuros científicos o ingenieros; sólo los ciudadanos concienciados científicamente pueden tomar decisiones informadas y participar en el diálogo sobre temas sociales basados en la ciencia.

> European Schoolnet está a la vanguardia del debate sobre la manera de atraer a más gente a la ciencia y la tecnología para hacer frente al futuro déficit de cualificaciones al que se enfrenta Europa. STEM es uno de los principales ámbitos temáticos de European Schoolnet

Las razones aportadas, como se observa, son de índole fundamentalmente económica: las necesidades de investigadores científicos de la UE.

De esa forma, las menciones a la STEM y los proyectos interdisciplinares presentes en el nuevo Real Decreto se explican por el contexto europeo el que se insertan.

1.7.5. Los informes PISA de la OCDE y las competencias como eje de la enseñanza

El término ócompetenciaô no es un término con igual significado para todo aquél que lo usa. óCompetenciaô se puede utilizar como sinónimo de ócapacidad para hacerô, considerando, en ese caso, la competencia como la capacidad de realizar una tarea con éxito. Esta concepción del término ócompetenciaô es antigua y ha sido usada extensamente, pero es con los informes PISA de la OCDE con los que el término se define y concreta. La definición de competencia de PISA se realiza a partir de un primer proyecto llamado DeSeCo (Proyecto de Definición y Selección de Competencias), que se desarrolló entre los años 1997 y 2003 (OCDE, 2005). Su finalidad era analizar qué competencias clave son necesarias para el mundo moderno, recabando para ello la opinión de un gran número de expertos.

Una primera aproximación a la definición que aportará PISA de competencia, aparece ya en un informe del año 2000 (OCDE, 2000):

> El proyecto PISA evaluó en mayor medida la capacidad que tiene la gente joven para utilizar sus conocimientos y destrezas con el objetivo de afrontar los retos de la vida real que el grado en el que dominan un currículum escolar específico.
>
> (OCDE, 2000, p. 10)

PISA pretendía por tanto evaluar ócapacidadesô, identificando dichas capacidades con utilizar conocimientos y destrezas. Tratando el tema de los ítems de la evaluación que realizó PISA en el año 2000, podemos leer:

> Los estudiantes tuvieron que comprender conceptos clave, dominar determinados procesos y aplicar los conocimientos y destrezas a diferentes situaciones
>
> (OCDE, 2000, p. 10)

Para poner en práctica esas capacidades o competencias, se hace necesario que se comprendan los conceptos clave y se dominen procesos. Supone que hacer una tarea conlleva comprender conceptos clave, dominar procesos y aplicar conocimientos y destrezas a diferentes situaciones. De esa forma, la comprensión de conceptos se considera como una parte necesaria e imprescindible para poder responder a las preguntas y cuestiones planteadas en la evaluación PISA.

En el año 2003 aparece el término ócompetenciaô como idea central y se realiza una primera descripción:

> (...) el innovador concepto de «competencia» (literacy), se refiere a la capacidad de los alumnos de aplicar sus conocimientos y habilidades en áreas académicas fundamentales y de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones.
>
> (OCDE, 2003, p. 20)

Se identifica claramente competencia con la capacidad para aplicar conocimientos, analizando, razonando y comunicando la solución de un problema en el proceso de planteamiento, resolución e interpretación del problema, siguiendo en parte el esquema que debe seguir el resolutor de problemas propuesto por Polya (1965). Se intenta que los problemas sean diversos y relacionados con el mundo real, priorizando que los problemas estén presenten en situaciones diferentes. En el año 2006 y 2009, PISA concreta aún más y distingue tres competencias diferentes, que evaluarán en períodos de nueve años. El informe del año 2009 no hace otra cosa que redundar en lo ya dicho en el informe del año 2006 y, con tal motivo, en adelante se hará mención exclusiva al informe del 2006, traducido al castellano.

Las competencias evaluadas por PISA son: competencia científica, competencia lectora y competencia matemática. La competencia matemática se define de la siguiente forma (OCDE, 2006):

Competencia matemática: La capacidad que tiene un individuo de identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar e implicarse en las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades vitales como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

El término ómundoô hace referencia al "(...) marco natural, social y cultural en que vive el individuo" (OCDE, 2006, p. 75). Respecto al uso de las matemáticas y la relación del alumno con las matemáticas, el informe aclara que:

> (...) comprende tanto el uso de las matemáticas como la solución de problemas matemáticos, pero comporta asimismo un grado de implicación personal más amplio que englobaría nociones como la comunicación, la sintonía, la valoración e incluso la apreciación y el disfrute de las matemáticas."
>
> (OCDE, 2006, p. 75)

Se pretende que el alumno use las matemáticas y las aplique a la resolución de problemas, de forma que establezca una relación personal con las matemáticas para que lleguen a ser apreciadas hasta convertirlas en un elemento de disfrute. Las diferencias con la competencia matemática definida en el proyecto KOM son evidentes. La intra-matemática desaparece, para centrar la atención en lo extra-matemático.

Los problemas deben situarse en el mundo real y para poder resolverlos se hacen necesarias capacidades que PISA asocia a la resolución de problemas. El alumno debe desarrollar capacidades que en un sistema de enseñanza demasiado estructurado deriva en una resolución de problemas de tipo rutinario y en el que, por tanto, no son desarrolladas:

> (...) exigen asimismo la capacidad de aplicar esas habilidades a unos contextos menos estructurados, que carecen de instrucciones precisas y en los que el alumno debe decidir cuál será el conocimiento más adecuado al caso y cuál será la forma más útil de aplicarlo.".
>
> (OCDE, 2006, p. 74)

El informe reconoce la complejidad del problema. Ante la resolución de problemas no rutinarios contextualizados en el mundo real, el alumno debe poseer conocimientos sobre las matemáticas que, si bien no tienen por qué ser visibles claramente en la resolución, se asocian íntimamente a la resolución de un problema. El informe reconoce que los conocimientos sobre la estructura de la matemática pueden ser superficiales, sin que el conocimiento sea profundo o que no se sepan usar esos conocimientos al resolver un problema.

PISA representa una evaluación de las competencias matemáticas, que se centra en la resolución de problemas, como medio que permite comprobar el grado de dominio de la competencia matemática.

> Evaluar la competencia matemática supone, por tanto, determinar hasta qué punto poseen los alumnos una serie de capacidades matemáticas concretas que puedan aplicar de forma productiva a aquellas situaciones que llevan implícito un problema.
>
> (OCDE, 2006, p. 84)

Supone, por tanto, que la competencia matemática se demuestra y tiene su fin en resolver problemas en contextos y situaciones diferentes y, preferiblemente, tomados del mundo real. En ese sentido, se opta por una visión funcional del conocimiento matemático:

> El término «competencia matemática» se ha elegido con el fin de hacer hincapié en el carácter funcional del conocimiento matemático y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos.
>
> (OCDE, 2006, p. 74)

Para realizar la evaluación internacional, PISA propone problemas contextualizados que los alumnos deben resolver. De las respuestas de los alumnos intenta obtener información para dar respuesta a dos preguntas: ¿cuál es el grado de conocimientos de los rasgos estructurales? y ¿saben los alumnos utilizar esos conocimientos para resolver un problema no rutinario? En su análisis de la respuesta del alumno supone que, ante un problema, éste seguirá el siguiente esquema de cinco pasos (OCDE, 2006, pp. 76-78) que, por otra parte, caracteriza la forma en que un matemático desarrolla su labor. El proceso lo denomina como de *matematización*:

- En el primer paso, el proceso de matematización se inicia con un problema presente en la realidad y consiste en identificar el problema real como un problema matemático.

- En el segundo paso, la persona que desea resolver el problema trata de identificar las matemáticas pertinentes al caso y reorganiza el problema según los conceptos matemáticos que han sido identificados.
- El tercer paso implica una progresiva abstracción de la realidad.
- El cuarto paso consiste en resolver el problema matemático
- El quinto paso supone responder a la pregunta: qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real.

Así, en PISA la modelización se integra en el ámbito más general de la resolución de problemas contextualizados en el ómundo realô. Al tratarse de un problema planteado en la realidad y que suscita preguntas que deben ser respondidas, es necesario desarrollar las competencias matemáticas como herramienta o útil que proporciona respuestas. De esa forma, las matemáticas -y la modelización matemática como caso particular- proporciona respuestas a problemas planteados en un contexto óauténticoô, lo que permite que el problema sea ñsolucionado de forma auténtica mediante el recurso de las matemáticas.ò (OCDE, 2006, p. 85). La solución óauténticaô del problema supone que el alumno ha obtenido la solución mediante el desarrollo adecuado de sus competencias matemáticas, algo solo posible desde el aprendizaje significativo del conocimiento matemático.

Como se ha indicado previamente, Andresen (2007) distingue, en el significado de modelización, dos visiones: a nivel funcional y a nivel de formación de conceptos. Todo lo dicho anteriormente sitúa las competencias PISA, en relación con la modelización, en la visión funcional. Eso conlleva implícitamente, si tenemos en cuenta las dos visiones de Andresen, que la modelización en PISA no busca la formación de conceptos. En ese sentido, se aleja de la concepciones sobre la modelización tanto de la RME como de la M&M. Con la RME solo coincide en la importancia concedida al proceso de matematización. Como la M&M, concede importancia a la resolución de problemas, pero poco tiene que ver un MEA con una actividad de matematización de un problema de PISA.

1.7.5.1 El ciclo de matematización de PISA

PISA propone en 2012 un *ciclo de matematización*, que resume en un esquema que describe la forma en que se desarrolla el proceso de resolución de un problema en un contexto real (Figura 11, MECD, 2013, p. 26):

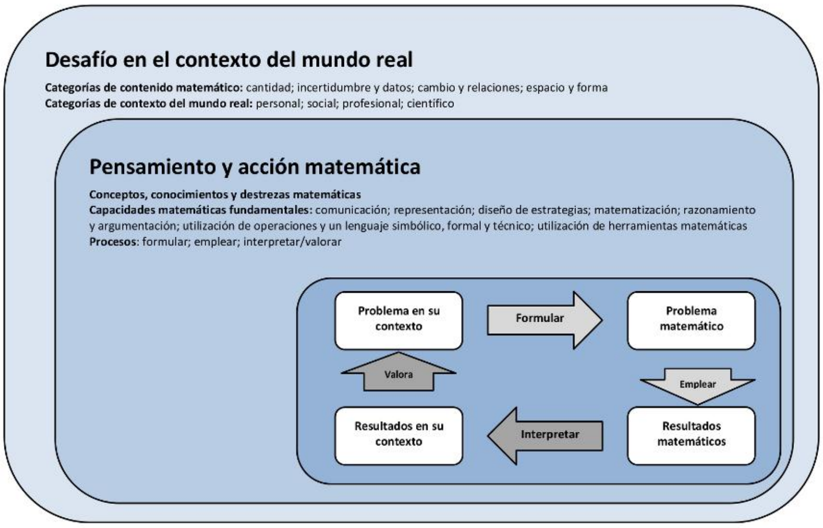


Figura 11. Ciclo de matematización de PISA

En dicho informe, se sostiene que la construcción de modelos siempre ha sido una piedra angular en los informes PISA:

> El ciclo de construcción de modelos matemáticos, utilizado en marcos anteriores (p. ej., OCDE, 2003) para describir las etapas por las que pasan los individuos para resolver problemas contextualizados, sigue siendo una característica fundamental del marco de PISA 2012
>
> (MECD, 2013, p. 8)

Pero, en realidad, es en ese informe donde la modelización toma relevancia hasta el punto de incluir un esquema descriptivo del *ciclo de construcción de modelos*. No es casual, y resulta importante mencionarlo, que el informe PISA no caracteriza su ciclo de construcción de modelos como un ciclo de modelización. Lo describe como el proceso necesario para resolver un problema contextualizado en el mundo real. Así, en lo fundamental, el ciclo se corresponde, en sus aspectos básicos, con el proceso de matematización de un problema del mundo real de informes anteriores. En PISA 2012 los puntos esenciales del proceso los enuncia de forma resumida como *Formular, Emplear, Interpretar y Evaluar*. PISA aclara que no todos los procesos que describe en su ciclo deben, necesariamente, llevarse a cabo en la resolución de un problema o en la realización de una tarea matemática propuesta en su evaluación.

Presenta puntos en común pero también diferencias con el ciclo de Blum y Leiss (Figura 5). Mientras Blum y Leiss distinguen entre *Situación real y problema*, *Modelo real y problema* y *Modelo matemático y problema*, PISA solo distingue entre *Problema en su contexto* y *Problema matemático*, algo con cierta lógica si se considera una modelización solo como un problema procedente de un contexto real. Los procesos de *Construcción*, *Simplificación/Estructuración* y *Matematización* del ciclo de Blum y Leiss se resumen en *Formular* el problema matemático a partir del problema en contexto. Dicho de otro modo, la integración de la modelización en el contexto más amplio de resolución de problemas se realiza mediante la formulación del problema en contexto como problema matemático. Se trata, como indica expresamente (PISA 2012), de un proceso de matematización de la realidad. El proceso de *Trabajo matemático* que lleva a la obtención de resultados matemáticos en el ciclo de Blum y Leiss se ve sustituido por *Emplear*, lo que representa un término más vinculado al uso funcional de las matemáticas que *Trabajo matemático*.

Por último, los pasos 5º, 6º, y 7º del ciclo de Blum y Leiss (*Interpreting*, *Validating*, *Exposing*) y que darían respuesta a la pregunta ó¿qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real?ô, en PISA se resume en *Interpretar* los resultados matemáticos para obtener resultados en contexto y *Valorar* el resultado en contexto para obtener la solución al problema en contexto.

La consideración del modelo como parte del resultado matemático que realiza PISA se aleja de la consideración del modelo, en el caso del ciclo de Blum y Leiss, como algo independiente. Esta distinción es fundamental al hablar de modelización matemática, tal y como apunta Blomhøj (2004, p. 146):

> (...) concepto de modelo tiene significativas implicaciones didácticas. En primer lugar, esto implica que, cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella. Segundo, para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados. En efecto, esto es el núcleo del problema, ya sea en relación al potencial que tiene el aprendizaje de la modelización matemática, como a las dificultades conectadas con este aprendizaje.

Así, la distinción entre la situación a modelizar y el modelo es fundamental al hablar de modelización matemática. En el fondo de la cuestión se encuentra la consideración, como elementos diferentes, de la situación origen, del modelo y de la modelización, como apunta Blomhøj y es aceptado en general por los investigadores (recordemos la tripleta de Blum y Niss). Esa diferenciación no se realiza con claridad en el ciclo de PISA porque se trata, en realidad, de un problema en contexto, una matematización de lo real que busca la obtención de un resultado. De hecho, la competencia matemática pone el acento en la extramatemática (el óResto del mundoô, en el ciclo de Blum y Leiss) al primar problemas del mundo real, dejando de lado el ómundo de las Matemáticasô. La intramatemática se supone integrada en el proceso de matematización del problema real, lo que lo convierte en un problema matemático (óMathematical problemô) que precisará utilizar las matemáticas para resolverlo. Hacemos notar que tanto los principios y estándares como la definición de competencia matemática del proyecto KOM incluyen expresamente los problemas o cuestiones intramatemáticas. Este hecho se halla en relación con la inclusión de las matemáticas como una región separada (aunque relacionada) con el resto del mundo del ciclo de Blum y Leiss.

En esta situación, analizar los procesos que tienen lugar no es importante porque se concede el protagonismo al resultado, es decir, al modelo interpretado en contexto. Las dificultades inherentes a la complejidad de los procesos no son relevantes, bajo la suposición de que obtener un resultado correcto (o interpretado como correcto) garantiza que el proceso se ha desarrollado adecuadamente y sin obstáculos o dificultades de importancia.

Como consecuencia y como se verá a continuación, las evaluaciones PISA y sus efectos en las evaluaciones de la competencia matemática en España se centran en la obtención de resultados correctos más que en los procesos que han llevado a esos resultados.

1.7.5.2. La evaluación de PISA y sus consecuencias en la evaluación de competencias en España

Como hemos visto, la justificación de PISA para el uso de los problemas centrados en el mundo real en sus cuestionarios es que el fin y la razón de ser de las matemáticas que debe conocer un ciudadano se basa en resolver problemas. Como consecuencia, consideran los problemas intramatemáticos y los problemas que no son enunciados en un contexto del mundo real que rodea al alumno como de importancia menor y su presencia en los cuestionarios de PISA es, por tanto, nula. Los problemas deben estar siempre, en mayor o menor medida, situados en un contexto real cercano a la vida cotidiana del alumno:

> Por regla general, los problemas que los estudiantes encuentran en sus vidas cotidianas no suelen estar formulados en términos explícitamente matemáticos. Sus referencias son más bien los objetos del mundo real. En estos contextos de evaluación de carácter extramatemático, la tarea del alumno consiste precisamente en traducir los contextos de estos problemas a una formulación matemática. En términos generales, PISA presta especial atención a las tareas que pueden encontrarse en una situación del mundo real y que proporcionan un contexto auténtico para el uso de las matemáticas que influya en su solución y en su interpretación. Esto no significa, sin embargo, la exclusión de ejercicios cuyo contexto sea hipotético, siempre y cuando dicho contexto contenga elementos reales, no se aleje en exceso de una situación del mundo real y plantee un problema susceptible de ser solucionado de forma auténtica mediante el recurso a las matemáticas.
>
> OCDE, 2006, p. 85

Evidentemente, resulta difícil definir qué es la óvida cotidiana del alumnoô y diferenciar si un problema pertenece a la categoría de óproblemas que pueden encontrarse en una situación del mundo realô. En ese sentido, qué es la realidad en el mundo de las matemáticas representa una pregunta compleja. La realidad de la RME, por ejemplo, no es la realidad de los informes PISA. De hecho, existen multitud de problemas que, dependiendo del sistema de creencias y la base epistemológica ligada a ese sistema y del momento en que fueron planteados (si se trata de problemas históricos), puede ser calificados como problemas contextualizados en el mundo real, la vida cotidiana o plenamente intramatemáticos.

Muchos de esos problemas son modelizaciones de carácter intra-matemático, tal y como apuntan Bosch, García, Gascón et al. (2006, p. 49):

> (é) la modelización no queda limitada sólo a la ñmatematizaciónò de situaciones extramatemáticas, esto es, cuando la modelización intramatemática es considerada como un aspecto esencial e inseparable de las matemáticas y, en segundo lugar, cuando

> se dote de un significado preciso a la actividad de modelización dentro del modelo general de la actividad matemática.

En cuanto a las dudas que se puedan plantear a una evaluación a través de un cuestionario, basado fundamentalmente en la resolución de problemas tomados del mundo real, PISA, como no podía ser de otro modo, afirma que las dudas no tienen razón de ser. Sobre un ejemplo del cuestionario del año 2006, podemos leer:

> En todo caso, lo que este ejemplo demuestra es que incluso un ejercicio relativamente sencillo, es decir, un ejercicio sometido a las restricciones que impone un estudio internacional a gran escala que ha de realizarse en poco tiempo, permite identificar el ciclo completo de la matematización y la solución de problemas.
>
> (OCDE, 2006, p. 76)

Intentar evaluar el grado de competencia a través de un cuestionario basado, en gran parte, en la resolución de problemas no parece una tarea sencilla porque, de hecho, enseñar a resolver problemas no es en modo alguno una tarea sencilla, como resaltó, por ejemplo, Schoenfeld (1985, 1992). PISA, por un lado, reconoce esas dificultades pero, por otro lado, afirma que es posible enseñar a resolver problemas (matematizar en general) siguiendo un esquema por pasos. Además, pretende evaluar el grado de competencia matemática de un alumno analizando lo que el alumno escribe en un cuestionario. Presupone que si un alumno resuelve un problema, se garantiza que el alumno comprende la función y razón de ser de todos los elementos que intervienen en el proceso. Evidentemente, la evaluación de competencias, a través del análisis de la respuesta de los alumnos a problemas, plantea dificultades que PISA. Como se observa en la cita anterior, obvia esas dificultades al ódemostrarô que un ejercicio sencillo permite "identificar el ciclo completo de la matematización y la solución de problemas".

El hecho de tratarse de una prueba internacional a gran escala obliga a utilizar un medio de obtención de datos viable para realizar el análisis. De ahí que se opte por plantear un buen número de preguntas en las que los alumnos deben marcar una de cuatro respuestas proporcionadas. En otras, se solicita al alumno que escriba una respuesta corta como solución o que escriba la respuesta y que justifique las razones de su respuesta, la vía de solución, etc. PISA sostiene que es posible identificar el ciclo completo de la matematización y la solución de problemas al observar, por ejemplo, qué opción de las cuatro disponibles ha marcado el alumno (o al leer la respuesta corta que ha escrito). Se parte de la suposición de que el alumno ha tomado la decisión de marcar esa opción porque ha resuelto el problema siguiendo un proceso adecuado. En resumen, el resultado de un problema proporciona todos los elementos necesarios para analizar el nivel de competencia de un alumno. Con base a esa premisa, en el informe de 2003, PISA estableció seis niveles de competencia. Los ejercicios son encuadrados en uno de los niveles, representando los problemas pertenecientes al nivel seis los más difíciles y los correspondientes al nivel 1 los más fáciles. Las respuestas de cada país proporcionan un índice que pretende valorar el nivel de competencia matemática alcanzada.

El esquema descrito se ha reproducido en España. Las competencias PISA fueron y son asumidas y, en el caso de la modelización, han tenido un reflejo en su introducción en nuevo Real Decreto. Como forma de evaluar el nivel de competencias alcanzado por los estudiantes españoles, el Ministerio incluyo en el Real Decreto que regulaba la ESO (Real Decreto 1631/2006) la realización de una prueba de evaluación de diagnóstico en 2º de ESO:

> Dicha evaluación tendrá carácter formativo y orientador, con el fin de colaborar en el análisis de los procesos de aprendizaje de cada alumno y de los procesos de enseñanza de cada centro y permitirá adoptar las medidas pertinentes de mejora antes de que el alumnado finalice la Educación secundaria obligatoria.
>
> (Real Decreto 1631/2006, p. 678)

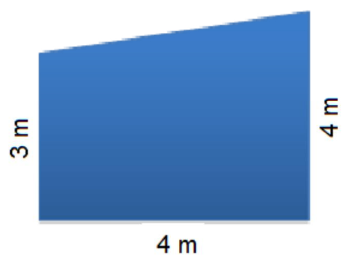
Como en el caso de PISA, en Galicia se establecieron niveles de competencia, enunciados como óniveles de rendimientoô, en las pruebas de evaluación de diagnóstico (Avaldia).

A diferencia de PISA, las preguntas de la evaluación de diagnóstico de la Comunidad Autónoma de Galicia son todas de respuesta tipo test o de respuesta corta. El alumno no debe justificar o mostrar su trabajo. Por tanto, en la determinación del nivel de competencia de los alumnos en Galicia, el resultado es el único elemento de análisis disponible.

En el curso 2013-1014, la prueba consistió en 26 preguntas. De ellas, 17 fueron tipo test y los alumnos debían marcar una de cuatro opciones disponibles. En 7 se le solicita al alumno que escribiera únicamente un resultado. En las dos restantes, debían escribir su respuesta de forma razonada y en la otra confeccionar un gráfico. La corrección de las pruebas se realizó mediante una plantilla suministrada por la Administración.

Además, no se les permitió el uso de la calculadora científica, en contra de las recomendaciones de PISA (OCDE, 2006), del MECD (Orden ECI/2220/2007o de la propia Xunta de Galicia (Decreto 133/2007). Como ejemplo se aporta una pregunta, relacionada con una cuestión anterior, en la que el alumno debe, sin calculadora, calcular la raíz cuadrada de 17. Como solución a la pregunta, la plantilla admitía dos resultados como correctos: *15,1* o *15,12*.

P.17. Una de las viviendas tiene la habitación que más me gusta. Este es el plano



P.18. Además, tengo previsto poner un zócalo de madera para bordear toda la habitación. ¿Cuántos metros tendré que comprar?

___________ metros.

Figura 12. Preguntas del cuestionario Avaldia (2013-2014)

Las críticas a la evaluación de PISA no se limitan a las centradas en su derivación en ópruebas de rendimientoô o en reválidas en España (como en el caso del Real Decreto 1105/2014). Una crítica general se centra en los objetivos y motivaciones de la OCDE y de PISA y en sus consecuencias. Se critica la influencia creciente de las pruebas estandarizadas y de las mediciones cuantitativas en la toma de decisiones de los gobiernos. Se pone en cuestión la validez de ese tipo de pruebas y, a modo de ejemplo, mencionan el caso de Finlandia y su inexplicable caída desde la cima del órankingô PISA. Se sostiene que ha provocado una búsqueda de soluciones óa corto plazoô para intentar mejorar los resultados, olvidándose del carácter formativo que debe tener la educación, al margen de las necesidades económicas. En ese sentido y, en función de su carácter de organización centrada en el desarrollo económico, se critica su legitimidad para inmiscuirse en asuntos educativos.

Evidentemente, existen también objecciones a PISA desde la Didáctica de la Matemática. La raíz del problema se encuentra en la concepción diferente sobre lo que son las matemáticas, sobre cómo enseñarlas y sobre las dificultades y obstáculos que conlleva el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Nos referiremos a continuación a los trabajos de Brousseau y Chevallard, relacionados directamente con lo que acabamos de decir.

1.8. Los obstáculos de Brousseau

Brousseau (1983) caracteriza y resalta la relevancia de los obstáculos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, diferenciando los obstáculos observables en la evolución histórica de un concepto o noción (epistemológicos) de otro tipo de obstáculos. Su caracterización de los obstáculos en la enseñanza de las matemáticas nace de la caracterización de los obstáculos de Bachelard. Para Bachelard es necesario ñplantear el conocimiento científico en términos de obstáculosò (Bachelard, 1938, p. 15), puesto que ñ(...) es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusionesò (Bachelard, 1938, p. 15). El conocimiento se construye superando esos obstáculos, de manera que los obstáculos forman parte del desarrollo científico. Así, el conocimiento se genera:

> (...) en contra del conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza la espiritualización. Un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar la investigación.
>
> (Bachelard, 1938, p. 15)

Bachelard caracteriza las confusiones y entorpecimientos inherentes al desarrollo científico como obstáculos epistemológicos y sostiene que esos obstáculos pueden ser observados en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación. Redunda en el hecho de que en las aulas se transmite un conocimiento científico sin tener en cuenta los obstáculos presentes en los alumnos, presentando el conocimiento científico como un saber cerrado y estático en lugar de un saber abierto y dinámico. En ese sentido, la crítica de Bachelard se aproxima a la crítica de Lakatos, si bien Bachelard limita sus ideas a las ciencias experimentales, excluyendo las matemáticas de su discurso por considerar que son ñuna maravilla de regularidadò que no conoce pausas ni errores (Bachelard, 1938, pp. 25-26).

Brousseau (1980, 1981, 1983, 1989) retoma la noción de obstáculo de Bachelard y la aplica a la Didáctica de la matemática, remarcando su importancia:

> Un obstáculo se manifiesta, por lo tanto, por sus errores, pero esos errores no se deben al azar. Fugaces, erráticos, son reproducibles, persistentes.
>
> Además esos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente sino correcta, un ñconocimientoò antiguo y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones.
>
> Esos errores no son forzosamente explicitables.
>
> Sucede que no desaparecen radicalmente, de un solo golpe, que resisten, que persisten, luego resurgen, se manifiestan mucho tiempo después que el sujeto haya rechazado de su sistema cognoscitivo consciente el modelo defectuoso.
>
> (Brousseau, 1983, pp. 173-174)

Glaeser (1981) enumera una lista de obstáculos en los números negativos, pero tomando la noción de obstáculo en un sentido amplio, en términos de dificultades e inaptitudes. Duroux (1982), en contra de Glaeser, afirma que el obstáculo debe ser un conocimiento y no una falta de conocimiento y propone las condiciones que debe cumplir una concepción para ser considerada un obstáculo. Brousseau, por su parte, establece una distinción clara entreóobstáculoô y ódificultadô:

> Muy a menudo, es entre las ñdificultadesò donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un obstáculo es un conocimiento, el investigador deberá hacer un esfuerzo para replantear la ñdificultadò que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (falso, incompleto. . .).
>
> (Brousseau, 1983, p. 190)

Su caracterización, con algunas modificaciones sobre la realizada por Duroux, es la siguiente:

> a) Un obstáculo debe ser un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
>
> b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
>
> c) Pero engendra respuestas falsas fuera de ese contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
>
> d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se enfrenta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

> e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada.
>
> (Brousseau, 1989, p. 43)

Para Brousseau (1983), existen tres tipos de obstáculos didácticos en función de su origen:

- *Obstáculos de origen ontogenético:* son los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto en un momento de su desarrollo.

- *Obstáculos de origen didáctico*: son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto del sistema educativo.

- *Obstáculos didácticos de origen epistemológico*: los obstáculos de origen propiamente epistemológica son aquellos a los cuales uno no puede ni debe escapar, asumiendo su rol constitutivo del conocimiento objeto de estudio. Uno puede encontrarlos en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido superados.

Posteriormente, incluyó un cuarto obstáculo cultural, que viene dado por el entorno cultural, donde se desarrollan conceptualizaciones erróneas y se utilizan en un sentido diferente al usado en matemáticas.

Según Brousseau, dentro de un trabajo de investigación sobre las concepciones y los obstáculos, juega un papel de gran importancia el estudio histórico epistemológico de la evolución de un determinado concepto o noción:

> Desde el principio, por tanto, los investigadores pueden:
>
> a) encontrar errores recurrentes, y mostrar cómo se agrupan alrededor de concepciones
>
> b) encontrar obstáculos en la historia de las matemáticas
>
> c) comparar obstáculos históricos con obstáculos en el aprendizaje, y establecer su carácter epistemológico.ò.
>
> (Brousseau, 1997, p. 99)

Así, parte de la idea de que el estudio epistemológico histórico de un determinado concepto o noción, puede dar claves para comprender algunos de los obstáculos o dificultades que se pueden presentar en los alumnos. De esa forma, para Brousseau, los obstáculos epistemológicos son sólo uno de los posibles obstáculos que se pueden presentar y que, a su vez, forman parte implícita del significado y ôconcepciónô de un objeto o noción. La influencia de las ideas de Brousseau es notable y, como consecuencia, los autores que se han ocupado de los obstáculos y de las concepciones sobre las nociones y conceptos es muy amplio, no siempre dándole el mismo sentido a la noción de obstáculo que la aportada por Brousseau. Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 224), por ejemplo, señalan la unanimidad en la consideración de qué es un obstáculo y la importancia del análisis histórico:

> Suele haber cierta unanimidad en que los obstáculos se manifiestan mediante errores reproducibles, con cierta coherencia interna (no se trata de errores impredecibles y arbitrarios), persistentes (siguen apareciendo después de que el sujeto haya rechazado conscientemente el "modelo" defectuoso), resistentes (muy difíciles de modificar) y relativamente universales. En el caso de los que tienen origen epistemológico, se postula que se pueden rastrear además en la génesis histórica de los conceptos en tela de juicio.

La mayor parte de los investigadores comparten la afirmación, expresada por Godino, Batanero y Font (2007, p. 129), de que el significado de un objeto matemático ñrequiere realizar un estudio histórico y epistemológico para encontrar el origen y evolución del objetoò. El ICMI, por ejemplo, (John Fauvel y J. A. van Maanen, (Eds.), 2000) promovió un estudio monográfico dedicado el uso de la historia en la educación y didáctica de la matemática. De esa forma, son abundantes los autores que se han ocupado del análisis histórico epistemológico de un concepto o noción. Cornu (1983, 1991), René de Cotret (1985), El Bouazzaoui (1988), Ponte (1992), Dubinski y Harel (1992), Sierpinska (1985a, 1985b, 1989, 1992), Kronfellner (1996), Ruíz Higueras (1993, 1998) o Biehler (2005), son algunos de los investigadores que se ocuparon de los obstáculos epistemológicos y del análisis histórico en relación con las funciones.

El estudio del concepto o noción y los obstáculos y dificultades, es una de las partes del problema de enseñar-aprender matemáticas, pero no es el único. El aula implica, en realidad, tres componentes básicos que se relacionan e interactúan: el saber, el profesor y el alumno. Las relaciones y complejidad de las mismas es uno más de los temas que representan un campo de investigación en didáctica de la matemática. Las relaciones entre profesor y alumno conllevan un acuerdo entre ambas partes sobre qué rol debe adoptar cada uno de ellos y cuáles son sus obligaciones y derechos en relación al saber a enseñar-aprender. Este conjunto de acuerdos o contrato, cuyas cláusulas no se explicitan, son asumidas por profesor y alumno. Brousseau (1986, 1988, 1990, 1991, 2007) lo denomina *contrato didáctico*.

A su vez, y recogiendo parte de las ideas de Brousseau, Chevallard propone un cambio en el contrato didáctico.

1.9. LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA Y EL MONUMENTALISMO

La situación en que se encuentran las matemáticas actualmente proviene de sucesivas ócrisisô en un proceso evolutivo que no debemos obviar. Un concepto o noción concreta, como podría ser el concepto de función es, en su versión moderna, producto de un proceso complejo y muy dilatado en el tiempo. Lo dicho para un concepto o noción matemática es aplicable a las matemáticas en su conjunto y, por tanto, a la enseñanza de las mismas.

La resolución de problemas nació, en gran parte, como consecuencia de la crisis del dogmatismo, tanto en su base epistemológica como en su traslado a la enseñanza como ómatemáticas modernasô. El abandono de las matemáticas modernas por la resolución de problemas representa una búsqueda de la esencia de lo que son las matemáticas y, por tanto, un intento de dar solución a los dificultades que surgieron como consecuencia de las tesis defendidas desde las matemáticas modernas. Al constatarse que la vía de las matemáticas modernas no representaba en modo alguno una solución definitiva, surgieron nuevas soluciones pero que mantuvieron el *monumentalismo* (Chevallard, 1991, 2001, 2004a, 2004b, 2006), fuertemente arraigado en la enseñanza. Lo que Chevallard denomina ómodelo epistemológico dominanteô en la enseñanza y el aprendizaje o óepistemología monumentalistaô, prima impartir saberes (aunque tomen la forma de actividades), presentados sin explicitar ni preocuparse por aclarar por qué surgieron y en qué momento, qué preguntas pretendían responder, cómo evolucionaron, etc. De esa forma, se transforman en *monumentos* que es necesario visitar y admirar pero carentes de significado como conocimiento matemático.

> Cuando el proyecto de formación está más basado en lo que el formador puede ofrecer que en lo que las personas en formación necesitan, los contenidos de la enseñanza - que pueden ser ñsaberesò con un claro componente teórico pero también ñsaberes-hacerò con una marcada orientación práctica - se convierten en ñobrasò o monumentos que los estudiantes deben conocer (en el sentido de ñhaber visitadoò), aunque ya nadie sepa muy bien por qué se construyeron un día ni para qué sirven hoy.

(Bosch y Gascón, 2009, p. 95)

Según Chevallard, en el proceso de enseñanza de las matemáticas se producen cambios que van desde el saber que se pretende transmitir (saber sabio), pasando por el saber que va a ser enseñado, hasta convertirlo en un objeto de enseñanza. Denomina al proceso como *transposición didáctica*.

objeto de saber ⟶ objeto a enseñar ⟶ objeto de enseñanza

Chevallard (1991, p. 46)

El objeto de saber es propuesto por el matemático (de ahí su calificativo de ósaber sabioô), pero el saber como objeto a enseñar y como objeto de enseñanza es fijado por otros elementos:

> Ciertamente, un matemático no puede desplegar allí los mismos argumentos que un maestro: puede recordar lo que debería ser el saber a enseñar y, por medio de una deducción que ya no le pertenece y sólo puede sugerir, puede recordar lo que debería ser el saber enseñado; pero no puede, a causa de su ilegitimidad en ese rol, promoverse al papel de pedagogo y decir cómo se debería enseñar.

(Chevallard, 1991, p. 29)

De esa forma, la enseñanza de las matemáticas tiene lugar en el seno de un *sistema didáctico* o de enseñanza que integra al saber enseñado, al enseñante y a los alumnos.

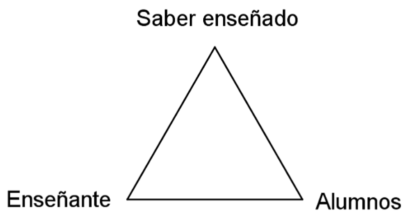


Figura 13. Sistema didáctico de Chevallard

Alrededor del sistema didáctico e influyendo sobre él, se encuentran otros elementos que integran lo que Chevallard llama noosfera[2]. Dentro de la noosfera, Chevallard (1991) distingue dos entornos diferenciados: por un lado se encuentra la periferia del sistema de enseñanza, en el que se toman decisiones relativas a qué y cómo enseñar, y un segundo nivel, que integra el entorno social en un sentido general y que influye sobre los otros entornos. Denomina a este sistema de enseñanza óampliadoô, de forma que integra a todos aquellos que tienen influencia sobre el sistema básico descrito en el esquema anterior, que denomina ósistema de enseñanza strictu sensuô.

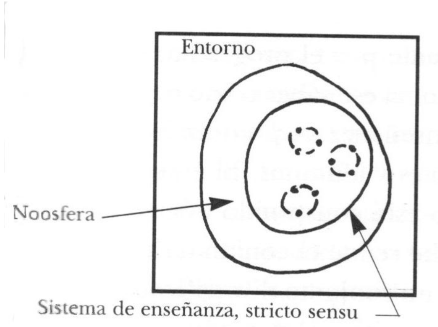


Figura 14. Chevallard, 1991, p. 28

De esta forma, la noosfera es un punto de encuentro:

> Allí se encuentran todos aquellos que, en tanto ocupan los puestos principales del funcionamiento didáctico, se enfrentan con los problemas que surgen del encuentro con la sociedad y, sus exigencias; allí se desarrollan los conflictos, allí se llevan a cabo las negociaciones; allí maduran las soluciones.
>
> En la noosfera, pues, los representantes del sistema de enseñanza, con o sin mandato (desde el presidente de una asociación de enseñantes hasta el simple profesor militante), se encuentran, directa o indirectamente (a través del libelo denunciador, la demanda conminatoria, el proyecto transaccional o los debates ensordecidos de una comisión ministerial), con los representantes de la sociedad (los padres de los alumnos, los especialistas de la disciplina que militan en torno de su enseñanza, los emisarios del órgano político).
>
> (Chevallard, 1991, p. 28)

La enseñanza de las matemáticas no puede desvincularse de los elementos que definen *qué* y *cómo* debe enseñarse, por lo que la enseñanza de las matemáticas se ve vinculada a las instituciones que intervienen en todos los procesos descritos. Como sostiene Gascón (2001), el fin del modelo epistemológico vinculado a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard es el siguiente:

> ¿Cuáles son las leyes que rigen la producción, la comunicación y la utilización del saber matemático en el seno de una institución, así como su transposición entre las diferentes instituciones?

[2] El término "Noosfera" se debe a Chevallard (Chevallard y Joshua, 1982). Godino (1991, p. 127) lo resume con la siguiente frase *"la capa exterior que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza".*

> (é)
>
> no puede separarse el estudio de la génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos del de la comunicación, la utilización y la transposición institucional de los mismos.
>
> (Gascón, 2001, p. 154)

En períodos de crisis, en un primer paso se postula un cambio de modelo desde el *saber sabio*, que es adoptado por las autoridades educativas posteriormente. En este primer paso, se fija el ópor qué enseñar matemáticasô y el ócómo enseñar matemáticasô, que parte siempre de un modelo epistemológico ódominanteô en esos momentos. El óqué enseñarô pasa a ser algo dependiente de la respuesta aportada a las anteriores preguntas y las autoridades educativas, una vez que han decidido llevar a la práctica el cambio de modelo, realiza recomendaciones basadas en el modelo propuesto, aprueba curriculums y efectúa evaluaciones. Todo este proceso intenta, al menos teóricamente, que el modelo se traslade a las aulas. Representa, en definitiva, una concreción de la respuesta a la pregunta óqué enseñarô y pretende influir en todos los elementos que intervienen en el sistema didáctico. A continuación se redactan manuales, libros y se confeccionan materiales que pretenden ótrasladarô (transponer) el curriculum a recursos concretos que el profesor pueda usar en las aulas. En esta fase, se convierten las ideas derivadas del modelo docente propuesto desde las autoridades educativas en material de uso práctico para el profesor. Se realiza así una primera transposición didáctica del saber sabio a saber enseñado, correspondiente al proceso que fija el ósaber a enseñarô, previo al trabajo del profesor que hace realidad el ósaber enseñadoô en una nueva transposición didáctica.

En este doble proceso se enfrentan sistemas de concepciones y creencias sobre las matemáticas: por un lado el observable en el modelo docente propuesto y con fuertes conexiones con un modelo epistemológico concreto y dominante (dónde se fija qué, por qué y cómo enseñar). Por otro, el modelo docente del profesor, con su propio sistema de creencias y concepciones y con bases epistemológicas propias.

Se produce un choque de modelos que obliga al profesor a tomar decisiones. Debe integrar o adaptar su modelo docente en el modelo docente propuesto desde la Administración. La posibilidad de integración o adaptación vendrá dada por la cercanía de modelos epistemológicos y docentes.

Podríamos calificar la situación a la que se enfrenta el profesor como un dilema, que intenta resolver mediante una adaptación del modelo propuesto desde las autoridades educativas a su propio modelo, si ello es posible. Por lo general, el profesor no conoce en profundidad las bases epistemológicas del modelo docente propuesto desde el saber sabio: únicamente conoce su versión curricular oficial y sus consecuencias sobre los libros de texto (determinadas en un primer nivel de transposición didáctica). El sistema de concepciones y creencias del profesor, basado en un modelo epistemológico, es persistente. De esa forma, si el modelo del profesor es tecnicista (Gascón, 2001), la transposición didáctica del nuevo modelo seguirá siendo básicamente tecnicista, aunque el nuevo modelo, tal y como se ha propuesto, no sea de base tecnicista. Lo mismo podríamos decir de otros modelos docentes (Gascón, 2001).

El profesor ha realizado un proceso de cambio a partir de su experiencia como profesor, en la que ha comprobado la utilidad de nuevos métodos y herramientas, siempre buscando los fines que su modelo epistemológico-docente propone. Así, realiza adaptaciones (muchas veces de forma inconsciente) de su modelo docente con el paso del tiempo. Pero la profundidad y complejidad del modelo epistemológico y docente del profesor hace muy difícil los cambios bruscos de modelo. De esta manera, al encontrarse con un nuevo modelo que debe aplicar, su propio modelo se verá modificado de forma superficial al intentar seguir el nuevo modelo propuesto desde el nuevo curriculum vigente. Por consiguiente, en una misma institución (Instituto de E.S., por ejemplo) conviven varios modelos docentes aunque, en la documentación oficial y administrativamente, el modelo sea único y coincidente con las recomendaciones de las autoridades educativas. De la existencia de una convivencia de diferentes sistemas coherentes de creencias y concepciones entre distintos profesores y, por tanto, de la convivencia de diferentes modelos de enseñanza, se hacen eco Gil y Rico (2003) en su encuesta sobre concepciones y creencias realizada a profesores de Educación Secundaria. En sus conclusiones (p. 44) afirman:

> La concepción general viene matizada por distintas creencias, que muestran diferentes criterios a la hora de establecer el contenido y las finalidades de la enseñanza-aprendizaje. Se detectan diversos sistemas de creencias coherentes, sostenidos por grupos reducidos de profesores. No podemos hablar de un conocimiento homogéneo y organizado de los profesores de matemáticas sobre enseñanza-aprendizaje.

Evidentemente, la modelización matemática no escapa a esta situación. La integración de la modelización en la enseñanza se produce en un marco determinado, que parte de un modelo epistemológico y docente de características propias. De ahí surgen las diferentes perspectivas que ya hemos mencionado. La cercanía entre modelos permite que se produzcan intentos de aproximación entre perspectivas sobre modelización inicialmente diferentes. El ejemplo de Carreira y Baioa que, como ya hemos mencionado, intenta integrar las ideas de la RME en actividades de modelización basadas en la experimentación, resulta ilustrativo. La opinión de Niss (2012) de que resulta posible una integración de la perspectiva vinculada a la RME y las MEAs es otro ejemplo de lo dicho.

Desde la TAD y, como afirma Gascón (2001, p. 155), se propone que no es posible hablar de modelo docente de forma independiente de la naturaleza de la disciplina objeto de estudio (determinada por el modelo epistemológico). Al mismo tiempo, no es posible ocuparse de la estructura, génesis y desarrollo del conocimiento matemático a un nivel lógico, histórico y psicogenético (determinado por el modelo epistemológico) sin incluir la dimensión didáctica (modelo docente). De esa forma, desde la TAD se pretende construir y utilizar un modelo epistemológico-didáctico que permita un análisis didáctico. Dicho modelo epistemológico-didáctico toma forma en las praxeologías matemático-didácticas.

1.9.1. Las praxeologías de Chevallard

Como forma de huir de la trivialización, reducción y descontextualización, Chevallard (1999) propuso las construcciones praxeológicas. Éstas hacen referencia al tratamiento que se realiza en el seno de la TAD del conocimiento y enseñanza de las matemáticas en términos de praxeologías. La praxeología (praxis+logos), identifica la praxis con *saber-hacer* y el logos con *saber*, de forma que está constituida por dos componentes o bloques praxeológicos. La praxis constituye un bloque práctico y técnico, mientras que el logos constituye un bloque tecnológico y teórico. La praxis englobaría el tipo o tipos de problemas, las cuestiones que pretenden estudiarse y las técnicas que se usan. El logos engloba los discursos, explicaciones y justificaciones de las técnicas que se usan, que reciben el nombre de *tecnología*, y la descripción, explicación y justificación del conjunto, que recibe el nombre de *teoría*. Así, alrededor de un tipo de tareas o problemas, T, se encuentra al menos una técnica, τ, una tecnología de τ, ϕ, y una teoría de ϕ , θ. El total, indicado por $[T/\tau/\phi/\theta]$, constituye una ópraxeología puntualô, usando ópuntualô como indicativo de que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Una praxeología está pues constituida por un bloque práctico-técnico, $[T/\tau]$, y por un bloque tecnológico-teórico $[\phi/\theta]$.

Las praxeologías responden a la necesidad de integrar el *saber* con el *saber hacer* en una tarea matemática pero obligan, al mismo tiempo, a ser vigilantes sobre óquéô se pretende enseñar. Dicho de otro modo, Chevallard (1991, p. 17) incide en la necesidad de que "El saber enseñado debe aparecer conforme al saber a enseñar", lo que obliga a una óvigilancia epistemológicaô.

La TAD intenta, mediante las praxeologías, que la enseñanza de las matemáticas integre la complejidad de las matemáticas y la complejidad de su enseñanza-aprendizaje. Dicho de otro modo, busca vías que integren el saber matemático en todas sus facetas. Los modelos precedentes y ya fracasados (al menos desde la perspectiva de la TAD), han limitado y cercenado alguna dimensión del conocimiento matemático, de forma que planteaban un modelo docente que trivializaba, en mayor o menor medida, el conocimiento matemático. Hablar en términos de praxeologías, de ingeniería didáctica, de una nueva Organización Didáctica o de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) busca acabar con esa trivialización y limitación (Bosch y Gascón, 2010; Fonseca, 2011). Como Gascón escribe:

> ¿Cuáles son las condiciones que deberían instaurarse en el Sistema de Enseñanza para posibilitar un tipo de actividad matemática funcional en el que tuviesen cabida todas las dimensiones de la actividad matemática y, como consecuencia, la construcción y la utilización pertinente de estrategias complejas de resolución de problemas no triviales? ¿Qué restricciones dificultan o incluso impiden la instauración de dichas condiciones?
>
> La respuesta de la TAD al problema así reformulado consiste en proponer un nuevo tipo de Organización Didáctica que permita llevar a cabo procesos de estudio verdaderamente funcionales.
>
> (Gascón, 2011, p. 44)

En cuanto a la modelización se refiere, para la perspectiva epistemológica toda actividad matemática es identificada como una actividad de modelización: ñgran parte de la actividad matemática puede identificarse (é) con una actividad de modelización matemáticaò (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 51). La modelización, por tanto, no se limita a la matematización de problemas no matemáticos:

> La modelización no queda limitada sólo a la ñmatematizaciónò de situaciones extramatemáticas, esto es, cuando la modelización intramatemática es considerada como un aspecto esencial e inseparable de las matemáticas y, en segundo lugar, cuando se dote de un significado preciso a la actividad de modelización dentro del modelo general de la actividad matemática.
>
> (Bosch, García, Gascón et al., 2006, p. 49)

De esa forma, la matematización y la modelización forman parte del desarrollo teórico, contribuyendo al proceso de creación de las matemáticas. De hecho, una idea central en la TAD, es considerar que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial y, recíprocamente, todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial. Como se ha indicado, critican la forma usual de presentar y enseñar las matemáticas, bajo la influencia de lo que denominan ómodelo epistemologíco dominanteô. El modelo epistemologíco dominante presenta el conocimiento matemático como un conocimiento cerrado, construido a partir de una forma de estudiar las matemáticas inmersas en el euclidianismo (definición-especulación-teorema-prueba). La modelización no escapa a esta forma de presentar y estudiar las matemáticas:

> La ñideologíaò imperante en las instituciones universitarias es la de la ñaplicaciónò: lo primero es aprender a manejar los modelos matemáticos supuestamente únicos y luego ya se verá como ñaplicarlosò a cada ámbito particular de trabajo. No se tiene en cuenta que, en muchas ocasiones, el modelo matemático que se pretende aplicar proviene de la matematización o modelización previa del sistema al cual queremos aplicar el modelo. En definitiva, se considera que la aplicación y la matematización (o modelización) son procesos independientes cuando, en realidad, son procesos inversos que se condicionan y dan sentido mutuamente.
>
> (Barquero, Bosch y Gascón, 2005, p. 2)

Por tanto, existe cierto acuerdo en el seno de la TAD en considerar la modelización como parte del proceso de creación matemática y no sólo una aplicación de conocimientos matemáticos a un caso concreto o un ejemplo.

1.9.2. Las competencias PISA y las praxeologías

Al otorgarle PISA a la resolución de problemas del mundo real la razón de ser y el fin de la matemática, reduce ésta a su aplicabilidad a un conocimiento fundamentalmente pragmático, entendido éste como aquél que resuelve problemas o cuestiones del mundo real. Con ese punto de partida y a nuestro entender, es natural que presuponga que en una tarea determinada, T, el elemento principal es la praxis, reduciendo el logos a un papel secundario sometido a la praxis, pues es la solución del problema el fin último de la actividad matemática. Desde nuestro punto de vista, PISA considera de facto una tarea o problema T como una terna $[T/\tau/\phi]$, reduciendo en la práctica una praxeología asociada a una tarea T al bloque práctico-técnico $[T/\tau]$. De esa forma, el bloque tecnológico-teórico $[\phi/\theta]$ se presupone integrado en el bloque anterior. Solo así es posible evaluar la competencia matemática a través de un cuestionario basado en la resolución de problemas centrados en el mundo real, algo mucho más difícil de hacer si se considera una tarea o problema como una praxeología completa $[T/\tau/\phi/\theta]$. Si la praxeología fuese completa, debería evaluarse el bloque tecnológico-teórico por medio del análisis de la respuesta aportada por el alumno, lo que proporciona las claves de los procesos (que integran praxis y logos) que han llevado a esa respuesta.

En definitiva, la reducción de la praxeología a la componente técnica, reside en la preeminencia de la valoración de resultados sobre la valoración o análisis de los conocimientos implícitos, los procesos y las relaciones complejas que se establecen y que llevan al resultado (correcto o incorrecto).

Como afirma Gascón (2011, p. 25), lo importante en la competencia es el fin, alcanzado mediante un *saber hacer*: ñDe hecho, la noción competencia pone el acento en la capacidad de actuación o saber hacer y en las prácticas orientadas hacia una finalidad.ò

Asociado e íntimamente ligado a lo anterior se halla la suposición implícita que realiza PISA de que la competencia integra la comprensión. Se trata de una condición que se vuelve indispensable para evaluar el conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas, tal y como se pone en práctica en las evaluaciones PISA. Según Godino (2002, p.10):

> ñTanto la competencia como la comprensión ponen en juego conocimientos. En el primer caso se trata de conocimientos de tipo procedimental, en el segundo conceptual y argumentativo. En el caso de las matemáticas, ambos tipos de conocimientos están íntimamente relacionados, aunque en la práctica de la enseñanza y el aprendizaje matemático puede haber una separación y descoordinación entre ambas facetas.ò

Godino establece una visión particular sobre las relaciones entre ćcompetenciaô y ćcomprensiónô, realizando una distinción entre ambas. La distinción proviene de la constatación de que un sujeto puede poseer competencias prácticas específicas, que le capacitan para resolver con éxito ciertas tareas matemáticas empleando determinadas técnicas operatorias, sin dominar simultáneamente el componente discursivo necesario para argumentar y justificar el empleo de estas técnicas. Atribuyéndoles un significado a la vez distinto y complementario, relacionado con los componentes operatorios y discursivos del conocimiento, Godino (2002, p. 10) afirma:

> ñ(é) las expresiones del tipo, ñA es competente para realizar la tarea Tò, indican que el sujeto A domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica *t* que resuelve o permite hacer bien la tarea T. En esas circunstancias decimos que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o también que ñconoce cómo hacerò la tarea. En cambio, la expresión, ñA comprende la técnica t que permite realizar la tarea Tò se aplica si A conoce porqué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas. Por tanto, nos parece que ambas nociones cognitivas se complementan mutuamente. La competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico o relacional del conocimiento.ò

Esa condición complementaria de la competencia y la comprensión entraña, al mismo tiempo, un problema motivado por la convivencia de esas dos nociones o componentes cognitivas diferenciadas. Así, un sujeto puede poseer una competencia específica o *saber cómo hacer* determinada tarea sin, necesariamente, comprender y *saber por qué* puede emplear dicha técnica ni ser capaz de justificar razonadamente su pertinencia y validez. Esto, como afirma Godino, puede traer consigo una separación entre ambos conocimientos. De esa forma, la asociación de la competencia con un *saber hacer*, poniendo en juego conocimientos de tipo procedimental, puede llevar a que la segunda componente cognitiva, identificada con el *saber* y el conocimiento conceptual y argumentativo, sea relegada a un segundo plano. Centrándonos en el caso concreto de la modelización, se puede producir una desconexión entre *saber hacer* una modelización y construir un modelo y *saber* modelizar y construir modelos.

1.10. CONCEPCIONES Y OBSTÁCULOS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

El concepto de función juega un papel de gran importancia en las matemáticas, tanto en su desarrollo histórico como en su enseñanza. Dada su importancia, el estudio de la Historia de la Matemática es también el estudio de la evolución del concepto de función. Con tal motivo, los trabajos sobre la Historia de la Matemática se convierten en una referencia para el estudio del concepto de función (Petersen, 1974; Youschkevitch, 1976; Bell, 1945; Collette, 1985; Boyer, 1986; Luzin, 1988a, 1988b; Jahnke, 2003; Thiele, 2000, 2003).

En el estudio del concepto de función desde una perspectiva de su enseñanza, se usa la Historia de la Matemática de una forma más o menos extensa. Destacamos en ese sentido los trabajos de Piaget (1977), Malik (1980), Cornu (1983), René de Cotret (1985), Kleiner (1989), Eisenberg (1991), Sierpinska (1992), Dubinsky y Harel (1992), Ponte (1992), Ruíz Higueras (1993, 1998), Siu (1995), Kronfellner (1996) o Biehler (2005).

1.10.1. Las dificultades para decidir en qué momento surge el concepto de función

Según Boyer (1986), la época o civilización babilónica se puede encuadrar en el tiempo en el período que va del año 2000 a.C. hasta el 600 a.C. En ese período de tiempo, los habitantes de la región mesopotámica escribieron, sobre tablillas de arcilla y en escritura cuneiforme, una gran cantidad de información. Los babilonios confeccionaron numerosas tablas, siempre usando un sistema de numeración sexagesimal, entre las que se encuentran tablas de multiplicar, de cuadrados, de cubos, de recíprocos, de raíces cuadradas y de raíces cúbicas. Se encuentran también tablas que incluyen las potencias sucesivas de un número dado, lo que permitiría resolver problemas análogos al cálculo de un antilogaritmo. También tablas con los valores $n^3 + n^2$ para los 30 primeros números naturales, pudiendo resolver así algunos casos de ecuaciones cúbicas.

Sí el uso de tablas por la civilización babilónica representa la primera referencia histórica de la noción de función es algo sobre lo que no hay acuerdo. Para Bell (1945, p. 40), el uso de las tablas representa una primera concepción de la noción de función:

> ¿No sería excesivamente generoso concederles el crédito de tener el instinto de la funcionalidad?; ya que se ha dado como definición sucinta de una función lo que no es más que una tabla o una correspondencia.

Piaget (1977, p. 143) coincide con Bell al afirmar:

> Los Babilonios ciertamente estudiaron lo que nosotros podríamos llamar funciones y durante la antigüedad fueron realizadas innumerables tablas de números cuyo propósito exacto algunas veces desconocemos pero cuyo carácter funcional es evidente.

Pedersen (1974) coincide con Bell y Piaget en aceptar que el uso de las tablas representa un cierto acercamiento al concepto de función, aunque lo sitúe en el tiempo en las tablas del Almagesto del siglo II. Kleiner (1989) también opina que el concepto de función aparece de forma implícita en la antigüedad pero sitúa su aparición mucho más tarde. Según Kleiner, no aparecerá de forma explícita hasta el s. XVIII, indicando que no surge de forma explícita con anterioridad por la falta de prerrequisitos algebraicos y por una falta de motivación para que surja el concepto.

Youshkevitch (1976, p.13) niega que el concepto de función aparezca asociado a la confección de tablas: ñEl pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de variable o de función.ò

En la misma línea, Luzin (198la), coincide con Youshkevitch en que las matemáticas babilónicas desconocían el concepto de función. Como veremos, sitúa el nacimiento del concepto en una época muy posterior y asociado al debate sobre la cuerda vibrante.

Es, por tanto, un motivo de debate afirmar si el uso de tablas representa un acercamiento del concepto de función o no. Íntimamente ligado a este concepto, se encuentra el de variable, de relación entre conjuntos y la consideración de una función como un relación. Así, la consideración de si las tablas babilónicas representan una forma de generalización o no, se convierte en un problema fundamental. Boyer (1986) afirma que las tablas babilónicas representan una forma de generalización de hechos concretos pero, como hemos visto, no es una opinión aceptada por todos:

> El hecho de que no se haya conservado ningún planteamiento general de estas reglas no significa necesariamente que no había existido en el pensamiento antiguo conciencia de la generalidad de dichas reglas o principios; si no hubiera, de una manera u otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los diferentes problemas del mismo tipo. Tan extensas colecciones de problemas semejantes no pudieron ser resultado del azar.
>
> (Boyer, 1986, p. 66)

Trasladándonos en el tiempo a la matemática griega, Pedersen (1974) menciona el Almagesto de Ptolomeo, obra centrada en la trigonometría y la astronomía. La exactitud de los cálculos de Ptolomeo, indica el gran desarrollo conseguido por la matemática griega, pero no queda claro si esas tablas representan un cambio cualitativo respecto a las tablas babilónicas.

Para Bell (1945), Arquímedes anticipó el método del cálculo diferencial en su construcción de tangentes a la espiral. Como hemos indicado antes, otros autores no sitúan el nacimiento de la noción de función hasta mucho después. Es el caso de Thiele (2003, p.1) que, hablando de las cuatro raíces de las que, según él, surge el Análisis, considera que ñEstas raíces no se pueden encontrar explícitamente en las matemáticas griegasò. Además, para Thiele afirmar que la matemática antigua se aproximó a comprender el concepto de función puede representar caer en un anacronismo, al interpretar los hechos antiguos desde una perspectiva moderna:

> Por supuesto, podemos proyectar familiares, modernas visiones sobre los griegos como, por ejemplo, que las cuerdas de un círculo confeccionadas por Ptolomeo en términos del círculo correspondiente como funciones (trigonométricas) en forma tabular. Pero ésta no corresponde con la visión griega del problema (é).
>
> De vez en cuando, comparaciones anacrónicas como la que se acaba de dar ayudan a dilucidar hechos documentados pero no a interpretar su historia.
>
> (Thiele, 2003, p. 1)

Según Thiele, hay cuatro cambios, avances o óraícesô históricas que llevaron a desarrollar al concepto de función. Thiele menciona a Oresme como el primer matemático que contribuyó a desarrollar la idea de función.

> Mirando atrás el desarrollo del Análisis desde un punto de vista moderno, encontramos cuatro raíces: operaciones con letras (álgebra) (Viète, Descartes); geometría analítica (Fermat, Descartes); la idea de función, que es el concepto fundamental del análisis (Oresme, Joh. Bernoulli, Euler) y el estudio del número real (Bolzano, Dedekind, Cantor).
>
> (Thiele, 2003, p. 1)

Durante el siglo XIV las escuelas de París y Oxford intentaron aplicar las matemáticas a ampliar el conocimiento de la naturaleza y, tomando como base las ideas de Aristóteles, intentaban dar una explicación cuantitativa racional a los fenómenos naturales. Para algunos, como Youschkevitch, sus esfuerzos y logros representan la primera aproximación histórica a la noción de función en el sentido moderno.

> La noción de una función aparece por primera vez en una forma más general tres siglos después [durante el siglo XIV] en las escuelas de filosofía natural de Oxford y París.
>
> (Youschkevitch, 1976, p. 45)

Oresme, uno de los grandes representantes de la escuela de París, es considerado por algunos como el primero que ha hecho una representación gráfica en coordenadas de una función. En su obra ñTractatus de latitudinibus formarumò (Tratado de las formas), impresa en 1505, utiliza representaciones gráficas para estudiar el movimiento. La representación en coordenadas no era nueva en la época de Oresme, pero la gran novedad que encontramos en Oresme es el uso de las coordenadas como útil para estudiar una cantidad variable.

Según Oresme, todo lo que varía puede ser representado. Oresme trasladó al plano la longitud y la latitud, usadas anteriormente por los geógrafos en sus represtaciones de la Tierra, realizando representaciones mediante un sistema que se aproxima a los ejes cartesianos. Mediante este sistema, Oresme estudió especialmente, como función del tiempo, el movimiento úniformemente uniformeô (velocidad constante), úniformemente deformeô (aceleración constante) y ódeformemente deformeô (aceleración no constante). Obtuvo diferentes tipos de gráficas que caracterizan el movimiento: rectángulo en el primero caso, triángulo y trapecio en el segundo y una figura donde el borde no es una línea recta en el tercero. La suma total de los segmentos verticales (velocidad) representará, según Oresme, la distancia total recorrida.

Así, las gráficas obtenidas por Oresme, intentan establecer relaciones desde lo cualitativo más que desde lo cuantitativo, representando la relación entre magnitudes mediante un modelo gráfico.

Para Boyer, opinión compartida por otros autores, la contribución de Oresme representa un antecedente a la geometría analítica y a la representación gráfica de las funciones (Boyer, 1986, p. 341 y 339): ñsus representaciones gráficas se parecen mucho ya a nuestra geometría analíticaò; ñAquí vemos, desde luego, una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos representación gráfica de funcionesò.

Para otros, la geometría analítica no nacería hasta Descartes y Fermat. Bell se hace eco de la controversia, que se reproduce también en lo que se refiere a si lo realizado por Oresme representa un antecedente de la representación gráfica de una función o dónde se produce un cambio significativo en la evolución del concepto de función:

> Pero el uso de las coordenadas no justifica que nadie reclame para sí una prioridad en el invento de la geometría analítica, como tampoco lo justifica el uso intensivo de gráficos.
>
> Se podrían mencionar docenas de opiniones para cada lado; las dos que hemos elegido bastaran para orientar lo que le interese y para que pueda comenzar a formar un juicio crítico propio.
>
> (Bell, 1985, p. 146)

Lo realizado por Oresme aún no puede ser considerado, en el sentido moderno, una representación gráfica de una función sino, en todo caso, sólo un importante antecedente. Entre las razones que impidieron el salto se encuentran concepciones aún ligadas al pensamiento griego y a la falta de un álgebra avanzada.

> Lo que necesitaba aquí Oresme era, naturalmente, una geometría de tipo algebraico en vez de una representación gráfica tal y como la que tenía en mente, pero las imperfecciones y dificultades técnicas de diversos tipos obstaculizaron el desarrollo europeo a lo largo de todo el período europeo.
>
> (Boyer, 1986, p. 341)

Los avances que se produjeron durante el Renacimiento en álgebra y otros campos de la matemática, van a permitir que posteriormente las limitaciones mencionadas por ejemplo, por Boyer, Kleiner (1989) o Thiele (2003), sean superadas.

Viète en el s. XVI y usando el álgebra sincopada, introduce importantes cambios de notación y distingue ya entre parámetro e incógnita.

> Aquí nos encontramos por primera vez en álgebra una distinción clara entre el importante concepto de parámetro y la idea de incognita
>
> (Boyer, 1986, p. 387)

Napier y Bürgi descubren los logaritmos, aunque no los ligan al concepto de función.

> La idea de función logarítmica está ya implícita en la definición de Napier y en toda su obra sobre los logaritmos, pero el hecho es que esta relación funcional no ocupaba el primer plano de su pensamiento.
>
> (Boyer, 1986, p. 398)

En el s. XVI, Stevin se aproxima a conceptos e ideas que veremos plasmadas por Newton y Leibnitz en su cálculo infinitesimal.

Basándose en parte en los trabajos de Oresme, Kepler usa un rudimentario cálculo integral y Galileo se ocupa de lo infinitamente pequeño, aplicándolo a la dinámica. Galileo introduce una importante novedad: combina dos movimientos de características distintas. Para sus estudios del movimiento de un proyectil representa en una línea horizontal una magnitud uniforme y en una línea vertical una magnitud uniformemente acelerada. Usa magnitudes no homogéneas y obtiene por resultado la gráfica de una curva, una parábola. Cavalieri, discípulo de Galileo, utiliza los infinitésimos en sus razonamientos geométricos lo cual tendrá consecuencias más tarde.

Pero serán Fermat y Descartes, ya en el s. XVII, los que contribuirán de forma decisiva a un cambio de ideas y concepciones. Se puede decir que hay acuerdo en que Fermat y Descartes representan un momento de cambio que permitirá, posteriormente, un desarrollo relativamente rápido del concepto de función. La importancia de sus contribuciones radica en su uso del álgebra para el estudio de la geometría. Pero en el camino no sólo usan la representación en ejes cartesianos de puntos en el plano, sino se refieren claramente a variables y dependencias entre variables, expresables mediante una ecuación.

> Entonces, si tomáramos sucesivos e infinitos números de diferentes valores para la línea y, podríamos obtener un número infinito de valores para la línea x, y por lo tanto una infinidad de diferentes puntos, como C, lo que significa que la curva buscada puede ser dibujada.
>
> (Descartes, cit. por Siu, 1995, p. 1089

> Tan pronto cómo dos cantidades desconocidas aparecen en una ecuación final, tenemos un lugar [geométrico], y el punto final de las dos cantidades describe una línea recta o una línea curva.
>
> (Fermat, cit. por Siu, 1995, p. 108)

Para Youschkevitch (1976), es con Descartes y Fermat donde aparece por primera vez y de una forma clara la idea de que una ecuación en *x* e *y* es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades variables, lo que permite calcular valores de una de ellas a partir de valores de la otra. El nacimiento de la geometría analítica es una de las grandes contribuciones de Descartes y Fermat y, aunque no formularon el concepto de función, su trabajo abrió el camino claramente al nacimiento del concepto de función en un sentido moderno.

> Como sabemos, la teoría de funciones sacó finalmente un gran partido de la obra de Descartes, pero lo cierto es que la idea de ñformaò o de ñfunciónò no pareció jugar ningún papel entre las motivaciones que condujeron a la geometría cartesiana.
>
> (Boyer, 1986, p. 409)

Laplace llega a afirmar que Fermat es el verdadero inventor del cálculo diferencial y para Boyer sus estudios sobre cálculos de máximos y mínimos, de cálculos de tangentes mediante el ómétodo de valores próximosô (que se aproxima a la idea de límite), y de áreas cerradas bajo curvas, representan un adelanto de los procesos de cálculo diferencial.

Bell comparte la misma opinión:

> Si lo aceptamos en todo su valor, Fermat es inventor del cálculo diferencial.
>
> La conclusión parece ser que o bien nadie en el siglo XVII inventó el cálculo diferencial, o que Fermat fue uno de los que lo inventaron.
>
> (Bell, 1985, pp. 153-154)

En el mismo período histórico, son varios los matemáticos que comenzaban a intuir los principios del cálculo infinitesimal. Si es cierto que son Wallis y Barrow los que mayor influencia tuvieron sobre Newton, también es cierto que Cavalieri había utilizado anteriormente los indivisibles desde un punto de vista geométrico. La influencia de Cavalieri en los trabajos posteriores es destacada por varios autores, como Collette (1985, Vol I, p. 317):

> Wallis abandonó el marco geométrico, asociando valores numéricos a los infinitos indivisibles de las figuras. Así, en 1665, Wallis realizará una aritmetización de lo hecho por Cavalieri en su obra *Arithmetica Infinitorum*, usando el álgebra en sus cálculos con series infinitas.

Barrow también se ocupa de los indivisibles, aunque apartándose de las ideas de Wallis. Barrow sigue métodos fundamentalmente geométricos en lugar de los algebraicos de Wallis, lo que le impidió desarrollar el cálculo infinitesimal, cálculo que desarrollaría su discípulo Newton. Pero, de todas maneras, sus trabajos sobre cálculos de tangentes y cuadraturas contribuyeron decisivamente el nacimiento del cálculo infinitesimal, hasta el punto de que para Boyer es la mayor influencia sobre las ideas de Newton (Boyer, 1986, p. 449):

> Newton, ya en 1664, expresaba funciones en términos de series infinitas. La influencia del cálculo con series infinitas en su método de las fluxiones se ve reflejada en el título del libro de 1742, publicado anteriormente en 1736, bajo el descriptivo título ***ñ**Methodus fluxionum et serierum infinitorum**ò***, donde describe su método de fluxiones.

Newton consideraba las variables *x* e *y* como cantidades que fluyen o ***ñ**fluentes**ò*** y las velocidades de variación como ófluxionesô. Si bien las fluxiones se tratan en el libro de Newton antes citado, en realidad Newton describió su joven método de cálculo por primera vez en 1687 en el ñPhilosophiae naturalis principia matemáticaò. En dicho libro aparecen las nociones órazón primera de incrementos nacientesô y órazón última de incrementos evanescentesô, representando un uso aproximado de la noción de límite.

Su cálculo, que comenzó como un tratamiento de los óinfinitamente pequeñosô y que sustituyó posteriormente por las órazones nacientesô y órazones evanescentesô, estuvo desde luego sometido a las críticas, como las del arzobispo Berkeley o, más tarde, las de D'Alembert. Las dificultades u obstáculos no se resolverían hasta años después de la muerte de Newton, ya en los siglos XIX y XX.

> ¿Y qué son estas fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. ¿Y qué son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, ni tampoco se reducen a la nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de cantidades desaparecidas?
>
> (Berkeley, cit. por Boyer, 1986, p. 540)

> Una cantidad es algo o nada; sí es algo, aun no se desvaneció; si no es nada, ya se desvaneció literalmente. La suposición de que hay un estadio intermedio entre estos dos es una quimera.
>
> (D'Alembert, cit. por Boyer, 1986, p. 567)

Pero, de todas formas, el joven cálculo de Newton representó una revolución. Los métodos descubiertos por Newton le permitieron efectuar, mediante un algoritmo general, diferenciaciones e integraciones de funciones tanto algebraicas como trascendentes. Newton, al mismo tiempo, era consciente de que la diferenciación y la integración representan procesos inversos.

Leibnitz estaba más preocupado que Newton por los aspectos lógicos de las matemáticas y por la claridad de los conceptos. Eso le llevó a ser un gran creador de símbolos adecuados y a contribuir de forma determinante a los avances que se producirían a continuación.

> Parece que se puede afirmar sin miedo a confundirnos que sin la lógica matemática que preconizó Leibnitz, y que comenzó a crear, la obra crítica del siglo XX sobre los fundamentos del análisis, y en realidad de toda la matemática, hubiera sido humanamente imposible.
>
> (Bell, 1985, p. 159)

Se ocupó, como Newton, del uso de series infinitas y a él se deben las notaciones dx y dy para el tratamiento de las diferenciales y $\int$ como símbolo para denotar la integración. También introduce f como forma de representar una función, noción que para Leibnitz no tiene aún el significado moderno. Con el ócalculus differentialisô y el ócalculus integralisô, se ocupa del uso de la diferencial para el cálculo de máximos, mínimos y tangentes y de la integración para el cálculo de cuadraturas. Leibnitz desprecia infinitésimos de orden superior para obtener fórmulas de cálculo y usa la integral, como método inverso de la diferenciación, para el cálculo de cuadraturas. De esa forma, los descubrimientos de Newton y Leibnitz siguen caminos que conducen a ambos al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal. Con el paso del tiempo, será la ódiferencialô de Leibnitz la que permanezca en lugar de la ófluxiónô de Newton.

En las citas mencionadas de Berkeley o D'Alembert, encontramos una clara controversia alrededor de un concepto fundamental en el Análisis. Se trata del concepto de límite. El concepto o noción de límite es parte fundamental del Análisis, aunque no juegue, a priori, papel ninguno en el concepto de función.

Ni Newton ni Leibnitz definieron o intentaron definir una función. No es hasta el s. XVIII cuando surge la primera definición, ya con un cambio apreciable de concepción y que irá evolucionando incluso durante el s. XX.

> Los predecesores de Euler, en la mayoría de los casos, elaboraron el cálculo diferencial e integral en relación estrecha con la geometría, el método antiguo. En cambio, él transforma el cálculo en una teoría formal de funciones que no requiere concepciones geométricas. Además, Euler fue el primer matemático que hizo hincapié en el concepto de función.
>
> (Collette, 1985, Vol II, p. 191)

> Todos los conceptos iniciales del cálculo pierden gradualmente su caparazón geométrica y mecánica, tomando un planteamiento aritmético o algebraico.
>
> (Youschkevitch, 1976, p. 35)

El primero en intentar definir una función fue Jean Bernoulli, quien en carta a Leibnitz en 1694 define función como ñuna cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias.ò (Bernoulli, cit. por Boyer, 1986, p. 531). Jean Bernouilli utiliza ya x (sin paréntesis) al referirse a una función. Pero será con Euler cuando se abra el camino definitivamente con su ñIntroductio in analysis infinitorumò (1748).

Para Euler, el análisis matemático es la ciencia de las variables y sus funciones. Su visión es algebraica y no geométrica. Antes de su definición de función define constante y variable:

> Una cantidad constante es una cantidad determinada que mantiene el mismo valor permanentemente.
>
> Una cantidad variable es una cantidad variable o universal que comprende en sí misma todos los valores determinados.
>
> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes.
>
> (Euler, cit. por Siu, 1995, p. 109)

Utiliza la forma óexpresión analíticaô para definir función. Sin definir que es una óexpresión analíticaô, restringe la función a aquella expresable como una fórmula o expresión algebraica. Realiza también una clasificación de las funciones en algebraicas y trascendentes. Las algebraicas las divide en racionales e irracionales y las racionales en enteras y fraccionarias. Distingue también entre funciones continuas y discontinuas, aunque en un sentido diferente del actual. Para Euler, una función es continua si es expresable mediante una única expresión analítica y discontinua (también la llama mixta o irregular) si precisa de varias expresiones analíticas para ser descrita en intervalos diferentes. Más tarde, Euler incluyó, también bajo la denominación de función, las curvas que podían ser dibujadas a mano alzada en el plano.

Posteriormente y generalizando la definición de Euler, Lagrange en su ñThéorie des fonctions analitiqueò (1797) y Lacroix en su ñTraité du calcul différentiel et du calcul intégralò (1787) darán sus definiciones de función:

> Se llama función de una o varias cantidades a cualquier expresión de cálculo en la que esas cantidades aparecen de cualquier manera, mezcladas o no con otras cantidades relativas a valores invariables dados, mientras que las cantidades de la función pueden tomar todos los posibles valores é
>
> Denotamos, en general, por la letra f o F ubicada antes de la variable cualquier función de esta variable, lo que es decir cualquier cantidad dependiente de la variable y que varía junto con ella acorde con una ley dada.
>
> (Lagrange, cit. por Siu, 1995, p. 109)
>
> Cualquier cantidad cuyo valor depende de una o más cantidades es llamada función de estas últimas, independientemente de si se conocen o si se es ignorante de las operaciones necesarias para llegar de estas últimas a la primera.
>
> (Lacroix, cit. por Siu, 1995, p. 109)

Jean Bernoulli inicia un debate a raíz del estudio de las ecuaciones que rigen el movimiento de una cuerda vibrante y que para Luzin (1988la, 1988b) representa, históricamente, el nacimiento del concepto de función. Luzin hace una descripción extensa del proceso histórico, que inicia y que continuarán Daniel Bernoulli, Euler, D'Alembert, Lagrange y Fourier. De la misma opinión es Collette (1985, Vol. II, p. 343), Siu (1995, p. 110-11) o Kleiner (1989, pp. 285-288), para quienes el debate sobre la cuerda vibrante enfrentó concepciones diferentes y contribuyó el desarrollo del concepto moderno de función. En el proceso de estudio sobre la cuerda vibrante surgen, de forma clara, los problemas asociados a la concepción de una función como una expresión analítica o una serie de potencias (Lagrange) y sus relaciones con las nociones de límite, continuidad y derivabilidad. El proceso culmina con la demostración de Fourier de que algunas funciones discontinuas podían representarse mediante una serie (serie de Fourier) y la definición de función de su libro ñThéorie analytique de la Chaleurò (1822):

> En general, la función (x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas (x)é No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a la otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuese una cantidad sola.
>
> (Fourier, cit. por Siu, 1995, p. 112)

Cauchy, en ñCours d'analyseò (1821), aún utilizaba una definición próxima a las concepciones anteriores a Fourier:

> Si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable.
>
> (Cauchy, cit. por Siu, 1995, p. 112)

En 1837, Dirichlet usa la concepción de función en el sentido en que la usa Fourier e inmediatamente después de dar su definición, define una función continua (en un sentido ya moderno):

> y es una función de la variable x, definida en un intervalo $a<x<b$, si a todo valor de la variable x en ese intervalo le corresponde un valor definido de la variable y. Además, es irrelevante en qué modo se establece esa correspondencia.
>
> (Dirichlet, cit. por Kleiner, 1989, p. 292)

En 1838, Lobachevsky aporta su definición de función en la línea de la aportada por Dirichlet y vinculada a su continuidad:

> Una concepción requiere que una función de x es un número que está dado para cada x y que cambia gradualmente junto con x. El valor de la función puede estar dado mediante una expresión analítica o mediante una condición que ofrece una manera de probar todos los números y seleccionar uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir pero ser desconocida.
>
> (Lobachevsky, cit. por Siu, 1995, p. 113)

Dirichlet, en 1829, aporta un ejemplo de una función que no era continua en ninguno de sus puntos lo que la excluiría cómo función en caso de usar la definición de Lobachevsky:

$$f(x)=\begin{cases} c \ \ si\ x\ es\ racional \\ d\ si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

Hankel, en 1870, destaca la confusión existente sobre el concepto y definición de función:

> Uno define función esencialmente en el sentido de Euler, otra requiere que y debe cambiar con x según alguna ley, sin dar una explicación de este oscuro concepto; la tercera la define de la misma manera que Dirichlet, la cuarta sin más no la define. Sin embargo, todo el mundo deduce de su concepto conclusiones que no están contenidas en él.
>
> (Hankel, cit. por Kleiner, 1989, p. 294)

Previamente, Cauchy había definido la continuidad y la diferencial, usando los límites como base para realizar sus definiciones. Las definiciones de Cauchy y otros en esta época dan lugar a funciones ómonstruosasô, en el sentido que usa Lakatos (1976). Los òmonstruosoò plantean tanto cómo definir correctamente una función como las relaciones existentes entre continuidad, derivabilidad e integrabilidad. Como consecuencia, se produce un alejamiento de los conceptos intuitivos utilizados por los matemáticos de la época. Tal y como dice Poincaré en 1899:

> Antes, cuando se inventaba una joven función era con una meta práctica. Hoy son inventadas a propósito para mostrar que el razonamiento de nuestros antepasados fallaba y nunca obtendremos más que eso de ellas. Si la lógica había sido la única guía del profesor, tendría que comenzar por lo más general, es decir, las funciones más estrambóticas. Debería proponer al principiante luchar con esta colección de monstruosidades.
>
> (Poincare, cit. por Siu, 1995, p. 115)

Se clarifican las cosas gracias a los avances en otras áreas y al trabajo de, por ejemplo, Riemann y Weierstrass. Goursat, en 1923, dio una definición que puede encontrarse en un libro de texto actual:

> La moderna definición de la palabra función, se debe a Cauchy y Riemann. Se dice que y es una función de x sí a cada valor de x le corresponde un valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la expresión y = (x).
>
> (Goursat, cit. por Siu, 1995, p. 105)

Suppes, en 1960, define la función ya plenamente como una terna. Lo hace de una manera formalizada, definiendo previamente órelaciónô:

> A es una relación $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(x = (y,z))$.
>
> f es una función $\Leftrightarrow$ es una relación y $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)(x\ f\ y$ e $x\ fz \Rightarrow y = z)$
>
> (Suppes, cit. por Siu, 1995, p. 105)

Como hemos visto, el concepto de función tiene un desarrollo histórico muy dilatado en el tiempo y se observan claramente diferentes concepciones o creencias y obstáculos, aunque no haya acuerdo sobre cuál es el número de ellos o cuándo aparece determinada concepción u obstáculo. En el siguiente apartado haremos referencia a los obstáculos y concepciones descritos por Ruíz Higueras.

1.10.2 Concepciones y obstáculos epistemológicos del concepto de función

Ruíz Higueras (1983, 1998), al igual que René de Cotret (1985), realizó un análisis histórico que le permitió identificar las concepciones y obstáculos del concepto de función.

Ruíz Higueras sitúa el nacimiento de la primera concepción (ñIdentificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variablesò) en la matemática prehelénica y la asocia a la representación de óMedidas de cantidadesô y óTablasô. Para esta autora, la búsqueda de generalización o regularidades caracteriza la existencia o no de una cierta aproximación al concepto de función:

> Las tablas numéricas recogidas en los trabajos de numerosos matemáticos, construidas mediante el cálculo de valores cambiantes de diferentes magnitudes dependientes, condujeron a una primera aproximación de ciertas relaciones funcionales. Pasar de la simple tabulación de datos empíricos a la busca de regularidades, implica la existencia de un cierto instinto de funcionalidad.

(Ruíz Higueras, 1998, p. 136)

Sostiene que en la matemática griega se encuentra presente una primitiva idea de función: ñPodemos afirmar que en el pensamiento griego existía una idea primitiva de función contenida en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables.ò (p. 108).

Entre las razones para que la matemática de aquella época, y cuyas concepciones se mantuvieron largo tiempo, no llegase a formular el concepto de función de forma explícita puede encontrarse en la diferenciación que establecieron entre magnitud y número. Para Ruíz Higueras esta diferenciación constituye un obstáculo (ñObstáculo de la disociación existente entre magnitudes y númerosò): ñEsta profunda disociación condujo a no observar las leyes físicas cómo funciones matemáticas, y constituyó en consecuencia un obstáculo epistemológico.ò (p 142).

Los griegos intentaron establecer un vínculo entre número y magnitud a través de las proporciones. Para René de Cotret (1985) esta tentativa representó un obstáculo*:* ñEsta costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo una forma de proporciones es un obstáculo al desarrollo de la noción de funciónò. Ruíz Higueras (1998, p. 109) considera que ñEste modo de pensar les impedía observar las relaciones de dependencia entre magnitudes diferentes que les habría aproximado a considerar relaciones funcionalesò lo que representa un obstáculo (ñObstáculo de la razón o proporciónò), que se mantuvo hasta el siglo XV. Ligado a ese obstáculo se encuentra una concepción: ñConcepción de la función como razón o proporciónò.

Además, los griegos solo establecían proporciones de magnitudes de la misma naturaleza u homogéneas. Por ejemplo, contemplaban proporciones entre longitudes, áreas o volúmenes pero una razón entre magnitudes distintas (longitud y área) carecía de significado. Éste uso de las proporciones entre magnitudes homogéneas constituye, tanto para René de Cotret como para Ruíz Higueras, un obstáculo (ñObstáculo de la homogeneidad de las proporcionesò):

> la homogeneidad que conducía a comparar magnitudes de la misma naturaleza, pudo ser un obstáculo al desarrollo de la noción de función

(René de Cotret, 1985, p. 36)

> La homogeneidad conducía siempre a comparar magnitudes de la misma naturaleza y esto impedía encontrar, de forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional

(Ruíz Higueras, 1998, p. 142)

Por otro lado, las matemáticas griegas y sus herederas consideraban el cambio como algo desvinculado de las Matemáticas. Así, en el Cap VII, libro XI de la Metafísica de Aristóteles, se puede leer: ñLos objetos matemáticos no están sujetos al movimiento con la sola excepción de aquellos a los que se refiere la astronomíaò. Para Ruíz Higueras esta concepción estática de la matemática representa un obstáculo presente en la noción de función (ñObstáculo de la concepción estáticaò), que se mantendría en la mente de matemáticos como Oresme, Galileo o Leibnitz.

La misma autora, incluye como obstáculo de la matemática griega, además de los ya mencionados, el ñObstáculo de la concepción geométrica de las variablesò que permanecería vigente incluso con Descartes y Fermat. La concepción geométrica de las variables está motivada por la importancia dada a la geometría en la matemática griega. Lo incluye como propio del pensamiento griego, en el sentido de no aparecer con anterioridad y se añade a la concepción, ya indicada anteriormente y relacionada con la confección de tablas, a la concepción de la función como razón o proporción.

Mucho más tarde, Oresme ñfue capaz de captar el principio esencial de que una función de una variable se puede representar por una curva.ò (p. 115). Así nace la concepción ñGráfica (visión sintética)ò que, para Ruíz Higueras, surge en las escuelas de París y Oxford, especialmente con Oresme.

Fermat y Descartes, ya en el s. XVII, contribuyen de forma decisiva a un cambio de ideas y concepciones. Ese cambio permitirá, posteriormente, un desarrollo relativamente rápido del concepto de función. Para Ruíz Higueras, Fermat y Descartes introducen la concepción de la función como ñCurva (analítico-geométrica)ò. La nueva concepción nace al interpretar, por primera vez, que una ecuación en *x* e *y* es un medio para introducir la dependencia entre dos cantidades variables, relacionándolo asimismo con la noción de curva. También atribuye a Fermat y Descartes el nacimiento de la concepción de la función como ñExpresión analíticaò, denominación atribuida a Euler, y nacida gracias a los avances en el álgebra ya mencionados.

> El nacimiento del álgebra permite expresar la dependencia entre variables por medio de expresiones analíticas: Existe una ecuación en x e y que permite expresar la dependencia entre ambas (Descartes, Fermat). (p.139)

Newton y Leibnitz consideraban el joven cálculo diferencial e integral como una herramienta útil para el estudio de la cinemática. Así, los puntos en movimiento daban lugar a curvas que se podían estudiar mediante el nuevo cálculo desarrollado. No consideraban aún la curva, representada gráficamente, como un conjunto de puntos relacionados por una condición, lo que constituye para Ruíz Higueras un obstáculo, ñObstáculo de la concepción mecánica de curvaò, ya presente anteriormente:

> Pero, en un principio, las curvas no fueron consideradas como gráficos de la relación funcional; sino más bien, fueron tomadas como trayectorias de puntos en movimiento (curvas ñmecánicasò). Esta concepción permaneció en la mente de matemáticos tales como Galileo, Torricelli, Roberbal o Newton. No eran vistas como conjuntos de puntos que satisfacen condiciones específicas dadas por la relación funcional. (p. 143)

Con Euler se inaugura la concepción de la función, citada por Ruíz Higueras (p. 139), como ñExpresión analíticaò y que la autora atribuye, en sus inicios, a Descartes y Fermat y de forma plena a Euler y a Lagrange. Sitúa en la misma época el nacimiento de la concepción de la función como ñCorrespondencia arbitraria: Aplicaciónò, citando un extracto del libro de Euler ñInstitutionis calculi differentialisò de 1755.

> Sí ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces, tenemos la costumbre de nombrar estas cantidades funciones de estas últimas; esta denominación es la más

> extensa y contiene en ella misma todas la formas por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Por consiguiente, sí x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de x, no importa de que manera, son llamadas funciones de x. (p. 129)

Conviven, por tanto, dos concepciones en la misma época que no se verán relacionadas, según Ruíz Higueras, hasta el siglo XX.

También identifica un obstáculo en este período histórico. Se trata del ñObstáculo de la concepción algebraicaò que se ve caracterizado por la fuerte dependencia del concepto de función de su expresión algebraica.

> Se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden ser descritas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones. Esta fuerte dependencia entre expresión analítica y función se constituye en un obstáculo hasta que la idea de correspondencia arbitraria fue surgiendo en la mente de los matemáticos.
>
> (p. 143)

Por último, la definición de Fourier representa un cambio respeto de la concepción de una función como expresión analítica y, al mismo tiempo, marca el inicio de la concepción descrita por Ruíz Higueras como ñFunción como terna f=(F, X, Y)ò

De esa forma, Ruíz Higueras (1983, 1998), establece siete diferentes concepciones asociadas a la noción de función, en lo básico coincidentes con las de René de Cotret (1985):

- Identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variables
- Razón o proporción
- Gráfica (visión sintética)
- Curva (analítico-geométrica)
- Expresión analítica
- Correspondencia arbitraria: Aplicación
- Función como terna *f=(F,X,Y)*

Asociadas a las concepciones, identifica siete obstáculos epistemológicos:

- Obstáculo de la razón o proporción
- Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números
- Obstáculo de la homogeneidad de las proporciones
- Obstáculo de la concepción estática
- Obstáculo de la concepción geométrica de las variables
- Obstáculo de la concepción mecánica de curva
- Obstáculo de la concepción algebraica

Aunque el número de concepciones de Ruíz Higueras es de siete, existe cierto acuerdo en distinguir un número menor de representaciones asociadas a las funciones.

Janvier (1987, cit. por Font, 2000) distingue cuatro representaciones:

- *Verbal*: asociada a la descripción mediante una descripción textual de la relación entre variables.
- *Tabular*: asociada a la confección de tablas en las que se establece una relación entre variables.
- *Gráfica*: asociada a la identificación de una representación gráfica con una relación entre variables.
- *Expresión analítica*: asociada a una expresión analítica que relaciona variables.

Janvier, al igual que otros autores (Font, 2000; Duval, 1993; Schwarz y Dreyfuss, 1993; Gofino et al., 2006) resaltan la importancia de utilizar varias de esas representaciones porque cada una de ellas pone en funcionamiento procesos cognitivos diferentes. Al mismo tiempo, se resalta la dificultad de los estudiantes para establecer conexiones entre representaciones distintas, para pasar de una representación a otra y en la interpretación de gráficas y símbolos (Sierpinska, 1992).

CAPÍTULO 2

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

En este capítulo se describirán los elementos fundamentales del problema de investigación, lo que conducirá a formular preguntas y objetivos. Para responder esas preguntas y alcanzar los objetivos, se utilizará una metodología ligada a las preguntas y objetivos fijados.

En Educación Matemática, la problemática de investigación sobre la modelización se liga a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En ese marco, los especialistas en modelización matemática, deben tener en cuenta el contexto educativo en el que se desarrollan los procesos de modelización y de obtención de modelos. En dicho contexto, los profesores juegan un papel fundamental, por lo que las preguntas asociadas a la implementación de la modelización en la enseñanza implican preguntas relacionadas con los docentes. Los profesores pasan, por tanto, a ser un elemento central en la investigación sobre modelización matemática, lo que lleva a la realización de estudios sobre la introducción de la modelización en la enseñanza y el papel del docente en dicho proceso.

En esta investigación, los objetivos se centran en si los estudiantes son capaces de obtener un modelo matemático y si asumen la complejidad del proceso de modelización y utilizan el modelo adecuadamente. Esos objetivos se relacionan con la actividad del profesor y su toma de decisiones. En nuestro caso, los objetivos ligados al profesor se limitarán a aquello que se encuentra en relación con los objetivos centrados en los alumnos. Es decir, las respuestas a las preguntas de si los alumnos son capaces de obtener un modelo y si asumen la complejidad del proceso que da lugar al modelo, posee implicaciones sobre la toma de decisiones por parte del profesor y sobre las dificultades a las que se enfrenta para tomar esas decisiones.

De esa forma, los objetivos relacionados con el profesor, se limitarán a aquellos aspectos que surgen como consecuencia del análisis de la respuesta del alumno. De ahí que la tercera pregunta de investigación se enuncie en términos de las consecuencias sobre la implementación de la modelización en el aula, lo que implica al docente pero sin convertirlo en objetivo de investigación diferenciado.

A continuación se describen los objetivos que, en unión al tipo de actividades que se utilizan para alcanzarlos, determinarán la metodología de la investigación.

2.1. Objetivos de investigación

La modelización matemática se describe, de forma resumida, como el proceso que se desarrolla a partir de una situación contextualizada en el mundo real para obtener una solución, que toma la forma de un modelo matemático. El modelo matemático, interpretado en contexto, permite generar un modelo de la situación real original.

En esta investigación, la modelización se desarrolla en el caso concreto de fenómenos físicos reproducibles en laboratorio y que permiten obtener datos experimentales con facilidad. Así, los modelos se corresponden con el establecimiento del tipo de relación entre dos magnitudes físicas, que tomarán la forma matemática de una función. Las características específicas de la situación real planteada a los alumnos da origen y justifica el desarrollo del proceso de modelización: los alumnos obtienen datos experimentales en el laboratorio y los utilizan para obtener un modelo por medio de un ordenador. La obtención del modelo representa la obtención de un resultado matemático, que deberá ser interpretado como una solución matemática. De esa forma, del tipo de modelización que se plantea a los alumnos surgen dos preguntas fundamentales:

- ¿Los alumnos son capaces de obtener un modelo matemático a partir de una generación de datos experimentales en laboratorio?

- ¿Los alumnos desarrollan los procesos complejos de modelización que conducen a la obtención del modelo y utilizan ese modelo adecuadamente en el contexto de preguntas en el que su uso puede ser útil?

Añadido a lo anterior se halla la figura del profesor, que debe implementar la modelización en el aula. Esa implementación parte de unas directrices marcadas desde la Administración, por lo que el docente debe compaginar sus objetivos para la modelización con los derivados del curriculum. Así, se ve obligado a tomar de decisiones de qué es lo importante en un proceso de modelización, lo que se halla ligado a qué objetivos son prioritarios en el proceso. Ante esta situación, surge una nueva pregunta:

- ¿Qué repercusiones tienen las respuestas a las dos preguntas anteriores sobre la implementación de la modelización matemática en las aulas en España?

Teniendo en cuenta las preguntas formuladas anteriormente, los objetivos de este trabajo se resumen en tres fundamentales, muy relacionados con el tipo de modelización concreta que se plantea:

OB1.- Explorar si los alumnos son capaces de obtener un modelo matemático a partir de una generación de datos experimentales en un laboratorio.

OB2.- Indagar si los alumnos desarrollan los procesos que conducen a la obtención del modelo y utilizan ese modelo adecuadamente en el contexto de preguntas en el que su uso puede ser útil.

OB3.- Analizar qué repercusiones tienen las respuestas a las preguntas relacionadas con los objetivos anteriores sobre la implementación de la modelización matemática en las aulas en España.

El primer objetivo, centrado en la generación de un modelo matemático, se realiza mediante un proceso dividido en dos fases. El modelo matemático que se obtiene al término de la segunda fase toma la forma, como resultado, de una función real de variable real. Como consecuencia, el proceso de obtención del modelo debe conllevar la comprensión y uso adecuado de conceptos y nociones asociados a las funciones. Así, del primer objetivo de investigación se derivan otras cuestiones. Éstas establecen una conexión entre el primer objetivo y el segundo, ya que éste incluye indagar si los estudiantes integran en el proceso de obtención del modelo la comprensión y el uso de conceptos y nociones relacionados con las funciones y sus operaciones.

Dentro del segundo objetivo, surge una cuestión tan ligada a la anterior que hace difícil distinguirlas: se trata de averiguar si son capaces de utilizar el modelo obtenido en un contexto real nuevo pero relacionado con la situación original. El uso del modelo en un contexto diferente del laboratorio conlleva que el alumno deberá transformar el modelo, lo que permitirá su uso en la nueva situación. Esa transformación o adaptación, conllevará la comprensión de la diferenciación entre modelo matemático y modelo real, pero también deberán utilizar ambos modelos en combinación o unión de conocimientos matemáticos, relacionados y no relacionados con las funciones. Dicho de otra forma, la modelización matemática implica procesos complejos en los que se establecen relaciones entre lo real y lo matemático mediante una matematización de la realidad. En el proceso de modelización intervienen, de forma especialmente importante, las relaciones entre lo real o extramatemático (identificado con el mundo real) y lo intramatemático (identificado con el mundo de las matemáticas).

Esas relaciones dan lugar a un gran número de preguntas que son objeto de estudio y análisis en Didáctica de la Matemática. Así, aunque se han resumido los dos primeros objetivos mediante un enunciado corto, los objetivos de investigación conllevan, implícitamente, el estudio de relaciones complejas entre lo intra y lo extramatemático, pero en el contexto de un proceso también complejo como es el de la modelización matemática.

2.2. METODOLOGÍA

El presente trabajo se plantea como un estudio de caso de tres actividades de modelización matemática. La razón de optar por una herramienta de investigación cualitativa es que su mayor ventaja reside en permitir obtener información más precisa sobre la conducta durante la actividad que un estudio cuantitativo (Yin, 2013).

Los objetivos que se han mencionado en el apartado anterior, se centran en la capacidad del alumno para generar un modelo matemático y en la integración de los procesos de generación del modelo en su actividad. Por tanto, el análisis de su actividad proporciona información en relación con los procesos de generación del modelo y de su uso. Ese tipo de información se encuentra ligada a un proceso de descubrimiento, permitiendo formular hipótesis y justificaciones-confirmaciones de las mismas, lo que hace que la metodología cualitativa resulte más útil (Carazo, 2006).

Este estudio de caso se sitúa en un contexto geográfico y temporal concreto. El contexto realmente relevante para la investigación es el temporal. Se sitúa en el tiempo en un proceso de reforma educativa, que introduce explícitamente la modelización en la enseñanza de las matemáticas. De esa forma, la ausencia de experiencias previas de los estudiantes en procesos de modelización matemática y la escasez de estudios anteriores sobre modelizaciones similares a las que se proponen a los alumnos, hacen que su respuesta implique un cierto grado de impredecibilidad.

Además, las experiencias son planteadas como actividades de respuesta abierta, lo que representa una forma de potenciación de su autonomía. Esta apertura y búsqueda de la autonomía, aunada a la falta de experiencias previas de los alumnos, deriva en una falta de control del investigador sobre la situación. En este tipo de investigaciones, Lodico, Spaulding y Voegtle (2010) recomiendan el estudio exploratorio como el adecuado. Para Yin (2013), los estudios exploratorios se producen en situaciones en las que se han realizado pocas investigaciones, por lo que no se dispone de una teoría sobre la que sustentar la investigación. Como se ha indicado anteriormente, ese es el contexto en que se sitúa nuestra investigación.

Se trata, por tanto, de un estudio empírico de tipo exploratorio que intenta contrastar hipótesis que permitan, a su vez, la formulación de conclusiones. Esas conclusiones llevarán a nuevas hipótesis que deberán ser contrastadas en otros contextos con posterioridad (Yin, 2013). De esa forma, una parte del Capítulo 3 de esta memoria ase centra en la formulación de hipótesis sobre la respuesta que cabe esperar de los alumnos.

2.2.1. Secuenciación metodológica

Para realizar la investigación se escogieron tres actividades de modelización matemática con una característica común y diferenciadora: las tres modelizaciones parten de una situación real reproducible, que permite estudiar la evolución de un fenómeno físico en un laboratorio y obtener datos experimentales fácilmente, con medios técnicos asequibles y que no implican dificultades de uso. Este tipo de actividades, poco común en el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática, se presentan por algunos autores (Halverscheid, 2008; Alsina, 2007) como modelizaciones de tipo experimental en que los estudiantes deben obtener, por sí mismos, los datos que posteriormente utilizarán para generar el modelo matemático y real. Por tanto, se evita proporcionar datos fundamentales para la realización de la actividad, de forma que los alumnos asumirán todos los procesos de obtención del modelo. Así, el proceso de modelización es desarrollado íntegramente por ellos, por lo que el modelo (con sus virtudes y defectos), será *su* modelo y no un modelo generado por los alumnos de forma parcial.

Dos de las tres situaciones poseen una equivalencia con estudios experimentales llevados a cabo en el pasado y que dieron lugar a modelos matemáticos que se corresponden con leyes físicas. Los alumnos, en el momento de realizar las tres actividades, desconocían esas leyes y el proceso experimental de generación de esas u otras leyes físicas. Además de la propuesta de las actividades, las fases de desarrollo del proceso de modelización son fijadas también por el profesor y pretenden reproducir un proceso de obtención de modelos matemáticos a partir de datos obtenidos experimentalmente (1.3.). Así, las actividades se dividen en tres fases claramente diferenciadas: obtención de datos experimentales en el laboratorio, generación de la función de ajuste con el ordenador (usando GeoGebra) e interpretación y aplicación del modelo.

Las actividades se plantean oralmente mediante un enunciado corto del tipo: ñVamos a estudiar cómo se comporta é Tomad los datos necesariosò. De esa forma, el planteamiento de la situación inicial se vincula a la obtención de datos experimentales. Para la obtención de datos, el grupo se divide en grupos más pequeños, de cuatro o cinco personas. La decisión de qué alumnos componen cada grupo se deja a su criterio, potenciando la composición de grupos por afinidades establecidas por ellos mismos.

La obtención de datos experimentales se realiza siempre mediante el uso de instrumentos que cumplen tres condiciones: resultar fácil acceder a ellos, con escasa sofistificación técnica y cuyo uso sea conocido o de aprendizaje sencillo. Con estas condiciones impuestas al material, se intenta que el estudiante sea consciente de que la modelización matemática no es una actividad que implique el uso de instrumental sólo accesible para especialistas. De esta forma, las actividades se convierten en ejemplos que ilustran que el desarrollo científico no siempre está asociado a conocimientos y materiales reservados a unos pocos.

El volcado y tratamiento de los datos en el ordenador se realiza con la misma división en pequeños grupos de trabajo, procurando que mantuviesen la misma composición que en la fase precedente. La tarea se vuelve a proponer mediante un enunciado corto y transmitido oralmente: ñVuelca los datos y obtén la función de ajusteò. Cada grupo dispone de un ordenador para realizar su trabajo y, aunque ya conocían el programa GeoGebra, resultó necesaria la realización de prácticas previas. El aprendizaje de cuestiones técnicas de uso de GeoGebra, se redujo a aquello necesario para la tarea fijada. Entre ellas, se encuentra el uso de deslizadores. Optar por esa opción, en vez de por otras que ofrece el programa, se justifica por el hecho de que los deslizadores, introducidos en las funciones o en otras expresiones matemáticas, se identifican con la existencia de parámetros (Drivers, 2003). Así, su uso representa la existencia de parámetros en el modelo obtenido, elemento fundamental en el tipo de modelizaciones propuestas a los alumnos.

De esa forma, la obtención del modelo se realiza por medio de la generación de datos experimentales y el uso del ordenador, lo que representa la integración de los recursos tecnológicos o del ómundo tecnológicoô en el proceso de modelización (Greefrath, 2011).

El uso del ordenador y del programa GeoGebra se justifica ante los alumnos como forma de obtener el modelo matemático. El modelo matemático que obtienen en el ordenador representa la solución al problema vinculado al tipo de relación matemática que existe entre los datos obtenidos experimentalmente o, lo que es lo mismo, las dos variables físicas que intervienen en el fenómeno físico. Como consecuencia, al término de la segunda fase, han obtenido un modelo matemático que representa, al mismo tiempo y mediante su interpretación en contexto, el resultado y solución a la situación o problema real. Es decir, el primer objetivo de investigación se consigue al término de la segunda fase: obtienen, mediante la matematización de la realidad, un modelo matemático y real, lo que significa que *saben hacer* un proceso de modelización conducente a un modelo matemático y real. Dicho en otros términos, si consiguen generar el modelo, se justifica la afirmación de que son ócompetentesô generando modelos matemáticos a partir de situaciones contextualizadas en el mundo real (Objetivo OB1).

La tercera y cuarta fase incide en el conocimiento matemático o el *saber* vinculado al modelo obtenido, lo que se relaciona con los otros dos objetivos fundamentales de investigación. Para comprobar el grado de comprensión y el uso del conocimiento matemático, vinculado al modelo obtenido previamente, se plantean preguntas a los alumnos. Las preguntas se proponen para ser contestadas individualmente y otras están formuladas en de debate para ser respondidas colectivamente.

En el primer caso, buscan proporcionar datos sobre cada estudiante, lo que permitirá un análisis general pero realizado desde la búsqueda de puntos en común o similitudes en las respuestas individuales.

En el segundo caso, se pretende obtener información de la actividad del alumno en grupo, que utiliza el debate como recurso en la búsqueda de soluciones a una situación problemática. Actualmente, en muchos países, se propone cambiar el rol del profesor de ótransmisorô del conocimiento a ófacilitadorô del mismo (NCTM, 2000). El profesor como transmisor se vincula a un tipo de enseñanza tradicional, en la que el alumno no participa activamente en su proceso formativo. Con tal motivo, la figura del docente facilitador se postula como la adecuada para conseguir que los estudiantes se enfrenten a la actividad matemática, haciéndolos partícipes y protagonistas del proceso de construcción y adquisición del conocimiento matemático. Desde ese planteamiento, el diálogo entre iguales se propone como un recurso valioso en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos comparten y discuten estrategias y soluciones a un problema y el profesor actúa de moderador y guía. El debate o discusión sobre un problema y su solución implica la actuación del docente, que debe facilitar que el diálogo permita alcanzar los objetivos pretendidos. Como consecuencia, han surgido modelos que intentan describir cómo debe ser planteado y desarrollado un diálogo entre alumnos de una misma clase. Por ejemplo, en el ámbito americano y en sintonía con las recomendaciones de la NCTM, se propone un modelo de ó5 prácticasô para los debates

(Stein, Engle, Smith y Hugues, 2008; Stein, Smith, 2011). Según dicho esquema, inscrito en un contexto de aprendizaje por investigación, el profesor debe organizar y desarrollar el debate siguiendo los siguientes pasos:

1. *Anticipación:* qué van a hacer los estudiantes y qué estrategias van a utilizar en la solución de un problema

2. *Monitorización:* de su trabajo cuando se acercan al problema en clase

3. *Selección:* qué estudiantes desarrollan estrategias que vale la pena discutir en clase

4. *Secuenciación:* las presentaciones de los estudiantes deben organizarse y secuenciarse para maximizar su potencial destinado al aprendizaje de los alumnos

5. *Conexión de las estrategias e ideas:* la conexión de estrategias e ideas que surjan en el diálogo que establecen los alumnos debe establecerse de manera que les ayude a entender las matemáticas aprendidas

Al mismo tiempo, el debate aparece a menudo como un recurso asociado a una estrategia de aprendizaje colectivo y a la estrategia Inquiry Based Learning y, más recientemente, a la Inquiry Based Science Education (IBSE).

Teniendo en cuenta el proceso que se sigue para obtener el modelo matemático y real y el hecho de que se relacione dicho modelo con leyes y constantes físicas, permite caracterizarlo como una actividad o proyecto cercano a la IBSE y la enseñanza de las ciencias integrada o STEM (Science-Technology-Engeenering-Mathematics). En una de las actividades, a los alumnos se les plantea una situación nueva, aunque relacionada con uno de los modelos que obtienen. Se trata de una reutilización, mediante un proceso de adaptación, de uno de los modelos a una situación real y socialmente relevante. Para poder aplicar o usar el modelo en la nueva situación, el modelo o, lo que es lo mismo, la función, precisa de una adaptación. En este contexto se sitúa el debate. La adaptación del modelo es el motivo o cuestión generadora del diálogo entre los alumnos, lo que permitirá obtener un tipo de información diferente de la que se obtiene mediante la respuesta individual por escrito.

De esta forma y, teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, la tercera y cuarta fase inciden en el objetivo de investigación centrado en los procesos de modelización y la integración del conocimiento matemático ya adquirido por el estudiante en esos procesos (objetivo OB2). El análisis vinculado a ese objetivo se realiza en un capítulo diferenciado dentro del análisis de resultados (Capítulo 5).

El tercer objetivo (OB3), vinculado a las repercusiones sobre el profesor de los resultados correspondientes a los dos objetivos centrados en el alumno, se integra en los capítulos dedicados a esos dos primeros objetivos (Capítulos 4 y 5).

Las actividades fueron propuestas a finales del mes de marzo y en los cursos académicos 2010-11 y 2011-12. La razón de proponerlas dos años consecutivos es que los análisis cualitativos llevan asociada una falta de fiabilidad y validez de los resultados y conclusiones de la investigación, lo que sitúa al investigador en la incertidumbre (Stoecker, 1991, Rouse y Daellenbach, 1999). Si los resultados se repiten ambos años, sin permitir afirmar la fiabilidad y validez de las conclusiones, proporcionan una mayor fortaleza. De esa forma, sin alcanzar la fiabilidad y validez de un estudio cuantitativo, su valor empírico resulta mayor que un estudio realizado un único año.

La propuesta se realiza a alumnos que estaban cursando 1º de Bachillerato Científico-Tecnológico. La elección de estudiantes de 1º de Bachillerato Científico-Tecnológico viene motivada por su grado de conocimientos sobre funciones y por el hecho de no verse sometidos a la presión que acompaña al examen de selectividad. Al realizar la propuesta, se les indica que se trata de una actividad voluntaria, sin repercusión en la valoración académica de la asignatura de matemáticas. Todo ello es una forma de garantizar que el alumno que realice las actividades, no lo haga por el interés en ver aumentada su nota en la asignatura. También se les informó de que, por tratarse de una actividad voluntaria, la llevarían a cabo por las tardes, fuera del horario lectivo, y que el número de tardes que deberían asistir al Instituto sería, más o menos, de ocho. Además, se aclaró que se preveía que la duración de cada sesión no excedería la hora y media. Todo ello implicó un doble riesgo: que el número de alumnos interesados fuese escaso y que sólo mostrasen interés aquéllos con un buen rendimiento académico en matemáticas. Así, resulta relevante conocer cuántos estudiantes quisieron realizar las actividades. Este dato proporciona información sobre su grado de interés en realizar actividades matemáticas al margen de su formación curricular obligatoria. Este dato, si bien no forma parte del primer objetivo de investigación, se vincula a su grado de interés por realizar las actividades de forma correcta. Por ese motivo, se incluye como un apartado ligado a la primera y segunda fase (Capítulo 4).

Se escoge el mes de marzo como fecha de comienzo porque en ese momento ya han estudiado el bloque de Análisis de su curriculum, lo que garantizaba que poseían, en el momento de realizar las actividades, un grado alto de conocimiento sobre funciones. De esta manera, salvo la introducción al uso básicamente técnico de GeoGebra, podían afrontar la realización de las tres actividades desde el conocimiento matemático ya adquirido previamente.

Al finalizar las actividades se les entregó un cuestionario de opinión. La realización de este cuestionario tenía como fin intentar averiguar qué actividad despertó mayor interés y, dentro de cada una, qué fase les pareció más interesante. Se buscaba también dilucidar si existe una preferencia mayoritaria, tanto en la actividad realizada como en las fases en que se dividían.

Además, se realizaron entrevistas individuales a siete alumnos participantes. En seis de los casos se llevaron a cabo un año después de realizar las actividades. En el otro caso, dos años después. Con las entrevistas se buscaba obtener información sobre sus valoraciones de las actividades, pero una vez transcurrido un período de tiempo largo. Además, dado el carácter exploratorio del estudio, resultaba de interés conocer la razón de sus respuestas en preguntas concretas. De esa forma, las preguntas de la entrevista se determinarían en cada caso a partir de una primera lectura de sus respuestas. Teniendo en cuenta las condiciones y objetivos de las entrevistas, hacían recomendable enfocarlas como semi-estructuradas (Eisenhart, 1988; Harrell y Bradley, 2009).

Como medio de obtener información sobre la actividad de los estudiantes, se realizaron grabaciones en audio y vídeo a dos de los grupos de trabajo.

El análisis cualitativo de las respuestas por escrito, del desarrollo del debate, de las opiniones de los alumnos y de su actividad, pretende arrojar datos que lleven a proponer conclusiones sobre la modelización matemática en la enseñanza. Pero, precisamente por tratarse de modelización matemática en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el análisis y las conclusiones se referirán tanto a los procesos de modelización que se desarrollan durante las actividades como a otras cuestiones que influyen sobre esos procesos. Dicho de otra forma, la modelización matemática en la enseñanza secundaria se integra en un proceso más amplio de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por lo que no es posible realizar únicamente un análisis cualitativo de los procesos que se desarrollan en una actividad de modelización. Es decir, al realizar el análisis cualitativo de los procesos de modelización que desarrollan los alumnos, aparecerán otras cuestiones relevantes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, que determinan o influyen en el desarrollo de esos procesos.

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

En este capítulo se describirá y justificará el desarrollo de las tres actividades de modelización propuestas a los alumnos. Al tratarse de un estudio exploratorio, se incluirán hipótesis de respuesta que se esperaba que aportasen.

3.1. ACTIVIDADES PROPUESTAS Y SU DIVISIÓN EN FASES

Las tres experiencias de modelización matemática que se han desarrollado en el aula y, que constituyen el núcleo de la presente investigación, siguen un esquema muy parecido, tanto a la hora de ser planteadas a los alumnos como en las fases en que se dividen. A partir de este momento, las nombraremos como *Muelle*, *Aceite y agua* y *Temperatura*.

Las actividades se corresponden con el estudio de tres fenómenos físicos:

1. Estiramiento de un muelle sometido a un peso (masa en realidad).

2. Comportamiento de aceite vertido en agua.

3. Variación de la temperatura de un termómetro, previamente calentado, en función del tiempo.

Las actividades se dividen en tres fases claramente diferenciadas. La primera fase consiste en la obtención experimental de datos en el laboratorio, lo que dará lugar a una tabla de datos con dos variables. La segunda fase consiste en obtener la expresión analítica de una función de ajuste. Los puntos que los alumnos deben ajustar se corresponden con los puntos del plano determinados por la tabla de datos obtenida en la fase precedente. La tercera parte o fase consiste en contestar un cuestionario relacionado con el proceso de obtención del modelo y en el modelo como resultado y solución matemática y real..

En las modelizaciones matemáticas, como veremos, se utiliza el programa GeoGebra como herramienta tecnológica que permite obtener con facilidad la expresión analítica de una función, lo que representará, en sí mismo, el modelo matemático de la situación original o problema.

Hablar de GeoGebra representa hablar, hoy por hoy, del programa de Geometría Dinámica, cálculo numérico, simbólico y representación gráfica de uso más extendido en la Enseñanza Secundaria y el Bachillerato. Los alumnos ya conocían el programa y su uso para determinadas finalidades, por haberlo usado en éste y en cursos anteriores.

De acuerdo a las necesidades de las actividades que iban a realizar, se hacía necesario explicar o mostrar a los alumnos de qué forma GeoGebra podía resultar una herramienta útil en el contexto de su trabajo posterior.

3.2. Sesión preparatoria: introducción de puntos y deslizadores en GeoGebra

En las tres modelizaciones se utiliza el programa GeoGebra como herramienta tecnológica que permite obtener el modelo matemático. Con tal motivo, dos semanas antes de proponer las actividades, se dedicó una primera sesión de introducción a dicha aplicación. Durante esa clase no se indicó que lo que iban a aprender sobre GeoGebra lo fuesen a utilizar en una actividad posterior. Así, la sesión preparatoria fue presentada como algo independiente de las actividades de modelización.

Esta sesión consistió en la descripción de cómo se introducen puntos del plano en coordenadas, la introducción de parámetros en GeoGebra (deslizadores) y el uso de parámetros en funciones. El fin u objetivo es que los alumnos obtengan una expresión analítica que relacione las variables de un conjunto de puntos visibles en el plano cartesiano. En definitiva, representa el paso inverso al que realizan normalmente (a partir de los 12-13 años de edad en España) en la representación gráfica de las funciones lineal, afín y cuadrática. En la ESO (Enseñanza Secundaria Obligatoria), los alumnos deben obtener la gráfica de esas funciones a partir de su representación simbólico-algebraica. Para ello, generan una tabla de datos y, en el caso de la función cuadrática, calculan puntos notables de la representación gráfica (cortes con los ejes y vértice de la parábola).

La descripción de la sesión dedicada a la introducción al uso técnico de GeoGebra, se incluye en el Anexo XI.

3.3. Primera fase: descripción de las actividades y obtención de los datos

La forma de presentar a los alumnos la primera fase del proceso de modelización matemática es muy parecida en las tres actividades. La presentación de la tarea se hizo de forma verbal:

Muelle: ñVamos a estudiar cómo se estira un muelle al colgarle un peso. Tomad el número de datos que estiméis necesario y usad la forma de hacerlo que os parezca mejor.ò

Aceite y agua: ñVamos a estudiar cómo varía el diámetro de una mancha de aceite sobre agua al añadirle aceite al agua. Tomad el número de datos que estiméis necesario y usad la forma de hacerlo que penséis que mejor se adapta a la situaciónò

Temperatura: ñVamos a estudiar cómo varía la temperatura de un termómetro en función del tiempo. Tomad el número de datos que estiméis necesario y hacedlo como mejor consideréis.ò

En la presentación de la tarea se menciona expresamente la existencia de una relación entre dos magnitudes físicas. La inclusión de la relación entre magnitudes vincula la actividad a la representación verbal de la función, aunque de una forma incompleta al no concretar el tipo de relación que se establece entre ambas variables. Al mismo tiempo, la representación verbal implica, en la consiguiente generación de datos obtenidos experimentalmente que se solicita, la emergencia de otra representación (tabular), con lo que se establece una conexión entre dos representaciones diferentes.

En los tres casos se trata de la obtención de datos, de forma experimental, de tres fenómenos físicos. Dos de las actividades (*Muelle* y *Temperatura*) se han realizado y se realizan de forma habitual en los Centros de Secundaria o en los primeros años de estudio en algunas Facultades.

En adelante, obviaremos que, en realidad, lo que se cuelga de los muelles no es un peso sino una masa. Hemos optado por esa opción porque en el lenguaje cotidiano se identifica, abusando del lenguaje, el peso con la masa. De hecho, y como veremos, esa diferenciación podría haber sido aprovechada si hubiésemos planteado la modelización con unos objetivos diferentes.

3.3.1. La experimentación en la modelización

La obtención de datos experimentales en procesos de modelización son habituales en estudios científicos y han sido y son el punto de partida de modelizaciones matemáticas de fenómenos, tanto reproducibles en el laboratorio como en el ámbito más extenso de la Naturaleza o el mundo. El uso de la modelización en actividades de tipo experimental, que conllevan que el alumno obtenga los datos, es puesto de ejemplo por algunos investigadores. Destacamos entre ellos a Alsina (2003, 2007), Halverscheid (2008) y Carreira y Baioa (2011). Halverscheid (2008), por ejemplo, propone las actividades experimentales como las más cercanas a la modelización. De hecho, sostiene que muchas actividades, representaciones y modelos matemáticos están fuertemente conectados con experimentos:

> Los experimentos relacionados con las matemáticas encuentran su lugar natural en la modelización porque representan el ñresto del mundoò para el que los modelos matemáticos se han construido. (p. 226)

> (é) muchas representaciones de actividades matemáticas y modelos están fuertemente relacionadas con experimentos. (p. 225)

En su artículo, Haverscheid describe actividades de modelización usando una mesa de billar circular y afirma que, en dichas actividades, ñ(é) los alumnos pasaron por todas las fases del ciclo de modelizaciónò (p. 225). El desarrollo de todos los pasos de ese ciclo permite, según Haverschied, observar la naturaleza epistemológica del proceso de modelización en los alumnos. Es decir, propone investigar las acciones epistemológicas en procesos de modelización. Como el campo característico de la modelización matemática en el mundo no matemático son los experimentos, sostiene que el estudio epistemológico de los procesos de modelización se debe centrar en modelizaciones de experimentos. Así, aúna el estudio de la modelización con las teorías epistemológicas sobre enseñanza de las matemáticas.

Alsina (2003, 2007), se centra más en la experimentación como forma de investigación y en la aplicabilidad de las matemáticas en situaciones del mundo real. Conecta, por tanto, con las competencias PISA, la matematización de lo real y el trabajo de los alumnos en un contexto de *Learning by doing* (aprender haciendo). Por ese motivo, toma como referencias fundamentales a Pollak, las competencias PISA, las ideas de De Lange sobre la matematización de lo real y el óLearning by doingô de Dewey (1938). Alsina sustituye óLearning by doingô por ñ*Learning by making*ò como forma de incidir en la manipulación de materiales creados por los alumnos. De esta manera, la actividad matemática se centra en la creación y manipulación de objetos reales, en la creatividad, la tarea como reto, la experimentación, la conjetura y la comprobación de la conjetura.

Carreira y Baioa (2011) intentan aunar las perspectivas de Haverschied, Alsina, la M&M y la vinculada a la RME mediante actividades centradas en la obtención de datos por los alumnos en un contexto de tipo experimental. Sobre las ventajas de este tipo de actividades en el campo concreto de la modelización matemática, destacan tres ventajas fundamentales (Carreira y Baioa, 2011, p. 214):

- Los estudiantes tienen la oportunidad de aprender haciendo (mientras se realiza realmente una manipulación y experimentación real, realizando conjeturas y validando resultados).

- Trabajar con materiales físicos concretos es una forma de investigación sobre las propiedades matemáticas de los objetos.

- Investigar a través de la experimentación tiene un reflejo en las acciones mentales y sobre el pasado y el posterior aprendizaje de las ideas matemáticas y se convierte en una manera de desarrollar la comprensión de los modelos matemáticos.

3.3.2. La obtención de datos integrada en el proceso de modelización

Las tres actividades poseen un punto de partida plenamente integrado en el óResto del mundoô del ciclo de Blum y Leiss (Figura 5). El fin u objetivo (estudiar en qué forma se relacionan las variables) representa, en sí mismo, un problema encuadrado en una situación plenamente órealô. La simple obtención de datos experimentales representa, de hecho, un problema contextualizado en una situación real. Para obtener los datos es necesario tomar decisiones, lo que incluye reflexionar sobre cómo realizar la toma de datos y cómo representar dichos datos. Así, se hace necesario decidir qué instrumentos de medida usar, qué nombre asignar a las variables, en qué unidad se registran los datos, a partir de qué valor se obtienen y registran, qué número de datos se toman, etc. Puede, por tanto, argumentarse que en esta fase se desarrollan los procesos de *Construcción*, *Simplificación/Estructuración* y *Matematización* del ciclo de Blum y Leiss (Figura 19).

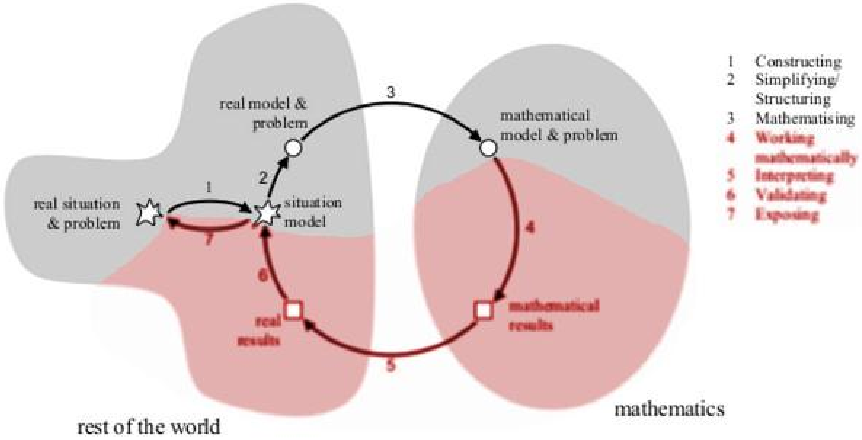


Figura 19. Pasos del ciclo de Blum y Leiss en la 1ª Fase

Además, la tabla de datos que obtienen representa, utilizando términos usados en la RME, una primera matematización y un primer modelo emergente. Como hemos visto, las tablas son la primera concepción histórica del concepto de función y una de las formas de representación de funciones. El hecho de interpretar los datos como variables (físicas, matemáticas o ambas al mismo tiempo), se halla implícito en la representación de datos como una tabla. Así, se puede argumentar que tabular datos es una forma de matematización incipiente pero evidente. Además, al implicar una matematización, representa un primer modelo matemático de la situación.

Situar esta fase en un nivel (Situacional, Referencial, General, Formal*)* resulta más complejo. Se encuentra en el nivel óSituacionalô, pero el hecho de construir una tabla de valores representa también encontrarnos en los restantes niveles. Nombrar, por ejemplo, el peso como *x* y la longitud como *y* constituye un abandono de lo real para situarnos en la interpretación de los datos como entes puramente matemáticos o, si se quiere, generales. Se trataría ya de una matematización vertical pero fuertemente ligada a una matematización todavía horizontal, pues todavía estamos manipulando lo real en el momento de construir la tabla de datos. Dicho de otra forma, esta primera fase es una fase ótransversalô en el sentido de integrar la situación plenamente real con elementos plenamente matemáticos (variables, dependencia entre variables). El grado de transversalidad vendrá dado por el grado de abandono de lo real en favor de lo simbólico. Así, la asignación de nombres a las variables en la tabla representa una forma de obtener indicios sobre la forma de pensamiento: si se usan los nombres *x* e *y* para cada una de las variables, este estilo de pensamiento tenderá, a priori y usando la clasificación de Borromeo (Borromeo y Blum, 2010), a ser analítico. Si se opta, por ejemplo en el caso de *Muelle*, por describir los datos como óPesoô y óLongitudô, se primará lo real sobre lo matemático o, lo que es lo mismo, el óResto del mundoô sobre el mundo de las matemáticas. Si se escriben ambas denominaciones (*x*- óPesoô e *y*-óLongitudô) el estilo será integrado o próximo al integrado. Ello conllevará rutas de modelización diferentes (Borromeo, 2007a, 2007b). Las rutas serán colectivas, en caso de desarrollar las siguientes fases en grupos de trabajo, o individuales, en caso de tratarse de una tarea individual.

Respecto a los principios que rigen las MEAs en la perspectiva M&M, la primera fase cumpliría las exigencias de una buena parte de esos principios. Cumple con el óPrincipio de Realidadô, de óAutoevaluaciónô, de óCompartibilidad y Reutilizaciónô y de óPrototipo Eficazô. Los estudiantes sólo deben entregar la tabla de datos que han construido y no se les exige que expliciten qué han pensado ni una guía de auditoría. Con tal motivo, los óPrincipios de Construcción de modelosô y de óDocumentaciónô no se han respetado. Pero, al fin y al cabo, si al alumno se le solicita que explicite el proceso que ha seguido, su descripción se verá limitada a exponer qué procesos ha seguido. Por ejemplo, qué pesos ha usado, qué cantidad de datos ha recogido, qué instrumento de medida ha usado y qué unidad de medida, etc. Todas ellas son cuestiones puramente técnicas, sin relación explícita, aunque sí implícita, con los conceptos y nociones matemáticas involucradas. El problema es precisamente esa relación implícita. El hecho de describir los datos como *x* e *y*, ¿representa una matematización de la realidad? ¿Representa que el alumno ha pasado del mundo real al mundo matemático? Si describe las columnas como ópeso y ólongitudô, ¿podemos decir que el nivel de matematización o de integración en el mundo de lo matemático es menor? El hecho cierto es que no parecen existir motivos, a priori, para solicitar a los alumnos que expliciten qué han imaginado exactamente al nombrar las columnas como *x*, *y*, peso o longitud.

Se trata de una actividad que se centra en el comportamiento de un muelle, aceite sobre agua y la evolución de la temperatura de un metal (mercurio en el caso de los termómetros empleados). Teniendo en cuenta este hecho, nos encontramos ante un caso de aplicación de las matemáticas para explicar un fenómeno físico concreto. Así, esta primera fase constituye un primer paso de una actividad, centrada en la aplicación de las matemáticas al óResto del mundoô de Pollak.

Acudiendo al ciclo de matematización de PISA, la obtención de datos parte de un óProblema en contextoô encuadrado en la realidad física, que los alumnos manipulan. Como la construcción de tablas representa una forma genuina de matematización, nos encontramos ante una representación matemática de un problema en contexto y de un ciclo de matematización de lo real.

De hecho, la obtención de la tabla de datos representa ya la obtención de un óResultado matemáticoô. El hecho de que el resultado (la tabla de datos) represente o no un resultado matemático, dependerá en gran medida de si el problema ha representado para el alumno un óProblema matemáticoó o no. Que se trata de un problema en contexto es evidente, pero si ese problema se ha formulado o no en términos matemáticos es otra cuestión. Ese es el elemento central del problema: ¿se puede obtener un resultado matemático para un problema que no se ha planteado como tal problema matemático? O aún más: ¿es posible realizar una matematización de lo real sin trasladar dicha realidad al mundo de las matematicas y a términos matemáticos?

Incidimos en el hecho de que obtener una tabla de datos representa, de hecho, una matematización, puesto que las tablas de datos representan, como sostienen Ruiz Higueras y otros, la primera concepción histórica del concepto de función (ôIdentificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variablesö). Además, se asume que las tablas son una de las representaciones genuinas de las funciones (representación tabular). La duda surge ante la pregunta: ¿los alumnos se han planteado internamente el problema asociado a la construcción de una tabla como un problema matemático?

a) Si la respuesta es sí, la tabla de datos representa un resultado matemático. De hecho, se podrían plantear las tres actividades como modelizaciones plenas o completas, cuyo objetivo se viese reducido a la obtención de la tabla de datos. Se puede afirmar que el proceso de obtención de la tabla de datos es un proceso de modelización completo, según el esquema de Blum y Leiss (Figura 5): la situación original se construye y transforma mediante una simplificación y estructuración, se matematiza (variables, asignación de nombre a las mismas, establecimiento implícito de una dependencia entre ellas, etc.), se trabaja matemáticamente (uso de instrumentos de medida, magnitudes, unidades de magnitud, aproximaciones, etc.) y, por último, se interpreta, valida y expone el resultado (la tabla de datos entregada al profesor). El resultado y solución matemática/real es poco ambicioso, pero eso no quiere decir que no represente un modelo de la situación real y del problema original.

b) Si la respuesta es no, la interpretación es muy diferente: no se plantea un problema matemático, por lo que no se puede hablar de resultado matemático. Tampoco de trabajo matemático o de interpretación de resultado matemático en contexto. Por tanto, la modelización y el proceso no se pueden considerar una modelización matemática.

Hasta ahora hemos hablado del alumno pero no es él el único que posee protagonismo en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. ¿Cómo interpretará el profesor la obtención de la tabla de datos? ¿Como un resultado matemático de un problema real? Puede contentarse con que los alumnos obtengan la tabla de datos, interpretando que el resultado representa la solución a un problema matemático. O puede poner los medios para comprobar si el alumno ha planteado y resuelto un problema matemático o no. Es decir, la ôinterpretación del resultadoö es un elemento importante en relación a la implementación, objetivos de aprendizaje y evaluación de la actividad por el profesor. No sólo es importante en el caso del profesor, sino que también lo es en el caso del ôsaber sabioö. PISA, o sus derivaciones en el caso de las evaluaciones en España y las Autonomías, establecen niveles de competencia en función, básicamente, de resultados aportados por los alumnos. Se parte de la suposición de que la obtención del resultado es el producto de un proceso completo de resolución de un problema.

Es evidente que nos encontramos ante los mismos problemas que hemos descrito en los párrafos anteriores y que se podrían describir en términos de *saber* y *saber hacer*. El *saber hacer* se reduce a la obtención de la tabla de datos, a un uso de un instrumento de medida y al registro de un conjunto de datos o números en un sistema de representación (tabla de dos columnas). *Saber* y *saber hacer* integrados representan que el alumno utiliza los instrumentos de medida y registra los datos en columnas pero, además, debe identificar los números que registra como variables, diferenciar entre variable física (peso, longitud; volumen, diámetro; tiempo, temperatura) y variable matemática (*x* e *y*), e identificar que existe una relación de dependencia entre ambas (peso->longitud; volumen->diámetro; tiempo->temperatura, x->y).

En el siguiente apartado se incluyen tablas de datos, para cada una de las actividades, obtenidas por los autores. Se proponen como ejemplos de las tablas que deberían obtener los alumnos, por lo que los ejemplos que presentamos representan una hipótesis del resultado que se espera de los alumnos.

3.3.3. Obtención de las tablas de datos. Hipótesis de trabajo: obtención de tablas de datos en cada una de las modelizaciones

El material que hemos empleado fue el mismo que usaron los alumnos. Todo ese material se encuentra en el laboratorio de cualquier Instituto de Secundaria o es muy fácil de conseguir.

En el caso de *Muelle*, el material es el siguiente: pesas de diferentes masas (desde 2.5g hasta 250 g), soporte para pesas, muelle (diferente en cada grupo de trabajo), papel, lápices, bolígrafos, reglas, flexómetro y calculadora científica (Figura 20).

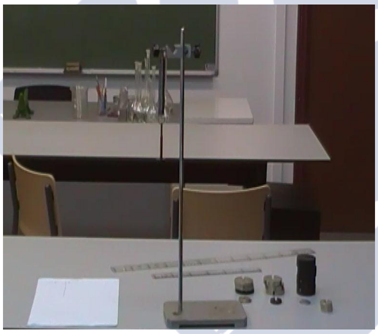


Figura 20. Material usado en *Muelle*

En el caso de *Aceite y agua*: una tina de plástico, agua, detergente líquido, aceite de oliva de uso doméstico, jeringuillas de 2.5 ml, 5 ml y 10 ml, papel, lápices, bolígrafos, reglas, un flexómetro, material de dibujo técnico (cartabón, escuadra, compás, transportador de ángulos) y calculadora científica.

Al verter el aceite sobre el agua, la mancha adopta una forma circular (Figura 21).

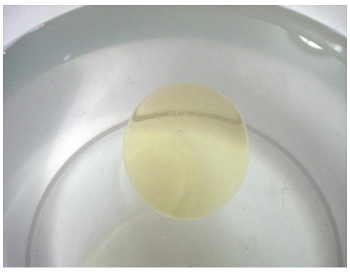


Figura 21. Forma circular que adopta el aceite sobre el agua

Verter aceite con una jeringuilla no es sencillo, sobre todo si se trata de cantidades pequeñas. Ante la posibilidad de que los alumnos tuviesen dificultades al usar las jeringuillas, unos días antes de la realización de la actividad se solicito a dos alumnos de cada grupo que practicasen en sus casas a verter aceite con las jeringuillas.

En el caso de *Temperatura*: un termómetro de mercurio, un teléfono móvil con una aplicación de cronómetro, un recipiente de metal, una bombona de de gas inflamable de laboratorio, un regulador de paso del gas, un soporte para situar el recipiente sobre la bombona y calculadora científica (Figura 22).

Figura 22. Temperatura y tiempo

Como ejemplo de la tabla de datos que deberían obtener los alumnos, adjuntamos tres obtenidas por los autores de esta memoria (Tablas 1, 2 y 3).

Tabla 1. Tabla de datos. Actividad *Muelle*

x Peso (en gramos)	**y Longitud (en centímetros)**
0	13.2
20	15
40	17.2
60	19.6
80	22
100	24.5
120	26.4
140	28.5
160	31
180	33
200	35.5
220	37.7
240	40.1
260	42.3
280	44.7
300	46.7
350	52.4
400	58

Tabla 2. Tabla de datos. Actividad *Aceite y agua*

x Volumen (en ml)	**y Diámetro (en mm)**
0.1	7
0.2	11
0.3	14
0.4	17
0.5	19
0.6	20
0.7	21
0.8	24
0.9	25
1	25
1.2	27
1.4	29
1.6	31
1.8	34
2	35
3	40
4	48
5	52
6	58

Tabla 3. Tabla de datos. *Temperatura*
(Temperatura ambiente: aprox. 21° C)

x Tiempo (en segundos)	y Temperatura (en ° C)
0	87
12	70
25	60
42	50
56	45
70	40
94	35
123	30
144	28
168	26
182	25
202	24
225	23
270	22
330	21

7	61
8	66
9	70
10	73
12	79
14	84
16	89
18	93
20	96
25	105
30	117
35	125
40	135
45	142

3.4. SEGUNDA FASE: LA MATEMATIZACIÓN

Una vez que se ha obtenido la tabla de datos, se plantea una nueva tarea. Al igual que en la fase precedente, dicha tarea se plantea de forma muy parecida en las tres actividades, de forma verbal y sin dar ningún tipo de aclaración complementaria.

> ñVuelca los datos que has obtenido en el laboratorio en el ordenador e intenta obtener una función que ajuste los datos mediante el programa GeoGebraò

Se optó por utilizar GeoGebra, aunque se podría haber optado por utilizar otros medios que conllevan la generación de técnicas nuevas y complejas. Las nuevas técnica conllevan nuevas teorías, por lo que la modelización se convertiría en una forma de conseguir que los alumnos generen conocimiento matemático. Así, obtener la función de ajuste sin usar GeoGebra representaría un problema matemático en sí mismo. La resolución del problema contextualizado conlleva la generación de conocimiento matemático que permita desarrollar el modelo matemático y, de esa forma, la generación del modelo se convierte en una forma de construir conocimiento matemático. Nos referimos, por ejemplo, a la introducción del método de mínimos cuadrados. La opción descrita, teniendo en cuenta los objetivos que hemos fijado presenta, dos problemas fundamentales:

a) La inversión de tiempo que la generación de conocimiento matemático conlleva.

b) La necesidad de guiar, en mayor o menor medida, el trabajo de los alumnos.

Con el objetivo puesto en potenciar la autonomía del alumno y el planteamiento de la actividad como abierta y de duración corta, hemos optado por usar el programa GeoGebra. El planteamiento de la actividad como una forma de generar una teoría y una técnica asociada, que permita obtener el modelo, representaría que el alumno deduzca, por ejemplo, el método de mínimos cuadrados por sí mismo. Pretender que los alumnos construyan el conocimiento matemático necesario para obtener una técnica sofisticada no parece tarea fácil, por lo que se impone guiar su trabajo. La guía debe, por un lado, intentar que el alumno no pierda protagonismo en el proceso de generación de conocimiento y, por otro, que no conduzca a callejones sin salida y bloqueos (Albarracín y Gorgorió, 2013). Con tal motivo, se debe buscar un equilibrio difícil entre la autonomía del alumno y la labor de guía del profesor. Un planteamiento demasiado abierto puede conducir a los alumnos a puntos muertos que obliguen al profesor a intervenir y suministrar claves de resolución. Uno demasiado cerrado, convierte la modelización en una exposición del profesor de cómo se realiza un proceso de modelización y cómo se obtiene un modelo matemático. La segunda opción situaría la modelización matemática en el monumentalismo denunciado por Chevallard.

Pero hemos limitado el uso de GeoGebra, por lo que la utilización de recursos tecnológicos se ha reducido en beneficio de los objetivos de la modelización como actividad de enseñanza-aprendizaje. Uno de los objetivos se centra en la noción de parámetro. GeoGebra permite obtener una función de ajuste de una tabla de datos. Así, a partir de la tabla de datos obtenida en la primera fase, bastaría con introducirlos en una hoja de cálculo GeoGebra (Figura 23), seleccionarlos y utilizar la herramienta óAnálisis de regresión de dos variablesô. GeoGebra permite un ajuste mediante una función afín, polinómica, potencial, exponencial de base *e*, de base diferente de *e*, con la función seno y mediante la función logística (Figura 24).

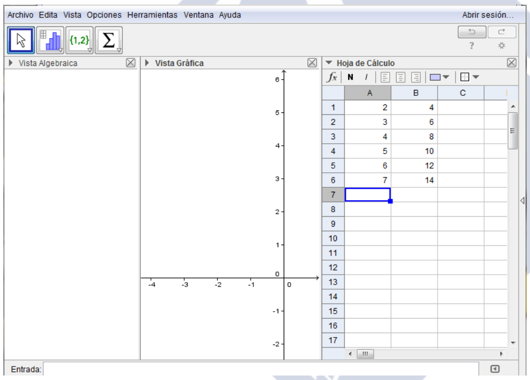


Figura 23. GeoGebra. Vista óHoja de cálculoô

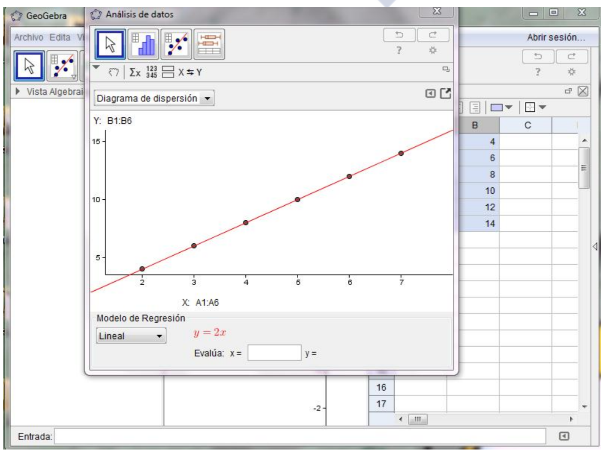


Figura 24. GeoGebra. Herramienta óAnálisis de Regresión de dos variablesô

El hecho de usar la herramienta de GeoGebra, que permite obtener la expresión de la función directamente, hace innecesaria la decisión de qué función es la adecuada para realizar un ajuste y la generación de deslizadores o, lo que es lo mismo, la introducción de parámetros.

El concepto de parámetro es fundamental en matemáticas y, por tanto, en su enseñanza/aprendizaje. Ha sido motivo de investigación por muchos autores, pero destacamos entre ellos, por su relevancia e importancia, los de Drijvers en su tesis doctoral de 2003. Según Drijvers, el uso de parámetros puede surgir de un problema en contexto y significar una generalización y abstracción:

> el concepto de parámetro, que por un lado puede surgir de forma natural a partir de contextos concretos y, por otro lado, puede ser un medio de generalización y abstracción
>
> (Drijvers, 2003, p. 5)

Destaca, además, que la posición ójerárquicaô del parámetro es superior a la del concepto de variable:

> Un segundo aspecto, relacionado con el concepto de parámetro es la posición *jerárquica* del parámetro en comparación con la variable. Una expresión paramétrica o fórmula se establece para una clase o familia de expresiones o fórmulas. Como tal, una forma paramétrica puede ser considerada como una función de segundo orden con el parámetro como argumento y las correspondientes expresiones o fórmulas como valores de la función.
>
> (é)
>
> Esta mezcla del parámetro como una constante en el primer nivel, y como una variable en el segundo nivel, se refleja en la expresión "variable constante". En ese sentido, el parámetro tiene una posición jerárquica más alta que la variable.
>
> (Drijvers, 2003, p. 67)

Drivers usa deslizadores en su investigación y llega a la conclusión de que ayudan a los alumnos a comprender el concepto de parámetro como una cantidad variable, pero también que el concepto de parámetro resulta complejo y difícil para los estudiantes, sobre todo en el proceso de pasar de considerarlo una cantidad variable a un generalizador.

En definitiva, esta segunda fase representa un cambio cualitativo de gran magnitud al introducir, entre otras cosas, el parámetro y las familias de funciones.

En esta segunda fase, por tanto, se introduce el ómundo tecnológicoô en el proceso de modelización. La importancia creciente que se concede al uso de la tecnología para enseñar y aprender matemáticas es indudable. De hecho, el aprendizaje del uso de herramientas tecnológicas (especialmente de programas de ordenador) posee un protagonismo creciente en los programas de formación del profesorado. Las ventajas supuestas del uso de las herramientas tecnológicas sobre otras opciones no son compartidas por todos. Por ejemplo, Alsina (2007, p. 43) sostiene que:

> El creciente poder de las tecnologías puede inducir a algunas personas a creer que estos nuevos dispositivos son las herramientas esenciales para la prestación de apoyo para experiencias bien estructuradas; que las simulaciones y las imágenes pueden ser suficientes para eliminar completamente la necesidad de "experimentos reales" y los materiales manipulables. Esto no es posible. El nuevo software proporciona nuevos conocimientos matemáticos pero no puede reemplazar el "learning by making".

Siguiendo a Greefrath (2011), se podría argumentar que el uso de GeoGebra para obtener la función de ajuste de los datos representa que el alumno debe:

- *Introducir los datos de la tabla en forma de puntos del plano cartesiano*: se realiza, por tanto, una identificación de la tabla de datos con una representación gráfica de pares de puntos. Esto conlleva el establecimiento implícito de una relación entre los valores de las variables de cada una de las columnas, algo que ya se había realizado en la fase precedente. Además, al introducir las columnas de la tabla como puntos de los ejes cartesianos, se abandona lo real al identificar cada variable física con una variable matemática (por ejemplo, peso->*x*, longitud->*y*). Así, el paso del mundo real al matemático es más evidente que en la fase anterior. En el proceso, se ha producido una matematización vertical al trabajar con símbolos, conceptos y nociones matemáticas. Eso no significa que lo real no se halle implícito pero, explícitamente, se ha producido un traslado de la situación desde el mundo real al mundo matemático. La situación real como problema se ha transformado en un problema matemático. La solución al problema vendrá dada por el modelo matemático, que tomará la forma de una función real de variable real.
- *Introducir un parámetro*: el alumno debe introducir un deslizador, que modificará posteriormente. Para introducir el deslizador, el alumno debe asignar un valor concreto a una letra, con lo que el deslizador toma un valor constante al ser definido (por ejemplo, *k=1*). Al seleccionar óMostrar el objetoô en las propiedades de *k*, el valor de *k* pasa a ser variable, con lo que la constante se convierte en variable. Se trata de una constante-variable, forma que, como hemos visto en el párrafo anterior, se usa para caracterizar un parámetro.
- *Introducir la expresión de una función que considere adecuada para hacer el ajuste*: la introducción de la expresión funcional dependiente del parámetro o los parámetros nos sitúa en el campo de las familias de funciones. Por un lado, debe identificar la expresión analítica de una función con su gráfica. Por otro lado, debe comprender que una misma función (afín, por ejemplo) tiene infinidad de expresiones analíticas asociadas y, por tanto, infinidad de representaciones gráficas. Lo dicho conlleva que debe darse cuenta de lo elementos en común de todas esas expresiones analíticas (lo que define la familia de funciones) y de la influencia de la variación del parámetro o los parámetros en su representación gráfica.

En el proceso de generación de la función de ajuste se hallan, por tanto, presentes las concepciones tabular, gráfica y como expresión analítica (Janvier, 1987).

Como forma de evitar bloqueos en los alumnos y puntos muertos, se les entregó una fotocopia con ejemplos de las gráficas de las funciones fundamentales (Anexo I). Las funciones fueron descritas asignándoles un nombre y una expresión matemática: afín, $f(x)=ax+b;\ a,b\in\mathbb{R}$; cuadrática , $f(x)=ax^2+bx+c;\ a,b,c\in\mathbb{R}$; proporcionalidad inversa, $f(x)=\frac{k}{x^n};\ k\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$; raíz cuadrada, $f(x)=k\cdot\sqrt{x};\ k\in\mathbb{R}$; exponencial de base mayor y menor que 1 , $f(x)=c\cdot a^{kx},\ a>0,\ a,\ c,\ k\in\mathbb{R}$; logarítmicas de base mayor y menor que 1 , $f(x)=c\cdot log_a(kx),\ a>0,\ a,\ c,\ k\in\mathbb{R}$; seno, coseno y tangente ($f(x)=sen(x);\ f(x)=cos(x);\ f(x)=tg(x)$. Acompañando a cada una de las funciones, se incluía una gráfica de ejemplo. Respectivamente: $f(x)=$3x-2;

$$f(x)=x^2+3x+2;\ f(x)=\frac{3}{x^3}\ f(x)=\sqrt{x};\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x;\ f(x)=e^x;\ f(x)=log_{\frac{1}{2}}(x);$$

$$f(x)=log\ (x);\ f(x)=sen(x);\ f(x)=cos(x);\ f(x)=tg(x).$$

La obtención de la función de ajuste se plantea nuevamente de forma abierta, lo que les obliga a la toma de decisiones, tanto en la forma de distribuir el trabajo en el grupo como en cuestiones relevantes en la actividad: ¿qué función es la apropiada?, ¿qué parámetros introducir?, ¿qué intervalo de valores usar para el parámetro?, etc. Entre las funciones de las fotocopias se encontraba la función raíz cuadrada en la forma $f(x)=k\cdot\sqrt{x},\ k\in\mathbb{R}$ (función que ajusta datos en el caso de *Aceite y agua*). La inclusión del parámetro *k* en la función representa una reducción del carácter abierto de la actividad de los alumnos en el caso de *Aceite y agua*. La presencia del parámetro en la expresión de la función raíz cuadrada es, de hecho, una forma de suministrar una clave de resolución importante. El problema se encuentra en que proponer una actividad demasiado difícil puede generar bloqueos que lleven a puntos muertos. Es importante evitar ese posible bloqueo en la segunda actividad, dejando el protagonismo de la complejidad de la determinación de la función de ajuste para la tercera actividad de *Temperatura*.

Acudiendo a las concepciones históricas de Ruiz Higueras (1983, 1998), se hallan presentes las concepciones de óIdentificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variablesô, la concepción óGráfica, (visión sintética)ô, como óCurva (analítico-geométrica)ô y como óExpresión analíticaô.

Respecto al ciclo de modelización, se llevan a cabo los procesos de *simplificación/estructuración, matematización, trabajo matemático* e *interpretación* del ciclo de Blum y Leiss (Figura 5).

Los procesos de *validación* y *exposición* no se realizan expresamente porque la validación y exposición la suministra el resultado matemático obtenido (la función). La validación y exposición del resultado matemático se realiza por simple comparación: si la función obtenida ajusta bien los puntos del plano, el resultado representa, al mismo tiempo, un modelo matemático y real y una solución.

Lo dicho es cierto si el alumno es consciente, al obtener el resultado matemático, de un hecho de gran importancia: el resultado (la función) integra, en realidad, dos resultados. La función, que es a la vez un modelo matemático, debe ser interpretada en dos contextos distintos: el mundo de las matemáticas y el mundo real. Interpretado en el mundo matemático representa un resultado a un problema matemático. Interpretado en contexto, representa un modelo de un problema real. La diferencia de interpretación viene dada por la lectura de los elementos presentes en la función:

- *Las variables*: x e y o variables independiente y dependiente en el mundo matemático; peso, volumen de aceite y tiempo en el mundo real.
- *Los parámetros*: variables-constantes en el mundo matemático; coeficientes dependientes de las condiciones iniciales en el mundo real.
- *La función*: una función concreta de una familia de funciones en el mundo matemático, una regularidad o Ley física en el caso del mundo real.
- *Características de la función*: por ejemplo, el dominio y recorrido de la función (diferentes en el contexto del mundo de las matemáticas y del mundo real), la monotonía (crecimiento y decrecimiento en el mundo matemático, aumento o disminución de una variable física al aumentar o disminuir la otra), tendencia (asíntota horizontal en el mundo matemático, tendencia a la estabilización en un valor en el mundo físico), etc.

Así, la interpretación en el mundo de la matemáticas y en el mundo real juega un papel de gran importancia en el proceso de modelización. De que el alumno distinga con claridad la doble interpretación del resultado depende que el mismo conlleve la realización de más o de menos pasos del ciclo de modelización. Además, la forma en que interprete ese resultado permite deducir de qué forma relaciona los elementos presentes en el ciclo, lo que permitirá a su vez establecer las rutas de modelización del alumno o del grupo de alumnos.

Para ilustrar lo anteriormente dicho, incluimos un esquema de los procesos que han tenido lugar en esta 2ª fase (Figura 25). Excluimos el proceso de interpretación porque el alumno puede desarrollarlo o no.

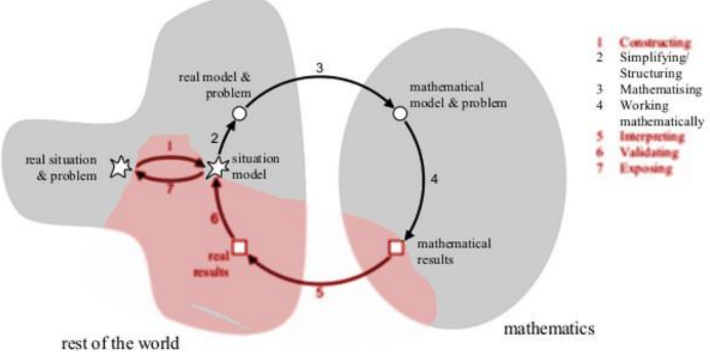


Figura 25. Procesos. 2ª Fase

Al mismo tiempo, la forma en que los alumnos interpreten el resultado obtenido permite conocer el nivel de matematización de lo real y qué ómodelos emergentesô han manejado (sólo el matemático, sólo el real o ambos). Esa misma doble lectura (desde lo real o lo matemático) nos da la clave de si se ha producido una matematización vertical o si, en realidad, la matematización permanece horizontal.

De hecho, los alumnos realizan dos matematizaciones o integraciones de los datos obtenidos experimentalmente en el mundo matemático. En un primer nivel, los alumnos deberán introducir los datos de la tabla como puntos del plano. De esa forma, los valores de la tabla de datos forman pares de puntos *(x,y)* que, representados en un sistema de ejes cartesianos, dan lugar a puntos del plano cartesiano. Los pares se construyen de forma consecuente con la primera fase: la primera coordenada se halla relacionada con la segunda a través de la relación que se ha establecido previamente en el laboratorio. A un peso determinado le corresponde una longitud determinada. A un volumen de aceite, un diámetro. A un tiempo, una temperatura. Pero las magnitudes físicas y las unidades de medida desaparecen explícitamente, de 200 g pasa a ser, simplemente, 200.

En cierta medida, se produce un abandono del mundo real en beneficio del mundo matemático. En un segundo nivel de matematización, los puntos del plano se deben considerar pares de puntos que se hallan relacionados entre sí. La relación debe ser considerada como de tipo funcional, para que la pregunta de qué función ajusta los datos tenga sentido. En ese momento de establecimiento de una relación funcional entre la coordenada *x* y la coordenada *y* de los puntos del plano visibles en la pantalla de GeoGebra, *y* pasa a ser *f(x)*. Se establece expresamente una identificación de la variable *x* como variable independiente de la función y de la variable *y=f(x)* como dependiente. La función obtenida, si se interpreta como resultado derivado de un conjunto de datos obtenidos en el contexto real, proporciona una relación de dependencia entre los valores de las magnitudes físicas implicadas (peso-longitud; volumen de aceite-diámetro; tiempo-temperatura). Dicha interpretación es automática en el sentido de no ser necesario ningún proceso complejo de interpretación del resultado matemático como real.

Por decirlo de alguna forma, la obtención de la tabla de datos nos lleva de lo real a lo matemático y la obtención de la función de ajuste de lo matemático a lo real. El hecho de haber partido de una obtención experimental de los datos proporciona la interpretación en contexto de la función obtenida como un resultado real. Con tal motivo, el ciclo de modelización se ha completado al término de la segunda fase. Hemos pasado del mundo real al matemático y de éste al real, interpretando el resultado matemático obtenido como un resultado real a una pregunta planteada incialmente en un situación real.

En lo dicho anteriormente, la interpretación del alumno de los procesos descritos es fundamental. La comprobación de qué interpretación hace el alumno del resultado nos permite, también, decir qué Principios de un MEA se han cumplido y cuáles no.

En el proceso de obtención del modelo se usan, en realidad, técnicas aprendidas en las prácticas previas. En la generación del modelo usan esas técnicas, que pueden estar vinculadas a la teoría asociada o no. Dicho de otro modo, la obtención de la función mediante GeoGebra representa la praxis vinculada a la actividad propuesta. Si el logos se halla implícito en la praxis o no, vendrá determinado por la forma en que el alumno interpreta los elementos presentes en el modelo (variables matemáticas y físicas, parámetros, expresión analítica funcional, dominios y recorridos, etc.). Si la actividad integra las dos componentes del conocimiento matemático (praxis y logos) o no, resulta fundamental para decidir si el resultado representa un resultado matemático interpretado como solución a un problema o situación real o si, por el contrario, se trata únicamente de un resultado proporcionado por el uso de una técnica previamente aprendida.

Resaltamos que, desde un punto de vista pragmático, si los alumnos obtienen la función de forma exitosa, han cumplido con su cometido fundamental: obtener un modelo matemático. Desde un punto de vista pragmático o de planteamiento de las matemáticas como una herramienta o útil, el objetivo es la obtención del modelo (matemático y, al mismo tiempo, real), por lo que la obtención de un resultado prima sobre otras consideraciones.

A esto se añade que en un contexto de aprendizaje por investigación integrado en proyectos STEM, la función obtenida como modelo matemático sirve o puede servir de punto de inicio a la introducción de leyes y constantes físicas. En nuestro caso, la ley de Hooke, diferencia entre masa y peso, constante de elasticidad, comportamiento de fluidos de densidad distinta, tensión superficial, Principio de Arquímedes, Ley de enfriamiento de Newton y calor específico de una sustancia. Además, en el caso de la experiencia del muelle, la Ley de Hooke asociada a la función obtenida, permite plantear como proyecto la construcción de un dinamómetro. La vinculación de las matemáticas con otras ciencias, la tecnología y la ingeniería está servida.

3.4.1. Hipótesis de solución esperada de los alumnos en cada una de las modelizaciones

A continuación mostraremos tres ejemplos de funciones obtenidas a partir de las tablas de datos mostradas anteriormente (Tablas 1, 2 y 3). Nos parece necesario aclarar que las funciones obtenidas son aproximaciones a la función de ajuste que se obtendría mediante un sistema más eficiente. La razón de no optar por un sistema que proporcione una función de ajuste mejor es que, en realidad, el objetivo no es la obtención de la mejor función de ajuste posible. El objetivo es obtener una función de ajuste de una forma fácil y que no represente una gran inversión de tiempo en mostrar teorías y técnicas que proporcionen mejores resultados.

Las funciones que se proponen a continuación como solución se corresponden con funciones similares a las que se espera que obtengan los alumnos. En este sentido, representan la propuesta de una hipótesis de la solución que aportarán los alumnos. En la hipótesis se tiene en cuenta la forma en que se plantea la actividad a los alumnos y sus conocimientos matemáticos ya adquiridos.

3.4.1.1. Volcado de datos y función en *Muelle*

En el caso de *Muelle*, la función que ajusta los datos puede adoptar dos formas diferentes: si se mide únicamente la longitud de elongación o si se mide la longitud total del muelle.

En el primer caso, se trata de la función lineal con pendiente positiva:

$$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}^{+}$$

En el segundo, de la función afín, con pendiente y ordenada en el origen positiva:

$$f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}^{+}$$

Como se observa en la tabla de datos (Tabla 1), hemos optado por medir la longitud total del muelle. El volcado de datos presenta el siguiente aspecto (Figura 26)

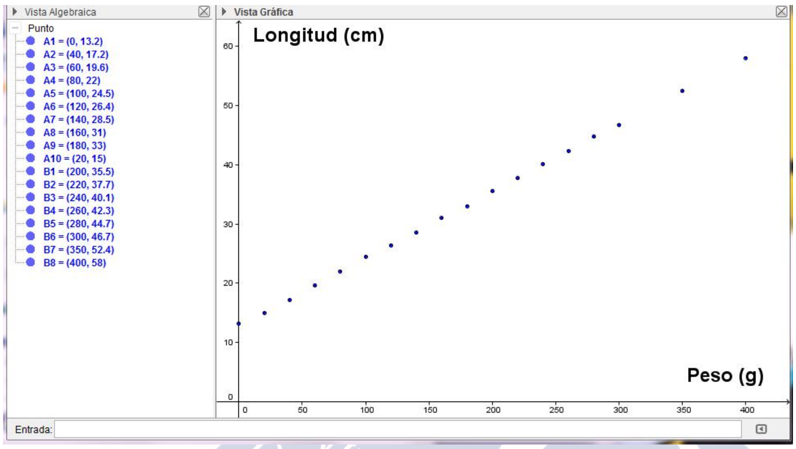


Figura 26. *Muelle*. Volcado de datos de la Tabla 1

La función obtenida con GeoGebra, introduciendo los parámetros *a* y *b* y modificándolos, es la siguiente:

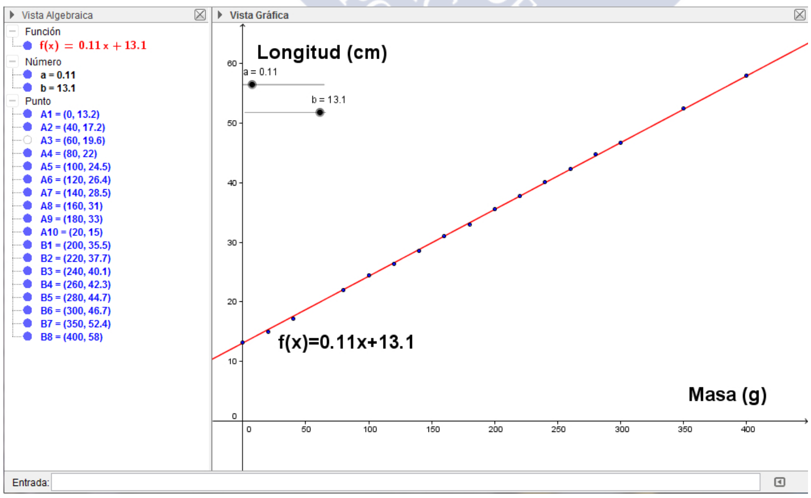


Figura 27. *Muelle*: función obtenida a partir de los datos de la Tabla 1

El obtener la función, en realidad representa la obtención de dos funciones: la función matemática y la función matemática interpretada en contexto.

La función matemática interpretada en contexto o, lo que es lo mismo, la interpretación del resultado matemático en el contexto real, nos sitúa en el comportamiento de un objeto físico, sometido a las limitaciones que ello supone. Evidentemente, el muelle no puede ser estirado indefinidamente ni encogido (valores negativos de longitud), sometido a un peso negativo o a un peso igual a $+\infty$. Es decir, el dominio de definición de la función como modelo real debe ser *[0,G]*, siendo *G* el peso (masa en realidad) máximo que se corresponde con el peso en el que el muelle alcanza la longitud del alambre usado para construir el muelle (*L*). De esa forma, el recorrido de la función resulta *[l, L]*, siendo *l* la longitud del muelle sin ser sometido a peso. La función matemática, sin embargo, es de dominio y recorrido igual a $\mathbb{R}$.

Además, si sólo consideramos la longitud de elongación del muelle, obtenemos una función del tipo $f(x)=ax$, siendo *a* una constante que varía en función de las características físicas del muelle. Esa función se encuentra directamente relacionada con la Ley de Hooke. Sin extendernos en este punto, diremos que la Ley de Hooke o Ley de elasticidad de Hooke se enuncia de la forma $F=k\cdot l$, siendo *F* la fuerza (peso en nuestro caso, relacionado con la masa), *k* la constante elástica o de recuperación del muelle y *l* la longitud de elongación del muelle sometido a la fuerza *F*. Como ya habíamos adelantado previamente, es evidente que la función matemática obtenida proporciona la vía para introducir la Ley de Hooke, obtener la constante de elasticidad del muelle concreto usado y para ilustrar la diferencia entre masa y peso. De hecho, la misma experiencia era una práctica habitual en la asignatura de Física, con el fin ya indicado.

La pregunta es evidente: ¿qué es lo importante desde el punto de vista de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?

Si nos situamos en una enseñanza integrada de las ciencias, como es la STEM, las matemáticas pueden verse reducidas a jugar el papel de proporcionar la función matemática, base para introducir la Ley de Hooke, la diferencia entre masa y peso y la constante de elasticidad de un muelle o un resorte. Además, esa introducción permitiría plantear, por ejemplo, el diseño de resortes y dinamómetros como parte del proyecto. La obtención de datos y la generación del modelo matemático se integra en un proyecto amplio y ambicioso, que relaciona áreas de conocimiento diferentes pero muy conectadas entre sí. Todo ello desde la aplicabilidad del conocimiento en una situación plenamente real, significativa para el alumno, percibida como útil, etc.

3.4.1.2. Volcado de datos y función en *Aceite y agua*

En este caso, la función adecuada es de la forma $f(x)=k\cdot\sqrt{x},\ k\in\mathbb{R}^{+}$. Los alumnos disponen de un ejemplo de la gráfica de esa familia de funciones en la fotocopia que se les entregó en esta fase ($f(x)=\sqrt{x}$), que aparece asociada a la función $f(x)=k\cdot\sqrt{x},\ k\in\mathbb{R}$ (Anexo I). La razón de incluir *k* en la expresión es facilitar a los alumnos la identificación del tipo de función que deben introducir. Se puede argumentar que la presencia de *k* es un error porque su inclusión en la expresión de la función representa suministrar un elemento fundamental en la tarea planteada como problema.

Es decir, su incorporación en la expresión facilita a los alumnos darse cuenta de que deben introducir un parámetro. La decisión de incluir k fue tomada para evitar el bloqueo o punto muerto que puede producirse en caso de que los alumnos no consigan identificar la función adecuada y, por tanto, conseguir un ajuste de los datos. La misma razón justifica la introducción de parámetros multiplicando en las expresiones de las funciones exponencial y logarítmica. En el caso de las exponenciales y logarítmicas, funciones adecuadas para la actividad *Temperatura*, el problema de la introducción de parámetros no se evita. En esa actividad, los alumnos deberán introducir parámetros sumando o restando, situación que no se incluye en las fotocopias. Dicho de otro modo, se introduce una dificultad en *Temperatura* pero buscando limitar su grado.

El volcado de los pares de puntos procedente de la tabla de datos (Tabla 2) presenta la siguiente nube de puntos:

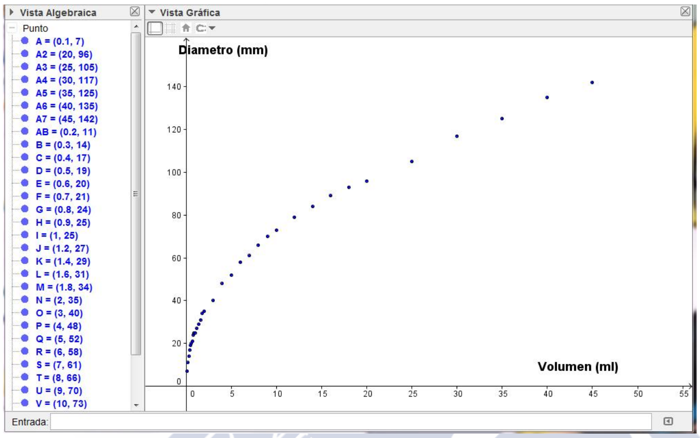


Figura 28. *Aceite y agua*: volcado de los datos de la Tabla 2

Introduciendo el parámetro k y modificando su valor para conseguir el ajuste, obtenemos la siguiente función:

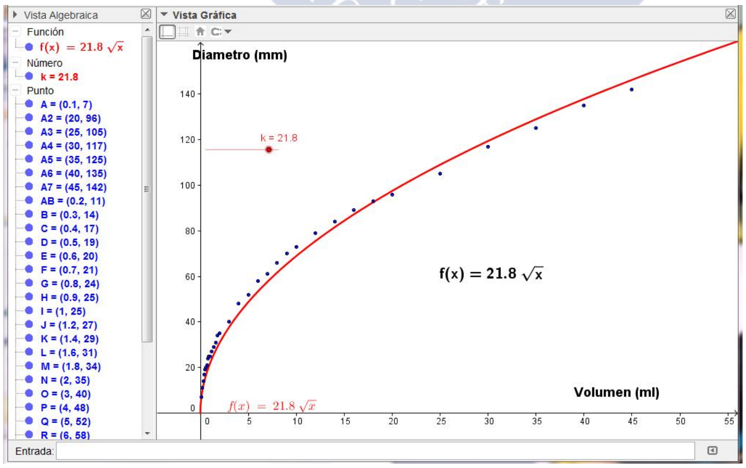


Figura 29. *Aceite y agua*: función obtenida a partir de los datos de la Tabla 2

3.4.1.3. Volcado de datos y función en *Temperatura*

El caso de la actividad *Temperatura* nos sitúa en una tarea más compleja y difícil que las dos anteriores. Se trata de un experimento realizado por Isaac Newton y que dio lugar a su Ley de Enfriamiento. Newton hizo sus experimentos para determinar la forma en que se produce el enfriamiento de diversos metales sometidos a altas temperaturas. La razón de ser de los experimentos de Newton era el uso de los resultados para su trabajo en la Casa de la Moneda. Para deducir la Ley, obtuvo datos experimentalmente, para lo cual construyó sus propios termómetros y desarrolló una escala de temperaturas. Resulta fácil encontrar la misma experiencia (o adaptaciones de la misma) realizada por alumnos en un laboratorio, aunque todas de las que tenemos noticias se han realizado en el nivel universitario.

La Ley de Enfriamiento de Newton es la siguiente:

$$T(x) = T_{ambiente} + \left(T_{inicial} - T_{ambiente}\right) \cdot e^{-kx}$$

Siendo *x*, el tiempo transcurrido y *k* un parámetro que recibe el nombre de coeficiente de enfriamiento.

El volcado de datos nos presenta una situación en la que se intuye con claridad que debe ser usada una función decreciente.

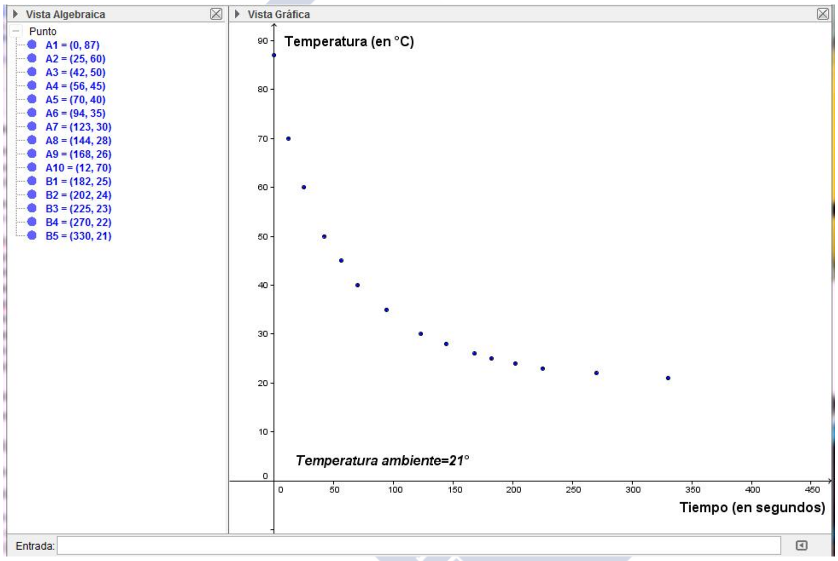


Figura 30. *Temperatura*: volcado de los datos de la Tabla 3

El tipo de función que deben identificar y utilizar los alumnos representa que la tarea sea, con diferencia, la más difícil de las planteadas. En primer lugar, el tipo de función es más compleja que en los casos anteriores. Además, la forma de la curva que se intuye a partir de los puntos sobre el plano que se observan lleva a pensar en una función estrictamente decreciente. Esa limitación coincide con la forma de la gráfica de diversas funciones, lo que dificulta la adecuada identificación de la función de ajuste de datos. Además, el recorrido de la función es fundamental en este caso, pues el límite inferior de temperaturas no puede ser menor que la temperatura ambiente. Para obtener la función, hemos utilizado la expresión general de la Ley de enfriamiento de Newton ($f(x) = a + b \cdot e^{cx}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$). Como se observa (Figura 31), el ajuste se consigue con un valor de *a* de 21 (Temperatura ambiente) y de *b* de 66 (Temperatura inicial-Temperatura ambiente). El coeficiente de enfriamiento del mercurio del termómetro resulta de *0.0171*. Así, la función es $f(x) = 21 + 66 \cdot e^{-0.0171x}$, siendo x el tiempo en segundos y *f(x)* la temperatura en grados centígrados:

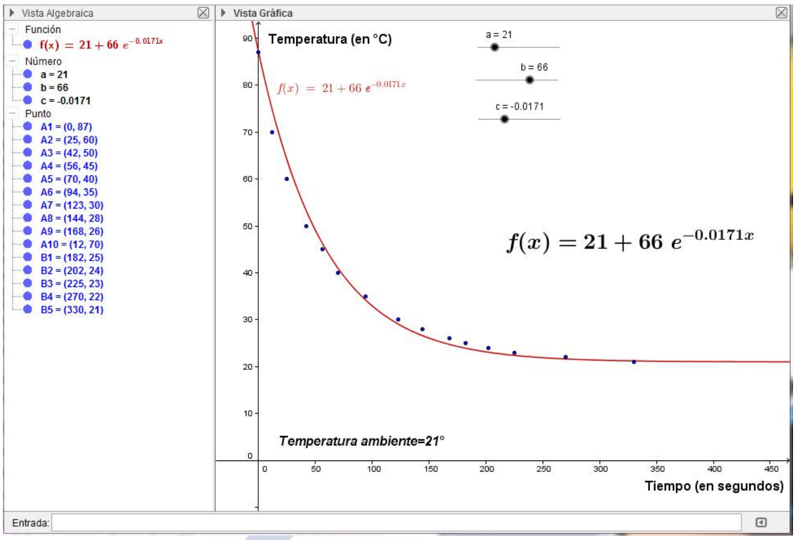


Figura 31. *Temperatura*: función obtenida a partir de los datos de la Tabla 3

Es difícil que los alumnos introduzcan la función $f(x) = a + b \cdot e^{cx}$ y se den cuenta de que a y b se corresponden con valores determinados por las condiciones ambientales iniciales. Esa situación se correspondería con la deducción experimental, por parte de los alumnos, de la Ley de Enfriamiento. Resulta difícil creer que puedan, en primer lugar, introducir y modificar la función necesaria para ello y, en segundo lugar, identificar cada parámetro usado con la temperatura ambiental, la diferencia de temperatura inicial y ambiental y una constante que depende del tipo de material. Lo esperable, en caso de éxito, es que los alumnos introduzcan la función $f(x) = a + b^{c \cdot x}$ o $f(x) = a + b \cdot c^x$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Para ello, deben darse cuenta de que deben usar una función exponencial y que deben sumar un valor a, que garantice que la gráfica de la función posea una asíntota horizontal en *a*, coincidente con la temperatura ambiente.

3.5. Tercera Fase

La 3ª fase no forma parte de la obtención del modelo matemático y real. De hecho, el modelo, tanto el real como el matemático, se ha obtenido en la 2º fase. La tercera fase se centra en el segundo objetivo de investigación. Recordemos que el segundo objetivo pretende dilucidar si los alumnos desarrollan los procesos complejos de modelización que conducen a la obtención del modelo y utilizan ese modelo adecuadamente. Ese objetivo se subdivide en dos:

1.- Comprobar si el alumno interpreta el modelo matemático en términos matemáticos y el modelo real en términos reales.

2.- Utilizar el modelo en una situación nueva.

El primer punto se centra en el proceso de interpretación del resultado matemático y del resultado real. Para ello, el alumno debe interpretar la función asociada al modelo matemático y real, distinguiendo el cambio que supone el paso del mundo matemático al mundo real y sus consecuencias sobre la función que ha obtenido.

Esto nos sitúa claramente en un ámbito en el que se integran logos y praxis. Interpretar el modelo en términos matemáticos precisa el uso del logos relativo a las funciones en el caso concreto de las tres funciones obtenidas. Interpretarlo en el contexto real representa saber utilizar la interpretación matemática adecuada de los conceptos y nociones involucradas en un contexto concreto (las funciones), lo que conlleva la dimensión del conocimiento matemático asociado al logos o al *saber*.

Las variables matemáticas pasan a ser magnitudes físicas relacionadas (unidades de medida concretas), lo que permite realizar cálculos, estimaciones, etc. Ese uso del conocimiento matemático se asocia a la praxis o al *saber hacer*. Ambas dimensiones (logos y praxis o *saber* y *saber hacer*) se hallan ligadas íntimamente. Si existe alguna descompensación entre ambas dimensiones tendrá que tener algún efecto observable en la tarea de los alumnos.

Relacionado con lo anterior, también nos proporcionará información sobre el nivel de matematización alcanzado en las dos primeras fases. La matematización horizontal y vertical nos sitúa en el contexto real y el contexto matemático respectivamente o, por decirlo en otros términos, en el mundo real y el mundo matemático. En las dos fases ya descritas, ambos mundos conviven y se relacionan intensamente. El problema es dilucidar hasta qué punto se ha realizado una matematización o, lo que es lo mismo, hasta qué punto el mundo de las matemáticas se halla presente en el resultado y solución que han obtenido. Lo mismo se podría decir en relación con el mundo real.

El segundo punto (utilizar el modelo en una situación nueva) representa que el modelo puede ser ótrasladadoô a una nueva situación. De esa forma, se pretende mostrar al alumno que los modelos matemáticos son modelos aplicables a múltiples situaciones. Se trata, en definitiva, del óPrincipio de Compartibilidad y Reutilizaciónô de un MEA.

Para intentar cumplir con los dos objetivos fundamentales se propone a los alumnos cuestiones directamente relacionadas con la solución que han obtenido. En unos casos, las cuestiones se proponen para que el alumno las responda individualmente y por escrito. En otras para responder en grupo por escrito y en otras como cuestiones generadoras de un debate en el que participen todos los alumnos.

3.5.1. Cuestionario de *Muelle*

El cuestionario de la actividad *Muelle* se centra en dos aspectos que consideramos fundamentales:

a) La interpretación de los dos modelos que han obtenido que representan, a su vez, dos resultados

Los alumnos han obtenido una función con dos interpretaciones que dan lugar a dos modelos: el matemático y el real. Ese mismo modelo real y matemático es, en sí mismo, un resultado. El resultado matemático se encuadra en el mundo de las matemáticas y el resultado real en el óResto del mundoô (Figura 5). Cada uno de los resultados posee una interpretación diferente, con lo que resulta importante observar si el alumno centra su atención en un modelo u otro o si interpreta y utiliza ambos modelos dependiendo del contexto de la cuestión. Dicho de otra forma, resulta importante averiguar si el alumno se sitúa en uno de los dos ómundosô o si, por el contrario, se sitúa en ambos mundos, cambiando de uno a otro y estableciendo relaciones entre ambos.

b) El uso del modelo

Parte del cuestionario se centra en el uso del modelo (la función) para responder preguntas. La elección de las preguntas se apoya en la propuesta de Ursini y Trigueros (2006) y Ursini (2011) para trabajar exitosamente con problemas que involucran variables en relación funcional. Según estas autoras, las variables en relación funcional involucran los siguientes aspectos, correspondientes con distintos niveles de abstracción: (F1) Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas); (F2) Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente; (F3) Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente; (F4) Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas); (F5) Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra; (F6) Simbolizar una relación funcional, basada en el análisis de los datos de un problema. Los aspectos F2 y F3 se relacionan con la determinación del valor de una incógnita en una expresión pero que no son equivalentes, ya que:

> para determinar los valores de una variable en función de los valores de la otra, es necesario primero sustituir un valor en una de las variables y convertir de este modo una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación.
>
> (Ursini y Trigueros, 2006, p. 7)

De todos modos, resulta complejo situar las preguntas en uno o varios aspectos de los citados por Ursini y Trigueros. Las conexiones o vinculaciones del modelo y el resultado con el contexto, íntimamente vinculado por tanto a su interpretación en el mismo, dificultan centrarnos únicamente en el uso de las variables funcionales. Por ejemplo, las variables son funcionales (en el mundo de las matemáticas) y magnitudes físicas en una determinada unidad (en el óResto del mundoô). El parámetro posee un significado en el mundo de las matemáticas (constante-variable) y otro en el óResto del mundoô (una constante que depende de las características del muelle).

3.5.1.1. Preguntas del cuestionario de *Muelle*

A continuación, reproducimos el enunciado de las preguntas del cuestionario suministrado a los alumnos y que puede consultarse, en su versión tal y cual se les entregó, en el Anexo II. Las 10 primeras preguntas se realizaron ambos años y la 11 solo el segundo. La razón de la incorporación de esa pregunta se explicitará en el Capítulo 5:

Tabla 4. Cuestionario de *Muelle*

Cuestionario Muelle sometido a un peso
1. ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado.
2. ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente en la función?
3. En la función que has deducido, ¿aparece algún parámetro? Si es así, ¿qué significado tiene en el experimento que estás realizando?
4. ¿Cuánto se alarga el muelle con 370g de peso?
5. ¿Qué peso se corresponde con 21cm de longitud del muelle?
6. ¿Qué longitud de muelle obtienes por la función si no colocas peso sobre el muelle? Interpreta tu resultado.
7. Según la función que has obtenido, ¿es posible alargar indefinidamente el muelle? Interpreta ese resultado teniendo en cuenta el experimento concreto que has realizado.
8. Intenta deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle si conoces la longitud del muelle.
9.- ¿Crees que la función que has obtenido describe bien el comportamiento de un muelle al que se le ha colocado un peso?
10.- Las funciones que se obtienen son distintas. ¿Cuál crees que es la razón?
Añadida el curso 2010-11:
11.- El tercer grupo tomó los datos longitud-peso. ¿Cómo obtener la función en la forma de la de los otros dos grupos para comparar resultados?

Si bien los enunciados de las preguntas 1, 6, 7, 9 y 10 se relacionan expresamente con una interpretación del modelo o de un resultado concreto obtenido, los objetivos se vinculan a los elementos de la tripleta (S,M,R) y a los pasos del ciclo de modelización. Dicho de otro modo, el alumno debe considerar, en mayor o menor medida, la situación real, el modelo matemático y real y las relaciones entre ambas a la hora de contestar. La pregunta 10, por ejemplo, debe representar vincular el resultado matemático y el real con el concepto o noción de parámetro. El parámetro debe ser interpretado como una constante que depende del muelle usado.

Los aspectos citados por Ursini y Trigueros, referidos anteriormente, son tratados en una o varias fases de la actividad. Por ejemplo, el aspecto F1 es tratado en las tres fases en cada una de las representaciones que los alumnos generan y utilizan (tabular, gráfica y como expresión analítica). Los aspectos F2 y F3 son tratados expresamente en las preguntas 4, 5 y 8 del cuestionario. El aspecto F5 debe ser utilizado en la pregunta 7, pues existe una diferencia de dominio y recorrido de la función matemática y de la función aplicada en el contexto concreto de un muelle. El aspecto F6 es desarrollado, en primera instancia, en la primera fase mediante la obtención de una primera representación funcional (tabla de datos) y volverá a aparecer en las sucesivas representaciones y en la interpretación y solución a las preguntas planteadas en esta última fase.

Las preguntas 2, 3, 4, 5 y 8 se centran en las variables, tanto reales como matemáticas, y en el uso de esas variables para calcular valores concretos no presentes en la tabla de datos. En concreto, las preguntas 2 y 3 inciden en la diferenciación entre variable dependiente e independiente y parámetro. Como ya hemos visto, Drijvers afirma, el concepto de parámetro ocupa una posición jerárquica de mayor nivel comparada con el concepto de variable. El parámetro posee, en ocasiones y como es evidente en el caso concreto de la modelización que proponemos, la condición de constante-variable, condición más compleja que la de variable y que, por tanto, conlleva más dificultades en su uso y comprensión.

Las preguntas 5, 8 y 11 se encuentran fuertemente relacionadas entre sí. De hecho, las tres preguntas se encuentran directamente relacionadas con la función inversa. En la pregunta 5 como cálculo aislado de un valor concreto (cálculo de la antiimagen u origen) y en la 8 y 11 como cálculo de la función inversa de una función suministrada.

A continuación presentamos la solución esperada en los alumnos, teniendo en cuenta sus conocimientos adquiridos con anterioridad.

3.5.1.2. Hipótesis de solución esperada

En las respuestas esperadas hemos supuesto que los alumnos interpretarían òfunciónò como función matemática. Es decir, que en el caso de mencionar ñla funciónò se situarían en el *mundo de las matemáticas*. Por tanto, hemos supuesto que se ha producido una matematización de la realidad, que ha dado lugar a una función afín. Por tanto, se hallan presentes dos variables matemáticas x y $f(x)$ ($=y$) y dos parámetros, a y b.

Aclaramos que los alumnos dispondrían de los resultados de todos los grupos escritos en el encerado del aula, con lo que observabarían que el valor de a y b en $f(x)=ax+b$ variaba con cada uno de los muelles usados (cada grupo usó un muelle de características diferentes).

1.- ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado.

Una función afín ($f(x)=ax+b=0.11x+13.1$).

Al colgar un peso en un muelle, éste se estira. El valor de x representa el peso al que es sometido el muelle y el valor de $f(x)$ la longitud del muelle.

El valor de a es una constante que depende del tipo de muelle usado y el valor de b la longitud del muelle sin ser sometido a un peso.

2.- ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente en la función?

Variable independiente: x=peso

Variable dependiente: y=longitud de estiramiento

3.- En la función que has deducido, ¿aparece algún parámetro? Si es así, ¿qué significado tiene en el experimento que estás realizando?

Sí. Dos, que coinciden con la longitud del muelle sin peso (*b*) y una constante de proporcionalidad (*a*) que relaciona el peso con la longitud de estiramiento del muelle ($f(x)=ax+b=0.11x+13.1$)

4.- ¿Cuánto se alarga el muelle con 370 g de peso?

El dato 370 g no aparece en la tabla de datos obtenida experimentalmente. Usaremos la función para obtener el resultado:

$f(x)=ax+b=0.11x+13.1 \Rightarrow f(370)=0.11\cdot 370+13.1=53.8$

Si el peso es de 370 g, el muelle alcanzará una longitud de 53.8 cm

5.- ¿Qué peso se corresponde con 21 cm de longitud del muelle?

El dato 21 cm tampoco aparece en la tabla de datos experimental. Usaremos, nuevamente la función para obtener el valor del nuevo dato:

$f(x)=0.11x+13.1 \Rightarrow 21=0.11x+13.1 \Rightarrow x=71.818$

El peso que es necesario para que el muelle se estire 21 cm es de 71.818 g

6.- ¿Qué longitud de muelle obtienes por la función si no colocas peso sobre el soporte? Interpreta tu resultado.

Si recurrimos a la función, la ausencia de peso se corresponde con un valor de $x=0$, es decir, con el valor de *b*:

$f(0)=0.11\cdot 0+13.1=13.1$

El resultado no representa otra cosa que la longitud del muelle sin ser sometido a ningún peso.

7.- Según la función que has obtenido, ¿es posible alargar indefinidamente el muelle? Interpreta ese resultado teniendo en cuenta el experimento concreto que has realizado.

Según la función, sí. La función se corresponde con una función con dominio y recorrido igual a $\mathbb{R}$, con lo que el peso y la longitud (variables *x* e *y*) toman valores desde -Ð hasta +Ð. O, lo que es lo mismo, el muelle se podría estirar indefinidamente y también œncogerseô hasta alcanzar valores negativos de longitud. Ello, evidentemente, no es posible en el caso de un muelle real. El muelle se ha construido con un alambre de una longitud determinada, lo que conlleva que, como máximo, se pueda estirar hasta alcanzar dicha longitud. Por tanto, si se quiere que la función describa el fenómeno físico, el dominio de definición de la función obtenida experimentalmente debe ser limitado. El dominio de la función, interpretada como una función que describe el comportamiento de un muelle, debe ser

$D(f)=[0,G)$, siendo *G*, el peso máximo al que podemos someter al muelle. El valor de *G*, en realidad dependerá de la longitud del alambre que se ha usado para construir el muelle, *L*, el material usado y otras condiciones de fabricación del muelle. Si conociéramos la longitud del alambre, *L*, podríamos obtener el peso máximo y viceversa, suponiendo que el alambre no se rompa antes:

$f(G)=L \Rightarrow f(G)=0.11G+13.1=L \Rightarrow L=0.11G+13.1$

Como consecuencia el recorrido de la función sería $[0,L]=[0,0.11G+13.1]$

8.- Intenta deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle si conoces la longitud del muelle.

Se trata de la función inversa de *f*:

$$f^{-1}(x)=\frac{x-13.1}{0.11}=\frac{1}{0.11}x-\frac{1310}{11} \quad (f(x)=0.11x+13.1)$$

Siendo *x*=longitud del muelle (en cm) e *y*=peso al que se somete el muelle (en g).

9.- ¿Crees que la función que has obtenido describe bien el comportamiento de un muelle al que se le ha colocado un peso?

Se trata de una valoración totalmente personal, por lo que no incluimos ninguna respuesta.

10.- Las funciones que se obtienen son distintas. ¿Cuál crees que es la razón?

Se trata de muelles de longitudes y materiales de confección diferentes, lo que da lugar a comportamientos distintos al ser sometidos a un peso. Concretamente, intervienen dos variables: la longitud del muelle (parámetro *b*) y el material con el que se ha confeccionado el muelle y la forma específica que se le ha dado (parámetro *a*).

11.- El tercer grupo tomó los datos longitud-peso. ¿Cómo obtener la función en la forma de la de los otros dos grupos para comparar?

La función que se menciona es una función del tipo $f(x)=ax+b$, donde *x* es la longitud e *y* es el peso. Si pretendemos obtener la función $f(x)=ax+b$, con *x* peso e *y* longitud, deberemos calcular la función inversa, que se obtendría de forma análoga a lo realizado en la pregunta 8. Concretamente, y adelantándonos al análisis de resultados, se trata de la función $f(x)=7.6x-103.4$, cuya inversa es aproximadamente igual a la función $f(x)=0.13x+13.6$

3.5.2. Cuestionario de *Aceite y agua*

En la experiencia *Aceite y agua*, la situación se describe como un vertido contaminante de petróleo en la costa. Los resultados del vertido son visibles en forma de una mancha en el mar.

La situación descrita poseía, en el momento de proponerla, un relevancia considerable para los alumnos. A finales del año 2002 se produjo en las costas de Galicia el desastre del Prestige. El vertido de petróleo y la consiguiente marea negra tuvo profundas repercusiones en la sociedad gallega, motivando un movimiento ciudadano de grandes proporciones. En la actividad se presenta una situación de vertido contaminante en las primeras fases del mismo: se sitúa el vertido en el momento en que es visible una mancha oscura en el mar.

Para aplicar el modelo en la situación planteada a los alumnos, en primer lugar se debe realizar una óadaptaciónô del modelo matemático obtenido en la 2º Fase. La adaptación tiene dos vertientes diferenciadas:

- Las suposiciones y asunciones

Nos situamos, en primer lugar, en los dos primeros pasos del ciclo de modelización de Blum y Leiss (Figura 5). Para aplicar el modelo obtenido, debemos construir, simplificar y estructurar la situación, de forma que la situación y problema real se convierta en un modelo (que deberemos desarrollar) como forma de dar respuesta a un problema real. En nuestro caso, el modelo ya ha sido obtenido y estas dos primeras fases consisten, en realidad, en adaptar la situación planteada en la primera fase de la actividad. Es decir, hemos desarrollado un modelo matemático y real del comportamiento de aceite sobre agua. La nueva situación obliga a suponer que el modelo obtenido es también válido en la nueva situación.

El hecho de mencionar que el modelo debe ser óválidoô en realidad no remite a un proceso de *validación* (paso 6 del ciclo de Blum y Leiss) sino que se trata, fundamentalmente, de una simplificación de la realidad. Aplicar el modelo obtenido a la nueva situación representa asumir que el modelo obtenido en el laboratorio es aplicable a la realidad, mucho más compleja. Deberemos suponer que el comportamiento del aceite es el mismo que el del petróleo, que el comportamiento del aceite en agua dulce es igual en agua salada, que las corrientes marinas no ejercen influencia a tener en cuenta, etc.

Todas estas suposiciones hacen inviable la aplicación del modelo en la nueva situación pero los objetivos de la actividad no son obtener un modelo aplicable en la realidad sino una aproximación al método (o al ciclo de modelización) que se seguiría en un laboratorio por profesionales cualificados. Por ejemplo, el uso de detergente para concentrar la mancha de aceite se justifica ante los alumnos en esta tercera fase como una intervención equivalente al uso de barreras químicas en vertidos contaminantes con la misma finalidad. Obviamente, los detergentes que se usan en los vertidos contaminantes y el lavavajillas que usan los alumnos no son del mismo tipo ni poseen los mismos efectos.

Lo dicho es válido para las otras actividades propuestas. En definitiva, los objetivos desde la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas determinan los objetivos de la actividad.

- Los cambios necesarios en el modelo obtenido en la 2º fase

El modelo obtenido en la segunda fase es un modelo de laboratorio con limitaciones evidentes:

a) la cantidad de aceite es muy pequeña en comparación con la cantidad de petróleo de un vertido contaminante.

b) el área de petróleo sobre el agua será muy superior al área de aceite sobre el agua del modelo desarrollado.

c) como veremos, el petróleo no adopta una forma circular en el vertido mientras que el aceite sobre agua sí lo hacía.

Con tal motivo, como paso previo a la utilización del modelo en la nueva situación, es necesario realizar cambios en la función que hemos obtenido en la 2ª fase.

3.5.2.1. Modificaciones en la función obtenida en *Aceite y agua*

Las modificaciones de la función se justifican ante los alumnos desde la necesidad de los mismas. Dichas necesidades se plantean sin mencionar en ningún momento la situación real que se les planteará a continuación. El cuestionario fue entregado a los estudiantes en una fotocopia (Anexo III). Las preguntas realizadas son las siguientes:

Tabla 5. 1º Cuestionario de *Aceite y agua*. Modificación de la función

1º Cuestionario Aceite y agua
1. La función que rige los datos es siempre de la forma $f(x)= k \cdot \sqrt{x}$, siendo *k* una constante, *x* la cantidad de aceite en ml y *f(x)* el diámetro en mm. La *k* es diferente dependiendo de cada caso. En ese sentido, *k* varía. ¿Sería apropiado darle el nombre de "variable"? ¿Por qué? ¿Usarías otro nombre? ¿Por qué crees que *k* varía en cado caso estudiado? 2. Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el radio en lugar del diámetro? 3. Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso el área de aceite sobre el agua en lugar del diámetro? 4. ¿Qué función obtendría si representase en el eje *x* el diámetro y en el eje *y* la cantidad de aceite? (O el área y la cantidad de aceite)

Las preguntas se plantearon en un debate conjunto de todos los alumnos participantes. La razón de plantear el debate era, fundamentalmente, conocer si existían diferencias entre los dos años en que se realizó la actividad y el comportamiento del grupo en el seno de un debate. Asumimos las dificultades de gestión que representa un debate y también las mayores dificultades de análisis que se presentan en un debate frente a las que se presentan en un análisis de documentos escritos.

La primera pregunta se encuentra en relación clara con las preguntas sobre variables y parámetros de la actividad *Muelle* (preguntas 2 y 3). Al igual que en el caso de *Muelle*, se escribieron en el encerado del aula las funciones obtenidas por cada grupo, por lo que los alumnos observan que el valor de *k* varía en las funciones obtenidas por cada uno de los grupos. La diferencia es que en esta ocasión las variables presentes en la función se identifican, en el propio enunciado de la pregunta, con las magnitudes físicas (volumen de aceite y diámetro) en una determinada unidad. El parámetro *k* se describe claramente como una constante que varía en cada una de las funciones que han obtenido los estudiantes. Se presenta, por tanto, como una variable-constante. El alumno debe describir y justificar en su respuesta esa doble condición de *k*, lo que le obliga a reflexionar sobre la condición de *k* de una variable-constante y a interpretar esa condición de variable-constante, tanto en el contexto real como en el matemático. Es decir, el valor de *k*, tal y como se presenta en el enunciado de la pregunta, posee una doble condición: como variable-constante (parámetro) en el mundo matemático y como constante que varía en cada caso concreto en el contexto real. El valor de *k* en cada caso concreto depende de las condiciones iniciales de la situación real (mayor o menor cantidad de lavavajillas añadida al agua), lo que la convierte en una variable dependiente de las condiciones iniciales. La matematización que ha dado lugar a la función como modelo matemático y real se sitúa, por tanto, en dos ámbitos con dos interpretaciones diferentes: como parámetro de la familia de funciones $f(x)=k\sqrt{x}$ (*k* como variable-constante) y como variable cuya dependencia de las condiciones iniciales determina un determinado valor constante.

Las preguntas 2 y 3 representan cambios, relacionados con las operaciones entre funciones, que permiten obtener nuevas funciones más útiles en el nuevo contexto. Se trata, en definitiva, de la puesta en práctica de conocimientos sobre funciones que permiten desarrollar el paso de *Trabajo matemático* de Blum y Leiss (Figura 5) y que dará lugar a un nuevo modelo matemático-real. En el proceso de trabajo matemático se encuentra involucrada una matematización fuerte. El modelo obtenido en la fase precedente nos sitúa en el mundo real y el matemático. El enunciado de ambas preguntas nos sitúa más en el mundo real, aunque el mundo matemático se halla muy presente. Se menciona la palabra ñfunciónò y, en la primera pregunta, las variables son denominadas expresamente como *x* e *y* e identificadas con las magnitudes físicas. Para contestar ambas preguntas, el alumno debe establecer relaciones entre los objetos matemáticos y los reales y debe utilizar conocimientos propios o característicos del mundo real y del matemático. Se trata, en fin, de preguntas que relacionan elementos de ambos mundos. Esa relación entre elementos del mundo real y del matemático sitúa las preguntas en el ámbito de la *praxis* y el *logos*, en la matematización vertical que ha permitido pasar de un mundo al otro y en la tripleta de Blum y Niss (1991).

El proceso, centrado básicamente en el trabajo matemático, representa establecer vínculos o rutas entre los elementos presentes: el mundo real y el mundo matemático, las variables reales y las variables matemáticas, el modelo real y el modelo matemático (las funciones obtenidas) y los conocimientos matemáticos relativos a las funciones (operaciones entre funciones) y su interpretación en contexto real. Así, los vínculos y relaciones que establezcan los alumnos entre todos esos elementos darán idea, en principio, de su estilo de pensamiento y de las *routes* de modelización que establecen.

Por otro lado, en las preguntas 2 y 3, los alumnos parten de un modelo matemático y real alcanzado en la segunda fase de la experiencia de *Aceite y agua*. El modelo obtenido debe ser modificado o adaptado a una nueva situación. Siguiendo los principios de los MEAs que hemos descrito en el apartado 1.4.2., la compartibilidad, reutilización y uso del modelo matemático y real procedente de *Aceite y agua* como prototipo eficaz en una nueva situación real, representa la obtención de un nuevo modelo matemático y real. El nuevo modelo es un derivado del anterior, por lo que los procesos del ciclo de modelización del modelo precedente se integran en el nuevo.

Dicho de otro modo, partimos de una situación o problema real (la planteada en *Aceite y agua*) y de un modelo matemático y real para esa situación. Planteamos una nueva situación y problema real y por medio, fundamentalmente de un proceso de *Trabajo matemático* realizado sobre el modelo precedente, obtenemos un modelo matemático y real para la nueva situación y problema real (Figura 32).

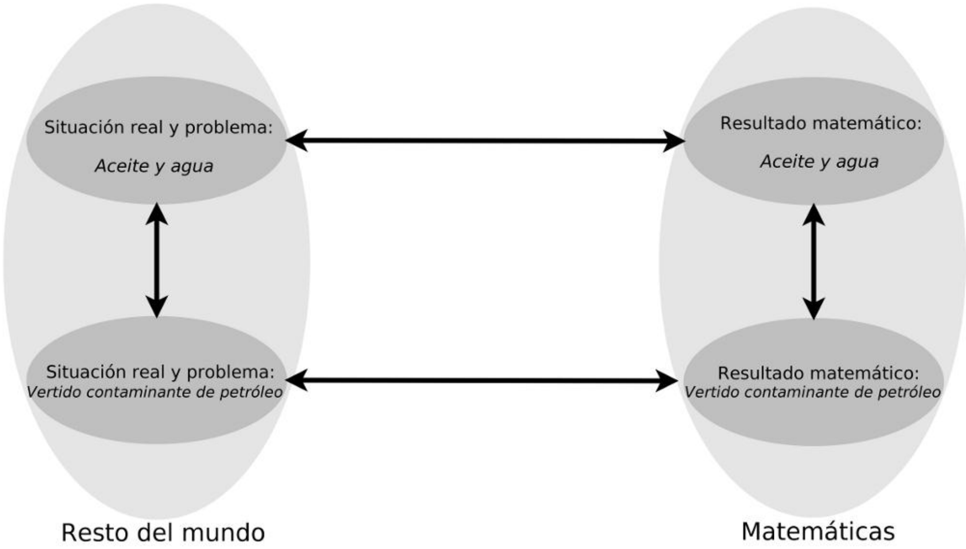


Figura 32. Generación de un nuevo modelo a partir del modelo de *Aceite y agua*

En el proceso de *Trabajo matemático* se hallan presentes procesos de matematización e interpretación derivados de los procesos de *Construcción*, *Simplificación/Estructuración*, *Matematización* e *Interpretación* del proceso de modelización precedente (Figura 5). Así, el proceso de modelización del nuevo modelo requiere de menos esfuerzo por parte del alumno porque gran parte de los procesos de modelización en la nueva situación derivan de procesos realizados previamente.

La cuarta pregunta vuelve a incidir en la función inversa. Esta vez se justificará su cálculo como una necesidad del contexto en que se aplica el modelo. Se mencionan dos funciones: la que relaciona diámetro con volumen y la que relaciona área con volumen. La función que vincula área con volumen se relaciona, a su vez, con la función que surge de la segunda pregunta, con lo que, en realidad, se hace referencia a tres funciones diferentes. Además, se mencionan las variables presentes como matemáticas (eje x y eje y, por tanto variables x e y) y como reales (área y cantidad de aceite). Volvemos, por tanto, a incidir en la función inversa, como ya se hizo en las preguntas 5, 8 y 11 de *Muelle*, pero con elementos que hacen la pregunta y, por tanto su respuesta, más compleja.

Al contrario que en *Muelle*, la pregunta no hace referencia a un cálculo de una de las variables involucradas en la función, sino que se refiere al resultado de un cambio sobre los ejes de la representación gráfica de la función. La razón de proponer el cambio en los ejes es averiguar si una pregunta, que menciona expresamente el método algorítmico de cálculo de la función inversa, les lleva a identificar el resultado con la función inversa.

Al introducir la función inversa en Bachillerato, la forma de actuar más común consiste en suministrar a los alumnos su definición, para pasar después a mostrar el método algorítmico de obtención de la función inversa de una función dada. El método suele describirse como un cálculo realizado en pasos sucesivos como sigue:

Paso 1: Cambia *x* por *y* e *y* por *x* (se refiere a intercambiar los nombres de las variables), la *x* pasa a llamarse *y* e *y*, *x*. Evidentemente, la función se ha escrito de la forma *y=expresión*

Paso 2: Despeja *y* en la expresión resultante

Paso 3: Cambia *y* por $f^{-1}(x)$ (si la función de partida es *f(x)*)

Paso 4: Comprueba que la función $f^{-1}(x)$ es la inversa de *f(x)*: debe cumplirse que $f \circ f^{-1}(x) = x$ y que $f^{-1} \circ f(x) = x$

Existen diferentes variantes de presentación de la forma de obtener la función inversa pero, básicamente, todas siguen el esquema descrito. A los alumnos que realizaron la experiencia, se les presentó, en el momento en que estudiaron las operaciones entre funciones, una justificación del método de cálculo de la inversa, la cual tiene su reflejo en el texto de la pregunta. Para justificar el intercambio de nombre de las variables de la función para calcular su inversa, se utilizó una función afín. Se les pidió que representasen gráficamente una función, por ejemplo $f(x)=2x+3$, y la función $g(x)=\dfrac{x-3}{2}$ (función inversa de la anterior) en dos hojas independientes. Se les indicó que cogiesen una de las hojas, la girasen 90°, le diesen la vuelta al papel, que colocasen el papel sobre el otro papel haciendo coincidir los ejes y que observasen a contraluz el resultado. Los estudiantes se dan cuenta de que ambas gráficas coinciden y, rápidamente, llegan a la conclusión de que los cambios realizados en una de las gráficas (y, por tanto, en la función) conducen a la otra gráfica (y, por tanto, a la otra función). Después de un pequeño debate, consiguen identificar fácilmente el giro de los ejes con el intercambio de nombres de las variables (*x* por *y* e *y* por *x*). Les cuesta algo más de tiempo identificar en qué se traduce dar la vuelta al papel (cambio necesario para que los valores positivos del ahora eje *x* sigan permaneciendo a la derecha del 0).

Si bien esta forma de justificar al alumnado el método de cálculo de la inversa no es algo que utilicen todos los profesores, pero tampoco es algo extraño o inusual. Así, el enunciado de la pregunta tiene relación directa con la justificación del método de cálculo de la inversa que acabamos de describir.

3.5.2.1.1. Hipótesis de respuesta esperada

1. La función que rige los datos es siempre de la forma f(x)= $k \cdot \sqrt{x}$ *, siendo k una constante, x la cantidad de aceite en ml y f(x) el diámetro en mm. La k es diferente dependiendo de cada caso. En ese sentido, k varía. ¿Sería apropiado darle el nombre de "variable"? ¿Por qué? ¿Usarías otro nombre? ¿Por qué crees que k varía en cada caso estudiado?*

Se trata de una variable porque su valor es variable pero, al mismo tiempo, en cada caso concreto es una constante. Su nombre apropiado sería el de "parámetro".

La razón de la variabilidad del valor de k es la cantidad de detergente añadido al agua.

La cantidad de agua usada (lo único que también es diferente en cada caso) no se toma en consideración por no haber razón alguna para que la mancha de aceite se concentre más o menos por esa causa.

2. Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el radio en lugar del diámetro?

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} h(x) = (g \circ f)(x) = \frac{f(x)}{2}, \text{ siendo } f(x) = 21.8\sqrt{x} \text{ y } g(x) = \frac{x}{2}$$

$h(x) = \frac{21.8}{2}\sqrt{x} = 10.9 \cdot \sqrt{x}$, siendo x la cantidad de aceite en ml y $h(x)$ el radio en mm.

La nueva función la hemos generado como resultado de una composición. Podríamos generar la nueva función como resultado del producto de f por g, de división de f por la función constante $g(x)=2$ o como división de la función f por la función $i(x)=2$.

3. Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso el área de aceite sobre el agua en lugar del diámetro?

$A = \pi \cdot r^2$, siendo A el área de un círculo y r su radio:

$h(x) = 10.9 \cdot \sqrt{x}$

$h(x)$, radio en mm; x volumen en ml

$$a(x) = \pi \cdot (h(x))^2 = \pi \cdot \left(10.9 \cdot \sqrt{x}\right)^2$$

$$a(x) = 118.81 \cdot \pi \cdot x \approx 373.253 \cdot x$$

x, volumen en ml; $a(x)$, área en mm^2

En consecuencia, el área de aceite y el volumen son proporcionales. De esta manera y en nuestro caso, la relación entre ambas toma la forma de la siguiente función lineal:

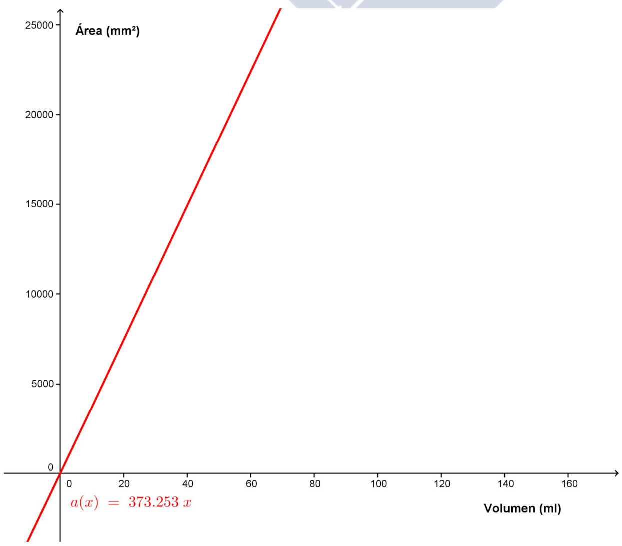


Figura 33. *Aceite y agua*. Área en función de volumen vertido.

4. ¿Qué función obtendría si representase en el eje x el diámetro y en el eje y la cantidad de aceite? (O el área y la cantidad de aceite)

En el caso del diámetro y cantidad de aceite, se trata de la función inversa a *f*:

$$f(x) = 21.8\sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{21.8^2} \cdot x^2 \approx 0.0021 \cdot x^2$$

$$f^{-1}(x) = 0.0021 \cdot x^2$$

Siendo x el diámetro en mm y $f^{-1}(x)$ el volumen de aceite en ml

En el caso de área y cantidad de aceite, se trata de la función inversa de $a(x)$:

$$a(x) = 373.273x \Rightarrow a^{-1}(x) = \frac{1}{373.273} x \approx 0.003x$$

Siendo x el área en mm^2 y $v(x)$ el volumen en ml: $v(x) = 0.003x$

3.5.2.2. Aplicación del modelo de *Aceite y agua* en una situación o contexto nuevo. Hipótesis de solución esperada

Como ya hemos indicado, la cercanía en el tiempo del vertido del Prestige representaba para los alumnos una realidad próxima, tanto temporalmente como socialmente. Así, la situación o problema real que describiremos a continuación sitúa al estudiante en un contexto plenamente real (aunque hipotético). El modelo matemático y real obtenido en la fase previa proporciona resultados matemáticos y reales a preguntas que surgen de la situación de vertido.

Se trata, en definitiva, de una transferencia del modelo a una situación nueva, aunque relacionada con el modelo obtenido en la 2ª fase. Es decir, la situación se plantea como respuesta a la pregunta: ¿es el modelo que se ha desarrollado útil sólo para la persona que lo desarrolló y aplicable únicamente a la situación particular presentada en el problema, o se proporciona una forma de pensar que es compartible, trasladable, fácilmente modificable y reutilizable?

La respuesta la proporciona la propia actividad, de forma que la situación planteada a los alumnos representa una modificación y reutilización del modelo. Es, además, el único caso en el que el modelo es modificado y reutilizado en un contexto real nuevo, aunque la modificación y reutilización del modelo se podría haber realizado también en las actividades *Muelle* y *Temperatura*.

A continuación reproducimos la presentación de la situación y de las preguntas, que los estudiantes deben contestar individualmente y por escrito. La fotocopia entregada puede consultarse el Anexo V.

Tabla 6. Cuestionario de *Aceite y agua*. Aplicación del modelo

2º Cuestionario Aceite y agua
La fotografía que aparece a continuación, se corresponde con una fotografía vía satélite de un vertido que se produjo en las costas de Cambados. 
1. Determina la escala de la fotografía.
2. Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes.
3. Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido.
4. Haz una crítica de tu trabajo: deficiencias, ventajas, posibles mejoras, etc.

Estas preguntas se podrían englobar en una única cuestión más general: ¿cómo se mide la cantidad de fuel vertido en el agua si sólo disponemos de una mancha contaminante visible? Sin embargo, se juzgó como más conveniente, dividir la cuestión inicial en las tres planteadas y evitar de ese modo la dificultad que podría presentarse para elaborar la propuesta de resolución (Albarracín y Gorgorió, 2013). Una pregunta demasiado abierta podía conducirlos a puntos muertos que obligasen al profesor a intervenir y suministrar claves de resolución.

Las tres primeras preguntas nos sitúan, claramente, en un proceso de trabajo matemático. Representan la realización de cálculos en los que se ven involucrados la función o funciones obtenidas en las fases previas. A diferencia de las preguntas de las actividades *Muelle* y *Temperatura*, el uso del modelo matemático y real va acompañado del conocimiento y uso de conocimientos no directamente relacionados con las funciones. Los estudiantes deben determinar una escala, realizar cambios de unidades de longitud, superficie y volumen y calcular un área de una figura irregular.

De esta forma, la actividad representa un uso del conocimiento matemático en un contexto real y una huída de la compartimentación del conocimiento matemático. Praxis y logos aparecen unidos íntimamente, de forma que no es posible responder las preguntas sin acudir a ambas dimensiones. Ello conlleva que la búsqueda de las respuestas a las preguntas los sitúa en el paso del trabajo matemático del ciclo pero, en realidad, deben poner en juego otros procesos. Por ejemplo, la figura que forma el vertido, observada en la fotografía, no coincide con ninguna forma geométrica. Para poder calcular el área, el alumno debe realizar una aproximación de lo que observa, de forma que los bordes del vertido se conviertan en segmentos rectilíneos y, como consecuencia, el área del vertido se identifique con el área de una figura plana. El proceso de aproximación de lo que observa con una figura plana y la identificación de la misma es, en sí mismo, un proceso de simplificación pero también de abstracción. Es decir, se trata de un proceso de simplificación que conlleva una matematización de la realidad. Lo dicho para la simplificación e identificación de lo observado en la fotografía con objetos matemáticos (propios de la Geometría) podría reproducirse en las otras preguntas. De hecho, el uso del modelo en una situación nueva o diferente a la original, aunque relacionada, pone nuevamente en marcha el ciclo de modelización.

El ciclo que se desarrolla en la nueva situación no es igual que el que se ha desarrollado en la del comportamiento del aceite sobre el agua. Refiriéndonos a la función, el modelo matemático y real que dará respuesta a las preguntas es un óderivadoô del obtenido en una situación previa (2ª fase). Pero el hecho de ser una adaptación de un modelo previo no lo convierte en el mismo modelo. De hecho, la función no es la misma porque se ha modificado por exigencias de la nueva situación real. Esas exigencias de la nueva situación representan una construcción, estructuración, simplificación, matematización, trabajo matemático e interpretación diferente a lo realizado en la primera situación real, lo que le confiere características propias. Si consideramos la modificación de la función obtenida en la 2º fase como un nuevo modelo, éste representa un ómodelo emergenteô de la nueva situación, de modo que precisa de un proceso de construcción propio aunque, eso sí, derivado de un proceso previo. Esa circunstancia hace que el desarrollo del ciclo en la nueva situación represente el desarrollo de un ciclo nuevo, lo que conllevará, entre otras cosas, rutas de modelización diferentes.

Respecto a los procesos del ciclo de Blum y Leiss, podríamos decir que en la adaptación del modelo, y su uso en una situación de vertido contaminante, se desarrollan todos los procesos excepto el de exposición (*7 Exposing*, Figura 34).

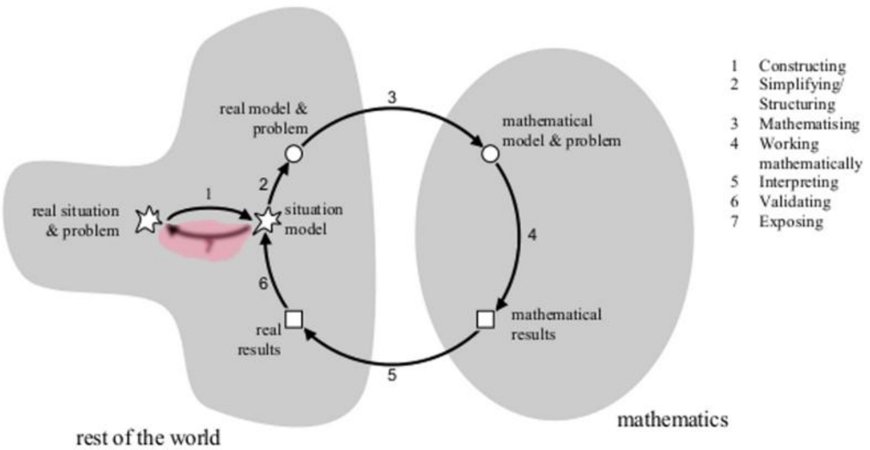


Figura 34. Ciclo de Blum y Leiss. Aplicación del modelo en la actividad *Aceite y agua*

A diferencia de la actividad de *Muelle*, el alumno debe realizar una valoración de su trabajo (cuestión 4ª), lo que representa una validación subjetiva. Así, el proceso de validación se produce, aunque desde la opinión personal. No creemos que el hecho de tratarse de una valoración personal represente desvirtuar el proceso de validación al tratarse de una actividad encaminada a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos no son profesionales cualificados y el objetivo de la actividad no es obtener un modelo aplicable a una situación real de vertido contaminante. Las limitaciones del modelo que se han asumido impiden que éste pueda ser aplicado a un vertido real. Con tal motivo, la validación del modelo no puede ser realizada desde la comprobación objetiva de su eficiencia. Los objetivos de la obtención del modelo no son su eficiencia al ser utilizado, sino que son comprobar si el proceso de modelización se ha desarrollado adecuadamente. De ahí que se opte por una validación subjetiva. Si los alumnos responden qué pasos del proceso han desarrollado adecuadamente y cuáles no, la modelización habrá cumplido sus objetivos de enseñanza y se habrá realizado una validación del modelo en función de esos objetivos.

1. Determina la escala de la fotografía

Para calcular la escala de la fotografía, los alumnos disponen de una fotocopia en DIN A3 (29,7 cmx42 cm), sin reducir ni aumentar, de una parte de una carta náutica del Instituto Hidrográfico de la Marina (Carta 9250, 1963) y que reproducimos a continuación a menor tamaño del original (Figura 35). El Anexo VI permite consultar una imagen de mayor tamaño.

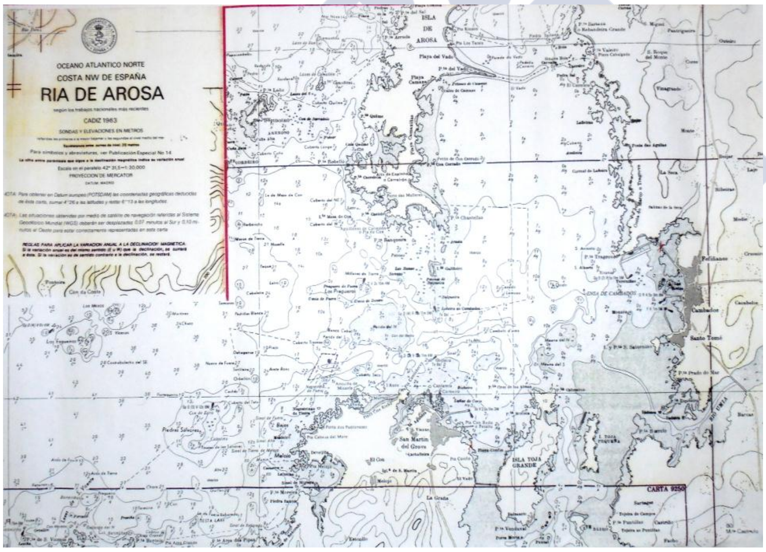


Figura 35. Imagen reducida de la carta náutica entregada a los alumnos

En la fotocopia que se les entrega con las preguntas, se indica que la fotografía que observan fue tomada por un satélite, pero en realidad procede de GoogleEarth. La imagen de GoogleEarth ha sido modificada, introduciendo con el programa Gimp una zona oscura que se correspondería con el vertido de petróleo.

Las escalas de la fotografía de los dos años en que se realizó la actividad no son la misma. La razón es que el segundo año se procuró que existiese una mayor diferencia de escala entre la fotografía y la carta náutica suministrada.

A los estudiantes se les indicó que ese día debían traer material de dibujo técnico y una calculadora. Para determinar la escala de la fotografía, usamos el mismo sistema que, presumiblemente, usarían los alumnos.

En cuanto al conocimiento de los alumnos sobre el uso de escalas, se realiza una introducción en edad temprana (6º de Ed. Primaria, Real Decreto 1513/2006) y los cálculos con escalas y determinaciones de escalas aparecen de forma recurrente a lo largo de toda la Educación Secundaria, tanto en la asignatura de matemáticas como en otras asignaturas (Real Decreto 1631/2006, Orden ECI/2220/2007). Se trata, por tanto, de una pregunta en la que deben usar conocimientos relacionados habitualmente con la geometría y sobradamente conocidos por ellos.

Medimos la misma distancia, con ayuda de una regla graduada, sobre la fotocopia de la carta náutica suministrada y sobre la fotografía.

Figuras 36a y 36b. Cálculo de la escala

La medida de distancias pequeñas con exactitud no es posible con una regla graduada. La opción lógica hubiese sido el uso de calibre o pie de rey. Como el objetivo no es la exactitud sino el proceso, optamos por simplificar la determinación de longitudes midiéndolas con una regla.

Las distancia sobre la carta náutica es de 14.65 cm y sobre la fotografía son 10.45 cm (curso 2010-11) y 7.5 cm (curso 2011-12)

Con una proporción sencilla, es fácil obtener un valor aproximado de la escala de la fotografía:

- Curso 2010-11:

$$\frac{14.65}{10.15} = \frac{x}{30000} \Rightarrow x = 43300.49261 \approx 43300.5$$

Escala 1:*43300.5*

- Curso 2011-12:

$$\frac{14.65}{7.5} = \frac{x}{30000} \Rightarrow x = 58600$$

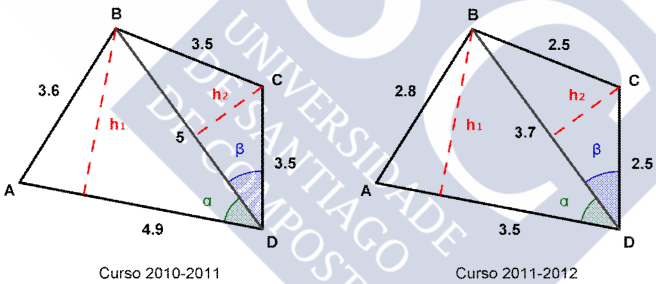
Escala *1:58600*

2. Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes.

La inserción de un área contaminada de petróleo se realizó con la intención de que se aproximase a la forma de un trapezoide. Con tal motivo, para aproximar el área supondremos que la de un trapezoide se asemeja a la superficie de área contaminada.

Figura 37. Aproximación del área contaminada mediante un polígono

Para medir el área, realizaremos una triangulación. Para medir las áreas de los triángulos, usaremos los conocimientos de trigonometría que poseen los alumnos. No mediremos ángulos por considerar que el error cometido sería mayor que midiendo longitudes de segmentos. Así, mediremos las longitudes de los lados de la figura y de una de sus diagonales. A continuación figuran las medidas de esas longitudes en cada uno de los dos años.



Figuras 38a y 38b. Áreas de la superficie contaminada

- Curso 2010-11:

Usando el teorema del coseno en el triángulo $\triangle ABD$

$$3.6^2 = 5^2 + 4.9^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4.9 \cdot cos(\alpha) \Rightarrow \alpha \approx 42.632°$$

$$sen(\alpha) = \frac{h_1}{\overline{BD}} \Rightarrow h_1 = sen(46.632°) \cdot 5 \approx 3.679$$

$$A_1 = \frac{4.9 \cdot 3.679}{2} = 9.01355\ cm^2$$

El triángulo $\triangle BCD$ es isósceles. Por tanto:

$$3.5^2 = h_2^2 + 2.5^2 \Rightarrow h_2 \approx 2.45$$

$$A_2 = \frac{5 \cdot 2.45}{2} = 6.125$$

$$A_T = 9.01355 + 6.125 \approx 15.139$$

El área de la figura es aproximadamente de $15.139\ cm^2$

- Curso 2011-12:

Si repetimos el mismo proceso con los datos del curso 2011-12 obtenemos unas áreas de $4.632\ cm^2$ y 2.982 cm^2 y un área total de, aproximadamente, $7.614\ cm^2$

3. Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido.

Usaremos la función obtenida previamente:

$v(x) = 0.003 \cdot x$, siendo x el área en mm^2 y $v(x)$ el volumen en ml

El volumen, en ml, que obtenemos de los vertidos de petróleo a escala resulta:

- Curso 2010-11:

$$v(1513.9) = 0.003 \cdot 1513.9 = 4.5417\ ml$$

- Curso 2011-12:

$$v(761.4) = 0.003 \cdot 761.4 = 2.2842\ ml$$

Solo resta aplicar la escala para determinar el volumen de vertido.

Trabajamos con fotografías a escala, o lo que es lo mismo, con figuras semejantes. Conocemos el volumen de una figura y deseamos conocer el volumen de la figura semejante. Para ello debemos usar la relación existente entre los volúmenes de figuras semejantes. Si la razón de semejanza es r, la relación entre los volúmenes de las figuras semejantes será $\frac{V}{V'} = r^3$. Usando este hecho, obtenemos el volumen del vertido:

- Curso 2010-11:

$$\frac{V}{4.5417} = 43300.5^3 \Rightarrow V = 3.687204096 \cdot 10^{14}\ ml = 3.687204096 \cdot 10^{11}\ l$$

$$V = 368\ 720\ 409\ 600\ l$$

- Curso 2011-12:

Si realizamos el mismo cálculo con los datos del curso 2011-12, obtenemos el siguiente resultado:

$$V = 4.596496939 \cdot 10^{14}\ ml = 459\ 649\ 693\ 900\ l$$

La discrepancia entre valores de volumen obtenidos en cada uno de los dos casos es evidente. La razón se encuentra en la forma en que se han determinado las longitudes, tanto para el cálculo de la escala como del área (de forma aproximada y, por consiguiente, asumiendo errores) y el redimensionado e inserción de la imagen y sus posibles consecuencias en la deformación de la imagen.

De todos modos, y como ya hemos indicado, los objetivos no son obtener un resultado exacto o próximo a la exactitud, por lo que la exactitud en el resultado no es una prioridad.

5. Haz una crítica de tu trabajo: deficiencias, ventajas, posibles mejoras, etc.

Al tratarse de valoraciones personales, no incluiremos respuestas a esta pregunta.

3.5.3. Cuestionario de *Temperatura*. Hipótesis de solución esperada

La actividad *Temperatura* presenta diferencias de importancia respecto a *Muelle* y *Aceite y agua*. La fundamental, es el salto cualitativo que representa la función de ajuste de los datos. La función, determinada a partir de la función teórica (Ley de Enfriamiento de Newton), es de la forma: $f(x)=a+b\cdot e^{cx}$, con a igual a la temperatura ambiente, b la diferencia entre temperatura inicial y ambiente y c la constante de enfriamiento. En nuestro caso concreto, usando los datos obtenidos experimentalmente, la función es $f(x)=21+66\cdot e^{-0.0171x}$, siendo *0.0171* la constante de enfriamiento del mercurio del termómetro. En el caso de *Muelle*, la función es una función afín (*f(x)=ax+b*) y en el caso de *Aceite y agua*, la función raíz cuadrada ($f(x)=k\sqrt{x}$).

Comparativamente, la función en *Temperatura* es más compleja que en los dos casos anteriores e involucra conceptos y nociones que las funciones de *Muelle* y *Aceite y agua* no juegan ningún papel. Por ejemplo, la función que es de esperar o de desear que los alumnos usen ($f(x)=a+b\cdot c^{-kx}$), representa la introducción de cuatro parámetros (tres si utilizan la función exponencial). En la interpretación del resultado existen, por tanto, tres o cuatro parámetros que el estudiante debería interpretar como dependientes de las condiciones iniciales del contexto real (temperatura ambiente, temperatura máxima, termómetro de mercurio). El termómetro alcanzará la temperatura ambiente pero, según la función que hemos obtenido ($f(x)=21+66\cdot e^{-0.0171x}$), la temperatura ambiente es una temperatura límite que, por tanto, no se alcanzará nunca. La temperatura ambiente como valor límite se observa gráficamente como una tendencia. Ese valor límite se manifiesta gráficamente como una asíntota horizontal (*y=21*). Dicho de otro modo, en el modelo de *Temperatura* se halla involucrado el concepto de límite y la asíntota como tendencia gráfica vinculada a un valor límite. Los límites, con sus obstáculos y dificultades propios, representan un campo en el que se han realizado y se continúan realizando muchos estudios de Didáctica de la Matemática. Todos ellos destacan la especial dificultad del concepto (Artigue, 1995, 1998; Sierpinska , 1985b; Cornu, 1983, 1991). Por ejemplo, Artigue sitúa el concepto de límite como fundamental en la enseñanza del Análisis y lo incluye dentro de su clasificación de los obstáculos para la enseñanza de los principios del cálculo (Artigue, 1995, 1998).

Así, la gráfica que se intuye en la nube de puntos, presenta dificultades evidentes para determinar qué función es la adecuada. Ante la posibilidad de que los alumnos no consiguiesen obtener una función de ajuste (posibilidad no contemplada en las dos actividades anteriores), se realizaron dos documentos con preguntas y cuestiones relacionadas con el modelo obtenido y que los alumnos debían contestar individualmente y por escrito. El primero para el caso en que estimasen que habían conseguido obtener una función de ajuste (Cuestionario 1) y el segundo para el caso contrario (Cuestionario 2). Las preguntas, tal y como se presentaron a los alumnos, pueden consultarse en el Anexo IV.

Tabla 7. Cuestionario de *Temperatura 1*. Aplicación del modelo

Cuestionario1. Temperatura
1.- ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado.
2.- ¿Qué variables son objeto de estudio en la experiencia?
3.- ¿Aparece algún parámetro en el experimento? Si es así, ¿de qué crees que depende su valor?
4.- Según la función que has obtenido, ¿qué temperatura podría alcanzar un termómetro antes de comenzar a enfriarlo? Dale un nombre a tu respuesta, dentro de los conocimientos sobre funciones que tienes, e interpreta este dato en el contexto del experimento que has realizado.
5.- Según la función que has obtenido, ¿qué intervalo de tiempo de enfriamiento podrías manejar? Dale un nombre a tu respuesta, dentro de los conocimientos sobre funciones que tienes, e interpreta este dato en el contexto del experimento que has realizado.
6.- Según la función que has obtenido, ¿en qué momento deja de enfriarse el termómetro? Interpreta tu resultado.
7.- Intenta deducir cómo conocer el tiempo transcurrido si conoces la temperatura a la que se encuentra el termómetro. ¿Podrías aplicarlo a un termómetro que se encuentra a una temperatura de 47ę? ¿Y a uno que se encuentra a 0ę? Explica por qué.
8.- ¿Crees que la función que has obtenido describe bien el comportamiento del enfriamiento de un sólido cualquiera (no sólo un termómetro)?

Tabla 8. Cuestionario de *Temperatura* 2

Cuestionario 2: Temperatura
No has conseguido encontrar la función de ajuste de los datos.
1.- Intenta explicar por qué crees que no lo has conseguido.
2.- ¿Crees que cambiando algo en el experimento se conseguiría obtener la función de ajuste? Si es así, ¿qué cambiarías y en qué forma crees que influiría en la búsqueda de la función de ajuste? Si crees que no se puede cambiar nada que mejore los resultados, intenta explicar el porqué.
3.- ¿Cuál crees que es el tipo de función que ajusta los datos? Intenta explicar por qué crees que es de ese tipo.
4.- ¿Crees que el experimento que has realizado, u otro equivalente, ha sido realizado en el pasado?
5.- ¿Crees que encontrar la función de ajuste de los datos que has recogido experimentalmente tiene alguna utilidad práctica? Si es así, indica cuál.

- Cuestionario 1. Obtienen la función de ajuste de los datos.

Volvemos, en este caso, sobre cuestiones ya tratadas en las actividades anteriores. Las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 7 (Tabla 7) se centran, como en el caso de *Muelle,* en el tipo de función y su interpretación (pregunta 1), en las variables y parámetros (preguntas 2 y 3), en el dominio de definición y el recorrido de la función (preguntas 4 y 5) y en el cálculo de orígenes o antiimágenes a partir de imágenes, vinculado al cálculo de la función inversa (pregunta 7). La pregunta 6 se centra en la presencia de una asíntota horizontal o valor límite de la función en el infinito. La pregunta 8 vuelve sobre valoración personal o validación del modelo obtenido.

La diferencia es que algunas de las preguntas solicitan, explícitamente, una interpretación desde el mundo de las matemáticas y desde el mundo real. Las preguntas 3, 4, 5 y 6 van en esa línea. Por ejemplo, en las preguntas 4 y 5, la solicitud de respuesta exige al alumno proporcione ñ(é) un nombre a tu respuesta, dentro de los conocimientos sobre funciones que tienes, e interpreta este dato en el contexto del experimento que has realizadoò. Es decir, se debe realizar una doble interpretación del resultado que sitúa la respuesta en el ómundo de las matemáticasô (los conocimientos sobre funciones) y en el óResto del mundoô (el contexto del experimento). Ambos mundos se hallan relacionados en el experimento y, por tanto, la doble interpretación obliga a establecer el carácter de esas relaciones. La pregunta 3 también incluye esa doble interpretación, aunque ya no de forma explícita. La identificación de los parámetros nos sitúa en el campo de las funciones y, por tanto, en el mundo de las matemáticas. La identificación de la razón o razones que hacen que el parámetro tome un valor u otro, nos obliga a trasladarnos al óResto del mundoô para poder encontrar una respuesta.

La pregunta 7 vuelve sobre el cálculo de antiimágenes de valores concretos (como en el caso de *Muelle*). Pero se ha introducido un elemento de importancia. En el caso de *Muelle*, el cálculo de antiimágenes se realizaba de valores posibles, tanto en el modelo matemático como en el real. En este caso, el cálculo de la antiimagen de los dos valores (47° y 0°) es posible sólo en uno de los casos. En el modelo real, 0° se corresponde con una temperatura inferior a la temperatura ambiente, lo que evidentemente no es posible. Si acudimos al modelo matemático, 0 se encuentra fuera del recorrido de la función (que se corresponde con el intervalo $(21, +\infty)$). La interpretación de esa imposibilidad obliga a tomar en cuenta el recorrido de ambas funciones (en el modelo matemático $(21, +\infty)$ y (21,87) en el modelo real) y las limitaciones que impone la realidad a la matematización de la misma. Dicho de otra forma, la matematización lleva a una función que se obtiene en la segunda fase pero la interpretación en contexto del resultado lleva a otra función, relacionada pero diferente.

En la pregunta 8 volvemos, como en *Aceite y agua*, a la compartibilidad, reutilización y uso del modelo en una situación nueva aunque relacionada. En este caso, la nueva situación no se presenta al alumno como una actividad a desarrollar, sino como una posibilidad que el alumno debe contemplar.

A continuación incluimos, como ejemplo, respuestas a las preguntas anteriores:

1.- ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado.

$f(x) = 21 + 66 \cdot e^{-0.0171x}$, caso particular de la función general $T(x) = T_{ambiente} + \left(T_{inicial} - T_{ambiente}\right) \cdot e^{-kx}$

La función es de tipo exponencial, donde la temperatura ambiente y la temperatura inicial determinan el valor de dos de los parámetros presentes. Aparece una tercera constante, un número negativo multiplicando por *t* (tiempo), lo que hace que la gráfica de la exponencial sea estrictamente decreciente.

2.- ¿Qué variables son objeto de estudio en la experiencia?

La variable dependiente: temperatura, *T(x)*, en grados centígrados

La variable independiente: *t*, tiempo en segundos

La temperatura ambiente (21° C)

La temperatura inicial (87° C)

Una constante: *k*=0.0171

3.- ¿Aparece algún parámetro en el experimento? Si es así, ¿de qué crees que depende su valor?

Sí. Aparecen tres constantes-variables: la temperatura ambiente, la temperatura inicial y una constante (*k*) propia del material del que se está midiendo el enfriamiento.

4.- Según la función que has obtenido, ¿qué temperatura podría alcanzar un termómetro antes de comenzar a enfriarlo? Dale un nombre a tu respuesta, dentro de los conocimientos sobre funciones que tienes, e interpreta este dato en el contexto del experimento que has realizado.

∞, pues el recorrido de la función es $(21, +\infty)$

En el experimento, el tiempo comienza en el valor *t*=0, por lo que no tiene sentido hablar de tiempos negativos. Por tanto, deberíamos hablar de la función con su dominio limitado a un intervalo de extremo inferior 0 y, como consecuencia, de un recorrido igual a (21,87].

5.- Según la función que has obtenido, ¿qué intervalo de tiempo de enfriamiento podrías manejar? Dale un nombre a tu respuesta, dentro de los conocimientos sobre funciones que tienes, e interpreta este dato en el contexto del experimento que has realizado.

Evidentemente, no es posible calentar un termómetro indefinidamenmte y, tarde o temprano, alcanzará la temperatura ambiente. Según la función obtenida, la temperatura alcanza valores entre 21 y $+\infty$ (recorrido de la función) y el tiempo de enfriamiento (dominio de definición de la función) sería desde $-\infty$ hasta ∞ (*D(f)*=$(-\infty, +\infty)$). Por tanto, el termómetro tendría un intervalo de valores de enfriamiento del termómetro de longitud infinita o, lo que es lo mismo, no terminaría jamás de enfriarse.

6.- Según la función que has obtenido, ¿en qué momento deja de enfriarse el termómetro? Interpreta tu resultado.

Nunca. No alcanzaría la temperatura ambiente nunca, al contrario de lo que sí ocurre realmente. De hecho, el termómetro, según la función obtenida, alcanza la temperatura ambiente como valor límite en el infinito:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 21 + 66 \cdot e^{-0.0171 \cdot x} = 21$$

Gráficamente, se presenta una asíntota horizontal en *y*=21, asíntota que no se corresponde con el comportamiento del fenómeno físico. En el fenómeno físico la temperatura ambiente se alcanza en un cierto valor de tiempo concreto. Aunque no lo hemos determinado, llegaría con esperar a que el termómetro alcanzase la temperatura ambiente de 21ęC. Esta misma situación es observable en la Ley de Enfriamiento de Newton.

*7.- Intenta deducir cómo conocer el tiempo transcurrido si conoces la temperatura a la que se encuentra el termómetro. ¿Podrías aplicarlo a un termómetro que se encuentra a una temperatura de 47**ę**? ¿Y a uno que se encuentra a 0**ę**? Explica porqué.*

Se trata de la función inversa, por tanto de una función logarítmica:

$$t(x) = \frac{1}{-0.0171} \cdot ln\left(\frac{x-21}{66}\right)$$

$$t(47) = \frac{1}{-0.0171} \cdot ln\left(\frac{47-21}{66}\right) \approx 54.477$$

0ę no se encuentra en el dominio de definición de la función *t(x)*, por lo que no es posible calcular el tiempo correspondiente a esa temperatura.

0ęC no se encuentra en el dominio de definición de t(x) porque 0ęC no se encuentra en el recorrido de la función *f(x); R(f)=(21,+∞)*. Eso significa que el límite inferior de temperaturas es de 21 grados: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 21 + 66 \cdot e^{-0.0171 \cdot x} = 21$.

8.- ¿Crees que la función que has obtenido describe bien el comportamiento del enfriamiento de un sólido cualquiera (no sólo un termómetro)?

Se trata de una valoración subjetiva, por lo que no aportamos una respuesta de ejemplo.

- Cuestionario 2. No obtienen la función de ajuste de los datos.

Las tres primeras preguntas son valoraciones personales, por lo que no hablaremos de la respuesta esperable.

La cuarta y quinta pregunta representan una valoración personal sobre la relevancia y la importancia de la óutilidadô del trabajo científico. El hecho de que el experimento se hubiese realizado en el pasado, nos sitúa en la consideración del experimento como algo interesante desde el punto de vista científico, es decir, como respuesta a una pregunta que surge, al margen de su utilidad (¿cómo se enfría un sólido?, ¿puedo obtener respuesta a esa pregunta y analizarla?). La segunda incluye expresamente la óutilidad prácticaô, lo que transmite una visión pragmática de la pregunta anterior: vale la pena hacerlo si tiene una utilidad. Si no es así, ¿para qué hacerlo? La primera visión se justifica únicamente desde la curiosidad. La segunda por la utilidad, donde la curiosidad no es el elemento que determina la decisión de hacer algo o no.

Del contenido de las respuestas a ambas preguntas podremos deducir si ambas visiones conviven o si bien priman una sobre la otra.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS PRIMERA Y SEGUNDA FASE

El análisis de resultados se presenta en este capítulo y en el siguiente. El análisis de las respuestas se realizará por fases, y no por actividad, debido a las similitudes de la misma fase en las diferentes actividades. Por ejemplo, que la primera fase consista en una obtención de datos experimentales en el laboratorio, lleva a intentar establecer relaciones en la forma en que los alumnos obtienen y representan los datos obtenidos en situaciones o contextos diferentes, lo que aconseja realizar un análisis conjunto de esta fase.

El presente capítulo recogerá los resultados recogidos en las dos primeras fases, que se vinculan a la pregunta de si los alumnos son capaces de obtener el modelo (primera pregunta de investigación). El capítulo 5 presenta los resultados de la tercera y cuarta fase que se centran más en el *saber*, asociado a la segunda pregunta de investigación objetivo (OB2). Las cuestiones relacionadas con el profesor que se derivan de los objetivos anteriores (tercer objetivo; OB3), aparecerán en el análisis que se realiza en los capítulos 4 y 5. Aunque se ha realizado una división del análisis de resultados en dos capítulos, ambos se hallan fuertemente relacionados, de forma que el análisis que se realiza en el capítulo 4 tendrá un reflejo evidente en el capítulo 5.

El análisis de resultados se realizará mediante un estudio de tipo cualitativo, tal y como se indicó en el Capítulo 2, y sólo para facilitar la lectura de las respuestas de los alumnos en ocasiones se especificarán porcentajes.

Este capítulo se iniciará con un apartado que incluye información sobre los alumnos y las motivaciones de los mismos para participar al haber planteado las actividades como voluntarias. Después se mostrarán los resultados de la fase de obtención de datos y a continuación los de la segunda fase que corresponden a los resultados de la función de ajuste.

4.1. ALUMNOS PARTICIPANTES. MOTIVACIONES DE LOS ESTUDIANTES PARA PARTICIPAR

Las actividades se plantearon como voluntarias y se desarrollarían fuera del horario lectivo. Después de plantear la actividad a los alumnos, se solicitó que los interesados en participar, apuntasen sus nombres en un papel. A continuación incluimos una tabla (Tabla 9) donde figura el número de estudiantes interesados y el porcentaje que representan sobre el total de la clase.

Tabla 9. Alumnos que mostraron interés en participar

	nº de alumnos del grupo	**nº de alumnos que se apuntaron para realizar las actividades**
Curso 2010-11	24	15 (62.5%)
Curso 2011-12	20	12 (60%)

Los porcentajes de interés por participar pueden calificarse como altos. Sobre todo si tenemos en cuenta que habían sido informados de que la realización de las actividades no iba a tener repercusión en su evaluación de la asignatura y que se realizarían fuera del horario lectivo.

Aunque el número de estudiantes que apuntaron su nombre en el papel fue de 27, los que finalmente participaron fueron 25. Por motivos diferentes, algunos no participaron en todas las actividades. A continuación figura una tabla (Tabla 10) donde se especifica el número de participantes en cada actividad y en cada fase.

Tabla 10. nº de alumnos participantes en cada actividad y fase

Actividad	**Fase**	**Curso**	**nº de alumnos**
Muelle	Obtención de datos y función de ajuste	2010-11	13
		2011-12	12
	Preguntas sobre el modelo obtenido	2010-11	10
		2011-12	12
Aceite y agua	Obtención de datos Obtención de la función de ajuste Preguntas sobre el modelo obtenido	2010-11	10
		2011-12	12
	Aplicación del modelo	2010-11	12
		2011-12	8
Temperatura	Obtención de datos Obtención de la función de ajuste Preguntas sobre el modelo obtenido	2010-11	11
		2011-12	7

No se observa que exista ningún tipo de vinculación entre el interés por participar y el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas. Los alumnos que mostraron interés representan la situación del aula en su conjunto: estudiantes de buen rendimiento, regular y bajo.

En lo que sigue, nos referiremos a los alumnos como A1, é , A25. A1, é , A13 se corresponden con los participantes el curso 2010-11 y A14,é , A25 con los del curso 2011-12. En el análisis de respuestas, no se hará distinción entre un curso y otro. Si se presenta esa diferencia, se indicará en cada caso.

Las razones que los alumnos entrevistados aportan como motivación para participar varían, pero destaca la mención a la curiosidad. Se sintieron intrigados por saber qué iban a hacer concretamente. Lo único que sabían es que acudirían al laboratorio, al aula de informática y que contestarían preguntas sobre el trabajo que iban a realizar. Ese punto de partida presentó las actividades como algo diferente a aquello a lo que están acostumbrados a hacer en el aula, lo que despertó su curiosidad. En algunos, la curiosidad se menciona vinculada o acompañando a su interés por experimentar algo nuevo. La novedad de la experiencia la convierte en una actividad ñ*interesante*ò (A15, A16, A17).

Para ilustrar lo anterior, se incluye la transcripción de las respuestas de los seis estudiantes entrevistados. Se corresponde con la pregunta ñ*¿Por qué decidiste apuntarte a las actividades? ¿Qué esperabas?***ò**

6 A1: Pues, no sé, a mí experimentar siempre me atrajo. Simplemente por curiosidad.

9 Profesor: ¿Pero tenías alguna idea de qué iba la cosa o no?

10 A1: No, la verdad es que nunca había trabajado en un laboratorio haciendo algún experimento tipo matemático, ni siquiera físico, ni siquiera en taller de tecnología y, no sé, me atrajo y pensé que sería una buena experiencia, la verdad.

25 A14: Porque, no sé, porque me gusta hacer cosas nuevas.

7 A15: Pues, aparte de por estar hablando con los compañeros y decidimos más o menos en conjunto venir pero porque también parecía, aún no sabíamos muy bien lo qué era pero ya otros compañeros lo habían hecho otros años y dijeron que estaba bien y que parecía interesante. [*Se refiere a la experiencia de sus compañeros del año anterior. A esos alumnos se les indicó que no describiesen la actividad a sus compañeros*].

9 A16: Porque me entró curiosidad por saber cómo era porque nunca había hecho una. Entonces dije, bueno. Total, no tenía que estudiar ni nada, digo, pues por lo menos es una experiencia más que vivo y tal, es una experiencia que me parecía interesante.

4 A17: Porque me pareció interesante la idea de lo que dijiste tú en clase y tal y por echar una mano también [*Por* **ñ***echar una mano***ò** *se refiere al comentario del profesor de que se trataba de una investigación*].

5 Profesor: Pero ahí no os dije gran cosa, o sea, vais a venir por las tardes [é] a hacer, sin especificaros nada.

6 A17: Pero dijiste no se qué del laboratorio, del aula de informática, no sé, me llamó la atención [é] y como también se anotaron ellos, pues, bueno [*Se refiere a sus amigos que también se apuntaron*].

6 A18: Pues por curiosidad, para ver lo que lo que pasaba y lo que había que hacer, no sé.

24 A19: Pues, no sé, un poco por aprender porque nunca *hiciera* ningún tipo de experiencia como ésta y, no sé, me podía la curiosidad. No sabía qué se iba a hacer entonces pero, como tenía las tardes libres, dije que sí.

4.2. RESULTADOS DE LA FASE DE OBTENCIÓN DE DATOS

Los participantes se distribuyeron en grupos de trabajo de 4 o 5 personas y cuya composición se procuró mantener en las fases de obtención de la función de ajuste de los datos. Se confeccionaron 6 grupos en *Muelle*, 5 en *Aceite y agua* y 4 en *Temperatura*. En adelante nombraremos los grupos de la actividad *Muelle* como: GM1, GM2, GM3, GM4, GM5 y GM6; en *Aceite y agua* como: GA1, GA2, GA3, GA4 y GA5; y los de *Temperatura* como: GT1, GT2, GT3 y GT4. La diferencia en el número de grupos viene motivada por la diferencia en el número de alumnos presentes. La composición de GM1, GA1, GT1 (curso 2010-1011) es la misma en las tres modelizaciones y su actividad durante las dos primeras fases fue grabada en audio y vídeo. Lo mismo ocurre con GM4, GA3 y GT3 (curso 2011-12).

La obtención de datos experimentales se plantea de forma abierta, lo que obliga a los alumnos a la toma de decisiones. Saben, en esos momentos, que la actividad no se reduce a obtener datos experimentales, sino que deberán asistir al aula de informática y contestar preguntas. De esta forma, son conscientes de que usarán los datos posteriormente, por lo que sus decisiones tendrán repercusiones sobre su trabajo posterior. Así, deben decidir cuántos datos tomar y de qué magnitud y en qué intervalo de valores. Deben decidir también cómo consignar o describir los conjuntos de datos obtenidos y con qué unidades.

Cada grupo disponía de su propia mesa en el laboratorio del Centro y de su propio material para obtener los datos.

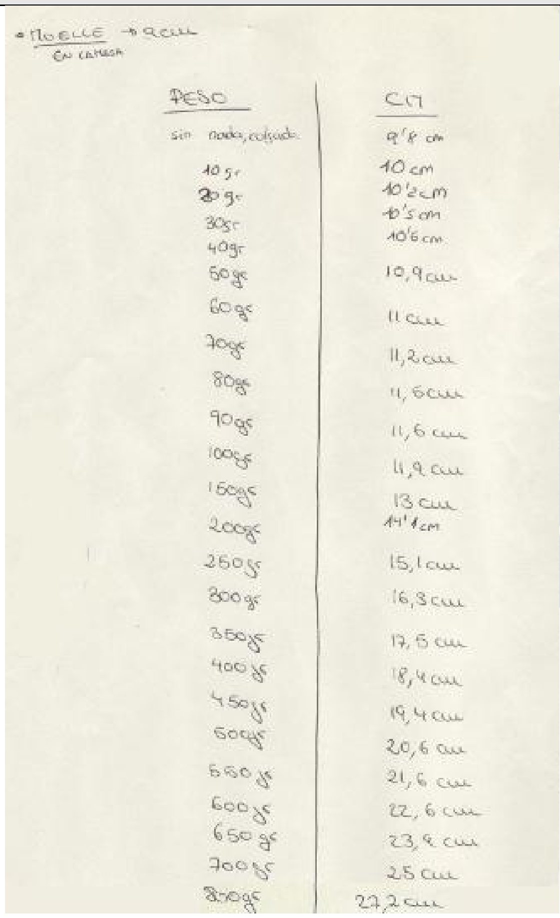
No se fijó límite de tiempo, con lo que cada grupo decidía en qué momento había terminado la toma de datos. Optaron por realizar la siguiente fase en la misma tarde, por lo que los grupos que acabaron antes esperaron a que sus compañeros diesen por terminado su trabajo.

La duración de la toma de datos resulta variable de una actividad a otra. En el caso de *Muelle*, todos los grupos acabaron antes de que hubiesen transcurrido 20 minutos. En el caso de *Aceite y agua*, menos de 45 minutos. En el caso de *Temperatura*, menos de 10 minutos (a partir de que el agua fuese calentada hasta su punto de ebullición).

La diferencia de tiempo entre *Aceite y agua* y *Muelle* y *Temperatura* viene motivada por las dificultades para verter aceite sobre el agua con una jeringuilla. El proceso no resulta complicado pero es fácil que al presionar el émbolo salga más aceite del que se pretendía verter, con lo que se hace necesario repetir las medidas. Además, es imprescindible ser cuidadoso al presionar el émbolo de la jeringuilla, lo que ralentiza el proceso. A pesar de que dos alumnos de cada grupo habían practicado previamente a verter aceite con una jeringuilla, las grabaciones de la actividad de estudiantes reflejan sus dificultades al intentar hacerlo. Con tal motivo, es más útil, a la vista de las dificultades encontradas, utilizar una pipeta en vez de una jeringuilla. Así, la opción de la jeringuilla, que transmite la idea de poder realizar la obtención de datos con material fácilmente asequible, conlleva dificultades, lo que obliga a valorar sus ventajas e inconvenientes. Se puede alegar que la pipeta puede ser percibida como material específico de un laboratorio y, por tanto, sofisticado y difícil de conseguir. Ello redundaría en un alejamiento de las condiciones del óLearning by makingô en actividades basadas en la experimentación postulado por Alsina (2003, 2007). Pero las dificultades que los alumnos pueden encontrar al verter el aceite con material más cotidiano o asequible puede llevar a la idea de que los datos no han sido recogidos adecuadamente o que se ha realizado de forma menos eficaz que con otro material. De esta forma, se nos presenta una primera situación en la que el profesor se ve obligado a tomar decisiones desde las ventajas e inconvenientes de las diferentes opciones.

A continuación presentamos la tabla de datos y la transcripción textual de la misma, obtenida por los grupos GM1, GA1 y GT1 (Figuras de 39 a 41 y Tablas de 11 a 13). Las transcripciones y tablas de datos de los restantes grupos pueden consultarse en el Anexo VII.

Figura 39. Grupo GM1
Datos de *Muelle*

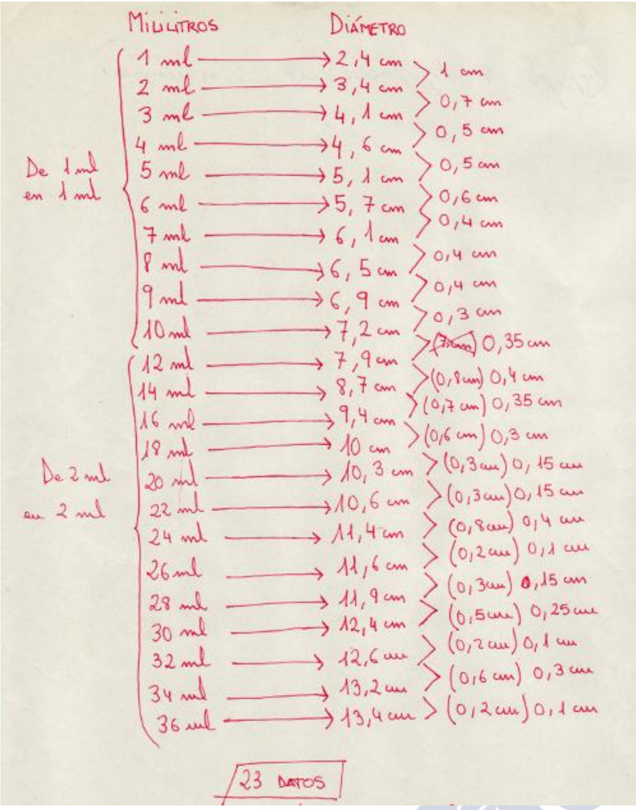


PESO	CM
sin nada, colgado	9'8 cm
10 gr	10 cm
20 gr	10'2 cm
30 gr	10'5 cm
40 gr	10'6 cm
50 gr	10,9 cm
60 gr	11 cm
70 gr	11,2 cm
80 gr	11,6 cm
90 gr	11,6 cm
100 gr	11,9 cm
150 gr	13 cm
200 gr	14'1 cm
250 gr	15,1 cm
300 gr	16,3 cm
350 gr	17,5 cm
400 gr	18,4 cm
450 gr	19,4 cm
500 gr	20,6 cm
550 gr	21,6 cm
600 gr	22,6 cm
650 gr	23,9 cm
700 gr	25 cm
800 gr	27,2 cm

Tabla 11
Grupo GM1
Datos de *Muelle*

PESO	CM
sin nada, colgado	9ó8 cm
10 gr	10 cm
20 gr	10ó2 cm
30 gr	10ó5 cm
40 gr	10ó6 cm
50 gr	10.9 cm
60 gr	11 cm
70 gr	11,2 cm
80 gr	11,5 cm
90 gr	11,6 cm
100 gr	11,9 cm
150 gr	13 cm
200 gr	14ó1 cm
250 gr	15,1 cm
300 gr	16,3 cm
350 gr	17,5 cm
400 gr	18,4 cm
450 gr	19,4 cm
500 gr	20,6 cm
550 gr	21,6 cm
600 gr	22,6 cm
650 gr	23,9 cm
700 gr	25 cm
750 gr	26,2 cm
800 gr	27,2 cm

Figura 40. Grupo GA1.
Datos de *Aceite y agua*

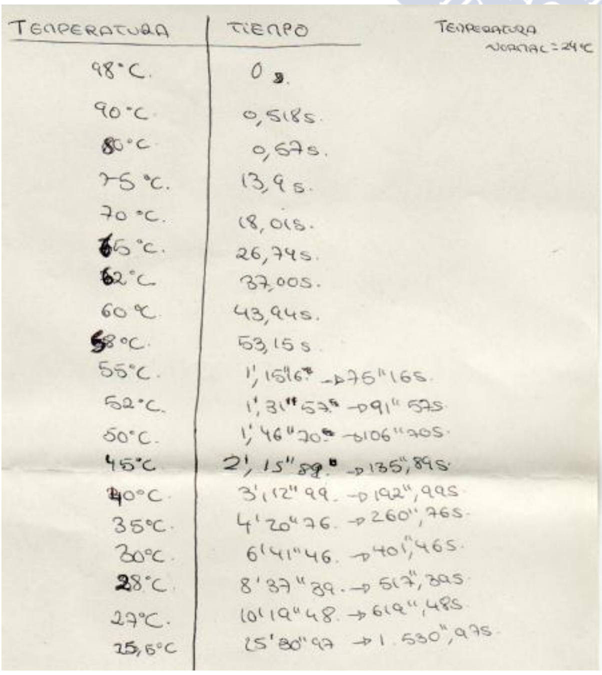


MILILITROS DIÁMETRO
1 ml → 2,4 cm > 1 cm
2 ml → 3,4 cm > 0,7 cm
3 ml → 4,1 cm > 0,5 cm
4 ml → 4,6 cm > 0,5 cm
5 ml → 5,1 cm > 0,6 cm
6 ml → 5,7 cm > 0,4 cm
7 ml → 6,1 cm > 0,4 cm
8 ml → 6,5 cm > 0,4 cm
9 ml → 6,9 cm > 0,3 cm
10 ml → 7,2 cm > 0,35 cm
12 ml → 7,9 cm > (0,8 cm) 0,4 cm
14 ml → 8,7 cm > (0,7 cm) 0,35 cm
16 ml → 9,4 cm > (0,6 cm) 0,3 cm
18 ml → 10 cm > (0,3 cm) 0,15 cm
20 ml → 10,3 cm > (0,3 cm) 0,15 cm
22 ml → 10,6 cm > (0,8 cm) 0,4 cm
24 ml → 11,4 cm > (0,2 cm) 0,1 cm
26 ml → 11,6 cm > (0,3 cm) 0,15 cm
28 ml → 11,9 cm > (0,5 cm) 0,25 cm
30 ml → 12,4 cm > (0,2 cm) 0,1 cm
32 ml → 12,6 cm > (0,6 cm) 0,3 cm
34 ml → 13,2 cm > (0,2 cm) 0,1 cm
36 ml → 13,4 cm
De 1 ml en 1 ml
De 2 ml en 2 ml
23 DATOS

Tabla 12
Grupo GA1
Datos de *Aceite y agua*

Mililitros	Diámetro
1 ml	2,4 cm
2 ml	3,4 cm
3 ml	4,1 cm
4 ml	4,6 cm
5 ml	5,1 cm
6 ml	5,7 cm
7 ml	6,1 cm
8 ml	6,5 cm
9 ml	6,9 cm
10 ml	7,2 cm
12 ml	7,9 cm
14 ml	8,7 cm
16 ml	9,4 cm
18 ml	10 cm
20 ml	10,3 cm
22 ml	10,6 cm
24 ml	11,4 cm
26 ml	11,6 cm
28 ml	11,9 cm
30 ml	12,4 cm
32 ml	12,6 cm
34 ml	13,2 cm
36 ml	13,4 cm

Figura 41. Grupo GT1.
Datos de *Temperatura*



TEMPERATURA TIEMPO TEMPERATURA NORMAL = 24 °C
98 °C 0 s.
90 °C 0,518 s.
80 °C 0,57 s.
75 °C 13,9 s.
70 °C 18,01 s.
65 °C 26,74 s.
62 °C 37,00 s.
60 °C 43,94 s.
58 °C 53,15 s
55 °C 1', 15"16 → 75"16 s.
52 °C 1', 31"57 → 91" 57 s.
50 °C 1', 46"70 → 106"70 s.
45 °C 2', 15"89 → 135",89 s.
40 °C 3', 12"99 → 192",99 s.
35 °C 4' 20"76 → 260",76 s.
30 °C 6' 41"46 → 401",46 s.
28 °C 8' 37"39 → 517",39 s.
27 °C 10' 19"48 → 619",48 s.
25,5 °C 25' 30"97 → 1.530",97 s.

Tabla 13
Grupo GT1
Datos de *Temperatura*

Temperatura	Tiempo
98 °C	0 s.
90 °C	0,518s.
80 °C	0,57s.
75 °C	13,9s.
70 °C	18,01s.
65 °C	26,74s.
62 °C	37,00s.
60 °C	43,94 s.
58 °C	53,15 s.
55 °C	1â,15ââ16.->75ââ16s.
52 °C	1â,31ââ57ââ.->91ââ57s.
50 °C	1â,46ââ70.->106ââ70s.
45 °C	2â,15ââ89.->135ââ,89s.
40 °C	3â,12ââ99.->192ââ.99s.
35 °C	4â20ââ76.->260ââ,76s.
30 °C	6â41ââ46.->401ââ,46s.
28 °C	8â37ââ39.->619ââ,48s.
27 °C	10â19ââ48.->619ââ,48s.
25,5 °C	25â30ââ97->1.530ââ,97s

En cuanto al desarrollo de la obtención de datos en las tres actividades, destacamos lo siguiente:

- El ambiente de trabajo era relajado y no se observaron pérdidas de tiempo significativas.
- Todos los alumnos participan activamente, deciden consensuadamente la distribución del trabajo y asumen que es importante realizar bien las mediciones.
- En muy contadas ocasiones preguntan al profesor, lo que nos lleva a pensar que procuran realizar el trabajo de forma autónoma.

En resumen, se puede decir que esta fase de la actividad es desarrollada de forma autónoma por los alumnos y que estos actúan de forma responsable, asumiendo las exigencias del trabajo en grupo. Dicho trabajo autónomo del alumno ha tenido como consecuencia varios hechos destacables:

- El número de datos de los diferentes grupos varía considerablemente: entre 9 y 32 en el caso de *Muelle*, entre 6 y 23 en *Aceite y agua* y entre 19 y 23 en el caso de *Temperatura*.
- Las variables de las dos columnas son descritas en la tabla de datos de forma preferente mediante la magnitud o unidades de medida físicas. Solo un grupo (*Muelle*, GM5) utiliza para describir las columnas las variables matemáticas *x* e *y*.
- Las variables físicas son descritas, en el encabezado de las columna, utilizando la magnitud o mediante una unidad de medida concreta. En ocasiones, en una columna aparece la magnitud y en la otra una unidad de medida concreta (GM1 y GM2 en *Muelle*, GA1 en *Aceite y agua*). GM3 identifica el muelle con su longitud. Así, indica *Muelle* y entre paréntesis escriben ócmô Sólo en el caso de *Temperatura* la descripción de las columnas se realiza de la misma forma en todos los grupos, usando las magnitudes físicas tiempo y temperatura.
- Algunos grupos no tienen en cuenta la relación de dependencia inherente a cómo se realiza la toma de datos. Así, la dependencia debería establecerse entre masa->longitud, volumen de aceite->diámetro, tiempo->temperatura.

En el caso de *Muelle*, GM3 fija como primera columna la longitud y como segunda el peso.

En *Aceite y agua*, GA3 y GA4 consignan en la primera columna el diámetro y en la segunda el volumen. En el caso de GA4, escriben una flecha de derecha a izquierda que une volumen con diámetro. De hecho, y como veremos, la inclusión de la flecha es una forma de indicar qué variable es la dependiente (el diámetro), lo que se manifiesta al representar en el eje de abscisas el volumen y en el eje de ordenadas el diámetro.

En *Temperatura*, GT1 y GT3 reservan para la primera columna la temperatura y para la segunda el tiempo, mientras que los otros dos grupos hacen justo lo contrario.

- Durante la práctica de *Muelle* y como se observa en las grabaciones de su actividad, GM1 busca regularidades en la tabla de datos que generan: ñVa, más o menos de 2 en

2ò; ñ10 cm por cada 100 gò. GM2, en la toma de datos de *Muelle*, incluye una columna que encabezan con la palabra óDiferenciaô y en la que los alumnos escriben las diferencias de masa entre dos valores consecutivos. GA1 también calcula diferencias en la experiencia de *Aceite y agua*, pero de volumen y diámetro.

- En la experiencia de *Temperatura*, GT1 y GT3 intentan utilizar una única unidad de medida de tiempo, concretamente segundos. Tienen dificultades para encontrar una forma adecuada de escribir los datos, lo que se hace visible en sus tachaduras y correcciones.

GT1 y GT2 optan por usar las comillas como forma de indicar minutos y segundos, mientras que GT3 y GT4 usan los dos puntos como forma de separar minutos y segundos.

De las grabaciones de audio y vídeo de la actividad durante la toma de datos de GT1 y GT3, se deduce que los restantes miembros de los grupos no manifiestan sorpresa, dudas o desacuerdo con la forma en que sus compañeros escriben los datos. O no le dieron importancia o esa labor la dejaron bajo la responsabilidad de quien escribía los datos en el papel. Por ejemplo, GT1 usa una comilla para indicar los minutos, separa minutos de segundos con una coma y usa dos comillas para los segundos (Figura 42).

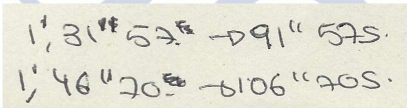


Figura 42. Registro de tiempo del grupo GT1

Además los segundos son, en ocasiones, números decimales. Todo ello genera dudas y formas poco adecuadas de escribir los datos, que se observan claramente en las tablas de datos de GT1. Escribir tiempos y ángulos usando las comillas para diferenciar minutos y segundos es una notación habitual en matemáticas (tanto para medidas de tiempo como de ángulos sexagesimales) desde edades tempranas y que también es una notación habitual en otras ciencias que los alumnos estudian.

En estos momentos, cada grupo de trabajo dispone de una tabla de datos. Las tablas de los diferentes grupos presentan las variables en columnas diferentes. Unos, por ejemplo, representan el diámetro de la mancha en la columna izquierda, mientras que otros lo hacen en la derecha. Esta diferencia puede ser percibida por el profesor como una oportunidad. Las dos columnas de una tabla de datos se vinculan a dos variables: la columna izquierda a la variable independiente y la derecha a la dependiente. Este hecho representa para el profesor una ocasión para hablar del carácter intercambiable de la variable dependiente e independiente y bajo qué condiciones eso es posible. Además, al obtener las funciones de ajuste, el que unos grupos intercambien las columnas y otros no, dará lugar a la generación de funciones y sus inversas.

Pero lo que se puede percibir como una oportunidad representa, al mismo tiempo, que la toma de datos desarrollada autónomamente por el alumno introduce situaciones imprevisibles. Es decir, no se puede saber de antemano si algún grupo va a registrar los datos de forma diferente a los otros grupos. Esta circunstancia obliga al docente a la toma de decisiones en función de los resultados que aporten los estudiantes. Por ejemplo, el profesor puede no tener como objetivo hablar del carácter intercambiable de la variable dependiente e independiente y de la función inversa. La generación de tablas de datos en las que ambas variables están intercambiadas, introduce una dificultad en la consecución de los objetivos buscados, lo que aconseja evitar que surja la dificultad. Así, puede plantearse la necesidad de limitar la autonomía del alumno para evitar la situación descrita, más compleja y que precisa de conocimientos previos sobre funciones. Es decir, los objetivos de la modelización pueden llevar a limitar la autonomía del alumno en el proceso de modelización para evitar situaciones que no es conveniente que se presenten.

Por poner otro ejemplo sobre el mismo problema de fondo, el profesor puede decidir que no es conveniente que los estudiantes obtengan un número de datos muy pequeño porque ello redundará en un número de datos insuficientes para la siguiente fase. Es decir, se trata de evitar la situación creada, por ejemplo, GA5 en *Aceite y agua*, que sólo dispone de 5 datos. Las razones que han llevado a ese grupo a obtener tan pocos datos se encuentran en la influencia de la experiencia previa en *Muelle*. Al tratarse de la función afín, no es necesario un número grande de datos, lo que puede llevar a pensar que un número pequeño es suficiente. Desde el respeto a la autonomía del alumno, la decisión del número de datos que es necesario obtener debe ser del grupo de trabajo. Pero desde los objetivos de la modelización, teniendo en cuenta el trabajo que deberá desarrollar el grupo posteriormente, no resulta conveniente que un grupo obtenga un número de datos insuficiente. La solución pasa por fijar un número de datos mínimo en el momento de proponer la actividad o controlar durante la obtención experimental de datos que cada grupo obtenga un número de datos mínimo, indicando al grupo que no haya generado un número suficiente de datos que obtenga más. De esta forma, el profesor percibe o justifica su intervención como una necesidad de los objetivos de la modelización en su conjunto, limitando por el camino la toma de decisiones por parte de los alumnos o, lo que es lo mismo, limitando su autonomía.

Lo mismo se podría decir sobre aquello que se observa en la toma de datos: confusión entre magnitud y unidad de medida, dificultades para escribir los datos de forma correcta, etc.. Pero la corrección de esas dificultades y problemas son relevantes desde el punto de vista de la modelización. La toma de datos y su representación en forma de tabla implica un primer nivel de matematización o de traslado del mundo de lo real al mundo matemático. Por tanto, el control del proceso de modelización que desarrolla el alumno implica el control de cómo realiza la toma de datos y cómo representa esos datos en una tabla. En esta investigación, dados los objetivos que se fijan para las tres modelizaciones, el profesor no ha observado ni analizado el resultado del trabajo de los estudiantes, lo que le impide intervenir sobre las dificultades y problemas ya observables. Como esos problemas no serán tratados en las fases siguientes, las dificultades y problemas observados han sido obviados. Muchas de las dificultades y problemas, como por ejemplo, las deficiencias y problemas para escribir correctamente los tiempos en *Temperatura*, no tienen repercusión posterior y, por tanto, no volverán a surgir.

En resumen, la pregunta a la que se enfrenta el docente y, a la que debe dar respuesta, vuelve a ser la misma: la limitación del trabajo autónomo y el grado conveniente de intervención del profesor ante la constatación de problemas y dificultades que surgen durante el proceso de modelización.

Sobre aquellas cuestiones que se observan en la toma de datos y que tendrán un reflejo en las fases siguientes, retomamos la inclusión de dos grupos datos (GM2 en *Muelle* y GA1 en *Aceite y agua*; Figura 40) de una columna de diferencias en sus tablas. Añadido a la inclusión de esa columna, en las grabaciones de las conversaciones que mantienen los alumnos de GM1 y GM4 en la actividad de *Muelle*, se hacen menciones a las diferencias entre datos consecutivos:

A7: Va, más o menos, de 2 en 2.

A13: 10 cm por cada 100 g, más o menos.

La razón de ser de la inclusión de una columna de diferencias y sus comentarios durante la obtención de datos en la misma línea, es la búsqueda de regularidades en la relación entre los datos que van obteniendo. Esa búsqueda de regularidad se identifica con un intento de encontrar una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes presentes en el fenómeno físico. Este hecho nos hace pensar que se haya presente uno de los obstáculos del concepto de función, óObstáculo de la razón o proporciónô (Ruíz Higueras; 1983, 1998).

Se debe tener en cuenta que los estudiantes ya deberían, desde 1º de ESO, establecer relaciones entre magnitudes a partir de una tabla de valores o de una gráfica y discernir si esa relación entre magnitudes es una relación de proporcionalidad directa o no:

> Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores o de la gráfica. Reconocimiento de las magnitudes relacionadas y de las unidades de medida. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.
>
> (Orden ECI/2220/2007, p. 31792)

Durante la obtención de datos de *Aceite y agua*, en las conversaciones de los alumnos, se observa que la búsqueda de la proporción entre las dos variables sólo aparece en GA1. Recordemos que calcula diferencias en su tabla de datos (Figura 45). Esa búsqueda de la proporcionalidad representa una preocupación para varios estudiantes en un principio, pero en el transcurso de la obtención de datos sólo uno insiste en la proporción entre las variables. El resto asume, al ir avanzando la toma de datos, que las variables no tienen por qué encontrarse relacionadas por una ley de proporcionalidad directa. De hecho, uno de los estudiantes menciona la óimpredecibilidadô del comportamiento del aceite (A9), en clara alusión a que el tipo de relación entre las variables es desconocida en esos momentos.

A3: Nueve con cuatro. Van de siete en siete centímetros, ¿verdad?

A6: No.

A3: ¿No?

A6: Ahora empezó [é] Porque vamos de dos en dos. Si te fijas, la última medida de uno en uno de nueve a diez milímetros hay tres hay tres centímetros. [é] Un milímetro sube tres centímetros.

A6: ¡Mimá!, teneis que empezar a fijaros más, eh.

A3: ¿Por qué?

A6: Porque está variando mucho esto. [é] Hacedme caso, eh, mira.

A7: De la otra vez también lo mismo y mira al final que gráfica más (é) nos quedó.]

A6: Ya, pero variaba de más. No de repente de poco aumentó (é)

A9: Es aceite, es impredecible.

A7: No sabes cómo se comporta la Naturaleza, A6

Así, la búsqueda de la razón o proporción se haya presente en *Aceite y agua* de una forma más limitada que en el caso de *Muelle*. En el caso de *Temperatura*, no se manifiesta ni en la toma de datos ni en las conversaciones grabadas. Esto quiere decir que van abandonando paulatinamente la búsqueda de una relación de proporcionalidad directa entre variables.

En las grabaciones de GA3 en *Aceite y agua*, no se observa la búsqueda de una relación de proporcionalidad, pero sí una mención a la influencia de las condiciones iniciales en los valores de volumen y diámetro que obtienen. El extracto de conversación que reproducimos se enmarca en un pequeño debate que mantienen los alumnos del grupo al constatar uno de ellos (A18) que sus datos son diferentes de los de otro grupo. Otros (A14 y A16) le indican como justificación que las condiciones en la que desarrollan la toma de datos es diferente en cada grupo.

A16: Pero, no es lo mismo.

A18: Sí, sí que es lo mismo. Tiene que ser igual

A13: Aceite es aceite.

A14: No, porque no tenemos la misma cantidad de detergente. ¡Ahh!, todo influye.

A16: Ni la misma cantidad de agua.

Se trata, en definitiva, de la justificación de las diferencias en función de las condiciones iniciales, lo que determinará posteriormente la presencia de parámetros en las funciones que obtendrán en la siguiente fase. La constatación del estudiante de que las condiciones iniciales influyen en los datos de la tabla debería permitir ligar posteriormente las condiciones iniciales a la presencia de parámetros en la función. Además, las condiciones iniciales justifican el valor concreto del parámetro en cada caso, lo que permite interpretar el valor del parámetro en función de las condiciones iniciales. Pero la medida de si realmente justifican e interpretan correctamente la presencia de parámetros en función de las condiciones iniciales, nos la dará las preguntas al respecto en *Muelle* y *Aceite y agua*.

Aún teniendo en cuenta, dada la complejidad de sus respuestas, que lo que mencionamos a continuación es necesario tomarlo con cautela, se puede afirmar que sus valoraciones sobre esta fase del proceso de modelización son altamente positivas. Las preguntas sobre su opinión acerca de las actividades (Anexo IX) fueron realizadas al término de las mismas, con lo que se realizan desde una valoración de “conjunto”, no desde una actividad o fase concreta. Contestaron a esas preguntas 24 alumnos.

Ante la pregunta de qué fase les ha gustado más o les ha parecido más interesante (obtención de datos, obtención de la función de ajuste, preguntas sobre el modelo obtenido), mencionan de forma claramente predominante la obtención de datos en el laboratorio (15 alumnos: A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A13, A17, A19, A20 y A21; 62.5%). Las razones que aportan son diversas (es divertido, curioso, se sale de la rutina,…), pero destacan la mención a la obtención por ellos mismos de los datos que van a usar posteriormente (A5, A8, A11, A13, A19 y A21; 25%) y el uso de instrumentos (A4, A7 y A20; 12.5%).

Las respuestas nos llevan a pensar que el planteamiento de actividades de modelización matemática en la Ed. Secundaria debe plantearse, preferentemente y si ello es posible, en modelizaciones que permitan que los estudiantes obtengan los datos que posteriormente serán usados para la construcción del modelo. Que obtengan los datos en vez de suministrárselos el profesor redunda en que el modelo es construido de forma plena por los alumnos, los cuales llevan a término todos los pasos necesarios del ciclo de modelización y no sólo una parte de ellos. El modelo obtenido será percibido por los estudiantes como *su modelo* en todos los sentidos. Si los datos son suministrados, el modelo será *suyo* sólo parcialmente. La percepción del modelo como una creación o resultado matemático propio, y no heredado o suministrado parcialmente, aparece tanto en sus opiniones como en las entrevistas. De esa forma, asume el modelo como producto de su trabajo matemático, con sus virtudes y defectos, lo que lleva a la asunción de su responsabilidad matemática en el contexto de una modelización.

La mención al “uso de instrumentos” como una virtud del trabajo en el laboratorio puede sorprender. Los instrumentos usados no son sofisticados o poco comunes. Han empleado calculadoras científicas, pesas, jeringuillas, reglas graduadas, flexómetros, termómetros y cronómetros. Todos ellos instrumentos bien conocidos por los alumnos. Cuando realizan ese comentario, los participantes se refieren al uso del instrumento en el contexto. Dicho de otra forma, su uso en un contexto real pero ligado al mundo matemático mediante la actividad matemática, es percibido como algo novedoso y diferente. Acostumbrados a usar datos suministrados por un texto o por el profesor, obtener los datos por ellos mismos representa una novedad y algo divertido. No se trata de otra cosa que las ventajas, ya mencionadas y que apuntan Halverscheid, Alsina y Carreira, sobre el planteamiento de modelizaciones matemáticas en las que el alumno obtenga los datos necesarios experimentalmente o en el contexto real (3.3.1.).

A continuación incluimos imágenes de las opiniones de los estudiantes y la transcripción del texto para ilustrar lo anteriormente dicho (Figuras 43 a 46):

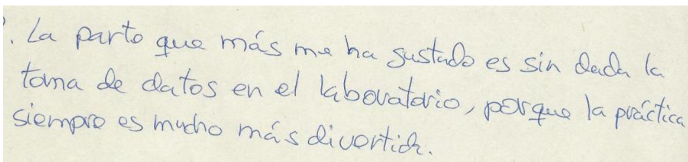

. La parte que más me ha gustado es sin duda la toma de datos en el laboratorio, porque la práctica siempre es mucho más divertida.

Figura 43. Opinión sobre la toma de datos. Alumno A3

Transcripción: *La parte que más me ha gustado es sin duda la toma de datos en el laboratorio, porque la práctica siempre es mucho más divertida*

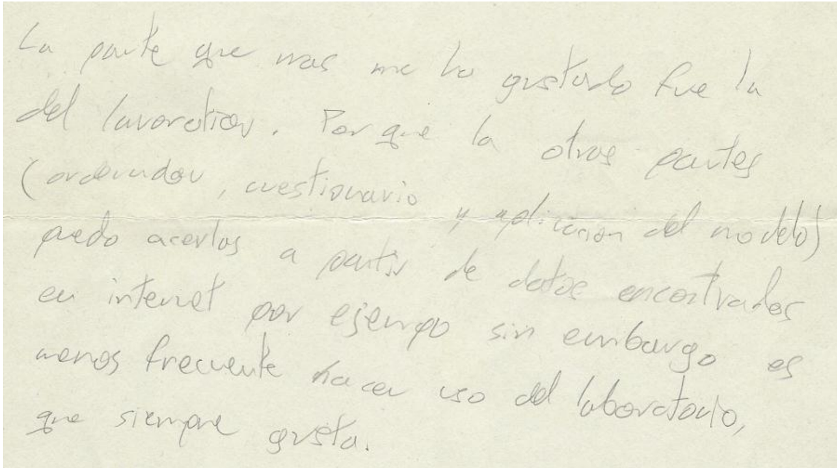

La parte que mas me ha gustado fue la del lavoratiov. Porque la otras partes (ordenador, cuestionario y aplicación del modelo) puedo acerlos a partir de datos encontrados en internet por ejemplo sin embargo es menos frecuente hacer uso del laboratorio, que siempre gusta.

Figura 44. Opinión sobre la toma de datos. Alumno A5

Transcripción: *La parte que más me ha gustado fue la del laboratorio. Porque las otras partes (ordenador, cuestionario y aplicación del modelo) puedo hacerlas a partir de datos encontrados en Internet, por ejemplo, sin embargo es menos frecuente hacer uso del laboratorio, que siempre gusta*

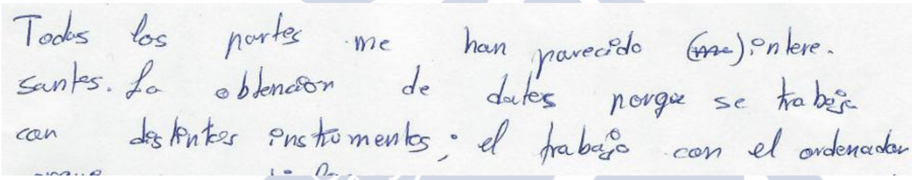

Todas los partes me han parecido intere-
santes. La obtención de datos porque se trabaja
con distintos instrumentos; el trabajo con el ordenador

Figura 45. Opinión sobre la toma de datos. Alumno A20

Transcripción: *Todas las partes me han parecido interesantes. La obtención de datos porque se trabaja con distintos instrumentos*

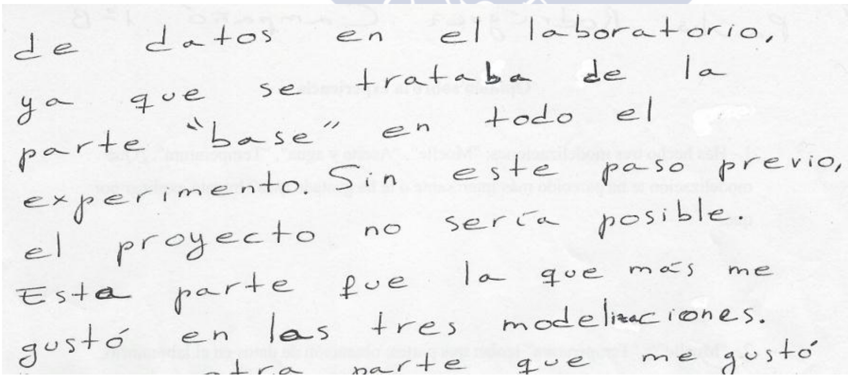

de datos en el laboratorio,
ya que se trataba de la
parte "base" en todo el
experimento. Sin este paso previo,
el proyecto no sería posible.
Esta parte fue la que más me
gustó en las tres modelizaciones.
otra parte que me gustó

Figura 46. Opinión sobre la toma de datos. Alumno A21

Transcripción: *[la obtención] de datos en el laboratorio, ya que se trataba de la parte* **ñ***base***ò** *en todo el experimento. Sin este paso previo, el proyecto no sería posible. Esta parte fue la que más me gustó en las tres modelizaciones*

4.3. RESULTADOS DE LA FASE DE OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE AJUSTE

Después de que el último grupo diese por terminada la obtención de datos en el laboratorio, se trasladaron al aula de informática.

Trabajaron en grupos con la misma composición que los de la fase de obtención de datos. Cada uno disponía de su tabla de datos y de un ordenador con el programa GeoGebra instalado. Además, disponían de dos archivos GeoGebra en los que ya se habían introducido puntos del plano. Los puntos se introdujeron en la forma *(x,x)*, es decir, la primera coordenada igual que la segunda. En el primer archivo se introdujeron 20 puntos del plano y en el segundo 60 (puntos *(1,1), (2,2),* ***é*** *,(60,60)*). La razón de proporcionarles esos dos archivos era intentar que el tiempo dedicado a introducir datos se viese reducido. Introducir coordenadas de un número grande de puntos en GeoGebra es un proceso puramente mecánico y resulta más rápido modificar puntos ya introducidos que introducir puntos nuevos. Debían escoger cuál de los dos archivos tenían que usar, en función del número de datos de los que disponían en su tabla de datos, modificar los valores *x* e *y* de los puntos ya introducidos y eliminar los puntos sobrantes.

Esta segunda fase de la actividad de modelización representa una nueva matematización, derivada de la primera matematización que representó la obtención de la tabla de datos. La matematización de esta fase abandona la ligazón de los valores de la tabla de datos con valores de magnitudes físicas, con lo que la modelización se integra en el mundo de las matemáticas de forma plena. Eso, evidentemente, no quiere decir que el mundo real no se halle presente. Simplemente, el mundo real no se hace tan explícito en la representación de los datos como en la tabla de datos. Los datos pasan a ser puntos del plano (en un primer nivel de matematización en esta fase) y variables funcionales (en un segundo nivel de matematización de la fase). Además, los gráficos que incluyen los datos como puntos del plano permiten observar la situación a la que se enfrentan los alumnos una vez que han introducido los datos de su tabla de valores. Dicho de otro modo, los alumnos generan dos gráficos: el primer gráfico es una representación del nivel de matematización correspondiente a la consideración de los datos de la tabla de datos como puntos del plano cartesiano, mientras que el segundo se corresponde con la matematización correspondiente a su consideración como puntos relacionados mediante una expresión funcional concreta. Se trata, en fin, de dos matematizaciones verticales a diferentes niveles.

A continuación incluimos capturas de pantalla del volcado de datos, los parámetros y funciones introducidas por los estudiantes y las gráficas de las funciones.

4.3.1. Volcado de datos en GeoGebra y funciones obtenidas

Como ejemplos del aspecto de la pantalla que observaban los alumnos después de introducir los datos como puntos del plano, incluimos las capturas de pantalla de GM1, GA1 y GT1. También se incluyen las capturas de pantalla de los archivos GeoGebra una vez que esos mismos grupos decidieron que había terminado su trabajo. Adjuntamos las capturas de pantalla correspondientes a los restantes grupos en el Anexo

VIII . En las imágenes se ha respetado el aspecto gráfico del archivo entregado por los diferentes grupos. En el ajuste de la actividad *Aceite y agua*, GA2 entregó dos archivos GeoGebra. En el primero, la función que aparece representada es la función $f(x)=1.68\cdot x^{\frac{0.87}{1.68}}$. Esos alumnos indicaron al profesor que la función que ajustaba sus datos es la que aparece en la imagen que incluimos en el Anexo VIII. De todos modos, entregaron ese primer archivo porque dedicaron algunos minutos a probar con la función del tipo $f(x)=k\cdot x^{\frac{a}{b}};\ k, a, b\in\mathbb{R}$. El uso de la función $f(x)=1.68\cdot x^{\frac{0.87}{1.68}}$ explica la razón de que en la captura de pantalla de GeoGebra de ese grupo aparezcan tres deslizadores. También entregó dos archivos (cuyas gráficas incluimos en el Anexo VIII), GT3 en *Temperatura*. La razón de incluir los dos gráficos es que ese grupo, al igual que los otros, intentó realizar el ajuste con un gran número de funciones. Algunas aparecen en el primer archivo que entregaron y otras en el segundo. Como se aclarará con detalle más adelante, sólo GT4 estimó que había conseguido el ajuste en *Temperatura*. En la Figura 54 se incluye la captura de pantalla que se corresponde con la gráfica tal y como aparece en el archivo que entregaron. En el Anexo VIII se incluye una captura de pantalla en la que se ha realizado una modificación de ejes para observar mejor hasta qué punto es bueno el ajuste de datos de ese grupo.

- *Actividad Muelle:*

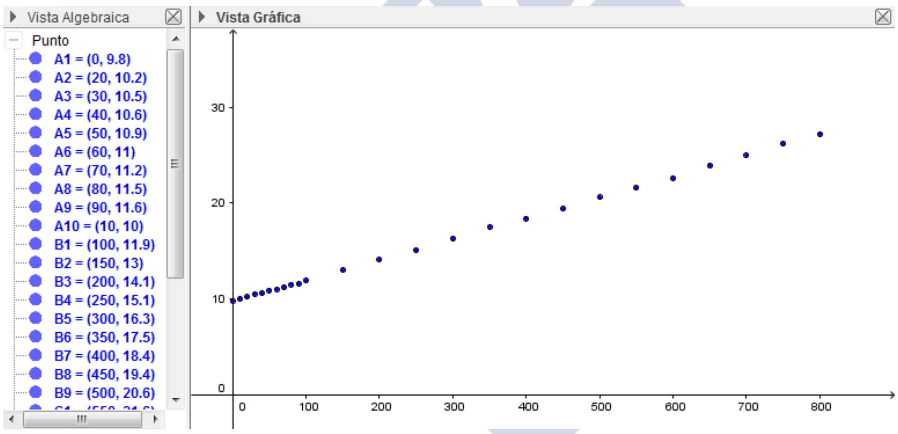


Figura 47. Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GM1

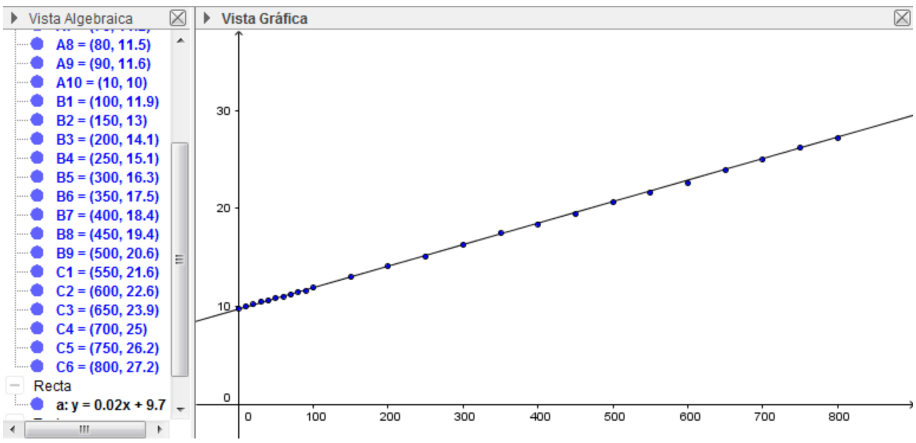


Figura 48. Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GM1

- *Actividad Aceite y agua:*

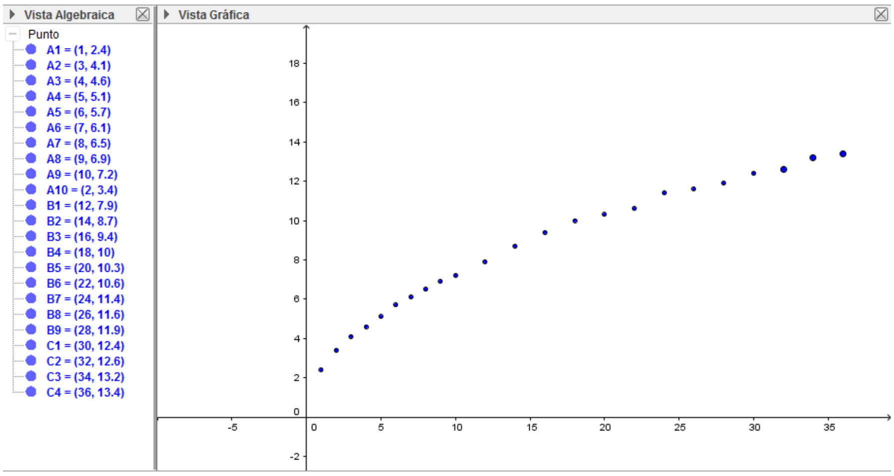


Figura 49. Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GA1

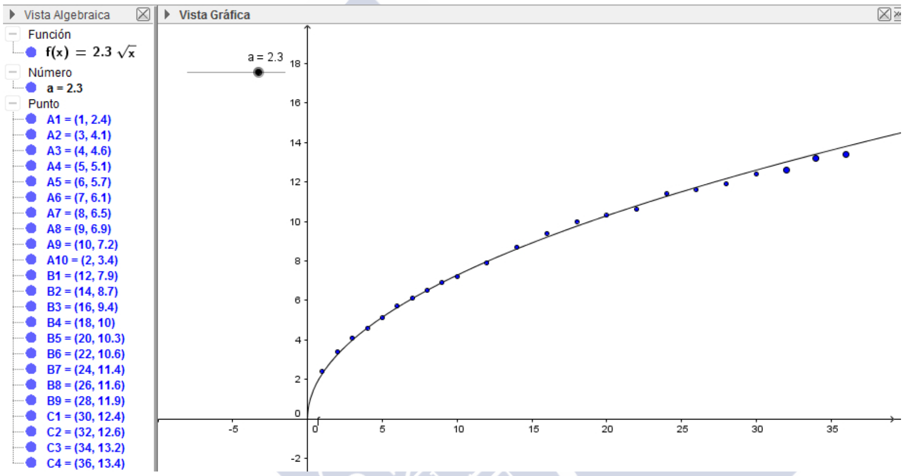


Figura 50. Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GA1

- *Actividad Temperatura:*

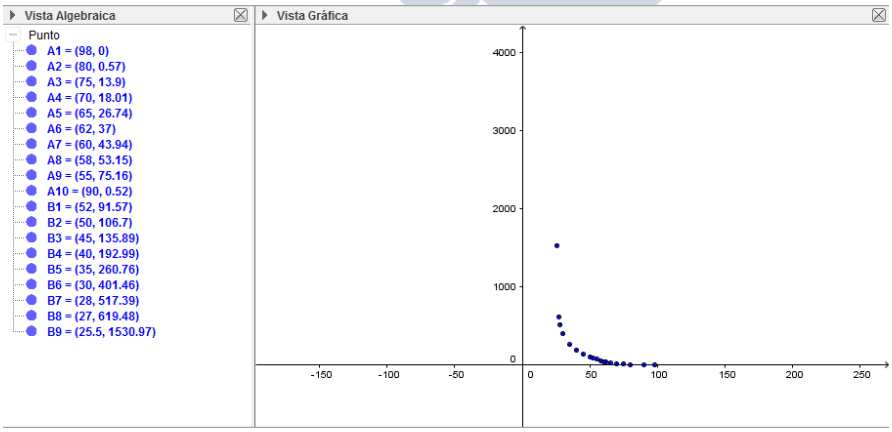


Figura 51. Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GT1

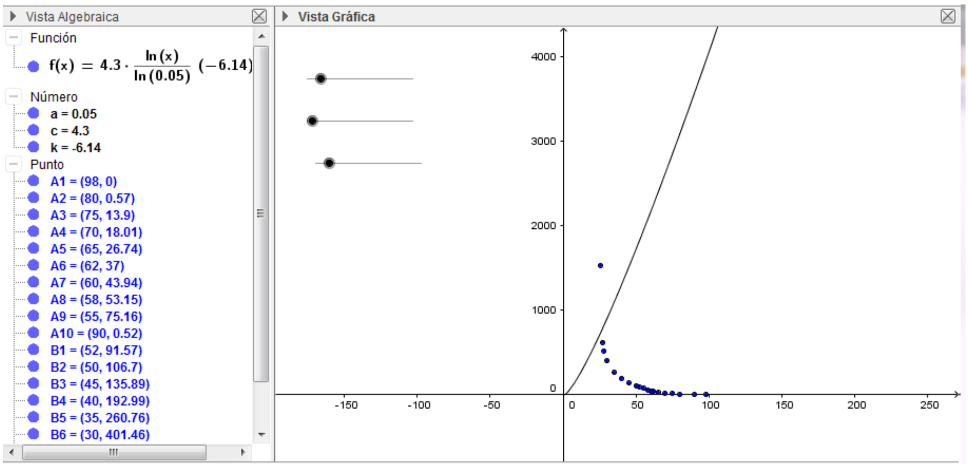


Figura 52. Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GT1

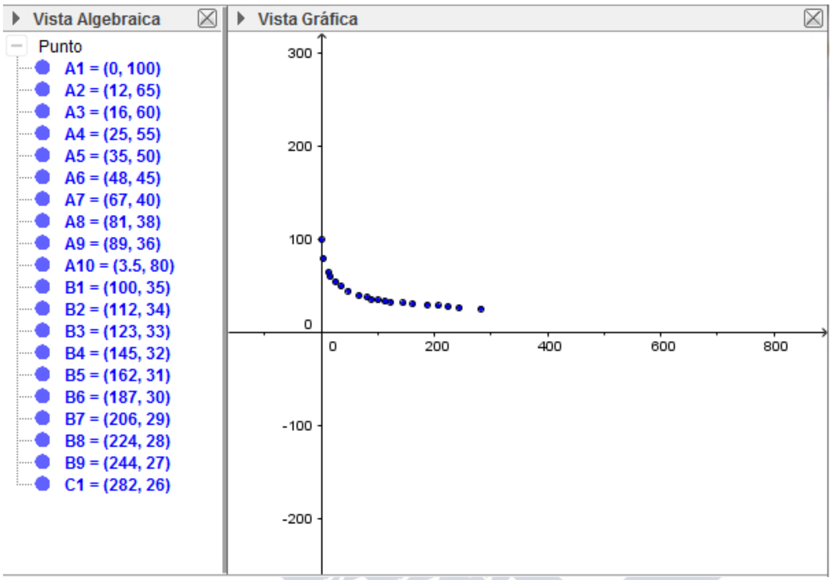


Figura 53. Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GT4

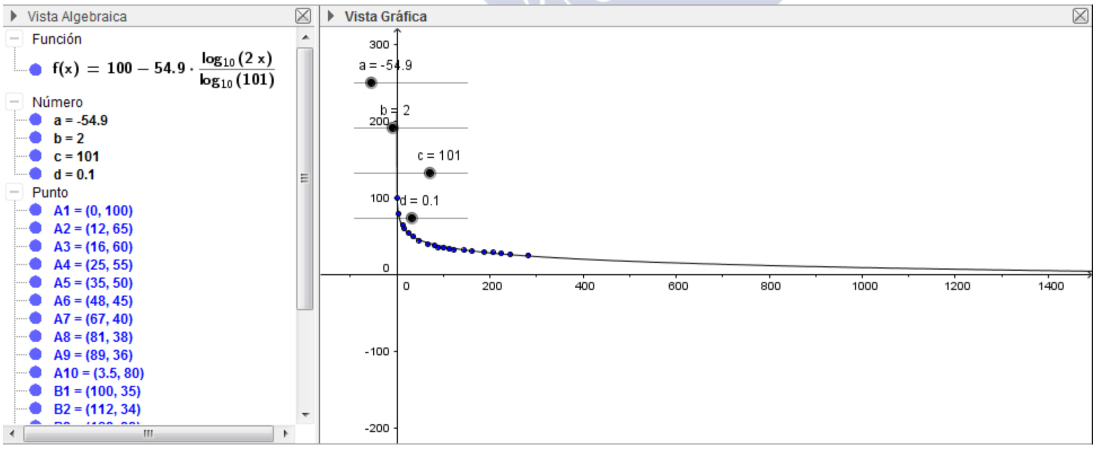


Figura 54. Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GT4

(modificación de los intervalos visibles del archivo GeoGebra entregado por los alumnos)

Incluimos las funciones obtenidas por cada uno de los grupos en la siguiente tabla (Tabla 14):

Tabla 14. Funciones obtenidas por los diferentes grupos

	Grupo y nº de datos	**Función obtenida Representación de las variables en los ejes**
Muelle	GM1 23 datos	*y=0.02x+9.7* eje *x*: peso en g; eje *y*: longitud en cm)
	GM2 11 datos	*f(x)=0.1x+10.8* eje *x*: peso en g; eje *y*: longitud en cm
	GM3 32 datos	*f(x)=7.6x-103.4* eje *x*: longitud en cm; eje *y*: peso en g
	GM4 12 datos	*f(x)=0.11x+11* eje *x*: peso en g; eje *y*: longitud en cm
	GM5 9 datos	*f(x)=0.02x+9.1* eje *x*: peso en g; eje *y*: longitud en cm
	GM6 13 datos	*y=0.02x+9.7* eje *x*: peso en g; eje *y*: longitud en cm
Aceite y agua	GA1 23 datos	$f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$ eje *x*: volumen en ml; eje *y*: diámetro en cm
	GA2 15 datos	$f(x)=1.8\cdot\sqrt{x}$ eje *x*: volumen en ml; eje *y*: diámetro en cm
	GA3 15 datos	$f(x)=2.63\cdot\sqrt{x}$ eje *x*: volumen en ml; eje *y*: diámetro en cm
	GA4 13 datos	$f(x)=2.1\cdot\sqrt{x}$ eje *x*: volumen en ml; eje *y*: diámetro en cm
	GA5 6 datos (tabla) 7 datos (GeoGebra)	$f(x)=1.78\cdot\sqrt{x}$ eje *x*: volumen en ml; eje *y*: diámetro en cm
Temperatura	GT1 19 datos	-- eje *x*: temperatura en ° C; eje *y*: tiempo en s
	GT2 18 datos	-- eje *x*: tiempo en s.;eje *y*: temperatura en ° C

	GT3 20 datos	-- eje x: temperatura en ° C; eje y: tiempo en s
	GT4 23 datos	$f(x) = 100 - 54.9 \cdot \frac{log(2x)}{log(101)}$ eje x: tiempo en s.;eje y: temperatura en ° C

A continuación se presentan algunas consideraciones generales sobre la fase de obtención de la función de ajuste.

4.3.2. Consideraciones generales sobre el desarrollo de la fase de obtención de la función de ajuste

En relación con el proceso de obtención de la función de ajuste, se destaca lo siguiente:

- Al comienzo de la sesión de la actividad *Muelle*, se realizaron unas explicaciones previas sobre aspectos técnicos: disponibilidad de dos archivos para introducir los datos con comodidad, introducción de expresiones, etc. Gran parte de la introducción representaba un recordatorio de lo ya realizado en las prácticas previas y, como consecuencia, el tiempo dedicado a todos estos preliminares fue corto, no excediendo los tres minutos. En las restantes actividades no se produjo la introducción que hemos mencionado.

- El volcado de datos se realiza de forma rápida, en un ambiente relajado y sin dificultades.

- Deciden con rapidez la forma de trabajar. Para introducir los datos, un alumno se ocupa de dictarlos y otro de introducir los datos en el ordenador. Ese mismo alumno se ocupará más tarde de seguir las indicaciones de sus compañeros a la hora de determinar la función de ajuste.

- La duración en tiempo presenta diferencias de importancia: en *Muelle* el tiempo que los diferentes grupos dedicaron a obtener la expresión matemática que relaciona peso y longitud no excede los 15 minutos. En el caso de *Aceite y agua* es menos de 35 minutos y en *Termómetro* de alrededor de 1 hora.

De la grabación en vídeo y audio de la actividad de GA1 y GA3 en *Aceite y agua*, observamos que GA1 precisa de 15 minutos para completar todo el proceso, mientras que GA3 requirió de 8 minutos. La mayor parte del tiempo la dedicaron al volcado de datos y ajuste de amplitud visible de los ejes. A ambas actividades GA1 dedicó 10 minutos y GA3 alrededor de 6. Eso quiere decir que la decisión de qué función es la adecuada y la introducción y modificación del parámetro presente en la función es, en *Muelle* y en *Aceite y agua*, muy rápida.

- El cambio en el intervalo visible de los ejes lo determinan una vez que han introducido los datos. De esa forma, modifican los ejes cartesianos con los puntos del plano visibles en la pantalla del ordenador. Este proceso lo realizan antes de introducir deslizadores y funciones.

- Durante el desarrollo de las actividades, preguntan al profesor en contadas ocasiones y siempre sobre cuestiones puramente técnicas relacionadas con el uso del programa GeoGebra: ¿cómo se introduce un deslizador?, ¿cómo se varía el intervalo en el que el deslizador toma valores?, ¿cómo se varía el ópasoô del deslizador?, ¿cómo se introduce la raíz cuadrada en GeoGebra?, etc.

Como consecuencia, asumen que parte de su trabajo consiste en deducir qué función introducir. Parten, por tanto, de que su trabajo debe ser autónomo, lo que conlleva la toma de decisiones. De ahí que sus preguntas se reduzcan a cuestiones relacionadas con el uso técnico de GeoGebra.

- En *Muelle*, GM4 intenta, al comienzo de su actividad, que la gráfica de la función ópaseô por todos los puntos. Como ello no es posible (ñA19: Pues tiene que estar mal la ecuación.ò), uno de los integrantes del grupo propone probar con una parábola, idea que el grupo abandona en unos segundos. Nos parece interesante y resaltamos que A19 se refiere a la expresión de la función como œecuaciónâ. Como veremos, esa identificación de la expresión funcional con una ecuación volverá a aparecer.

- En *Muelle*, GM6 ajusta los datos mediante una recta de la forma $y=ax+b$. No lo hacen mediante una función, a pesar de que en la introducción de la actividad el profesor les indicó que debían obtener la función de ajuste. Usan y modifican parámetros para obtener la recta adecuada. GM1 ajusta la recta mediante una recta determinada a partir de dos puntos del plano pertenecientes a su tabla de valores. Concretamente, determinan la recta que pasa por los puntos (150,13) y (750,262).

- GA5 dispone de un número de datos claramente insuficiente. Ante la situación, añaden un punto (el punto *(0,0)*; 0 ml, 0 cm) que, como se puede consultar en el Anexo VII, no aparece en su tabla de datos. GA4 tampoco dispone de un número importante de datos (13 puntos visibles en el plano). No hacen visible el punto *(0,0)*, como sus compañeros de GA5. Es decir, ante la misma situación o problema, la actuación de GA4 y GA5 ha sido diferente, lo que representa un ejemplo de lo difícil que resulta predecir el comportamiento de los alumnos ante una situación problemática.

- En *Aceite y agua* y en *Temperatura* utilizan la fotocopia con las gráficas de la funciones fundamentales (Anexo I) como documentación que les ayuda a decidir qué función introducir. En la toma de decisiones a este respecto, priman el aspecto visual de la gráfica de la fotocopia y sus similitudes con la gráfica que se intuye en los puntos visibles en su pantalla.

Las diferencias de opinión al observar las gráficas y los puntos en pantalla dan lugar a veces a pequeños debates. Por ejemplo, en *Aceite y agua*, en GA3 se produce un debate muy corto, una vez que ya obtuvieron la función de ajuste, a raíz de las dudas expresadas por A17 de que podría tratarse de una logarítmica:

A17: ¿Y si no es esa?

A19: Sí que es.

A17: ¿Y si es la logarítmica? Mira la logarítmica.

A14: ¿No ves que coincide casi perfecta? [*Se trata de la alumna que introduce los datos en el ordenador y le señala la gráfica que han obtenido*].

A19: ¿Cuál es la logarítmica? [*A16 le enseña las copias con las gráficas de las funciones*].

A14: Hombre, si quieres probamos, ¡eh!

A19: ¡Hala!, logarítmica sí, je, je. [é] Pero la logarítmica empieza en los negativos.

A14: Hombre, si quieres probamos.

A19: Aquí no puede empezar en los negativos porque vamos de cero para arriba pero (é) tiene negativos.

A17: Dejamos esa, es la que más cuadra. Es la que más va a cuadrar, vamos.

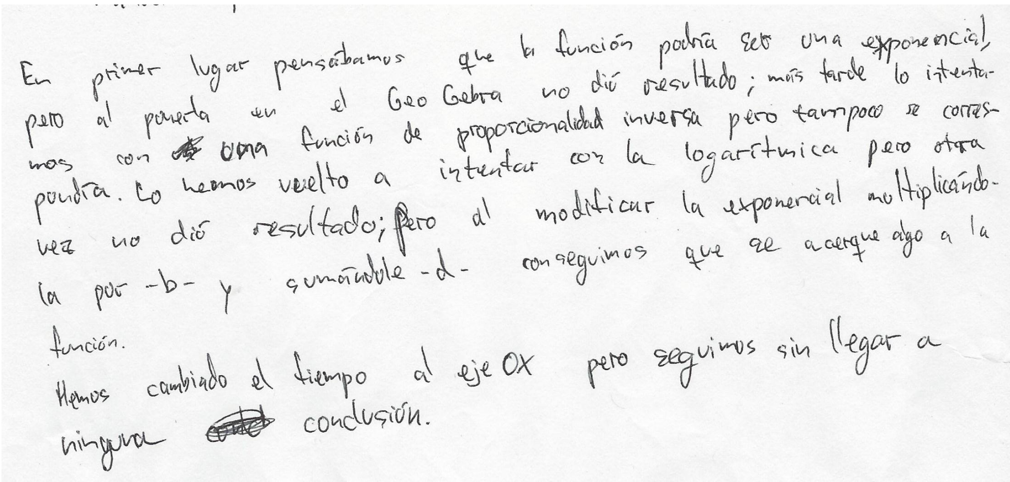
A15: Venga, ya está.

La razón que aporta A17 para proponer la función logarítmica es que ambas funciones (raíz cuadrada y logarítmica de base mayor que 1) son funciones crecientes, cóncavas y de dominio limitado a los reales positivos. Ello redunda en gráficas con ciertas semejanzas. La mención de A19 al recorrido de la función es una forma de situar la búsqueda de la función en el contexto real de la situación y problema. No parece darse cuenta de que las funciones que aparecen en las fotocopias entregadas pueden ser modificadas y, como consecuencia, tanto su gráfica como su dominio y recorrido se verán modificadas. El resto de los alumnos no contemplan la posibilidad del uso de una logarítmica porque ya han encontrado una función que ajusta adecuadamente los datos, razón suficiente para no probar con otra función. Esa misma razón es la que convence finalmente a A17.

El caso de *Temperatura*, aunque reproduce muchos aspectos mencionados ya, resulta más complejo:

- Los cuatro grupos utilizan en algún momento las mismas funciones: proporcionalidad inversa, potencial (de exponente positivo, negativo y fraccionario), exponencial y logarítmica. En el caso de las funciones de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, usan las expresiones contenidas en las fotocopias de las gráficas de las funciones fundamentales: $f(x)=\frac{k}{x^n}$, $f(x)=c\cdot a^{kx}$, $f(x)=c\cdot log_a(kx)$ introduciendo parámetros multiplicando la exponencial y el logaritmo, pero también introducen parámetros sumando o restando.

- Para introducir los logaritmos de base diferente a *e* y a *10*, utilizan la fórmula de cambio de base ($log_a(x)=\frac{log_b(x)}{log_b(a)}$) pues saben que GeoGebra sólo permite usar logaritmos de forma directa en esas dos bases. Incluimos los comentarios de los estudiantes de GT3 para ilustrar lo anteriormente dicho (Figura 55).



En primer lugar pensábamos que la función podría ser una exponencial, pero al ponerla en el Geo Gebra no dió resultado; más tarde lo intentamos con ~~una~~ una función de proporcionalidad inversa pero tampoco se correspondía. Lo hemos vuelto a intentar con la logarítmica pero otra vez no dió resultado; pero al modificar la exponencial multiplicándola por -b- y sumándole -d- conseguimos que se acerque algo a la función.

Hemos cambiado el tiempo al eje OX pero seguimos sin llegar a ninguna ~~...~~ conclusión.

Figura 55. Descripción de las funciones usadas por el grupo GT3

Transcripción: ñ*En primer lugar pensábamos que la función podría ser una exponencial, pero al ponerla en el GeoGebra no dio resultado; más tarde lo intentamos con una función de proporcionalidad inversa pero tampoco se correspondía. Lo hemos vuelto a intentar con la logarítmica pero otra vez no dio resultado; pero al modificar la exponencial multiplicándola por* **ï** *b- y sumándole* **ï** *d- conseguimos que se acerque algo a la función.*

*Hemos cambiado el tiempo al eje OX pero seguimos sin llegar a ninguna conclusión.***ò**

Ante la dificultad que encuentran para obtener la función, incluso intentan representar los tiempos, en principio representados en el eje OY, en el eje OX. El hecho de cambiar los ejes no debería representar una ventaja para lograr obtener la función adecuada, que pasará a ser la inversa de la anterior, pero da idea del grado de interés por conseguir obtener la función. Por otro lado, no parecen darse cuenta de que el cambio de ejes representa la obtención de la función inversa porque no mencionan este hecho en ningún momento.

El cambio de ejes es algo que ya había aparecido previamente. En la actividad de *Muelle*, GM3 había representado, al contrario que sus compañeros, peso en el eje OY y longitud en el eje OX (Anexo VIII). Así, los cambios en la representación de los datos en cada uno de los ejes, vinculado a la función inversa, ha aparecido los dos años en que se realizó la experiencia. En el curso 2010-11, como una derivación de la forma en que se registraron los datos en la tabla de datos y, en el 2011-12, como forma de intentar superar la dificultad de obtener la función de ajuste. De hecho, recordemos que en la actividad de *Temperatura* dos grupos representan los tiempos en el eje de abscisas y los otros dos en el eje de ordenadas. Incidimos nuevamente en que, si los cuatro grupos hubiesen obtenido la función, la situación sería de dos grupos obteniendo un tipo de función y los otros dos obteniendo la inversa.

- En ocasiones, grupos diferentes llegan a usar la misma cantidad innecesaria de parámetros en el mismo tipo de función. Por ejemplo, GT1 y GT3 llegan a usar la función $f(x)=a\cdot log_b(x)\cdot c\cdot x$ en lugar de la equivalente $f(x)=a\cdot log_b(x)\cdot x$.

- Son frecuentes las menciones al óorigenô de la gráfica, al dominio de la función que están manejando, su recorrido, etc.

▪ La presencia de una asíntota (intuida en la nube de puntos) y el corte de la gráfica con el eje de abscisas, son razones aportadas para justificar la necesidad de usar una determinada función o desechar otra. De hecho, GT2 hace visible la gráfica de la función $k(x)=26$ en la pantalla mientras buscan la función adecuada, lo que representa una referencia clara a la necesidad de encontrar una función con una asíntota horizontal en *y=26*. La mención a la asíntota vuelve a aparecer en los comentarios de GT4, único grupo que estimó que había conseguido obtener la función de ajuste (Figura 56). En lo escrito por este grupo también aparece una referencia al recorrido de la función de proporcionalidad inversa, pero el hecho de que en la situación real no sean posibles los valores de temperatura negativos, les lleva a abandonarla como opción. La relación con lo anteriormente dicho sobre el debate que surge a raíz del comentario de A17 en el caso de *Aceite y agua* es evidente.

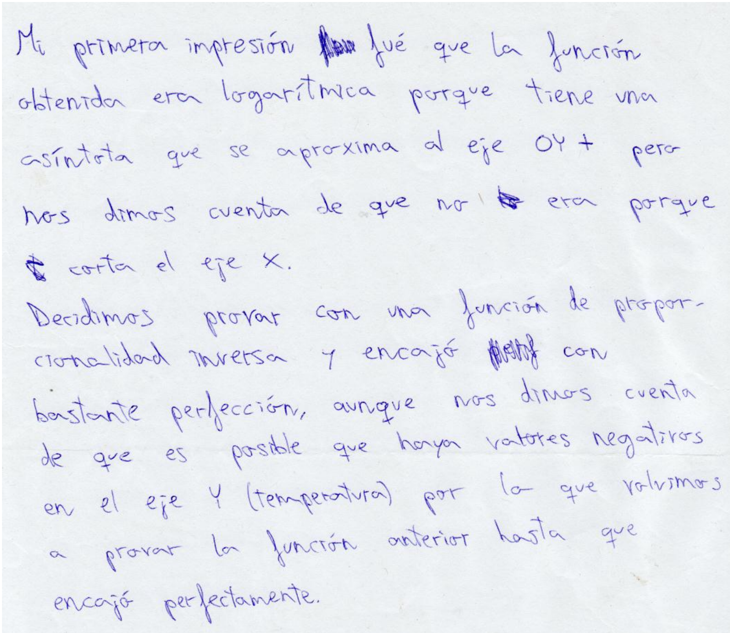

Mi primera impresión fué que la función
obtenida era logarítmica porque tiene una
asíntota que se aproxima al eje OY + pero
nos dimos cuenta de que no era porque
corta el eje x.
Decidimos provar con una función de propor-
cionalidad inversa y encajó con
bastante perfección, aunque nos dimos cuenta
de que es posible que haya valores negativos
en el eje Y (temperatura) por lo que volvimos
a provar la función anterior hasta que
encajó perfectamente.

Figura 56. Funciones usadas y razones aportadas por el grupo GT4 para usar la función logarítmica

Transcripción: ñ*Mi primera impresión fue que la función obtenida era logarítmica porque tiene una asíntota que se aproxima al eje OY+ pero nos dimos cuenta de que no era porque corta el eje x.*

*Decidimos probar con una función de proporcionalidad inversa y encajó con bastante perfección, aunque nos dimos cuenta de que es posible que haya valores negativos en el eje Y (temperatura) por lo que volvimos a probar la función anterior hasta que encajó perfectamente.***ò**

GT4 utiliza la función $f(x)=100-54.9\cdot\frac{log(2x)}{log(101)}$ $(f(x)=100-54.9\cdot log_{101}(2x))$. Recordemos que la Ley de enfriamiento de Newton es la siguiente: $T(x)=T_{ambiente}+\left(T_{inicial}-T_{ambiente}\right)\cdot e^{-kx}$, con k la constante de enfriamiento. En los comentarios del grupo (Figura 56) mencionan que su primera óimpresiónô fue que se trataba de una logarítmica pero, como la gráfica de la función logarítmica ñcorta el eje xò, en clara referencia a la gráfica que observan en la fotocopia que se les entregó, abandonan esa posibilidad. Después de probar con la función de proporcionalidad inversa, vuelven a la función logarítmica, de forma que el corte con el eje de abscisas ya no es un problema. La razón de ese cambio se encuentra en que en el proceso de obtención de la función de ajuste se han dado cuenta de que pueden desplazar la gráfica sumando o restando números en la expresión. La misma conclusión la podemos ampliar al resto de los grupos, a excepción de GT1. En las gráficas que entregan se observa la presencia de expresiones funcionales en las que aparecen parámetros multiplicando y sumando o restando.

- El hecho de que ningún grupo optase por introducir una exponencial de base menor que 1 (o por utilizar una expresión del tipo a^{-kx}), les impidió llegar a una expresión próxima a la Ley de Enfriamiento de Newton. De hecho, los estudiantes de GT3 mencionan la exponencial pero que ñno dio resultadoò (Figura 55).

Respecto a los grupos que estimaron que no habían logrado obtener la función, podemos obtener información sobre su valoración al respecto en las respuestas a las preguntas planteadas al término la fase de obtención de la función de ajuste (Anexo IV). En el siguiente apartado mencionamos aquello que nos parece más relevante de sus respuestas a esas preguntas.

4.3.3. Razones aportadas por los alumnos para no haber conseguido obtener la función en *Temperatura*. Soluciones que incluyen para superar esa dificultad

En este apartado haremos referencia preferentemente a los estudiantes de los grupos GT1, GT2 y GT3 (17 alumnos). GT4 es el único que aporta una función como resultado correcto, pero ese grupo solo está formado por dos personas (A18 y A25). La razón por la cual el grupo GT4 esté formado sólo por dos alumnos frente a los 5, 7 y 5 que forman GT1, GT2 y GT3, respectivamente, fue mantener la composición de los grupos cuya actividad fue grabada en audio y vídeo (GT1 y GT3).

De sus respuestas resaltamos lo siguiente:

- No conseguir obtener la función es percibido, en general, como un fracaso.

En la búsqueda de una razón del fracaso, 6 alumnos (A2, A10, A11, A12, A13 y A19, 35.3%) lo atribuyen a una deficiente toma de datos (Figura 57). A12, A19 y A22 incluyen defectos en el uso de los instrumentos o la posibilidad de usar un instrumento de medida diferente.

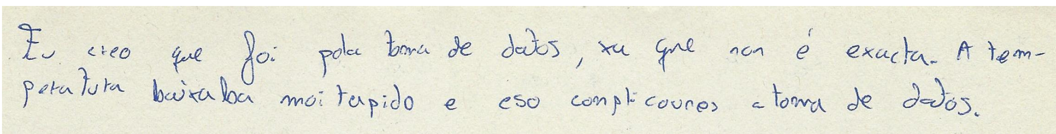


Figura 57. Alumno A11. La toma de datos como razón para no conseguir obtener la función.

Transcripción: ***ñ****Yo creo que fue por la toma de datos, ya que no es exacta. La temperatura bajaba muy rápido y eso nos complicó la toma de datos.***ò**

Por el contrario, 5 alumnos (A1, A3, A5, A6 y A9; 29.4%) opinan expresamente que los datos han sido tomados correctamente, por lo que el fracaso no se encuentra en la toma de datos. Por ejemplo, A6 se refiere a las otras dos actividades para justificarlo (Figura 58).


2) No, porque en los otros experimentos utilizamos medidas aproximadas y conseguimos concretar el tipo de gráfica.

Figura 58. Alumno A6. La toma de datos no es la razón de no obtener la función.

Transcripción: **ñ***No, porque en los otros experimentos utilizamos medidas aproximadas y conseguimos concretar el tipo de gráfica.***ò**

Asume que los datos obtenidos experimentalmente son aproximados en todos los casos, por lo que no hay razón para que las deficiencias de la toma de datos deban ser valoradas de forma diferente en *Muelle* y *Aceite y agua* que en *Temperatura*.

A5, A6, A8, A9 y A15 (29.4%) atribuyen no haber sido capaces de obtener la función por carecer de los conocimientos necesarios o por la de falta de recursos necesarios o adecuados (Figura 59).

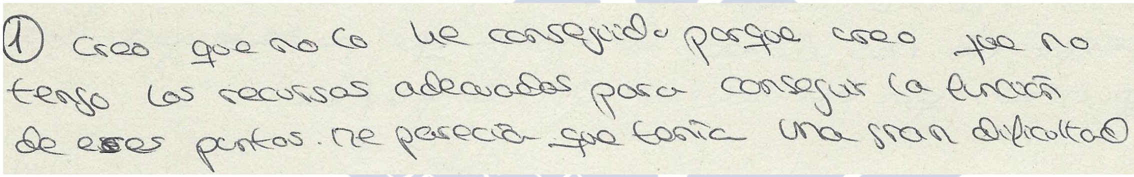

1) Creo que no lo he conseguido porque creo que no tengo los recursos adecuados para conseguir la función de esos puntos. me parecía que tenía una gran dificultad

Figura 59. Alumno A8. Falta de recursos como razón para no obtener la función.

Transcripción: **ñ***Creo que no lo he conseguido porque creo que no tengo los recursos adecuados para conseguir la función de esos puntos. Me parecía que tenía una gran dificultad.***ò**

Se refieren de forma evidente a deficiencias en su formación en relación a cómo varía la gráfica de una función al introducir en la expresión funcional parámetros sumando, restando, multiplicando, etc. De hecho, A7, A8, A14 y A15 se refieren expresamente a sus dificultades para decidir qué parámetros usar, cómo usarlos (si sumando, multiplicando, etc.) y qué repercusión tiene la introducción de un parámetro en la gráfica de la función (Figura 60).

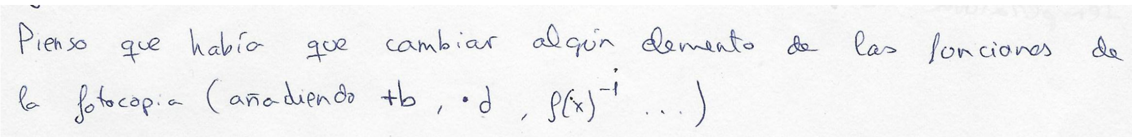

Pienso que había que cambiar algún elemento de las funciones de la fotocopia (añadiendo +b, $\cdot d$, $f(x)^{-1}$ ...)

Figura 60. Alumno A15. Introducción de nuevas funciones en las fotocopias.

Transcripción: **ñ***Pienso que había que cambiar algún elemento de las funciones de la fotocopia (añadiendo +b, ·d , $f(x)^{-1}$ …)***ò**

- En general, son conscientes de que introducir parámetros en la expresión funcional modifica la gráfica.

De hecho, eso es lo que hicieron previamente en *Muelle* y *Aceite y agua* con éxito. El problema es que no han descubierto cómo introducir los parámetros para obtener la gráfica que buscan introducir. Ante la dificultad, acuden a su falta de conocimientos sobre la influencia de la introducción de parámetros en la gráfica. Esa es la razón de que A15 proponga como solución al problema incluir nuevas gráficas de funciones en la fotocopia de la que disponen (Figura 60). Indica claramente que añadir en las fotocopias gráficas de las funciones fundamentales, con parámetros introducidos, les hubiese ayudado a conseguir obtener la función. En definitiva, propone que la fotocopia incluya un número grande de gráficas de funciones que ilustre de qué forma una gráfica se ve variada al introducir parámetros en la expresión funcional.

Es decir, si conociesen qué parámetros introducir y en qué forma introducirlos, hubiesen obtenido la gráfica correcta y, por tanto, la función de ajuste. A14, hace referencia a lo mismo (Figura 61).

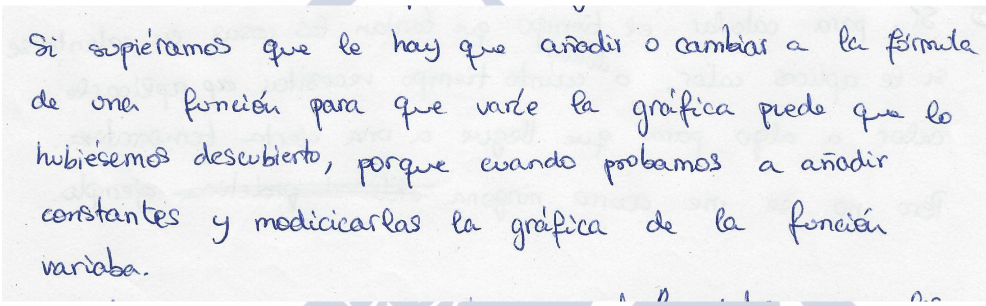

Si supiéramos que le hay que añadir o cambiar a la fórmula
de una función para que varíe la gráfica puede que lo
hubiésemos descubierto, porque cuando probamos a añadir
constantes y modicicarlas la gráfica de la función
variaba.

Figura 61. Alumno A14. Introducción de nuevas funciones en las fotocopias.

Transcripción: **ñ***Si supiéramos qué le hay que añadir o cambiar a la fórmula de una función para que varíe la gráfica puede que lo hubiésemos descubierto porque cuando probamos a añadir constantes y modificarlas la gráfica de la función variaba.***ò**

Se trata, en definitiva, de una propuesta de los alumnos para evitar las dificultades a la hora de resolver un problema. La cuestión de fondo, desde el punto de vista del profesor, es que debe decidir qué información suministrar al estudiante en una situación de bloqueo o punto muerto. Por un lado, la actividad de modelización debe poseer características de un problema para poder hablar de óSituación real y problemaô, de óModelo real y problemaô o de óProblema en su contextoô. Por otro lado, las dificultades pueden llevar a bloqueos y puntos muertos, lo que hace necesario limitar la dificultad inherente al problema.

Para el profesor resulta tentador suministrar al estudiante claves de resolución del problema al encontrarse éste con dificultades, pero ello conlleva la pérdida de autonomía del alumno. En el momento en que el estudiante no posee recursos para avanzar o plantear nuevas vías de solución, el profesor puede verse tentado a asumir un rol de transmisor del conocimiento al proponer una vía de solución. En ese momento, si el docente no limita ese rol de transmisor, siendo consciente y conocedor de las repercusiones de su aportación, transforma al alumno en un observador de su trabajo y en un ejecutor de sus indicaciones. Nos volvemos a encontrar con la toma de decisiones que debe tomar el profesor, los dilemas a los que se enfrenta, la impredicibilidad y apertura de las actividades de modelización, etc.

A5 y A6 atribuyen a deficiencias en el uso del programa GeoGebra no haber conseguido la función de ajuste y a que las funciones contenidas en la fotocopia que manejaron no se adaptan al experimento. Mencionan que era preciso modificarlas de alguna forma que desconocen, en relación clara a lo que hemos comentado anteriormente.

- Los alumnos hacen referencia a la presencia de una asíntota.

A1, A3, A4, A6, A11, A15 y A16 (41.2%), mencionan expresamente que la asíntota representó una dificultad que les impidió obtener la función. Asociado a la dificultad que representó la asíntota, A4, A14 y A19 proponen repetir el experimento en condiciones en que la temperatura ambiente sea de 0 C° o por debajo de 0 C° (Figura 62).

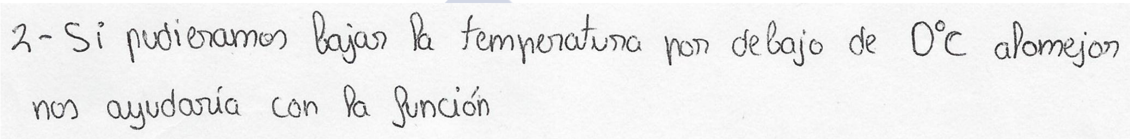

2- Si pudieramos bajar la temperatura por debajo de 0°C alomejor nos ayudaria con la función

Figura 62. Alumno A19. Propuesta de repetir la experiencia a una temperatura inferior a 0°

Transcripción: ñ*Si pudiéramos bajar la temperatura por debajo de 0° C, a lo mejor nos ayudaría con la función.*ò

A4 nos proporciona claramente la conexión entre la dificultad asociada a la presencia de una asíntota y la propuesta de repetir la experiencia a 0° de temperatura ambiente (Figura 63).

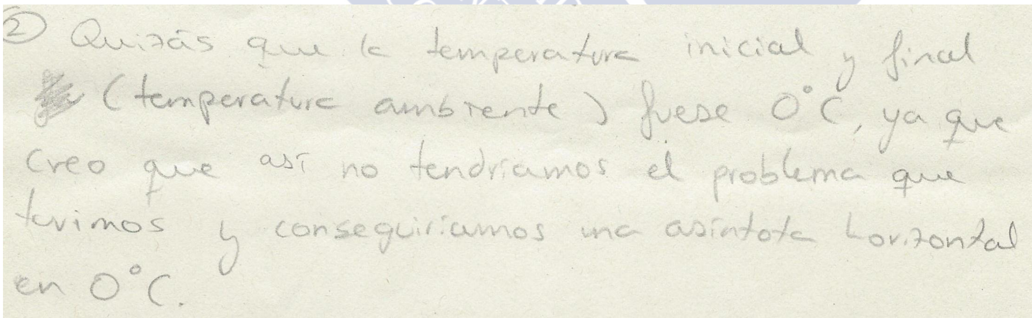

② Quizás que la temperatura inicial y final (temperatura ambiente) fuese 0°C, ya que creo que así no tendríamos el problema que tuvimos y conseguiríamos una asíntota horizontal en 0°C.

Figura 63. Alumno A4. Razón, vinculada a la existencia de una asíntota, para repetir la experiencia a una temperatura inferior a *0°*

Transcripción: ñ*Quizás que la temperatura inicial y final (temperatura ambiente) fuese 0°C, ya que creo que así no tendríamos el problema que tuvimos y conseguiríamos una asíntota horizontal en 0°C***ò**

En definitiva, su prioridad es obtener un resultado matemático, identificado con la obtención de la función de ajuste. Si para obtener el resultado matemático es necesario variar los datos, la vía para obtener dicho resultado será variarlos. Se abandona la cuestión inicial (obtener un modelo matemático de cómo varía la temperatura en función del tiempo) por la necesidad de que el resultado que han obtenido se corresponda con un problema a solucionar. Es decir, la obtención de un modelo matemático que represente un modelo real del fenómeno físico ya no es el fin de la actividad. El fin ha cambiado en función de un objetivo nuevo. Así, se propone la continuación de la actividad, generando nuevos datos, que les lleven al resultado matemático que son capaces de obtener. Eso conlleva variar las condiciones iniciales de la toma de datos pero permite que el resultado matemático represente un modelo de una situación real. Se da, por tanto, una situación cuando menos curiosa: proponen variar el ciclo de modelización. La situación o problema real se determina en función del resultado que son capaces de obtener. Su propuesta, en definitiva y en términos del ciclo de Blum y Leiss (Figura 5), representa que los procesos de interpretación y validación del resultado matemático obtenido conllevan el planteamiento de una nueva situación o problema real y la realización de los procesos subsiguientes hasta obtener el resultado real, prefijado por haber sido obtenido previamente. Si hablamos en términos del ciclo de matematización de PISA (Figura 11), proponen que un resultado matemático conlleve u origine un problema en su contexto.

Dicho de otro modo, proponen que se fije qué situación o problema real modelizar a partir de aquello que *saben hacer*.

La situación no es nueva para los alumnos. Proponer problemas que pueden ser resueltos con técnicas algorítmicas aprendidas previamente ha sido y es usual. Además, es fácil observarlo como base metodológica de muchos textos escolares. En definitiva, la propuesta de estos estudiantes no es tan extraña o rara. Simplemente es más llamativa, aunque en el fondo se encuentre la misma idea: plantear problemas en función de que el proceso de obtención de la solución del problema es conocido de antemano.

- En ocasiones, para ilustrar la gráfica que buscan y la presencia de la asíntota, utilizan gráficos descriptivos (A1, A6, A7, y A14, Figura 64)

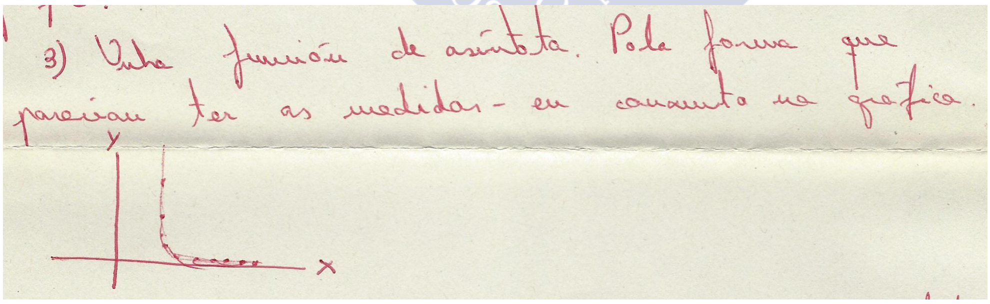


Figura 64. Influencia de la presencia de una asíntota. Gráfico aportado por el Alumno A6

Transcripción: **ñ***Una función de asíntota. Por la forma que parecían tener las medidas en conjunto en la gráfica.***ò**

En el gráfico que aporta A1 (Figura 65), incluye una propuesta para evitar el problema de la existencia de una asíntota correspondiente con la temperatura ambiente.

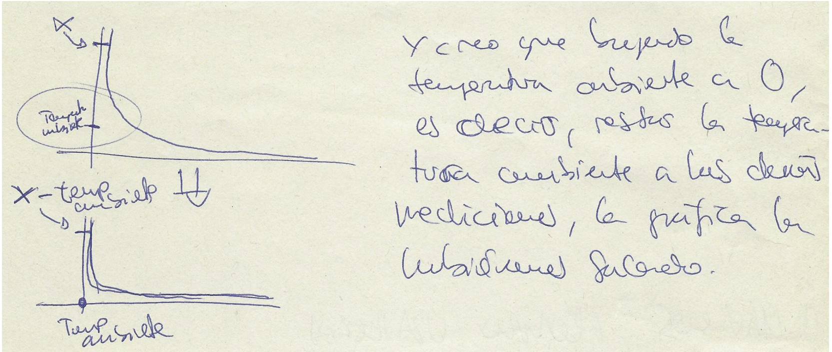


Figura 65. Gráfico aportado por el Alumno A1

Transcripción: ***ñ****Y creo que bajando la temperatura ambiente a 0, es decir, restar la temperatura ambiente a las demás mediciones, la gráfica la hubiésemos sacado.****ò***

El grupo de trabajo al que pertenecía A1 (grupo GT1) no intentó llevar a cabo la idea que propone (Figura 65). Con seguridad, la idea se le ocurrió a posteriori del trabajo con el ordenador y consiste en un método para que la asíntota intuida en la nube de puntos pase a tomar un valor de $y=0$. Es decir, en vez de proponer que la temperatura ambiente sea 0 C°, como hemos visto que hacen algunos de sus compañeros, propone modificar la forma de registrar los datos en la tabla de datos, restando la temperatura ambiente a todos los datos de temperatura. De esa forma, la temperatura límite pasa a ser 0 C°. La razón para realizar ese cambio en la tabla de datos, es que si la función que busca poseyese una asíntota en $y=0$, cree que podría conseguir la función adecuada. De esa forma conseguiría que los puntos observados en pantalla se puedan ajustar con mayor facilidad con alguna de las gráficas de las funciones de la fotocopia (no propone ninguna en concreto). Confunde la temperatura ambiente con la temperatura que pasaría a ser el límite de temperaturas de su tabla de datos. Tampoco se da cuenta de que lo que pretende lo puede conseguir sumando la temperatura ambiente a la expresión funcional.

Por ejemplo, la función $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ que observa en las fotocopias, posee una asíntota en y=0 pero $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+21$ tiene una asíntota en $y=21$.

- Sin llegar al extremo de proponer repetir la toma de datos a 0 C° de temperatura, la solución que aportan A2, A10, A11 y A12 también pasa por tomar nuevamente los datos, intentando mejorar la exactitud en la toma de medidas. En relación con esta opinión se encuentra lo expresado por A22, que propone cambiar de termómetro.

- En ocasiones identifican la expresión de la función con una ecuación.

A3, A4 y A7 se refieren a la ófórmula de la ecuaciónô o œcuación correctaô (Figura 66).

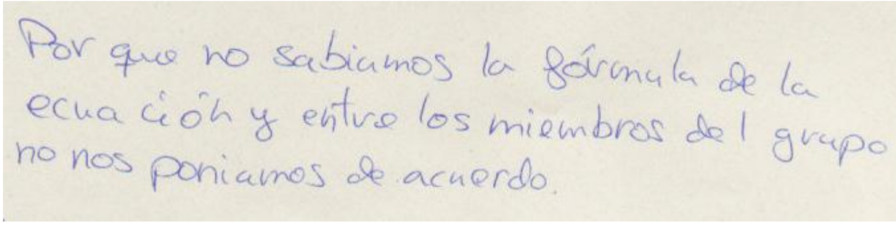


Figura 66. Alumno A3. La expresión funcional como fórmula de una ecuación

Transcripción: **ñ***Porque no sabíamos la fórmula de la ecuación y entre los miembros del grupo no nos poníamos de acuerdo***ò**.**ò**

- Respecto al tipo de función que creen que es la adecuada para realizar el ajuste, una parte importante de alumnos (A2, A4, A5, A10, A11, A12 y A22, 41.2%,) mencionan la función de proporcionalidad inversa, que describen en sus comentarios como la función $f(x)=\frac{k}{x^n}$. Sólo A5 menciona que n debe ser un número natural (ñ$n \in \mathbb{N}$ò). A12 se refiere a la función como de ñproporción de la inversaò y A11 justifica su respuesta por la presencia de asíntotas en la gráfica de la función de proporcionalidad inversa. También mencionan la presencia de asíntotas A6 y A11 que, sin indicar una función concreta, dicen que la función de ajuste debe ser una función ñcon asíntotaò. Como se observa, la importancia concedida a la presencia de una asíntota se repite una y otra vez.

- Esta mención a la asíntota nos lleva a pensar que se mueven fundamentalmente en el seno del mundo de las matemáticas pero de forma que el mundo real se halla muy presente. Mayoritariamente utilizan términos y referencias propias del mundo de las matemáticas, pero si acudimos a la importancia que conceden a la asíntota, existe un referente claro al mundo real. Vinculan claramente la asíntota con la temperatura ambiente. En la función, la temperatura ambiente representa un valor límite, mientras que en la situación real la temperatura ambiente se alcanza al cabo de unos minutos. Así, asumen que el modelo que pueden obtener representa una aproximación a un modelo ideal.

En el modelo ideal la temperatura ambiente no es un valor límite, mientras que en el modelo que los alumnos podrían obtener, la temperatura ambiente se corresponde con el valor k de la asíntota $y=k$, que, por otro lado, se corresponde con el valor del límite $\lim_{x\to\infty} f(x)$, siendo f la función que han intentado obtener como modelo matemático. Resaltamos que a pesar de hablar de asíntotas, ningún alumno escribe o hace referencia expresa al límite de la función en el infinito o a la temperatura ambiente como valor límite.

- A7, A14 y A17 opinan que la función debe ser una función logarítmica. A14 y A17 explican que debe tratarse de la función logarítmica, acudiendo al dominio de definición de la función logarítmica y que en el problema no existen tiempos negativos. A7 lo justifica porque ñla exponencial no corta el eje xò. A8 y A9 proponen también la función logarítmica pero añaden la función exponencial como posibilidad. A19 propone una función óparecidaô a la exponencial (Figura 67).

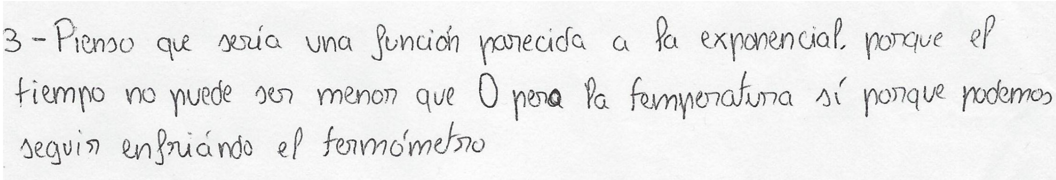


Figura 67. Alumno A19. Vinculación de lo matemático con lo real

Transcripción*:* ***ñ****Pienso que sería una función parecida a la exponencial porque el tiempo no puede ser menor que 0 pero la temperatura sí porque podemos seguir enfriando el termómetro****ò***

Así, la función, su dominio, sus características gráficas, etc. (propias del mundo de las matemáticas), se mencionan en unión a la situación o problema real en contexto.

A14 dice que la función es la raíz cuadrada pero ñelevada a menos 1ò y A22 la raíz cuadrada pero ñcambiándole el sentidoò. A22 explica a qué se refiere incluyendo un gráfico para ilustrar qué quiere decir (Figura 68).

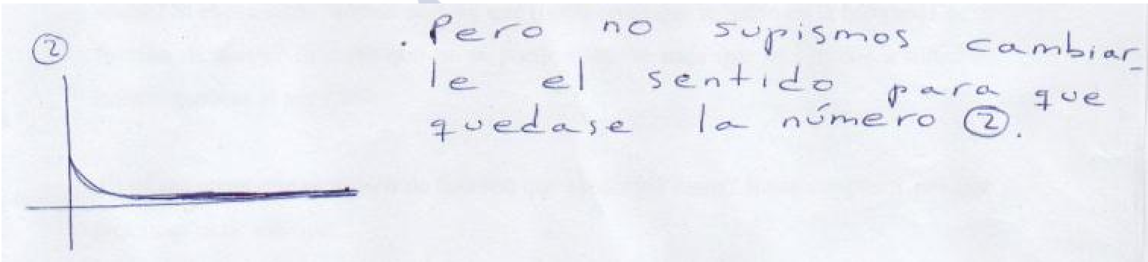


Figura 68. Alumna A22. Propuesta de la raíz cuadrada *cambiada de sentido* como función adecuada

Transcripción*:* ***ñ****Pero no supimos cambiarle el sentido para que quedase la número 2.****ò***

Los alumnos habían estudiado la aplicación de la derivada en el estudio gráfico de funciones, incluyendo la monotonía y la curvatura. A22 no menciona el ócambio de sentidoô en términos de crecimiento y decrecimiento o de concavidad y convexidad, sino que utiliza como referente descriptivo un gráfico. Este hecho lleva a pensar que en esta alumna predomina el estilo de pensamiento visual descrito por Borromeo y Blum (2010) y que se observa también en otros estudiantes que usan gráficos (A1, A6, A7, A14; Figuras 64 y 65).

- Respecto a los dos integrantes del grupo que estimó que había conseguido un ajuste de datos (A18 y A25, grupo GT4), lo que nos parece más destacable es la diferencia de interpretación del resultado de uno y otro. Esto da también idea de la complejidad que conlleva el análisis de las respuestas, vinculada por otro lado, al planteamiento realizado de las tres modelizaciones. La impredecibilidad y la actividad de modelización como actividad abierta (Blum y Borromeo, 2009; Doerr, 2006) representa en nuestro caso un problema de cara al análisis de resultados. En el caso de un profesor, como ya hemos resaltado con anterioridad y es destacado desde la investigación sobre modelización matemática en la enseñanza, representa un obstáculo para la introducción de la modelización en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Ambos estudiantes interpretan las variables presentes en contexto pero la interpretación de la función varía. En su respuesta a la segunda pregunta, (Anexo IV, ñ2. ¿Qué variables son objeto de estudio en la experiencia?ò), se observa que los dos consideran las variables físicas (tiempo y temperatura) como variables funcionales, Figuras 69 y 70).

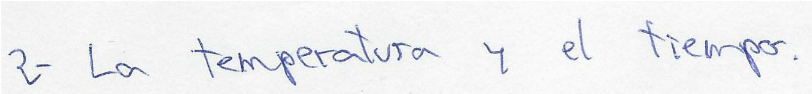

2- La temperatura y el tiempo.

Figura 69. Alumno A18. Variables presentes en la función

Transcripción: **ñ***La temperatura y el tiempo***ò**

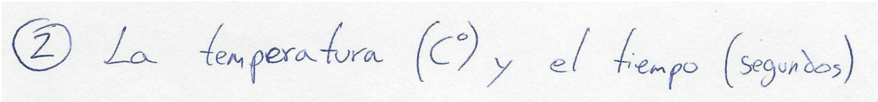

(2) La temperatura (C°) y el tiempo (segundos)

Figura 70. Alumno A25. Variables presentes en la función

Transcripción: **ñ***La temperatura (℃) y el tiempo (segundos)***ò**

Su respuesta es acorde con aquello que se les pregunta y la sitúa en el contexto real o físico.

El hecho de que no mencionen las variables matemáticas *x* e *y*, los sitúa en la interpretación de la función en el contexto real, de forma que relacionan el tiempo transcurrido con la temperatura alcanzada. Esa interpretación de la función debería conllevar limitar el dominio y recorrido de la función que obtienen ($f(x)=100-54.9\cdot log_{101}(2x)$). Así, el dominio de la función matemática es $(0,+\infty)$ y su recorrido $\mathbb{R}$ pero el dominio y el recorrido de la función interpretada en el contexto del fenómeno físico se ve limitada. El dominio incluye tiempos desde 0 segundos hasta el instante en que se alcanza la temperatura ambiente. El recorrido, desde la temperatura ambiente hasta los 100 °C. Al ser preguntados sobre qué temperatura podría alcanzar el termómetro antes de enfriarse (Anexo IV, pregunta 4), cuál es el intervalo de tiempo de enfriamiento (pregunta 5) y en qué momento deja de enfriarse el termómetro (pregunta 6), los dos alumnos interpretan el resultado matemático obtenido de forma muy diferente (Figuras 71 y 72).

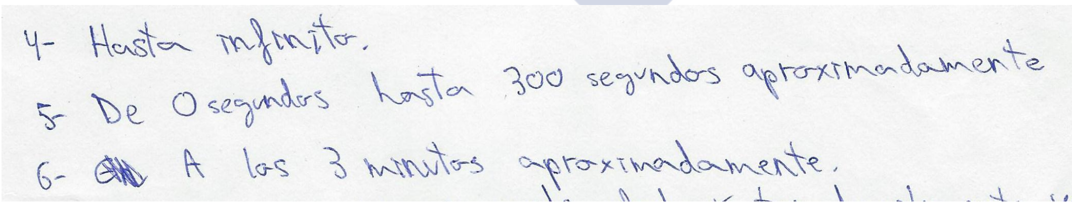

4- Hasta infinito.
5- De 0 segundos hasta 300 segundos aproximadamente
6- A los 3 minutos aproximadamente.

Figura 71. Alumno A18. Respuestas a las preguntas 4, 5 y 6 de *Temperatura*.

Transcripción: ñ*4. Hasta infinito. 5. De 0 segundos hasta 300 segundos aproximadamente. 6. A los tres minutos aproximadamente*.ò

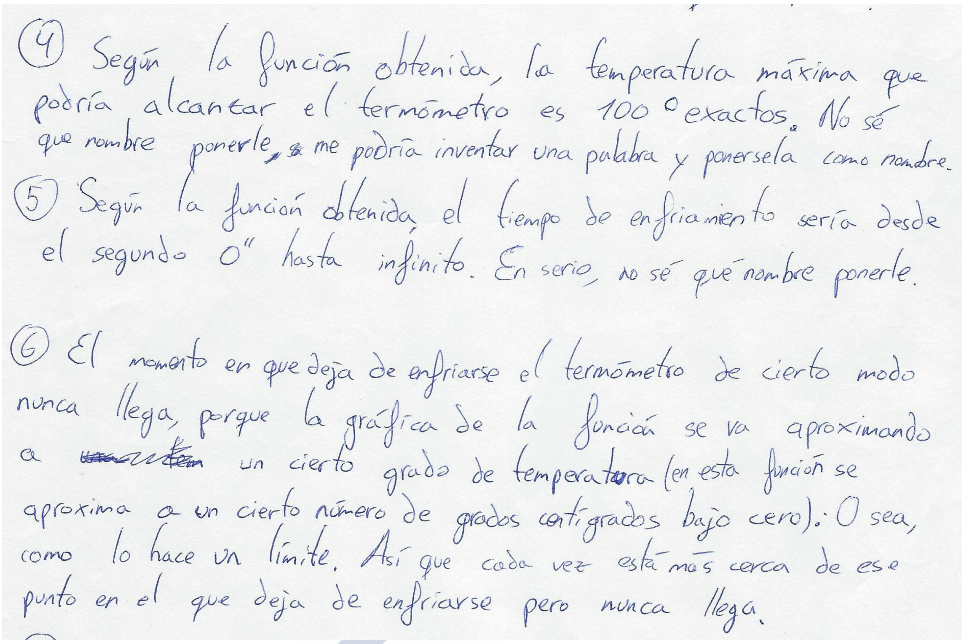

(4) Según la función obtenida, la temperatura máxima que podría alcanzar el termómetro es 100 º exactos. No sé que nombre ponerle, me podría inventar una palabra y ponersela como nombre.
(5) Según la función obtenida el tiempo de enfriamiento sería desde el segundo 0" hasta infinito. En serio, no sé qué nombre ponerle.
(6) El momento en que deja de enfriarse el termómetro de cierto modo nunca llega, porque la gráfica de la función se va aproximando a un cierto grado de temperatura (en esta función se aproxima a un cierto número de grados centígrados bajo cero). O sea, como lo hace un límite. Así que cada vez está más cerca de ese punto en el que deja de enfriarse pero nunca llega.

Figura 72. Alumno A25. Respuestas a las preguntas 4, 5 y 6 de *Temperatura*.

Transcripción: ñ*4. Según la función obtenida, la temperatura máxima que podría alcanzar el termómetro es 100 º exactos. No sé qué nombre ponerle, me podría inventar una palabra y ponérsela como nombre.*

*5. Según la función obtenida, el tiempo de enfriamiento sería desde el segundo 0***ò** *hasta infinito. En serio, no sé qué nombre ponerle.*

*6. El momento en que deja de enfriarse el termómetro en cierto modo nunca llega, porque la gráfica de la función se va aproximando a un cierto grado de temperatura (en esta función se aproxima a un cierto número de grados centígrados bajo cero). O sea, como lo hace un límite. Así, que cada vez está más cerca de ese punto en el que deja de enfriarse pero nunca llega.***ò**

Para responder sobre el intervalo de tiempo de enfriamiento, A18 utiliza datos de su tabla de datos (300 segundos, valor próximo a los 282 segundos, que representa el último registro de su tabla de datos). Para indicar en qué momento deja de enfriarse, contesta que tres minutos (180 segundos), momento que se corresponde con el instante en el que la temperatura decrece con más lentitud. Por tanto, en las preguntas 5 y 6 no usa la función, sino que recurre a la tabla de datos o a la tendencia de los puntos visibles en el plano cartesiano. A25, por el contrario, usa y menciona la función para contestar a las tres preguntas. Aunque utiliza la función matemática para responder, es consciente de que la función debe ser limitada en su dominio y recorrido. Así, habla de una temperatura máxima de 100 grados (limitando el recorrido de la función matemática al primer dato de temperatura que usaron) pero afirma, al mismo tiempo, que el momento en que el termómetro deja de enfriarse no llega nunca y que alcanzará un ñcierto número de grados centígrados bajo ceroò. Para justificar su respuesta, utiliza como referencia el valor límite en el infinito de la función. No calcula el valor del límite, por lo que no determina su valor, optando por referirse a él como un valor sin determinar. Así, A25 interpreta el resultado como matemático o como real, en función de si se sitúa en el mundo real o en el mundo matemático. De esta forma, utiliza el resultado real o el matemático (tabla de datos o función) para realizar la interpretación que se le solicita.

A diferencia de A25 y, a pesar de que en las preguntas se incluye expresamente que interpreten su respuesta en el contexto de experimento, A18 ni siquiera lo intenta.

Destacamos que ninguno de los dos alumnos indica qué parámetros se hallan presentes en la función (Anexo IV, pregunta 3).

El fracaso que supone para los integrantes de GT1, GT2 y GT3 no haber obtenido una función de ajuste de los datos en el caso de *Temperatura*, puede ser interpretado como un fracaso de la propuesta de la actividad. Que sólo un grupo haya conseguido una función de ajuste de los datos (según la valoración de los dos alumnos del grupo), puede llevar a pensar que el grado de dificultad era excesivo. Como hemos indicado, se procuró limitar el grado de dificultad introduciendo parámetros multiplicando en las expresiones de las funciones (Anexo I). La introducción de esos parámetros no parece haberles ayudado, en general, a determinar la función correcta, con lo que puede parecer que la limitación del grado de dificultad no ha sido suficiente.

En realidad, la razón de que no consigan determinar la función no se encuentra en que en las funciones del Anexo I no aparezcan parámetros sumando y restando. Como se observa en las capturas de pantalla de los archivos GeoGebra que entregan, introducen parámetros sumando y restando. De hecho, en algunos de sus comentarios, hacen mención expresa a la necesidad de introducir parámetros sumando o restando (Figura 58). Sus dificultades, como ellos mismos señalan, se encuentran en desconocer o no dominar qué efectos tiene añadir un parámetro multiplicando o sumando sobre la gráfica de una función. Esas deficiencias, las denominan como ócarencias en su formaciónô (Figura 57). En definitiva, el problema se encuentra en que han aprendido con anterioridad a interpretar y a obtener la gráfica de una función concreta pero no a observar cómo cambia la gráfica de una función al variar un parámetro que se ha introducido previamente. Esa variación de la gráfica la han observado en el caso de *Aceite y agua* con la función $f(x) = k \cdot \sqrt{x},\ k \in \mathbb{R}$ pero no ha sido suficiente en el caso más complejo de *Temperatura*.

En resumen, si se fija como objetivo de la modelización que los alumnos obtengan una función de ajuste de datos en un caso complejo como *Temperatura*, es imprescindible dotarles de recursos que no son un objetivo en el actual modelo de enseñanza. Si acudimos al Real Decreto de aprobación reciente (Real Decreto 1105/2014), en el que la modelización toma protagonismo, no se observa ningún punto que lleve a pensar que esos conocimientos que precisan las actividades de modelización sean una prioridad u objetivo de enseñanza. Así, la introducción de la modelización en la enseñanza de las matemáticas en España representa para el profesor un reto en muchos sentidos. Entre ellos, se encuentran las necesidades concretas del proceso formativo del alumno encaminadas a que las actividades de modelización como *Temperatura* no estén destinadas al fracaso con motivo de la falta de ñrecursos adecuadosò (Figura 59).

Como veremos en el análisis de las respuesta a las preguntas en las modelizaciones de *Muelle* y *Aceite y agua*, muchos de los elementos comentados en *Temperatura* volverán a aparecer. Antes de analizar dichas respuestas, incluimos a continuación algunas consideraciones sobre la obtención de datos y sobre la función de ajuste, visto de forma conjunta, en *Muelle* y *Aceite y agua*.

4.3.4. El ciclo de modelización en la obtención del modelo matemático en *Muelle* y *Aceite y agua*

Si se restringen las actividades de *Muelle* y *Aceite y agua* a lo realizado por los alumnos hasta este momento, lo cierto es que generan un modelo matemático que relaciona las dos variables físicas presentes en el fenómeno (peso/masa-longitud; tiempo-temperatura). Para obtener la expresión matemática que relaciona ambas variables, han desarrollado un proceso que incluye los pasos de *Construcción*, *Simplificación/estructuración*, *Matematización*, *Trabajo matemático* e *Interpretación*. La *Validación* del modelo se desarrolla durante algunos de los procesos anteriores, especialmente durante el proceso de trabajo matemático de obtención de la función de ajuste. Es decir, el modelo es válido por el simple hecho de que la función o expresión matemática que obtienen ajusta los datos generados experimentalmente con anterioridad (Figura 73).

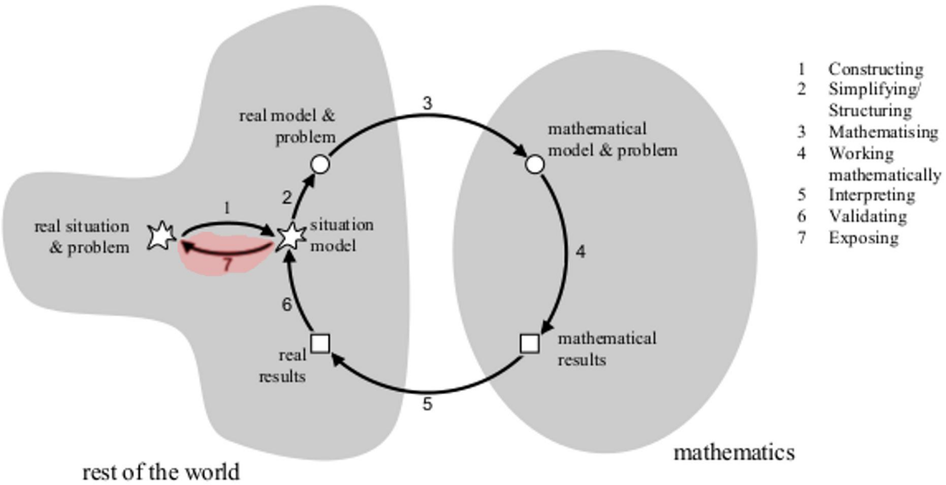


Figura 73. Pasos desarrollados del ciclo de Blum y Leiss en las dos primeras fases

Se asume que el paso de *Exposición* no se ha desarrollado porque, hasta ese momento, no formaba parte de los objetivos. Los alumnos obtienen el resultado real (la función de ajuste), pero no han realizado ningún tipo de actividad que represente la integración del modelo matemático en la situación real original. Evidentemente, la integración del modelo en la situación original es, en este caso, prácticamente equivalente a la interpretación del modelo en la situación a modelizar original. La razón es que la situación real y problema se corresponde de forma casi automática con la situación a modelizar. El planteamiento de la actividad, que parte de la recogida de datos de cómo varía la longitud al colgarle un peso/masa al muelle y cómo varía el diámetro de una mancha de aceite al añadir un determinado volumen de aceite, identifican la situación real con la situación a modelizar. De hecho, el proceso de *Construcción* no precisa, en realidad, que el estudiante desarrolle ninguna actividad concreta. Lo mismo podríamos decir de la *Simplificación/Estructuración*.

Los alumnos obtienen datos y los vuelcan en una tabla de dos columnas. Este hecho, simple aparentemente, conlleva una primera matematización. De hecho, da lugar a una primera representación del concepto de función: óTabularô. También se halla relacionada con la primera concepción histórica del concepto de función: óIdentificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variablesô, asociado a la construcción de tablas de datos.

El hecho de que los integrantes de GA1 y GA4 escriban flechas entre los datos de la tabla de datos significa una forma expresa de establecer relaciones entre ellos, o lo que es lo mismo, entre variables (Figura 40; Anexo VII). La flecha indica, al mismo tiempo, una relación de dependencia, por lo que se puede argumentar que en ese momento ya establecen cuál es la variable independiente y cuál la dependiente. El establecimiento de la variable independiente y dependiente se realiza en el resto de los grupos de forma implícita porque utilizan la forma usual de establecer la vinculación de los datos de una tabla con una variable independiente y dependiente: los valores correspondientes a la independiente a la izquierda y los de la dependiente a la derecha. De hecho, GM5 identifica los valores mediante la forma usual de escribir las variables independiente y dependiente: x e y (Anexo VII). GA4 resalta la escritura de los valores de las variables independiente y dependiente en columnas ordenadas. Ese grupo escribe una flecha de derecha a izquierda (Anexo VII). La razón es que han escrito los valores de la variable dependiente en la columna de la izquierda y los de la independiente en la derecha. Como esa ordenación de columnas no es la usual, incluyen la flecha como forma de modificación del orden de lectura de los datos.

Además, la matematización en la primera fase establece ya relaciones entre el mundo de las *matemáticas* y el *Resto del mundo*. Como hemos mencionado, GM5 describe las variables como x e y en vez de como peso y longitud, lo que indica que identifican las variables físicas como variables matemáticas.

En la segunda fase, se produce una segunda matematización al considerar los datos como pares y estos como puntos del plano. Al buscar y generar la función de ajuste también se establece que existe una expresión matemática que relaciona las variables. Las variables, ahora matemáticas, se representan por x y $f(x)$ o y. La obtención de la función o expresión matemática que establece el tipo de relación entre las variables se realiza mediante un proceso de *Trabajo matemático*. Mediante la introducción de parámetros, se identifica la expresión matemática correcta y la determinación de su valor concreto. La obtención de la función o expresión matemática proporciona el modelo matemático, que por identificación de las variables matemáticas con las físicas, representa también el modelo real. En esta parte, por tanto, se hallan presentes las representaciones gráfica y expresión analítica del concepto o noción de función y las concepciones históricas de la función como gráfica, curva, expresión analítica e, incluso, como correspondencia arbitraria o aplicación.

A pesar de lo indicado por el profesor como objetivo de la actividad, GM1 y GM6 no establecen una relación funcional entre las variables. GM1 obtiene la recta que pasa por dos puntos concretos y GM6 modifica parámetros a y b en la expresión $y=ax+b$. Puede parecer que el hecho de que ambos grupos establezcan una relación del tipo $y=0.02x+9.7$ en vez del tipo $f(x)= ax+b$ constituya una cuestión menor. Los alumnos de esos grupos, al fin y al cabo, establecen una relación entre variables matemáticas/físicas, lo que representa un modelo matemático y real aunque no sea de tipo funcional. De hecho, es común en las aulas de ESO y Bachillerato enunciar las funciones de la forma ñy=ò. En definitiva, se puede argumentar que lo importante es que establezcan una expresión matemática que relaciona las variables presentes en la tabla de datos y eso lo consiguen con bastante éxito, aunque lo que obtengan sean rectas en vez de funciones. Incluso se puede afirmar que todos los grupos óson competentesô obteniendo un modelo matemático. Si acudimos al ciclo de matematización de PISA, que incluimos a continuación reducido a los elementos del ciclo y sus relaciones (Figura 74), los alumnos desarrollan un proceso de matematización completo de un problema en su contexto.

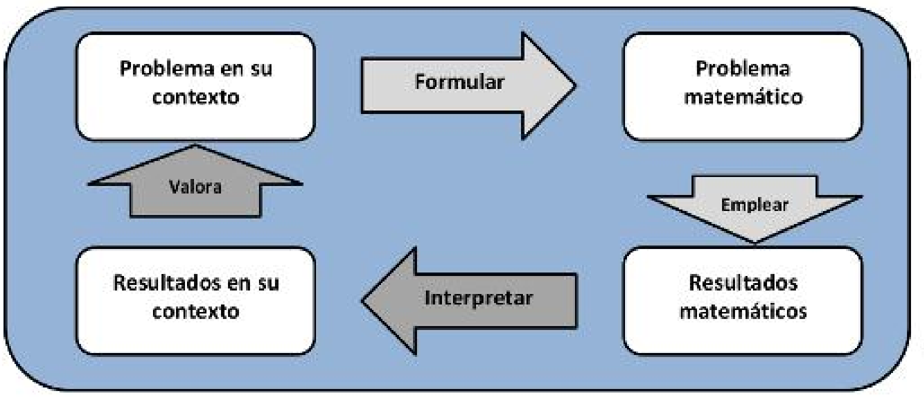


Figura 74. Ciclo de matematización de PISA (Figura recortada de la Figura 11)

Los estudiantes parten del problema en su contexto, formulan el problema matemático (obtener la expresión matemática que relaciona las variables físicas), emplean los recursos matemáticos de los que disponen para obtener el resultado matemático (la expresión matemática que relaciona ambas variables) e interpretan dicho resultado como un resultado en su contexto (identificando variables matemáticas con físicas), lo que les permite afirmar que han resuelto el problema en su contexto inicial. Han desarrollado, aparentemente, todo el proceso de matematización de un problema en su contexto y han *sabido hacer* un modelo matemático que representa un resultado en contexto. Esto les convierte en competentes a la hora de *saber hacer* modelos matemáticos.

De esa forma, desde una perspectiva pragmática o utilitarista, ambas actividades de modelización han conseguido su objetivo fundamental al término de la segunda fase: obtener un modelo matemático de la situación real planteada inicialmente. Desde esa perspectiva, se supondrá que praxis y logos se han integrado en el proceso de obtención del modelo matemático y real. De hecho, en una enseñanza integrada de las ciencias como es la STEM, basada en la IBSE, las matemáticas ya han cumplido con su objetivo. Las funciones o expresiones obtenidas, en un tiempo relativamente corto, proporcionan una expresión matemática que, con cierta facilidad, sirve de punto de partida para la introducción de leyes y constantes físicas. Por ejemplo, la expresión que se ha obtenido al término de la segunda fase en *Muelle* permite hablar de la diferencia entre masa y peso, de la Ley de Hooke y de la constante de elasticidad. También permite plantear la construcción de instrumentos de medida caseros (dinamómetros) con una base teórica, obtenida a partir de la experimentación y la obtención de datos desarrollada en un contexto real y mediante procesos basados en la autonomía del alumno. Lo mismo podríamos decir de las otras dos actividades.

Pero, reconociendo la innegable matematización que se ha producido, existen elementos para la crítica. Esta parte de la actividad se centra en la parte técnica y, limitadamente, tecnológica de la actividad planteada como praxeología. Los apartados prácticos y teóricos no se manifiestan en ningún momento en la actividad de los participantes, que realizan y enfocan su trabajo como una labor puramente técnica: obtener una tabla de datos utilizando instrumentos diversos de medida y deducir una expresión mediante el uso técnico, aprendido previamente, de un programa informático. Así, el uso de la tecnología en realidad se transforma en un impedimento para conocer el grado de matematización real o efectivamente conseguido. Al usar la herramienta informática, la matematización (al menos parcialmente), es asumida por la herramienta informática. Por ejemplo, los parámetros no son tales en GeoGebra sino que son ódeslizadoresô. Este matiz puede parecer menor, pero, como se intuye ya y veremos más adelante, en realidad no lo es en absoluto. Lo único que necesitaron para utilizar un deslizador en GeoGebra fue conocer de qué forma se introduce y se modifica su valor, es decir, un conocimiento técnico encaminado a un uso concreto.

La diferencia entre óparámetroô y ódeslizadorô puede parecer únicamente una cuestión semántica, de nombre asignado, pero también puede ir más allá y representar, de hecho, una forma de ocultación de obstáculos y dificultades asociadas al concepto de parámetro. Las ventajas de GeoGebra como medio para la adecuada comprensión del concepto o noción de parámetro son innegables. Pero, como afirma Drijvers (2003), el parámetro es un concepto o noción más complejo que el concepto o noción de variable. Al introducir los deslizadores en GeoGebra, es fácil suponer que identifican esos deslizadores con parámetros y, como consecuencia, que comprenden que están trabajando en realidad con familias de funciones. También es fácil suponer que comprenden que la gráfica de una función se modifica al variar los parámetros. De hecho, por ejemplo, la repercusión sobre la gráfica de la modificación de a y b en la expresión $y=ax+b$ es algo que ya habían estudiado en 2º de ESO (Orden ECI/2220/2007). El valor de a y b recibe el nombre de pendiente y ordenada en el origen en función, precisamente, de su incidencia en la gráfica. Por tanto, es natural suponer que identifican los deslizadores con parámetros funcionales. Así, puede parecer que GeoGebra ha representado un recurso de enorme valor para la comprensión e interpretación de los parámetros presentes en las funciones que han obtenido. En el análisis de datos de la segunda fase no hay nada que haga pensar que los estudiantes tengan alguna dificultad con el concepto o noción de parámetro. Por tanto, es fácil dar por sentado que comprenden que los parámetros presentes en las diferentes funciones (diferentes en cada grupo) representan la forma en la que las condiciones iniciales modifican la función (muelle usado, cantidad de detergente y agua, tipo de termómetro). De hecho, las condiciones iniciales y su influencia ya hemos visto que ha aparecido en las dos primeras fases.

Se debe recordar que GM1 y GM6 no plantean el problema como la búsqueda de la expresión analítica de una función que posea una gráfica que cumpla una condición determinada (ajustar una serie de puntos del plano), sino como la búsqueda de la ecuación de una recta. Los puntos del plano que observan en la pantalla son exactamente eso, puntos en el plano, y no pares de puntos vinculados por una relación de dependencia entre valores numéricos. Así, la variable *y* del par *(x,y)*, no es considerada una variable dependiente de una función por determinar, sino que es tomada como la segunda coordenada de un punto del plano. Lo dicho cobra mayor sentido con la forma de obtener la expresión algebraica de GM1, que plantea y resuelve el problema determinando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos concretos. En su caso, ni siquiera la noción de variable se haya presente o tiene repercusión alguna en su trabajo de forma clara.

Dilucidar si realmente consideran los conjuntos de datos como variables funcionales en estas dos fases resulta complicado, pero el hecho de que dos de los seis grupos determinen la expresión como una recta (que ajusta todos los datos o que pasa por dos de los puntos visibles), lleva a pensar que no es así. Se podría pensar que los integrantes de los otros grupos (que determinan una función) sí identifican los datos como variables funcionales, pero destacamos nuevamente que, en realidad, los alumnos se han limitado a usar una técnica aprendida previamente. Dicho de otro modo, la obtención del modelo al término de las dos primeras fases ha incidido en la praxis más que en el logos. La obtención del modelo, basado en el uso de técnicas, se centra en el bloque práctico-técnico, $[T/\tau]$ de la tarea T, asumiendo que en el proceso de modelización realizado ha integrado el bloque tecnológico-teórico $[\phi/\theta]$. El bloque tecnológico-teórico se supone integrado en el proceso de obtención del modelo, ya que se ha producido una cadena de matematizaciones que precisan de los conocimientos, conceptos y nociones propios de una teoría θ (variables y funciones) y de tecnologías asociadas a esa teoría, ϕ. La falta de control sobre el nivel y calidad de la matematización, motivada fundamentalmente por los objetivos de investigación y por la búsqueda de la autonomía del alumno, no permite distinguir con claridad hasta qué punto la integración de praxis y logos es real.

La respuesta a esta última pregunta se buscará en las cuestiones planteadas al término de la segunda fase, cuyo análisis se realiza en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE RESULTADOS TERCERA Y CUARTA FASE

Este capítulo se divide en dos partes claramente diferenciadas. La primera analiza las respuestas a las preguntas que se plantearon a los alumnos al término de la segunda fase de la actividad *Muelle*. La segunda se centra en la actividad *Aceite y agua* y analiza el uso del modelo obtenido, también en la segunda fase, pero en una situación nueva, aunque relacionada con la experiencia de laboratorio que sirvió de base para generar el modelo.

5.1. RESULTADOS DE LAS RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE LA ACTIVIDAD *MUELLE*

Después de obtener la función de ajuste de los datos, los alumnos se trasladaron a un aula del Centro. Se les entregó una fotocopia que contenía 11 preguntas en el curso 2010-11 y 10 preguntas en el 2011-12, relacionadas con el modelo que habían obtenido previamente (Anexo II).

Al entregarles el cuestionario se escribieron en el encerado del aula las funciones y expresiones obtenidas por cada uno de los grupos. De esa forma, los alumnos observaban que cada grupo obtuvo una función del mismo tipo ($f(x)=ax+b$) pero con valores de a y b diferentes. Así, se hace visible que los valores de a y b son, al mismo tiempo, variables y constantes. Al tratarse de muelles diferentes, el valor de a y b estará vinculado a las características de cada muelle. Además, los alumnos podían consultar las tablas de datos que habían generado en el laboratorio.

Los participantes debían contestar el cuestionario de forma individual y sin realizar preguntas o reclamar al profesor que le suministrase la clave de respuesta. Se les indicó la importancia de que respondieran aquello que les parecía adecuado y que no representaba un examen o prueba escrita, en que se fuesen a valorar sus respuestas de forma individual, dejando claro que era algo completamente al margen de la evaluación de sus conocimientos en la asignatura de Matemáticas. Contestaron las preguntas 22 alumnos (todos excepto A11, A12 y A13). El tiempo del que disponían para contestar las preguntas fue decidido por ellos mismos: en el momento en que estimaban que habían acabado su trabajo, abandonaban el aula. El tiempo invertido en contestar las preguntas es variable pero en ningún caso fue superior a los 35 minutos.

Respecto al desarrollo general de esta parte de la actividad, destacamos que, durante la sesión, se percibía un mayor estado de tensión o ansiedad en los alumnos que en las fases anteriores. Este hecho no resulta sorprendente, pues es una de las características que se presentan en los alumnos al realizar tareas por escrito de matemáticas (Gómez Chacón, 2000). De todas formas, .los alumnos realizan su trabajo concentrados y sin preguntar al profesor o a sus compañeros.

Se hará un análisis de las respuestas que prime los elementos en común, de forma que se mostrarán los resultados agrupando las preguntas (Anexo II) en función de los objetivos de la mismas. Así, las preguntas se distribuyen en los siguientes bloques:

- Bloque I. Interpretación del modelo matemático y real y del resultado matemático y real obtenido. Preguntas 1, 6, 7, 9 y 10.

- Bloque II. Identificación de variables y parámetros. Preguntas 2 y 3.

- Bloque III. Uso del modelo como forma de obtener nuevos datos. Preguntas 4 y 5.

- Bloque IV. Uso de la función inversa de la función obtenida como modelo matemático y real. Preguntas 8 y 11.

En el segundo bloque se incluirá también la primera pregunta del cuestionario de *Aceite y agua* (Anexo III), por tratarse de una pregunta sobre los parámetros presentes en la función.

Como se verá al analizar las respuestas, a pesar de agrupar las preguntas en bloques, la división resulta compleja. Muchas preguntas se encuentran relacionadas entre sí, lo que dificulta el establecimiento de bloques independientes. Por ejemplo, la interpretación del modelo tiene repercusiones en su uso, lo que vincula las respuestas del primer bloque al tercero. Lo mismo se podría decir de las respuestas a las preguntas 8 y 11, que se hallan en relación con las preguntas 4 y 5. Además, las respuestas son de gran complejidad y su interpretación conllevaría un análisis individualizado. Dadas las dificultades para realizar un análisis individual con 22 alumnos, se ha optado por agrupar sus respuestas en categorías, asumiendo los límites de esta opción.

5.1.1. Interpretación de los modelos y los resultados

El primer bloque incluye 5 preguntas. Se agrupan en un único bloque porque todas tienen en común la interpretación que hace el alumno de los modelos y resultados matemáticos y reales. Sin embargo, existen diferencias de importancia entre ellas que hacen aconsejable su análisis por separado: la pregunta 1 se centra en la interpretación de la función que han obtenido, la 6 solicita que el alumno interprete el valor correspondiente a 0 g, la 7 se encuentra en relación con la interpretación de los dominios del modelo-resultado matemático y real, la 9 aúna la interpretación del resultado con la validación del mismo y la 10 conlleva la interpretación de la diferencia entre las expresiones de las funciones que han obtenido (pertenecientes a la misma familia de funciones).

5.1.1.1. Resultados de las respuesta a la pregunta 1: *¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado*

La pregunta solicita que identifiquen el tipo de función que han obtenido y la interpreten en el contexto origen del modelo. Se buscaba averiguar qué elemento o elementos característicos usan para nombrar o caracterizar la función y su interpretación como modelo y resultado matemático y/o real.

Tabla 15. Caracterización e interpretación de la función

<table>
<tr><th></th><th>Alumnos</th><th></th><th></th><th>Alumnos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Identifica la función con su representación gráfica</td><td rowspan="3">A1, A2, A4, A5, A6, A10, A14, A15, A16, A17, A19, A22, A25</td><td rowspan="2">Representa gráficamente una recta y escribe la forma general de la función (f(x)=ax+b)</td><td>Sin pasar por (0,0)</td><td>A1, A2, A10</td></tr>
<tr><td>Pasando por (0,0)</td><td>A22</td></tr>
<tr><td>No representa gráficamente una recta</td><td colspan="2">A4, A5, A6, A14, A15, A16, A17, A19, A25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Identifica la función con su expresión o una forma matemática</td><td rowspan="2">A3, A7, A8, A16, A20, A21</td><td>Con la forma matemática de una función afín</td><td colspan="2">A3 (polinómica),
A8 (f(x)=0.02x+9.7)
A20: f(x)=ax+b y f(x)=0.02x+9.7
A21: y=ax+b</td></tr>
<tr><td>Con una ecuación</td><td colspan="2">A7, A16</td></tr>
<tr><td>Utiliza la continuidad de la función</td><td>A18, A22, A23</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>No contesta</td><td>A9</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Resulta destacable la identificación, por parte de la mayoría de los estudiantes, de la función con su representación gráfica (59%. Figura 75), lo que los vincula a un estilo de pensamiento visual.

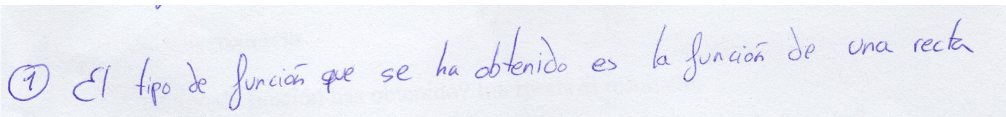
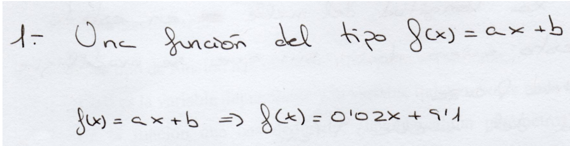


Figura 75. Identificación de la función con su representación gráfica. Alumno A25

Transcripción: ñ*El tipo de función que se ha obtenido es la función de una recta***ò**

6 alumnos (A3, A7, A8 , A16, A20, A21; 27.3%) caracterizan la función por la forma matemática que toma su expresión (Figuras 76 y 77). La identificación de la función con su expresión matemática, los vincula a un estilo de pensamiento analítico.


1.- Una función del tipo f(x) = ax+b

f(x) = ax+b ⇒ f(x) = 0'02x + 9'1

Figura 76. Identificación de la función mediante la familia de funciones. Alumno A20

Transcripción: ñ*Una función del tipo f(x)=ax+b. f(x)=ax+b⇒f(x)= 0.02x+9.1.*ò

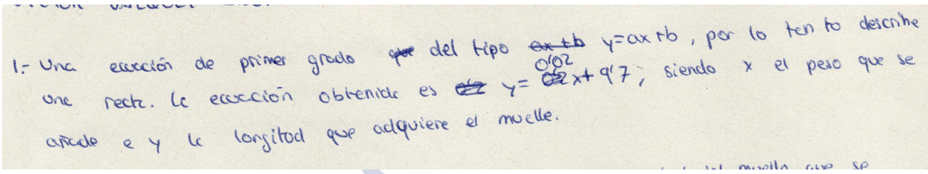

1.- Una ecuación de primer grado ~~que~~ del tipo ~~ax+b~~ y=ax+b, por lo tanto describe una recta. La ecuación obtenida es y= 0'02x+9'7, siendo x el peso que se añade e y la longitud que adquiere el muelle.

Figura 77. Identificación de la función como una ecuación. Alumno A7

Transcripción: ñ*Una ecuación de primer grado del tipo y=ax+b, por lo tanto describe una recta. La ecuación obtenida es y=0.02x+9.7, siendo x el peso que se añade e y la longitud que adquiere el muelle.***ò**

Según Ursini y Trigueros (2006), para determinar los valores de una variable en función de los valores de la otra variable, es necesario convertir una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación. La cuestión fundamental es que, en el caso de A7 y A16, la identificación que realizan no se lleva a cabo para determinar el valor concreto de una variable en función de un valor de la otra, sino que la identificación es de la propia expresión funcional con una ecuación.

Un número importante de estudiantes (9 alumnos, 40.9%), identifican la expresión matemática con su representación gráfica pero, al contrario de los cuatro alumnos que representan gráficamente una recta, describen textualmente la representación gráfica asociada a la función. Es decir, una parte importante utiliza la representación verbal de la función pero vinculada a su representación gráfica.

En general, no realizan una interpretación de los valores de *a* y *b*. Sólo A21, que identifica la expresión matemática con su representación gráfica, hace mención a esos valores, indicando qué repercusión tienen en la representación gráfica y asignándoles los nombres usuales de pendiente y ordenada en el origen (Figura 78).

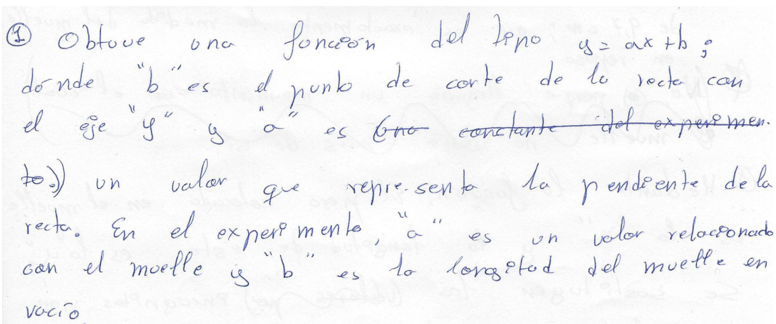

① Obtuve una función del tipo y = ax+b; donde "b" es el punto de corte de la recta con el eje "y" y "a" es ~~Una constante del experimen-to~~) un valor que representa la pendiente de la recta. En el experimento, "a" es un valor relacionado con el muelle y "b" es la longitud del muelle en vacío.

Figura 78. Repercusión en la representación gráfica de los valores *a* y *b*. Alumno A21

Transcripción: ñ*Obtuve una función del tipo y=ax+b; donde* ***ñbò*** *es el punto de corte de la recta con el eje* ***ñyò*** *y* ***ñaò*** *es un valor que representa la pendiente de la recta. En el experimento,* ***ñaò*** *es un valor relacionado con el muelle y* ***ñbò*** *es la longitud del muelle en vacío.**ò***

Además, A21 hace una interpretación de los valores de *a* y *b* desde el *Resto del mundo*, es decir, desde el contexto real. Es decir, incluye la interpretación desde lo lo matemático y desde lo real, lo que permite caracterizar su estilo de pensamiento como integrado.

Lo anteriormente dicho, lleva a pensar que se hallan presentes todos los estilos de pensamiento (visual, analítico e integrado; Borromeo, 2004, 2007a), pero que el mayoritario es el estilo visual.

Añadido a lo anterior, resaltamos que A21, en la interpretación que hace de los valores de *a* y *b* desde lo matemático y lo real, vincula sus valores con las características específicas del muelle. Dicho de otro modo, establece relaciones explícitas entre el mundo matemático y el mundo real, base de todo proceso de modelización.

La interpretación de las variables presentes no se reduce a este alumno. Incluimos a continuación una tabla en la que aparecen los alumnos que mencionan e interpretan las variables presentes en la expresión matemática (Tabla 16).

Tabla 16. Mención de las variables presentes en la expresión

Menciona las variables *x* e *y* desde el mundo real (*x* e *y* como variables físicas: peso y longitud)	A5, A6, A7	
Menciona e interpreta los valores de *a* y *b*	Interpreta su valor en términos matemáticos (es decir, desde el mundo matemático)	A21
	Interpreta su valor en términos físicos (es decir, desde el mundo real)	A19, A21

Centrándonos en los estilos de pensamiento más claramente identificables con el visual, la inclusión de la representación gráfica de una recta la realizan 4 alumnos (A1, A2, A10, A22, 18.2%; Tabla 15; Figura 79).

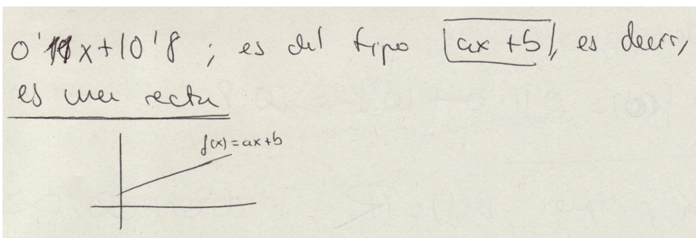


Figura 79. Representación del resultado obtenido como una recta. Alumno A1

Transcripción: ñ*0.11x+10.8; es del tipo ax+b, es decir, es una recta**ò***

Resulta llamativo que, en todos los casos, la recta la representan en el primer cuadrante. Esto significa que limitan el dominio del resultado matemático (igual a $\mathbb{R}$). La limitación del dominio viene dada por la interpretación del resultado matemático en contexto, que impide considerar valores negativos en la variable *x* (dominio *[0,G]*. Así, aunque no lo mencionan expresamente, contemplan dos resultados y soluciones: el matemático y el real.

Mientras que A1, A2 y A10 representan una recta que no pasa por el origen, el A22 representa la recta pasando por el origen (Figura 80).

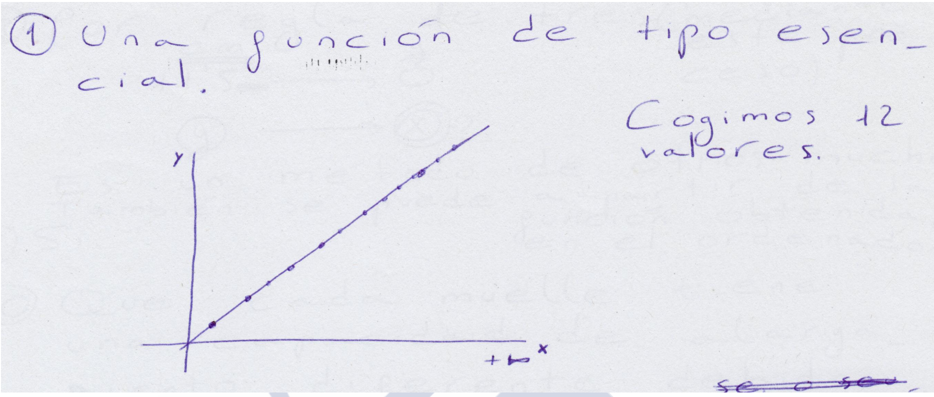


Figura 80. Representación del resultado obtenido como una recta. Alumno A22

Transcripción: ñ*Una función de tipo esencial. Cogimos 12 valores***ò**

Este hecho no es casual o improvisado. Como veremos, vuelve a realizar la misma representación de una recta pasando por el origen en la pregunta 7. Pero, además, hay otras respuestas vinculadas a la representación gráfica que hace A22. 5 alumnos (A4, A5, A6, A14 y A15, 22.8%) mencionan la relación entre variables en términos de ósi aumenta una, aumenta la otraô o directamente como una relación de proporcionalidad directa entre variables (Figura 81).

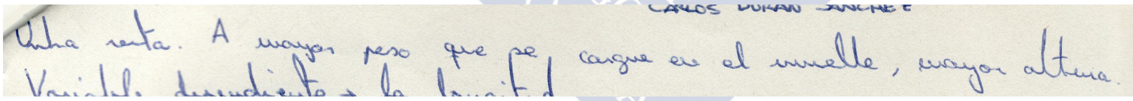


Figura 81. Relación entre las variables presentes. Alumno A6

Transcripción: ñA mayor peso que se cargue en el muelle, mayor altura.ò

De hecho, A4, A5, A14 y A15 mencionan que el aumento de una variable trae como consecuencia el aumento de la otra, lo que vinculan a una relación de proporcionalidad directa (Figura 82)

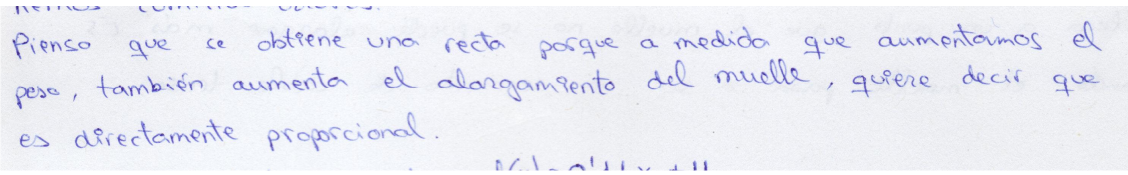


Figura 82. Relación de proporcionalidad directa entre las variables. Alumno A14

Transcripción: ñ*Pienso que se obtiene una recta porque a medida que aumentamos el peso, también aumenta el alargamiento del muelle, quiere decir que es directamente proporcional.*ò

Por tanto, se halla presente el uso de la representación verbal de la función pero que acude a la representación visual en la descripción, identificando la función con su representación gráfica. A lo anterior se añade la identificación de la recta o la representación visual con una relación de proporcionalidad directa. Así, en un número relativamente importante de alumnos (6 de 22, 27.3%), se produce una identificación de la función con la recta y de ésta con una relación de proporcionalidad directa. Este hecho, lleva a pensar que se halla presente uno de los obstáculos epistemológicos descritos por René de Cotret (1985) y Ruíz Higueras (1998). Se trata del óObstáculo de la razón o proporciónô, que ya había aparecido en la fase de obtención de datos. Dicho obstáculo se halla en relación con la consideración de una relación entre variables como una relación de proporcionalidad. La relación de proporcionalidad entre variables, a su vez, se halla muy vinculada al uso de la regla de tres como estrategia exitosa en la resolución de problemas. Este tema, muy estudiado en Didáctica de la Matemática, recibe varios nombres, como, por ejemplo, linear misconception, ilusión de la linealidad, ilusión de la proporcionalidad o trampa de la linealidad. Freudenthal, (1983, p. 267) explicaba la razón de su presencia y persistencia de la siguiente forma: ñLa linealidad es una propiedad tan sugerente en las relaciones que uno cede fácilmente a la seducción de hacer frente a cada relación numérica como si fuera lineal.ò Entre los estudios sobre el tema, destacamos los trabajos de Van Dooren, De Bock, Janssens, y Verschaffel (De Bock, Van Dooren et al., 2001, 2002; Van Dooren, De Bock et al., 2004, 2005).

La ilusión de la linealidad se caracteriza, en definitiva, por el uso de modelos lineales, que se identifican con el uso de la regla de tres en la resolución de problemas que vinculan dos variables. La ilusión de la linealidad tiene su reflejo, como no podría ser de otro modo, en la modelización matemática (De Bock, Van Dooren y Janssens, 2007; Greer, Verschaffel, 2007).

El obstáculo de la razón o proporción (o la ilusión de la linealidad), que ya se hace visible en la primera pregunta, volverá a aparecer de forma más evidente en el resto de las preguntas, especialmente en la 4 y 5. Con tal motivo, más adelante volveremos sobre la presencia del óObstáculo de la razón o proporciónô.

5.1.1.2 Resultados de las respuesta a la pregunta 6: *¿Qué longitud de muelle obtienes por la función si no colocas peso sobre el muelle? Interpreta tu resultado*

La pregunta, evidentemente, tiene por respuesta el valor de la función en $x=0$, es decir, $f(0)$. La interpretación posee una posibilidad doble: en el marco del fenómeno físico o la comparación de ese resultado con el valor de longitud correspondiente a 0 g de peso en la tabla de valores. En el caso del resultado obtenido por los grupos GM1 y GM4, el valor de la función en $f(0)$ no coincide con la longitud del muelle sin ser sometido a un peso. En el grupo GM1, el valor de y correspondiente a $x=0$ es igual a *9.7*, mientras que valor de la longitud del muelle sin peso en la tabla de valores es igual a *9.8*. En el caso del grupo GM4, el valor de $f(0)$ *es 11*, mientras que la longitud del muelle sin peso en su tabla es igual a *11.5*. En los grupos GM5 y GM6 ambos valores coinciden. El grupo GM2 no registró la longitud del muelle sin peso en su tabla de datos y el grupo GM3 registró el peso como dependiente de la longitud en su tabla de datos. A continuación, en la tabla 17, se indica qué escribe cada alumno como respuesta.

Tabla 17. Pregunta 6. Interpretación que realizan los alumnos

	Alumnos
Lo que escribe se reduce al cálculo de *f(0)*	A2
Sólo escribe un valor numérico, sin interpretar su significado	A17, A18, A25
Sólo escribe un valor numérico, indicando expresamente que es el que figura en una de las tablas de datos	A22
Interpreta el resultado que aporta como la longitud del muelle sin ser sometido a un peso	A1, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A14, A15, A16, A19, A20, A21, A23, A24

Los alumnos, mayoritariamente (77.3%), realizan una interpretación del resultado como se les solicita. Entre los que interpretan el resultado, no todos utilizan la función para obtener el que escriben como respuesta. Incluimos una nueva tabla en la que se diferencia a aquellos que realizan una interpretación incluyendo el cálculo de *f(0)* o del valor de *y* correspondiente a *x=0*.

Tabla 18. Inclusión del valor de *f(0)* o de la *y* correspondiente a *x=0* en la interpretación

	Alumnos
Incluye el cálculo de *f(0)* o de la *y* correspondiente a *x=0*	A1, A4, A5, A6, A7, A9, A14, A19, A21
No incluye el cálculo de *f(0)* o de la *y* correspondiente a *x=0*	A3, A8, A9, A10, A15, A16, A20, A22, A23, A24

El hecho de que tantos alumnos no incluyan el cálculo de *f(0)* o de la *y* correspondiente a *x=0,* puede parecer poco relevante porque, al fin y al cabo, no se trata de un cálculo complejo. Así, es perfectamente posible que no incluyesen el cálculo por considerarlo algo innecesario en su respuesta. Pero lo cierto es que su relevancia es mayor de lo que puede aparentar. De los que no aportan ningún cálculo que justifique el valor numérico y su posterior interpretación (9 alumnos, 40.9%; Tabla 18), A3, A8, A15 y A16 han tomado el valor correspondiente a *0 g* de peso de la tabla de datos (Figura 83). El valor que aportan (A3 y A8: *9,8 cm*; A15 y A16: *11.5 cm*) se corresponde con el valor para *0 g* de alguna de las tablas de datos. Además, el valor que obtendrían por medio de alguna de las funciones o expresiones es diferente (*9.1* o *9.7 cm* y *10.8* o *11 cm;* Anexo VII).

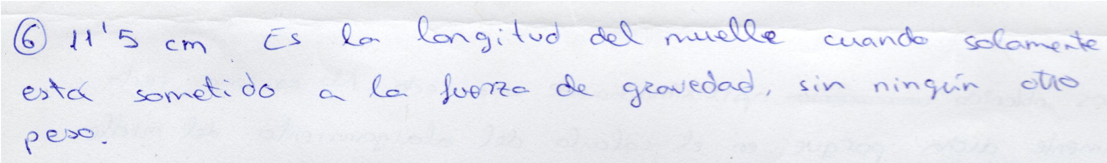
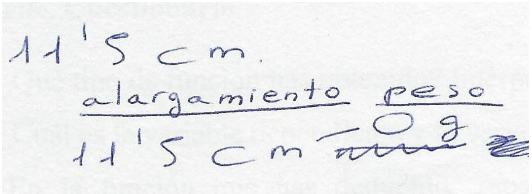

6 11'5 cm Es la longitud del muelle cuando solamente está sometido a la fuerza de gravedad, sin ningún otro peso.

Figura 83. Alumno A15. Uso del dato correspondiente a *0 g* de una de las tablas de datos (GM4)

Transcripción: ñ*11.5 cm Es la longitud del muelle cuando solamente está sometido a la fuerza de la gravedad, sin ningún otro peso*ò

A22, por ejemplo (Figura 84), utiliza claramente el dato correspondiente a 0 g de la tabla de datos del grupo GM4 (Anexo VII).


11'5 cm.

alargamiento	peso
11'5 cm	0 g

Figura 84. Alumno A22. Uso del dato correspondiente a *0 g* de una de las tablas de datos (GM4)

A los alumnos A15 y A16, que usaron la tabla de datos, en la entrevista posterior se les preguntó la razón de usarla en vez de utilizar la función, tal y como se solicitaba en el enunciado de la pregunta. Ninguno supo contestar. Que no sean capaces de proporcionar una razón para su respuesta o no saber explicitar cuál es la dificultad que han encontrado no es algo extraño (Tall, 1978). Lo sorprendente es que usen la tabla de datos en vez de la función que, al fin y al cabo, es el resultado que representaba el objetivo de la actividad. Esta situación de no ser capaces de explicar qué razón o razones les llevaron a contestar algo, que no coincide con lo que se solicitaba, se repetirá en otras preguntas.

El usar la tabla de datos en vez la función para contestar la pregunta puede parecer algo de escasa importancia. Al fin y al cabo, la obtención de la tabla representa una matematización y uno de los resultados matemáticos obtenidos durante el proceso de modelización. Sin embargo, y como veremos, su relevancia es mayor porque se asocia a la concesión a la tabla de datos de una importancia o relevancia mayor que el otorgado a la función. Este hecho se hará más evidente en las respuestas a las preguntas 4 y 5. En este momento volveremos sobre la preeminencia de uso de los datos obtenidos experimentalmente sobre el uso de la función.

Por otro lado, como se observa en la Figura 83, A15 interpreta el resultado en términos físicos, pues menciona la fuerza de la gravedad. La misma mención a la gravedad la realiza A3 (Figura 85). En la misma línea, A20 menciona que lo que obtiene es la longitud del muelle, sin ser modificada por ñalguna fuerzaò.

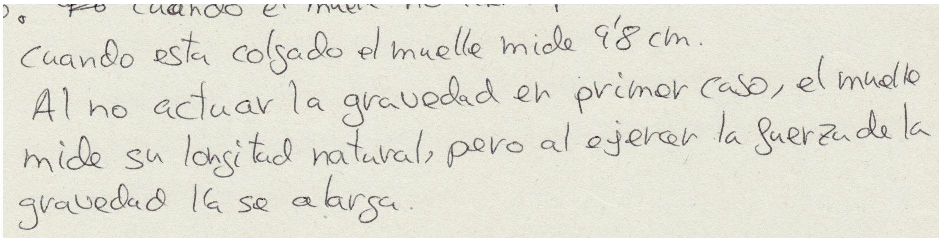

Cuando esta colgado el muelle mide 9'8 cm.
Al no actuar la gravedad en primer caso, el muelle mide su longitud natural, pero al ejercer la fuerza de la gravedad la se alarga.

Figura 85. Alumno A3. Interpretación del alargamiento del muelle como consecuencia de la fuerza de gravedad

Transcripción: ñ*Cuando está colgado el muelle mide 9.8 cm. Al no actuar la gravedad, en [el] primer caso, el muelle mide su longitud natural, pero al ejercer la fuerza de la gravedad ya se alarga*ò

La mención a la gravedad como causa del alargamiento del muelle, se halla vinculada a la diferencia entre masa y peso y a la Ley de Hooke, lo que sitúa a esos alumnos en la interpretación desde el contexto real y abre la puerta a la continuidad de la actividad, centrándose ahora en las leyes físicas y coeficientes asociados a las características de cada muelle. Este hecho es común a todos sus compañeros, que realizan una interpretación del valor que escriben para el muelle sin peso. La diferencia es que los otros estudiantes sólo mencionan que se trata de la longitud del muelle sin ser sometido a un peso, sin indicar la presencia de una fuerza como causa de su alargamiento.

Sólo A4 (Figura 86), identifica la longitud del muelle sin peso con el valor de *b* en la expresión *f(x)=ax+b*.

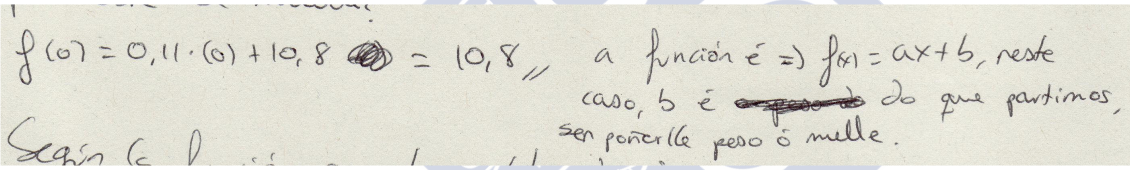

f(0) = 0,11 · (0) + 10,8 = 10,8 a función é => f(x) = ax+b, neste caso, b é ~~o peso~~ do que partimos, sen poñerlle peso ó muelle.

Figura 86. Alumno A4. Interpretación del valor de *b* en *f(x)=ax+b* como la longitud del muelle sin peso

Transcripción: ñ*La función es f(x)=ax+b. En este caso, b es de lo que partimos, sin ponerle peso al muelle*ò

Aquí se observa la presencia de una interpretación de los parámetros de la función como elementos característicos del muelle o de las condiciones iniciales. De hecho, menciona que la longitud del muelle ñes de lo que partimosò o, lo que es lo mismo, una condición inicial. Dicho de otro modo, realiza una interpretación del resultado matemático en el contexto real original, lo que convierte el resultado matemático en resultado real.

La respuesta de A4 se encuentra en relación directa con otras preguntas (por ejemplo, las preguntas 3 y 9). Se trata, en definitiva, de la vinculación de las condiciones iniciales con los parámetros de la función, lo que representa una interpretación del resultado matemático como un resultado real. El hecho de que sólo un alumno identifique el parámetro *b* con las características físicas del muelle no significa que los otros no interpreten el resultado matemático como real. La respuesta a si lo hacen o no vendrá dada por su aportación a las restantes preguntas. Es decir, volvemos a mencionar en este punto la complejidad del análisis de las respuestas.

Solicitar que calculen el valor de *f(0)* tenía como una de sus finalidades observar si se se percataban de la diferencia de valor entre la longitud del muelle órealô sin ser sometido a un peso y el valor obtenido mediante la función. Como ya se mencionó, la función aporta en dos grupos un valor de *f(0)* diferente del valor de longitud del muelle (Anexo VII). Sólo uno de ellos indica este hecho (A14, Figura 87).

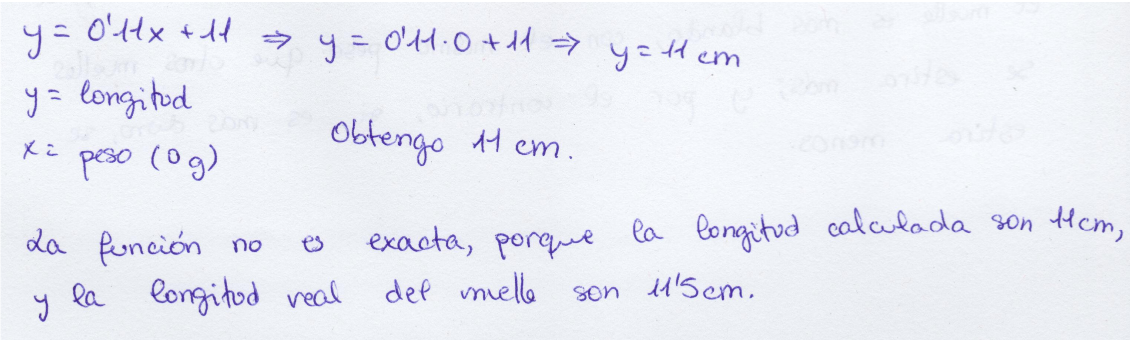

$y = 0'11x + 11 \Rightarrow y = 0'11 \cdot 0 + 11 \Rightarrow y = 11$ cm
y = longitud
x = peso (0 g)
Obtengo 11 cm.
La función no es exacta, porque la longitud calculada son 11cm, y la longitud real del muelle son 11'5cm.

Figura 87. Alumno A14. Interpretación de la diferencia de valor entre la longitud del muelle y el valor de *f(0)*

Transcripción: ñ*La función no es exacta porque la longitud calculada son 11 cm y la longitud real del muelle son 11.5 cm*ò

Ante la discrepancia de valores, opta por indicar que la función no es ñexactaò, considerando por tanto e implícitamente, œxactoô el valor de la tabla de datos correspondiente a *0 g*. No parece darse cuenta de que lo que han hecho es un ajuste de datos, con lo que la función que obtienen no tiene por qué pasar por todos los puntos de la nube. Es decir, para este alumno, la técnica usada para obtener el modelo matemático y real a partir de la tabla de datos (basada en el uso de una herramienta tecnológica), proporciona un resultado menos exacto que la técnica usada para obtener una tabla de datos experimentales. En ningún momento menciona que los datos obtenidos están sometidos a errores inevitables asociados al uso de instrumentos de medida. Ante la discrepancia en los valores, opta por conceder mayor exactitud a los datos que a la función.

Como ya hemos indicado previamente, subyace una valoración más positiva de la tabla de datos que de la función. Recordemos que la obtención de la función y el proceso de modelización asociado representaba el fin último de la actividad. Como veremos, esa valoración más positiva de la tabla de datos frente a la función volverá a aparecer en las respuestas a otras preguntas.

5.1.1.3 Resultados de las respuestas a la pregunta 7: *Según la función que has obtenido, ¿es posible alargar indefinidamente el muelle? Interpreta ese resultado teniendo en cuenta el experimento concreto que has realizado*

La pregunta se centra en el recorrido de la función. Se solicita una interpretación en contexto, lo que conlleva limitar el recorrido del resultado matemático (la función $f(x)=ax+b$) y, por tanto, el dominio de definición. Evidentemente, no es posible que el muelle se estire indefinidamente. El límite superior del recorrido de la función, interpretada en el contexto real, es *[l, L]*, siendo l la longitud del muelle sin ser sometido a ningún peso y L la longitud del alambre usado para construir el muelle. El dominio, en consecuencia, debe ser [0,G], siendo G el peso correspondiente a la longitud L. Los valores de L y G son desconocidos, aunque podrían determinarse con facilidad.

En definitiva los alumnos, para poder interpretar el resultado, deben distinguir las dos funciones que se hallan implícitas en la función que han obtenido. Obtuvieron, como resultado matemático, una función perteneciente a la familia de funciones $f(x)=ax+b$, de dominio y recorrido igual a $\mathbb{R}$. La interpretación del resultado matemático en el contexto real proporciona un resultado real. El resultado real es una función con la misma expresión matemática que el resultado matemático pero con su dominio y recorrido limitado.

A continuación se muestra una tabla en la que aparece el mundo (real, matemático o ambos) en el que interpretan el resultado.

Tabla 19. Interpretación del recorrido de la función (mundo de las matemáticas y mundo real)

	Alumnos
Interpreta el resultado obtenido en el mundo de la matemáticas y en el mundo real	A1, A4, A5, A6, A14, A18, A19, A20, A25
Interpreta el resultado obtenido sólo en el mundo de la matemáticas	A7
Interpreta el resultado obtenido sólo en el mundo real	A3, A8, A9, A15, A16, A17, A21, A22, A23
Contesta solo ñsíò, sin justificar la respuesta ni interpretar el resultado	A2, A10
No contesta	A24

La mayoría interpreta la función en ambos mundos o sólo en el mundo real. En ambos casos, el número de alumnos es de 9 (40.9%). En su interpretación, indican lo evidente: en la realidad, el muelle no puede alargarse indefinidamente.

Entre los que interpretan el resultado matemático en el contexto o mundo real, se distinguen dos formas de interpretación diferenciadas:

- Partiendo de la función como resultado matemático, como se solicita en el enunciado de la pregunta, indican que ðla función debe ser limitadaô o bien utilizan el lenguaje propio de las matemáticas. En esa mención que realizan de los límites que hay que imponer al resultado, se refieren a que la función debe ser adaptada o modificada en su dominio y recorrido para que, de esa forma, represente un resultado real al problema planteado en el contexto real (A1, A5, A14 y A20; Figuras 88 y 89).

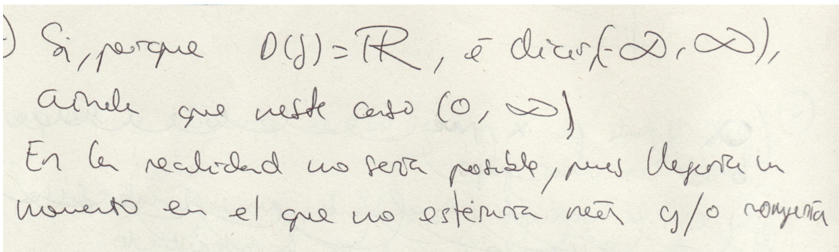


Figura 88. Alumno A1. Respuesta a la pregunta 7

Transcripción: **ñ***Sí, porque D(f)=* $\mathbb{R}$ *, es decir, (-∞,∞), aunque en este caso [debe ser] (0, ∞)*

En la realidad no sería posible, pues llegaría un momento en el que no se estiraría más y/o rompería. ***ò***

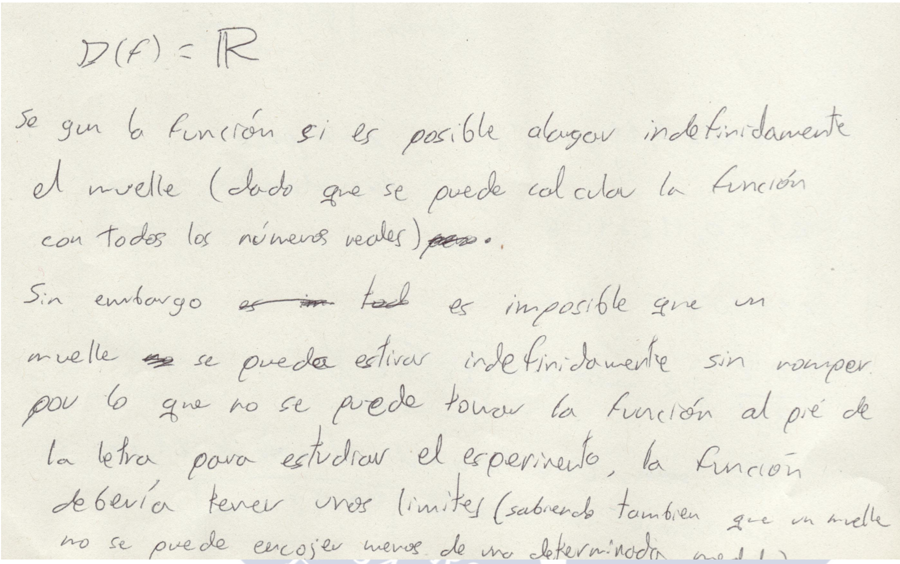


Figura 89. Alumno A5. Respuesta a la pregunta 7

Transcripción: ñ*D(f)=* $\mathbb{R}$ *. Según la función sí es posible alargar indefinidamente el muelle (dado que se puede calcular la función con todos los números reales). Sin embargo, es imposible que un muelle se pueda estirar indefinidamente sin romper, por lo que no se puede tomar la función al pie de la letra para estudiar el experimento, la función debería tener unos límites (sabiendo también que un muelle no se puede encoger menos de una determinada medida).*ò

- El resto, justifican que el muelle no puede alargarse indefinidamente acudiendo a justificaciones relacionadas con los límites impuestos por la forma de obtener los datos y las características o límites físicos del muelle: se acabará rompiendo, el muelle ha sido construido con un alambre de longitud determinada, etc. (Figuras 90 y 91). En ningún caso mencionan la función y la necesidad de limitar su dominio y recorrido.

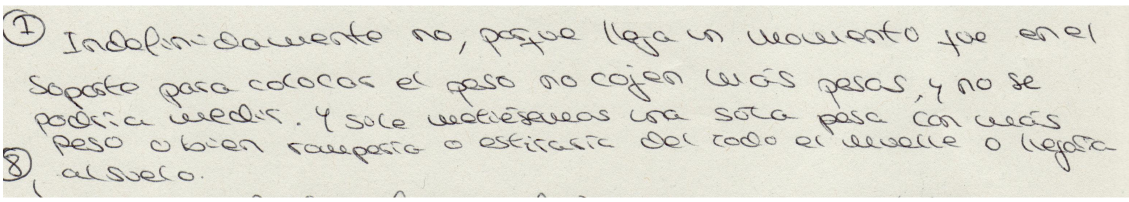


Figura 90. Alumno A8. Respuesta a la pregunta 7

Transcripción: ***ñ**Indefinidamente no, porque llega un momento que en el soporte para colocar el peso no cogen más pesas, y no se podría medir. Y si le metiésemos una sola pesa con más peso o bien rompería o estiraría del todo el muelle o llegaría al suelo.**ò***

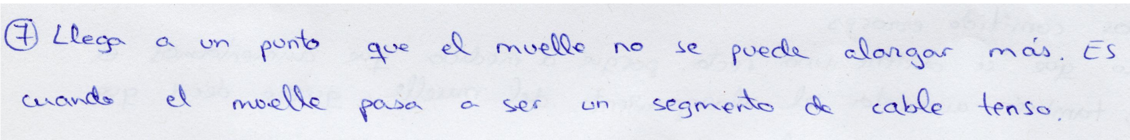

(7) Llega a un punto que el muelle no se puede alargar más. Es cuando el muelle pasa a ser un segmento de cable tenso.

Figura 91. Alumno A15. Respuesta a la pregunta 7

Transcripción: ***ñ**Llega a un punto que el muelle no se puede alargar más. Es cuando el muelle pasa a ser un segmento de cable tenso.**ò***

Por tanto, en general se dan cuenta de que el resultado matemático debe ser adaptado a la situación real. Dicho de otra forma, la situación real impone condiciones sobre el resultado matemático. Lo destacable es que sólo cuatro de ellos incluyen menciones, en términos matemáticos, a los límites que hay que imponer al resultado matemático. Es decir, en la respuesta de la mayoría prima el mundo real (o óResto del mundoô en términos del ciclo de Blum y Leiss) sobre el mundo matemático. Así, el proceso de modelización que han desarrollado, basado fundamentalmente en el establecimiento de relaciones entre el mundo real y el mundo matemático, se halla descompensado porque prima un mundo sobre el otro. De ahí que se centren sus explicaciones, fundamentalmente, en qué ocurre con el muelle al añadir más y más pesos.

La consecuencia es que no se concede al resultado matemático, y su interpretación como resultado real, la importancia que debería tener. Es el œexperimentoô lo que prima. Así, prevalece la fase más vinculada al mundo real, es decir, la toma de datos. Como consecuencia, la influencia sobre la respuesta de la fase de obtención de datos en el laboratorio es notable. Ya hemos visto que valoran muy positivamente esa fase y, como hemos empezado a constatar y confirmaremos en las respuestas que analizaremos más adelante, esa importancia y valoración tiene grandes repercusiones sobre su percepción y uso del modelo matemático y real.

Por ejemplo, ninguno de los cuatro estudiantes que indican que la función matemática debe verse limitada en su dominio y recorrido, escriben dicho dominio y recorrido como resultado real. La razón es que no lo han meditado con calma. Son conscientes de que el dominio y recorrido no puede ser $\mathbb{R}$, pero no lo especifican (o lo hacen mal; Figura 88).

Por último, reproducimos la respuesta de A22 (Figura 92), que interpreta sólo el resultado matemático (Tabla 19). Además, es el único que incluye un gráfico en su respuesta. El gráfico es el mismo que ya había incluido en su respuesta a la primera pregunta (una recta pasando por el origen, Figura 80), variando el uso que hace del mismo, que adapta a la pregunta.

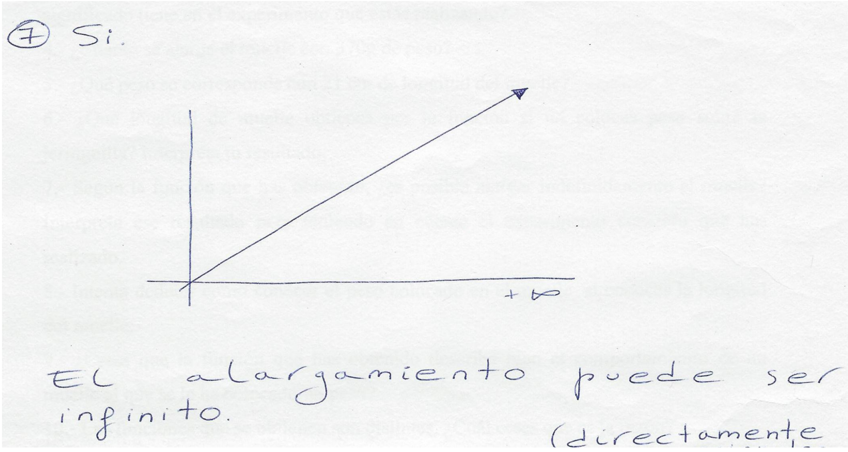


Figura 92. Alumno A22. Respuesta a la pregunta 7

Transcripción: ñ*Sí. El alargamiento puede ser infinito.*ò

5.1.1.4. Resultados de las respuesta a la pregunta 9: *¿Crees que la función que has obtenido describe bien el comportamiento de un muelle al que se le ha colocado un peso?*

Se trata de una validación del modelo. La validación se hace desde la opinión y, por tanto, es subjetiva. Es decir, se trata de una autoevaluación del resultado, asociada a su compartibilidad y reutilización. La autoevaluación, determina si el modelo obtenido puede o no representar una solución real a otra situación o problema real relacionado.

La solución que representa el resultado real se halla en relación directa con las características propias de cada muelle, ligadas a su vez a los parámetros a y b de las funciones que han obtenido ($f(x)=ax+b$). Los parámetros del resultado y solución matemática nos sitúan en el mundo de las matemáticas y su interpretación en contexto en el óResto del mundoô. Para poder interpretar la solución matemática como real, se deben establecer nexos de unión o relaciones entre ambos mundos. Dicho de otro modo, nos encontramos nuevamente, con la matematización de la realidad y con la interpretación de resultados que permite el paso del mundo matemático al mundo real. Resumimos sus valoraciones en la siguiente tabla (Tabla 20)

Tabla 20. Pregunta 9. Valoración de la validez del modelo

	Para justificar o complementar su respuesta	**Alumnos**
Responde que sí	Describe textualmente la función utilizando las características del muelle	A7
	Menciona las características del muelle	A1, A6, A19 (*)
	Menciona de forma implícita o explícita la proporcionalidad	A5, A14, A24
	Utiliza la representación gráfica de la función	A3
	No justifica de ninguna forma su respuesta	A2, A8, A10, A22,

		A23
Responde que sí pero pone límites a la validez del modelo	Menciona errores en la toma de medidas	A16, A18, A19 (*)
	Menciona incluir las fuerzas	A20
	Indica que el modelo sólo es válido para pesos pequeños	A25
Responde que no	Utiliza la representación gráfica de la función	A4, A17
	Menciona que en cada caso diferente la función sería distinta	A9, A15, A21

* A19 se encuentra en dos categorías diferentes: responde que sí, menciona las características del muelle y, al mismo tiempo, limita su validez por errores en la toma de medidas.

Como se observa, la mayoría responde que sí a la pregunta (17 alumnos, 77.3%) aunque algunos le ponen límites a su validez (5 estudiantes). Entre los que limitan la validez del modelo, sólo uno menciona que es válido en el caso de pesos pequeños (Figura 93).

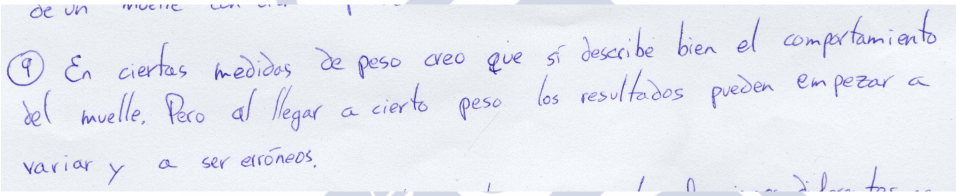

(9) En ciertas medidas de peso creo que sí describe bien el comportamiento del muelle. Pero al llegar a cierto peso los resultados pueden empezar a variar y a ser erróneos.

Figura 93. Alumno A25. Límites del modelo. Pregunta 9

Transcripción: **ñ***En ciertas medidas de peso creo que sí describe bien el comportamiento del muelle. Pero al llegar a cierto peso los resultados pueden empezar a variar y a ser erróneos.***ò**

Una parte importante de estudiantes limitaban implícitamente la validez del modelo en la pregunta 7, al indicar que no es posible alargar el muelle indefinidamente. Resulta llamativo que esta circunstancia sólo sea destacada en la pregunta 9 por A25 (Figura 93). De lo que escribe se deduce que distingue la existencia de dos modelos, matemático y real, y que el dominio de definición debe ser limitado. Este mismo alumno realiza la distinción entre modelos, aún de forma más clara, en la pregunta 7 (Figura 94).

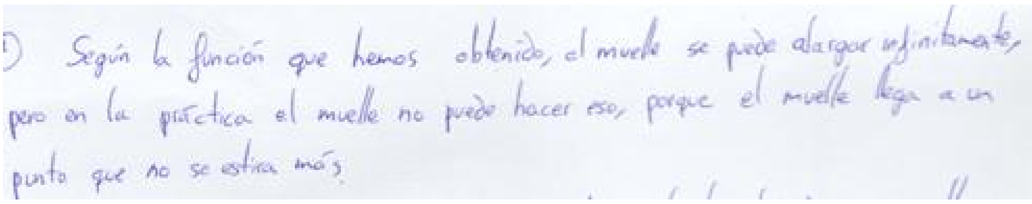

7) Según la función que hemos obtenido, el muelle se puede alargar infinitamente, pero en la práctica el muelle no puedo hacer eso, porque el muelle llega a un punto que no se estira más

Figura 94. Alumno A25. Límites del modelo. Pregunta 7

Transcripción: **ñ***Según la función que hemos obtenido, el muelle se puede alargar infinitamente, pero en la práctica el muelle no puede hacer eso, porque el muelle llega a un punto que no se estira más.***ò**

Su respuesta a la pregunta 9, como en la 7, se inscribe en una interpretación y validación en el mundo real del modelo. En sus respuestas se observa con claridad que el proceso de validación conlleva que el modelo deja de ser válido a partir de un cierto peso.

El ejemplo de A25 ilustra que los alumnos, mayoritariamente, distinguen la diferencia entre los modelos y resultados matemáticos y reales. La diferencia entre ellos es que, en algunas ocasiones, se sitúan en el mundo de las matemáticas (como ocurría con A1, A5, A14 y A20 en la pregunta 7) y en otras no lo hacen. La opción mayoritaria es acudir al mundo real para responder las preguntas. Por ejemplo, A1, A5, A14 y A20 no mencionan el modelo matemático en términos matemáticos. Es decir, aunque contemplan la existencia de dos modelos diferenciados (matemático y real), al hablar del modelo matemático no lo sitúan en el mundo de las matemáticas ni utilizan el lenguaje propio de ese mundo.

Los alumnos A3, A15 y A20, en su respuesta a la pregunta 6, mencionaban la existencia de una fuerza. En esta pregunta, sin embargo, sólo A20 menciona la fuerza presente en el fenómeno físico (Figura 95).

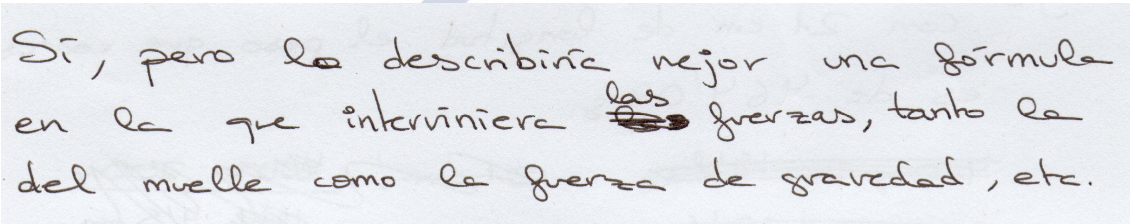

Sí, pero la describiría mejor una fórmula en la que intervinieran las fuerzas, tanto la del muelle como la fuerza de gravedad, etc.

Figura 95. Alumno A20. Inclusión de la fuerza de la gravedad en el modelo

Transcripción: **ñ***Sí, pero la describiría mejor una fórmula en la que intervinieran las fuerzas, tanto la del muelle como la fuerza de la gravedad, etc.***ò**

En su respuesta se halla claramente implícita la vinculación del modelo obtenido con una ley física. Menciona dos fuerzas: una de ellas es ðla del muelleô y la otra la de gravedad. No se da cuenta de que la fuerza del muelle se manifiesta matemáticamente en el parámetro *a*. De ahí que hable de la necesidad de inclusión de la fuerza vinculada al muelle. Dicho de otro modo, A20 no interpreta correctamente el parámetro *a* de la expresión matemática que ha obtenido en el contexto real, lo que impide una interpretación correcta del resultado matemático en dicho contexto. Volvemos, por tanto, a una interpretación deficiente del resultado matemático como resultado real. Esa es la razón, en definitiva, de que no aparezcan referencias explícitas a los valores de *a* y *b*. Los alumnos mencionan la elasticidad del muelle, lo que se vincula al valor de *a* en la expresión de la función, pero no se refieren a su valor explícitamente. Es decir, la importancia predominante de lo real sobre lo matemático impide interpretar los elementos presentes en el modelo matemático en términos matemáticos. Ello no permite identificar e interpretar esos elementos matemáticos con elementos reales.

Sobre la respuesta de A20, añadimos que representa también una prueba de lo fácil que sería introducir la Ley de Hooke a partir del resultado matemático/real obtenido. Los elementos presentes en su respuesta (fórmula, fuerza asociada al muelle, fuerza de gravedad), son los elementos fundamentales de la Ley de Hooke. Por tanto, pasar de la expresión matemática obtenida a la Ley física asociada resultaría sencillo.

Nótese que vuelven a aparecer, como en las preguntas anteriores, la proporcionalidad, la mención a los errores en la toma de medidas y la identificación de la expresión matemática con su gráfica (Tabla 20; Figuras 96, 97, 98).

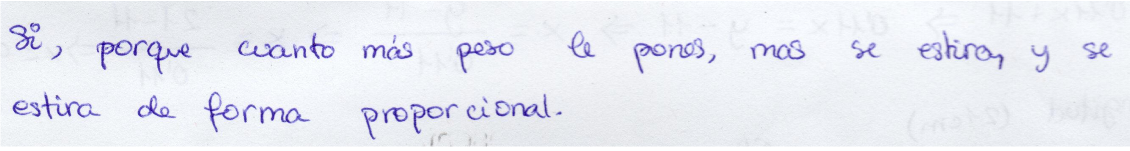

Sí, porque cuanto más peso le pones, mas se estira, y se estira de forma proporcional.

Figura 96. Alumno A14. Justificación de la validez del modelo vinculada a la proporcionalidad

Transcripción: **ñ***Sí, porque cuanto más peso le pones, más se estira, y se estira de forma proporcional.***ò**

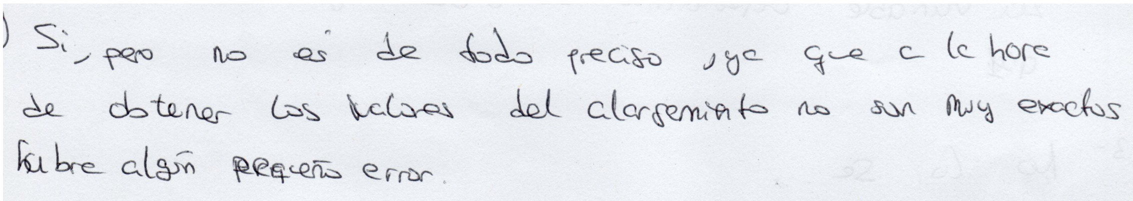

Si, pero no es de todo preciso, ya que a la hora de obtener los valores del alargamiento no son muy exactos hubre algún pequeño error.

Figura 97. Alumno A16. Validez limitada por errores cometidos en la toma de medidas

Transcripción: **ñ***Sí, pero no es del todo preciso, ya que a la hora de obtener los valores de alargamiento no son muy exactos [y] habrá algún pequeño error***ò**

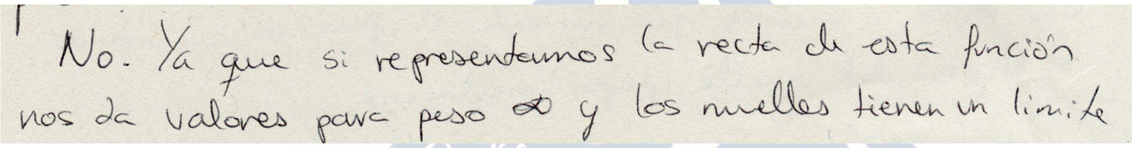

No. Ya que si representamos la recta de esta función nos da valores para peso ∞ y los muelles tienen un límite

Figura 98. Alumno A4. Validez del modelo justificada por medio de su representación gráfica

Transcripción: **ñ***No. Ya que si representamos la recta de esta función nos da valores para peso ∞ y los muelles tienen un límite.***ò**

5.1.1.5. Resultados de las respuesta a la pregunta 10: *Las funciones que se obtienen son distintas. ¿Cuál crees que es la razón?*

La pregunta se centra claramente en las características propias de cada muelle y, por tanto, deberían aparecer los parámetros *a* y *b* y su relación con la elasticidad del muelle y su longitud.

En la Tabla 21 observamos que vuelven a aparecer los elementos que ya habían surgido en las preguntas anteriores.

Tabla 21. Pregunta 10. Razones que justifican la existencia de varias funciones diferentes

Razones que aportan	Alumnos
Errores en la toma de medidas y en la determinación de la recta adecuada con GeoGebra Características propias de cada muelle	A1
Errores en la toma de medidas	A3, A4, A5, A7, A18

Características propias de cada muelle	
Sólo los errores en la toma de medidas	A10
Sólo las características propias de cada muelle	A2, A6, A8, A9, A14, A15, A16, A17, A19, A20, A21, A22, A24, A25
Sólo la longitud de cada muelle	A23

Destaca la mención sólo de las características de longitud y elasticidad, propias de cada muelle, como respuesta (14 alumnos, 63.6%). También destaca el hecho de que vuelvan a conceder importancia a los errores en la toma de medidas (6 alumnos, 27.3%). Resaltamos que sólo A1 menciona la determinación de la recta con GeoGebra y que lo hace en unión otras razones. De hecho, A1 explica la razón de la diferencia de resultado por medio de las características de cada muelle pero, sobre todo, por todos los procesos que han desarrollado para obtener el modelo (Figura 99).

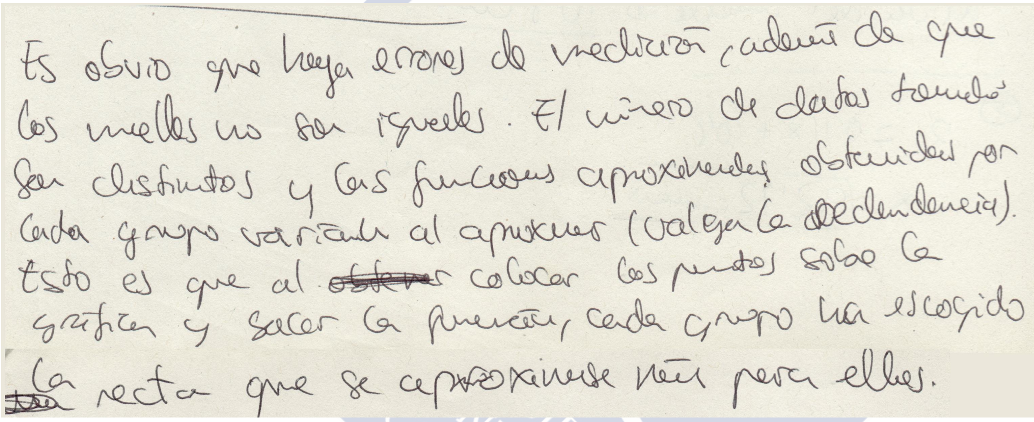


Figura 99. Alumno A1. Razón de la existencia de varios modelos

Transcripción: **ñ***Es obvio que haya errores de medición, además de que los muelles no son iguales. El número de datos tomados son distintos y las funciones aproximadas obtenidas por cada grupo variaban al aproximar (valga la redundancia). Esto es que al colocar los puntos sobre la gráfica y sacar la función, cada grupo ha escogido la recta que se aproximase más para ellos.***ò**

La mayoría inciden en las características físicas de cada muelle (A4, A5, A14, A15, A19, A20, A21, A22 y A24; Figuras 100 y 101).

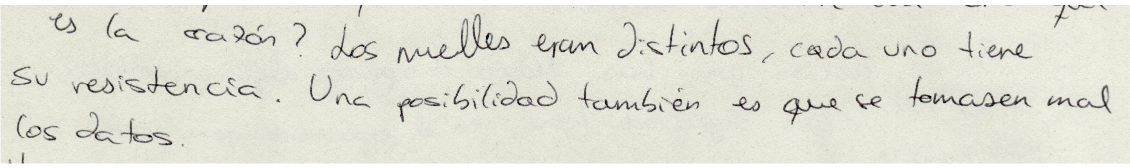


Figura 100. Alumno A4. Razón de la existencia de varios modelos

Transcripción: **ñ***Los muelles eran distintos, cada uno tiene su resistencia. Una posibilidad también es que se tomasen mal los datos.***ò**

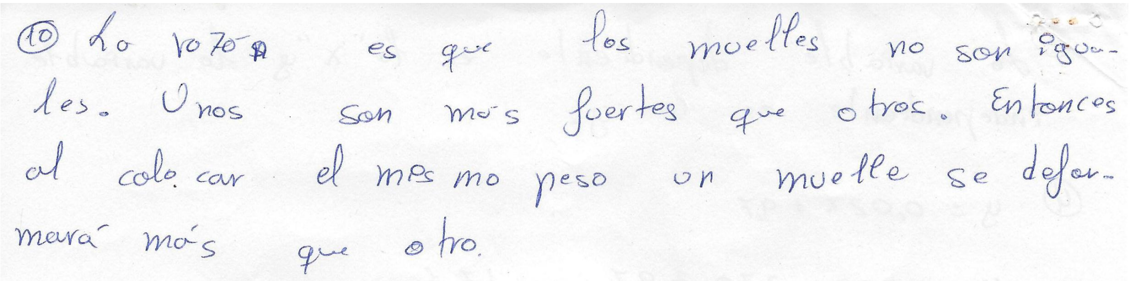

(10) La razon es que los muelles no son igua-
les. Unos son más fuertes que otros. Entonces
al colocar el mismo peso un muelle se defor-
mará más que otro.

Figura 101. Alumno A21. Razón de la existencia de varios modelos

Transcripción: ñ*La razón es los muelles no son iguales. Unos son más fuertes que otros. Entonces al colocar el mismo peso un muelle se deformará más que otro.*ò

Incluyen menciones a la fortaleza, resistencia, dureza, elasticidad, etc. del muelle. Estas características de cada muelle se vinculan al valor del parámetro *a* de *f(x)=ax+b* pero esa relación entre las características físicas de cada muelle con *a* no es mencionada por ningún alumno ni tampoco se intuye en sus respuestas.

Es decir, la presencia de condiciones iniciales diferentes para cada muelle (parámetros) es evidente para los estudiantes, pero no los interpretan en términos matemáticos sino sólo físicos. Se menciona la función pero no los elementos diferentes que aparecen en las distintas funciones (valores de *a* y *b* en *f(x)=ax+b*). Una vez más, los alumnos se centran en la realidad y en el fenómeno físico, sin interpretar ni conceder relevancia al modelo obtenido como resultado matemático y real. Este hecho es también la explicación de que 6 estudiantes mencionen la toma de medidas como razón de la existencia de varias funciones (Figura 102).

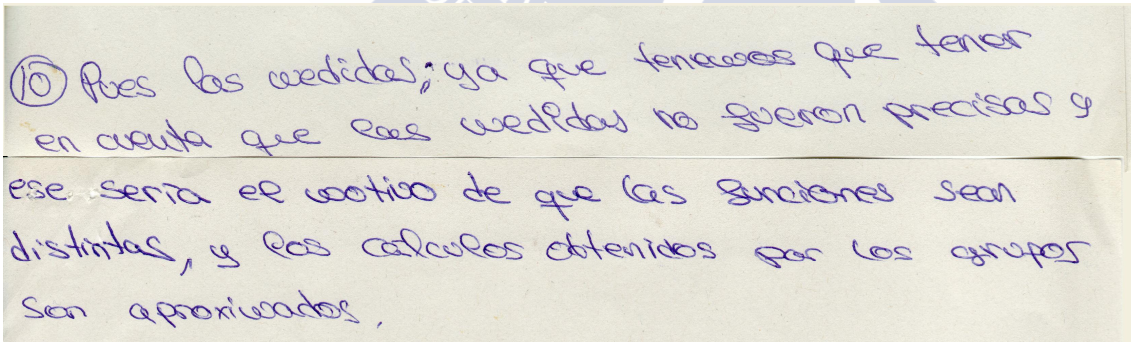

(10) Pues las medidas; ya que tenemos que tener
en cuenta que las medidas no fueron precisas y
ese sería el motivo de que las funciones sean
distintas, y los cálculos obtenidos por los grupos
son aproximados.

Figura 102. Alumno A10. Razón de la existencia de varios modelos

Transcripción: ñ*Pues las medidas; ya que tenemos que tener en cuenta que las medidas no fueron precisas y ese sería el motivo de que las funciones sean distintas, y los cálculos obtenidos por los grupos son aproximados.*ò

La toma de datos conlleva, de forma inevitable, un error en la toma de medidas pero no explica las diferencias de importancia entre algunas de las funciones. Por ejemplo, GM1 y GM2 obtienen las expresiones *y=0.02x+9.7* y *f(x)=0.1x+10.8*, respectivamente. GM4 y GM5 obtienen las funciones *f(x)=0.11x+11 y f(x)=0.02x+9.1*. Recordemos que los alumnos tenían escritas las funciones en el encerado del aula. La diferencia de los valores de *a* y *b* no se justifica de ningún modo con una toma de medidas con errores que, en definitiva, no serán mayores de unos pocos milímetros.

Como ya se ha mencionado, la explicación parece que se encuentra en que los alumnos conceden, en el proceso de modelización, una importancia superior a la obtención de la tabla de datos. La razón es que el contexto o problema encuadrado en la realidad tiene su primer reflejo matemático en la tabla de datos. Los datos de la tabla proceden de un proceso experimental que han realizado ellos mismos, algo que como se ha visto valoran muy positivamente. Habituados a utilizar datos proporcionados, en vez de usar datos obtenidos por sí mismos, la tabla de datos es percibida como *su* tabla y *sus* datos.

Los restantes procesos, aunque la realidad se halle muy presente, se realizan al margen de la realidad porque son matematizados de forma intensa en el ordenador. La matematización de la segunda fase representa una matematización y una virtualización de la realidad de los datos experimentales tan intensa que la realidad, en gran medida, desaparece. En la segunda fase, los muelles y sus características han desaparecido y, en realidad, ya no juegan ningún papel porque, en este segundo proceso de matematización de la realidad, los datos son números relacionados entre sí y representados en una tabla. Los pesos y las longitudes pasan a ser números que forman pares de puntos y estos, puntos del plano: *32 cm* ya no son *32 cm* sino solo *32*. Los puntos del plano pueden ser ajustados por una función matemática, lo que proporciona un resultado matemático. El resultado y modelo matemático es interpretado de forma deficiente como un resultado y modelo real porque el alumno prima la tabla de datos obtenida en la primera fase como resultado real frente a la función obtenida en la segunda fase. Las menciones continuas a la realidad y al fenómeno físico llevan a pensar que el modelo y el resultado matemático que representa la función es considerado, básicamente, como el resultado de una tarea matemática integrada plenamente en el mundo matemático. La vinculación de la función con el mundo real y con la tabla de datos se ha perdido, aunque sea parcialmente, durante el proceso de modelización.

Dicho de otro modo, el experimento, fuertemente unido a la actividad en el laboratorio, conllevó un primer producto resultado de un proceso de matematización, cuya representación es una tabla de datos. Los alumnos conceden una mayor importancia a esa matematización que a la matematización más intensa, o más integrada en el mundo de las matemáticas, que representa el volcado de datos y la obtención de la función de ajuste. De ahí que, a pesar de comprender y asumir, en general, que los muelles son diferentes y que eso repercute en la forma que adopta el modelo matemático y real, no usen de forma preferente el modelo matemático al responder las preguntas. Como se ha visto, eso ocurre incluso en los preguntas en las que se solicita expresamente que respondan utilizando la función (es decir, el resultado/modelo matemático y real). El hecho de no usar la función ni interpretarla en el contexto real significa que, para los alumnos, la función no representa el resultado matemático que debe ser interpretado para obtener una solución matemática y real a la situación real y problema planteado inicialmente.

La función y los parámetros presentes en la misma tienen una interpretación matemática y una interpretación en el contexto real. La interpretación matemática de la función proporciona la forma en que se relacionan dos variables matemáticas. La interpretación en contexto del tipo de relación entre las dos variables matemáticas proporciona la interpretación de cómo se relacionan las dos variables físicas. Lo mismo se podría decir de los parámetros, variables-constantes matemáticas, que tendrán una interpretación en contexto relacionada con las características de cada muelle (longitud sin ser sometido a peso y elasticidad del muelle). El no conceder el protagonismo a la función como resultado último de todos los procesos desarrollados, impide interpretarla para responder las preguntas relacionadas con el muelle real. El *logos*, asociado a la función como objeto matemático y su interpretación en términos matemáticos, no juega un papel de importancia. La tarea matemática se ve reducida a la *praxis* (uso de herramientas de toma de medidas, confección de la tabla de valores), lo que conlleva una limitación de la matematización realmente realizada, de mayor nivel o entidad que la que representa la tabla de datos.

5.1.2. Variables y parámetros

En las preguntas 2 y 3 la atención se centra en comprobar si los alumnos reconocen y diferencian las variables dependientes de las independientes y si vinculan los nombres asignados en la función a las variables (x e y) con las magnitudes del fenómeno físico estudiado (peso y longitud). También se intenta comprobar si los parámetros del modelo eran reconocidos y si eran mencionados como variables o no. Se tratan aquí los aspectos F1, F4 y F6 de las variables en relación funcional descritos por Ursini y Trigueros (2011) y la diferenciación jerárquica entre variable y parámetro y la condición de variable-constante de los parámetros.

En la segunda parte de la pregunta 3 (ñ¿qué significado tiene el parámetro en el experimento?ò) se pretende dilucidar si los estudiantes comprenden las conexiones y relaciones que existen entre el resultado matemático y el resultado real: la obtención de la función de ajuste consiste en una matematización de un caso real, con lo que nos encontramos en una fase intramatemática (trabajo en el seno de la Matemática), fuertemente relacionada con algo extramatemático (la situación real a modelizar encuadrada en el mundo real).

A estas dos preguntas se añade la primera pregunta correspondiente a la actividad de *Aceite y agua*. En el caso de *Aceite y agua*, la pregunta presenta, en su enunciado, el valor de k en la expresión $f(x)=k\sqrt{x}$ como una constante que varía. Por tanto, k se describe como variable-constante, algo que no se hacía en las preguntas 2 y 3 de *Muelle*. También se pretende conocer si los alumnos interpretan el parámetro como la forma de manifestarse en la función las condiciones iniciales diferentes de las que se parte.

5.1.2.1. Variable dependiente e independiente. Resultados de las respuesta a la pregunta 2: *¿Cuál es la variable* dependiente *y la variable independiente en la función?*

Los alumnos observan en el encerado las funciones que ha obtenido cada grupo al término de la segunda fase:

$y=0.02x+9.7$, $f(x)=0.1x+10.8$ y $f(x)=7.6x-103.4$ (GM1, GM2 y GM3; primer año)

$f(x)=0.11x+11$, $f(x)=0.02x+9.1$, $f(x)=0.02x+9.7$ (GM4, GM5 y GM6; segundo año)

A continuación presentamos una tabla con sus respuestas agrupadas en función de cómo identifican las variables dependiente e independiente.

Tabla 22. *Muelle*. Identificación de la variable dependiente e independiente.

		Alumnos
Identifican correctamente las variables dependiente e independiente.	Identifican las variables matemáticas (*x* e *y*) y establecen su correspondencia con las variables físicas (*peso* y *longitud)*	A3, A7, A18
	Identifican sólo las variables matemáticas (*x* e *y*)	A15, A21
	Identifican sólo las variables físicas (*peso* y *longitud).*	A4, A5, A6, A9
No identifican correctamente las variables dependiente e independiente	Identifican como variables dependiente e independiente los números *a* y *b* de la expresión $f(x)=ax+b$	A16, A17, A20, A22, A24
	Identifican *0.02x, 0.1x, 0.11x,* y *9.7, 10.8, 11* o *9.1* como variables dependiente e independiente	A1, A2, A8, A10, A14, A19
	Identifican *a* y *b* como variables dependientes y *x* como independiente o viceversa	A23, A25

Entre los que sí identifican correctamente las variables dependiente e independiente, se distinguen tres grupos claros. El primero, identifica las variables matemáticas y físicas (A3, A7 y A18; Figura 103), lo que significa que diferencian el resultado/solución matemática del real, con lo que se sitúan en el mundo matemático y en el resto del mundo.

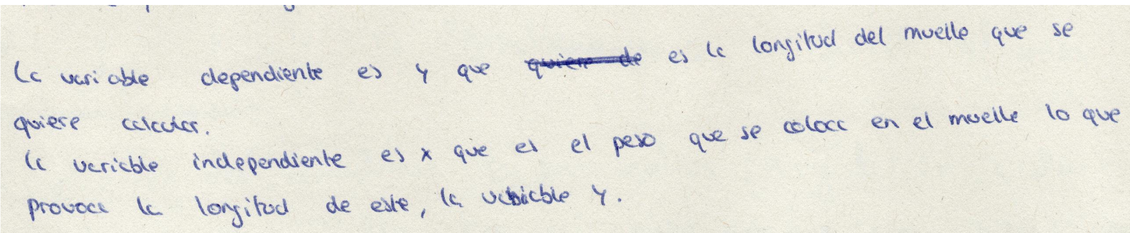

La variable dependiente es y que ~~quiere de~~ es la longitud del muelle que se quiere calcular.
La variable independiente es x que es el peso que se coloca en el muelle lo que provoca la longitud de este, la variable y.

Figura 103. Alumno A7. Identificación de las variables dependiente e independiente

Transcripción: **ñ***La variable dependiente es y, que es la longitud del muelle que se quiere calcular.*

La variable independiente es x, que es el peso que se coloca en el muelle, lo que provoca la longitud de éste, la variable y **ò**

Los otros, o bien se sitúan preferentemente en el mundo matemático (A15 y A21; Figura 103), con lo que las variables son las variables matemáticas, o bien en el mundo real (A4, A5, A6 y A9; Figura 104), con lo que las variables son peso y longitud.

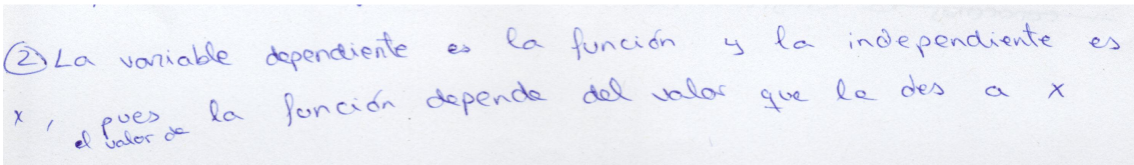


Figura 103. Alumno A15. Identificación de las variables dependiente e independiente

Transcripción: **ñ***La variable dependiente es la función y la independiente es x, pues el valor de la función depende del valor que le des a x***ò**

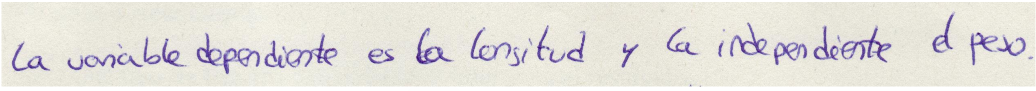


Figura 104. Alumno A9. Identificación de las variables dependiente e independiente

Transcripción: **ñ***La variable dependiente es la longitud y la independiente el peso***ò**

La identificación de variables como variables matemáticas y físicas, sólo matemáticas o sólo físicas, se vincula a la forma o estilo de pensamiento de los alumnos. Si identifican sólo las variables matemáticas o sólo las variables físicas, priman un resultado y solución (matemático o real) frente al otro. El primar una función, matemática o real, a la hora de contestar la pregunta, sitúa al alumno en uno de los dos mundos (matemático o real) y, como consecuencia, en lo intramatemático o en lo extramatemático. Así, el uso del resultado/solución matemática se vincula a la respuesta de las variables dependiente e independiente como *x* e *y*. Ese uso del resultado/solución matemática se correspondería con el œstilo analíticoô descrito por Borromeo (2004), más cercano al formalismo o la preferencia por la intramatemática que los otros estilos.

Inmersos en la intramatemática, usan conceptos, nociones y definiciones propios del mundo de las matemáticas y, que aparecen o están relacionados con el resultado/solución matemática. Los estudiantes que recurren al resultado/solución real, fundamentan sus razonamientos en el mundo real. El estilo de pensamiento asociado se aleja del formalismo matemático o de los conceptos, nociones y definiciones propios de las matemáticas. Se centran en lo extramatemático, por lo que sus respuestas se basan en cuestiones extramatemáticas vinculadas al mundo real. Con tal motivo, utilizan y mencionan las variables físicas en vez de las matemáticas y su referencia para contestar las preguntas es el mundo real, incluso aunque se solicite que respondan usando el resultado/solución matemática.

Como se ha visto, el *estilo visual* es perceptible en la respuesta de algunos alumnos en, fundamentalmente, la primera pregunta pero, en nuestro caso, no es el que determina su ruta de modelización de estos (Borromeo, 2007b). En las tres actividades que han realizado, la de modelización parte de una toma de datos experimental que, como hemos visto y volveremos a comprobar, posee una gran influencia en sus respuestas. Sus respuestas a preguntas sobre el modelo que han obtenido, como consecuencia de un proceso de modelización, establecen relaciones complejas entre el mundo real y el mundo matemático. Las relaciones que deben conectar ambos mundos para contestar las preguntas, configuran una ruta de modelización en la que el mundo real o el mundo matemático representa el eje de pensamiento. Es decir, los estilos de pensamiento se asocian a qué mundo asocian los resultados y el modelo obtenido. Así, pueden centrarse en el modelo matemático y los conceptos, nociones y definiciones matemáticas asociadas al mismo, lo que determina un estilo de pensamiento que denominaremos *intramatemático*. Si su estilo de pensamiento se centra en la tabla de datos, las variables físicas (peso y longitud), los parámetros vinculados a las condiciones iniciales y el modelo interpretado desde lo real, el estilo de pensamiento lo denominaremos como *extramatemático*. Si se mueven entre lo intra y lo extramatemático, estableciendo relaciones entre el modelo matemático y real en sus respuestas, el estilo lo denominaremos como *integrado*.

Cada estilo, a su vez, se vincula a una componente de la actividad como praxeología. Así, el estilo extramatemático concede una gran relevancia a la tabla de datos como resultado matemático, lo que se encuentra más vinculado al *saber hacer* o la praxis. El estilo intramatemático se vincula más al *saber* o al logos y el integrado representa un equilibrio entre *saber* y *saber hacer* o entre praxis y logos.

Lo que parece realmente destacable, es la cantidad de estudiantes que no es capaz de identificar correctamente las variables dependiente e independiente en una función tan sencilla (13 alumnos, 59%). La confusión en todos ellos posee la misma raíz: la confusión entre variable dependiente e independiente con los parámetros. Todos ellos, aunque de tres formas diferenciadas (Tabla 22), confunden las variables dependiente e independiente con los parámetros o con partes de la expresión funcional en la que se encuentran involucrados los parámetros.

5 alumnos (22.7%) confunden los parámetros (*a* y *b*) con las variables dependiente e independiente (Figura 105) y 6 (27.3%) identifican el valor concreto de *ax* en cada función como variable dependiente y el valor concreto de *b* con la independiente (Figura 106).

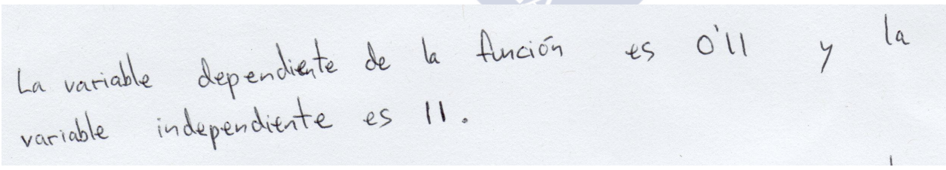


Figura 105. Alumno A17. Identificación de las variables dependiente e independiente

Transcripción: **ñ***La variable dependiente de la función es 0.11 y la variable independiente es 11.***ò**

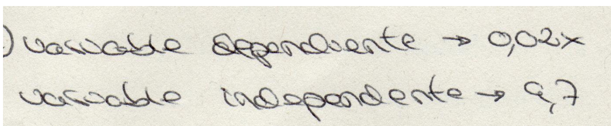


Figura 106. Alumno A8. Identificación de las variables dependiente e independiente

Transcripción: **ñ***Variable dependiente ->0.02x. Variable independiente ->9.7***ò**

Al ser preguntados por su respuesta, no recuerdan el porqué de esa confusión y, en ocasiones, se sorprenden de lo que escriben. Este hecho es habitual en sus entrevistas y, en parte, se justifica por haberlas realizado casi un año después de la realización de las actividades. De todos modos, las entrevistas proporcionan claves del porqué de esa identificación de los parámetros como variables dependiente e independiente:

10 Profesor: ¿Y por qué le llamas dependiente a *11x* e independiente a *11*?

11 A14: ¡Ah! La dependiente es *f* de *x*.

12 Profesor: Sí, ¿y la independiente?

13 A14: *x*

14 Profesor: ¿Y por qué contestaste aquí *011x* y *11?*

15 A14: No sé.

16 Profesor: Ni idea, no te acuerdas.

17 A14: Porque [*se ríe*] [...] Sería porque aquí no hay *x* y en el otro sí.

6 A17: ¡Puff! Sería *011x*, no sé, la independiente *11* por no llevar la *x* le pondría, no sé.

20 A16: [...] Eh, sí, la dependiente es la que depende de la *x*, entonces la independiente es la que es siempre constante [...] [*Se ríe*].

La dependencia e independencia de las variables se determina en función de su vinculación mediante la operación de la multiplicación con *x*. El número *a* se halla multiplicando a *x* y, por tanto, el cálculo asociado a un valor concreto de *x* se vincula al valor de *a*. El número *b* suma su valor al de *ax* y, por tanto, su influencia en el resultado final es independiente del valor que tome *x*. Su influencia en el resultado de *f(x)* es siempre la misma, no cambia. Lo curioso (o preocupante), es que alumnos que estaban estudiando el segundo curso del Bachillerato Científico-Tecnológico y que ya habían estudiado el bloque de Análisis Matemático, duden todavía sobre qué variable es la dependiente y cuál la independiente:

9 Profesor: ¿Pero ahora contestarías lo mismo o no?

10 A17: Sí.

24 A16: Claro, la variable es *x* ahora.

25 Profesor: ¿Y la independiente?

26 A16: Claro la independiente sería la otra, la que sería la *b*.

En definitiva, observan que el valor de *a* y *b* varía en las expresiones que observan en el encerado y, por tanto, asumen que sus valores son variables. No contemplan una condición de variable en una función diferente a la de variable dependiente e independiente, por lo que las variables *a* y *b* deben estar asociadas de alguna forma a la variable dependiente e independiente. Es decir, no contemplan la presencia de parámetros como variables.

A23 y A25 identifican *a* y *b* con la variable dependiente o independiente (Figura 107), en una variante de lo anterior.

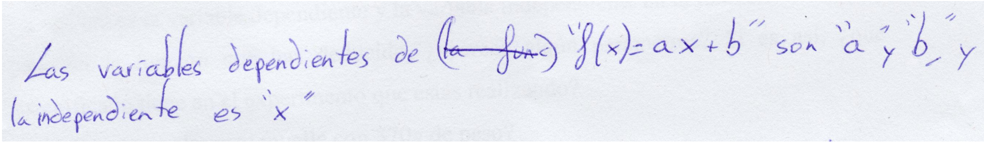


Figura 107. Alumno A25. Identificación de las variables dependiente e independiente

Transcripción: *ñLas variables dependientes de ñf(x)=ax+bò son ñaò y ñbò, y la independiente es ñxòò*

No utilizan su vinculación con la variable *x* por una operación, pero la consideración de *a* y *b* como variables, sin contemplar una posibilidad diferente de la variable funcional como variable dependiente o independiente, se halla también presente. Conscientes de que la variable independiente es *x*, las otras variables deberán ser las dependientes.

En resumen, sólo admiten la posibilidad de las variables funcionales dependiente e independiente. No son capaces de interpretar, en términos matemáticos, la existencia de un tipo de variable funcional que es variable (observando el conjunto de resultados matemáticos), y constante (en cada caso concreto). Dicho de otro modo, no contemplan la posibilidad de la presencia de parámetros (que se manifiestan como variables-constantes vinculadas a las condiciones iniciales) en la relación funcional. Esta imposibilidad de la existencia de variables-constantes, en las expresiones funcionales que han obtenido, volverá a aparecer, más claramente si cabe, en las siguientes dos preguntas que analizaremos a continuación.

5.1.2.2. Identificación de parámetros. Resultados de las respuesta a la pregunta 3: *En la función que has deducido, ¿aparece algún parámetro? Si es así, ¿qué significado tiene en el experimento que estás realizando?*

Se pregunta al alumno por los parámetros presentes en la función y la razón de ser de los mismos en el contexto del fenómeno físico que han modelizado matemáticamente. Los valores de *a* y *b* en la expresión *f(x)=ax+b* se corresponden, respectivamente, con una constante vinculada a la elasticidad del muelle y a la longitud del muelle sin ser sometido a peso. Es decir, los valores de *a* y *b* es la forma en la que las condiciones iniciales del fenómeno físico se manifiestan matemáticamente en la función. Se trata de comprobar si los alumnos diferencian las variables dependiente e independiente de las variables-constantes. Ambos tipos de variables aparecen de forma habitual en procesos de modelización pero con significados e interpretaciones muy diferentes.

Las variables *x* y *f(x)* (o *y*) poseen un significado matemático y real, por lo que pueden ser interpretadas desde lo matemático y desde lo real. Su interpretación desde el mundo real se realiza por simple identificación de la variable matemática con una magnitud física: *x*=peso, *y*=longitud. La condición de *a* y *b* como parámetros se asocian a una familia de funciones (función afín, *f(x)=ax+b*) desde una interpretación desde el mundo de las matemáticas. La interpretación desde el mundo real, asocia sus valores a una obtención de datos realizada con un muelle concreto y, por tanto, a una función vinculada a *este muelle concreto*. Así, la interpretación de la función, tomando en consideración el muelle que se ha usado, lleva a la consideración de *a* y *b* como constantes vinculadas al mismo. Sin embargo, la interpretación de la función, tomando en consideración todos los casos estudiados por los diferentes grupos, lleva a observar el carácter variable de *a* y *b* y la dependencia de su valor de las condiciones específicas de cada muelle. La identificación de parámetros es, por tanto, más compleja que la identificación de las variables dependiente e independiente.

La razón de no incluir esta pregunta en el bloque dedicado a la interpretación, a pesar de solicitarla, se explica en las respuestas de los alumnos, que presentamos en la siguiente tabla:

Tabla 23. *Muelle*. Identificación de parámetros

	Alumnos
Responde que sí	A21, A3
Responde que no, sin aportar razones de su respuesta	A1, A2, A4, A5, A10
Contesta que no sabe qué es un parámetro o que no sabe qué contestar	A14, A15, A16, A17, A18, A20, A22, A23, A25
Deja en blanco la respuesta	A6, A7, A8, A9, A19, A24

Los que responden que no aparecen parámetros en la función, no aportan razones de su respuesta, lo que indica que, en realidad, no saben qué es un parámetro. Los comentarios sobre la presencia de parámetros en las entrevistas, apoyan esta afirmación:

18 Profesor: (é) A ver, en la tercera, te pregunta ¿en la función que ha deducido aparece algún parámetro? Si es así, qué significado tiene en el experimento que has realizado? Lo que contestas es "*supongo que sí pero no sé qué es un parámetro***ò**

19 A14: [...] Tampoco lo sé ahora.

33 Profesor: ¿Y ahora sabes lo que es un parámetro?

34 A15: Muy claro no, no.

31 A16: Ahora sé lo que es un parámetro.

32 Profesor: ¿Ahora sí lo sabes?

37 A16: Pues serían *a* y *b* los parámetros.

15 Profesor: Entonces, si es así, tú simplemente dices ñ*no tengo la menor idea de lo que es un parámetro*ò [*lee lo que escribió el alumno*]. Es decir, imposible contestar si no sabes qué es. Y ahora, ¿sabes qué es?

16 A17: Pues [*se ríe*]. Creo que no [*se ríe*].

41: Profesor: La pregunta es muy clara. En la función que dedujiste, que es ésta, ¿no? [*le señala la función incluída en sus hojas de respuesta*] ¿Aparece algún parámetro? Sí, no, y si la respuesta es sí, cuál.

42 A19: No sé, es que, no sabría responder.

En el momento de realizar las entrevistas, sólo A1 y A16 saben qué es un parámetro. A16 reconoce que en el momento de realizar las actividades no sabía qué es un parámetro pero que ahora sí lo sabe. La razón de A1 para saberlo es que *usan* los parámetros en el curso de Ingeniería que está realizando:

90 Profesor: Pero, por ejemplo, parámetro. Esa palabra, parámetro.

91 A1: Parámetros. Es que con parámetros trabajamos ahora [*se ríe*].

92 Profesor: ¡Ah! Con parámetros trabajas ahora.

93 A1: Sí.

94 Profesor: Entonces identificar parámetros es de ahora, no es de segundo [*de Bachillerato*].

95 A1: Sí, lo de identificar parámetros, sí. Pero claro tener constancia de que esto, si son diferentes en todas las funciones, o sea, si esto es diferente a las funciones de los demás, que tenían los demás, está claro que esto tienen que ser, son parámetros propios, míos, son mis parámetros, los parámetros del muelle que tengo.

96 Profesor: Pero eso, darle el nombre a eso de parámetro, ¿es de este año?

97 A1: Quizá sí.

Ningún alumno, salvo el A21, sabe qué significa la palabra ôparámetroõ, lo que impide que los identifiquen. No identificar la palabra con su significado impide interpretarlo, por lo que, salvo el A21 (Figura 108), ninguno realiza una interpretación.

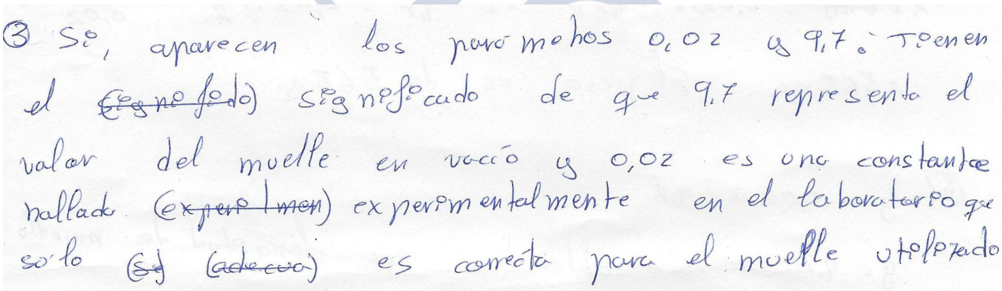

③ Sí, aparecen los parámetros 0,02 y 9,7. Tienen el ~~(significado)~~ significado de que 9.7 representa el valor del muelle en vacío y 0,02 es una constante hallada ~~(experimen)~~ experimentalmente en el laboratorio que sólo ~~(es)~~ ~~(adecua)~~ es correcta para el muelle utilizado

Figura 108. Alumno A21. Identificación de parámetros

Transcripción: ñ*Sí, aparecen los parámetros 0.02 y 9.7. Tienen el significado de que 9.7 representa el valor del muelle en vacío y 0.02 es una constante hallada experimentalmente en el laboratorio que sólo es correcta para el muelle utilizado*ò

De esa forma, la respuesta de ósíô o ónoô es improvisada porque, en realidad, no saben qué es un parámetro. La improvisación, desde el desconocimiento, es evidente en el caso del otro alumno que responde que sí se hallan presentes parámetros (A3, Figura 109).

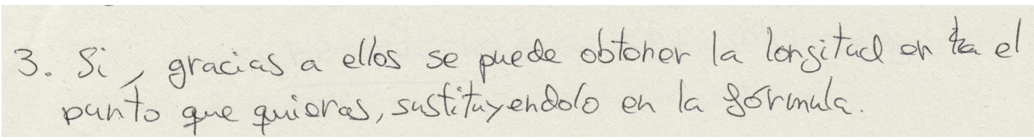

3. Sí, gracias a ellos se puede obtener la longitud en ~~ta~~ el punto que quieras, sustituyéndolo en la fórmula.

Figura 109. Alumno A3. Identificación de parámetros

Transcripción: ñ*Sí, gracias a ellos se pueden obtener la longitud en el punto que quieras, sustituyéndolo en la fórmula*ò

Se observa que confunde el parámetro con un valor concreto de la variable independiente, es decir, con un valor concreto de peso. De ahí que conteste que ñsustituyéndoloò se pueda obtener la ñlongitud en el punto que quierasò.

Sorprende que, cursando 1º de Bachillerato no sepan el significado de la palabra óparámetroô, ni en el contexto matemático ni en el contexto del fenómeno físico. Sorprende aún más que la mayoría de los entrevistados tampoco lo sepan un año después.

Los parámetros se introducen tanto en Álgebra como en Análisis en 2º de ESO. De hecho, los participantes estudiaron las representaciones gráficas de funciones por primera vez en ese curso (Orden ECI/2220/2007). Como primera representación gráfica de una función asociada a su expresión analítica se utiliza, ese mismo curso, la función lineal y afín. Se presentan ambas como $f(x)=ax$ y $f(x)=ax+b$ (o como $y=ax$ y $y=ax+b$), asignándoles a a y b nombres relacionados con su influencia en la representación gráfica (pendiente y ordenada en el origen). En ese mismo curso o en los siguientes de ESO, es común nombrar como parámetros la presencia de variables-constantes en expresiones matemáticas. La mención de los parámetros se vuelve habitual en Bachillerato, no sólo en la asignatura de Matemáticas. El desconocimiento de los estudiantes del significado de la palabra óparámetroô, a pesar de su uso habitual en el aula, ejemplifica la escasa importancia que concede al logos asociado al conocimiento matemático.

En virtud de una enseñanza basada en la praxis, es decir, en la obtención de resultados correctos de ejercicios o problemas básicamente algorítmicos, el parámetro, su significado e interpretación no juega ningún papel. La falta de actividades en las que sea necesario el uso e interpretación de parámetros abunda en lo innecesario del conocimiento de su significado. De ahí la mención de A1 a que conoce su significado porque ese año *usa* los parámetros. Su comentario integra el uso y la interpretación en contexto, algo fundamental en el caso concreto de los parámetros. Es decir, la comprensión de qué es un parámetro requiere su uso (como hacen todos los grupos en todas las actividades) y su interpretación (lo que sólo hace un alumno). Uno sin el otro no es posible.

Como veremos en la siguiente pregunta, a pesar de que los estudiantes han *usado* parámetros, no interpretan la presencia de una constante-variable en el resultado/solución que han obtenido, aunque la condición de constante-variable se presente en el enunciado de la pregunta con claridad.

5.1.2.3. Identificación de parámetros. Resultados de las respuesta a la pregunta 1 de *Aceite y Agua*: *La función que rige los datos es siempre de la forma f(x)=$k\cdot\sqrt{x}$, siendo k una constante, x la cantidad de aceite en ml y f(x) el diámetro en mm. La k es diferente dependiendo de cada caso. En ese sentido, k varía. ¿Sería apropiado darle el nombre de "variable"? ¿Por qué? ¿Usarías otro nombre? ¿Por qué crees que k varía en cada caso estudiado?*

En esta parte de la actividad *Aceite y agua* participaron todos los alumnos excepto A11 y A13.

En esta pregunta, aunque centrada como la anterior en los parámetros, se cambia totalmente el enunciado. En la cuestión 3 de *Muelle* se preguntaba si se hallaban presentes parámetros y se solicitaba que interpretasen su significado en el contexto real. En este caso, se presenta el valor de *k* como una variable que, al mismo tiempo, es constante. Es decir, *k* se presenta en el enunciado de la pregunta claramente como una variable-constante. Se centra, por tanto, en la diferenciación entre variable y variable-constante, sin que en el enunciado aparezca la palabra “parámetro”. Al igual que en *Muelle*, los alumnos observaban escritas en el encerado del aula las funciones que habían obtenido previamente: $f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$, $f(x)=1.8\cdot\sqrt{x}$ el primer año y $f(x)=2.63\cdot\sqrt{x}$, $f(x)=2.1\cdot\sqrt{x}$, $f(x)=1.78\cdot\sqrt{x}$ el segundo. De esa forma, la condición de *k* como variable-constante se presentaba textualmente y se constataba, además, de forma visual en las expresiones analíticas de las funciones escritas en el encerado.

La siguiente tabla muestra las dificultades de los alumnos con el concepto o noción de variable-constante o, lo que es lo mismo, con el concepto o noción de parámetro.

Tabla 24. *Aceite y agua*. Identificación de parámetros

	Alumnos
Contesta que *k* es una variable	A2, A3, A8, A9, A10, A17, A18, A20, A21, A23, A24
Contesta que *k* es una constante	A6, A12, A14, A15, A16, A22
Contesta que *k* es una variable (o una constante) para contradecirse posteriormente y afirmar que es una constante (o una variable)	A1, A4, A5, A7, A19, A25

Destacamos, en primer lugar, la diferencia de lo que ocurre con la pregunta 3 de *Muelle*. En la pregunta sobre parámetros de *Muelle*, responden sí o no y, en algunos casos, añaden pequeños comentarios. En esta pregunta, incluyen comentarios mucho más extensos para justificar su respuesta. La razón es que no conocer el significado de la palabra “parámetro” les impide justificar su afirmación o negación en la pregunta de *Muelle*. En la pregunta de *Aceite y agua* sólo aparecen en el texto las palabras “variable” y “constante”, de significado conocido por los estudiantes. De ahí que intenten justificar sus respuestas en base a sus conocimientos del significado matemático de ambas palabras.

Ante el enunciado de la pregunta que presenta el valor de *k* como una variable que, al mismo tiempo, es una constante, los alumnos se dividen entre afirmar que es una variable o afirmar que es una constante. A21, que hemos visto en la pregunta 3 de *Muelle* que identificaba, interpretaba y nombraba correctamente los parámetros presentes en la función *f(x)=ax+b* (Figura 108), en esta ocasión no contempla la posibilidad de la existencia de una variable que sea al mismo tiempo una constante (Figura 110). En su respuesta prima su condición de variable frente a su condición de constante.

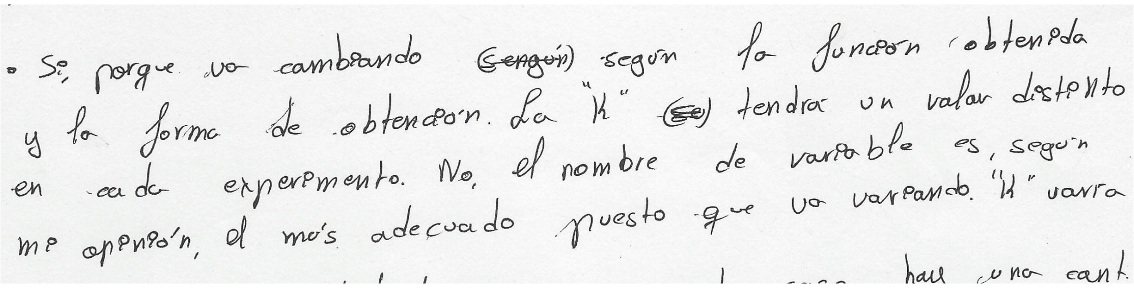

• Sí, porque va cambiando ~~según~~ según la función obtenida
y la forma de obtención. La "k" ~~es~~ tendrá un valor distinto
en cada experimento. No, el nombre de variable es, según
mi opinión, el más adecuado puesto que va variando. "k" varía
hay una cant.

Figura 110. Alumno A21. *Aceite y agua.* Identificación de parámetros

Transcripción: ñ*Sí, porque va cambiando según la función obtenida y la forma de obtención. La* ***ñ****k****ò*** *tendrá un valor distinto en cada experimento. No, el nombre de variable es, según mi opinión, el más adecuado puesto que va variando.****ò***

Como se observa en la Tabla 24, la opinión de que *k* es una variable de A21 es mayoritaria (11 alumnos, 47.8%). Utilizan el mismo razonamiento que ese alumno: la constatación de que el valor de *k* varía en la función que obtiene cada uno de los grupos (Figura 111).

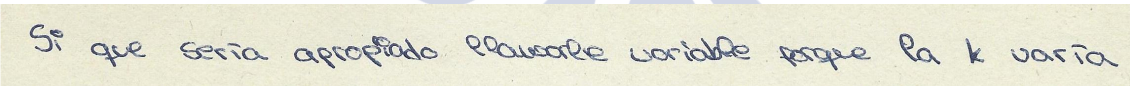

Sí que sería apropiado llamarle variable porque la k varía

Figura 111. Alumno A10. *Aceite y agua.* Identificación de parámetros

Transcripción: **ñ***Sí que sería apropiado llamarle variable porque la k varía.****ò***

6 alumnos (26%) optan por afirmar que se trata de una constante. Por ejemplo, A14 fundamenta su opinión en que en cada función que han obtenido y que observan en el encerado, el valor de *k* es una constante (Figura 145).

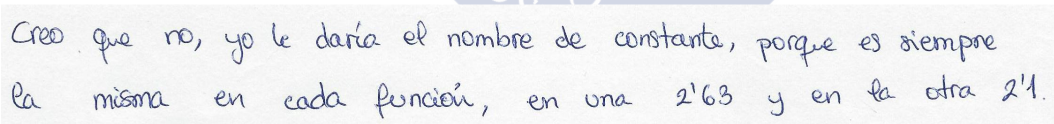

Creo que no, yo le daría el nombre de constante, porque es siempre
la misma en cada función, en una 2'63 y en la otra 2'1.

Figura 145. Alumno A14. *Aceite y agua.* Identificación de parámetros

Transcripción: **ñ***Creo que no, yo le daría el nombre de constante, porque es siempre la misma en cada función, en una 2.63 y en la otra 2.1****ò***

A25 también es partidario de asignarle el nombre de variable, pero lo que escribe incluye una diferencia fundamental con el resto de sus compañeros (Figura 112).

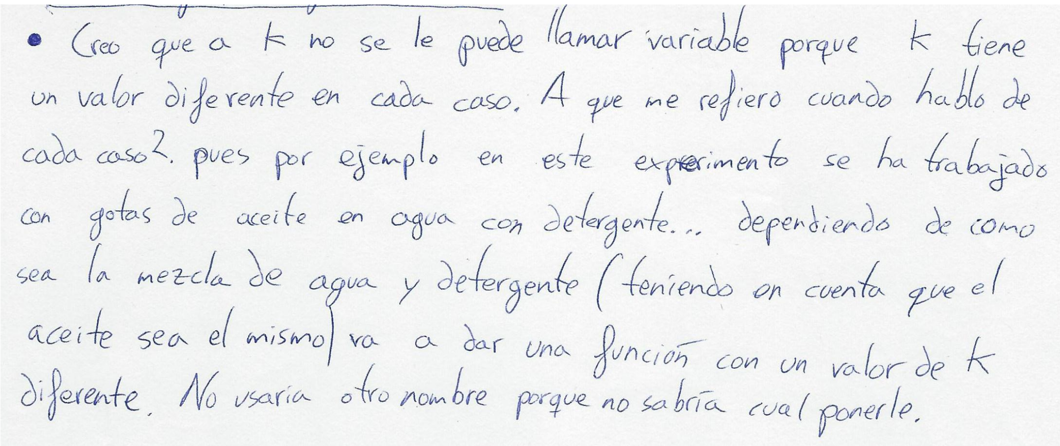

• Creo que a k no se le puede llamar variable porque k tiene un valor diferente en cada caso. A que me refiero cuando hablo de cada caso? pues por ejemplo en este experimento se ha trabajado con gotas de aceite en agua con detergente... dependiendo de como sea la mezcla de agua y detergente (teniendo en cuenta que el aceite sea el mismo) va a dar una función con un valor de k diferente. No usaria otro nombre porque no sabría cual ponerle.

Figura 112. Alumno A25. *Aceite y agua.* Identificación de parámetros

Transcripción: ñ*Creo que a k no se le puede llamar variable porque k tiene un valor diferente en cada caso. ¿A qué me refiero cuando hablo de cada caso?. Pues, por ejemplo, en este experimento se ha trabajado con gotas de aceite en agua con detergente**é** dependiendo de cómo sea la mezcla de agua y detergente (teniendo en cuenta que el aceite sea el mismo) va a dar una función con un valor de k diferente. No usaría otro nombre porque no sabría cuál ponerle**ò***.

Basándose en que el valor de *k* varía en las funciones de cada grupo, afirma que el nombre apropiado es el de variable. Al mismo tiempo, es consciente de que su valor es constante en cada una de las funciones y que depende de las condiciones iniciales, por lo que *k* es, al mismo tiempo, constante. No le asigna nombre porque ñno sabría cuál ponerleò. Como ónoo sabeô que las variables-constantes son comunes en matemáticas y reciben el nombre de parámetros, opta por llamarle variable.

Ante el problema de tratarse claramente de una variable que es constante, algunos alumnos (A1, A4, A5, A7 y A19) entran en contradicciones. No admitir la posibilidad de la existencia de una variable-constante, les lleva a decantarse por afirmar que es variable o que es constante bajo justificaciones diferentes. Por ejemplo, A19 afirma inicialmente que es una constante que varía (Figura 113).

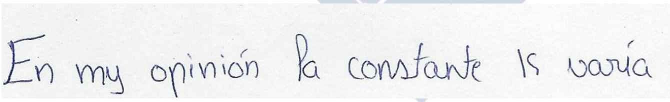

En my opinión la constante k varía

Figura 113. Alumno A19. *Aceite y agua.* Identificación de parámetros

Transcripción: **ñ***En mi opinión la constante k varía.***ò**

Más tarde, utiliza el hecho de que si la cantidad de agua y detergente fuese la misma, el valor de *k* sería constante (salvo pequeñas diferencias por errores en la toma de medidas). Su respuesta, además, incluye un comentario interesante. Menciona que ñla variable es la *x*ò (Figura 114).

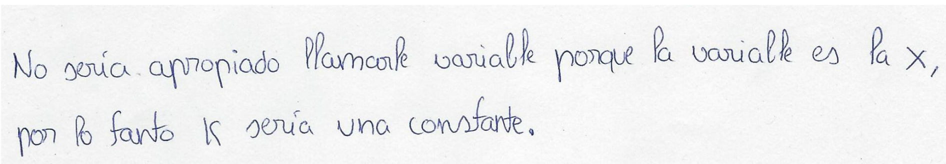

No sería apropiado llamarle variable porque la variable es la x, por lo tanto k sería una constante.

Figura 114. Alumno A19. *Aceite y agua.* Identificación de parámetros

Transcripción: **ñ***No sería apropiado llamarle variable porque la variable es la x, por lo tanto k sería una constante***ò**

Suponiendo que su atención se centra en el segundo miembro de la igualdad funcional, este estudiante no admite en la relación funcional la existencia de una variable que no sea la variable independiente. Con tal motivo, *k*, que ha afirmado previamente que varía, no puede ser variable, por lo que debe ser una constante. Para poder afirmar que es una constante, acude a que si las condiciones iniciales fuesen las mismas, el valor de *k* no variaría. Su caso no es el único. En la Tabla 25 se incluyen las razones que utilizan para justificar que *k* es una variable o una constante:

Tabla 25. *Aceite y agua*. Justificación del carácter de *k* como variable o como constante

Para justificar que k es variable o constante utilizan:		**Alumnos**
Las condiciones iniciales	La falta de precisión en la toma de medidas, en el nº de datos, la diferencia del nº de litros de agua y la cantidad de detergente	A1, A4, A5, A10, A16, A18, A23
	La diferencia en el nº de litros de agua y la cantidad de detergente	A7, A14, A17, A19, A21, A25
La falta de precisión en la toma de medidas y/o en el nº de datos	A2, A15, A20	
Describen el proceso de obtención de datos y sus observaciones	A3, A8	
k es constante porque las variables son *x* y el ñresultado del cálculoò	A6, A9, A15, A19, A22	

Como se observa, 5 alumnos (21.7%) acuden a las variables funcionales dependiente e independiente para negar la posibilidad de que *k* sea variable. La respuesta de A18 (Figura 115), indica que la identificación de las variables funcionales sólo con *x* y *f(x)* se halla presente en más alumnos que esos 5. Además, la respuesta de A18 es un ejemplo claro del desconcierto de los participantes a la hora de responder. Ha decidido que *k* es una variable y como la única variable independiente que admite es *x*, *k* debe ser nombrado como *x*.

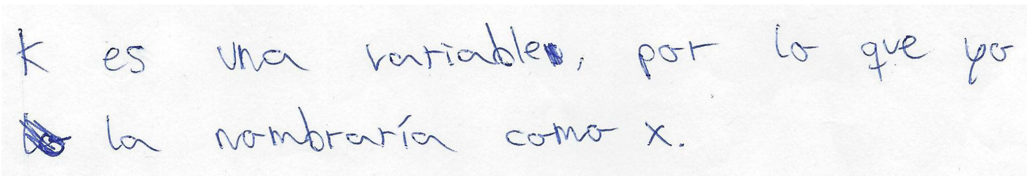

k es una variable, por lo que yo la nombraría como x.

Figura 115. Alumno A18. *Aceite y agua.* Identificación de parámetros

Transcripción: **ñ***k es una variable, por lo que yo la nombraría como x***ò**

Se ha mencionado con anterioridad la importancia que conceden a la fase de obtención de datos en *Muelle* y su influencia en sus respuestas. En esta pregunta, sin embargo y por el contrario, al responder muchos se centran en el mundo de las matemáticas. Es decir, en *Muelle* predomina lo extramatemático y en esta pregunta lo intramatemático. Las razones y justificaciones que utilizan en la respuesta están basadas en sus conocimientos sobre variables funcionales. k es claramente identificada como una variable-constante en el enunciado de la pregunta, pero como sólo admiten la existencia de las variables dependiente e independiente -variables funcionales específicas del mundo matemático-, k debe ser una constante. Si el estudiante cree que k es una variable, ante el problema de contemplar sólo x y $f(x)$ como variables, entra en contradicción, llegando incluso, como es el caso de A18, a proponer nombrarla como x.

La realidad, identificada con el mundo real en el que la actividad se contextualiza, ha desaparecido porque aunque son conscientes de que x es el valor en *ml* de la cantidad de aceite, obvian este hecho y se refieren a x como óvariableô, sin relacionarlo en ningún momento con la magnitud física. La realidad, persistente en sus respuestas anteriores y presente en el enunciado, desaparece en beneficio del mundo matemático y sus conocimientos y reglas. Así, el conocimiento matemático (o su falta) vinculado al *saber*, determina la respuesta del alumno cuando éste se sitúa en el mundo matemático para buscar y proporcionar una respuesta. De esa forma, las carencias del conocimiento matemático vinculado al logos (por ejemplo, en lo referente a las definiciones, conceptos y nociones matemáticas), determinan las carencias en las respuestas.

Que los alumnos no admitan la existencia de variables-constantes como un tipo de variable funcional, indica que el uso de los deslizadores en Geogebra, durante la fase de obtención de la función de ajuste, no ha ayudado a comprender la presencia de variables diferentes a la dependiente e independiente en las funciones. Así, no se ha producido una identificación del deslizador con un parámetro. Eso, por otro lado, significa que el uso que los alumnos hacen de las familias de funciones no representa en modo alguno que asuman que en las expresiones analíticas funcionales se hallan presentes parámetros que modifican la función y su gráfica. Dicho de otro modo, no sólo desconocen el significado de la palabra óparámetroô, sino que tampoco comprenden el concepto o noción de parámetro. Este hecho, como hemos visto, posee repercusiones de importancia sobre sus respuestas en la interpretación del resultado/solución obtenida, tanto matemática como real.

Por otro lado, en las tres actividades se hallan presentes el mundo real, el tecnológico y el mundo de las matemáticas. El mundo real y el de las matemáticas poseen una gran influencia sobre la respuesta del alumno, pero el mundo tecnológico (fundamental en la segunda fase), no posee ningún tipo de influencia sobre la respuesta. Dicho de otro modo, la presencia o integración del mundo tecnológico en el proceso de modelización se ha reducido a su uso como útil, a su reducción a la reproducción de una técnica previamente aprendida y puesta en práctica.

A la hora de explicar la variabilidad del valor de k, ésta debería basarse en las condiciones iniciales en las que se desarrolló la toma de datos. Como observamos en la

Tabla 25, sólo 6 estudiantes justifican el valor de k en base a las condiciones iniciales diferentes (volumen de agua y de cantidad de detergente). Otros 7 añaden a las condiciones iniciales diferentes la forma en que se tomaron los datos. Por tanto, una mayoría de ellos (13 alumnos, 56.5%) comprende que las condiciones iniciales influyen en el valor de k pero no son capaces de vincular ese hecho con que k sea una variable-constante.

El hecho de no admitir una variable diferente de la dependiente e independiente conlleva que la explicación de su variabilidad no se busque por los restantes participantes en las condiciones iniciales sino en otro sitio. Como ocurría en el caso de *Muelle* con los valores de a y b, algunos encuentran una forma de negar la variabilidad de k en una toma de medidas deficiente, el uso no adecuado de instrumentos, etc. pero se añade la imposibilidad de la existencia de una variable diferente de x. Esta inclusión de la variable independiente sólo puede venir motivada por la búsqueda de respuesta desde el mundo matemático, donde se inserta la función matemática y las variables matemáticas funcionales como resultado.

Como hemos visto, los estudiantes pueden situarse en el mundo real o en el mundo matemático. Al responder una pregunta, centra su atención en un modelo y un resultado (matemático o real) y realiza una interpretación del mismo en un contexto concreto (mundo real o matemático). Qué modelo y resultado utilicen y en qué mundo lo interpreten determina su respuesta. En las siguientes dos preguntas (4 y 5 de *Muelle*) esto se hará, si cabe, más evidente.

5.1.3. Uso del modelo para obtener datos no presentes en la tabla de datos. Resultados de las respuestas a las pregunta 4 y 5 de *Muelle*: *4. ¿Cuánto se alarga el muelle con 370g de peso?* *5. ¿Qué peso se corresponde con 21cm de longitud del muelle?*

Las preguntas solicitan que proporcione un valor de peso y longitud que no se ha usado ni ha aparecido en la tabla de datos. Se trata de los aspectos F2 y F3 que describen Ursini y Trigueros (2006) como necesarios para trabajar exitosamente con variables en relación funcional. Como hemos indicado en la descripción de las actividades, las preguntas son, en principio, de respuesta muy sencilla. Disponen de un modelo real que consiste en una función que relaciona peso con longitud. Por tanto, la respuesta debería ser inmediata: conocido el valor de una de las variables, calcular el valor de la otra utilizando la función. Se trata, en definitiva, del uso del modelo como forma de obtener datos no conocidos.

Una parte de los estudiantes han realizado el cálculo esperado utilizando el modelo que han obtenido que, por otro lado, es la opción lógica. La sorpresa proviene de que una parte muy importante no hacen lo esperado:

Tabla 26. *Muelle*. Uso del modelo obtenido: cálculo de longitud y peso no presentes en la tabla de datos

Para responder las preguntas		**Alumnos**
Utiliza la función	En ambas preguntas	A4, A5, A7, A14, A19, A21
	Sólo en una de las preguntas	A1, A2, A6, A9
Utiliza una regla de tres	En ambas preguntas	A3, A8, A10, A16, A22, A24
	Sólo en una de las preguntas	A1, A2, A6, A9, A15, A20
No utiliza ni la regla de tres ni la función en ninguna de las preguntas	A17, A18, A23, A25	

6 alumnos (27.3%) usan la función en ambas preguntas. 4 más la usan sólo en una de las preguntas: A1 en la pregunta 5, A6 y A9 en la 4. A2 usa la función en la pregunta 4 pero realiza, al mismo tiempo, una regla de tres (Figura 116).

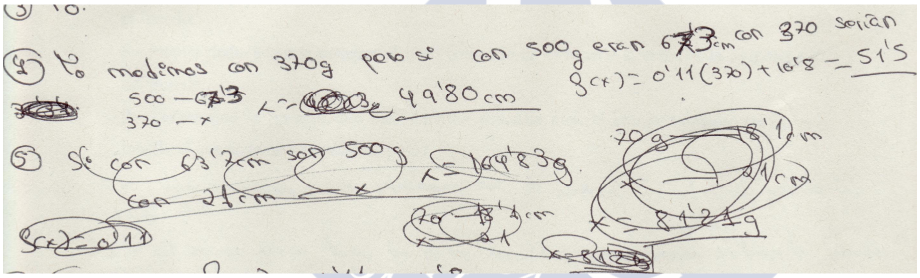


Figura 116. Alumno A2. *Muelle*. Respuesta a las preguntas 4 y 5

Transcripción: **ñ***No medimos con 370 g pero sí con 500 g. Eran 67.3 cm, con 370 serían***ò**

A2 obtiene dos resultados diferentes (48.8 g y 51.5 g) y no aclara cuál es el correcto, subrayando los dos. En la pregunta 5 realiza dos reglas de tres y parece empezar a realizar el cálculo con la función, pero tacha todo y deja la pregunta en blanco. La razón de tachar proviene de que, al usar la regla de tres y la función, obtiene valores distintos de peso. No es capaz de explicar la razón de que obtenga dos valores claramente distintos pero opta por dejar ambas respuestas de todos modos. En la pregunta 5 hace lo mismo, pero añade una segunda regla de tres. Tiene ya dos valores diferentes de peso al que se añadirá un tercer valor procedente del uso de la función. Ante la contradicción implícita en su respuesta, opta por tachar. La razón del uso de la regla de tres que hace A2, y otros, la encontramos en la importancia concedida a la experiencia en el laboratorio y en el resultado de la primera matematización que realizan, que se representa en forma de una tabla de datos. El uso del modelo obtenido en la segunda fase se manifiesta en el uso de la función. Los dos resultados, matemáticos y reales (la tabla y la función), proporcionan dos valores distintos de peso, lo que le obliga a escoger qué resultado de los dos que obtiene es el correcto. Opta por no decidir y dejar ambos resultados o por tachar.

4 alumnos (A17, A18, A23 y A25; 18.2%) no usan ni la regla de tres ni la función. Se limitan a escribir un valor numérico, sin indicar cómo se obtuvo (Figura 117). Comparando los valores numéricos que obtienen con los valores que obtendrían si hubiesen usado una de las funciones del modelo, que estaban escritas en el encerado, se deduce que no obtuvieron el valor numérico utilizando la función. Aunque sea lo más probable, tampoco se puede asegurar que esos valores se obtuviesen mediante una regla de tres, cabiendo la posibilidad de que realizasen una estimación a partir de datos presentes en la tabla de datos.

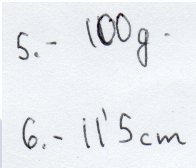


Figura 117. Alumno A17. *Muelle*. Respuesta a las preguntas 4 y 5

Lo realmente relevante es el uso de la regla de tres. Más de la mitad de los estudiantes la emplean en una o ambas preguntas (12 alumnos, 54.5%) y 6 de ellos sólo la usan en una de las preguntas. La siguiente tabla describe qué hacen estos en la otra pregunta.

Tabla 27. *Muelle*. Uso de la regla de tres sólo en una de las dos preguntas

<table>
<tr><th colspan="2">Usa la regla de tres en una pregunta y en la otra:</th><th>Alumnos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Utiliza la función</td><td>En la pregunta 4</td><td>A6, A9</td></tr>
<tr><td>En la pregunta 5</td><td>A1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aporta un resultado numérico sin justificar su procedencia</td><td>En la pregunta 4</td><td>A15</td></tr>
<tr><td>En la pregunta 5</td><td>A20</td></tr>
<tr><td>Deja en blanco la respuesta a la pregunta 5</td><td colspan="2">A2</td></tr>
</table>

Esos 6, o bien usan la regla de tres en una y la función en la otra (A1, A6 y A9, Figura 118) o bien aportan un resultado sin justificar (A15 y A20) o utiliza la regla de tres y la función en la misma pregunta (A2).

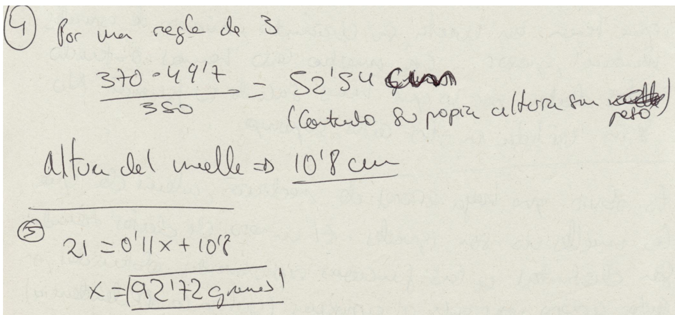


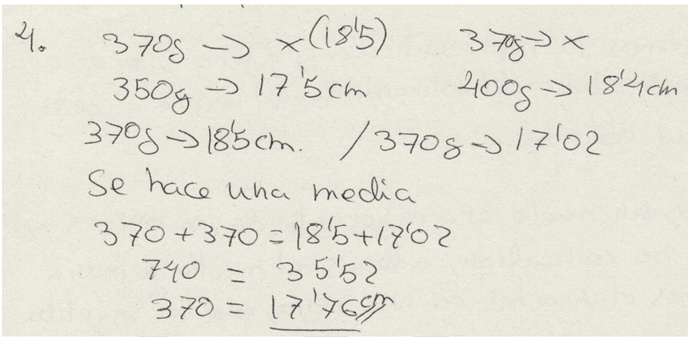
Figura 118. Alumno A1. *Muelle*. Respuesta a las preguntas 4 y 5

Transcripción: **ñ***Por una regla de tres*

(contando su propia altura sin peso)

*Altura del muelle-> 10.8 cm*ò

El uso de datos procedentes de la tabla de datos indica, como ya hemos comentado, la importancia que conceden a la tabla de datos que obtuvieron experimentalmente. Escogen un dato cercano al valor de *370 g* y estiman el valor correspondiente a *370 g*. Todos utilizan una única regla de tres excepto A3, que realiza dos y hace la media aritmética de los dos valores de peso y longitud que obtiene (Figura 119).



4. 370g -> x (18'5) 370g -> x

350g -> 17'5cm 400g -> 18'4cm

370g -> 18'5cm. / 370g -> 17'02

Se hace una media

370 + 370 = 18'5 + 17'02

740 = 35'52

370 = 17'76cm

Figura 119. Alumno A3. *Muelle*. Respuesta a la pregunta 4

Transcripción: **ñ***Se hace una media*ò

En la pregunta 4 utiliza los datos correspondientes a *350 g* y *400 g* de la tabla de datos de GM1 (Tabla 9). En la pregunta 5 emplea los valores de peso correspondientes a una longitud de *20.6 cm* y *21.6 cm* de la misma tabla de datos. Así, A3 realiza una interpolación en ambas preguntas. Supone que la media de dos valores aproximados y obtenidos por una regla de tres proporciona una mejor aproximación del resultado que el valor obtenido mediante una única regla de tres.

Respecto a por qué una parte tan importante de los estudiantes usa de la regla de tres, destacamos dos cuestiones que, íntimamente ligadas, lo explican:

a) La matematización y su resultado en el mundo de las matemáticas y en el mundo real.

En el proceso de modelización, dividido en dos fases diferenciadas, han generado o utilizado tres representaciones de la relación funcional entre las variables peso y longitud (o *x* y *f(x)=y*): tabla, gráfica y expresión analítica.

Para obtener la función, se ha realizado una matematización progresiva, que ha permitido pasar de la representación como tabla a la representación como gráfica y de ésta a la expresión analítica. De esa forma, cada una de las tres representaciones es, en sí misma, un resultado matemático y real que puede ser interpretado como un modelo y una solución matemática y real. Además, cada una de ellas se encuentra más presente en uno de los mundos del ciclo de modelización: la tabla en el mundo real (o resto del mundo), la gráfica que observan en el ordenador en el mundo tecnológico y la expresión analítica en el mundo de las matemáticas (ciclo de Blum y Leiss y de Siller y Greefrath; Figuras 5 y 8).

Al plantear la situación real y problema inicial, el resultado y solución que se ha buscado es la expresión analítica, pues es la representación que implica un mayor nivel de matematización. Como consecuencia, es el modelo matemático más útil como modelo y solución real.

Lo llamativo de sus respuestas a las preguntas 4 y 5, y que ya es observable en otras que hemos analizado antes, es que, en general, no consideran la expresión analítica como el único resultado y modelo de la situación y problema real a tener en cuenta. En numerosos casos predomina claramente la tabla como resultado y representación de la relación entre variables frente a la expresión analítica. La razón es que cada una de las representaciones, que utilizan de forma preferente (tabla y expresión analítica), nos sitúa en un mundo (el resto del mundo y el mundo de las matemáticas) en el que contextualiza la pregunta. Así, la tabla de datos se asocia con la obtención de datos experimental y, por tanto, con el mundo real. La expresión analítica es producto de la matematización intensa de esos datos obtenidos experimentalmente. De ellos se deriva la función obtenida pero estos han desaparecido como consecuencia de la matematización realizada en la segunda fase. El mundo tecnológico, más asociado a la representación gráfica y que sirve de nexo de unión entre la tabla y la expresión analítica, no tiene un reflejo tan evidente en sus respuestas. Así, dependiendo de dónde se sitúe ante la pregunta (mundo de las matemáticas o resto del mundo), utilizará la expresión analítica o la tabla de datos. En definitiva: no son conscientes de que el modelo buscado y obtenido es la función, producto de un proceso de matematización progresiva que han dividido en dos fases diferenciadas pero integradas en un único proceso de modelización matemática.

No sólo las respuestas por escrito apoyan lo que se afirma anteriormente, sino que las entrevistas arrojan datos en el mismo sentido. En general, no se acuerdan de por qué usaron la regla de tres en vez de la función o cómo obtuvieron el valor numérico que escriben sin justificar su procedencia. Incluso se sorprenden de utilizar una regla de tres en vez de una función. De todos modos, A1, A15 y A16 proporcionan respuestas de interés. El A1 utiliza la regla de tres en la pregunta 4 y la función en la 5. A15 utiliza una regla de tres en la pregunta 4 y escribe únicamente ñUn poco menos de 100 gò en la 5. A16 utiliza una regla de tres en la pregunta 4 y en la 5.

41 Profesor: (é) pero no dices de dónde sale un poco menos de 100 g.

42 A15: No sé por qué lo puse.

44 A15: Igual porque vi la tabla delante y vi que tenía un valor parecido a 21cm y daba 100 g, no sé.

57 Profesor: ¿Por qué crees tú que usaste la regla de tres y no usaste la función?

58 A15: Lo vería más claro, no sé [é] no estaba tan [é] creo que ni pensé que se podría hacer así [*refiriéndose al uso de la función para calcular el dato solicitado*].

70 A16: Claro, porque tienes la tabla de datos y dices, si tengo esto y tengo tanto entonces de esto tengo que tener otro tanto y haces una regla de tres, no haces tú la función que acabo de calcular, pues puedo usarla. No, porque acabas de calcular la función y ya está, aparte, y sigues con los datos.

71 Profesor: ¡Ah! O sea la función es comoé

72 A16: Si fuera un apartado del ejercicio.

74 A16: Y dices tú, ya está hecho, pues ahora hago el siguiente.

76 A16: Entonces te olvidas de la función.

77 Profesor: Como si no tuviese utilidad.

78 A16: Ya, por eso.

79 Profesor: Y si, por ejemplo, ¿os quito la tabla de datos y sólo os pongo la función?

80 A16: Seguro que la utilizaríamos, yo creo que sí.

81 Profesor: ¿Sí?

82 A16: Yo creo que sí porque dices tú, si no te hace falta, a lo mejor, pues no lo sé, como puse en la 3 [*En esa pregunta, respondió* **ñ***No lo sé***ò**], pero puede ser que si dices tú bueno pues si tengo la función, tengo ya la *x*, lo que me quieren decir, a lo mejor si que *cayéramos* en hacer lo de la función.

138 A1: (é) claro, es que si no tienes realmente el concepto de función después no lo vas a saber aplicar. De hecho aquí [*señala una de sus respuestas*] o sea ni menciono que es una función esto. Si no sé que esto es una función, ¿cómo lo voy a aplicar aquí? [*Señala su respuesta*]. Yo creo que es ese el problema que teníamos.

148 A1: (é) claro, la notación que se utiliza y todo, eso tienes que conocerlo realmente para saber de que estás hablando, o sea la notación de poner *f* de *x* igual a tal (é)

149 Profesor: (é) ¿por qué en uno la función y en el otro la regla de tres?

150 A1: Aquí claro, le estás dando un valor y sé que tengo esto [*señala la igualdad que proporciona la función*] pues digo, es una ecuación. De hecho aquí no pongo nada de función. Simplemente es una ecuación.

154 A1: Claro, teniendo esto [*señala la expresión de la función de la forma y=ax+b*] y dando un valor sé que es dónde tiene que dar esto, no pienso en una función, pienso en una ecuación.

155 Profesor: ¿Pero por qué no pensaste lo mismo aquí? [*señala su respuesta a la pregunta 4*].

156 A1: Pues la verdad no lo sé [*se ríe*]. Pero es curioso [*se vuelve a reir*].

A15 supone que obtiene el valor numérico, que escribe sin justificar, a partir de un dato concreto de la tabla de datos. La importancia que concede a la tabla como resultado que permite obtener nuevos datos, también es resaltada por A16. Explica que la función es simplemente un óapartado del ejercicioô, es decir, algo que hay que hacer pero que no es relevante a la hora de ser usado para responder una pregunta contextualizada en el problema o situación real inicial. Disponen de una tabla de datos en la que se observa que ósi tengo esto y tengo tanto entonces de esto tengo que tener otro tantoô, lo que asocia a la proporcionalidad directa y al uso de una regla de tres.

A1 interpreta su respuesta a la pregunta 5 desde la identificación de la función con una ecuación en la que aparecen dos letras, lo que le permite calcular una en función de la otra. La mención de la función como ecuación ya aparecía en las respuestas a otras preguntas, por ejemplo en la pregunta 1 de *Muelle*. Esa identificación representa que no se asocia la expresión matemática de la función (como expresión analítica de la misma) a la forma matemática de describir la dependencia entre dos variables (matemáticas o físicas), sino que es una expresión matemática que permite ódespejarô algo desconocido a partir de un dato conocido. Esa desconexión entre la expresión analítica de la función y el problema o situación real del que ha surgido, gracias a un proceso de modelización, conlleva que la referencia para obtener nuevos datos no sea la función sino la tabla de valores, vinculada de forma más evidente a la situación real.

En la raíz del problema se encuentra lo que comenta A1: ñSi no sé que esto es una función, ¿cómo lo voy a aplicar aquí?ò. La función no es interpretada como una solución al problema real sino como una expresión matemática obtenida durante la actividad y que no es relevante. Como dice A16, la función no es más que el resultado de un ejercicio que debe realizar. A1 explica esa desconexión en que, en realidad, la expresión matemática obtenida no se interpreta como una función, lo que conllevaría conocer y utilizar la notación adecuada. De esa forma, aparecen claramente menciones a la necesidad de poseer conocimientos matemáticos asociados adecuadamente al *logos*.

Así, para una parte importante de estudiantes, la obtención de nuevos datos se asocia a la tabla de datos. Los datos de la tabla, a su vez, se asocian a la proporcionalidad directa y al uso de la regla de tres.

b) El uso de la regla de tres y la tasa de variación media constante

Se ha visto con anterioridad que, en sus conversaciones durante la fase de obtención de datos, buscan una forma de dependencia entre variables asociada a que ópor tanto gramos aumente tantos centímetrosô. La inclusión de una columna llamada ñDiferenciaò en la tabla de datos de GM2 (Anexo VII) y las respuestas de algunos alumnos en la pregunta 1 inciden en lo mismo. En esa pregunta, además, se identifica la función con su representación gráfica y ésta con una relación entre variables asociada a la proporcionalidad directa. Es decir, el uso de la regla de tres se justifica con el hecho de que el aumento en una cierta cantidad de gramos conlleve el aumento de una cierta cantidad de centímetros de longitud, lo que se asocia a la proporcionalidad directa, a la representación gráfica de los datos en la que se intuye una recta y a la representación gráfica de la función como una recta. El que la longitud del muelle aumente una cantidad constante de centímetros por una cantidad de gramos concreta se halla en relación con la existencia de una tasa de variación media constante. Como consecuencia, confunden la proporcionalidad directa con la presencia de una tasa de variación media constante. Es cierto que la proporcionalidad directa conlleva una tasa de variación media constante pero no lo contrario, como ocurre en este caso. Así, el uso de la regla de tres en una parte tan importante de alumnos presenta una situación compleja en la que la representación gráfica, asociada a la representación de la función como gráfica y a la expresión analítica de la función afín ($f(x)=ax+b$), la tasa de variación media constante, la proporcionalidad directa y la regla de tres se entremezclan en las respuestas de los alumnos. Lo dicho se manifiesta con claridad en el uso de la regla de tres en las preguntas 4 y 5.

En el análisis de las respuestas a la pregunta 1, se menciona la presencia del obstáculo epistemológico de la razón y la proporción y la ilusión de la linealidad, pero se halla en combinación de otras confusiones o dificultades. Como hemos visto en la experiencia de *Aceite y agua*, los alumnos abandonan con rapidez la búsqueda de una relación de proporcionalidad directa entre variables. Como consecuencia, no asocian el problema original del tipo de relación entre variables con la proporcionalidad directa en todos los casos. La vinculación del problema o situación real a una relación de proporcionalidad directa entre las variables, viene dada por la presencia de una tasa de variación media constante, observable en la tabla de datos de *Muelle,* y en la representación gráfica de la función *f(x)=ax+b* como una recta. Así, la expresión analítica de la función y su representación gráfica, la importancia concedida a la tabla de datos y la identificación de la tasa de variación media constante con una relación entre variables de proporcionalidad directa, lleva al uso de la regla de tres:

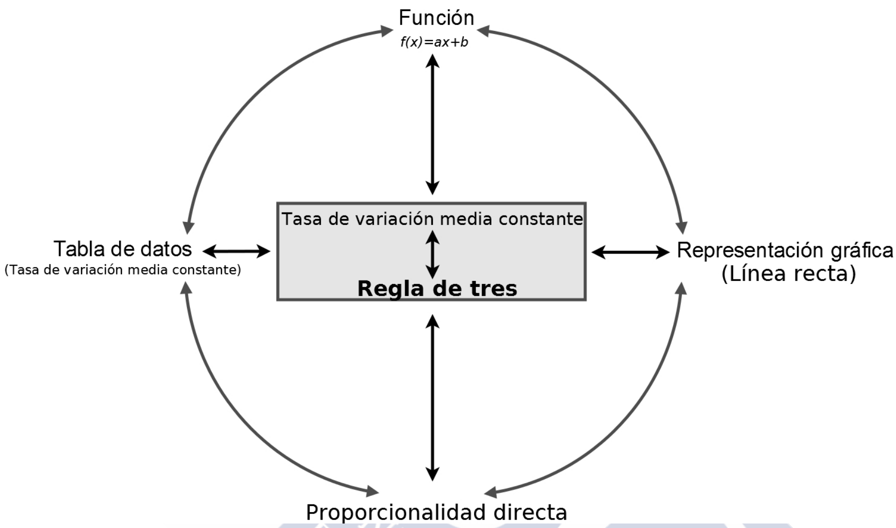


Figura 120. Identificación de la relación entre variables con la proporcionalidad directa.

La desconexión entre la situación real y el problema planteado inicialmente y de la función como solución y como resultado matemático, que hemos resaltado en las respuestas a estas dos preguntas y en las restantes, volverá a aparecer en las preguntas 8 y 11.

5.1.4. Uso del modelo para obtener nuevos resultados matemáticos. La función inversa. Resultados de las respuestas a las pregunta 8 y 11 de *Muelle*:

8. Intenta deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle si conoces la longitud del muelle.

11. El tercer grupo tomó los datos longitud-peso. ¿Cómo obtener la función en la forma de la de los otros dos grupos para comparar resultados?

La pregunta 8 se encuentra en relación directa con la pregunta 5. La diferencia es que en la pregunta 5 se pregunta por el peso correspondiente a un valor concreto de longitud (*21 cm*), mientras que en la pregunta 8 se pregunta cómo calcular el peso correspondiente a una longitud sin valor concreto. Se trata del cálculo de la función inversa. Recordemos que el grupo GM3 volcó los datos de longitud en el eje de abscisas y de peso en el de ordenadas, con lo que la respuesta a la pregunta se relaciona con el resultado que aportó un grupo el primer año. De ahí que la pregunta 11 sólo se plantease a los alumnos que participaron el primer año (10 estudiantes).

En primer lugar, se muestra una tabla en la que se agrupa a los alumnos en función de su respuesta.

Tabla 28. *Muelle*. Respuestas a la pregunta 8

<table>
<tr><th>Respuesta</th><th colspan="2">Alumnos</th></tr>
<tr><td>Indica que se trata de la función inversa y realiza el cálculo de la misma</td><td colspan="2">A8</td></tr>
<tr><td>Despeja ñxò en la expresión de la función y/o describe textualmente el proceso de despejar ñxò</td><td colspan="2">A1, A2, A3, A4, A5, A7, A10, A14, A17, A19, A21, A23</td></tr>
<tr><td>Propone dos métodos diferentes: despejar ñxò en la expresión o usar una regla de tres</td><td colspan="2">A20, A22</td></tr>
<tr><td>Realiza una regla de tres o propone el uso de la regla de tres</td><td colspan="2">A6, A24</td></tr>
<tr><td>Propone volcar los datos nuevamente en el ordenador para obtener la función</td><td colspan="2">A25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">No contesta</td><td>Usó una regla de tres en la pregunta 5</td><td>A16</td></tr>
<tr><td>Escribió un dato sin justificar en la pregunta 5</td><td>A9, A15, A18</td></tr>
</table>

El cambio en la respuesta respecto a lo contestado en la pregunta 5 es evidente. Mientras en la 5 utilizaron la función 7 alumnos (31.8%), en esta pregunta usan o proponen su uso 15, lo que representa una mayoría amplia sobre el total (68.2%). Esa diferencia implica una contradicción en la respuesta de un número importante de estudiantes. En la siguiente tabla, describimos qué contestaron en la pregunta 5 aquéllos que ahora proponen o despejan ó*x*ô en la expresión analítica de la función:

Tabla 29. *Muelle*. Respuestas a la pregunta 5 correspondientes a los estudiantes que, en la pregunta 8, proponen o despejan ñ*x* ñ en la función

En la pregunta 5:	Alumnos
Utilizó la función	A1, A4, A5, A7, A14, A19, A21
Usó una regla de tres	A3, A8, A10, A20, A22
Escribió un dato sin justificar	A17, A23
No respondió a la pregunta	A2

Los 5 que usaron una regla de tres han pasado a proponer el uso de la función (A3, A8, A10, A20 y A22). Dos de ellos (A20 y A22), insisten en el uso de la regla de tres y proponen despejar ó*x*ô como simple alternativa. Así, la identificación de la relación entre variables como una relación de proporcionalidad directa es persistente (Figura 121).

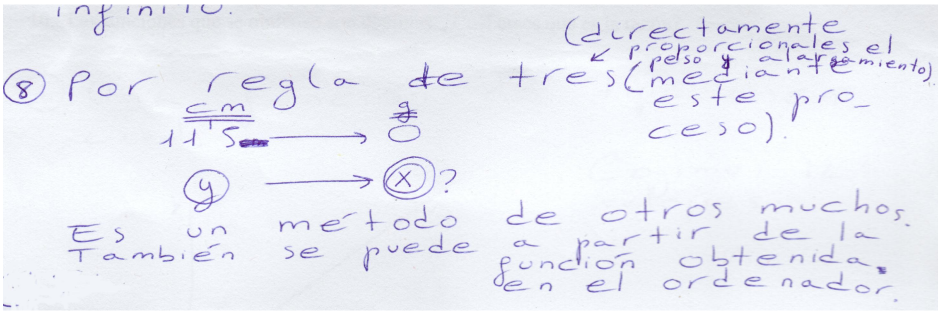


Figura 121. Alumno A22. *Muelle*. Respuesta a la pregunta 8

Transcripción: ñ*Por regla de tres (mediante este proceso [señala el cálculo de la regla de tres] (Directamente proporcionales el peso y alargamiento) Es un método de otros muchos. También se puede a partir de la función obtenida en el ordenador.*ò

Puede parecer que los 15 alumnos estén pensando en el cálculo de la función inversa al proponer usar la función y despejar *x* en la expresión analítica de la misma. La realidad es que sólo A8 menciona expresamente que ese cálculo se corresponde con el cálculo de la función inversa.

En las respuestas a la pregunta 11, vuelven a surgir las contradicciones entre las respuestas.

Tabla 30. *Muelle*. Respuestas a la pregunta 11 (alumnos participantes el primer año)

Responde que se puede hacer:	Alumnos
Calculando la función inversa, sin expresar dudas	A5, A6, A7, A9
Calculando la función inversa, pero expresa dudas	A1, A4
Cambiando peso por longitud, sin mencionar la inversa	A8
Volviendo a tomar los datos y generando una nueva función	A3
No sabe qué contestar	A2, A10

La razón de las contradicciones en estas preguntas y en preguntas anteriores (por ejemplo, la contradicción implícita que supone el uso de la regla de tres y/o la función en las preguntas 4 y 5), la volvemos a encontrar en el ómundoô en que se sitúe. Los estudiantes realizan conexiones y asociaciones entre las diferentes representaciones de la función, que han surgido en contextos diferentes en su proceso formativo, y que vinculan en mayor medida al mundo real o el matemático en el proceso de modelización. Así, las conexiones y asociaciones entre la pregunta y el contexto (real y/o matemático) determinan la respuesta. Si una pregunta sitúa al alumno en el mundo real, su respuesta se asociará a la tabla de datos. Si lo sitúa en el mundo de las matemáticas, acudirá a la función y su representación gráfica. Ante dos preguntas sobre lo mismo, es posible que una de ellas se asocie al mundo real y la otra al mundo de las matemáticas, con lo que surge la contradicción en la respuesta. Es decir, la complejidad de las relaciones que se establecen entre el mundo real y el de la matemáticas en un proceso de modelización, conlleva el establecimiento de relaciones complejas entre los diferentes resultados que obtiene, asociados a su vez a las diferentes representaciones que aparecen de la función (tabla de datos, gráfica, expresión analítica). Esta complejidad conlleva que su respuesta también resulte compleja, lo que conduce a que la contradicción aparezca a menudo y con insistencia.

De los 10 estudiantes que contestaron la pregunta 11, 4 identifican el cálculo que realizan al despejar *x* en la expresión como el cálculo de la función inversa y 2 expresan dudas sobre si se trata de la función inversa (Figuras 122 y 123).

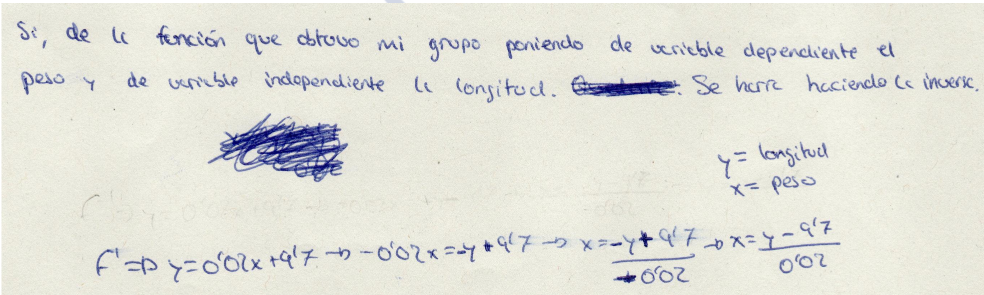


Figura 122. Alumno A7. *Muelle.* Respuesta a la pregunta 11

Transcripción: ñ*Sí, de la función que obtuvo mi grupo poniendo de variable dependiente el peso y de variable independiente la longitud. Se haría haciendo la inversa.***ò**

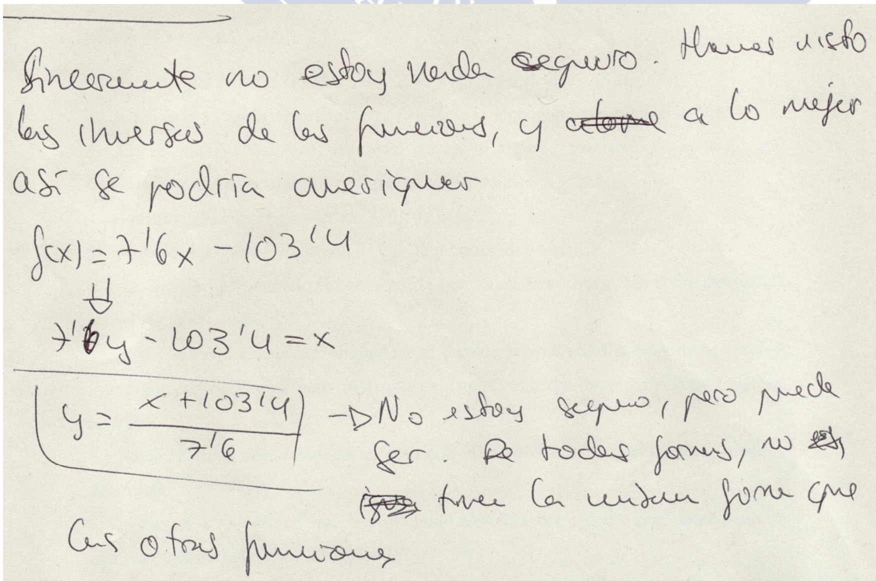


Figura 123. Alumno A1. *Muelle.* Respuesta a la pregunta 11

Transcripción: ñ*Sinceramente no estoy nada seguro. Hemos visto las inversas de las funciones, y a lo mejor así se podría averiguar.*

*No estoy seguro, pero puede ser. De todas formas, no tiene la misma forma que las otras funciones..***ò**

Las dudas que expresa A1 en el ejemplo que incluimos son ilustrativas,. El cambio de *x* por *y* y despejar *x*, le recuerda el cálculo algorítmico de la inversa pero, como no asocia ese cálculo a lo que se solicita en la pregunta, surge la duda. Además, la función que obtiene al realizar el cálculo, no la identifica con la óformaô de las otras funciones que observa escritas en el encerado.

Lo realmente sorprendente son las contradicciones implícitas que se observan en las respuestas a las preguntas 5 y 11 de los participantes el curso año 2010-11 (Tabla 31).

Tabla 31. *Muelle*. Respuestas a las preguntas 5 y 11 (estudiantes participantes el primer año)

<table>
<tr><th>En la pregunta 5</th><th>Alumnos</th><th>En la pregunta 11</th><th>Alumnos</th></tr>
<tr><td>Usó una regla de tres</td><td>A6</td><td rowspan="2">Responde que se trata de la función inversa sin dudar</td><td rowspan="2">A6, A9</td></tr>
<tr><td>Aportó un dato sin justificar y que no proviene del uso de la función</td><td>A9</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Sustituye la longitud en la expresión funcional y despeja el valor de peso</td><td rowspan="3">A1, A2, A3, A4, A10</td><td>Duda si se trata de la función inversa o no</td><td>A1, A4</td></tr>
<tr><td>Propone volver a tomar datos y obtener la función</td><td>A3</td></tr>
<tr><td>No responde o indica que no sabe hacerlo</td><td>A2, A10</td></tr>
</table>

Solo A5, A7 y A8 (de los 10 a los que se les planteó la pregunta 11) no entran en contradicción. Los otros 7, responden de una forma completamente diferente en la pregunta 5 y en la 11. La explicación a esta contradicción viene dada por cómo se interpreta la pregunta y, como consecuencia, en qué contexto se sitúa. La mención expresa a la ófunciónô en la pregunta 11, sitúa al alumno en el contexto del mundo matemático, lo que le lleva a interpretar la pregunta y buscar la solución en términos de aquello que ha estudiado en matemáticas en relación con las funciones. En la pregunta 5, el enunciado lo sitúa en el mundo real, lo que desvincula la expresión matemática que observa de las funciones. Dicho de otra forma, la expresión es considerada como una ecuación en la pregunta 5 (como se observa en algunas de sus respuestas y en las entrevistas), mientras que es una función en la 11 (porque así se denomina expresamente en el enunciado).

Como consecuencia, la influencia del enunciado de una pregunta sobre la respuesta es considerable. Esa influencia no es algo nuevo pero el caso de la modelización posee particularidades dignas de consideración. El enunciado sitúa al alumno en uno de los mundos presentes en el ciclo, lo que determina qué resultado tomará en cuenta (matemático o real) y en qué contexto interpretará dicho resultado (mundo real o matemático). El resultado y su interpretación en un mundo concreto determina la respuesta y la interpretación de la misma. Por ejemplo, el resultado que obtienen el primer año los participantes de GM1, es la ecuación de una recta. En las primeras preguntas, se realiza la interpretación del resultado como una recta pero la recta desaparece en la pregunta 11, de forma que se refieren al resultado como una función.

La contextualización del resultado a partir del enunciado de la pregunta vuelve a aparecer en las actividades siguientes. Se ha visto anteriormente en el caso de *Temperatura* que los alumnos se refieren al resultado obtenido o buscado en términos propios y relativos a las funciones: centran su atención en el mundo matemático y en la búsqueda de la solución matemática, identificada con la obtención de una función de ajuste. La función y lo matemático toma protagonismo, proponiendo incluso modificar la situación y problema real para conseguir el resultado y solución matemática identificada con la función. Nos referimos a la sugerencia de repetir el experimento a 0° C.

A continuación se verá que la contextualización de la pregunta y su influencia en la respuesta aparece también en el debate realizado *Aceite y agua*.

5.2. EL DEBATE ASOCIADO A LA MODIFICACIÓN DEL MODELO DE *ACEITE Y AGUA*

Las cuestiones de la experiencia del aceite fueron planteadas, a partir de la segunda pregunta o cuestión, a todo el grupo y como cuestiones generatrices de un debate entre los alumnos. Como ya ocurriera en la experiencia del muelle o la primera pregunta en relación a la experiencia del aceite, el profesor intenta no tomar ningún protagonismo, potenciando el trabajo autónomo del alumno. Así, en el debate que ahora se analizará, el profesor no asume protagonismo en el mismo, reduciendo su actividad a leer las preguntas, escribir las respuestas de los estudiantes en el encerado y, como forma de cerrar el debate sobre una cuestión concreta, preguntar si todos están de acuerdo con la respuesta aportada por su compañero o compañeros.

En el debate participaron todos los estudiantes que realizaron las dos fases previas y que contestaron a la primera pregunta del cuestionario (11 alumnos el curso 2010-11 y 12 el curso 2011-12).

El debate fue de duración similar ambos cursos: 27 minutos el curso 2010-11 y 25 minutos el curso 2011-12. Aunque el tiempo dedicado al debate es muy parecido, como veremos a continuación, la intensidad y las cuestiones derivadas de las preguntas planteadas inicialmente establecen diferencias de importancia entre los dos años.

5.2.1. *Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el radio en lugar del diámetro?*

La pregunta se plantea como paso previo a la segunda, en la que se introduce el cálculo del volumen a partir del área de la mancha. Resulta interesante la observación de la evolución del debate entre los alumnos, motivo por el que, en este apartado, se reproducen partes de su transcripción. Las ocasiones en las que los estudiantes se han expresado en gallego, las hemos traducido al castellano. El resto de la transcripción de dichas partes del debate se adjuntan como anexo (Anexo X).

Para comenzar el debate, el profesor indicó a los estudiantes las funciones que obtuvieron en su modelo y escogió y escribió una de ellas en el encerado. Les indicó que esa sería la función que usarían para responder a las cuestiones. Se escogió la función $f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$ el año 2011, obtenida por el GA1, y $f(x)=2.1\cdot\sqrt{x}$ el año 2012, obtenida por el GA4. Al lado de la función se escribió: ñ*x=cantidad de aceite (en ml)****ò*** y ñ*f(x)=diámetro (en cm)*ò.

Ante la pregunta de qué forma adoptaría la función si se cambiase diámetro por radio, se establece el siguiente diálogo o debate entre los alumnos participantes el curso 2010-11:

1 Profesor: (é) un círculo o una circunferencia por qué se caracterizan más, ¿qué se suele usar?

2 Varios alumnos: El radio.

3 Profesor: El radio. Pues ahí no tenéis radio, tenéis diámetro ¿Qué habría que hacer para usar radio en vez de diámetro?

9 A5: *f* de *x* partido dos igual a dos con tres por raíz de *x* [*el profesor escribe lo que el alumno indica:* $\frac{f(x)}{2}=2.3\cdot\sqrt{x}$].

13 A1: No, no, no.

15 A12: Dos con tres raíz de *x* partido de dos. [$f(x)=\frac{2.3\sqrt{x}}{2}$]

16 A4: Pero así vas a obtener un valor más alto.

19 A1: Arriba obtienes el diámetro, ¿no? [*Refiriéndose a la expresión* $f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$]. Si divides todo entre dos, obtienes el radio. [*Se refiere a:* $f(x)=\frac{2.3\sqrt{x}}{2}$]

21 A12: Todo entre dos, luego. [$\frac{f(x)}{2}=\frac{2.3\sqrt{x}}{2}$]

25 A5: Si divides todo entre dos se van los entre dos y te queda igual. [$\frac{f(x)}{2}=\frac{2.3\sqrt{x}}{2}\Rightarrow f(x)=2.3\sqrt{x}$]

Finalmente, deciden que la función adecuada es $f(x)=\frac{2.3\sqrt{x}}{2}$

Los alumnos no parecen darse cuenta de que han generado una nueva función, o lo que es lo mismo, un nuevo modelo matemático. Ante la situación, el profesor decide hacer una pregunta sobre el hecho de disponer de dos funciones diferentes con el mismo nombre: $f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$, *x= volumen en ml, f(x)=diámetro en cm*

$f(x)=\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$, *x= volumen en ml, f(x)=radio en cm*

30 Profesor: ¿Os pongo yo un problema entonces? [é] ¿Veis ahí *f* de *x*? ¿Qué pone, arriba del todo, *f* de *x* igual? [*Se refiere a lo escrito en el encerado,* $f(x) = 2.3 \cdot \sqrt{x}$, *f(x)=diámetro*].

31 A1: Diámetro.

32 Profesor: Y abajo qué pone, *f* de *x* igual [*Se refiere a lo escrito en el encerado,* $f(x) = \frac{2.3 \cdot \sqrt{x}}{2}$, *f(x)=radio*].

34 Profesor: ¿Pero en qué quedamos, *f* de *x* es el diámetro o es el radio?

42 A1: Pues le cambias la letra, le pones *g*.

En el curso 2011-12, al comienzo del debate y al igual que se había hecho el curso 2010-11, se escribió en el encerado una de las funciones que habían obtenido ($f(x) = 2.1 \cdot \sqrt{x}$) y la anotación ñ*x=cantidad de aceite (ml)***ò** y ñ*f(x)=diámetro (cm)*ò.

3 A21: Sería dos por dos coma uno por raíz de dos. [*Se refiere a realizar el cálculo:* $\frac{f(x)}{2} = 2.1\sqrt{x} \Rightarrow f(x) = 2 \cdot 2.1\sqrt{x}$]

7 A22: Sí, todo entre dos. [*Se refiere a* $f(x)=\frac{2.1 \cdot \sqrt{x}}{2}$]

12 A17: La mitad de la constante. [$f(x) = \frac{2.1}{2} \cdot \sqrt{x}$]

14 A14: Pero ¿por qué la mitad de la constante?

15 A14: Pero si la constante no tiene nada que ver.

16 A21: Tiene que ser de toda la función si solo haces la mitad de la constante o la mitad de *x* de raíz de *x* te hace perder el valor, ya no te da el radio. Tal como está te da el diámetro y si todo eso lo divides entre dos, toda la función, te da ya el radio.

20 A16: Que tú en lo que estás calculando el diámetro es en la constante, por lo que, si quieres hacerle la mitad, que es el radio, sólo tienes que dividir la constante.

21 A22: ¿Y haciendo raíz cuarta de *x*?

22 A14: La constante no es el diámetro.

23 A19: Yo creo que si divides la *x* estás dividiendo la cantidad de aceite entre dos también y la cantidad de aceite es la misma.

26 A14: Pero, ¿para qué queréis dividir la constante entre dos?

27 A25 : Te saldría una función distinta.

50 A21: Tanto daría solo dividir el dos coma uno. Tanto, para hallar el radio, tanto daría partir toda la función entre dos, partir el dos coma uno entre dos, o dividir *x* raíz de *x* entre dos.

89 A21: Dos coma uno por raíz de *x* partido de dos [*El profesor escribe en el encerado* $f(x) = \frac{2.1 \cdot \sqrt{x}}{2}$] .

93 A21: Después la otra es *f* de *x* igual a dos coma uno partido de dos por raíz de *x*. [*El profesor escribe* $f(x) = \frac{2.1}{2} \cdot \sqrt{x}$] . Y después la otra, la tercera propiedad sería

> *f* de *x* igual a dos coma uno por raíz de *x* partido de dos. [*El profesor escribe* $f(x) = 2.1 \cdot \frac{\sqrt{x}}{2}$]

Como se ha visto, en el curso 2010-11 el debate se centra en los problemas que surgen a partir de que optan por escribir $\frac{f(x)}{2} = 2.3 \cdot \sqrt{x}$, de forma que usan la variable dependiente (*f(x)=diámetro*) como forma de dividir el diámetro entre dos. Así, se centra en las consecuencias de dividir un solo miembro de una igualdad por un número. En el curso 2011-12, en cambio, parecen olvidarse de *f(x)* y se centran en el segundo miembro. Este hecho nos lleva a pensar que identifican el problema de calcular el radio a partir del valor del diámetro como el cálculo que es necesario realizar con la expresión $2.1 \cdot \sqrt{x}$ para dividirla por dos.

El hecho de que los alumnos del curso 2010-11 dedicasen tantos esfuerzos a pensar qué hacer con ese 2 que escribieron dividiendo en la expresión ($\frac{f(x)}{2} = 2.3 \cdot \sqrt{x}$), conlleva que en ningún momento pensaron que estaban intentando obtener una nueva función. Su atención se centró en cuestiones relativas a cómo modificar la igualdad para conseguir dividir *f(x)* por dos. Intervienen entonces los problemas que surgen con la modificación del modelo pero asociadas al uso adecuado de las propiedades de las igualdades.

Tampoco parece que los alumnos del año 2011-12 pensasen en que lo que debían hacer era obtener una nueva función. Su atención se centró en dilucidar si la expresión apropiada para determinar el radio debería ser $\frac{2.1}{2} \cdot \sqrt{x}$, $2.1 \cdot \frac{\sqrt{x}}{2}$ o $\frac{2.1 \cdot \sqrt{x}}{2}$. En su caso, debaten sobre cuál de las expresiones que manejan es la adecuada y si son equivalentes o no.

Así, en ningún momento y ninguno de los dos años, las operaciones entre funciones han estado presentes en los razonamientos de los alumnos. Existen varias posibilidades a la hora de plantear el problema como una operación entre funciones (producto, división o composición), pero lo cierto es que no se observa nada que haga pensar que tenían presente que la función que estaban intentando obtener representase una nueva. Perciben el cambio que deben realizar como una modificación de la expresión inicial a una expresión equivalente. Los problemas que surgen y que generan el debate no tienen relación con la función sino sobre las propiedades de las igualdades y la equivalencia de expresiones. Por tanto, se olvidan de que el valor de la variable dependiente *f(x)* es inicialmente el diámetro y que si se pretende que pase a ser el radio, la variable dependiente de la nueva función será una nueva variable real llamada *radio*.

En definitiva, las implicaciones del cambio buscado sobre el modelo son más amplias que una simple modificación de una expresión matemática mediante la división por 2. La función original da lugar a una nueva función, con nuevas variables dependiente e independiente. Los alumnos no se dan cuenta de la existencia de dos funciones, es decir, de dos modelos. El curso 2010-11 el profesor les hizo reflexionar sobre el hecho de que disponían de dos expresiones y en que el valor de *f(x)* representaba dos variables diferentes (diámetro y radio). Esa intervención del profesor les llevó a darse cuenta con gran rapidez de que la función debía recibir un nuevo nombre. En el curso 2011-12 tenían escritas en el encerado cuatro funciones (una en la que *f(x)* era el valor del diámetro y las otras tres en que el valor de *f(x)* representaba el radio), sin que ello sorprendiese a ningún alumno. Quiere decir esto que, sin la intervención del profesor, el estudiante no se daría cuenta de que, en realidad, han generado un nuevo modelo, con sus propias variables dependiente e independiente.

Resulta reseñable que alumnos de 1º de Bachillerato Científico-Tecnológico precisen de tanto tiempo para darse cuenta de que las expresiones $\frac{2.1}{2}\cdot\sqrt{x}$, $2.1\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}$ y $\frac{2.1\cdot\sqrt{x}}{2}$ son equivalentes y que los alumnos del año 2011 debatan si dividiendo ambos miembros de la expresión $f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$ puedan llegar a convertir el valor del diámetro (*f(x)*) en radio. Sólo A5 menciona el hecho de que ñSi divides todo entre dos se van los entre dos y te queda igualò. En ningún momento llegan a pensar que el valor de $\frac{f(x)}{2}$ representa una nueva función *g(x)*. Tampoco se dan cuenta de que la expresión $\frac{f(x)}{2}=2.3\cdot\sqrt{x}$ es equivalente a la expresión $f(x)=2\cdot 2.3\cdot\sqrt{x}$, con lo que el diámetro pasaría a multiplicarse por dos en vez de dividirse por dos.

Consideran la igualdad que expresa la relación entre variables como una ecuación, de manera que utilizan las mismas propiedades que usan en las ecuaciones e identidades. El problema, que ya había aparecido en el análisis de las respuestas en *Muelle*, conlleva dificultades para distinguir la presencia de dos resultados y, por tanto, de dos modelos y soluciones (matemática y real). Las expresiones de ambos resultados y soluciones son las mismas pero no se trata de la misma función. Sus variables son distintas (*x* e *y*, peso y longitud, volumen y diámetro, tiempo y temperatura) y sus dominios y recorridos diferentes. Esta distinción entre resultado matemático y real es fundamental en un contexto de modelización matemática, pues la interpretación de ambos resultados da lugar a los dos modelos y soluciones (matemática y real). Al considerar la expresión analítica de la función como una ecuación, surgen las denominaciones de las variables como incógnitas, el tratamiento de la igualdad como una ecuación que permite despejar una variable en función de la otra (sin identificar el proceso como de obtención de una nueva función, la inversa) e identificar el proceso de obtención de nuevas funciones a partir de operaciones entre funciones.

La raíz del problema se encuentra en las deficiencias a la hora de introducir la expresión analítica de una función y en que se desvincula, con el paso del tiempo, la definición de la función como relación entre variables de la expresión analítica y de la gráfica. A partir de 3º de ESO, el tratamiento de las funciones se basa en su representación gráfica, en cálculos sobre la expresión analítica y las vinculaciones entre ambas cosas. Las deficiencias de los alumnos a la hora de interpretar adecuadamente la expresión analítica de una función, como una igualdad que establece el tipo de relación entre variables, nos lleva a considerar esas carencias como una falta de *saber* vinculado a las funciones. De esta forma, su competencia demostrada en el *saber hacer* (es necesario recordar que obtienen un modelo matemático sin problemas en *Muelle* y *Aceite y agua*), no se halla compensado con un conocimiento matemático suficiente asociado al *saber*.

Las preguntas propuestas para obtener un nuevo modelo, tienen su base matemática en la obtención de nuevas funciones. En ese proceso, la situación real se halla presente pero no es el elemento fundamental. La obtención de nuevas funciones se realiza en el mundo de las matemáticas, de forma que el proceso se desarrolla fundamentalmente desde la intramatemática. En ese contexto y teniendo en cuenta el objetivo que se busca, cobra mayor importancia el logos que la praxis. De ahí los problemas que ya aparecen en *Muelle* y surgen claramente en el debate.

En el debate sobre esta pregunta, también es destacable el hecho mismo de la diferencia del desarrollo del mismo. Ambos grupos tienen muy claro que la forma de calcular el radio a partir de diámetro es dividiendo por dos la expresión pero las diferencias son, creemos, relevantes. Este hecho nos sitúa ante la impredicibilidad de la respuesta de los alumnos y las dificultades asociadas a esa impredicibilidad. A su vez, la impredecibilidad se encuentra asociada a la forma abierta con la que se planteó la pregunta y se orientó el debate. La no intervención del profesor ha potenciado ese carácter abierto, lo que ha desembocado en dos debates diferentes. Este hecho representa la constatación de la modelización como una actividad de desarrollo impredecible y de carácter abierto, lo que constituye un obstáculo para su introducción.

El problema es que el debate, si surge a raíz de una pregunta planteada por el profesor y éste actúa como moderador, conlleva, como hemos visto, un grado alto de impredecibilidad. Esa impredecibilidad impide la ñAnticipaciónò, paso fundamental en el esquema descrito como ejemplo en el Capítulo 2 (2.2.1.) Sin esa anticipación, por ejemplo, la ñMonitorizaciónò y ñSelecciónò se vuelve más compleja. Ante la estrategia concreta que propone un alumno, el profesor debe decidir en ese preciso momento si vale la pena discutirla o no, porque no la ha anticipado previamente. Es decir, conceder autonomía al alumno en un debate conlleva que sus respuestas y estrategias impliquen un cierto grado de impredecibilidad, lo que impide al profesor anticiparlas. Así, el profesor se encuentra ante un dilema: si potencia la autonomía del alumno, no puede anticipar sus respuestas y estrategias, lo que convierte el debate o discusión entre alumnos en un recurso o estrategia de aula de gestión difícil. Si desea anticipar sus respuestas, no tiene otro remedio que proporcionar claves que lleven al estudiante a la estrategia que el profesor ha anticipado, lo que representa limitar la autonomía del alumno.

5.2.2. *Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el área de aceite sobre el agua en lugar del diámetro?*

El profesor introduce la tercera pregunta a partir de la explicación del fin último de la función que han obtenido: calcular la cantidad de aceite de un vertido a partir del área contaminada. Les aclara que la forma usual de la mancha en un vertido no es circular y, por tanto, la función que relaciona radio y volumen de aceite no resulta útil. Por ello, es conveniente obtener la función que relacione área y cantidad de aceite.

2010-11:

62 Profesor: (é) lo que se puede calcular con facilidad es el área (é) a esto se le puede calcular el área, pero desde luego no es un círculo. [*Se refiere a una figura dibujada en el encerado*]. No hay diámetro, ahí no hay diámetro, existe área. ¿Cómo cambiar esto para que en lugar del diámetro o el radio aparezca el área? [*Señala la función que han obtenido en la pregunta 2:* $g(x)=\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$]

63 A12: Pues haces la función del área, del círculo, dos pi erre [$2\cdot\pi\cdot r$].

65 Profesor: El área de un círculo es pi erre cuadrado [*Escribe* $A=\pi\cdot r^2$ *en el encerado Mientras, los alumnos hablan entre ellos en grupos pequeños*]. Vale, ¿y qué haces ahora? Es el área de un círculo, pi erre cuadrado.

66 A4: Pones eso y en *r* sustituyes por la fracción esa [*Se refiere a sustituir en la expresión* $\pi\cdot r^2$ *, el valor de r por* $\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$ *, es decir* $\pi\cdot\left(\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$

68 A4: Cambias la letra, poner *h* de *x*, por ejemplo, igual a pi por dos con tres por raíz de *x* partido dos entre paréntesis elevado a dos. [*El profesor escribe en el encerado* $h(x)=\pi\cdot\left(\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$ *. A partir de este momento escribe lo que le indican los alumnos*].

73 Profesor: ¿*x* será?

74 Varios alumnos: Cantidad de aceite.

75 Profesor: ¿Y *h* de *x*?

76 Varios alumnos: El área

77 Profesor: En, ¿qué?

78 Varios alumnos: Centímetros cuadrados.

2011-12:

108 A19: Hallar el área del círculo.

114 A15: Pi dos con uno por raiz de *x* partido dos al cuadrado. [$\pi\cdot\left(\frac{2.1\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$]

114 A15: No, la raíz de x fuera. Es que si no, no va. [$\pi\cdot\left(\frac{2.1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{x}$]

121 A21: Pero así estás partiendo la fracción. Cuando realmente el radio es todo, es dos coma uno por raíz de *x* partido dos. Si coges sólo un trozo no estás cogiendo el valor real del radio. Estás hallando otro.

122 A16: Pero, ¿no te daba igual que cogieras una cosa que otra?]. [*Se refiere a las expresiones de la función que expresaban el radio en función de la cantidad de aceite*].

127 A21: No puedes coger un trozo elevarlo al cuadrado y después el otro, tiene que estar todo elevado al cuadrado.

Se vuelven a observar diferencias apreciables entre un curso académico y otro. En el curso 2011-12 volvemos a asistir a un debate centrado en la forma que debe adoptar el segundo miembro de la expresión de la función, a la que siguen denominando *f(x)*. En el curso 2010-11, se centran también en el cambio que es necesario realizar en la expresión $g(x)=\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$ para obtener la función que permita calcular el área. Obtienen una expresión con la que todos están de acuerdo con gran rapidez y sin que ese problema suscite ningún debate. Y, lo que es más importante, tienen especial cuidado en asignar un nuevo nombre a la función que obtienen (*h(x)*). La razón de que en el curso 2010-11 asignen un nombre nuevo a la nueva función, algo que no hacen en el curso 2011-12, es evidente: la aclaración hecha anteriormente por el profesor en el año 2011 sobre los nombres de las funciones. Dicho de otra forma, la intervención del profesor en la pregunta anterior ha repercutido en su respuesta.

Resulta muy difícil saber la razón de que los alumnos del primer año de la experiencia propongan la función $h(x)=\pi\cdot\left(\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$ con gran rapidez, sin que la forma que debe tomar la expresión suscite debate alguno, y en cambio los del segundo año precisen de un debate para poder llegar a obtener la función $f(x)=\pi\cdot\left(\frac{2.1\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$. Pero lo más probable es que, simplemente, que ante la misma pregunta pueden surgir debates netamente diferentes y que giren alrededor de cuestiones derivadas distintas, como ya ocurrió en la pregunta precedente.

La razón de que los alumnos del curso 2010-11 recurrieran a establecer cambios sobre la expresión $\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$, en vez de modificar el primer miembro *g(x)* para obtener una nueva función, *h(x)* como hicieron en la segunda pregunta es, con seguridad, la razón vuelve a ser el comentario del profesor en la segunda pregunta, que les llevó a darle otro nombre a *f(x)*. Como el nombre de la función era distinto, la variación en el primer miembro de la expresión ya se había realizado, razón para variar el segundo miembro. Por tanto, podemos afirmar que la influencia de los comentarios del profesor en una pregunta no se reducen a esa pregunta, sino que su influencia se puede trasladar también a los debates que surjan a continuación, de una forma difícil de predecir. Así, los comentarios que el profesor use para guiar el debate, pueden repercutir en la respuesta posterior de los alumnos, que el comentario realizado con anterioridad no pretendía.

A la incertidumbre de las respuestas de los alumnos se añade la necesidad de intervención del profesor. La razón que llevó al docente a realizar el comentario al que nos hemos referido anteriormente, es que los estudiantes estaban entrando en un callejón sin salida, en un debate estéril. El profesor estimó necesario realizar el comentario por considerarlo útil en el contexto de la evolución del debate que se estaba producido en torno a la segunda pregunta. Pero no está claro si su influencia sobre el la tercera pregunta también fue positiva.

5.2.3. *¿Qué función obtendría si representase en el eje x el diámetro y en el eje y la cantidad de aceite? (O el área y la cantidad de aceite)*

La pregunta tiene una relación directa con cuestiones de la actividad *Muelle*. En dicha actividad se planteaban dos preguntas directamente relacionadas con el uso de la función inversa de la función obtenida (*5. ¿Qué peso se corresponde con 21 cm de longitud del muelle? 8. Intenta deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle si conoces la longitud del muelle*). Ya hemos visto que responden de diferente forma ambas preguntas, a pesar de que se trata, básicamente, de la misma pregunta. Además, no identificaban, en general, que el cálculo solicitado implica el uso de la función inversa de la función que obtuvieron a partir de la tabla de datos. ¿Identificaron la inversa en *Aceite y agua* al hacer referencia expresa al método algorítmico de cálculo de la misma?

- 2010-11:

Ese año, la pregunta sobre el cambio de variable dependiente a independiente y viceversa, la contestan con gran rapidez y sin dudas:

> 176 Profesor: (é) lo que vais a hacer es, medir el área y sacar la cantidad de aceite y aquí está al revés. Sabéis la cantidad de aceite y obtenéis el área pero eso no interesa en la práctica, interesa justo al revés. ¿Me explico? ¿Y qué habría que hacer?
>
> 177 A1: La inversa
>
> 178 Profesor: ¿Todos de acuerdo?
>
> 179 Varios alumnos: Sí.

La rapidez y seguridad con que responden sorprende si la comparamos con las dificultades y dudas en las preguntas anteriores.

- 2011-12:

El desarrollo del debate alrededor de la función inversa es muy diferente al del año 2011:

> 144 Profesor: Es decir, vosotros tenéis como *x* la cantidad de de aceite, ¿no?, entonces en el eje *x* está la cantidad de aceite y en el eje *y*, en la del principio, la primera, estaba el diámetro, ¿sí?, pues ahora lo quiero al revés, quiero ponerlo al revés.
>
> 160 Profesor: El radio, al principio. Bueno, pero a mi no me interesa así, a mi me interesa al revés. Aquí el radio y aquí la cantidad de aceite, los mililitros [*Escribe en el eje x radio y en el eje y cantidad de aceite*].
>
> 161 A14: ¿Y te tenemos que dar el dibujo o la función? [*Por* **ñ***debuxo***ò** *se refiere a la gráfica de la función*]..
>
> 162 Profesor: Me tenéis que dar la función. Trabajáis con funciones.
>
> 164 A21: En vez de ser a raíz de *x* sería raíz de *y*.
>
> 165 A16: No, porque sería hacia arriba. [*Imita la forma de la gráfica de raíz de x con las manos*].
>
> 170 A17: ¿Sigue siendo la función raíz cuadrada también?

171 Profesor: ¡Ah!, lo tienes que averiguar.

172 A17: Sería una parábola, ¿no?

173 Profesor: ¿Qué?

174 A17: Una parábola.

175 A15: Cambia de forma.

176 A25: Cambia de forma pero hacia arriba.

177 A14: Sería, sería *f* de *x* igual a *x* partido *k*, todo elevado al cuadrado [*Se refiere* $f(x)=\left(\frac{x}{k}\right)^2=\left(\frac{x}{2.1}\right)^2$]

182 A21: Sería calcularle la inversa.

187 A14: Bueno, lo que hice fue despejar la x [é] Y da eso. Y después cambiar la *x* por la y *y* la *y* por la *x*.

188 A21: Pero es la inversa de una función. [*Varios alumnos asienten y afirman también* ***ñ****es la inversa****ò***].

189 A14: Vale. [*Se ríe*].

A continuación A18 pregunta ñ¿Y por qué esta todo al cuadrado?ò. A14 le explica, enseñándole un papel donde ha realizado los cálculos, el proceso que siguió para obtener la expresión $f(x)=\left(\frac{x}{2.1}\right)^2$. No se distingue con claridad lo que dicen, pero algunos alumnos escuchan sus explicaciones y plantean preguntas a A14, que responde ella u otros. Al acabar, todos se muestran de acuerdo con su forma de deducir la función solicitada. Al dar por concluida A14 su explicación, A21 dice:

A21: Es que es la inversa de una función. Esa es la inversa. Cuando miramos la composición. Cambiar la *x* por la *y* y despejar la *x*.

El profesor asiente, confirma que se trata de la función inversa y se da por terminado el debate.

Las diferencias con el debate del primer año son evidentes. En el curso 2010-11 identifican que se trata de la función inversa inmediatamente, sin recurrir de forma expresa al método de cálculo de la inversa. Por el contrario, en el año 2011-12 el debate es más largo y es evidente que reconocen la función solicitada como la inversa al identificar el método de cálculo algorítmico de la inversa. De hecho, la referencia al método algorítmico aparece varias veces durante el debate y es muy clara en la última intervención de A21, que incluso describe el método de cálculo de la inversa, que estudiaron al tratar la composición de funciones: ñCuando miramos la composición. Cambiar la *x* por la *y* y despejar la *x*.ò

No realizan referencia alguna a la justificación del método algorítmico para calcular la función inversa, aunque es posible que lo tuviesen en mente. Dicho de otro modo, los alumnos reconocen la función inversa gracias fundamentalmente al método algorítmico que usan para calcularla. Es el método de cálculo lo que recuerdan claramente y no la definición o las propiedades. Si el cálculo que realizan coincide con el cálculo que han estudiado para obtener la función inversa, entonces la función solicitada es la inversa. Es decir, si tuviesen que recurrir a la definición y propiedades de la inversa y a conocimientos sobre las funciones vinculados al *logos* para tratar de resolver el problema, las dificultades serían superiores. Volvemos a una descompensación entre *saber* y *saber hacer* en el conocimiento matemático vinculado a las funciones. Se trata, en definitiva, de una manifestación de la algoritmización del saber matemático vinculada a las claúsulas del contrato didáctico:

> ññEl algoritmoò constituye un instrumento de desbloqueo y de resolución de conflictos didácticos, en cuanto que permite momentáneamente un reparto claro de las responsabilidades. El maestro muestra el algoritmo. El alumno lo aprende y lo ñaplicaò correctamente: si no, debe ejercitarse pero su incertidumbre es casi nula. Se le asegura que existe una clase de situaciones *distintas* en las que el algoritmo da una solución (el conflicto volverá a aparecer cuando se trate de elegir un algoritmo para un problema determinado).
>
> (Brousseau, 1986, p. 310)

Los estudiantes son conscientes de esa algoritmización del saber y sus efectos negativos. Reproducimos unos extractos de las entrevistas en las que se hace referencia a esa algoritmización del saber:

77 A1: No, realmente a ti, cuando te dan la definición de una función, te quedas realmente indiferente. Dices, pues vale. Pues es eso. Me dan una *x*, la sustituyo en la función y me da un valor. Vale. Punto. Después hago un dibujito y ya está.

194 Profesor: Quiero decir, por ejemplo, las matemáticas que estudiaste en segundo.

197 A1: Pues era todo cálculo, cálculo, cálculo, calcular cosas.

199 A1: Derivo, integro, saco *este* área y fuera. Y me piden en este problema que optimice, saco una función, saco otra, igualo, tengo una función, la derivo, saco los máximos y fuera.

224 Profesor: Sí. Es decir, que normalmente los problemas que hicisteis en segundo tenían un esquema.

225 A1: Claro.

226 Profesor: Que teníais que seguir paso a paso.

227 A1: Halla la recta tangente en el punto *x* de la gráfica de la función tal. Te dan la función, te dan el punto. Sabes lo que tienes que hacer, aplicar la fórmula. Aplicas la fórmula, tienes que derivar, tienes que derivar en el punto, derivas en *x*, derivas en el punto, sacas valores y ya tienes la recta. Ese es el esquema. Es como si fuese un algoritmo [*Se ríe*]. Y en un problema de optimización tienes que pensar, o sea, tienes que pensar la forma de resolverlo.

En las opiniones por escrito de los alumnos, también se hace referencia en ocasiones al uso del *saber* en el debate. Como se observa en la Figura 124, A8 resalta, en función de sus gustos, dos partes: la toma de datos del laboratorio (que asocia a la ñprácticaò, es decir, a la praxis) y el debate, que asocia a la reflexión matemática sobre los resultados obtenidos.

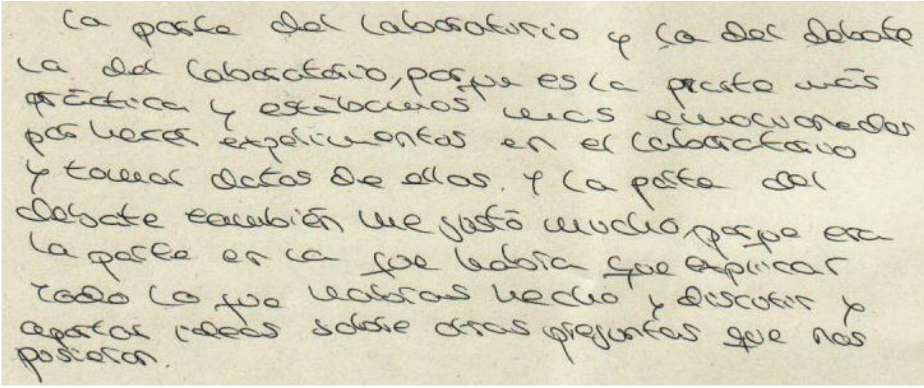

La parte del laboratorio y la del debate.
La del laboratorio, porque es la parte más
práctica y estábamos mas emocionados
por hacer experimentos en el laboratorio
y tomar datos de ellos. Y la parte del
debate también me gustó mucho, porque era
la parte en la que había que explicar
todo lo que habías hecho y discutir y
aportar ideas sobre otras preguntas que nos
pusieron.

Figura 124. Alumna A8. Preferencia de fases de las actividades

Transcripción: ñ*La parte del laboratorio y la del debate. La del laboratorio, porque es la parte más práctica y estábamos mas emocionados por hacer experimentos en el laboratorio y tomar datos de ellos. Y la parte del debate también me gustó mucho, porque era la parte en la que había que explicar todo lo que habías hecho y discutir y aportar ideas sobre otras preguntas que nos pusieron*.ò

Como se observa, justifica su elección en que el laboratorio es la parte ñmás prácticaò y que el debate representa el momento en que deben ñexplicarò el resultado obtenido, y ñdiscutir y aportar ideasò. Para ello debe dar respuesta a las preguntas planteadas, interpretando los resultados matemáticamente a partir de los conocimientos que posee sobre funciones, lo que proporciona una œexplicaciónô del modelo.

No es la única estudiante que menciona el debate como una parte especialmente interesante. También lo mencionan otros 9 alumnos (A6, A8, A12, A14, A20, A21, A22, A23 y A25; 37.5%). Como razón, señalan lo enriquecedor que resulta aportar ideas y discutir o debatir sobre ellas.

Como se acaba de ver, los estudiantes reconocen la función inversa al identificar el método de cálculo para su obtención. En las preguntas precedentes y en el cuestionario de *Muelle*, se han observado sus deficiencias en la comprensión y uso de conceptos y nociones básicos en funciones. En algunos casos, como en el caso del parámetro, se prolongan el curso siguiente, en el que los alumnos ya se encontraban cursando 2º de Bachillerato. Aunque las finalidades de los cuestionarios y las preguntas que se plantearon no pretendían que reflexionasen sobre su conocimiento ya adquirido, se podrían haber modificado con ese objetivo.

Se mostrará, en la siguiente fase, que las actividades de modelización pueden realizar conexiones entre conocimientos de partes del curriculum que, normalmente, estudian desligadas o compartimentadas. De esa forma, se evita una compartimentación del saber matemático, con lo que la modelización puede ayudar a modificar la creencia, muy arraigada en los alumnos, de que las matemáticas consisten en el estudio por separado de una serie de temas fijados en el curriculum.

5.3. LA APLICACIÓN DEL MODELO EN UN VERTIDO CONTAMINANTE DE PETRÓLEO

El modelo inicial se transfiere a una nueva situación, con lo que de un modelo particular sobre el comportamiento de aceite sobre agua, se pasa a un modelo más general. Los alumnos usan el modelo obtenido en una situación nueva. El fin último es el cálculo del volumen de petróleo en una situación de un vertido contaminante. Para conseguirlo, los estudiantes deben calcular previamente la escala de la fotografía en la que se observa el resultado visible del vertido, que adopta la forma de una mancha oscura que se aproxima a un trapezoide, y el área de dicha mancha.

La determinación del volumen de vertido se planteó como una cuestión dividida en tres partes (Anexo V):

1. Determina la escala de la fotografía.

2. Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes.

3. Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido.

Esta parte de la actividad la realizan 20 alumnos (todos excepto A13, A16, A20, A23 y A25), aproximadamente una semana después de la fecha de realización del debate. El tiempo que dedicaron a contestar las tres preguntas fue alrededor de una hora y cuarto.

A continuación se detalla el análisis para cada una de las preguntas planteadas.

5.3.1. La aplicación del modelo en un vertido contaminante de petróleo. *Determina la escala de la fotografía*

Los estudiantes tenían que determinar la escala de una imagen a partir de otra de la zona.

Las imágenes del vertido eran diferentes en el curso 2010-11 (escala 1:43300) y en el 2011- 2012 (escala1:58600). Recordemos que usar imágenes diferentes los dos años era que la diferencia de escala entre la carta náutica (escala 1:30000) y la fotografía fuese mayor.

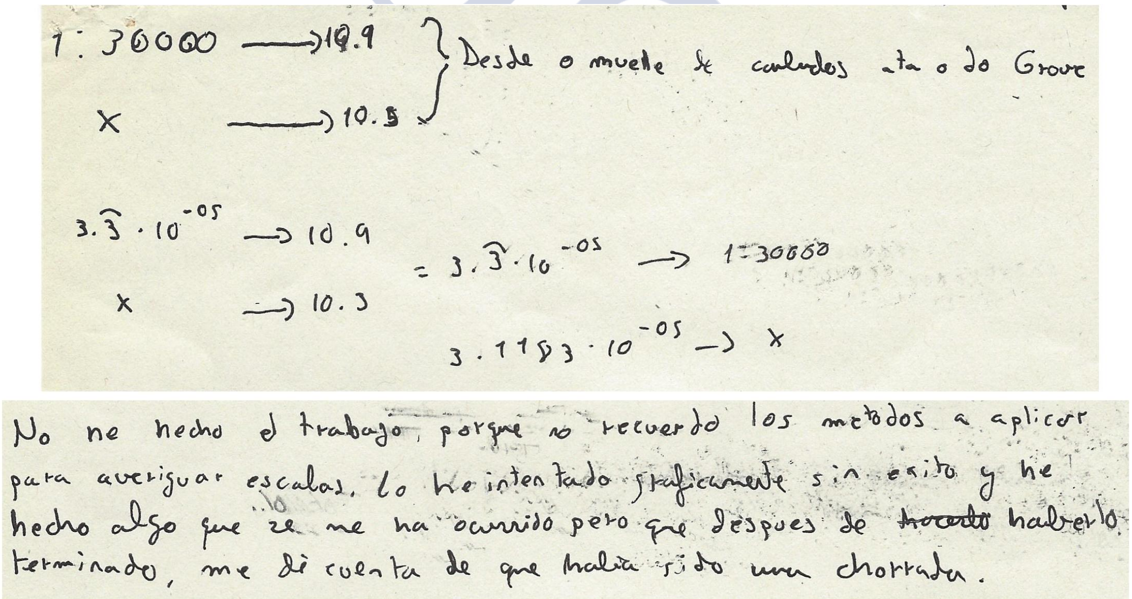
En la Tabla 32 asumiremos que la determinación adecuada de la escala conlleva medir una longitud mayor de 4 cm en la carta náutica.

Tabla 32. Determinación de la escala de la fotografía

		Longitud tomada en la carta náutica	**Alumnos**
Determinan la escala	Lo hacen adecuadamente	Medida mayor de 8 cm.	A4, A5, A6
		Medida entre 4 y 8 cm.	A1, A3, A18, A24

	No lo hacen adecuadamente	Medida igual a 1 cm.	A12, A17, A19
		Medida inferior a 1 cm.	A10, A21
No determinan la escala	Razones que aportan para no determinar la escala	A2: Respuesta en blanco A7: ñpor falta de conocimientosò A9: Las escalas son iguales: ñ(é) ya que miden lo mismo las distancia de un punto a otroò; ñ(é) no sé hacer escalasò A11: ñNo he hecho el trabajo porque no recuerdo los métodos a aplicar para averiguar escalasò	

A7, A9 y A11 justifican no haber conseguido obtener la escala por no recordar o faltarle los conocimientos necesarios para hacerlo. Curiosamente, A11 toma medidas en la carta náutica (mayor de 8 cm) y hace un cálculo. Ante el resultado que obtiene usando la calculadora (una escala igual a $3.1183 \cdot 10^{-05}$), deduce que el resultado es incorrecto, por lo que opta por afirmar que no recuerda los métodos para calcular una escala (Figura 125).



$1:30000 \longrightarrow 10.9$ Desde o muelle de cambados ata o do Grove

$X \longrightarrow 10.3$

$3.\hat{3} \cdot 10^{-05} \longrightarrow 10.9 \quad = 3.\hat{3} \cdot 10^{-05} \longrightarrow 1:30000$

$X \longrightarrow 10.3$

$3.1183 \cdot 10^{-05} \longrightarrow X$

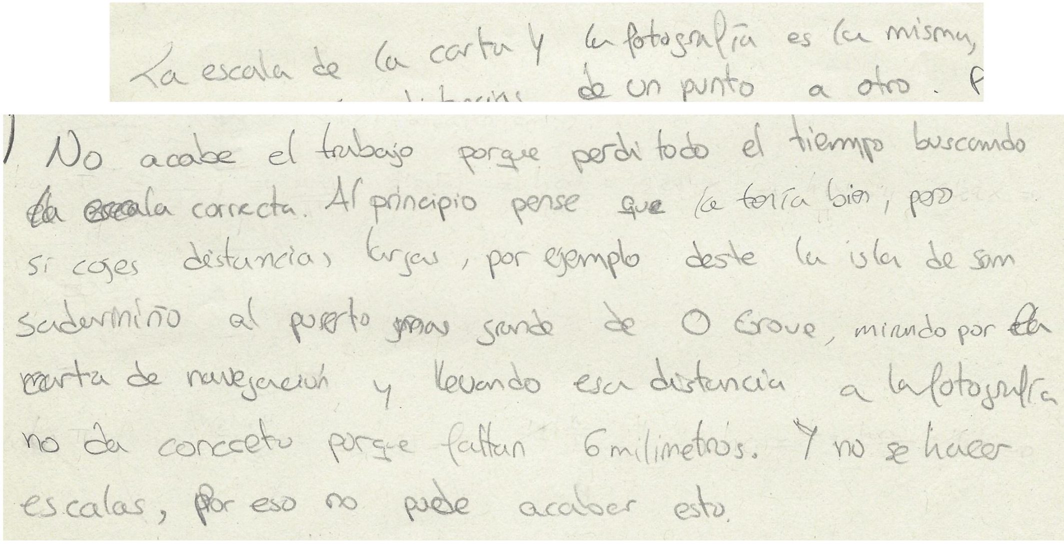
No he hecho el trabajo, porque no recuerdo los métodos a aplicar para averiguar escalas, lo he intentado gráficamente sin exito y he hecho algo que ze me ha ocurrido pero que despues de ~~hacerlo~~ haberlo terminado, me di cuenta de que había sido una chorrada.

Figura 125. Cálculo de la escala. Alumno A11

Transcripción: ñ*Desde el muelle de Cambados hasta el del Grove.*

*No he hecho el trabajo porque no recuerdo los métodos a aplicar para averiguar escalas. Lo he intentado gráficamente sin éxito y he hecho algo que se me ha ocurrido pero que después de haberlo terminado, me di cuenta de que había sido una chorrada.*ò

En la misma línea, A9 afirma, inicialmente y, como consecuencia de usar un valor de distancia demasiado pequeño, que las escalas son iguales (Figura 126). Ante la evidencia de que no lo son (simplemente observando ambas imágenes y tomando distancias más largas), opta por afirmar que no sabe hacer escalas.


La escala de la carta y la fotografía es la misma,
de un punto a otro. P

No acabe el trabajo porque perdi todo el tiempo buscando la escala correcta. Al principio pense que la tenía bien, pero si coges distancias largas, por ejemplo deste la isla de San Sadurniño al puerto mas grande de O Grove, mirando por la carta de navegación y llevando esa distancia a la fotografía no da correcto porque faltan 6 milimetros. Y no se hacer escalas, por eso no pude acabar esto.

Figura 126. Cálculo de la escala. Alumna A9

Transcripción: ñ*La escala de la carta y la fotografía es la misma.*

*No acabé el trabajo porque perdí todo el tiempo buscando la escala correcta. Al principio pensé que la tenía bien, pero si coges distancias largas, por ejemplo desde la isla de San Sadurniño al puerto más grande de O Grove, mirando por la carta de navegación y llevando esa distancia a la fotografía no da correcto porque faltan 6 milímetros. Y no sé hacer escalas, por eso no pude acabar esto.*ò

Recordemos que esa alusión a la falta de conocimientos ya aparecía en las razones aportadas para no conseguir obtener la función de ajuste en *Termómetro* y, en ocasiones, en las respuestas a las preguntas de *Muelle*.

La mención expresa al *saber hacer* o, en este caso, a *no saber hacer*, no nos parece casual. Situamos su respuesta en un contexto de enseñanza en el que los alumnos deben *saber hacer* más que *saber*. No disponer del *saber* asociado al *saber hacer*, o del logos asociado a la praxis, lleva al abandono de la tarea. Es decir, si hubiese acudido a los conocimientos adquiridos sobre semejanzas, aplicándolos al caso concreto de un mapa (identificando la escala como una razón de semejanza), no hubiese mencionado que *no sabe hacer* escalas. A9 ha reducido el conocimiento sobre semejanzas y escalas a recordar cómo *se hacen* ese tipo de cálculos (praxis), relegando en su proceso formativo, por considerarlo un conocimiento secundario o prescindible, el logos al olvido. Así, la opción de intentar utilizar sus conocimientos adquiridos no es posible o no se contempla como posibilidad, recurriendo a intentar recordar cómo se hacía tal o cuál cosa. Si la memoria falla, óno se sabe hacerô aquello que se solicita o es necesario para obtener una respuesta. No se produce ningún intento de resolver el problema acudiendo al bloque tecnológico-teórico [ϕ/θ] relativo a semejanzas y escalas, lo que podría suministrar el recurso tecnológico (*hacer* escalas) asociado a la parte práctica-técnica [T/τ] de la praxeología (Gascón, 2011). A9 y sus compañeros que dicen no recordar cómo se óhacenô escalas, no pueden acudir al *saber* asociado a las semejanzas y las escalas porque carecen de ese *saber*, lo que les impide considerar esa opción.

Usar una medida de 1 cm (A12, A17 y A19, Tabla 32), está ligada a la búsqueda de la unidad. No se dan cuenta de que esa decisión conlleva un error considerable y una dificultad añadida, al tener que encontrar dos puntos claramente identificables en ambas imágenes separados exactamente 1 cm. Por ejemplo, A19 fija dos puntos en la carta náutica e indica una separación de 1 cm entre ambos, que en realidad es aproximadamente de 0.9 cm. Esa diferencia de 1 mm influirá notablemente en el cálculo posterior pero prefiere forzar la medida para obtener 1 cm como separación entre los dos puntos (Figura 127).

Figura 127. Cálculo de la escala realizada por el Alumno A19

Para determinar la escala, 9 alumnos usan una única regla de tres (A3, A6, A8, A10, A14, A18, A19, A22 y A24, 45%, Figura 128) y 8 usan dos reglas de tres (A1, A4, A5, A11, A12, A15, A17 y A21, 40%, Figura 129).

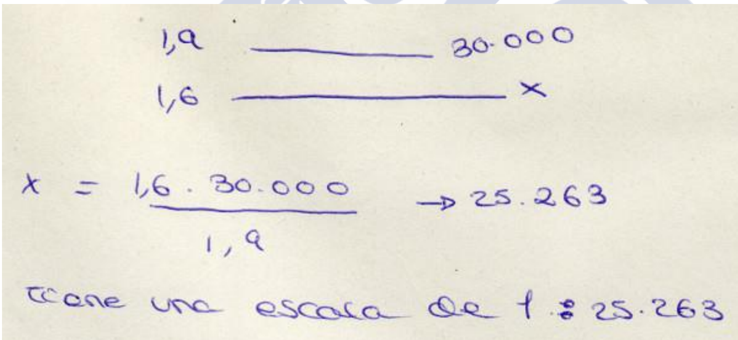


Figura 128. Cálculo de la escala de la Alumna A8 mediante una única regla de tres

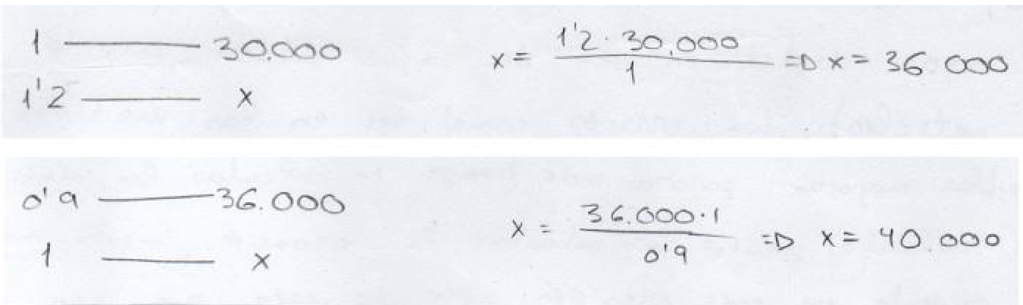


Figura 129. Cálculo de la escala del Alumno A15

El uso de la regla de tres para calcular la escala significa que la identifican como un problema asociado al uso de la proporcionalidad directa. Las figuras semejantes son figuras que, entre otras condiciones, deben cumplir que los lados homólogos de ambas sean proporcionales. La razón de proporcionalidad entre lados homólogos proporciona la razón de semejanza y, al mismo tiempo, conlleva que los lados son directamente proporcionales según una razón de proporcionalidad. Las escalas no son más que la generación de una figura semejante a otra: normalmente la primera procede de la realidad y la segunda es una figura sobre un papel. De esa forma, los problemas de escalas son problemas con figuras semejantes, en los que la escala es una forma de representar la razón de semejanza. De ahí que los problemas de escalas sean resueltos por los estudiantes de forma habitual con reglas de tres. Esto explica la razón de que un porcentaje muy alto de alumnos utilice la regla de tres en este caso (17 alumnos, 85%).

Como se verá, solo un alumno intenta usar la escala para calcular el área real de vertido a partir del área de la fotografía (A19). A pesar de la relación entre escala y semejanza, no mencionan en ningún momento ambas figuras como figuras semejantes, ni la escala como una razón de semejanza. Este hecho, unido a la ausencia de referencias a la razón de semejanza en el cálculo del volumen del vertido real, que realizan posteriormente, nos lleva a pensar que no han tenido en cuenta que pudiesen considerar el problema como un problema de semejanza.

Identificar la fracción $\frac{\textit{Distancia de A a B en la carta naútica}}{\textit{Distancia de A a B en la fotografía}}$ como una razón de semejanza entre dos imágenes, les hubiese llevado, probablemente, a tomar la escala de la fotografía como una razón de semejanza. Esto les hubiese ayudado posteriormente a utilizar la relación de volúmenes entre figuras semejantes ($\frac{\textit{VolumenFotograf}}{\textit{VolumenReal}} = (\textit{razón de semejanza})^3$) para obtener el volumen de vertido real a partir del volumen de vertido obtenido a partir del área calculada en la fotografía. Como veremos, la totalidad de los participantes tienen problemas para realizar ese cálculo.

En este caso concreto, más importante que la determinación correcta de la escala es observar que los estudiantes utilizan la regla de tres como técnica asociada a problemas donde intervienen escalas. Que no vinculen el uso de la regla de tres a la proporcionalidad entre lados homólogos de figuras semejantes, representa un nuevo ejemplo de compartimentación del saber. En Educación Primaria, estudiaron por primera vez escalas a partir del segundo curso, tanto en Educación Artística como en Matemáticas. En ambas asignaturas se introducen como forma de representación de la realidad en un espacio reducido (Real Decreto 1513/2006).

En varias asignaturas en Educación Secundaria las escalas se usan como herramienta matemática desde los primeros cursos: Ciencias Sociales, Geografía e Historia, Tecnología y Ed. Física (Orden ECI/2220/2007).

En Matemáticas, la proporcionalidad directa aparece en el curriculum de 1º de ESO, vinculado a ñla resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directaò (Orden ECI/2220/2007, p. 31792) y a los repartos directamente proporcionales. A continuación y en la misma página de la Orden, aparece un tema dedicado a los porcentajes como forma de ñexpresar composiciones o variacionesò. En el bloque de Geometría no se hace mención al uso de las escalas. Éstas aparecerán en 2º de ESO en el bloque de Geometría y son mencionadas justo después de la introducción del Teorema de Thales y vinculadas a la ampliación y reducción de figuras geométricas (Orden ECI/2220/2007).

Así, en Educación Primaria, las escalas surgen desvinculadas de la semejanza y esa desvinculación se mantiene hasta 2º de ESO. No se establecieron relaciones entre escalas y semejanza de figuras geométricas hasta pasados unos años desde la primera introducción de la escala. De esa forma, el contexto en que se sitúan escalas y semejanza es distinto, lo que conlleva dificultar el establecimiento de relaciones y conduce a la compartimentación (Tirosh, 1990; Vinner, 1990, 1994).

El análisis de los procesos que desarrolla un alumno para dar respuesta a una pregunta, proporciona una información valiosa que permite realizar una mejor análisis sobre su grado de adquisición o dominio de competencias matemáticas. Consideradas éstas como equivalentes a la comprensión y asimilación del conocimiento matemático, el análisis de procesos es más valioso que contentarse con comprobar si el resultado final a una pregunta es el correcto, base muy a menudo de las evaluaciones externas.

Por tanto, comprobar si obtienen una escala que se aproxime a su valor correcto no es lo realmente importante. De hecho, ni siquiera para los alumnos la exactitud en el resultado es lo importante en este caso concreto. En su crítica al trabajo que han realizado, 9 estudiantes (A1, A3, A6, A8, A14, A15, A17, A18 y A21; 45%) mencionan como crítica fundamental la falta de exactitud en la toma de medidas, en la determinación de la escala, etc. Aunque asumen la falta de exactitud en los procesos que han desarrollado, no les parece lo más importante de la actividad. Por ejemplo, A15, en su crítica y propuesta de mejoras, admite que el resultado se podría mejorar mediante una toma de medidas más cuidadosa, pero afirma expresamente que no es eso lo más interesante:

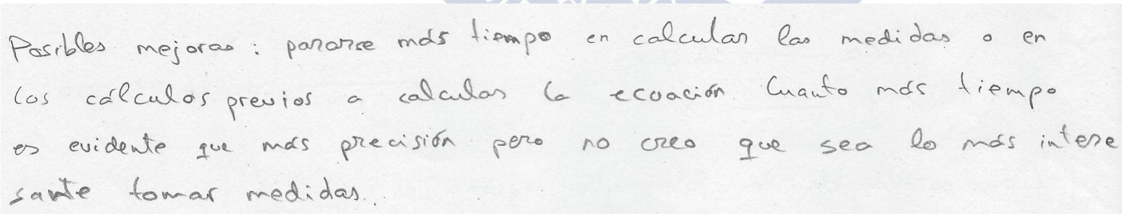

Posibles mejoras: pararse más tiempo en calcular las medidas o en los cálculos previos a calculas la ecuación. Cuanto más tiempo es evidente que más precisión pero no creo que sea lo más intere sante tomar medidas.

Figura 130. Propuesta de mejora del resultado obtenido en *Aceite y agua*. Alumno A15

Transcripción: ñ*Posibles mejoras: pararse más tiempo en calcular las medidas o en los cálculos previos a calcular la ecuación. Cuanto más tiempo es evidente que más precisión pero no creo que sea lo más interesante tomar medidas.****ò***

Su caso no es único. Aparecen valoraciones en el mismo sentido, tanto en las opiniones sobre las actividades por escrito como en las entrevistas. Valoran muy positivamente todas las actividades, pero destacan de forma clara la actividad *Aceite y agua*. Las preguntas (Anexo IX) en las que valoraban las actividades, fueron contestadas por todos excepto A13. De esos 24 alumnos, 22 (todos excepto A16 y A25, 91.7%), destacan la actividad de *Aceite y agua*. En lo que escriben, aparecen, de forma claramente predominante, lo interesante y divertida que resultó y la utilidad del modelo que han obtenido (Tabla 33).

Tabla 33. Aspectos destacados por los alumnos sobre la actividad *Aceite y agua*

La actividad Aceite y agua me pareció la actividad:	**Alumnos**	**Porcentaje**
Más interesante	A2, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A14, A17, A18, A20, A24	50%
Más entretenida	A2, A3, A8, A20	12.5%
Más útil	A1, A4, A5, A7, A11, A12, A14, A15, A17, A18, A19, A21	50%
Que más aportó a mi aprendizaje	A10	4.2%
Que más se aproxima al trabajo de los científicos	A22	4.2%
Menos pesada que las otras	A6	4.2%
Necesita de más precisión	A23	4.2%

Como se observa, tres estudiantes opinan que es la más interesante, unido a una valoración de la actividad como entretenida (A2, A8 y A20). A3 sólo menciona lo divertida que es, sin indicar que sea interesante (Figura 131).

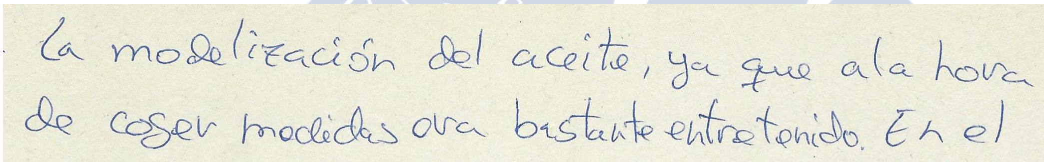

la modelización del aceite, ya que ala hora
de coger medidas ora bastante entretenido. En el

Figura 131. *Aceite y agua* como actividad interesante . Alumno A3

Transcripción: ñ*La modelización del aceite, ya que a la hora de coger medidas era bastante entretenida.***ò**

Esa diferenciación entre óinteresanteô y óentretenidaô nos sitúa ante dos valoraciones en ámbitos diferentes: el ámbito de lo cognitivo y de lo emocional. óMe parece entretenidaô, es usado para denotar una emoción, cuyo origen o razón de ser no justifican la mayoría de las veces. Sin embargo, óme parece interesanteô describe más una apreciación vinculada a aspectos cognitivos, algo que sí intentan justificar o fundamentar de formas diversas. Así, óme parece entretenidaô, lo asocian a diversión, novedad, distracción,é , algo que ya hemos visto que mencionan en sus valoraciones sobre la fase de toma de datos. Mientras que, óme parece interesanteô, aparece vinculado con la curiosidad, aprendizaje, comprensión,é (Figura 132).

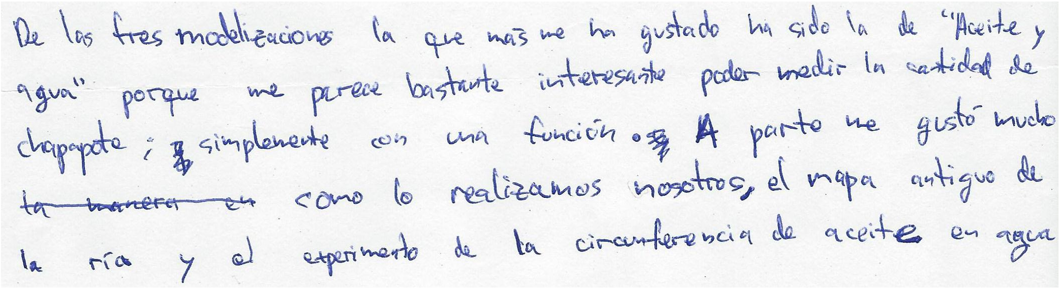

De las tres modelizaciones la que más me ha gustado ha sido la de "Aceite y agua" porque me parece bastante interesante poder medir la cantidad de chapapote; simplemente con una función. A parte me gustó mucho ~~la manera en~~ como lo realizamos nosotros, el mapa antiguo de la ría y el experimento de la circunferencia de aceite en agua

Figura 132. *Aceite y agua* como actividad interesante . Alumno A17

Transcripción: ñ*De las tres modelizaciones la que más me ha gustado ha sido la de* **ñ***Aceite y agua***ò** *porque me parece bastante interesante poder medir la cantidad de chapapote; simplemente con una función. Aparte, me gustó mucho como lo realizamos nosotros, el mapa antiguo de la ría y el experimento de la circunferencia de aceite en agua*.ò

De todos modos, las relaciones e influencias de los factores afectivos sobre el aprendizaje de las matemáticas, sobre las creencias y actitudes y la complejidad de las relaciones entre afectividad, cognición, creencias, actitudes y aprendizaje, son de una complejidad considerable (Gómez Chacón, 2000). Esa complejidad hace difícil y arriesgado un análisis fundamentado de lo que los alumnos pretenden transmitir al escribir que les parece entretenido o interesante y de las justificaciones que usan para calificarlo de una forma u otra.

El otro elemento que destaca claramente, es la mención a la ǘtilidadô o al uso directo del resultado. Algunos estudiantes mencionan la utilidad como justificación de la actividad como ñ*interesante*ò (A7, A11, A12, A14, A17 y A18; 25%; Figura 133).

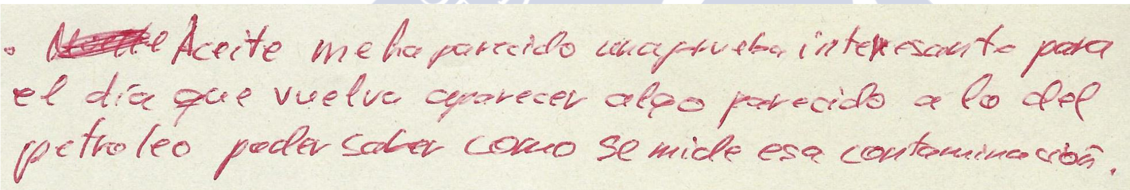

Aceite me ha parecido una prueba interesante para el día que vuelva aparecer algo parecido a lo del petroleo poder saber como se mide esa contaminación.

Figura 133. *Aceite y agua* como actividad interesante por resultar útil . Alumno A12

Transcripción: ñ*Aceite me ha parecido una prueba interesante para [que] el día [en] que vuelva [a] aparecer algo parecido a lo del petróleo para poder saber cómo se mide esa contaminación*.ò

La percepción del modelo de *Aceite y agua* como útil, se observa también en las entrevistas realizadas unos meses después, aunque en menor grado que en sus opiniones expresadas por escrito inmediatamente después de realizar las tres actividades de modelización.

78 Profesor: Bueno, preguntaba eso, si crees que te ayudó a comprender algo mejor, tanto una cosa que habías estudiado ya como lo que son las matemáticas.

79 A14: Sí, o sea, hace ver que las matemáticas se pueden aplicar en cosas que vemos todos los días y sirven para deducir lo que puede pasar con un objeto.

36 Profesor: Si aprendes, es interesante, automáticamente.

37 A19: Hombre, no siempre pero, yo que sé, por ejemplo, aprendes cosas nuevas y por lo menos cuando oyes hablar, por ejemplo, cuando fue lo del Prestige, que decían:

> ¡la mancha de chapapote abarca tantos metros cuadrados no se qué! Pues dices tú, cómo pueden medir eso, eso es imposible, y ahora te das cuenta de que, pues hay maneras, fórmulas y cosas así.

La mención a su utilidad y uso directo, nos remite a una concepción pragmática o utilitarista del conocimiento matemático. Este pragmatismo lleva a identificar la actividad como interesante si es óútilô de alguna forma, en clara relación con algunas perspectivas sobre modelización.

Así, la consideración de la actividad del *Aceite y agua* como la más interesante de las tres realizadas, se justifica por una parte importante de los alumnos en base a su pretendida utilidad al ser aplicada en una situación real. El comportamiento de un muelle sometido a un peso y un termómetro que se enfría, son también situaciones-problemas órealesô pero, a diferencia de lo que ocurre con el comportamiento del aceite en el agua, no poseen una aplicación útil. El hecho de haberles planteado la aplicación del modelo en un vertido real, proporciona utilidad al modelo, mientras que, las modelizaciones del comportamiento del muelle y del enfriamiento del termómetro, se limitaron a ser aplicadas para dar respuesta a cuestiones reales, pero percibidas como poco útiles.

Por ejemplo, en los comentarios de A1, al contestar sobre una posible aplicación del modelo obtenido en *Temperatura* (Anexo IV), afirma que todo tiene utilidad, pero con matices (Figura 134).

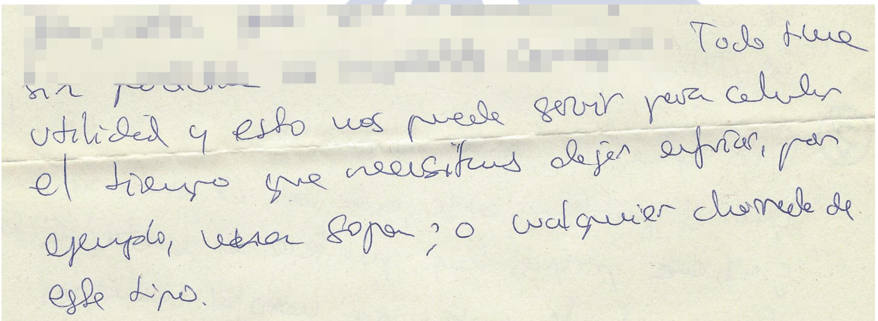

Todo tiene utilidad y esto nos puede servir para calcular el tiempo que necesitamos dejar enfriar, por ejemplo, una sopa; o cualquier chorrada de este tipo.

Figura 134. Las posibles aplicaciones de *Termómetro* como ñchorradaò. Alumno A1

Transcripción: ñ*Todo tiene utilidad, y esto nos puede servir para calcular el tiempo que necesitamos dejar enfriar, por ejemplo, una sopa; o cualquier chorrada de este tipo*ò

El modelo de termómetro lo ve útil sólo en ñchorradasò, es decir, en situaciones de utilidad discutible. En cambio, la aplicación del modelo del aceite es útil en una situación real de vertido contaminante para calcular el área y volumen de vertido, lo que ya no es una óchorradaô (Figura 135).

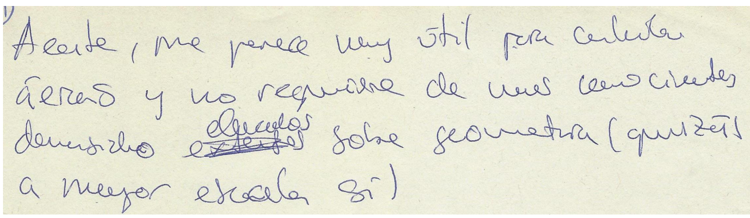

Aceite, me parece muy útil para calcular áreas y no requiere de unos conocimientos demasiado elevados sobre geometría (quizás a mayor escala sí)

Figura 135. *Aceite y agua* como actividad útil . Alumno A1

Transcripción: ñ*Aceite me parece muy útil para calcular áreas y no requiere de unos conocimientos demasiado elevados sobre geometría (quizás a mayor escala sí)*ò

Para los estudiantes, que el modelo matemático y real sea útil en una situación real, convierte la modelización matemática beneficiosa en su formación, de forma que le conceden un mayor valor a su carácter formativo o ódidácticoô (Figura 130 y Figura 136).

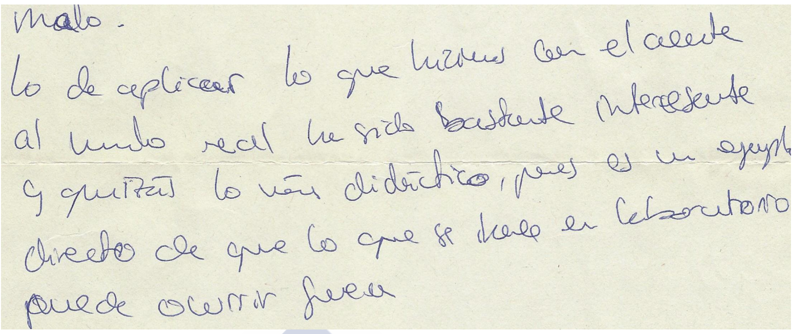

Malo.
lo de aplicar lo que hicimos con el aceite
al mundo real ha sido bastante interesante
y quizás lo más didáctico, pues es un ejempl
directo de que lo que se hace en laboratorio
puede ocurrir fuera

Figura 136. *Aceite y agua* como actividad *didáctica*. Alumno A1

Transcripción: ñ*Lo de aplicar lo que hicimos con el aceite al mundo real ha sido bastante interesante y quizás lo más didáctico, pues es un ejemplo directo de que se hace en laboratorio puede ocurrir fuera.*ò

Así, los alumnos priman el carácter formativo de la actividad frente a la exactitud del resultado. Al primar su carácter formativo, sitúan la modelización que realizan en el contexto educativo en el que se desarrolla. Con tal motivo, el proceso de validación del modelo (ciclo de Blum y Leiss, Figura 5), posee una importancia menor frente a otros procesos del ciclo de modelización. Dicho de otro modo, se establecen límites dentro del óResto del mundoô en el que se contextualiza la situación o problema, pues se tiene en cuenta el contexto educativo en que se plantea la situación y problema real: el aula, con sus fines y objetivos formativos. Que el modelo obtenido represente una solución matemática y real, plenamente válida para la situación y problema original, no es prioritario. Este hecho posee repercusiones sobre el ciclo de modelización. Por ejemplo, al valorar fundamentalmente su carácter formativo, obtener un modelo matemático y real es suficiente, al margen de que sea plenamente válido. No conceder importancia al proceso de validación del modelo resta importancia a la comprobación de su validez, lo que impide que el ciclo vuelva a desarrollarse. Dicho de otro modo, el ciclo de modelización no es un ciclo en realidad, sino un proceso dividido en pasos con un punto inicial y final.

Evidentemente, lo dicho es también válido para un profesor que deberá escoger qué objetivos son prioritarios en la modelización matemática, lo que se relaciona con las diferentes perspectivas de modelización. Si se fija la validez del modelo como prioritaria, el proceso de validación también lo es, con lo que el ciclo de modelización será, estrictamente hablando, un ciclo. Si el objetivo es que los alumnos desarrollen un proceso de modelización que dé lugar a un modelo/solución, la validación se encuentra presente en el proceso, pero se obvia en la práctica porque el modelo obtenido representa una solución, que cumple con los objetivos fijados aunque no sea plenamente válido. Se desarrollan los procesos del ciclo (incluso estimando su validez), pero el ciclo no volverá a desarrollarse porque ha cumplido con sus objetivos formativos, ajenos a que el modelo/solución sea plenamente válido.

Esta diferenciación de objetivos de la modelización, trae como consecuencia una diferenciación de ciclos de modelización para investigadores, profesores y alumnos, como indica Blum al proponer dos ciclos distintos (Blum y Leiss, 2007; Blum, 2007) (Figuras 5 y 6).

En las siguientes preguntas, se verá la percepción de la modelización como actividad útil y centrada en el contexto del aula, con repercusiones sobre el uso del modelo.

5.3.2. La aplicación del modelo en un vertido contaminante de petróleo. *Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes*

El cálculo debería ser planteado como el cálculo del área de una figura irregular (trapezoide). Se trata de un proceso de triangulación, que precisa de contenidos conocidos desde la Educación Primaria. En la siguiente tabla (Tabla 34) se muestra el tipo de procedimiento que han aplicado los alumnos para aproximar el área de la superficie contaminada y también se detalla el tipo de figura que han utilizado.

Tabla 34. Determinación del área de la superficie contaminada

<table>
<tr><th>Figura</th><th></th><th colspan="2">Alumnos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Polígono</td><td>Calculan el área</td><td colspan="2">A1: Traza un hexágono y lo divide en 4 triángulos. Valor 13.74 cm^2

A14: Traza un trapezoide y lo divide en 2 triángulos. Valor 5.775 cm^2 (Figura 13)</td></tr>
<tr><td>No calculan el área o lo hacen erróneamente</td><td colspan="2">A4: Menciona un ñtrapecioò pero dibuja un trapezoide. No calcula área.

A5: Menciona un trapezoide pero dice no recordar la ñfórmulaò.

A8, A10: Dibujan un rombo, un círculo y un trapecio. Calculan el área de un rombo.

A12: Dibuja un trapecio y usa la fórmula del área de un rombo, confundiendo bases con diagonales.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Círculo</td><td>Dibujan un polígono pero calculan el área de un círculo</td><td colspan="2">A2, A3, A6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dibujan una circunferencia con un compás sobre la fotografía y miden radio o diámetro de la misma</td><td>Usan la función para calcular el área</td><td>A15, A18, A19, A22</td></tr>
<tr><td>Calculan el área de un</td><td>A7, A17, A21,</td></tr>
</table>

		círculo (A= $\pi \cdot r^2$)	A24
Ninguna		A9 y A11: no calculan el área, aduciendo que como no han calculado la escala, el cálculo solicitado carece de sentido o utilidad	

Como se observa en la tabla, sólo dos estudiantes calculan el área de la figura (A1 y A14). Ambos realizan una triangulación, de dos formas diferentes (Figuras 137 y 138), y calculan las áreas de los triángulos.

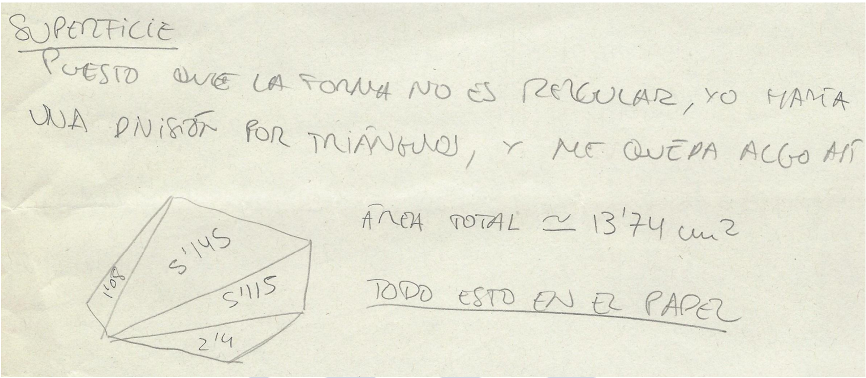


Figura 137. Cálculo del área. Alumno A1

Transcripción: ñ*Superficie. Puesto que la forma no es regular, yo haría una división por triángulos y me queda algo así. Área total* ≃ *13.74 cm²*. *Todo esto en el papel [Se refiere a que tomó los datos sobre la fotografía y realizó los cálculos en un papel a sucio, que no entregó]* ò

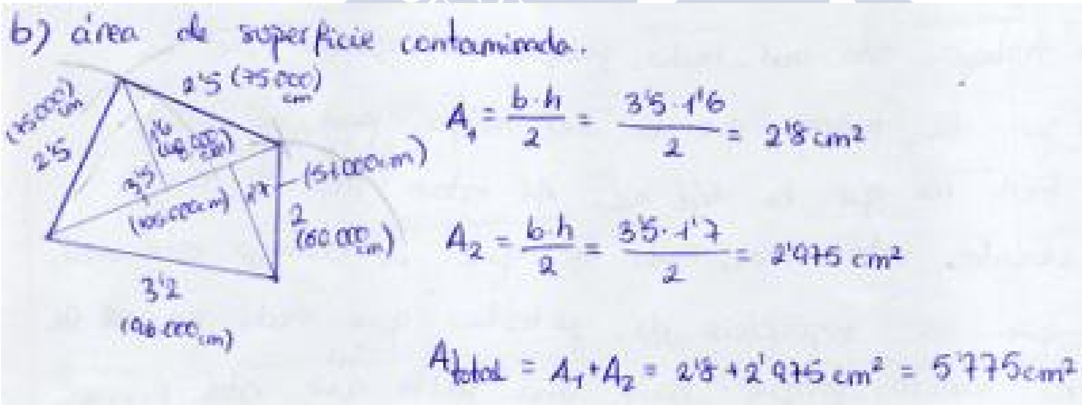


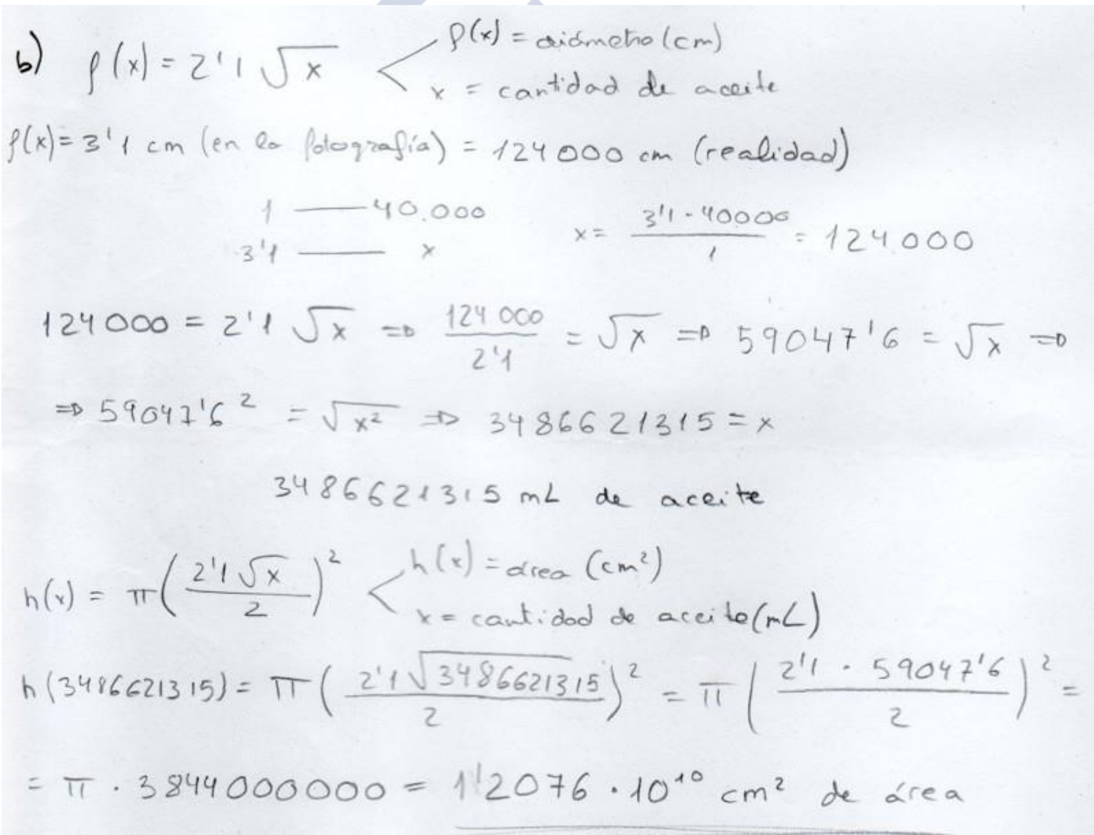
Figura 138. Cálculo del área. Alumna A14

Transcripción: ñ*Área de superficie contaminada*ò

Otros cinco alumnos intentan calcular el área mediante el uso de polígonos (A4, A5, A8, A10 y A12; 25%), aunque sólo 2 de ellos llegan a realizar el cálculo del área, usando un rombo (A8 y A10).

Resultan sorprendentes sus dificultades para identificar las figuras geométricas fundamentales y el cálculo de sus áreas. En este trabajo se pone de manifiesto que la repetición insistente de conocimientos considerados imprescindibles o fundamentales (como es el caso del cálculo de áreas y volúmenes), no garantiza que los alumnos los vayan a adquirir adecuadamente, ni que sean capaces de usarlos con éxito. En cuanto al tipo de figuras utilizadas para el cálculo de áreas, hemos observado que en el curso 2010-11, la mayoría intenta aproximar el área mediante polígonos, sin embargo, en el curso 2011-12, la mayoría lo aproximan mediante un círculo. En esta fase representa, de hecho, el único caso en que se observan diferencias de importancia entre un año y otro. Las entrevistas y la documentación escrita no aclaran nada que permita explicar la razón de esta diferencia.

Al margen de sus dificultades para calcular el área de una figura plana sencilla, lo más relevante es el uso de un círculo para calcular el área, por una parte importante de estudiantes (11 alumnos, 55%),. Tres de ellos (A2, A3 y A6) dibujan un polígono, pero calculan el área de un círculo. Los otros 8 (A7, A15, A17, A18, A19, A21, A22 y A24; 40%) no dibujan ningún polígono. Utilizan un círculo a pesar de que la mancha oscura es claramente un trapezoide. Llama la atención que 4 de esos 8 (A15, A18, A19 y A22, 20%) utilicen las funciones que han obtenido como modelos para calcular el área del vertido. Adjuntamos, como ejemplo, el cálculo realizado por A15 (Figura 139):


b) $\rho(x) = 2'1\sqrt{x}$ < $\rho(x)$ = diámetro (cm); x = cantidad de aceite

$\rho(x) = 3'1$ cm (en la fotografía) = 124 000 cm (realidad)

1 —— 40.000
$3'1$ —— x $x = \frac{3'1 \cdot 40000}{1} = 124\,000$

$124\,000 = 2'1\sqrt{x} \Rightarrow \frac{124\,000}{2'1} = \sqrt{x} \Rightarrow 59047'6 = \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 59047'6^2 = \sqrt{x^2} \Rightarrow 3486621315 = x$

3486621315 mL de aceite

$h(x) = \pi\left(\frac{2'1\sqrt{x}}{2}\right)^2$ < h(x) = área (cm²); x = cantidad de aceite (mL)

$h(3486621315) = \pi\left(\frac{2'1\sqrt{3486621315}}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{2'1 \cdot 59047'6}{2}\right)^2 =$

$= \pi \cdot 3844000000 = 1'2076 \cdot 10^{10}$ cm² de área

Figura 139. Cálculo del área del Alumno A15

Los alumnos, tenían escritas en el encerado del aula, las funciones obtenidas (tomando como base la función obtenida por uno de los grupos), tanto en la fase de generación del modelo como en el debate. Incluimos una tabla (Tabla 35) en la que figuran las funciones.

Tabla 35. Modelos matemáticos y reales obtenidos en *Aceite y agua*

Curso 2010-11	**Curso 2011-12**
$f(x) = 2.3 \cdot \sqrt{x}$ *x volumen (ml), f(x)=diámetro (cm)*	$f(x) = 2.1 \cdot \sqrt{x}$ *x volumen (ml), f(x)=diámetro (cm)*
$g(x) = \frac{2.3 \cdot \sqrt{x}}{2}$ *x volumen (ml), g(x)=radio(cm)*	$g(x) = \frac{2.1 \cdot \sqrt{x}}{2}$ *x volumen (ml), g(x)=radio(cm)*
$h(x) = \pi \cdot \left(\frac{2.3 \cdot \sqrt{x}}{2} \right)^2$ *x volumen (ml), h(x)=area (cm^2)*	$h(x) = \pi \cdot \left(\frac{2.1 \cdot \sqrt{x}}{2} \right)^2$ *x volumen (ml), h(x)=area (cm^2)*

En el cálculo que realiza A15, se observa el uso de las funciones obtenidas en la fases precedentes. Parte de la función que relaciona diámetro con volumen (función *f*) para obtener los ml de vertido. Después usa la función *h*, que relaciona volumen con área, para determinar el área de vertido.

La explicación a esta respuesta, similar a la que aportan otros estudiantes que utilizan las funciones para calcular el área, se encuentra en la valoración del modelo como «útil». La percepción del modelo matemático como útil en una situación real, lleva a situar la pregunta en el ámbito propio del que ha surgido el modelo: el mundo de las matemáticas. Las funciones han surgido, fundamentalmente, como producto de un trabajo matemático desarrollado en el mundo de las matemáticas. Así, la pregunta, aunque contextualizada en el mundo real, es identificada con la situación/problema que han modelizado, pero integrada en los procesos de modelización más vinculados al mundo de las matemáticas. De esa forma, el resultado matemático y real demuestra su característica fundamental: ser útil para dar respuesta a preguntas en una situación real/problema relacionado.

El recurso a los resultados matemáticos y reales que han obtenido durante el proceso de modelización (tanto el primero surgido mediante el uso del ordenador como el de los modelos derivados en el debate), sólo se explica desde la importancia que conceden a esos resultados.

Si se compara el uso del modelo en *Aceite y agua* con el uso en *Muelle*, la diferencia es considerable. En *Muelle*, no utilizan la función que han obtenido (por ejemplo, en las preguntas 4 y 5), que se ve sustituida mayoritariamente por el uso de la regla de tres. En el caso de *Aceite y agua*, algunos usan o intentan usar el modelo matemático y real, incluso en preguntas en las que el modelo no es la opción lógica para obtener una respuesta (como en el cálculo de área mediante las funciones). En *Muelle*, el uso de la regla de tres se relaciona con la importancia concedida a la tabla de datos que, a su vez, se halla estrechamente unida a los procesos de modelización del ciclo más vinculados al mundo real (obtención de datos en el laboratorio). Aunque la explicación del uso de la regla de tres no se fundamente sólo en la importancia concedida a los procesos más vinculados al mundo real, su presencia e influencia es clara.

Esa influencia de la experiencia de laboratorio o del ómundo realô no desaparece en *Aceite y agua*, simplemente se manifiesta en menor medida y de otra forma. Se ha mencionado que 4 alumnos dibujan un círculo para usar las funciones que han obtenido durante la modelización. El uso del círculo se justifica por el hecho de que la función *f* (Tabla 35) relaciona volumen con diámetro de un círculo. Además, otros 4 (Tabla 34, A7, A17, A21 y A24; 20%), trazan un círculo como forma de calcular el área, sin usar en ningún momento las funciones que han obtenido (Figura 140 y 141) .

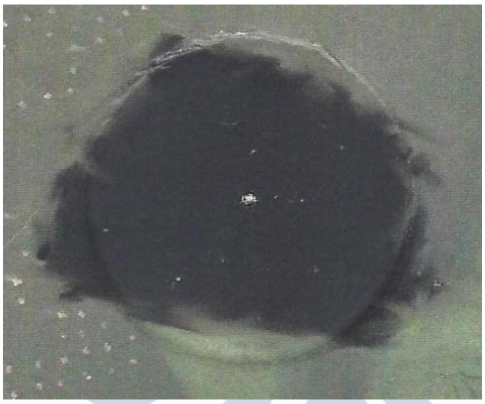
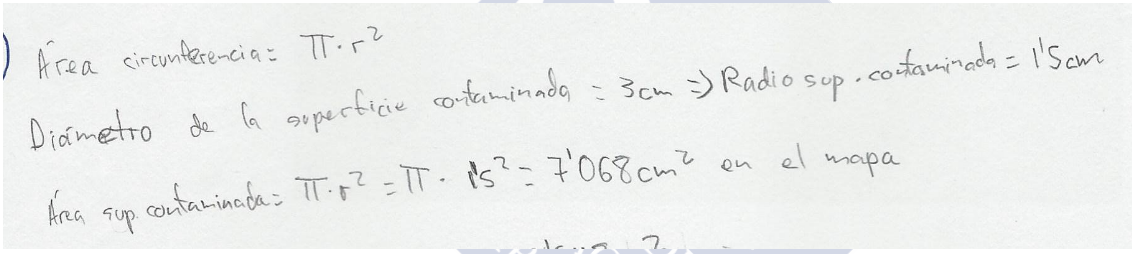


Figura 140. Trazado de un círculo para calcular el área. Alumno A17



Área circunferencia = $\pi \cdot r^2$
Diámetro de la superficie contaminada = 3cm ⇒ Radio sup. contaminada = 1'5cm
Área sup. contaminada = $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1'5^2 = 7'068 cm^2$ en el mapa

Figura 141. Cálculo del área por medio de un círculo. Alumno A17

Transcripción: ñ*Área circunferencia* $= \pi \cdot r^2$ *Diámetro de la superficie contaminada=3 cm*$\Rightarrow$*Radio sup. contaminada=1.5 cm*

Área sup. contaminada= $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1.5^2$ *=7.068 cm*^{2} *en el mapa*ò

El uso de un círculo, que no representa, de forma evidente, una buena forma de aproximar el área, unido a la ausencia en el cálculo de las funciones que relacionan área con círculos, lleva a pensar que la explicación se halla en la influencia de la fase de toma de medidas. En sus observaciones durante la toma de medidas en el laboratorio (recordemos que valoradas muy positivamente por la mayoría), el aceite sobre el agua se asocia a la forma de un círculo. Al plantear la situación del vertido, se vincula el aceite al petróleo y, por tanto, la mancha de petróleo a la mancha de aceite. Así, la influencia de la experiencia en el laboratorio tiene un reflejo en la aplicación del modelo. Es decir, ocurre lo mismo que en *Muelle*: los procesos del ciclo desarrollados en lo extramatemático, identificado con el óResto del mundoô y, los resultados vinculados a esos procesos (tabla de datos en *Muelle*, forma que adopta el aceite sobre el agua), priman sobre los procesos intramatemáticos, identificados con el ôMundo de las Matemáticasô (las funciones obtenidas).

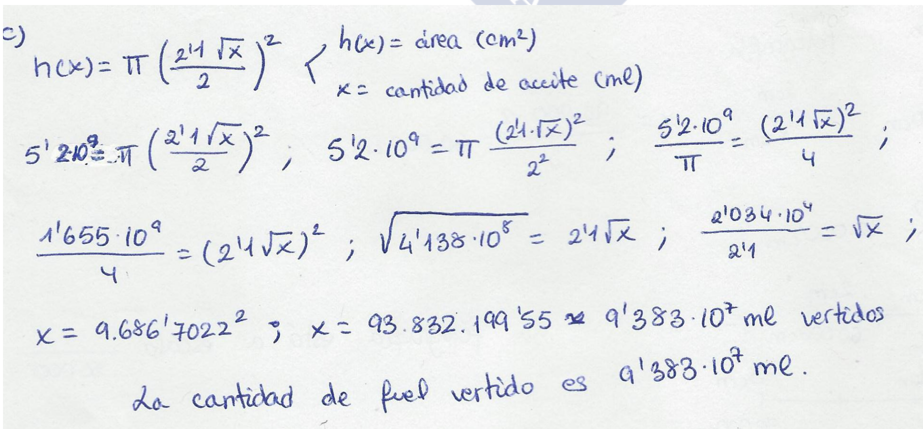
5.3.3. La aplicación del modelo en un vertido contaminante de petróleo. *Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido*

La hipótesis era que calculasen el área real del vertido usando el área y la escala calculada en la fotografía para, a continuación, usar la función *h*. Los estudiantes tenían escritas en la pizarra las tres funciones obtenidas en las fases previas (Tabla 35). Las funciones *g* y *h* las obtienen en el debate. El trabajo de los alumnos, en este apartado, se describe en la siguiente tabla (Tabla 36):

Tabla 36. Cálculo del volumen del vertido

	Alumnos
No intenta hacer el cálculo del volumen	A2, A7, A8, A9, A10, A11, A18, A24
No realiza el cálculo del volumen pero describe cómo hacerlo mediante el uso de la función *h*	A1, A3, A4, A5, A6
Realiza un cálculo de volumen de vertido	A12, A14, A15, A17, A19, A21, A22

Sólo dos estudiantes llegaron a calcular el área mediante el cálculo del área de un trapezoide (Tabla 34; A1 y A14). A1 únicamente describe textualmente que, para realizar el cálculo del volumen, debe sustituir el área de vertido en la función *h*. A14 utiliza la escala para determinar las longitudes reales del polígono que ha usado para aproximar el área de vertido (trapezoide). Una vez hecho esto, realiza el mismo cálculo, que ya hizo en el apartado anterior, para determinar aproximadamente el área real de vertido. Con ese valor, que sustituye en *h(x)*, calcula el valor de *x*, despejando su valor en la expresión (Figura 142).



c) $h(x) = \pi\left(\frac{2'1\sqrt{x}}{2}\right)^2$ $\begin{cases} h(x) = \text{área } (cm^2) \\ x = \text{cantidad de aceite } (ml) \end{cases}$

$5'2\cdot10^9 = \pi\left(\frac{2'1\sqrt{x}}{2}\right)^2$; $5'2\cdot10^9 = \pi\frac{(2'1\cdot\sqrt{x})^2}{2^2}$; $\frac{5'2\cdot10^9}{\pi} = \frac{(2'1\sqrt{x})^2}{4}$;

$\frac{1'655\cdot10^9}{4} = (2'1\sqrt{x})^2$; $\sqrt{4'138\cdot10^8} = 2'1\sqrt{x}$; $\frac{2'034\cdot10^4}{2'1} = \sqrt{x}$;

$x = 9.686'7022^2$; $x = 93.832.199'55 \approx 9'383\cdot10^7$ ml vertidos

La cantidad de fuel vertido es $9'383\cdot10^7$ ml.

Figura 142. Cálculo del volumen utilizando la función. Alumna A14

A15, usa la escala para determinar el diámetro real y utiliza la función *f* para calcular el volumen.

Excepto estos dos alumnos, A14 y A15, todos cometen errores o no calculan el volumen solicitado (18 alumnos, 90%). Los que describen textualmente cómo realizar el cálculo del volumen (5 alumnos, 25%), hacen lo previsible: una vez obtenida el área, calculan volumen sustituyendo el área en *h(x)* y despejando el valor de *x* (volumen) en la expresión resultante.

Entre los que intentan realizar el cálculo del volumen (Tabla 36, 7 alumnos; 35%), aunque se observan dificultades comunes, se podría decir que cada uno de ellos presenta particularidades que serían objeto de análisis individualizado. Entre las dificultades que llevan a la mayoría a obtener volúmenes claramente erróneos, se destacan las siguientes: las relacionadas con ejercicios sencillos de uso de escalas y de cálculo de áreas, el mal uso de las unidades de medida de magnitudes (atribuyendo unidades de medida de longitud a medidas de áreas o de volumen), deficiencias en el cambio de unidades de medida (por ejemplo, paso de cm^2 a m^2), dificultades asociadas a la correcta identificación y uso de las variables funcionales, deficiencias en el cálculo y manipulación de expresiones algebraicas sencillas y el uso inadecuado de la notación matemática, unido a una presentación deficiente de su trabajo (Figuras 143 y 144).

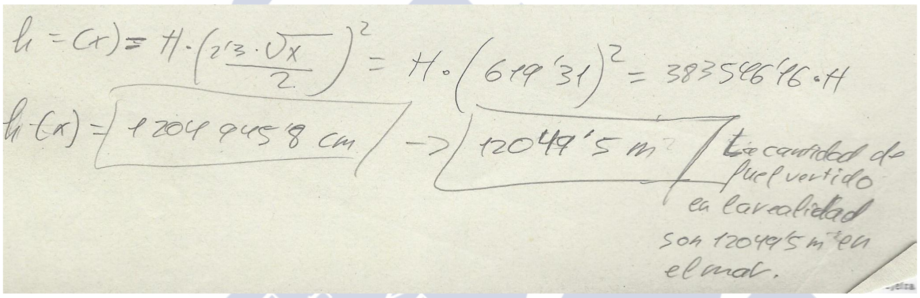


Figura 143. Cálculo del volumen de vertido. Alumno A12

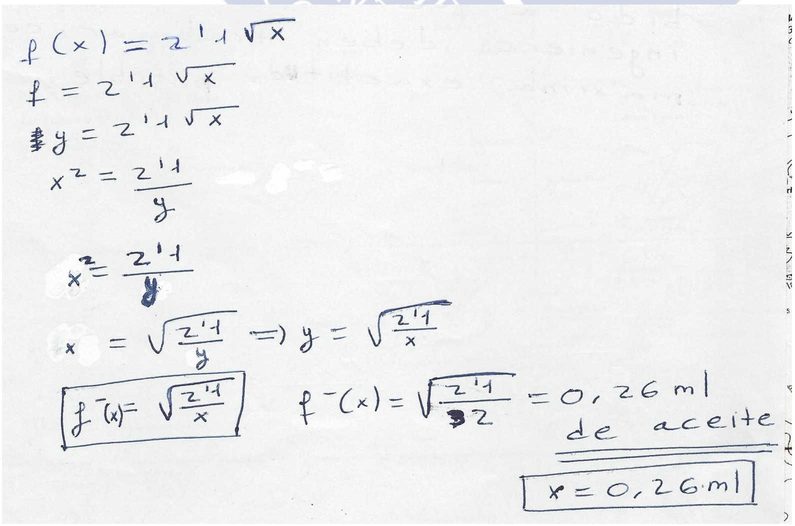


Figura 144. Cálculo del volumen de vertido. Alumna A22

En la aplicación del modelo, se ven involucrados conocimientos generales y básicos que se supone que un alumno de esa edad y formación ha adquirido y domina sobradamente. Muchos de los conocimientos matemáticos que necesita usar, han sido introducidos y repetidos cíclicamente desde la Educación Primaria o los primeros cursos de ESO:

unidades de medida de longitud, área y volumen, múltiplos y submúltiplos de unidades de medida, áreas de figuras geométricas básicas, resolución de ecuaciones, etc. Sin embargo, y como ya se había constatado en la modelización de *Muelle* y, particularmente en el debate de *Aceite y agua*, sus dificultades con esos conocimientos básicos son considerables. Por poner un ejemplo, A22 es consciente de que el volumen debería ser mucho mayor del que obtiene (Figura 145), pero no es capaz de encontrar su error.

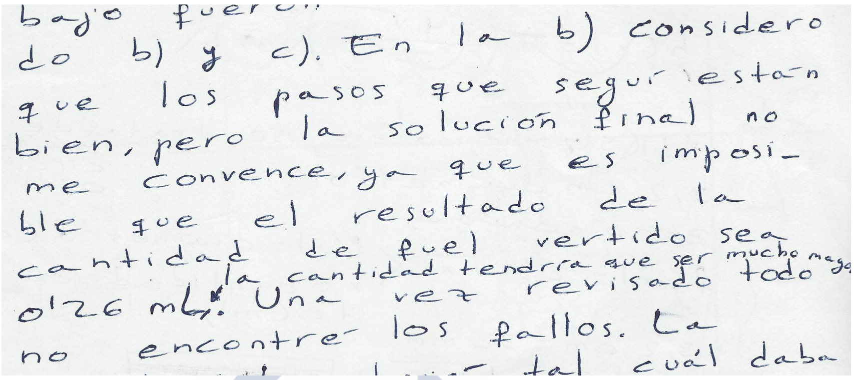

do b) y c). En la b) considero
que los pasos que seguí están
bien, pero la solución final no
me convence, ya que es imposi_
ble que el resultado de la
cantidad de fuel vertido sea
la cantidad tendría que ser mucho mayor
0'26 ml. Una vez revisado todo
no encontré los fallos. La

Figura 145. Comentarios sobre el resultado del volumen que obtiene. Alumna A22

Transcripción: ñ*En la b) considero que los pasos que seguí están bien, pero la solución final no me convence, ya que es imposible que el resultado de la cantidad de fuel vertido sea 0.26 ml. La cantidad tendría que ser mucho mayor. Una vez revisado todo no encontré los fallos.*ò

Como se observa en la figura 144, no comete un error sino un conjunto de errores, todos ellos fácilmente detectables.

Estas dificultades se convierten en un obstáculo añadido a las grandes dificultades que la modelización ya implica. Los alumnos, en general, a pesar de ser conscientes de que los resultados y cálculos que realizan presentan errores evidentes, en sus opiniones valoran muy positivamente las tres actividades. La falta de menciones a los resultados erróneos (excepción hecha a *Temperatura*, donde no obtener un modelo lo interpretan como un fracaso), lleva a pensar que no les conceden, en su valoración en conjunto, la importancia que debería tener. Dicho de otro modo, en su valoración de las actividades prima más el hecho de haber llevado a cabo procesos de modelización exitosos en las dos primeras fases, que el no saber usar esos resultados para responder una pregunta. El *saber hacer* el modelo prima sobre el *saber* implícito en el modelo o en el proceso de modelización.

Dependiendo de la experiencia, se sitúan de forma predominante en un resultado producto del proceso: en *Muelle* en la tabla de datos y en *Aceite y agua* en la función. El alumno vincula la pregunta a un resultado concreto del proceso, lo que lo sitúa, al mismo tiempo y, de forma predominante, en un mundo: en el mundo real o extramatemático en *Muelle* y en el de las matemáticas o intramatemático en *Aceite y agua*. De esa forma, el proceso de modelización resulta asimétrico, al primar un mundo sobre el otro.

En *Muelle* el resultado matemático y real que representa la función no es concebido como el resultado y solución fundamental del proceso de modelización, sino que es la tabla de datos el resultado y solución fundamental. En el caso de *Aceite y agua*, por el contrario, la función es el resultado y solución fundamental. Tanto en un caso como en otro, se manifiesta la importancia que conceden a los otros mundos en sus respuestas (los estudiantes calculan el área por medio de un círculo en *Aceite y agua*), pero uno de esos mundos toma un protagonismo mayor.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

Las conclusiones se harán en base a los objetivos de investigación y, al mismo tiempo, se relacionarán con aspectos de gran relevancia en la investigación actual sobre modelización matemática en Didáctica de las Matemáticas. Quiere esto decir que, de las conclusiones asociadas a los objetivos, surgen aspectos que constituyen algunos de los grandes temas de investigación actual sobre modelización matemática en la enseñanza.

La primera sección de este capítulo se centra en las conclusiones relativas al primer objetivo de investigación, más vinculado a las dos primeras fases de las actividades. La segunda sección se refiere a las conclusiones relativas a los otros dos objetivos de investigación, que se tratarán, al igual que se hizo en el análisis de resultados de la tercera y cuarta fase, de forma conjunta.

Por otra parte, las limitaciones del estudio se presentan integradas en cada uno de los secciones de este capítulo. Por último, se exponen en clave de preguntas, las perspectivas de investigaciones futuras.

6.1. EL PRIMER OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

OB1.- Explorar si los alumnos son capaces de obtener un modelo matemático a partir de una generación de datos experimentales en un laboratorio.

Como se ha dicho en la introducción del capítulo, las conclusiones relativas al primer objetivo de investigación se presentarán vinculadas a las dos primeras fases de las actividades.

Las tres actividades parten de una situación real en un sentido estricto. Son tres fenómenos físicos en los que dos magnitudes físicas se relacionan mediante una asociación causa-efecto. Los alumnos observan que si cuelgan pesos el muelle se alarga, que si vuelcan aceite en agua aparece una mancha circular y, que si calientan un termómetro la temperatura aumenta, reduciendo su valor con el transcurrir el tiempo. En los tres casos, lo real conduce al registro de datos y éste a la confección de una tabla de valores. Se trata, en fin, de un proceso típico de estudio científico en laboratorio. De hecho, dos de las actividades (*Muelle* y *Temperatura*), se relacionan con investigaciones de tipo experimental realizadas en el pasado, y que derivaron en el enunciado de leyes físicas (Ley de Hooke y de Enfriamiento de Newton). Hasta este punto, el desarrollo de las actividades no se diferencia del desarrollo de una actividad de laboratorio equivalente.

A la vista del análisis de resultados, la consecución del primer objetivo posee una doble lectura.

Por un lado, al término de la segunda fase, los estudiantes obtienen con facilidad un modelo matemático y real en las modelizaciones *Muelle* y *Aceite y agua* y tienen más dificultades con el modelo de *Temperatura*. La razón de las dificultades de la mayoría de los grupos para obtener un modelo en *Temperatura,* es la complejidad de la función matemática, que se identifica con el modelo matemático y real. La complejidad de la función es mucho menor en las otras dos modelizaciones, lo que explica la facilidad con la que obtienen el modelo.

A la complejidad de la función en el caso de *Temperatura,* se unen las deficiencias formativas de los alumnos a la hora de modificar una función, introduciendo parámetros, para conseguir una gráfica con características determinadas. En este punto, se considera que esa dificultad es lógica si se tienen en cuenta los objetivos, congruentes con el curriculum, de los bloques de análisis matemático que han estudiado. Esta dificultad se vería superada fácilmente sin más que introducir en su formación cómo la gráfica se ve modificada al realizar cambios en la expresión analítica de la función.

En conclusión, los alumnos no tienen excesivos problemas para obtener modelos de situaciones del mundo real vinculadas a fenómenos físicos reproducibles en el laboratorio. Incluso en el caso de *Muelle,* se pueden interpretar las rectas que obtienen dos de los grupos como modelos matemáticos y reales, aunque el objetivo de la actividad especificado a los alumnos fuese obtener una función.

Si se obvia el análisis de resultados de la 3ª y 4ª fase, se podría afirmar que los alumnos desarrollan el proceso de modelización con éxito, ya que obtienen un modelo sin dificultad. Pero si se tienen en cuenta los resultados del análisis de la 3ª y 4ª fase, la lectura es muy diferente. Los estudiantes obtienen un modelo pero la matematización, que conlleva todo proceso de modelización, presenta deficiencias que ponen en duda que se haya desarrollado correctamente.

De ahora en adelante se hará referencia a la segunda lectura que se acaba de describir. Las conclusiones se centrarán fundamentalmente en los otros dos objetivos (OB2 y OB3) aunque, en ocasiones, se hará referencia a cuestiones relacionadas con el primer objetivo. El objetivo OB3, muy relacionado con el profesor y su toma de decisiones, trata sobre las consecuencias de las conclusiones de los objetivos OB1 y OB2 sobre la implementación de la modelización en España. Las consecuencias sobre esa implementación son mayores en el caso del segundo objetivo que en el del primero, por lo que las conclusiones que se refieren a los objetivos OB2 y OB3 se analizarán de forma conjunta.

El desarrollo de las conclusiones llevarán a formular preguntas de investigación, lo que para los autores de esta memoria representa la delimitación de líneas de investigación futuras.

6.2. EL SEGUNDO Y TERCER OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

OB2.- Indagar si los alumnos desarrollan los procesos que conducen a la obtención del modelo y utilizan ese modelo adecuadamente en el contexto de preguntas en el que su uso puede ser útil.

OB3.- Analizar qué repercusiones tienen las respuestas a las preguntas relacionadas con los objetivos anteriores sobre la implementación de la modelización matemática en las aulas en España.

En esta sección las conclusiones se centran fundamentalmente en los objetivos OB2 y OB3 aunque, en ocasiones, se mencionan cuestiones relacionadas con el primer objetivo. Ello se debe a que el objetivo OB3, muy relacionado con el profesor y su toma de decisiones, trata sobre las consecuencias de las conclusiones de los objetivos OB1 y OB2 sobre la implementación de la modelización en España. Por otra parte, como las consecuencias sobre esa implementación son mayores en el caso del segundo objetivo que en el del primero, las conclusiones sobre los objetivos OB2 y OB3 se analizarán de forma conjunta.

Estas conclusiones se van a presentar atendiendo a los aspectos más relevantes que han surgido en el análisis de resultados en relación con el proceso de modelización que han desarrollado los alumnos y sus repercusiones sobre la toma de decisiones del profesor: (1) la matematización en el proceso de modelización; (2) la integración de praxis y logos en ese proceso; (3) la impredecibilidad como elemento inherente al proceso; (4) la autonomía del alumno; y (5) la utilidad de la modelización en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

6.2.1. El ciclo de modelización. La matematización de la realidad

Al término de la segunda fase, los alumnos han obtenido datos y una función que relaciona las variables presentes en el fenómeno físico. Las funciones, además, incluyen parámetros dependientes de las condiciones iniciales (tipo y longitud de muelle, cantidad de agua y detergente, temperatura ambiente y tipo de termómetro). Si no se hubiesen planteado preguntas a posteriori, como los alumnos obtienen un modelo sin problemas en dos de las tres actividades, la conclusión sería que han sido *competentes* generando un modelo, lo que les convierte en competentes desarrollando procesos de modelización. Incluso en los dos casos en los que obtienen como modelo una recta en vez de una función en *Muelle* (grupos GM1 y GM6), se podría argumentar que, en realidad, la ecuación de la recta establece el tipo de relación entre las variables, por lo que representa también un modelo matemático de la situación y problema real.

En la modelización de *Temperatura*, la razón de que los estudiantes *no saben hacer* el modelo, viene determinada, como ellos mismos indican, por sus deficiencias formativas o carencias relativas a la influencia de la introducción de números sumando, restando o multiplicando en la gráfica de la función. Es decir, si hubiesen dedicado parte del tiempo de su formación a estas cuestiones, el problema no hubiese surgido o no hubiese aparecido de forma tan determinante, por lo que es muy posible que obtuviesen un modelo.

Sin embargo, el análisis de las respuestas arroja una conclusión diferente. En *Muelle*, no usan la función para responder las preguntas que obtienen respuesta mediante la función, sino que utilizan la tabla de datos. También en *Muelle*, se observan grandes dificultades para identificar las variables dependiente e independiente de la función. Del análisis de sus respuestas en *Muelle*, se deduce que no saben qué es un parámetro. A esto se añade que, en *Aceite y agua*, una parte importante de estudiantes afirma que no sabe qué es un parámetro. Esa circunstancia les lleva a confusiones entre las variables dependiente, independiente y los parámetros. Este hecho impide que puedan identificar los parámetros presentes en las funciones con las condiciones iniciales, algo fundamental en las tres modelizaciones que realizaron. De esta forma, la introducción de mundo tecnológico y de los deslizadores no ha proporcionado ninguna ventaja en lo que a los parámetros se refiere. La dificultad asociada a los parámetros como variables-constantes aparece claramente en el análisis de resultados.

En algunos alumnos, la identificación de la función con una ecuación conduce a la consideración de las variables funcionales como incógnitas. Este hecho explica las dificultades para identificar la función inversa en *Muelle* en las respuestas a preguntas en las que se hace necesario su uso. En el debate de *Aceite y agua*, surge la identificación de la función inversa a raíz de la identificación del algoritmo de cálculo de la misma. Es decir, la función inversa es, simplemente, el resultado de un cálculo algorítmico, de forma que la inversa no es una función, con todo lo que ello representa, sino que se ve reducida a un cálculo que han aprendido a hacer previamente. En el debate de *Aceite y agua* aparecen nuevos datos en relación con la consideración de la función como una ecuación.

Como afirma Ursini (2011), en determinados problemas asociados a las funciones, la expresión de la función debe ser transformada en una ecuación. El problema que se observa en los alumnos, tanto en *Muelle* como en *Aceite y agua*, es que consideran la expresión analítica de una función como equivalente a una ecuación en contextos en que esa identificación no debería hacerse. La expresión analítica de una función representa un tipo de relación entre variables. Al identificar la función con una ecuación, la función como relación entre variables desaparece, por lo que, en realidad, la función no es tal. Como consecuencia, en la obtención de nuevas funciones en *Aceite y agua* surgen dificultades asociadas a la consideración de la función como una ecuación.

Mención aparte merecen sus dificultades, errores y confusiones asociados a conocimientos matemáticos básicos, supuestamente bien conocidos por los alumnos (escalas, semejanza, unidades de medida de magnitudes, cálculo de áreas, etc.) Las dificultades o falta de conocimientos de ese tipo se convierten, en el ámbito de la modelización, en un obstáculo para el estudiante. La razón de que ese tipo de conocimientos básicos representen un obstáculo insalvable para una parte importante de los alumnos, posee su raíz en el tipo de enseñanza que reciben. La compartimentación y algoritmización del saber matemático redunda en su preeminencia del *saber hacer* frente al *saber*. El *saber hacer* se vincula a la obtención de resultados correctos, por lo que el alumno busca un resultado en vez de una solución, como se observa en muchas de las respuestas de los estudiantes.

Ese *saber hacer* el modelo demostrado al término de la segunda fase, puede llevar a pensar que los estudiantes han realizado una matematización de la realidad que les ha llevado a generar un modelo matemático (esquema PISA, Figura 11). Pero todo lo dicho anteriormente pone en duda que hayan realizado una matematización de la realidad. No saben identificar variables, usan la tabla de datos en lugar de la función, identifican la función con una ecuación, etc. Todo esto no permite decir que se ha producido una matematización del problema o situación real. Es decir, los alumnos, al término de la segunda fase, han obtenido resultados, pero el hecho de que los interpreten y usen de forma deficiente impide que puedan ser considerados soluciones.

Si un resultado no representa una solución matemática no es posible decir que se ha resuelto el problema o, si se prefiere, que se ha producido una matematización de la realidad. Matematizar la realidad representa mucho más que obtener un resultado que tome la forma de una representación gráfica o una expresión matemática. Por poner sólo un ejemplo, identificar la relación entre peso y longitud total del muelle como una relación de proporcionalidad directa entre las variables representa una matematización del fenómeno deficiente. Si sólo se observa la expresión que obtienen los alumnos, han matematizado el fenómeno, especificando incluso la forma correcta en que se relacionan peso y longitud. Sin embargo, al analizar sus respuestas, no es posible afirmar sin género de dudas que han matematizado la realidad.

La razón de la contradicción que se acaba de describir radica en la confusión entre resultado y solución. Es decir, obtener un resultado no implica necesariamente que se ha obtenido una solución. En numerosas ocasiones, la obtención de un resultado conlleva que se han desarrollado procesos que convierten ese resultado en una solución. La comprobación de si se han desarrollado adecuadamente esos procesos o no, sólo es posible mediante el análisis del proceso de obtención del resultado. El modelo obtenido es producto de una puesta en práctica de técnicas previamente aprendidas, por lo que el proceso de matematización se halla implícito en el uso de las técnicas. Dicho de otro modo, interpretar el resultado que obtienen los alumnos al término de la segunda fase como un modelo matemático y real del fenómeno físico es un error desde el punto de vista de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los objetivos de la modelización en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no pueden reducirse a obtener modelos que tomen la forma de expresiones matemáticas. Entre sus finalidades se encuentran que los supuestos procesos que realizan del ciclo (o la matematización de la realidad) sean desarrollados realmente, poniendo en juego los medios necesarios para comprobar que así sea. Otra cuestión será determinar en qué consistirán esos medios que deben ponerse en juego para lograrlo.

En el ámbito de las modelizaciones que se han realizado, la importancia de *saber hacer* o ser capaz de obtener un resultado correcto a una pregunta o problema, se traduce en ser capaz de obtener un modelo que toma la forma de una función. Pero en realidad y, como se ha resaltado, los procesos del ciclo de modelización que realizan los alumnos no alcanzan el nivel de desarrollo que se supone al término de la segunda fase. Por mencionar un resultado llamativo, el uso mayoritario de la regla de tres, en vez de la opción lógica que representa el uso de la función, sitúa el uso del modelo obtenido en un estadio previo a la obtención de la solución buscada al problema real inicial (la función).

La razón se encuentra en la forma en que se realizan las tres modelizaciones. En la primera fase, los alumnos obtienen datos que registran en una tabla de datos. La tabla de datos es la primera concepción histórica de una función y aparece descrita habitualmente como una de las representaciones de las funciones. La tabla de datos representa, por tanto y de forma innegable, una primera matematización de la realidad en el proceso de modelización que realizan. Esta primera matematización se vincula de forma clara con el mundo real, por lo que estudiantes identifican las variables presentes en la tabla con las variables físicas. En la segunda fase, se producen nuevas matematizaciones que transforman los datos de la tabla en puntos del plano. Los puntos del plano se identifican con puntos de la gráfica de una función concreta, lo que da lugar al modelo matemático que relaciona las dos variables. Esta segunda fase se desarrolla fundamentalmente en el mundo de las matemáticas, de forma que las variables físicas son ahora, fundamentalmente, variables matemáticas. La identificación entre variables matemáticas y físicas es evidente, lo que permite identificar fácilmente el tipo de relación entre variables matemáticas como relación entre variables físicas.

En resumen, se hallan presentes varias concepciones y representaciones de la función, aunque se identifica claramente cada una de las dos fases con una representación concreta. Ésta, a su vez, se vincula a un mundo concreto: la tabla de datos al mundo real y la expresión analítica al mundo de las matemáticas.

Los alumnos, al tratar de responder una pregunta, la sitúan en uno de esos dos mundos. Si vinculan la pregunta al mundo real, acuden a la representación más vinculada a ese mundo, es decir, a la obtención de los datos experimentales y la tabla de datos. Si sitúan la pregunta en el mundo de las matemáticas, acuden al tratamiento matemático de los datos y a la expresión analítica. En otros casos, se mueven entre ambos mundos, de forma que la obtención de datos experimentales y la expresión analítica tienen un reflejo en sus respuestas. Esto se observa de forma más clara en la aplicación del modelo de *Aceite y agua*.

En el análisis de resultados, se ha descrito la influencia en la respuesta de cada uno de los mundos y su producto o resultado asociado como *extramatemático* (si es el mundo real y su resultado asociado el que se toma en consideración para responder), *intramatemático* (si es el mundo de las matemáticas) o *mixto* (si se manifiesta en la respuesta la influencia del resultado asociado a ambos mundos). Gracias a lo dicho anteriormente, se explican algunas respuestas sorprendentes de los alumnos: uso de la regla de tres, contradicciones en sus respuestas sobre la misma cuestión a preguntas diferentes, uso de una circunferencia para realizar el cálculo del área de un trapezoide, uso de una de las funciones obtenidas para calcular el área de una figura geométrica, etc. En algunos casos, su respuesta asociada a uno de los mundos se justifica en unión con otras cuestiones no directamente relacionadas con el proceso de modelización. Por ejemplo, el uso de la regla de tres es exclusivo de *Muelle* por el hecho de tratarse de una tabla de datos y una función que se identifica con una relación de proporcionalidad directa entre las variables presentes.

Ante el resultado matemático y real obtenido (una función), no parece caber otra opción que su uso en las preguntas. Pero el análisis de datos de las respuestas de los alumnos introduce cuestiones en modo alguno esperadas. La hipótesis de lo que responderían a las preguntas se basaba en dos suposiciones:

- El producto del proceso de modelización o, lo que es lo mismo, el modelo matemático y real es la función. La tabla de datos no es más que un paso previo para obtener ese modelo.
- Los alumnos participantes poseen un conocimiento matemático amplio, suficiente para desarrollar el ciclo de modelización y responder a las preguntas que se les planteen en relación con el modelo obtenido.

Al considerar el estudiante la tabla de datos como un producto valioso del proceso de modelización, la hipótesis de trabajo se viene abajo. Al ser sus conocimientos matemáticos menores de lo supuesto, tanto en calidad como en cantidad, la hipótesis resulta aún menos acertada.

La falta de validez de las hipótesis de respuesta del alumno que se formularon, tienen su raíz en las dos suposiciones mencionadas y que se han manifestado como erróneas. Pero existen otras cuestiones relevantes que, aunque se encuentran en relación directa con lo anterior, son motivo de reflexión diferenciada.

6.2.1.1. Praxis y logos

En el fondo del problema se encuentra la forma en que se desarrolló el proceso de obtención del modelo. En una matematización de la realidad, es fácil dar por supuesto que alcanzar la representación matemática de la matematización integra los procesos necesarios que deben desarrollarse. El modelo es una función, por lo que se supone que su proceso de obtención se ha desarrollado identificando variables físicas y matemáticas, asumiendo que existe una relación de dependencia entre ambas y estableciendo que la expresión analítica de la función describe esa relación. Además, el modelo obtenido posee una doble lectura: el modelo matemático, con sus correspondientes variables matemáticas y, el modelo físico, con sus variables físicas.

También es fácil suponer que obtener el modelo significa que el alumno asume esa doble lectura, lo que supone que diferencia el modelo matemático y real. Pero, en realidad, la situación es distinta. En el proceso de modelización que realizan, obtienen el modelo gracias a procedimientos y conocimientos puramente técnicos: obtener datos con instrumentos de medida, introducir puntos del plano cartesiano en el ordenador, introducir funciones dependientes de deslizadores y variar el valor de los deslizadores. Es decir, su trabajo se reduce a la praxis. El logos, que se supone integrado en todos los procesos descritos anteriormente, implica, por ejemplo, asumir que un deslizador en GeoGebra es una variable-constante o, lo que es lo mismo, un parámetro. El hecho de que los estudiantes, en general, no identifiquen los parámetros presentes con las condiciones iniciales y, aún más, desconozcan qué es un parámetro, contradice la suposición anterior. Lo mismo se puede decir de los problemas que tienen para identificar las variables dependiente e independiente en *Muelle*, para identificar la función que obtiene el grupo GM3 en *Muelle* con la inversa de las otras funciones o sus dificultades para modificar la función obtenida en *Aceite y agua* para poder usarla en la aplicación del modelo.

Este hecho obliga a tener en cuenta que la modelización matemática en la enseñanza no puede ser limitada a la obtención de un producto identificado con un modelo matemático y real. Si se plantea así, en su introducción en la enseñanza surgirán inevitablemente modelizaciones que obtienen modelos, pero que no desarrollan en realidad los procesos que conlleva el ciclo de modelización. El ciclo conlleva procesos complejos, que no se desarrollan con el uso exclusivo de una técnica previamente aprendida, sino que debe implicar el bloque tecnológico-teórico asociado. Si el uso de la técnica o la puesta en práctica del conocimiento matemático se encuentra desconectado de la tecnología y la teoría que la sustenta, aparecen las contradicciones, el recurso del alumno a no saber o carecer de los conocimientos necesarios, los errores evidentes a los que no busca solución, etc.

Las tres modelizaciones que se han propuesto a los estudiantes y el análisis de resultados, lleva a afirmar que reducirlas a las dos primeras fases o, lo que es lo mismo, a obtener un producto o resultado que toma la forma de un modelo, es un error de gran magnitud. La única vía posible, si no se quiere reducir la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a mera herramienta que proporciona resultados sin significado matemático, es ser vigilantes sobre los procesos que tienen lugar durante el ciclo. Por ejemplo, al obtener datos experimentales en *Muelle*, habrá que clarificar si el alumno asume la tabla de datos como una matematización de la realidad, con todo lo que eso conlleva: ¿identifica los datos con variables físicas y matemáticas?, ¿comete el error de identificar la tasa de variación media con la proporcionalidad directa?, ¿comprende que el siguiente paso lógico, para continuar el proceso de matematización, es establecer el tipo de relación que se establece entre las variables? Una vez volcados los datos, ¿tiene presente qué representa matemáticamente la representación de los datos de la tabla como puntos del plano?, ¿identifica los deslizadores con parámetros?, ¿asume que los parámetros que aparecen es la forma en la que las condiciones iniciales se manifiestan en la expresión funcional?, ¿comprende que ha generado dos funciones, la matemática y la real?, ¿establece las repercusiones que tiene sobre la expresión de la función matemática su interpretación en el contexto real?

Todas estas cuestiones no son más que ejemplos de aquello que se hace necesario en las dos primeras fases y que se podría ampliar a la aplicación del modelo en *Aceite y agua*. Este cambio en la forma de desarrollarse las dos primeras fases implica consecuencias con grandes repercusiones. Por ejemplo, la inversión en tiempo de ambas fases pasaría a ser mayor. Este hecho es de gran relevancia, pues la inversión de tiempo que precisa la modelización se destaca como uno de los obstáculos asociados a su introducción en la enseñanza. Ante el cambio propuesto, surge una pregunta sin respuesta y que se convierte, por tanto, en un nuevo objetivo de investigación: ¿cómo estructurar las tres modelizaciones descritas (u otras) para garantizar que praxis y logos se encuentren integradas?

La pregunta, en realidad, representa un resumen de un conjunto amplio de preguntas asociadas a la introducción de la modelización en la enseñanza de las matemáticas. Entre ellas y, de forma destacada, se encuentran dos problemáticas asociadas a la modelización: la impredecibilidad asociada a la modelización matemática y la autonomía del alumno.

6.2.2. LOS DILEMAS DEL PROFESOR: LA IMPREDECIBILIDAD

Desde la Didáctica de la Matemática se destaca la modelización matemática como una actividad abierta y poco predecible. Su carácter abierto viene determinado por la forma en que se plantea la modelización desde la Didáctica de la Matemática. Se trata de un situación real que se plantea como un problema contextualizado plenamente en el mundo real y que encuentra solución mediante un proceso de construcción de un modelo, que adopta un comportamiento cíclico.

El problema o situación inicial se plantea desde la Didáctica de la Matemática como un problema abierto, sin solución conocida por el alumno, por lo que el proceso de modelización adopta las características de una actividad abierta. Su carácter abierto se asocia a la imprevisibilidad por tratarse, en general, de problemas con varias vías posibles de solución.

La existencia de varias vías posibles de solución, unido al proceso que se desarrolla, se manifiesta en la forma en que el alumno busca la solución y que se identifica con una ruta que sigue el estudiante dentro del ciclo. Esas ómodelling routesô, individuales y de gran complejidad, convierten el estudio de la actividad del alumno en una modelización en una tarea difícil. En nuestro caso, la impredecibilidad y el carácter abierto se manifiesta con claridad en sus respuestas.

La hipótesis formulada de respuesta de los estudiantes se aleja mucho de los resultados del análisis de respuesta de los alumnos, lo que significa que la previsión, en general, no se ha cumplido. Además, a pesar de encontrar puntos en común en sus respuestas, su variedad es considerable. Resulta extremadamente complejo establecer, tomando en consideración todas las preguntas, categorías en las respuestas. Es decir, no es posible establecer categorías tomando las tres modelizaciones conjuntamente. Un mismo alumno, encuentra la respuesta a una pregunta desde lo extramatemático para, en la siguiente pregunta, hacerlo desde lo intramatemático. Como consecuencia, la categorización de las respuestas desde lo extramatemático, lo intramatemático o lo mixto, se ha realizado en algunas preguntas concretas, sin intentar obtener una caracterización de conjunto.

Por otro lado, la impredecibilidad se manifiesta vinculada a la influencia de cómo se plantea la pregunta y de las experiencias y preguntas previas. Como ejemplo, se propone la influencia en la respuesta de la inclusión de la función $f(x)=k\cdot\sqrt{x}$ en las fotocopias en lugar de la función $f(x)=\sqrt{x}$. La falta de previsibilidad en la actividad del alumno representa un obstáculo para el profesor, que prefiere las certezas frente a las incertidumbres. En cualquier actividad humana, se buscan certezas para eliminar incertidumbres, por lo que la actitud del docente frente a la impredecibilidad no es extraña. En el caso de la modelización, la incertidumbre se halla en la esencia del proceso, por lo que se enfrenta a un dilema. Las clases de matemáticas se basan, en general, en la predicción de qué va a ocurrir y cuánto tiempo va a llevar tal o cual cosa. La temporalización que el profesor debe realizar del curriculum oficial de Enseñanza Secundaria y Bachillerato durante el curso académico se basa en un curriculum cerrado. El curriculum, lleno por otra parte de suposiciones sobre el conocimiento ya adquirido por el alumno, implica necesariamente poder predecir qué va a ocurrir en el aula. Así, el carácter abierto y poco predecible implícito en la modelización, es un obstáculo para su introducción.

Por ejemplo, el debate para modificar la función en *Aceite y agua*, para poder ser aplicada en una nueva situación, se ha desarrollado de forma muy diferente un año y otro. Además, las dificultades que surgen un año y el siguiente son muy diferentes. Desde la Didáctica de la Matemática se plantea el uso de debates como un recurso de aula de enorme valor para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En el esquema de 5 prácticas en los debates, que se describió en su momento como ejemplo, en primer lugar aparece la necesidad de preveer qué va a ocurrir durante el debate. En nuestro caso, la previsión no se cumplió. No sólo eso, sino que el desarrollo del debate y las dificultades que surgieron representaron una sorpresa. Este ejemplo ilustra lo poco previsible que resultó el debate y lo ilusorio de la pretensión de poder predecir el desarrollo de un debate.

Ante la situación descrita, sólo cabe una posibilidad: limitar el carácter abierto y poco predecible. Ello conlleva la limitación de la autonomía del alumno por medio de la asunción, por parte del profesor, del rol de guía durante el proceso de modelización.

6.2.3. LOS DILEMAS DEL PROFESOR: LA AUTONOMÍA DEL ALUMNO

Al plantear las tres modelizaciones, se partió de que era necesario que el alumno realizase su trabajo de forma autónoma. Esa autonomía representaba su asunción de responsabilidades y una toma de decisiones con grandes repercusiones sobre su trabajo y resultados. En la primera fase, por ejemplo, debían decidir qué instrumentos usar para tomar medidas de entre los disponibles, cómo usarlos, cuántos datos tomar, qué intervalo de valores utilizar para tomar datos y cómo registrarlos en la tabla de valores.

La decisión tomada al respecto es positiva, si se tiene en cuenta la alta valoración de los estudiantes del hecho de tomar ellos mismos los datos en vez de usar datos suministrados. La consecuencia más destacable de esa concesión de autonomía al alumno es que consideraron que el modelo que obtuvieron posteriormente era, de forma plena, *su* modelo. El hecho de considerar el modelo como *su* modelo, representa que asumen como propios los errores y defectos del modelo pero también que las actividades se convirtieron en una experiencia valiosa. En principio, por tanto, la autonomía concedida al alumno sólo posee lecturas positivas. Pero, en realidad, esa misma autonomía generó problemas, que se manifiestan al contestar las preguntas. A continuación se proponen dos ejemplos para ilustrar lo dicho en este punto.

Si se hubiese limitado la autonomía de los alumnos, el grupo GM3 no hubiese consignado los datos de longitud a la izquierda y de peso a la derecha, al contrario que hicieron sus compañeros. Esta diferencia se puede percibir de dos formas diferentes: una oportunidad para hablar de la función inversa o un problema al encontrarnos con funciones o modelos de la misma situación real pero de expresiones analíticas muy distintas. La inclusión de la función inversa es una oportunidad sólo si los estudiantes se hallan en condiciones de poder comprender el concepto de función inversa y su relación con la función. Además, deben poder realizar el cálculo de la función inversa a partir de una dada, lo que implica que debe tenerse especial cuidado en que diferencien la expresión analítica de una función de una ecuación. Así, es innegable que las modelizaciones realizadas representan una buena forma de introducir la función inversa. Pero también puede representar un problema en el contexto del aula.

La actividad *Muelle*, por ejemplo, puede ser usada para introducir las variables dependiente e independiente, la diferenciación entre variables matemáticas y reales, el concepto de función y la relación entre función matemática y real. También como forma de introducción del parámetro como variable-constante. Pero si se usa como introducción a conceptos y nociones básicas de funciones, puede estimarse que la función inversa no lo es. Es decir, puede parecer poco conveniente que aparezca una tabla de datos con los datos intercambiados respecto a los de sus compañeros. La solución es sencilla y no parece una limitación excesiva: indicar en qué columna deben registrarse los datos. Esta intervención del profesor limita la autonomía del alumno pero, al fin y al cabo, se puede argumentar que se hace en función de los objetivos buscados y que no representa una limitación de autonomía excesiva.

El problema es que los mismos argumentos se podrían usar para indicarles a los estudiantes cuál es la mejor forma de tomar los datos, cuántos tomar, en qué intervalo, con qué unidades de medida, etc. Todas ellas son limitaciones que pueden ser percibidas como de importancia menor, incluso que son cuestiones importantes en su formación y que, por tanto, deben ser introducidas por el profesor. Pero, se quiera o no, representan limitaciones y reducciones de la autonomía del alumno.

En el caso de *Temperatura*, se encuentran fundamentalmente con un problema: no conocen bien la forma en que la introducción de un número sumando, restando o multiplicando afecta a la gráfica de la función. Ante este problema, el profesor podría realizar indicaciones durante la obtención de la función de ajuste que les haga ver la influencia de la introducción de un número sumando, restando, etc. en la gráfica. También se podría optar, como algunos alumnos indican en sus respuestas, incluir gráficas en la fotocopia de una misma función con números sumando, restando o multiplicando. La primera opción se corresponde con un aprendizaje guiado, de forma que si surgen dificultades, éstas se superan gracias a la intervención del profesor. La segunda representa una forma menos guiada pero, al fin y al cabo, la introducción de esas gráficas se usa como forma de evitación de las dificultades que se sabe van a surgir. En definitiva, se trata una reducción de la apertura del problema.

Esta reducción en la apertura, redunda en una limitación de las posibilidades que el alumno puede barajar para superar la dificultad, lo que representa una reducción de su autonomía. Esta opción se utiliza de forma habitual en una variante: que los alumnos, en un proceso desarrollado con anterioridad, aprendan la influencia de, por ejemplo, la introducción de un número sumando en la expresión matemática (pasando de $f(x)=sen(x)$ a $f(x)=a+sen(x)$ y $f(x)=sen(a+x)$). Ante la previsión de que surja una dificultad, se enseña previamente a los estudiantes lo necesario para superar la dificultad, pero en una situación desvinculada del problema que se propondrá más tarde. Justificado como óconocimiento necesario en la formación del alumnoô, en realidad es un conocimiento necesario para superar una dificultad que se ha previsto que aparezca en un problema.

En estos momentos y en España, la influencia de la introducción de números (o parámetros) en la expresión funcional (en su dominio, recorrido, gráfica, etc.), no es tratada de forma independiente en las aulas. Su supone que los alumnos que son capaces de realizar representaciones gráficas de funciones complejas (mediante el estudio y cálculo de su dominio, recorrido, cortes con los ejes, simetrías, periodicidad, límites, continuidad, asíntotas, monotonía y extremos), han adquirido un conocimiento suficiente sobre funciones. Esta suposición, evidentemente, se hace desde los objetivos marcados en el curriculum de Matemáticas I.

El problema es que los conocimientos que han adquirido, no permiten el ñTrabajo matemáticoò que precisan realizar para obtener la función en el caso de *Temperatura*, lo que obligaría al profesor a intervenir. Pero esta intervención representa una limitación en la autonomía del alumno y en el grado de apertura de la actividad. Se le suministra información necesaria, previamente o en el mismo momento en que se encuentra con la dificultad, para poder superarla. El hecho de que carecer de esa información les lleve al fracaso, hace recomendable la intervención del docente, en el momento o previamente. La opción de dejar que lleguen a conclusiones por ellos mismos, de forma plenamente autónoma, conlleva una inversión de tiempo muy considerable que, por otro lado, tampoco garantiza que consigan superar la dificultad.

Así, ante las dificultades asociadas e inherentes a un problema, destacan cuatro opciones de actuación: respetar la autonomía del alumno y el carácter abierto de la actividad, no plantear actividades que generen dificultades (como *Temperatura*), la intervención del profesor en el momento en que surja la dificultad y que el docente, en previsión de vaya a surgir, intervenga previamente a la realización de la actividad. Cualquiera de las cuatro opciones presenta ventajas e inconvenientes. Por ejemplo, la primera prolonga el tiempo que debe ser dedicado a una actividad, de forma que su duración es completamente impredecible. Además, es posible que lleve a puntos muertos y a la consiguiente frustración. Su principal ventaja es el respeto a la autonomía del alumno y a la consideración de la dificultad como algo inherente a un problema. El caso de la tercera, por ejemplo, estructura la enseñanza en función del tipo de actividades que se van a realizar. Es decir, si no se van a realizar actividades que conlleven una buena comprensión de la influencia de una número sumando en la expresión analítica de una función, ¿para qué introducir esa cuestión nueva? Es preferible dedicar tiempo y esfuerzos a otras cuestiones más generales y valoradas como más importantes.

A la vista del análisis de resultados, y coincidiendo con, al menos, con la opinión de una parte de los investigadores (Blum y Borromeo, 2009), el profesor y su intervención es indispensable. O, lo que es lo mismo, no es posible realizar tareas de modelización desde el respeto absoluto a la autonomía del alumno. Otra cosa será decidir en qué forma y hasta qué punto debe intervenir el docente. Esa decisión de cuándo, cómo y hasta dónde debe intervenir, lo enfrenta con decisiones complejas. La influencia de su intervención no se limita, como se ha visto en el análisis de resultados, a la pregunta o cuestión concreta que surge en un momento determinado, sino que puede tener un reflejo notable posteriormente. Así, sus decisiones sobre la limitación de la autonomía del alumno debe llevarle a reflexiones previas, basadas sobre qué objetivos quiere fijar para la modelización o, lo que es lo mismo, qué quiere que los estudiantes aprendan por sí mismos y qué quiere que aprendan con su ayuda.

6.2.4. LA UTILIDAD DE LA MODELIZACIÓN Y EL MODELO

Como se ha visto en el análisis de resultados, los alumnos distinguen con claridad el proceso de modelización y el modelo. El proceso de modelización que desarrollan se inscribe en un ámbito concreto (el aula y su proceso formativo), lo que algunos estudiantes destacan expresamente. Para esos alumnos, la utilidad del proceso de modelización radica en sus ventajas ódidácticasô. Esa consideración de la modelización en el contexto en que se desarrolla es general entre los alumnos. Aunque destacan de forma especial la obtención de datos en el laboratorio y la aplicación del modelo de *Aceite y agua* por tratarse de una situación socialmente relevante, sus opiniones inciden en las ventajas de las tres modelizaciones en conjunto.

El hecho de ser una actividad matemática en la que deben obtener los datos por ellos mismos y utilizarlos para obtener un modelo, hace que el proceso de modelización que desarrollaron se diferencie del tipo de actividades matemáticas que consideran usuales en el aula. Esta diferencia, fundamental, convierte las tres modelizaciones en algo novedoso e interesante. Al mismo tiempo y, por el mismo motivo, lo realmente importante no es que el modelo sea válido, sino que lo importante es el proceso que se desarrolla para obtener el modelo. De esa forma, el proceso de validación del modelo, que puede conllevar un nuevo proceso de modelización, posee una importancia menor.

Los alumnos asumen, en general, que los procesos que han desarrollado tienen defectos (fundamentalmente centrados en la toma de datos) que podrían ser subsanados para, de esa forma, obtener un modelo mejor o de mayor validez. Pero en ningún momento resaltan esa posibilidad como una necesidad. Por ejemplo, en *Temperatura* algunos proponen adaptar la situación-problema original al resultado que son capaces de obtener, proponiendo repetir la toma de datos a 0° C de temperatura ambiente. Proponer la variación de las condiciones de la situación original, sólo se comprende desde la prioridad que se concede al proceso de modelización frente a la generación de un modelo válido para la situación original. El hecho de que la validación del modelo posea una importancia menor en los procesos del ciclo de modelización no es algo secundario, pues conlleva que el proceso no se reproduzca, con lo que su desarrollo no es cíclico.

La utilidad del modelo, en cambio, se sitúa en la utilidad de su aplicación. Los estudiantes resaltan, de forma mayoritaria, la aplicación del modelo de *Aceite y agua* en una situación de vertido contaminante. El modelo que han obtenido permite calcular el volumen de petróleo que se observa en una fotografía como una mancha de un área concreta. Asumen que el modelo que han obtenido tiene límites para su aplicación en la situación que se les propone, pero también asumen que lo que han realizado constituye un ejemplo de cómo las matemáticas pueden resultar útiles. En el caso del modelo, la *utilidad* no se limita al aula y al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sino que su utilidad se identifica con la utilidad de las matemáticas.

Así, para los alumnos y nuevamente en general, el modelo de *Aceite y agua* representa un ejemplo de cómo las matemáticas pueden ser útiles. En este punto destaca, por ejemplo, la mención que hace el alumno A1 de las aplicaciones del modelo de *Temperatura* para cuestiones sin relevancia práctica (o óchorradasô) en comparación con las de *Aceite y agua*, útiles para calcular algo realmente importante. En la base de la percepción de la utilidad del modelo desde su aplicabilidad limitada a lo extramatemático, se encuentra una visión pragmática de las matemáticas: el modelo es útil porque representa una herramienta matemática que proporciona resultados útiles en el contexto de una situación real.

En resumen, los alumnos hacen explícita una valoración diferente, desde su utilidad, del proceso de modelización y del modelo. El proceso es útil desde sus ventajas en el contexto del aula y el modelo desde su utilidad en el contexto de la realidad extramatemática.

Las tres modelizaciones son modelizaciones de fenómenos físicos en los que la realidad es una realidad estricta. Sin entrar a discutir qué se puede considerar real y qué no en el ámbito de las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje, es innegable que, en las tres actividades, las situaciones y problemas se plantean plenamente integradas en el mundo real: los alumnos manipulan objetos tangibles, de forma que realizan cambios en la realidad que se manifiestan en efectos mensurables con instrumentos de medida físicos. Es posible que sus opiniones no fuesen las mismas si, por ejemplo, se les suministrasen los datos o los datos fuesen obtenidos por el profesor en el aula, reduciendo la actividad de los estudiantes a la observación del proceso de obtención de datos que realiza el profesor. Si, por ejemplo, se les suministran los datos, las actividades siguen siendo actividades que se corresponden con situaciones que representan problemas contextualizados en el mundo real. Pero se ha introducido un cambio que puede tener repercusiones en su percepción y valoración de las actividades.

El hecho de que perciban el modelo como *su* modelo y que asuman que los defectos y ventajas de los procesos que desarrollaron se derivan de sus decisiones, es consecuencia directa de cómo se plantearon y desarrollaron las tres actividades. Ante esto, surgen varias preguntas: ¿cambiaría su valoración si los datos fuesen suministrados o se varía la forma en que se desarrollaron las actividades? La anterior pregunta puede parecer que no tenga demasiada importancia. Pero su importancia es mayor si se tienen en cuenta los otros dos elementos fundamentales del sistema didáctico de Chevallard: el saber y el profesor.

El saber vinculado a la modelización comprende el saber asociado a los procesos de modelización del ciclo y el saber asociado a la situación y problema que se plantea en el contexto real. Un problema o situación puede ser modelizada desde el Álgebra, la Geometría, el Análisis, etc. e involucra conocimientos vinculados a esas áreas (o una combinación de ellas), pero siempre integradas en la realidad, lo que conlleva de forma ineludible un proceso de matematización de la realidad. Todo ello determina que la modelización se asocia a un conjunto de competencias y subcompetencias propias del proceso de modelización y también asociadas a la situación y problema real concreto.

Al plantear la modelización como actividad matemática integrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, surgen los objetivos de la modelización, que determinan las diferentes perspectivas. Con el Real Decreto de aprobación reciente (1105/2014), la modelización matemática pasa a introducirse en la ESO y el Bachillerato de forma expresa y vinculada a una enseñanza integrada de ciencias. Es decir, la introducción de la modelización matemática en la enseñanza ya no es una opción sino una obligación. Además, desde el Ministerio de Educación se apuesta por la enseñanza de las matemáticas integrada en actividades STEM.

Ante esta situación, el profesor y los alumnos, protagonistas últimos del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se encuentran ante una propuesta de introducción de la modelización matemática como parte de un proyecto de investigación interdisciplinar de Ciencias (IBSE). La consecuencia es que el profesor de matemáticas se vuelve a encontrar ante un nuevo dilema. Posee un modelo docente que deriva de un determinado modelo epistemológico. Al lado o enfrentado a éste, se encuentra el modelo epistemológico y docente que se propone desde la Administración. Si ambos modelos son cercanos, no existen motivos para que se generen conflictos de solución difícil, pero si los modelos no son cercanos, el conflicto es considerable.

Ese modelo epistemológico y docente del profesor tiene repercusiones sobre los objetivos que marque a la modelización y la generación de modelos. Por ejemplo, en el caso de esta investigación, las tres actividades parten de un fenómeno físico y proporcionan un modelo matemático y real. El modelo matemático establece una relación entre dos variables, fácilmente identificables con las magnitudes físicas presentes en el fenómeno. De hecho, el análisis de resultados permite afirmar que la identificación de variables matemáticas y físicas no es problemática. De esa forma, el objetivo de las tres actividades se puede reducir a la obtención, mediante un proceso de modelización, del modelo matemático y real. El modelo real integra parámetros ligados a las condiciones iniciales que, a su vez, se relacionan con coeficientes relacionados con los materiales utilizados en el fenómeno. Así, dos de las tres actividades dan lugar a modelos reales que representan el punto de inicio de leyes físicas (Ley de Hooke y de Enfriamiento de Newton). De esta forma, ante las actividades el profesor tiene dos opciones: centrarse en el modelo matemático o centrase en el modelo real.

Si se centra en el modelo matemático se ocupará de las cuestiones matemáticas relacionadas con el ciclo de modelización y los problemas asociados. Es decir, la STEM y la modelización como actividad IBSE no será lo realmente relevante. La complejidad de los procesos del ciclo de modelización es ya suficiente para ampliar aún más los objetivos con el modelo real y sus relaciones con otros conocimientos científicos de Ciencias, Tecnología o Ingeniería. De hecho, centrase en el proceso de modelización y en el modelo matemático ya le obliga a una toma de decisiones compleja que se verán influidas por sus propias concepciones y creencias. Es decir, ante la introducción de la modelización y tomando en consideración de forma preferente el modelo matemático, el profesor adoptará una determinada perspectiva, lo que determinará qué aspectos primará del ciclo. Por ejemplo, deberá decidir si es conveniente que los alumnos tomen datos o si esa toma de datos es algo secundario (justificado, por ejemplo, por tratarse de un proceso más propio de las ciencias experimentales que de las matemáticas). La toma de datos no es la única decisión que debe tomar el profesor. Lo que hasta este momento se ha mencionado en este apartado de conclusiones, proporciona múltiples ejemplos de cómo el proceso de modelización obliga al profesor de matemáticas a tomar decisiones y cómo esas decisiones tienen un efecto en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Si se centra en el modelo real y en su relación con otras ciencias, el modelo real será lo prioritario en la modelización. Para otras ciencias, el modelo que relaciona las dos magnitudes físicas es el fundamental. En el caso de *Muelle*, por ejemplo, el modelo se relaciona con la Ley de Hooke. Dicha Ley se enuncia como una relación entre fuerza ejercida y longitud que es estira el muelle o resorte. Con tal motivo, para establecer esa relación entre modelo real y ley física no es conveniente que el modelo sea de la forma $f(x)=ax+b$, sino que es preferible que la forma que adopte sea $f(x)=ax$. Así, la longitud es directamente proporcional a la fuerza ejercida que, en nuestro caso, se identifica con el peso que, a su vez, se relaciona con la masa que se cuelga del muelle. De esa forma, en un contexto de búsqueda de la generación de la Ley de Hooke y su aplicación en ingeniería para, por ejemplo, confeccionar dinamómetros, la generación de la tabla de valores se convierte en elemento fundamental. Ante este planteamiento, resulta conveniente que la tabla de valores registre valores de masa y longitud de elongación que provoca cada masa. Todas las tablas de datos que generaron los estudiantes registran longitudes totales, por lo que es necesaria la intervención del profesor para que las tablas registren sólo elongaciones. Esta intervención, se quiera o no, limita la autonomía del alumno y representa que la actividad se desarrolle de forma guiada. La justificación de la intervención del profesor, con la consiguiente limitación de la autonomía del alumno, se realiza desde los objetivos de la actividad y, por tanto, es percibida como una intervención y limitación de escasa importancia.

La tabla de datos con longitudes totales de muelle conllevó la detección de dificultades y obstáculos (obstáculo de la razón o proporción, ilusión de la linealidad, uso de la regla de tres, etc.), algo que no se produciría si sólo registran longitudes de elongación. Por tanto, los objetivos vinculados a la modelización *Muelle* como proyecto interdisciplinar, pueden conllevar que las dificultades asociadas a la tabla de datos que observadas en el análisis de resultados no aparezcan. Puede parecer que los alumnos identifican correctamente la expresión del modelo matemático y real con una relación de proporcionalidad directa. Pero, en el fondo, las confusiones entre la proporcionalidad directa, la presencia de una tasa de variación media constante y la identificación de la representación gráfica de una recta con lo anterior, se halla presente pero no se manifiesta. Así, los objetivos de la modelización *Muelle* como actividad interdisciplinar ocultan dificultades y obstáculos que se hallan presentes.

Además de lo anteriormente dicho, existe un serio problema de organización interna de los Institutos de Enseñanza Secundaria ante la introducción de la modelización como proyecto interdisciplinar. Como ejemplo de cómo una actividad tan aparentemente sencilla como *Muelle* puede provocar debates complejos entre profesores, se usará nuevamente la generación de la tabla de datos. ¿Generar una tabla de datos en laboratorio es una actividad vinculada por el profesor de matemáticas a las matemáticas? Es decir, en un contexto de planteamiento de la modelización *Muelle* como actividad STEM, ¿qué profesor asumirá la fase de obtención de datos? Si se acude a los resultados del análisis de datos, sería aconsejable que lo hiciese el profesor de matemáticas. Pero esa recomendación proviene de un análisis de resultados de una investigación sobre modelización en la Enseñanza Secundaria. Las complejidades asociadas a la modelización matemática en la enseñanza son campo exclusivo, en estos momentos, de la Didáctica de la Matemática, sin que lleguen sus conclusiones al profesor de Educación Secundaria en activo. Esa desconexión entre la Didáctica de la Matemática y los profesores de Educación Secundaria es un problema del que se ha ocupado la investigación sobre modelización matemática en Didáctica de la Matemática. Así, el problema asociado a la introducción de la modelización en la enseñanza, señalando los obstáculos y ventajas a dicha introducción, es uno de los campos de estudio actuales. Por ejemplo, los tres proyectos europeos que se centraban en la modelización, que ya se han mencionado (LEMA, COMPASS y PRIMAS), incluían encuestas a profesores sobre sus creencias y actitudes sobre la modelización y programas de formación del profesorado encaminados a la introducción de la modelización en las aulas. El tema no ha dejado de tener protagonismo en la investigación sobre modelización y, por ejemplo, en el último CERME celebrado en Praga en el año 2015, ante la falta de estudios al respecto, se presentó un proyecto que pretende estudiar las creencias y actitudes de los profesores sobre modelización (Cabassut y Ferrando, 2015).

En esta investigación no se ha tratado el problema de la relación entre creencias y actitudes del profesor y su relación con las dificultades asociadas a la introducción de la modelización en las aulas pero, a nuestro entender, estas relaciones poseen una gran importancia. Como se observa en las páginas precedentes de estas conclusiones, el docente debe tomar decisiones. Estas decisiones se encuentran en relación con el tipo de modelización que cree conveniente realizar, qué objetivos marca para la modelización en la enseñanza, cómo desarrollar el ciclo, qué pasos destaca de ese ciclo, en qué momentos y de qué forma interviene en el proceso de modelización y cómo y dónde debe limitar la autonomía del alumno para alcanzar los objetivos. Estas decisiones deben ser tomadas desde la reflexión personal, tomando como base el sistema de creencias y actitudes propias, pero también desde el conocimiento de la complejidad asociada a la modelización matemática en la enseñanza. Además, esas decisiones personales se ven influenciadas, en mayor o menor grado, por los objetivos de enseñanza que se marcan desde la Administración, plasmados en los Reales Decretos, y el entorno inmediato del profesor (compañeros del Departamento Didáctico de Matemáticas, compañeros de otros Departamentos Didácticos, decisiones de la Dirección del Centro, etc.). También, evidentemente, por las circunstancias concretas de los alumnos del grupo concreto.

6.3. PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

Esta memoria pone de manifiesto que la implementación de la modelización en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es una situación compleja. Al ser éste un estudio exploratorio, se han detectado una variedad de aspectos relativos a la introducción de la modelización en la enseñanza y relacionados entre sí que, a día de hoy en España, no han sido analizados suficientemente. Estos aspectos dan lugar, principalmente, a tres futuras líneas de investigación: (1) el sistema de creencias y actitudes del profesor y su influencia en la implementación de la modelización en la enseñanza; (2) la formación del profesorado en relación con la implementación de la modelización y los proyectos interdisciplinares; y (3) el conocimiento matemático que asocia el profesor a la competencia matemática.

Las líneas de investigación anteriores se interrelacionan y concretan a través de las siguientes preguntas:

¿Qué grado de influencia poseen las recomendaciones realizadas desde la Administración educativa sobre el modelo docente asociado al sistema de actitudes y creencias del profesor? ¿Qué actitud es la predominante entre los profesores de matemáticas ante la STEM y la IBSE? ¿Qué conocimiento matemático vincula el profesor de matemáticas en España al término «competencia matemática»? ¿Qué sistema de creencias y actitudes es característico de la mayoría de los profesores de Educación Secundaria en activo? Contextualizado en ese sistema de creencias, ¿de qué forma se integraría la modelización matemática en la enseñanza? ¿Cómo conseguir, mediante la formación permanente, que el profesor realice una reflexión sobre su sistema de creencias y actitudes y sobre la forma en que influye ese sistema en su modelo docente? ¿En qué aspectos debería basarse un programa de formación del profesorado centrado en la introducción de la modelización matemática en la enseñanza?

BIBLIOGRAFÍA

Albarracín, L. (2011). *Sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables*. Tesis doctoral. Universidad autónoma de Barcelona.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (3), 289-315.

Alsina, C. (2002). Too much is not enough: Teaching maths through useful applications with local and global perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 239ï 250.

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, (pp. 35-44). New York, EEUU: Springer.

Andresen, M. A. (2007). Understandings of ómodellingô. *Proceedings of the CERME 5, WG 13. Modelling and Applications* (pp. 2042-2050).

Ärlebäck, J., Doerr, H., y OôNeil, A. (2013). Studentsô Emerging Models of Average Rates of Change in Context. En B. Ubuz, C. Haser, y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 940-949). Ankara, Turquía: Middle East Technical University.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gomez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Mexico: Grupo Editorial Iberoamericano.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Relime*, 1(1), 40-55.

Bachelard, G. (1938). *La formacion de lôespirit scientiphique*. Paris, Francia: Vrin.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral: U. Autónoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2005). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. Estudio de la dinámica de poblaciones. *I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. "Sociedad Escuela y Matemáticas: Las aportaciones de la TAD"*. Baeza.

Bell, E.T. (1945). *The development of mathematics*. Courier Corporation..

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as didactical task: the concept of function as an example. En Jeremy Kilpatrick, Celia Hoyles y Ole Skovsmose (Eds). *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-82). New York, EEUU: Springer.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K. Walby, (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Education.

Blomhøj, M. (2007). Developing mathematical modelling competency through problem based project work - experiences from Roskilde University. *Proceedings of the Ninth International History, Philosophy, and Science Teaching conference.* Calgary.

http://www.ucalgary.ca/ihpst07/proceedings/IHPST07%20papers/125%20Blomhoj.pdf

Blomhøj, M. (2011). Modelling Competency: Teaching, Learning and Assessing Competencies ï Overview. *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, ICTMA14* (pp. 343-348). New York, EEUU: Springer.

Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2007). Whatõs all the fuss about competencies? En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series* (Vol. 10, pp 45-56). New York, EEUU: Springer.

Blum, W. (2007). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht Herausforderung für Schüler und Lehrer. En A. Büchter et al. (Eds), *Realitätsnaher Mathematikunterricht ï vom Fach aus und für die Praxis* (pp. 8-23). Hildesheim, Alemania: Franzbecker,

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling - Proceedings of ICTMA14* (pp. 15-30). New York, EEUU: Springer.

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1, (1), 45-58.

Blum, W. y Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der Tankenñ-Aufgabe. *Mathematik lehren*, 128, 18-21.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan, *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Horwood Publishing.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects ï State Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37ï 68.

Bonotto, C. (2003). Investigating the mathematics incorporated in the real world as a starting point for mathematics classroom activities. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp.129-136). Honolulu, EEUU: PME.

Bonotto, C. (2010). Engaging Students in Mathematical Modelling and Problem Posing Activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(3), 18-32.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 37-55.

Borromeo, R. (2004). *Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim, Alemania: Franzbecker.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86ï 95.

Borromeo, R. (2007a). Modelling problems from a cognitive perspective. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics* (pp. 260ï 270). Chichester, Reino Unido: Horwood.

Borromeo, R. (2007b). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the CERME 5* (pp. 2080ï 2089). Larnaca, Chipre: University of Cyprus.

Borromeo, R., y Blum, W. (2010). Insights into teachersô unconscious behaviour in modeling contexts. En R. Lesh et al. (Eds.), *Modeling students**ô** mathematical modeling competencias* (pp. 423ï 432). New York, EEUU: Springer.

Bosch, M., García, F.J., Gascón, J et al. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18 (2), 37-74.

Bosch, M., y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander, España: SEIEM.

Bosch, M., y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los ñtalleres de prácticas matemáticasò a los ñrecorridos de estudio e investigaciónò. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et dôaction*, (pp. 49-85). Montpellier, Francia: IUFM de lôAcadémie de Montpellier.

Boyer, C.B. (1986). Historia de la matemática. Madrid: Alianza editorial.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(1), 11-59.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 2 (3), 37-127.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologique et les problémes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 4 (2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.

[Traducción al castellano de Julia Centeno et al.: http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/seminario/archivos/Brousseau_Fondements.pdf]

Brousseau G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 9 (3), 309-336.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 41-63). Quebec, Canadá : Agence d'ARC,.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte) *Enseñanza de las Ciencias*, 8 (3), 259-267.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte). *Enseñanza de las Ciencias*, 9 (l), 10-21.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers

Brousseau, G. (2007). Entre la théorie anthropologique du didactique et la théorie des situations didactiques en mathématiques: Questions et perspectives. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Matemáticas, Escuela y Sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctic,* (pp. 23-52). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Cabassut, R. y Ferrando, I. (En prensa). Conceptions in France about mathematical modelling: exploratory research with design of semi-structured interviews. *Proceedings of the CERME 9*. Praga.

Carazo, P. C. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión: Revista de la división de Ciencias Administrativas de la Universidad del Norte*, 20, 165-193.

Carreira, S., y Baioa, A. (2011). Studentsô Modelling Routes in the Context of Object Manipulation and Experimentation in Mathematics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Bor0romeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, ICTMA 14*, (pp. 211-220). New York, EEUU: Springer.

Carreira, S. y Baioa, A. (2015). Assessing the best stair case: students' modelling based on experimentation with real objects. *Proceedings of the CERME 9*. Praga.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. L'Imprimerie royale.

Chetty, S. (1996). The case study method for research in small-and medium-sized firms. *International small business journal*, 15(1), 73-85.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Huesca.

http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2004a). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée*. Lyon. http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2004b). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *3e Université d'été Animath*. Saint-Flour (Cantal).

http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2006). Les mathématiques à lécole et la révolution épistémologique à venire. *Conférence plénière donné le 26 octobre 2006 dans le cadre des Journées 2006 de l'APMEP*. Clermont-Ferrand.

http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Horsori.

Chevallard, Y. y Johsua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique. La notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3 (2), 159-239.

Cockcroft Report. (1982). *Mathematics counts. Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmanship of Dr WH Cockcroft*. Londres, Reino Unido: Her Majesty's Stationery Office.

(http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft/index.html. Última ocasión en la que ha consultado el enlace 02-05-2015)

Collette, J.P. (1985). *Historia de las matemáticas (Vol I e II)*. Madrid, España: Siglo XXI.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tesis doctoral. Grenoble, Francia: Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-166). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers,.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. (2007). Studying and Remedying Studentsô Modelling Competencies: Routine Behaviour or Adaptive Expertise. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. ICMI 14.* (pp.241-248). New York, EEUU: Springer.

De Bock, D., Van Dooren, W., Verschaffel, L. y Janssens, D. (2001). Secondary school pupils' improper proportional reasoning: an in-depth study of the nature and persistence of pupils' errors. *Proceedings of PME, 25* (Vol. 2, pp. 313-320). Utrecht.

Decreto 133/2007, do 5 de julio, por el que se regulan las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad Autónoma de Galicia.

Decreto 86/2015, del 25 de junio, por el se establece el curriculum de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato en la Comunidad Autónoma de Galicia.

Dewey, J. (1938). *Experience and education*. New York: Touchstone.

http://ruby.fgcu.edu/courses/ndemers/colloquium/experienceducationdewey.pdf

Dionne, J. (1984). The perception of mathematics among elementary school teachers. En J. Moser (Ed.), *Proceedings of the PME 6* (pp. 223 ï 228). University of Wisconsin.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. ICMI 14* (pp. 69ï 78). New York, EEUU: Springer.

Doorman, M., Boon, P., Drijvers, P., Van Gisbergen, S., Gravemeijer, K., y Reed, H. (2009). Tool use and functional thinking: An example of a form-function-shift. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the PME 33*, (Vol. 2, pp. 449ï 456). Thessaloniki.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment : design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral. Universidad de Utrecht.

http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/886

Drijvers, P., Doorman, M. et al. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213-234.

Drijvers, P., y Trouche, L. (2008). From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. En G. W. Blume y M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics (Cases and perspectives)*, (Vol. 2, pp. 363ï 392). Charlotte, EEUU: Information Age.

http://www.fisme.science.uu.nl/staff/christianb/downloads/work_by_claudia/Documents/Chap23Changes.doc

Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.) (1992). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington, EEUU: Mathematical Association of America.

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficult´es majeures pour une notion mineure*. Memoria de DEA. Burdeos, Francia: Publicacións do IREM.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65. IREM de Strasbourg.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. En David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Eisenhart, M. A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), pp. 99-114.

El Bouazzaui, H. (1988). *Conceptions des eleves et des professeurs á propos de la notion de continuité d'une fonction*. Tesis doctoral. Université Laval.

Ernest, P. (1989). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. En P. Ernest, (Ed), *Mathematics Teaching*: *The State of the Art*, (pp. 249-254). Londres, Reino Unido: Falmer Press.

http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Hampshire, Reino Unido: The Falmer Press.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysis infinitorum*. Lousanne, Suiza: Marcum Muichaelem-Bousquet.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*. St. Petersburg, Rusia : Academia Imperialis Petropolitanae.

Fauvel, John y van Maanen, J.A. (Eds.) (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Fonseca, C. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, 23 (1), 97-121.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *Uno*, 25, 21-40.

http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/deriv.pdf

Fourier, M. (1822). *Théorie analytique de la Chaleur*. Paris, Francia: Didot

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Freudenthal, H. (1977). óAntwoord door Prof. Dr H. Freudenthal na het verlenen van heteredoctoraatô[Answer by Prof. Dr H. Freudenthal upon being granted an honorary

doctorate], *Euclides*, 52, 336ï 338.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education ï China lectures*. Utrecht, Países Bajos: Kluwer.

Galbraith, P. L., y Clatworthy, N. J. (1990). Beyond standard modelsð meeting the challenge of modelling. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(2), 137-163.

Galbraith, P. L., Henn, H. y Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education. ICMI 14*. New York, EEUU: Springer.

Galbraith, P. L., y Stillman, G. (2001). Assumptions and context: Pursuing their role in modelling activity. En J. F. Matos, W. Blum, K. Houston y S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematicseducation: ICTMA 9 applications in science and technology* (pp. 300ï 310). Chichester, Reino Unido: Horwood.

Galbraith, P. L., Stillman, G., Brown, J., y Edwards, I. (2007). Facilitating middle secondary modelling competencies. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 130-140). Chichester, Reino Unido: Horwood.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4 (2), 129-159.

Gascón, J., (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias ? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31 (1), 9-50.

Gil, F. y Rico, L (2003). Concepciones y creencias del profesorado de sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (1), 27-47.

Glaeser, G. (1981). Epistemologie des nombres négatifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 2 (3), 303-346.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En A. Gutierrez (Ed.), *Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Madrid, España: Síntesis.

Godino, J. D. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29, 9-19.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid, España: Narcea.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, Países Bajos: CD-b Press.

Gravemeijer, K.P. (1997). Mediating between concrete and abstract. En T. Nunes y Bryant, P. (Ed.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*. Sussex, Reino Unido: Lawrence Erlbaum, Hove.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. ICMI 14* (pp 137ï 144). New York, EEUU: Springer.

Gravemeijer, K. y Stephan, M. (2002) Emergent models as an instructional design heuristic. En K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers y L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education* (pp.145-169). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling ï Overview. En Kaiser el al. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14*. New York, EEUU: Springuer

Greer, B., Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies-Overview. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. ICMI 14* (pp. 219-224). New York, EEUU: Springer.

Grigutsch, S., Raatz, U., y Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19, 3-45

Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 40 (2), 225-234.

Harrell, M. C., y Bradley, M. A. (2009). *Data collection methods. Semi-structured interviews and focus groups*. Santa Monica, EEUU: RAND National Defense Research Institute.

http://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/technical_reports/2009/RAND_TR718.pdf

Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. En T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (pp. 9-28). Boston, EEUU: Birkhauser.

Janhke, H.N. (2003). *A History of Analysis*. Providence, EEUU: American Mathematical Society e London Mathematical Society.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, EEUU: Lawrence Erlbaum A.P.

Judd, C. M., Smith, E. R., y Kidder, L. H. (1991). *Research methods in social relations*.

Kaiser, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht. Vol. 1. Theoretische Konzeptionen*. Bad Salzdetfurth, Alemania: Franzbecker.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterrichtï Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. En G. Graumann et al. (Eds.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (2, pp. 66ï 84) Bad Salzdetfurth, Alemania: Franzbecker.

Kaiser, G. (2005). Introduction to the Working Group ñApplications and Modellingò. *Proceedings of the CERME 4* (pp. 1613-1622). Sant Feliu.

Kaiser, G. (2006). The mathematical beliefs of teachers about applications and modelling. En J. Novotná et al. (Eds.), *Mathematics in the centre. Proceedings of the PME 30 (*Vol. 3, pp. 393-400). Praga.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 38 (3), 302-310

Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M. et al. (2007) Modelling and applications ï Differentiating perspectives and delineating commonalties. *Proceedings of the CERME 5, WG 13. Modelling and Applications*, 235-242.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, 20 (4), 282-300.

Kontoyianni, K., Modestou, M., Erodotou, M., Ioannou, P., Constantinides, A., Parisinos, M. y Gagatsis, A. (2006). *Improper proportional reasoning: A comparative study in high school*. *Proceedings of the PME 30* (Vol. 3, pp. 465-472). Praga

Kronfellner, M. (1996). The History of the Concept of Function and Some Implications for Classroom Teaching. En R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica. Historical research and integration with teaching* (pp.317-320). Washington, EEUU: Mathematical Association of America.

Lacroix, S. F. (1787). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Paris, Francia: Duprat

Lagrange, J. L. (1797). *Théorie des fonctions analitique.* París, Francia: L'imprimerie de la Republique

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press [Trad. Española: *Pruebas y refutaciones : la lógica del descubrimiento matemático.* Madrid, España: Alianza Universidad. 1978].

Lesh, R. A. y Doerr, H. M. (Eds.) (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. y Lehrer, R. (2003). Models and Modelling Perspectives on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 5, 109-129.

Lesh, R. y Sriraman, B. (2005). Mathematics Education as Design Science. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 37 (6), 490-505.

Lodico, M. G., Spaulding, D. T., y Voegtle, K. H. (2010). *Methods in educational research: From theory to practice* (Vol. 28*)*. San Francisco, EEUU: John Wiley & Sons.

Luzin, N.(1988a). *Function I*. American Mathematical Monthly, 105 (1), 59-67.

Luzin, N. (1988b). *Function II*. American Mathematical Monthly, 105 (3), 263-270.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht* **ï** *Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim, Alemania: Verlag Franzbecker.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 38(2), 113ï 142.

Maaß, K., y Gurlitt, J. (2009). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.)*, Proceedings of the CERME 6*. Lyon

Maaß, K., y Gurlitt, J. (2011). LEMA ï Professional Development of Teachers in Relation to Mathematical Modelling. *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, ICTMA 14* (pp. 629-639). New York, EEUU: Springuer.

Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11 (4), 489-492.

Mandler, G. (1984). *Mind and body: Psychology of emotion and stress*. New York, EEUU: Norton.

McLeod, D. B. (1987). *A constructivist approach to research on attitude toward mathematics*. *Proceedings of the PME 11* (pp. 133-139). Montreal.

MECD (2012). *Propuestas para el anteproyecto de ley orgánica para la mejora de la calidad educativa.*

http://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/dms/mecd/servicios-al-ciudadano-mecd/participacion-publica/lomce/propuestas-anteproyecto-24072012.pdf

(Última ocasión en la que ha consultado el enlace: 28-04-2015)

MECD (2013). *Marco y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias.* (Traducción al español de la publicación original de la OCDE: PISA 2012 Assessment and Analytical Framework Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy)

http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

(Última revisión del enlace:03-05-2015)

NCTM (Ed.) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, EEUU: NCTM.

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: S.A.E.M. THALES

Newton, I. (1687). P*hilosophiae naturalis principia matemática*. S. Pepys, Reg. Soc. Praeses, julii, 5, 1686.

Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6 (9), 13-24.

(http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6957/6643. Última ocasión en la que ha consultado el enlace: 01-05-2015)

Niss, M. (2012). Models and Modelling in Mathematics Education. *EMS Newsletter December 2012*, 49-52

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. En Werner Blum, Peter Galbraith, Hans-Wolfgang Henn y Mogens Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3-32). New York, EEUU: Springer.

Niss M. y Jensen, T.H. (Eds.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Ministerio de Educación de Dinamarca

(http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf. Última ocasión en la que ha consultado el enlace 02-05-2015)

Núñez, J.M. y Font, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las Matemáticas. Una aproximación histórica. *Revista de Educación*, 306, 293-314.

OCDE (2000). *PISA 2000: Conocimientos y destrezas para la vida: primeros resultados del proyecto PISA 2000: Resumen de Resultados OCDE*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE 2001.

http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2000-int.pdf?documentId=0901e72b80110720

(Última revisión del enlace: 03-05-2014)

OCDE (2003). *Informe PISA 2003 Aprender para el mundo del mañana*. Santillana Educación S.L., 2005.

OCDE (2005). *La definición y selección de competencias clave. Resumen ejecutivo.*

http://www.oecd.org/edu/skills-beyond-school/definitionandselectionofcompetenciesdeseco.htm.

(Versión en castellano. Última revisión del enlace: 03-05-2014)

OCDE (2006). *PISA 2006 Marco de evaluación Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura OCDE.*

http://www.oecd.org/dataoecd/59/2/39732471.pdf

(Última revisión del enlace: 03-05-2014)

OCDE (2009). *PISA 2009 Assessment Framework Key competencies in reading, mathematics and science.*

http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/44455820.pdf

(Última revisión del enlace: 03-05-2014)

Orden ECI/2220/2007, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE de 21 de Julio de 2007.

Orden ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato.

Oresme, N., y da Parma, B. P. (1505). *Tractatus de latitudinibus formarum*. Mathaeus Cerdonis.

Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions. *Archive International d'Historie des Sciences*, 24, 29-50.

Pehkonen, E. (1999). Beliefs as obstacles for implementing an educational change in problema solving. En E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics. Proceedings of the Workshop in Oberwolfach* (pp. 109ï 117). Duisburg, Alemania: Gerhard-Mercator-University.

Piaget, J. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions (Vol. 23)*. New York, EEUU: Springer.

Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2, 393-404.

Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En UNESCO (Ed.), *New trends in mathematics teaching IV* (pp. 232-248). Paris, Francia: UNESCO.

Pollak, H. O. (1997a). Mathematical Modeling and Discrete Mathematics. En J. G. Rosenstein, D. S. Franzblau, F. S. Roberts (Eds.), *Discrete Mathematics in the Schools (Dimacs Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science)* (36, pp. 99-104). American Mathematical Society.

Pollak, H.O. (1997b). Solving Problems in the Real World. En L.A. Steen (Ed.), *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America* (pp. 91-105). New York, EEUU: The College Board.

Pollak, H.O. (2012). Introduction. What is mathematical modeling? En H. Gould, D. Murray y A. Sanfratello (Eds.), *Mathematical modeling handbook* (pp. viii-xi). Bedford, EEUU: Comap.

www.comap.com

Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* México, Méjico: Trillas.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator,* 3 (2), 3-8.

Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE del 8 de Diciembre de 2006

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE del 5 de Enero de 2007.

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. BOE del 6 de Noviembre de 2007.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE del 3 de enero de 2015.

René de Cotret, S. (1985). *Etude historique de la notion de fonction: Analyse epistemologique et experimentation didactique.* Memorie de Maitrise en Mathématiques. Montreal, Canadá : Université du quebec.

Rocard report (2007) *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe.* Bruselas: Comisión Europea. Dirección General de Investigación. http://www.eesc.europa.eu/resources/docs/rapportrocardfinal.pdf Última ocasión en la que ha consultado el enlace: 02-05-2015)

Rouse, M. J., y Daellenbach, U. S. (1999). Rethinking research methods for the resource - based perspective: isolating sources of sustainable competitive advantage. *Strategic management journal*, 20(5), 487-494.

Ruiz Higueras, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén, España: Universidad de Jaen.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, EEUU: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and making sense in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, EEUU: Macmillan Publishing.

Schmidt, B. (2010). Modeling in the classroomï motives and obstacles from the teacherôs perspective. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6 (*pp. 2066-2075). Lyon.

Schwarz, B., y Dreyfus, T. (1993). *Measuring integration of information in multirepresentational software*. Interactive Learning Environments, 3(3), 177-198.

Schwarz, B. y Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*, 29 (3), 259-291.

Sierpinska, A. (1985a). La notion d'obstacle épistémologique dans la enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIAEAEM* (pp. 73-95). Leiden.

Sierpinska, A. (1985b). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 6 (1), 5-67.

Sierpinska, A. (1989). Sur un programe de recherche lié a la notion d'obstacle épistemologique. En N. Berdnaz y C. Garnier (Eds.), *Constructions de savoirs: Obstacles & Conflicts*, 30-148. Otawa, Canadá : Agence d'Arc.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of Epistemology and pedagogy*, (pp. 23-58). Washington, EEUU: Mathematical Association of America.

Siller, H.-St. y Greefrath, G. (2010). Mathematical Modelling in Class regarding to Technology. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the CERME 6* (pp. 2136-2145). Lyon.

Siu, M.K. (1995). Concept of function. Its history and teaching. En F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken et al. (Eds.), *Learn from the masters* (pp. 105-122). Washington, EEUU: Mathematical Association of America.

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, learning, and action: A foundation for theory and practice in education*. Chichester, Reino Unido: Wiley.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10 (4), 313-340.

Stein, M. K. y Smith, M. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. Reston, EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

Stoecker, R. (1991). Evaluating and rethinking the case study. *The sociological review*, 39 (1), 88-112.

Streefland, L. (1985). "Vorgreifendes Lernen zum Steuern Langfristiger Lernprozesse". En W. Dörfler y R. Fischer (Eds.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Beiträge zum 4. Internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik in Klagenfurt in 1984* (pp. 271–285). Viena, Austria: Hölder-Pichler-Tempsky.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*: *a Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1978). The dynamics of understanding mathematics. *Mathematics teaching*, 84, 50-52.

Thiele, R. (2000). Frühe Variationsrechnung und Funktionsbegriff. En R. Thiele (Ed.), *Mathesis: (Festschrift zum siebzigsten Geburstag von Matthias Schramm)* (pp. 128-181). Berlin, Alemania: Verlag für Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik,.

Thiele, R. (2003). Antiquity. En H. Niels Janhke (Ed), *A History of Analysis* (pp. 1-40). Providence, EEUU: American Mathematical Society e London Mathematical Society.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 127 – 146). New York, EEUU: Macmillan.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, (3/4), 111-129.

Törner, G. (2002). Mathematical beliefs – A search for a common ground: Some theoretical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations. En G. Leder, E. Pehkonen, y G. Törner (Eds.), *Mathematical beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 73–94). Dordrecht, Paises Bajos: Kluwer.

Törner, G. y Pehkonen, E. (1998). Teachers´beliefs on mathematics teaching assessed with the Dionne method: a case study. En H-G. Weigand, A. Peter-Koop et al. (Eds.), *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics* (pp. 113-127). Munich.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas Doelgericht*. Utrecht, Paises Bajos: IOWO.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction ï The Wiskobas Project*. Dordrecht, Paises Bajos: Reidel.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics programm for primary education. En L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School* (pp. 21ï 56). Utrecht, Paises Bajos: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Treffers, A. y Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education

ï the Wiskobas program. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the PME 9* (Vol. 2, pp. 97ï 1219. Utrecht, Paises Bajos: Utrecht University.

Ursini, S. (2011). Il Modello 3UV: uno strumento teórico a disposizione degli insegnanti di matemática. *Quaderni CIRD 2011*, 59-70.

(http://www.openstarts.units.it/dspace/handle/10077/3845).

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18 (3), 5-38.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). A representional model in a long term learning processï the didactical use of models in Realistic Mathematics Education. *Paper presented at the AERA conference*. San Francisco.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education in the Netherlands. En J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching. InnovativeApproaches for the Primary Classroom* (pp. 49ï 63). Buckingham, Reino Unido: Open University Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic Mathematics Education as work in progress. En F.L. Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (pp. 1ï 42). Taipei, China: National Taiwan Normal University

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2004) Studentsô overreliance on proportionality: evidence from primary school pupils solving arithmetic word problems. *Proceedings of PME 28* (Vol. 4, pp. 385-392). Bergen.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Studentsô overreliance on linearity: an effect of school-like word problems? *Proceedings of PME 29* (Vol. 4, pp. 265-272). Melbourne.

Vinner, S. (1990). Inconsistencies: Their Causes and Function in Learning Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12 (3/4), 85-98

Vinner, S. (1994). Studentsô misconceptions and inconsistencies of thought. *Proceedings of the International Congress on Mathematical Education* (pp. 109-113).

Yin, R. K. (2013). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, EEUU: Sage.

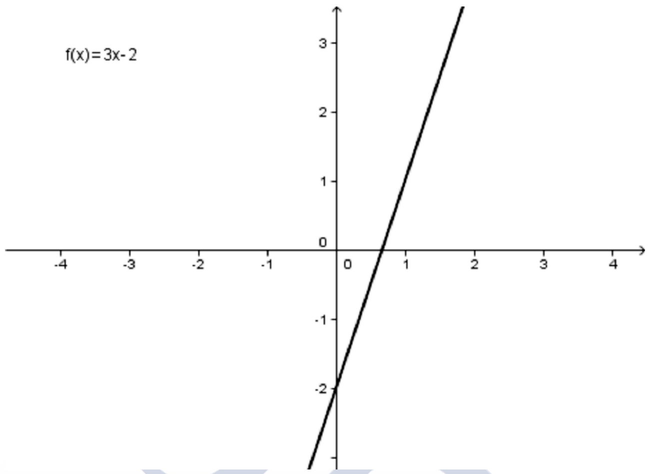
Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16, 37-85.

ANEXOS

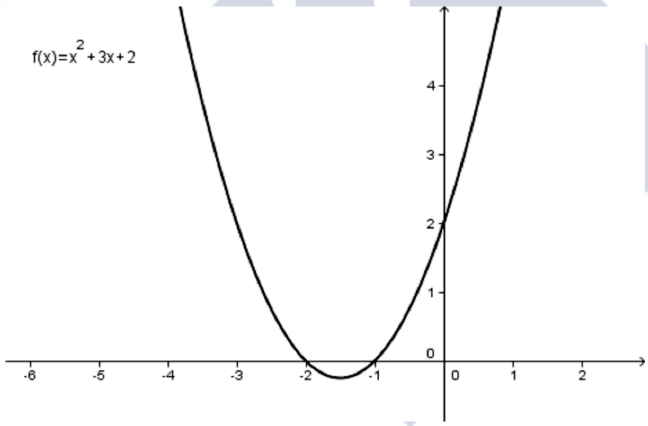
Anexo I

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES FUNDAMENTALES

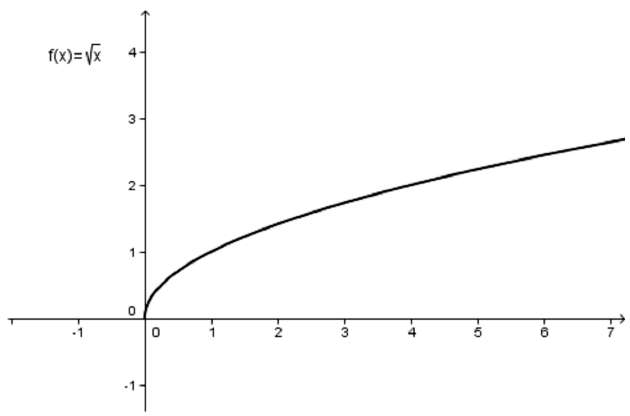
- $f(x) = a \cdot x + b,\ a,b \in \mathbb{R}$ (función afín)



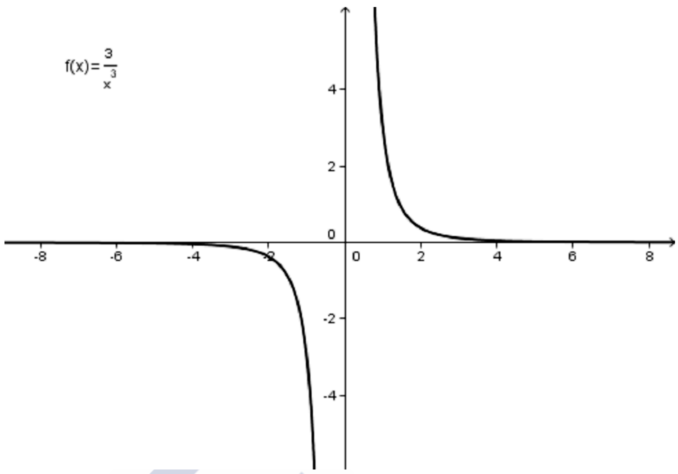
- $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,\ a,b,c \in \mathbb{R}$ (función cuadrática)



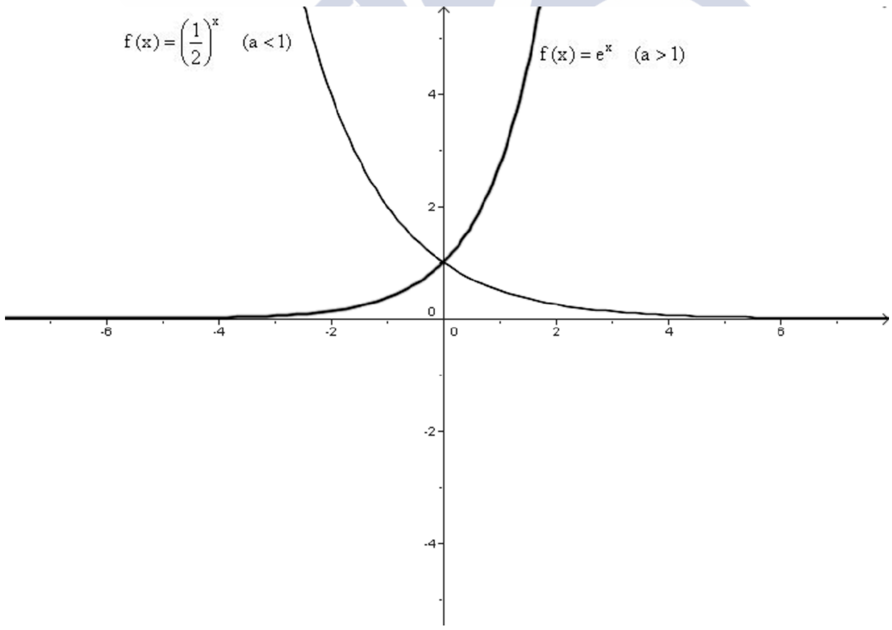
- $f(x) = k \cdot \sqrt{x}, k \in \mathbb{R}$ (raíz cuadrada)



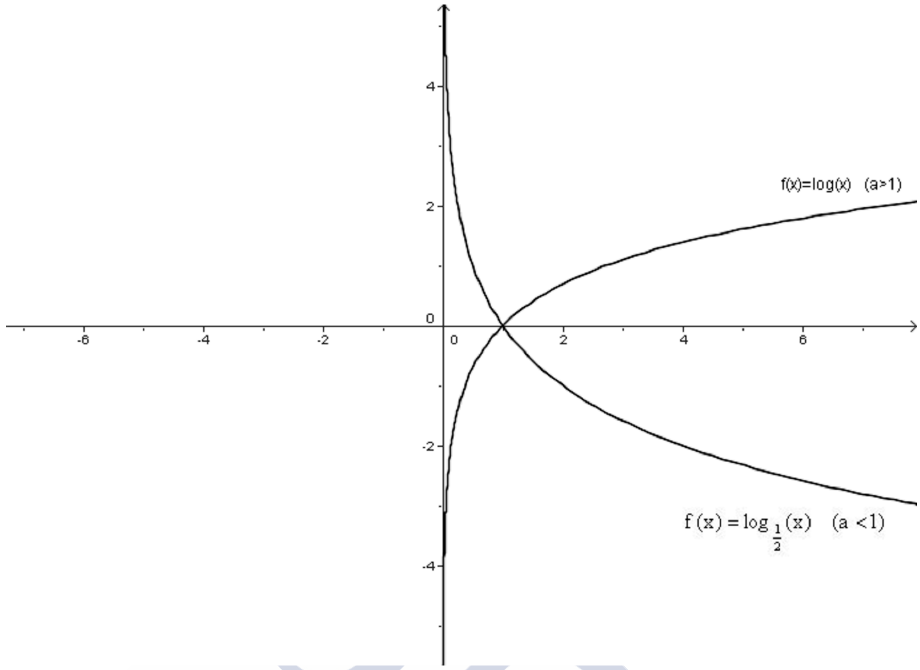
- $f(x) = \dfrac{k}{x^n}, k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (proporcionalidad inversa)



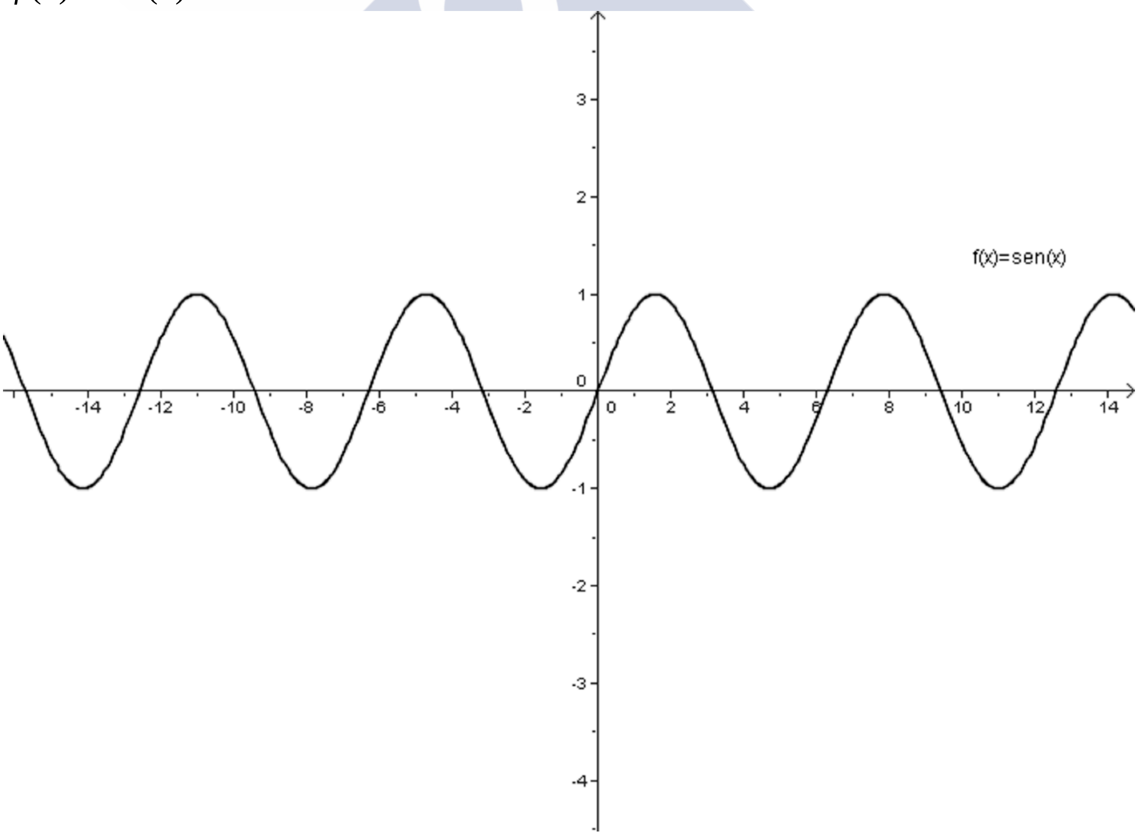
- Exponenciales: $f(x) = c \cdot a^{k \cdot x}, c, k \in \mathbb{R}, a > 0, a \in \mathbb{R}$



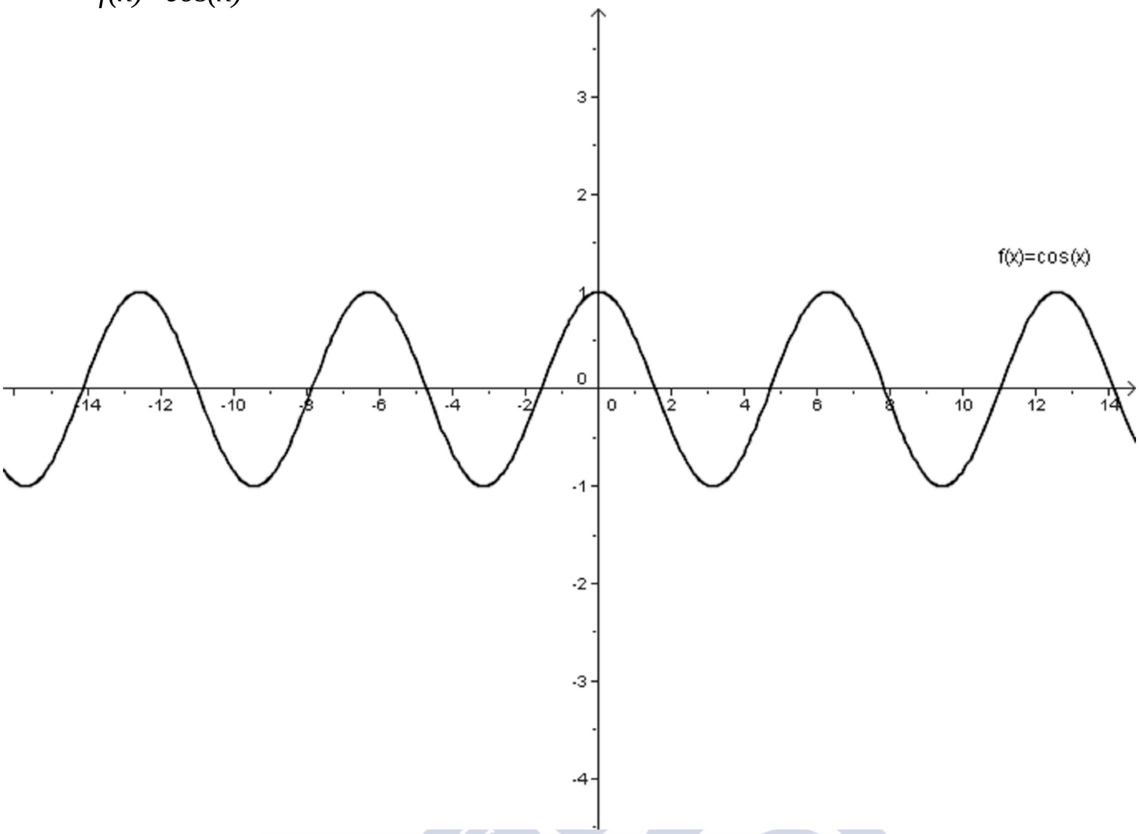
- Logarítmicas: $f(x) = c \cdot \log_a(k \cdot x), c, k \in \mathbb{R}, a > 0, a \in \mathbb{R}$



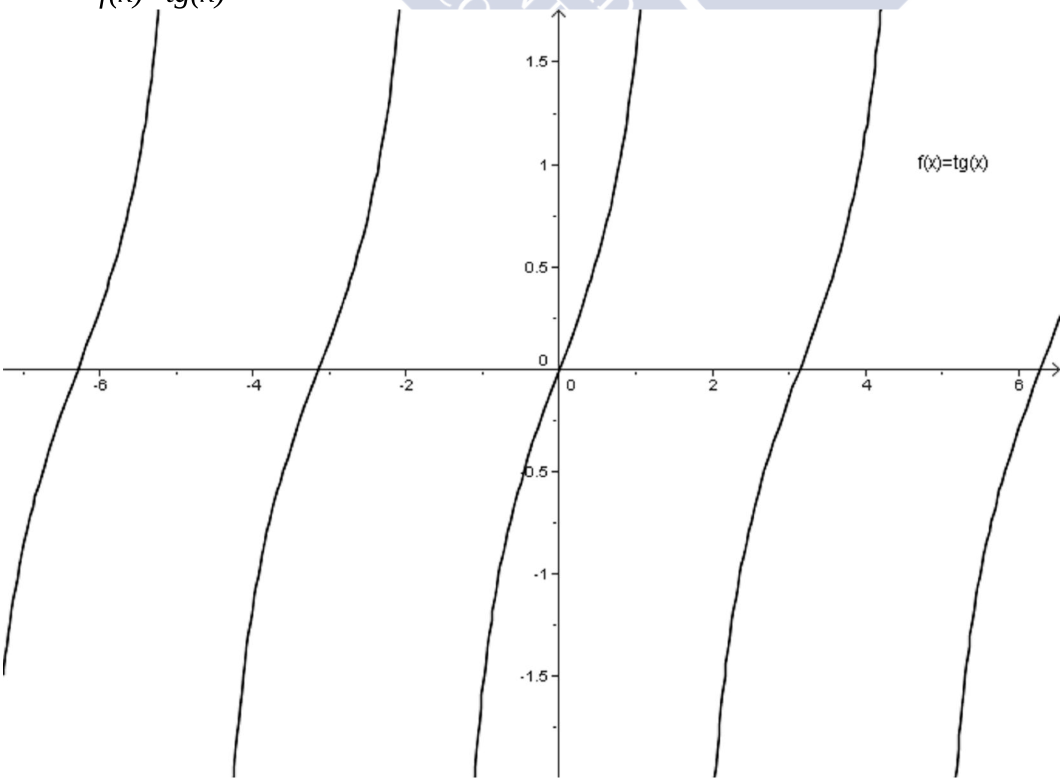
- $f(x) = sen(x)$



- *f(x)=cos(x)*



- *f(x)=tg(x)*



ANEXO II

Muelle. Cuestionario

1.- ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado.

2.- ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente en la función?

3.- En la función que has deducido, ¿aparece algún parámetro? Si es así, ¿qué significado tiene en el experimento que estás realizando?

4.- ¿Cuánto se alarga el muelle con 370g de peso?

5.- ¿Qué peso se corresponde con 21 cm de longitud del muelle?

6.- ¿Qué longitud de muelle obtienes por la función si no colocas peso sobre el soporte? Interpreta tu resultado.

7.- Según la función que has obtenido, ¿es posible alargar indefinidamente el muelle? Interpreta ese resultado teniendo en cuenta el experimento concreto que has realizado.

8.- Intenta deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle si conoces la longitud del muelle.

9.- ¿Crees que la función que has obtenido describe bien el comportamiento de un muelle al que se le ha colocado un peso?

10.- Las funciones que se obtienen son distintas. ¿Cuál crees que es la razón?

Añadida el curso 2010-2011:

11.- El tercer grupo tomó los datos longitud-peso. ¿Cómo obtener la función en la forma de la de los otros dos grupos para comparar?

ANEXO III

¿Por quéé .?

- La función que rige los datos es siempre de la forma $f(x)= k \cdot \sqrt{x}$, siendo *k* una constante, *x* la cantidad de aceite en ml y *f(x)* el diámetro en mm. La *k* es diferente dependiendo de cada caso. En ese sentido, *k* varía. ¿Sería apropiado darle el nombre de "variable"? ¿Por qué? ¿Usarías otro nombre? ¿Por qué crees que *k* varía en cado caso estudiado?

- Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el radio en lugar del diámetro?

- Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso el área de aceite sobre el agua en lugar del diámetro?

- ¿Qué función obtendría si representase en el eje *x* el diámetro y en el eje *y* la cantidad de aceite? (O el área y la cantidad de aceite)

ANEXO IV

Temperatura. Cuestionario 1

1.- ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado.

2.- ¿Qué variables son objeto de estudio en la experiencia?

3.- ¿Aparece algún parámetro en el experimento? Si es así, ¿de qué crees que depende su valor?

4.- Según la función que has obtenido, ¿qué temperatura podría alcanzar un termómetro antes de comenzar a enfriarlo? Dale un nombre a tu respuesta, dentro de los conocimientos sobre funciones que tienes, e interpreta este dato en el contexto del experimento que has realizado.

5.- Según la función que has obtenido, ¿qué intervalo de tiempo de enfriamiento podrías manejar? Dale un nombre a tu respuesta, dentro de los conocimientos sobre funciones que tienes, e interpreta este dato en el contexto del experimento que has realizado.

6.- Según la función que has obtenido, ¿en qué momento deja de enfriarse el termómetro? Interpreta tu resultado.

7.- Intenta deducir cómo conocer el tiempo transcurrido si conoces la temperatura a la que se encuentra el termómetro. ¿Podrías aplicarlo a un termómetro que se encuentra a una temperatura de 47ę? ¿Y a uno que se encuentra a 0ę? Explica por qué.

8.- ¿Crees que la función que has obtenido describe bien el comportamiento del enfriamiento de un sólido cualquiera (no sólo un termómetro)?

Temperatura. Cuestionario 2

No has conseguido encontrar la función de ajuste de los datos.

1ª) Intenta explicar por qué crees que no lo has conseguido.

2ª) ¿Crees que cambiando algo en el experimento se conseguiría obtener la función de ajuste? Si es así, ¿qué cambiarías y en qué forma crees que influiría en la búsqueda de la función de ajuste? Si crees que no se puede cambiar nada que mejore los resultados, intenta explicar el porqué.

3ª) ¿Cuál crees que es el tipo de función que ajusta los datos? Intenta explicar por qué crees que es de ese tipo.

4ª) ¿Crees que el experimento que has realizado, u otro equivalente, ha sido realizado en el pasado?

5ª) ¿Crees que encontrar la función de ajuste de los datos que has recogido experimentalmente tiene alguna utilidad práctica? Si es así, indica cuál.

ANEXO V

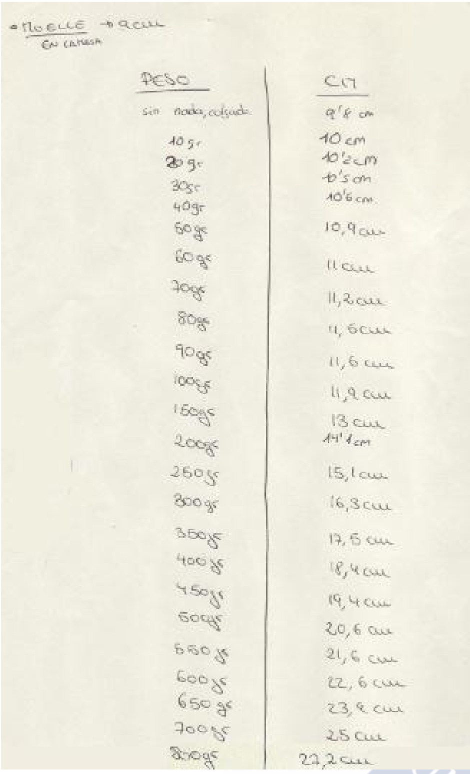
La fotografía que aparece a continuación, se corresponde con una fotografía vía satélite de un vertido que se produjo en las costas de Cambados.

a) Determina la escala de la fotografía.
b) Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes.
c) Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido.
d) Haz una crítica de tu trabajo: deficiencias, ventajas, posibles mejoras, etc.

ANEXO VI

ANEXO VII

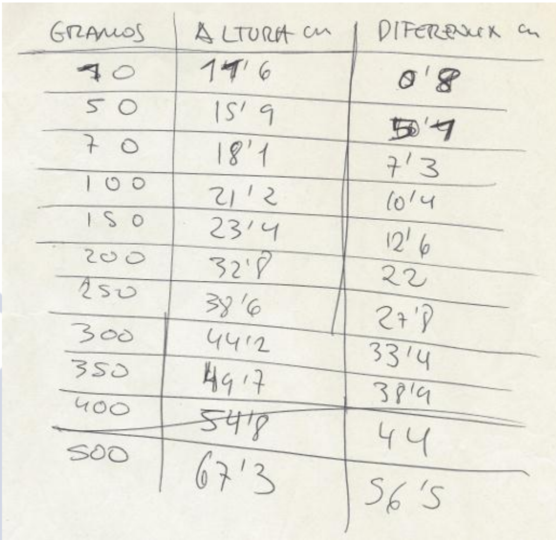
Captura de pantalla de las tablas de datos de todos los grupos y transcripción de las mismas.



• MUELLE → 9 cm
EN CAMARA

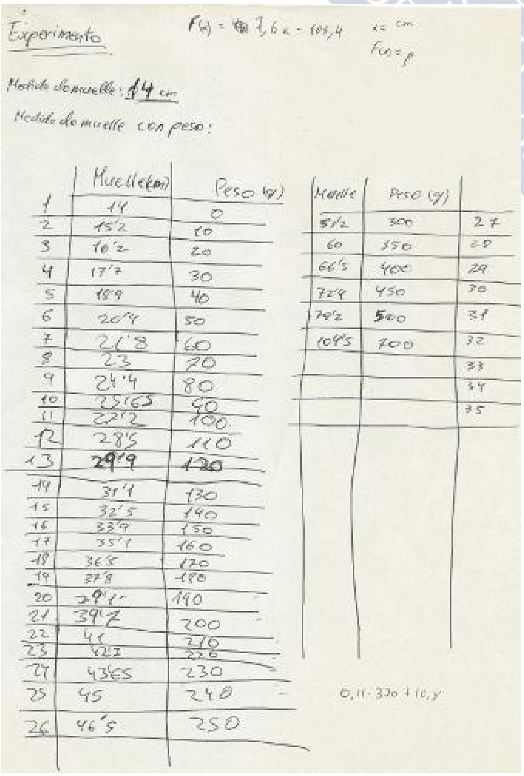
PESO	CM
sin nada, colgado	9'8 cm
10 gr	10 cm
20 gr	10'2 cm
30 gr	10'5 cm
40 gr	10'6 cm
50 gr	10,9 cm
60 gr	11 cm
70 gr	11,2 cm
80 gr	11,6 cm
90 gr	11,6 cm
100 gr	11,9 cm
150 gr	13 cm
200 gr	14'1 cm
250 gr	15,1 cm
300 gr	16,3 cm
350 gr	17,5 cm
400 gr	18,4 cm
450 gr	19,4 cm
500 gr	20,6 cm
550 gr	21,6 cm
600 gr	22,6 cm
650 gr	23,9 cm
700 gr	25 cm
800 gr	27,2 cm

Datos de *Muelle*. Grupo GM1



GRAMOS	ALTURA cm	DIFERENCIA cm
10	11'6	0'8
50	15'9	5'1
70	18'1	7'3
100	21'2	10'4
150	23'4	12'6
200	32'8	22
250	38'6	27'8
300	44'2	33'4
350	49'7	38'9
400	54'8	44
500	67'3	56'5

Datos de *Muelle*. Grupo GM2



Experimento

F(x) = 7,6x − 103,4 x = cm F(x) = p

Medida do muelle: 14 cm

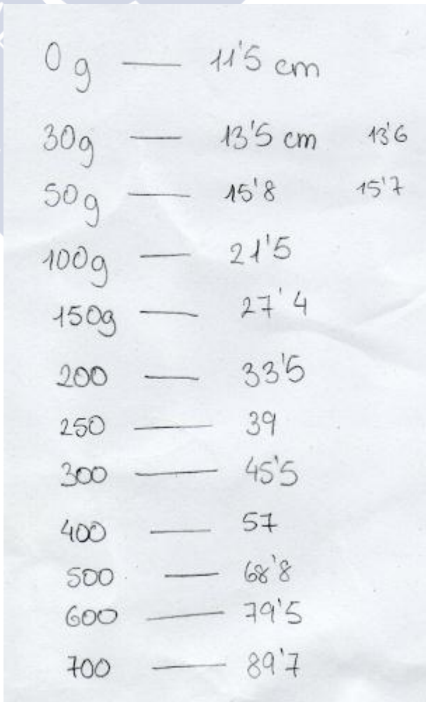
Medida do muelle con peso:

	Muelle (cm)	Peso (g)
1	14	0
2	15'2	10
3	16'2	20
4	17'7	30
5	18'9	40
6	20'4	50
7	21'8	60
8	23	70
9	24'4	80
10	25'65	90
11	27'2	100
12	28'5	110
13	29'9	120
14	31'1	130
15	32'5	140
16	33'9	150
17	35'1	160
18	36'5	170
19	37'8	180
20	39'1	190
21	39'7	200
22	41	210
23	42'1	220
24	43'65	230
25	45	240
26	46'5	250

Muelle	Peso (g)	
51'2	300	27
60	350	28
66'5	400	29
72'4	450	30
78'2	500	31
104'5	700	32
		33
		34
		35

0,11 · 320 + 10,y

Datos de *Muelle*. Grupo GM3



0 g	11'5 cm	
30 g	13'5 cm	13'6
50 g	15'8	15'7
100 g	21'5	
150 g	27'4	
200	33'5	
250	39	
300	45'5	
400	57	
500	68'8	
600	79'5	
700	89'7	

Datos de *Muelle*. Grupo GM4

x	y
0	9'1
50g	9'9
100g	11'2
150g	12'3
200 g	13'5
300g	15'9
400g	18'1
600g	22'6
650g	23'8

Datos de *Muelle*. Grupo GM5

Peso	Lonxitude
[illegible]	9,7 cm
10g	9'8 cm
25 g	10'2 cm
50 g	10'6 cm
100 g	11'9 cm
150 g	13'1 cm
200 g	14'1 cm
250 g	15'2 cm
300 g	16'2 cm
350 g	17'5 cm
400 g	18'5 cm
450 g	19'6 cm
500 g	20'7 cm

Datos de *Muelle*. Grupo GM6

	Mililitros	Diámetro	
De 1 ml en 1 ml	1 ml	2,4 cm	1 cm
	2 ml	3,4 cm	0,7 cm
	3 ml	4,1 cm	0,5 cm
	4 ml	4,6 cm	0,5 cm
	5 ml	5,1 cm	0,6 cm
	6 ml	5,7 cm	0,4 cm
	7 ml	6,1 cm	0,4 cm
	8 ml	6,5 cm	0,4 cm
	9 ml	6,9 cm	0,3 cm
	10 ml	7,2 cm	~~(7 cm)~~ 0,35 cm
De 2 ml en 2 ml	12 ml	7,9 cm	(0,8 cm) 0,4 cm
	14 ml	8,7 cm	(0,7 cm) 0,35 cm
	16 ml	9,4 cm	(0,6 cm) 0,3 cm
	18 ml	10 cm	(0,3 cm) 0,15 cm
	20 ml	10,3 cm	(0,3 cm) 0,15 cm
	22 ml	10,6 cm	(0,8 cm) 0,4 cm
	24 ml	11,4 cm	(0,2 cm) 0,1 cm
	26 ml	11,6 cm	(0,3 cm) 0,15 cm
	28 ml	11,9 cm	(0,5 cm) 0,25 cm
	30 ml	12,4 cm	(0,2 cm) 0,1 cm
	32 ml	12,6 cm	(0,6 cm) 0,3 cm
	34 ml	13,2 cm	(0,2 cm) 0,1 cm
	36 ml	13,4 cm	

$\boxed{\text{23 DATOS}}$

Datos de *Aceite y agua*. Grupo GA1

ml	diametro en cm		
1	1'9	40	11'3
2	2'3	50	12'7
3	2'85	60	14'2
4	3'2		
5	3'55		
6	4'05		
7	4'4		
8	4'9		
9	5'4		
10	5'8		
20	8'6		
30	~~10'2~~ 10'3		

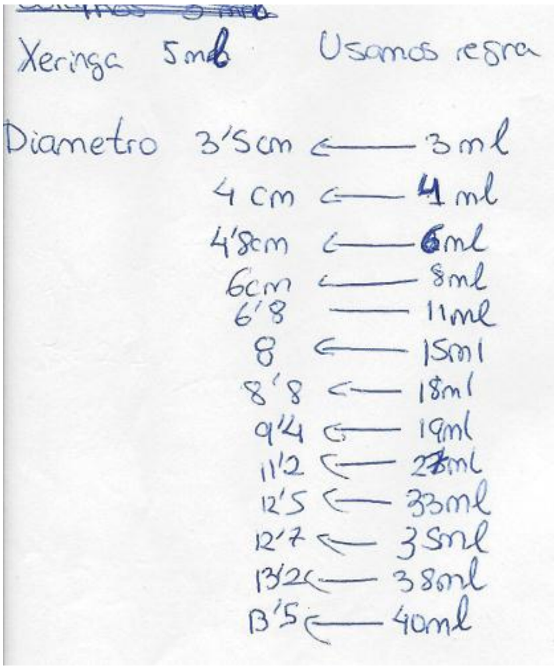
ml	diametro
10	5'5

Datos de *Aceite y agua*. Grupo GA2

diametro:
2,5cm — 1mL
3,5cm — 2mL
4,5cm — 3mL
5,5cm — 4mL
6,3cm — 5mL
7,4cm — 7mL
8'5cm — 10mL
10cm — 15mL
13cm — 21mL
— 25mL
13,5cm — 30mL
14,5cm — 35mL
15,5cm —
16,5cm — 40mL
17cm — 45mL
18'5cm — 50mL

regra
xeringa: 5 mL

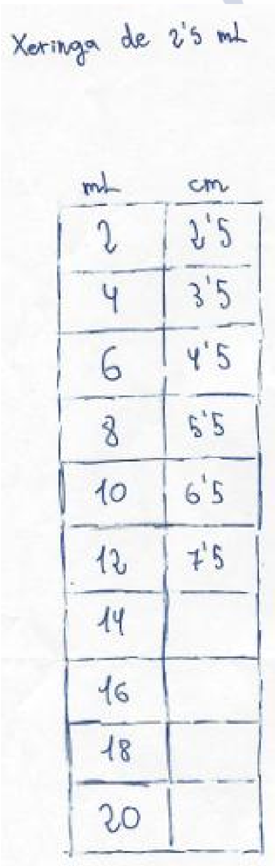
Datos de *Aceite y agua*. Grupo GA3



Xeringa 5ml Usamos regra

Diametro 3'5cm ← 3ml
4 cm ← 4ml
4'8cm ← 6ml
6cm ← 8ml
6'8 — 11ml
8 ← 15ml
8'8 ← 18ml
9'4 ← 19ml
11'2 ← 23ml
12'5 ← 33ml
12'7 ← 35ml
13'2 ← 38ml
13'5 ← 40ml

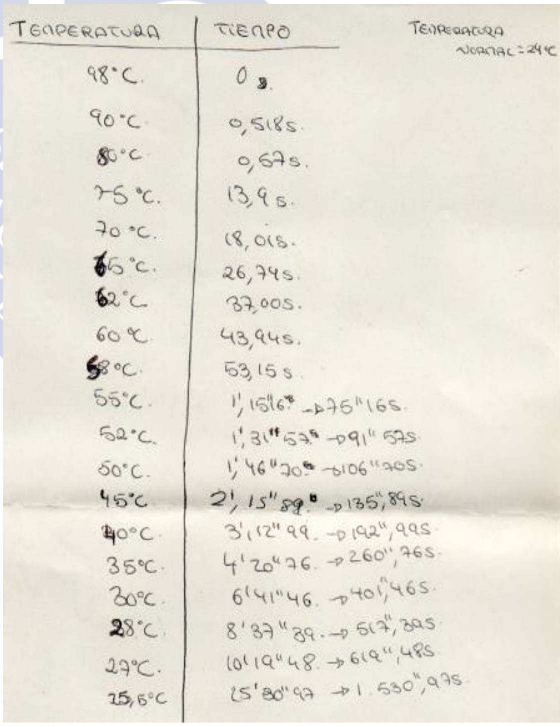
Datos de *Aceite y agua*. Grupo GA4



Xeringa de 2'5 mL

ml	cm
2	2'5
4	3'5
6	4'5
8	5'5
10	6'5
12	7'5
14	
16	
18	
20	

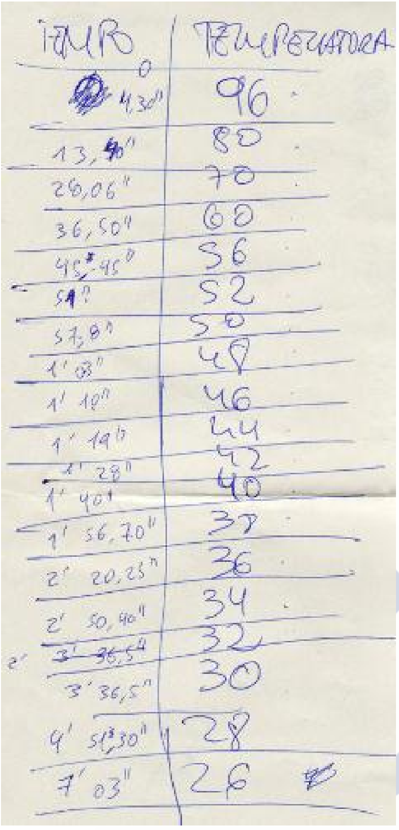
Datos de *Aceite y agua*. Grupo GA5



Temperatura inicial = 24°C

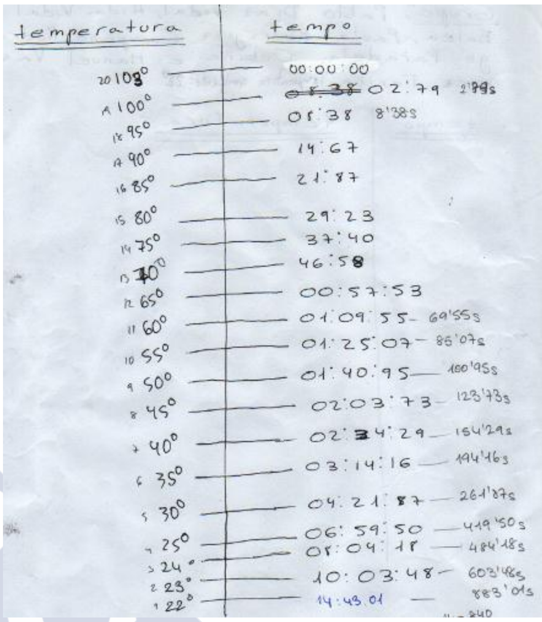
Temperatura	Tiempo
98°C.	0 s.
90°C.	0,518 s.
80°C.	0,67 s.
75°C.	13,9 s.
70°C.	18,01 s.
65°C.	26,74 s.
62°C.	37,00 s.
60°C.	43,94 s.
58°C.	53,15 s.
55°C.	1',15''16 → 75''16 s.
52°C.	1',31''57 → 91''57 s.
50°C.	1',46''20 → 106''20 s.
45°C.	2',15''89 → 135'',89 s.
40°C.	3',12''99 → 192'',99 s.
35°C.	4'20''76 → 260'',76 s.
30°C.	6'41''46 → 401'',46 s.
28°C.	8'37''39 → 517'',39 s.
27°C.	10'19''48 → 619'',48 s.
25,6°C	25'30''97 → 1.530'',97 s.

Datos de *Temperatura*. Grupo GT1



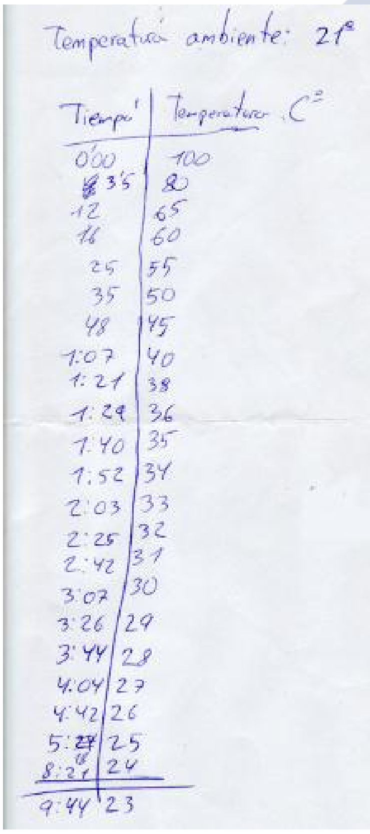
TEMPO	TEMPERATURA
4,30''	96
13,40''	80
28,06''	70
36,50''	60
45,45''	56
54''	52
57,8''	50
1'03''	48
1'10''	46
1'19''	44
1'28''	42
1'40''	40
1'56,70''	38
2'20,23''	36
2'50,40''	34
~~3'36,54~~	32
3'36,5''	30
4'51,30''	28
7'03''	26

Datos de *Temperatura*. Grupo GT2



	temperatura	tempo	
20	103°	00:00:00	
19	100°	02:79	2'79s
18	95°	08:38	8'38s
17	90°	14:67	
16	85°	21:87	
15	80°	29:23	
14	75°	37:40	
13	70°	46:58	
12	65°	00:57:53	
11	60°	01:09:55	69'55s
10	55°	01:25:07	85'07s
9	50°	01:40:95	100'95s
8	45°	02:03:73	123'73s
7	40°	02:34:29	154'29s
6	35°	03:14:16	194'16s
5	30°	04:21:87	261'87s
4	25°	06:59:50	419'50s
3	24°	08:04:18	484'18s
2	23°	10:03:48	603'48s
1	22°	14:43:01	883'01s

Datos de *Temperatura*. Grupo GT3



Temperatura ambiente: 21°

Tiempo'	Temperatura C°
0'00	100
3'5	80
12	65
16	60
25	55
35	50
48	45
1:07	40
1:21	38
1:29	36
1:40	35
1:52	34
2:03	33
2:25	32
2:42	31
3:07	30
3:26	29
3:44	28
4:04	27
4:42	26
5:27	25
8:21	24
9:44	23

Datos de *Temperatura*. Grupo GT4

Muelle. Tabla de datos de los diferentes grupos

Grupo GM1	
PESO	CM
sin nada, colgado	9,8 cm
10 gr	10 cm
20 gr	10,2 cm
30 gr	10,5 cm
40 gr	10,6 cm
50 gr	10.9 cm
60 gr	11 cm
70 gr	11,2 cm
80 gr	11,5 cm
90 gr	11,6 cm
100 gr	11,9 cm
150 gr	13 cm
200 gr	14,1 cm
250 gr	15,1 cm
300 gr	16,3 cm
350 gr	17,5 cm
400 gr	18,4 cm
450 gr	19,4 cm
500 gr	20,6 cm
550 gr	21,6 cm
600 gr	22,6 cm
650 gr	23,9 cm
700 gr	25 cm
750 gr	26,2 cm
800 gr	27,2 cm

Grupo GM2		
GRAMOS	*ALTURA cm*	*DIFERENCIA cm*
10	11,6	0,8
50	15,9	5,1
70	18,1	7,3
100	21,2	10,4
150	23,4	12,6
200	32,8	22
250	38,6	27,8
300	44,2	33,4
350	49,7	38,4
400	54,8	44
500	67,3	56,5

Grupo GM3	
Muelle (cm)	*Peso* (g)
14	0
15,2	10
16,2	20
17,7	30
18,9	40
20,4	50
21,8	60
23	70
24,4	80
25,65	90
27,2	100
28,5	110
29,9	120
31,1	130
32,5	140
33,9	150
35,1	160
36,5	170
37,8	180
39,1	190
39,7	200
41	210
42,3	220
43,65	230
45	240
46,5	250
53,2	300

60	350
66ô5	400
72ô4	450
79ô2	500
104ô5	700

Grupo GM4

0 g	11ô5
30 g	13ô5
50 g	15ô8
100 g	21ô5
150g	27ô4
200	33ô5
250	39
300	45ô5
400	57
500	68ô8
600	79ô5
700	89ô7

Grupo GM5

x	*y*
0	9ô1
50g	9ô9
100g	11ô2
150g	12ô3
200g	13ô5
300g	15ô9
4000g	18ô1
600g	22ô6
650g	23ô8

Grupo GM6

Peso	*Lonxitude*
Vacio	9ô7 cm
10 g	9ô8 cm
25 g	10ô2 cm
50 g	10ô6 cm
100 g	11ô9 cm
150 g	13ô1 cm
200 g	14ô1 cm
250 g	15ô2 cm
300 g	16ô2 cm
350 g	17ô5 cm
400 g	18ô5 cm
450 g	19ô6 cm
500 g	20ô7 cm

Grupo GA1

MILILITROS	DIÁMETRO
1 ml	2,4 cm
2 ml	3,4 cm
3 ml	4,1 cm
4 ml	4,6 cm
5 ml	5,1 cm
6 ml	5,7 cm
7 ml	6,1 cm
8 ml	6,5 cm
9 ml	6,9 cm

Grupo GA2

ml	*Diámetro en cm*
1	1ô9
2	2ô3
3	2ô85
4	3ô2
5	3ô55
6	4ô05
7	4ô4
8	4ô9
9	5ô4

10 ml	7,2 cm
12 ml	7,9 cm
14 ml	8,7 cm
16 ml	9,4 cm
18 ml	10 cm
20 ml	10,3 cm
22 ml	10,6 cm
24 ml	11,4 cm
26 ml	11,6 cm
28 ml	11,9 cm
30 ml	12,4 cm
32 ml	12,6 cm
34 ml	13,2 cm
36 ml	13,4 cm

10	5,8
20	8,6
30	10,3
40	11,3
50	12,7
60	14,7
10	5,5

Grupo GA3	
Diámetro:	
2,5 cm	1 ml
3,5 cm	2 ml
4,5 cm	3ml
5,5 cm	4 ml
6,3 cm	5 ml
7,4 cm	7 ml
8,5 cm	10 ml
10 cm	15 ml
13 cm	21 ml
13,5 cm	25 ml
14,5 cm	30 ml
15,5 cm	35 ml
16,5 cm	40 ml
17 cm	45 ml
17,5 cm	50 ml

Grupo GA4	
Diámetro:	
3,5 cm	3 ml
4 cm	4 ml
4,8 cm	6 ml
6 cm	8 ml
6,8	11 ml
8	15 ml
8,8	18 ml
9,4	19 ml
11,2	27 ml
12,5	33 ml
12,7	35 ml
13,2	38 ml
13,5	40 ml

Grupo GA5	
ml	*cm*
2	2,5
4	3,5
6	4,5
8	5,5
10	6,5
12	7.5
14	
16	
18	
20	

Grupo GT1	
TEMPERATURA	TIEMPO
98 °C	0s.
90 °C	0,518s.
80 °C	0,57s.
75 °C	13,9s.
70 °C	18,01s.
65 °C	26,74s.
62 °C	37,00s.
60 °C	43,94 s.
58 °C	53,15 s.
55 °C	1ô,15ôô16.->75ôô16s.
52 °C	1ô,31ôô57ôô.->91ôô57s.
50 °C	1ô,46ôô70.->106ôô70s.
45 °C	2ô,15ôô89.->135ôô,89s.
40 °C	3ô,12ôô99.->192ôô.99s.
35 °C	4ô20ôô76.->260ôô,76s.
30 °C	6ô41ôô46.->401ôô,46s.
28 °C	8ô37ôô39.->619ôô,48s.
27 °C	10ô19ôô48.->619ôô,48s.
25,5 °C	25ô30ôô97->1.530ôô,97s

Grupo GT2	
TEMPO (*Tiempo*)	TEMPERATURA
4,30ôô	96
13,40ôô	80
20,06ôô	70
36,50ôô	60
45,45ôô	56
51ôô	52
57;8ôô	50
1ô03ôô	48
1ô10ôô	46
1ô19ôô	44
1ô28ôô	42
1ô40ôô	40
1ô56,70ôô	38
2ô20,25ôô	36
2ô50,40ôô	34
2ô	32
3ô36,5ôô	30
4ô51,30ôô	28
7ô03ôô	26

Grupo GT3	
TEMPERATURA	TEMPO (*Tiempo*)
103°	00:00:00
100°	02:79 *2ô79s*
95°	08:38 *8ô38s*
90°	14:67
85°	21:87

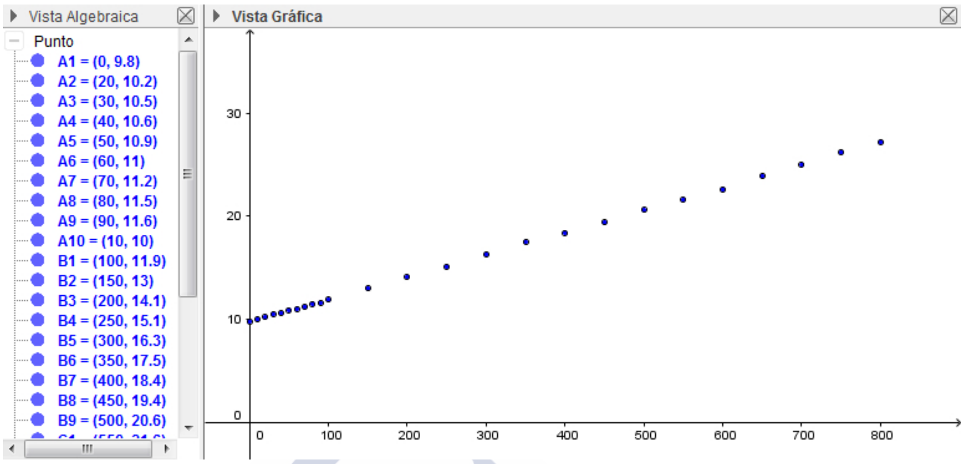
Grupo GT4	
TIEMPO ó	TEMPERATURA Cº
0ô00	100
3ô5	80
12	65
16	60
25	55

80°	29:23	35	50
75°	37:40	48	45
70°	46:58	1:07	40
65°	00:57:53	1:21	38
60°	01:09:55 - *69ô55s*	1:29	36
55°	01:25:07 ï *85ô07s*	1:40	35
50°	01:40:95 -*100ô95s*	1:52	34
45°	02:03:73 ï *123ô73s*	2:03	33
40°	02:34:29 ï *154ô29s*	2:25	32
35°	03:14:16 ï *194ô16s*	2:42	31
30°	04:21:87 ï *261ô87s*	3:07	30
25°	06:59:50 ï *419ô50s*	3:26	29
24°	08:04:18 ï *484ô18s*	3:44	28
23°	10:03:48 -*603ô48s*	4:04	27
22°	14:43:01 ï *883ô01s*	4:42	26
		5:18	25
		8:21	24
		9:44	23

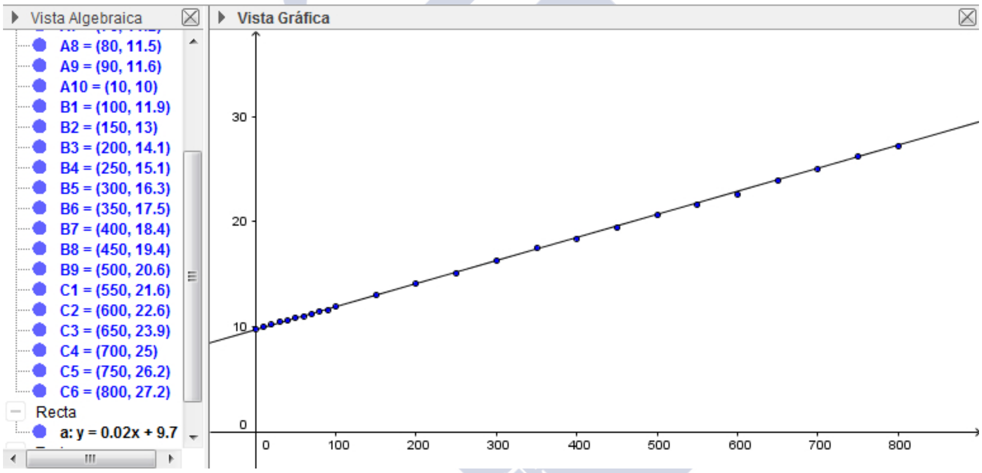
ANEXO VIII

Capturas de pantalla de los archivos GeoGebra entregados por los diferentes grupos. Volcado de datos de las tablas de datos y generación de la función de ajuste

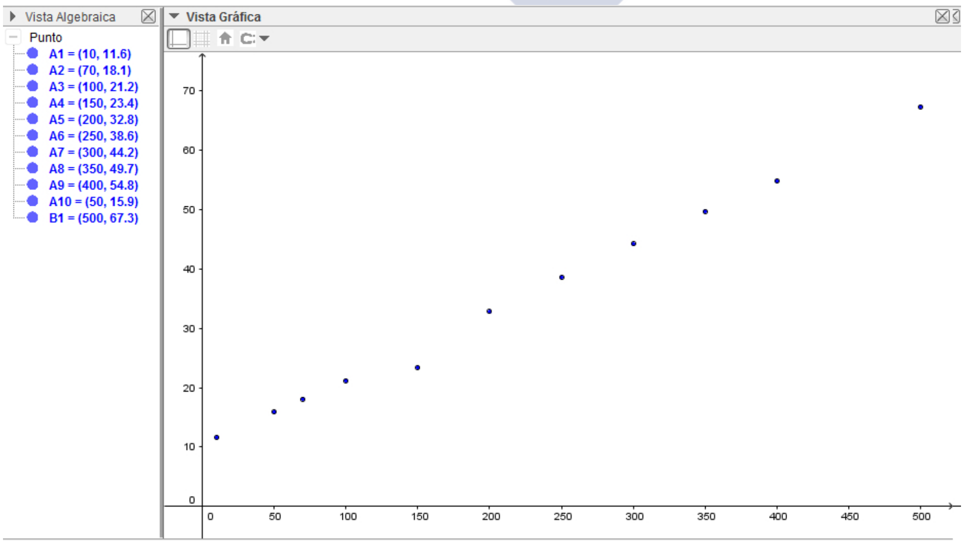
- *Actividad Muelle*



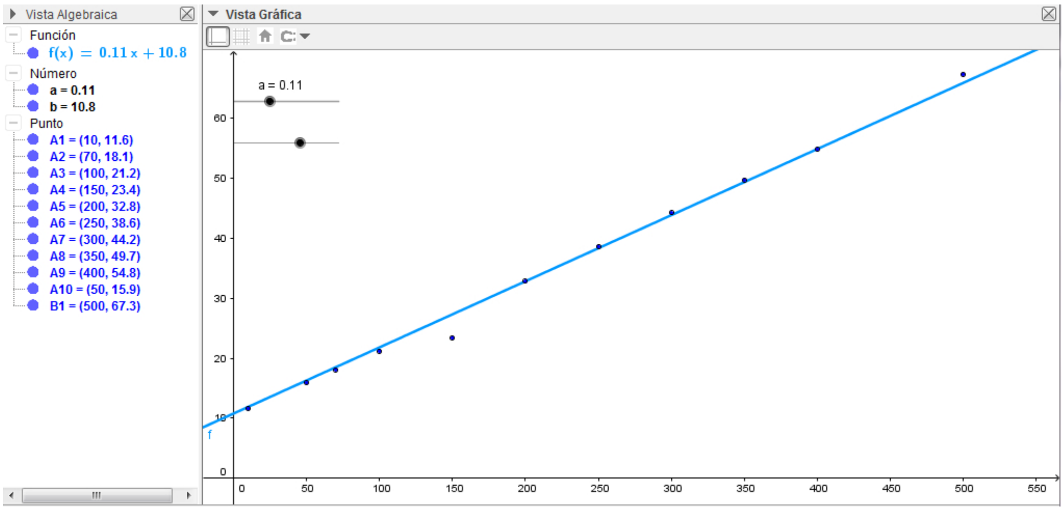
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GM1



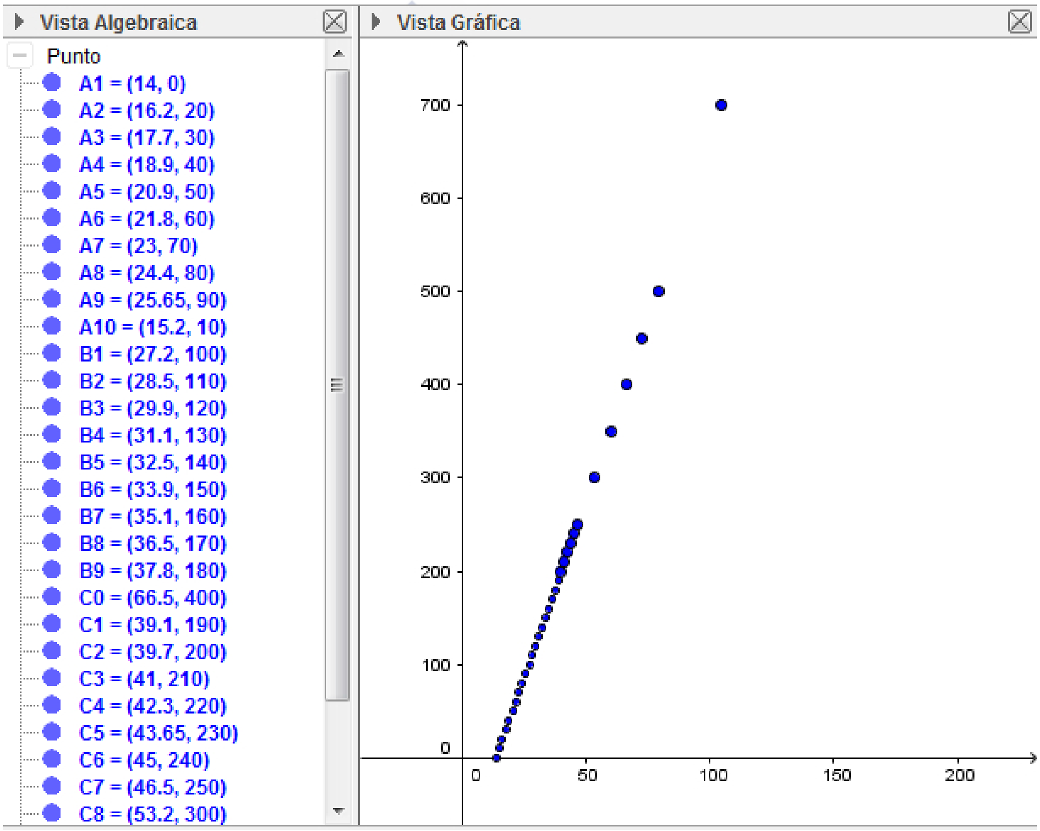
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GM1



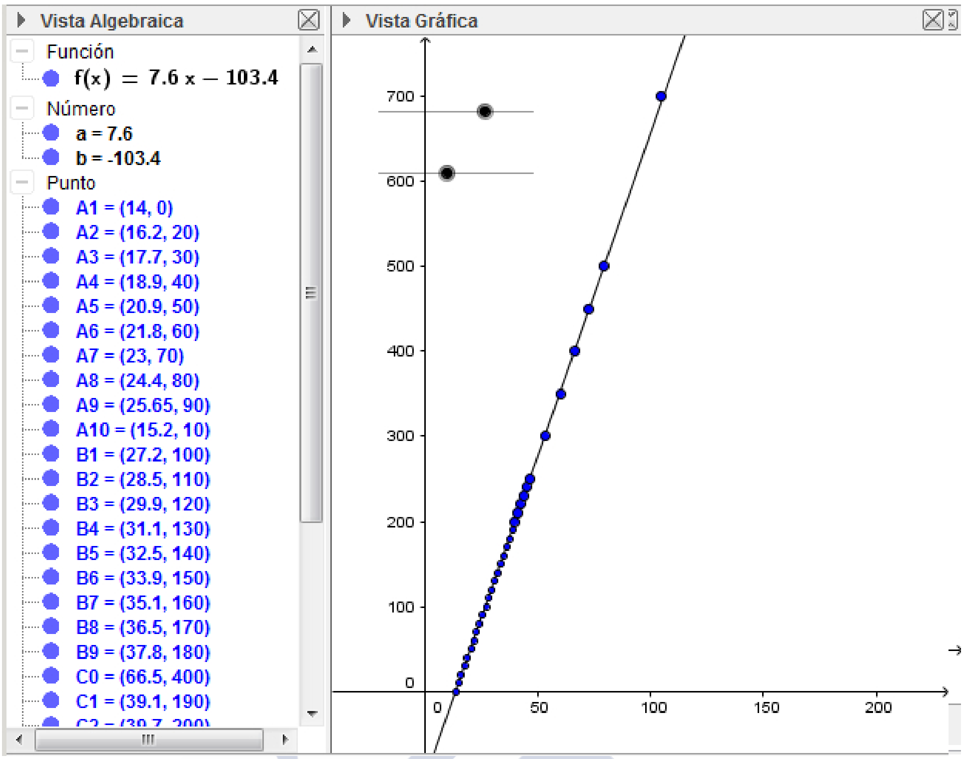
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GM2



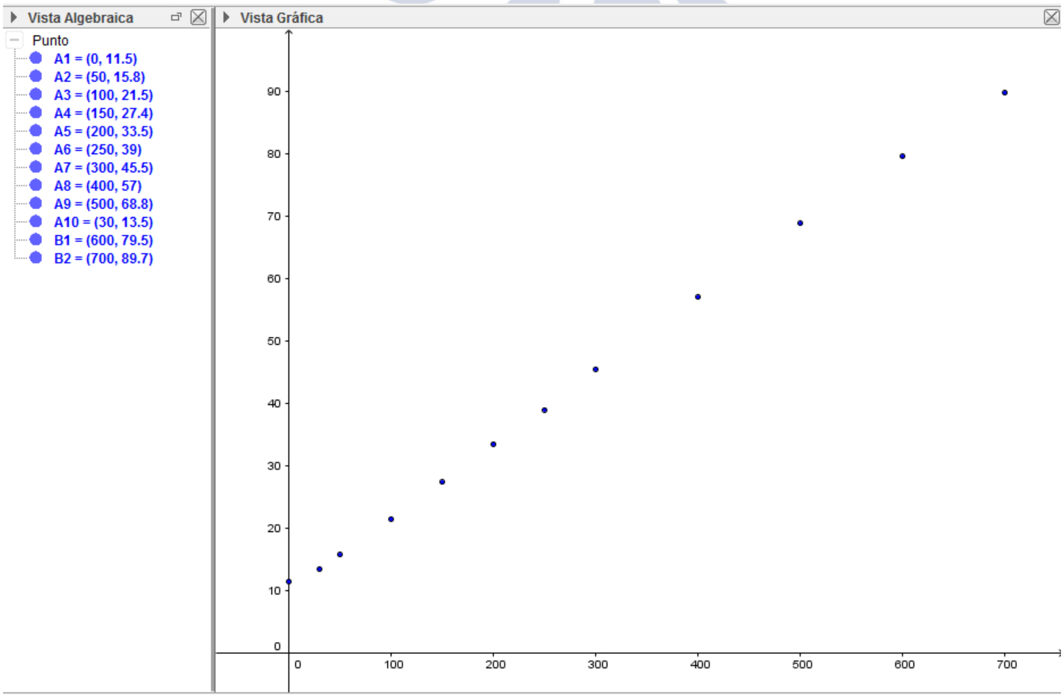
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GM2



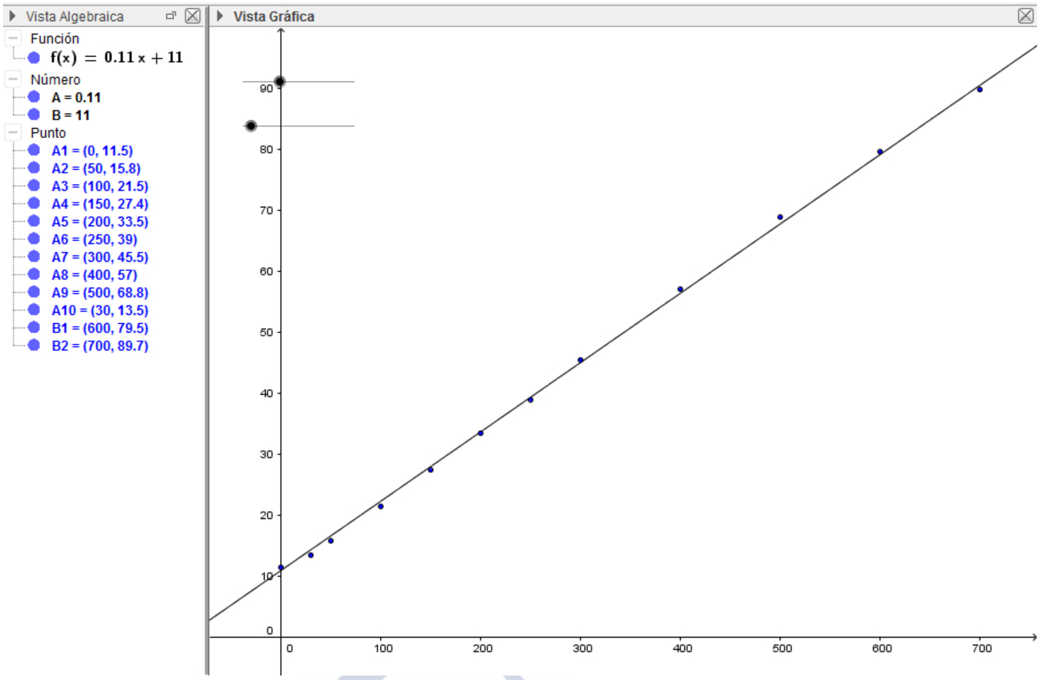
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GM3



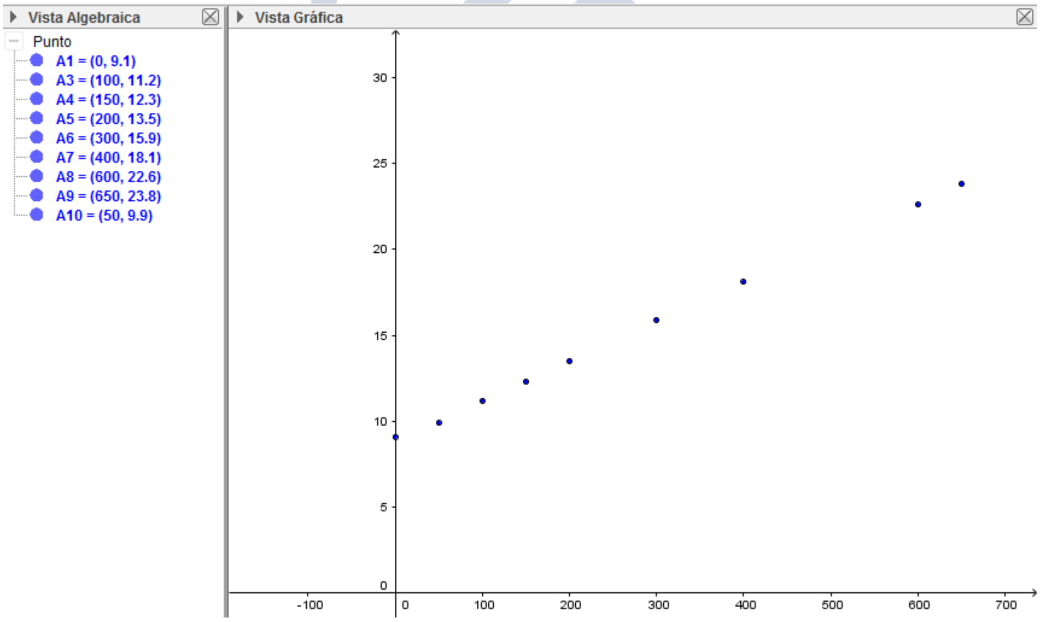
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GM3



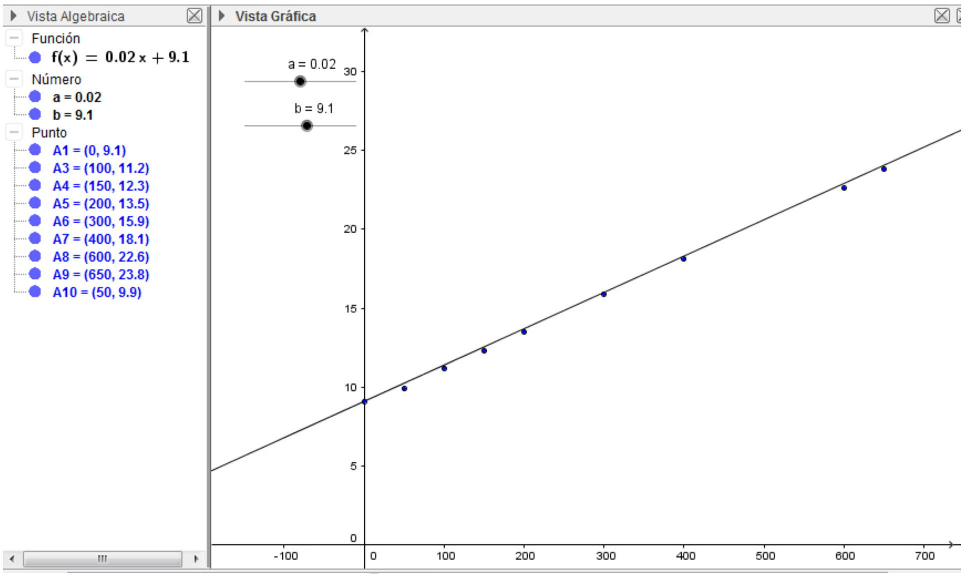
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GM4



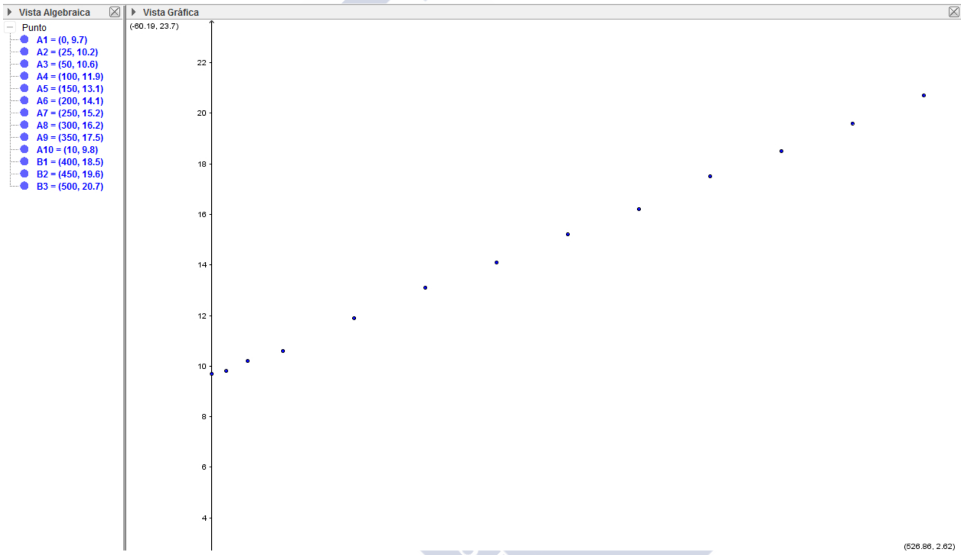
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GM4



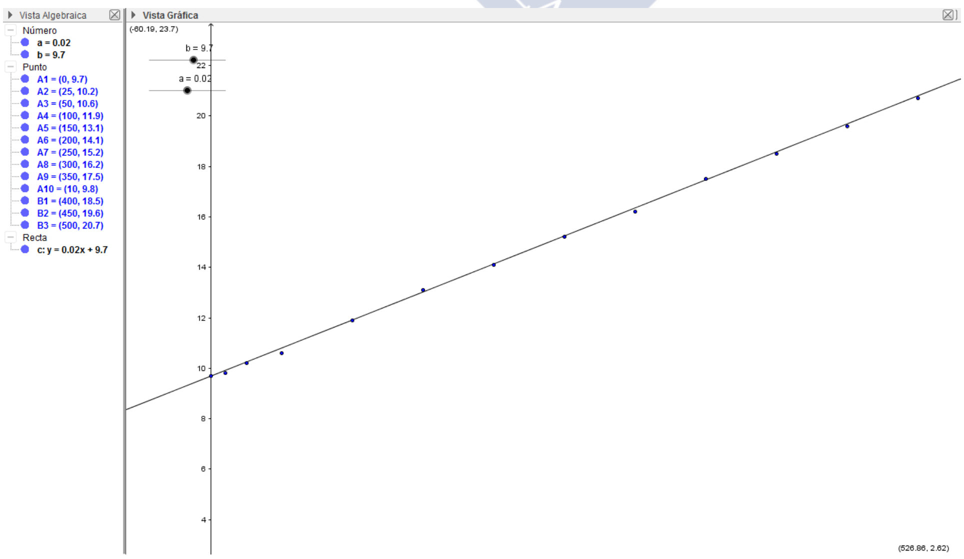
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GM5



Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GM5

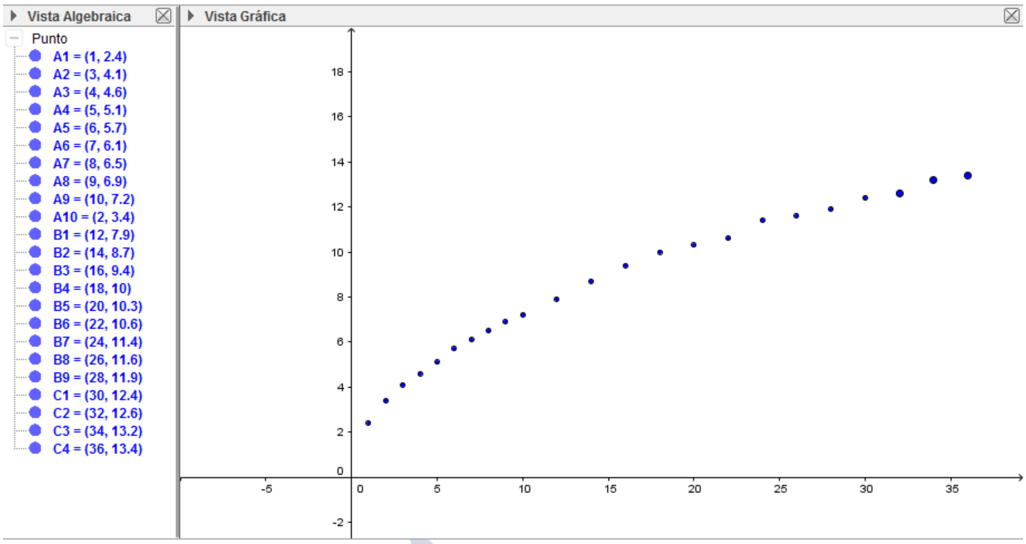


Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GM6

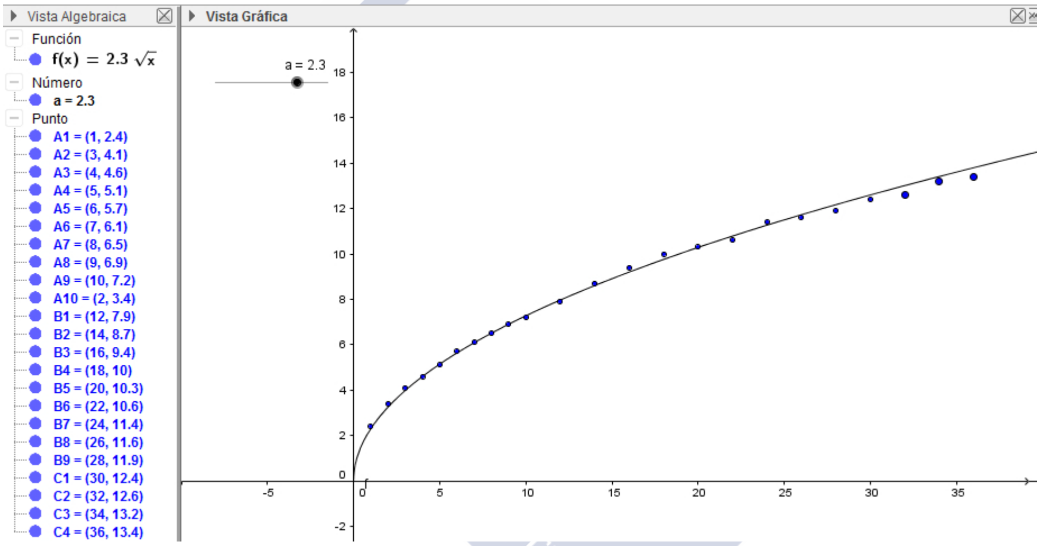


Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GM6

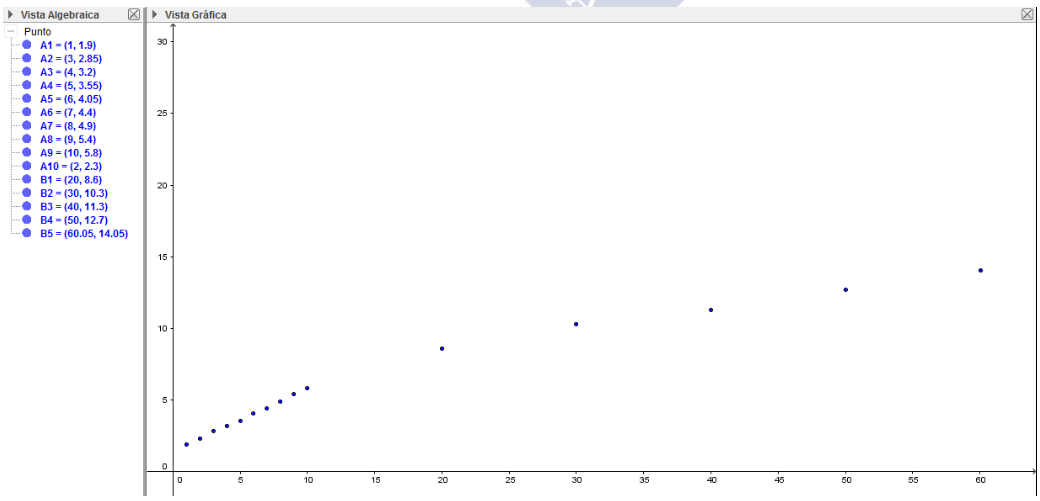
- *Actividad Aceite y agua*



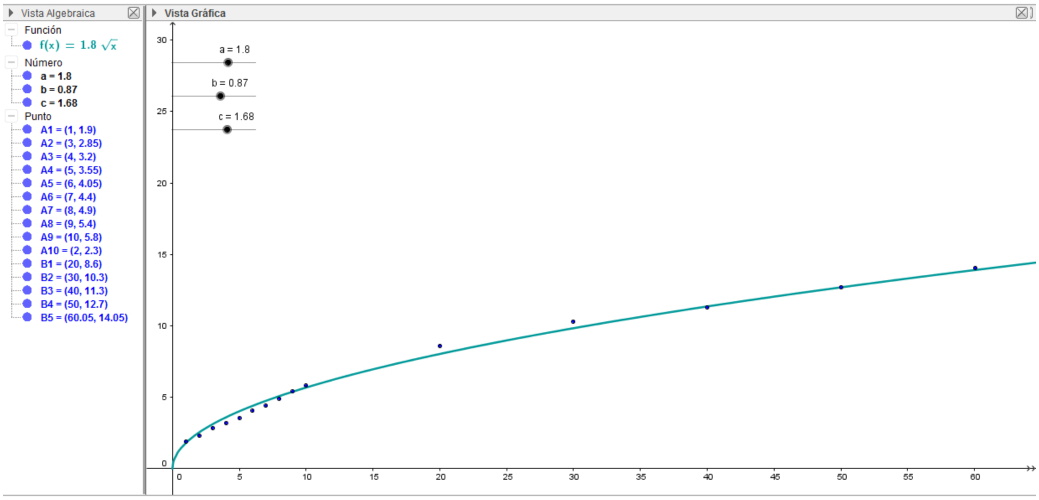
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GA1



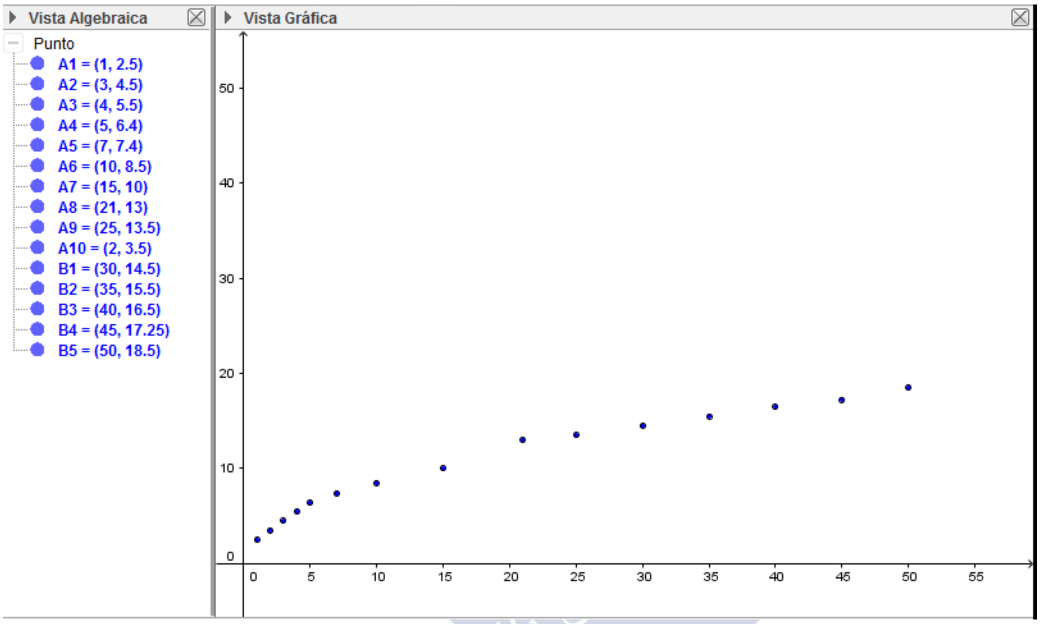
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GA1



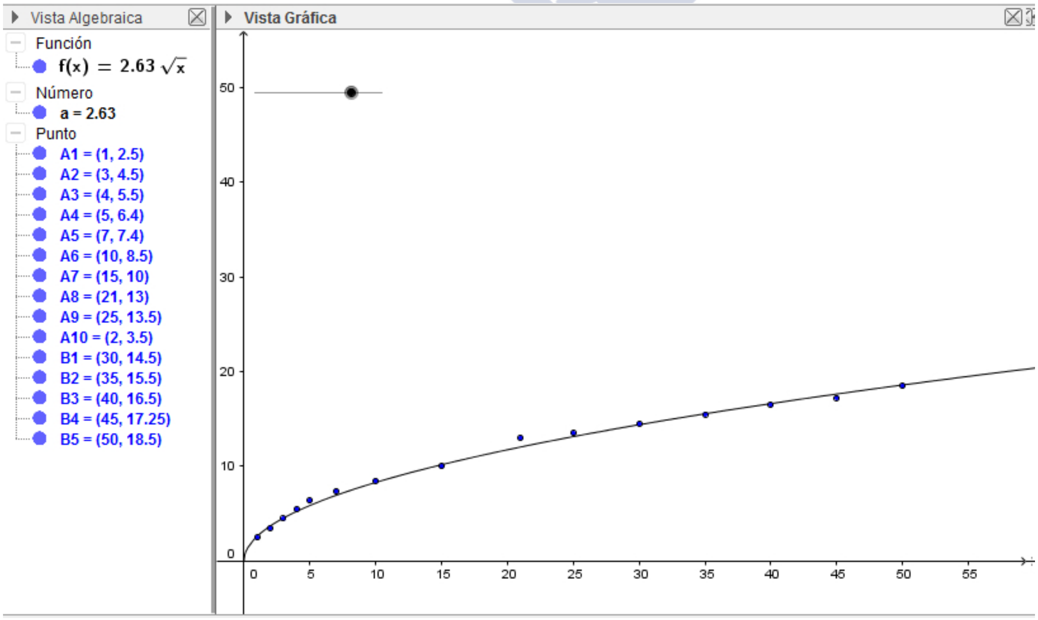
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GA2



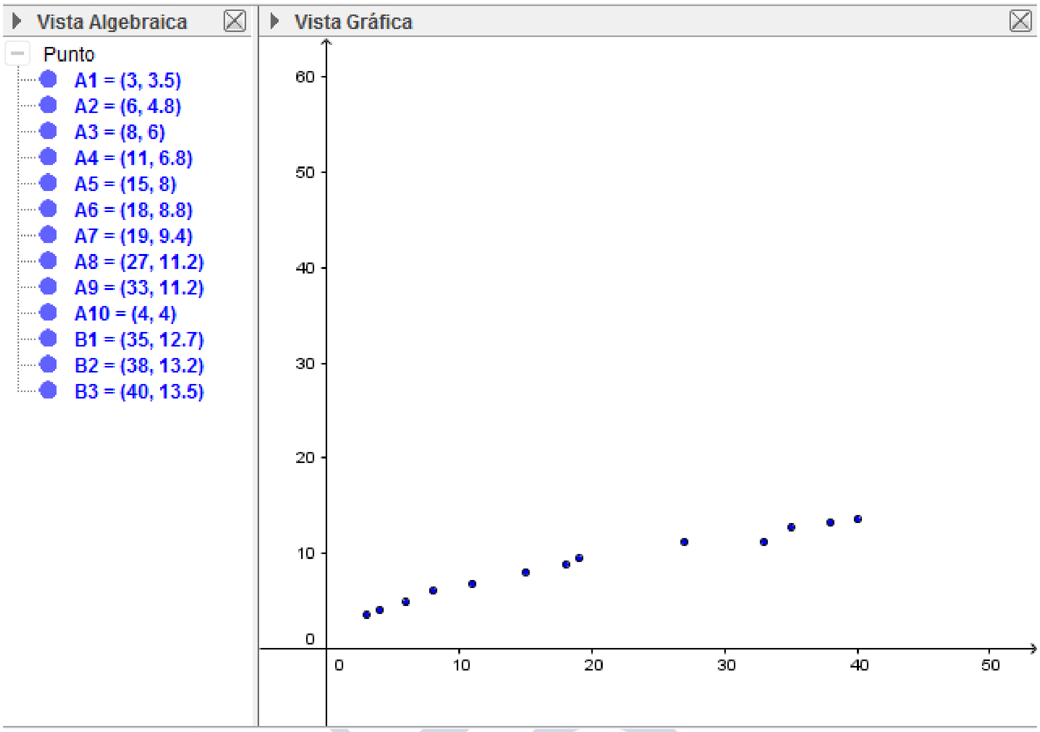
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GA2



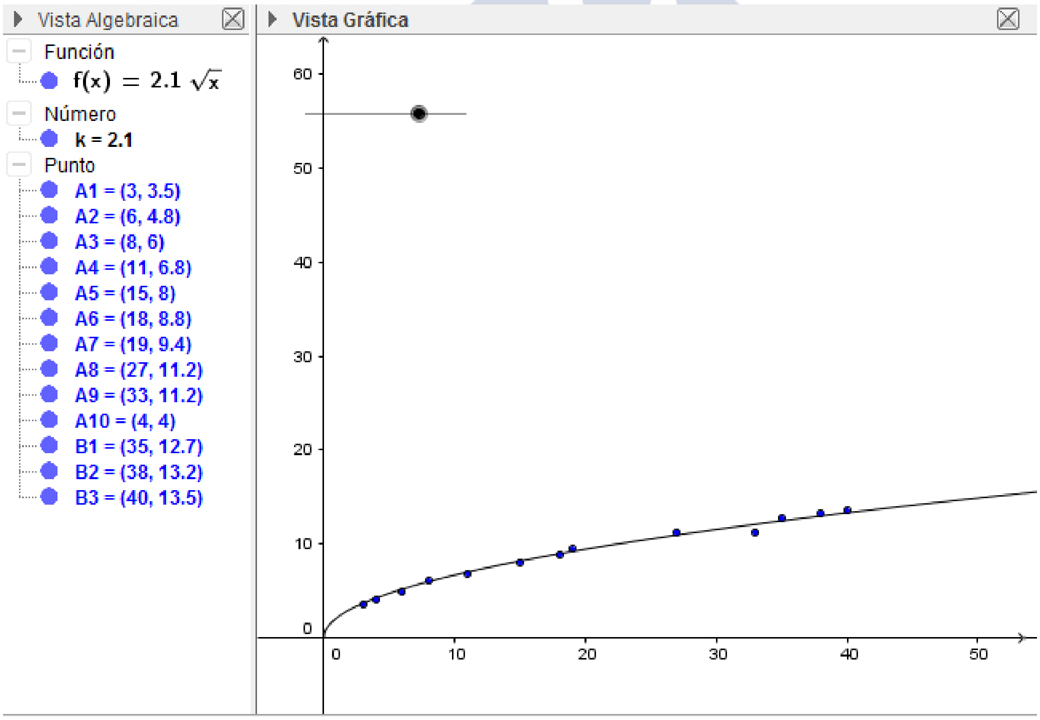
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GA3



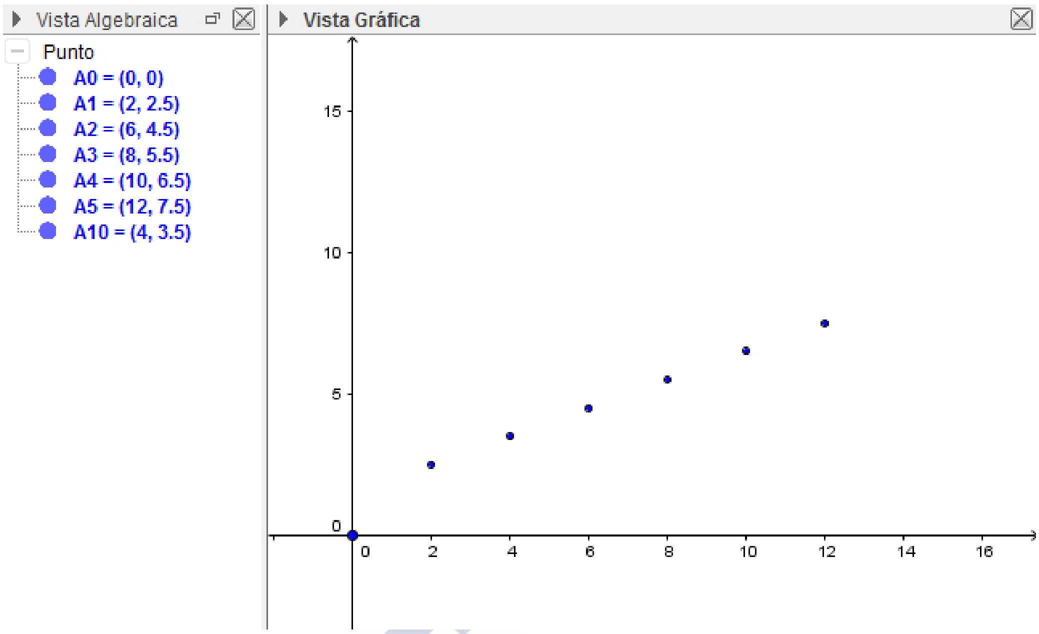
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GA3



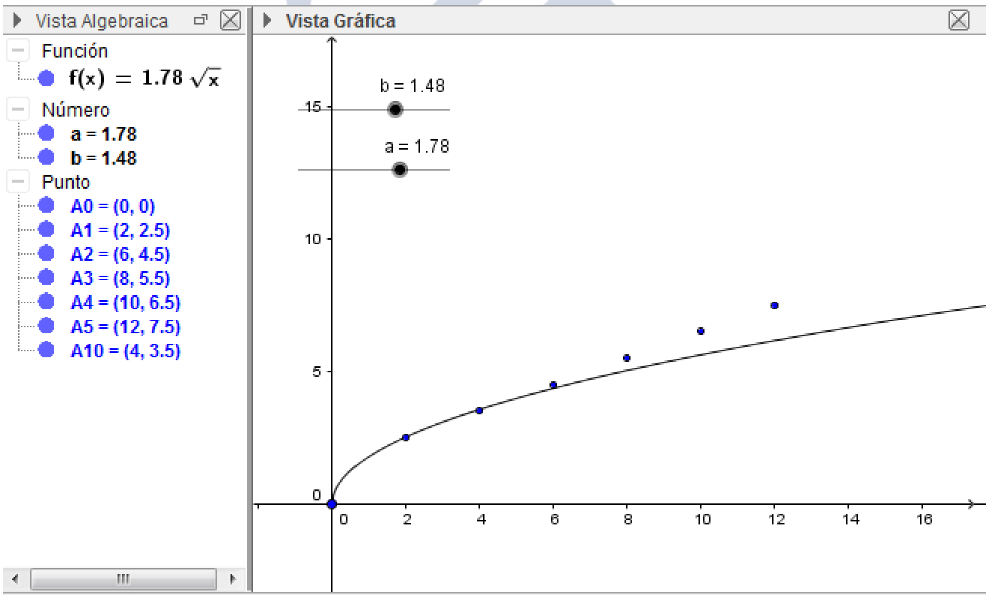
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GA4



Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GA4

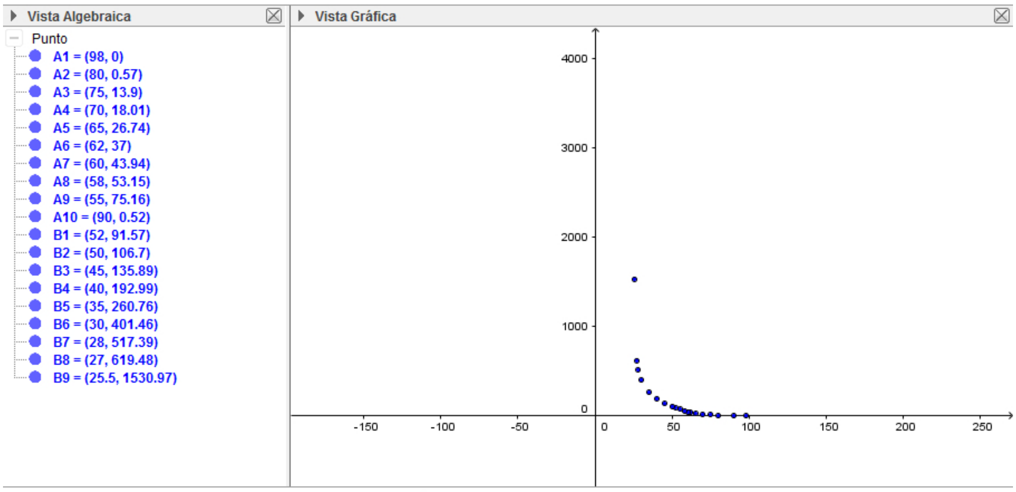


Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GA5

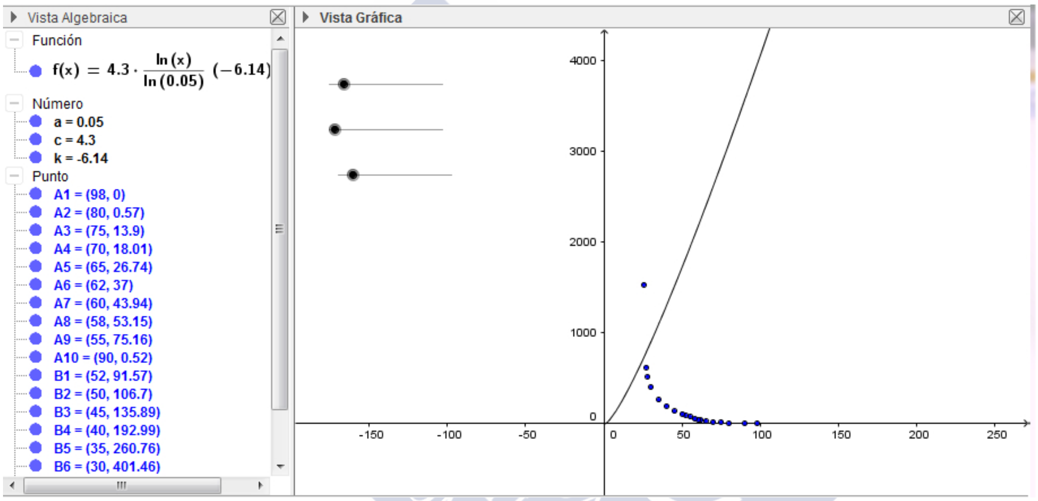


Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GA5

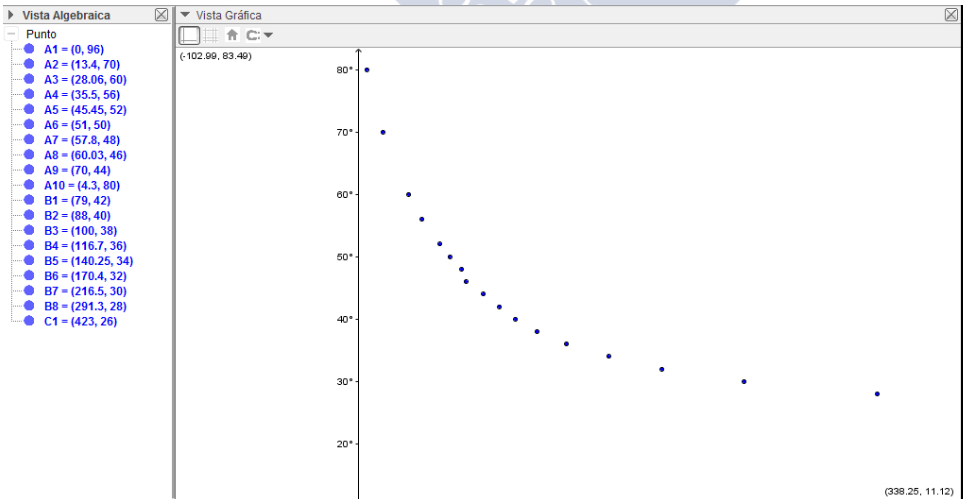
- *Actividad Temperatura*



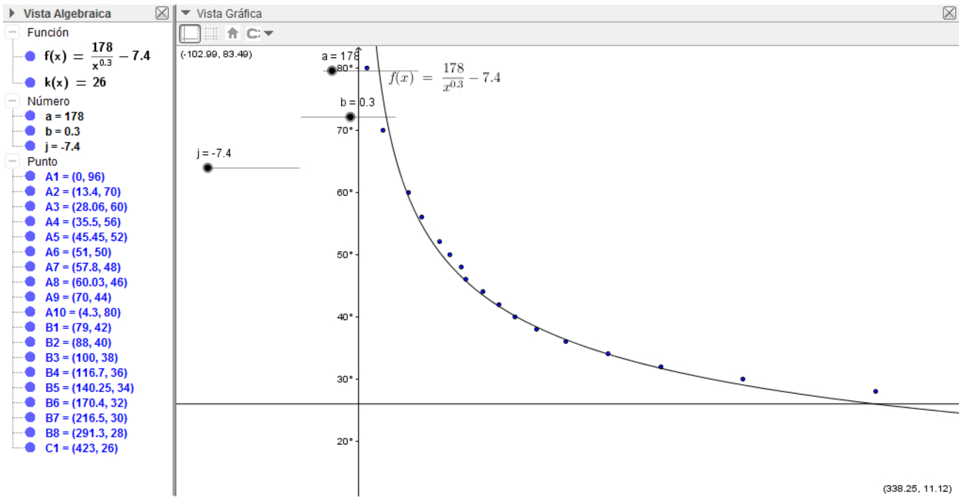
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GT1



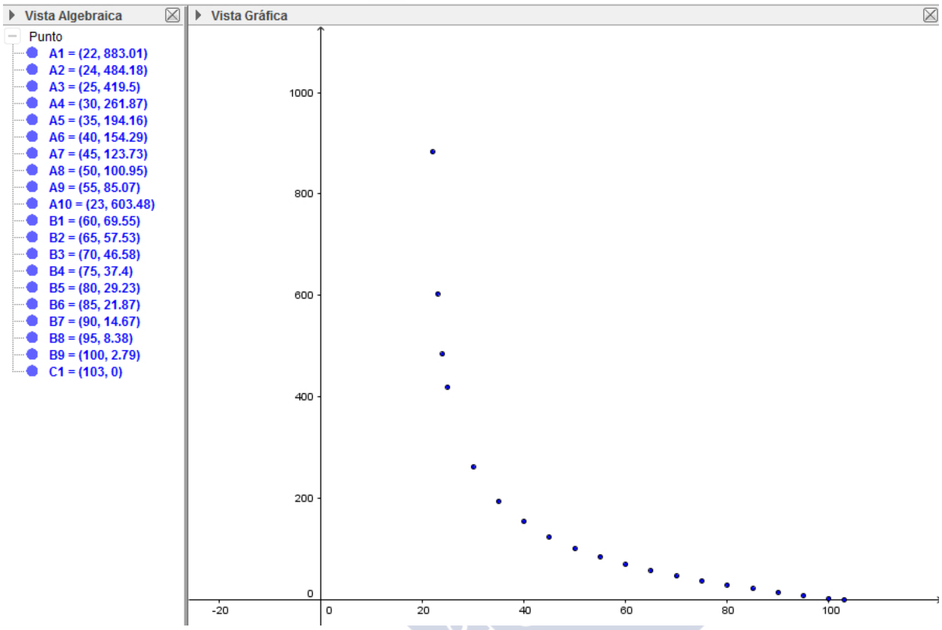
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GT1



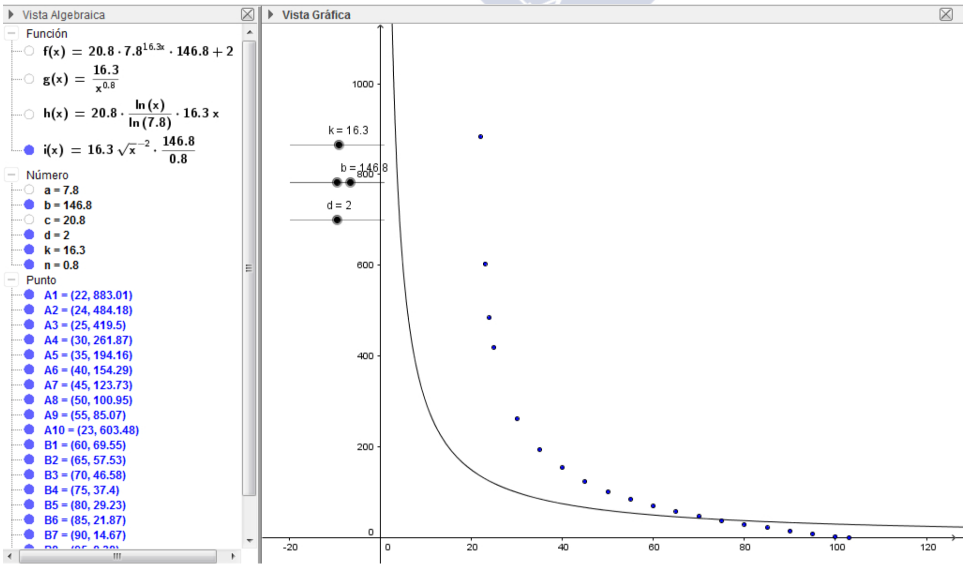
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GT2



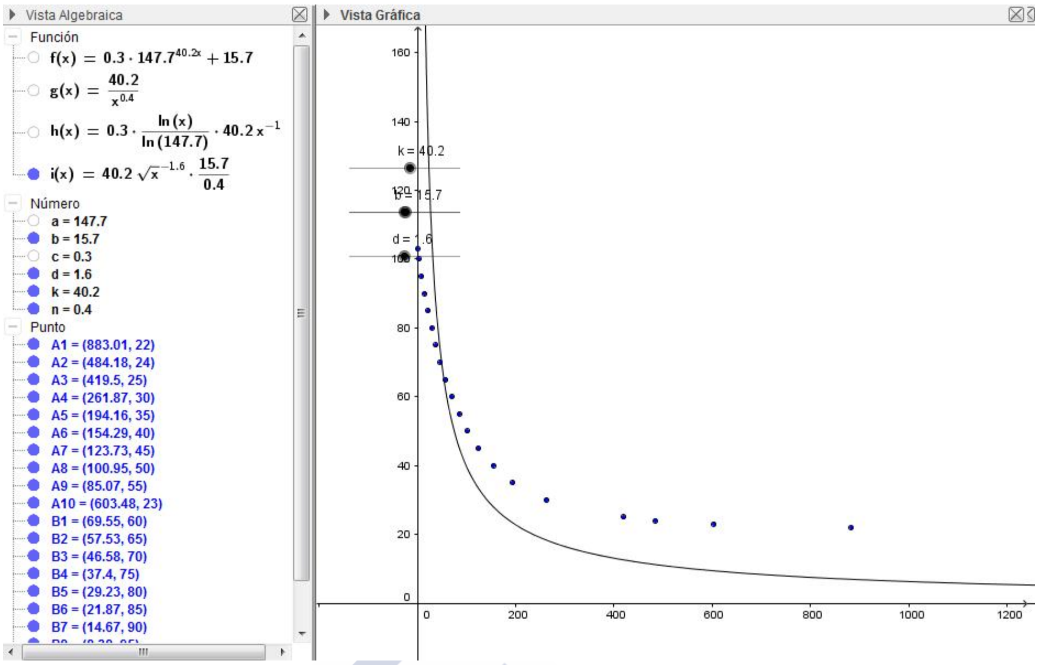
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GT2



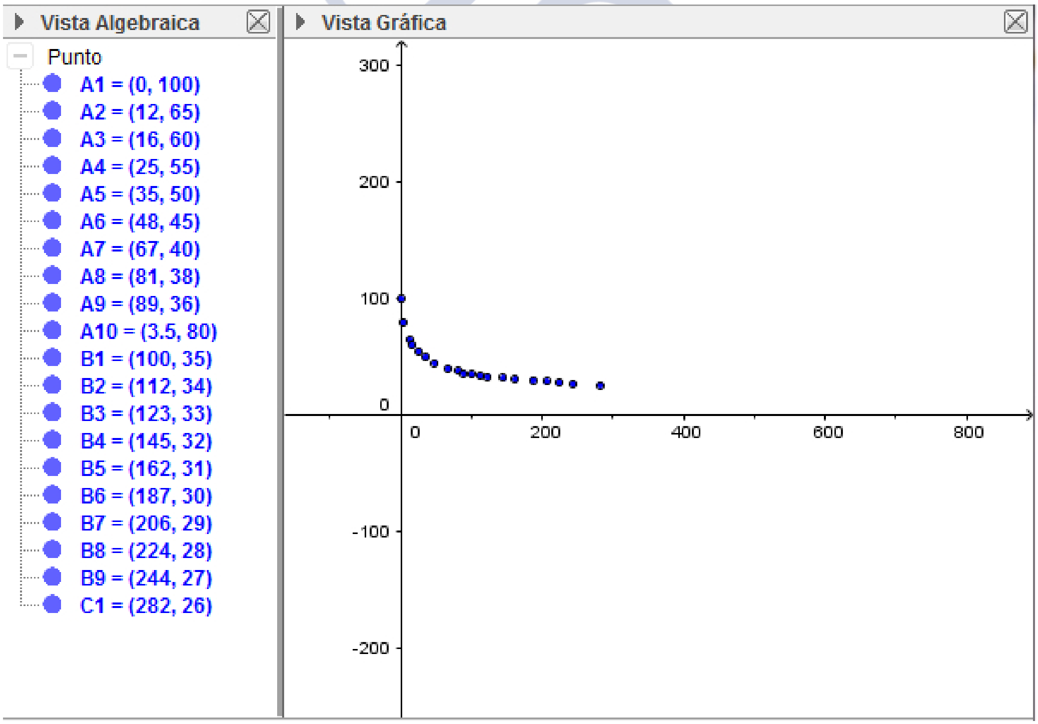
Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GT3



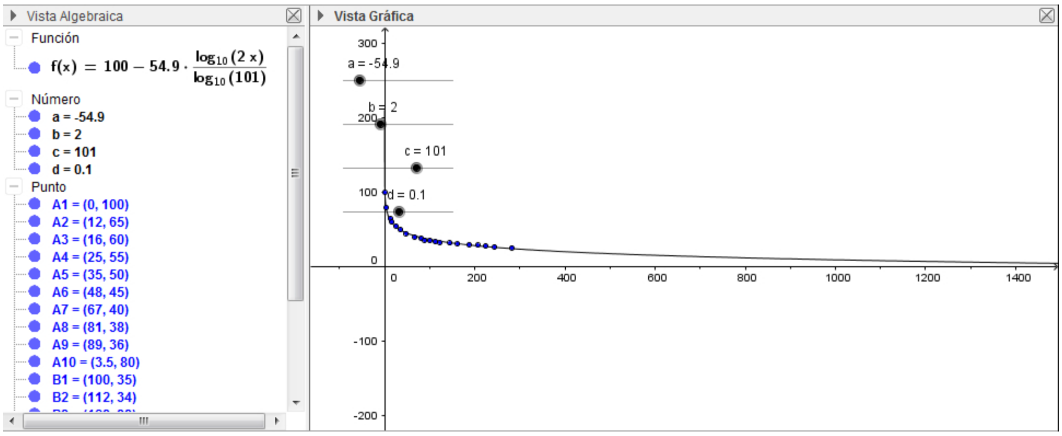
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GT3



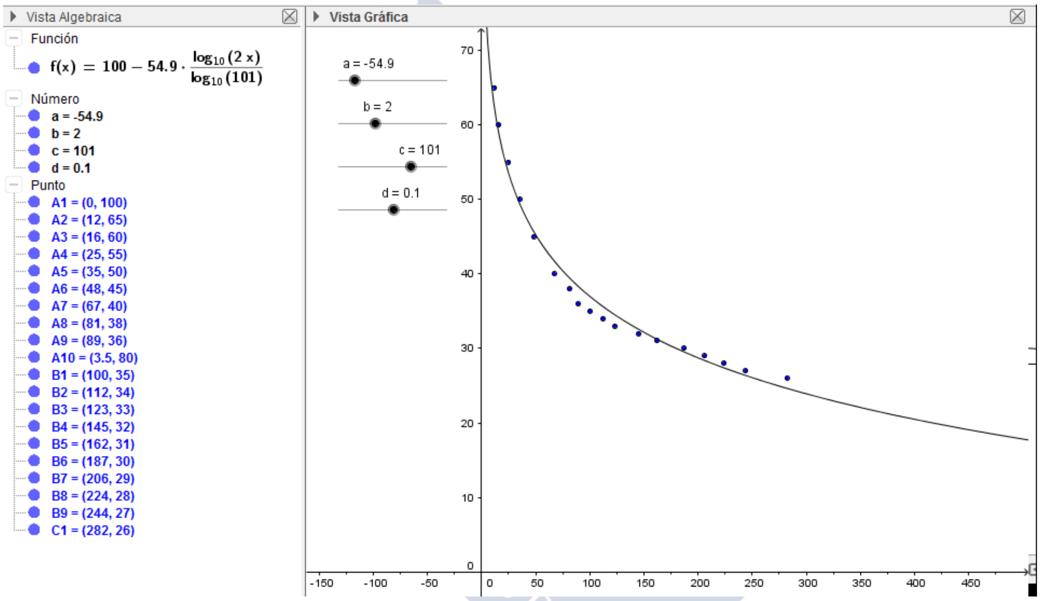
Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GT3



Introducción, como puntos del plano, de los datos de la tabla de valores. Grupo GT4



Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GT4
(aspecto de la gráfica entregada por los alumnos)



Introducción de parámetros y de la expresión de la función. Grupo GT4
(modificación de los intervalos visibles de los ejes de la gráfica anterior)

Anexo IX

Opinión sobre la experiencia

1.- Has hecho tres modelizaciones: "Muelle", "Aceite y agua", "Temperatura". ¿Qué modelización te ha parecido más interesante o te ha gustado más? Intenta explicar por qué.

2.- "Muelle" y "Temperatura" tenían tres partes: obtención de datos en el laboratorio, trabajo con el ordenador y un cuestionario individual.
"Aceite y agua" estaba dividido en cuatro partes: obtención de datos en el laboratorio, trabajo con el ordenador, cuestionario y debate en grupo, aplicación del modelo (obtención de datos en un hipotético caso real de un vertido de petroleo en la costa)
¿Qué parte te ha parecido más interesante o te ha gustado más? Intenta explicar por qué.

Anexo X

Transcripciones del debate realizado, como fase previa a la aplicación del modelo obtenido en *Aceite y agua*, en una situación de vertido contaminante. Las preguntas se corresponden con las tres últimas incluidas en el Anexo III.

- Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el radio en lugar del diámetro?

Curso 2010-2011

1 Profesor: (é) un círculo o una circunferencia por qué se caracterizan más, ¿qué se suele usar?

2 Varios s: El radio.

3 Profesor: El radio. Pues ahí no tenéis radio, tenéis diámetro ¿Qué habría que hacer para usar radio en vez de diámetro?

4 Varios s: Dividir entre dos.

5 A5: El diámetro entre dos.

6 Profesor: ¿Cómo?

7 A5: Dividir el diámetro entre dos.

8 Profesor: ¿Qué escribo? Vamos a coger ésta [*indica la función* $f(x) = 2.3 \cdot \sqrt{x}$, *que está escrita en el encerado*]

9 A5: *f* de *x* partido dos igual a dos con tres por raíz de *x* [*el profesor escribe lo que el indica:* $\frac{f(x)}{2} = 2.3 \cdot \sqrt{x}$].

10 A5: Partido dos.

11 Profesor: ¿Partido dos?

12 A5: Si no, estás haciendo el área.

[*Se producen varios comentarios al mismo tiempo y no es posible distinguir lo que dicen los s*].

12 Profesor: De uno en uno, de uno en uno [*Solicita que hablen de uno en uno*] ¿Así, así, así, así? [*Se refiere a si están de acuerdo con la expresión* $\frac{f(x)}{2} = 2.3 \cdot \sqrt{x}$]

13 A1: No, no, no.

[*Vuelven a intercambiar opiniones de forma desordenada*]

14 Profesor: A ver, tenéis que estar seguros.

15 A12: Dos con tres raíz de *x* partido de dos

16 A4: Pero así vas a obtener un valor más alto.

17 A1: No. El diámetro es *f* de *x* partido de dos. O sea, ya está.

18 A4: Pero.

19 A1: Arriba obtienes el diámetro, ¿no? [*Refiriéndose a la expresión* $f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$]. Si divides todo entre dos, obtienes el radio.

20 A4: Luego lo otro también.

21 A12: Todo entre dos, luego.

[*El debate vuelve a tornarse desordenado, con los s formando pequeños grupos de dos o tres que debaten entre ellos*].

25 A5: Si divides todo entre dos se van los entre dos y te queda igual.

26 Profesor: A ver, ¿estáis de acuerdo o no estáis de acuerdo?

27 Varios s: Sí.

28 Profesor: ¿Sí?, ¿todos?

29 A1: Todos.

30 Profesor: ¿Os pongo yo un problema entonces? [é] ¿Veis ahí *f* de *x*? ¿Qué pone, arriba del todo, *f* de *x* igual? [*Se refiere a lo escrito en el encerado,* $f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$, *f(x)=diámetro*].

31 A1: Diámetro.

32 Profesor: Y abajo qué pone, *f* de *x* igual [*Se refiere a lo escrito en el encerado,*

$$f(x)=\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$$, *f(x)=radio*].

33 A1: Radio.

34 Profesor: ¿Pero en qué quedamos, *f* de *x* es el diámetro o es el radio?

35 A1: ¡Ehh!, la función.

36 A12: Pero al ser partido entonces ya nada.

37 Profesor: Espera. Yo repito, *f* de *x* arriba pone diámetro, ¿no?, y abajo poneé

38 A1: Radio.

39 Profesor: Radio, ¿en qué quedamos?, *f* de *xé*

40 A12: Si pones *f* de *y*, la función es distinta.

41 Profesor: Espera, tú ahora coges y dices, pues lo voy a publicar porque hice un trabajo é

42 A1: Pues le cambias la letra, le pones *g*.

43 Profesor: Espera, entonces coges y pongo *f* de *x* igual a dos coma tres raíz de *x* dividido por dos, ¿no?, y entonces tienes que describir, tienes que decir qué es cada cosa. *x*, cantidad de aceite, eso no cambió. *f* de *x*, qué escribes, ¿diámetro o radio?, porque aquí aparece como las dos, diámetro y radio.

44 A1: Pues cambias la letra de la función

45 A12: Le pones prima, o así.

46 Profesor: Lo normal será ponerle, a ver.

47 Varios s : *g*

48 A7: ¡Ah!

<u>Curso 2011-2012</u>

1 Profesor: (é) Pues lo que queremos no es el diámetro sino el radio.

2 A16: Vale, pois é moi fácil [*Vale, pues es muy fácil*].

3 A21: Sería dous por dous coma un por raíz de dous [*Sería dos por dos coma uno por raíz de dos*]. . [*Se refiere a realizar el cálculo:* $\frac{f(x)}{2} = 2.1\sqrt{x} \Rightarrow f(x) = 2 \cdot 2.1\sqrt{x}$]

4 A14: No, eso partido dos [*se ríe*]. [*Se refiere a* $f(x) = \frac{2.1\sqrt{x}}{2}$]

5 A19: Habería que cambiar a constante e xa está. [*Habría que cambiar la constante y ya está*].

6 A23: Si pones partido dos.

7 A22: Sí, todo entre dos.

8 A17: Hombre.

9 A21: Habería que dividilo [*Habría que dividirlo*].

10 B9: No, solamente entre dous dous con un, ou sexa quedaría un con un [*No, solamente dos dos con uno, o sea quedaría uno con uno*].

11 A19: Sólo sería la constante porque *x* (é)

12 A17: La mitad de la constante. [$f(x) = \frac{2.1}{2} \cdot \sqrt{x}$]

13 A16: Sería la misma constante.

14 A14: Pero ¿por qué la mitad de la constante?

[*Varios s hablan a la vez durante unos segundos, lo que impide saber qué dicen*]

15 A14: Pero si la constante no tiene nada que ver.

16 A21: Ten que ser de toda a función se solo fas a mitad da constante ou a mitad de *x* de raíz de *x* faiche perder o valor, xa non che dá o radio. Tal como está dache o diámetro e se todo eso o divides entre dous, toda a función, dache xa o radio [*Tiene que ser de toda la función si solo haces la mitad de la constante o la mitad de x de raíz de x te hace perder el valor, ya no te da el radio. Tal como está te da el diámetro y si todo eso lo divides entre dos, toda la función, te da ya el radio*]

17 A16: ¡Hum! Non, porque ti o diámetro o obtés multiplicando só a constante, non o estás aplicando a *x* para nada [*No, porque tú el diámetro lo obtienes multiplicando sólo la constante, no lo estás aplicando a x para nada*].

18 A14: ¿Qué?

19 A19: ¿Eh?

20 A16: Que ti no que estás calculando o diámetro e na constante, polo que, se queres facerlle a *mitá*, que é o radio, só tes que dividir a constante [*Que tú en lo que estás calculando el diámetro es en la constante, por lo que, si quieres hacerle la mitad, que es el radio, sólo tienes que dividir la constante*]

21 A22: ¿E facendo raíz cuarta de *x*? [*¿Y haciendo raíz cuarta de x?]*.

22 A14: A constante non é o diámetro [*La constante no es el diámetro*].

23 A19: Eu penso que si divides a *x* estás dividindo a cantidade de aceite entre dous tamén e a cantidade de aceite é a misma [*Yo creo que si divides la x estás dividiendo la cantidad de aceite entre dos también y la cantidad de aceite es la misma*].

24 A17: Claro.

25 A22: Claro iso non afecta [*Claro eso no afecta*].

26 A14: Pero, ¿para qué queredes dividir a constante entre dous? [*Pero, ¿para qué queréis dividir la constante entre dos?*].

27 A25 : Saliríache unha función distinta [*Te saldría una función distinta*].

28 A19: ¿Sí?

29 A25: Saliríache unha función distinta.

30 A21: Depende do que dividas [*Depende de lo que dividas*].

[*Miran al profesor pidiendo consejo*]

31 Profesor: Aquí yo no hablo nada. Tenéis que hablar vosotros. Este es un debate entre vosotros (é)

[*Siguen algunas intervenciones acerca de la no participación del profesor*]

(é)

44 A22: A mitad da constante, ¿e pode ser a raíz cuarta de *x?* [*La mitad de la constante, ¿y puede ser la raíz cuarta de x*].

45 A14: ¿E agora explícasme por qué pos a raíz cuarta? *[¿Y ahora me explicas por qué pones la raíz cuarta*].

46 A22: A ver porque ahí se supón que estás dividindo tamén entre dous o valor de *x* [*A ver porque ahí se supone que está dividiendo también entre dos el valor de x*].

[*Se producen debates en pequeños grupos*].

47 Profesor: Procurar no hacer grupitos (é)

48 A21: Realmente tanto daría.

49 Profesor: ¿Hum?

50 A21: Tanto daría solo dividir solo o dous coma un. Tanto, para hallar o radio, tanto daría partir toda a función entre dous, partir o dous con un entre dous, ou dividir *x* raíz de *x* entre dous [*Tanto daría solo dividir el dos coma uno. Tanto, para hallar el radio, tanto daría partir toda la función entre dos, partir el dos coma uno entre dos, o dividir x raíz de x entre dos*].

[*Los restantes compañeros se dan cuenta de que lo que dice el A21 es cierto y se suceden comentarios al respecto, de forma un tanto desordenada, con risas y expresiones que denotan su sorpresa por no darse cuenta. La A22 insiste, en conversación con la A14, en modificar la raíz, ahora suprimiéndola, hasta que la A14 le hace darse cuenta de su error*].

84 Profesor: *f* de *x*

85 A21: Sí.

86 A21: *f* de *x*

87 Profesor: Igualé

88 A16: É igual a [*Es igual a*].

89 A21: Dous coma un por raíz de *x* partido de dous. [*Dos coma uno por raíz de x partido de dos*] [*El profesor escribe en el encerado* $f(x)=\frac{2.1\cdot\sqrt{x}}{2}$] .

90 Profesor: ¿Así?

91 A16: Sí.

92 A14: Sí.

93 A21: Despois a outra é *f* de *x* igual a dous coma un partido de dous por raíz de *x* [*El profesor escribe en el encerado* $f(x)=\frac{2.1}{2}\cdot\sqrt{x}$] . E despois a outra, a terceira propiedad sería *f* de *x* igual a dous coma un por raiz de *x* partido de dous [*Después la otra es f de x igual a dos coma uno partido de dos por raíz de x. Y después la otra, la tercera propiedad sería f de x igual a dos coma uno por raíz de x partido de dos*]

- Uno de los datos es el diámetro. ¿Cómo cambiaría la función si uso en la función el área de aceite sobre el agua en lugar del diámetro?

<u>Curso 2010-2011</u>

62 Profesor: (é) lo que se puede calcular con facilidad es el área (é) a esto se le puede calcular el área, pero desde luego no es un círculo. [*Se refiere a una figura dibujada en el encerado*]. No hay diámetro, ahí no hay diámetro, existe área. ¿Cómo cambiar esto para que en lugar del diámetro o el radio aparezca el área? [*Señala la función que han obtenido en la pregunta 2:* $g(x)=\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$ *]*

63 A12: Pues haces la función del área, del círculo, dos pi erre [$2\cdot\pi\cdot r$].

64 A4: Pi por eso al cuadrado [*Señala la función escrita en el encerado* $g(x)=\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$ *].*

65 Profesor: El área de un círculo es pi erre cuadrado [*Escribe A=* $\pi\cdot r^2$ *en el encerado. Mientras, los s hablan entre ellos en grupos pequeños*]. Vale, ¿y qué haces ahora? Es el área de un círculo, pi erre cuadrado.

66 A4: Pones eso y en r sustituyes por la fracción esa [*Se refiere a sustituir en la expresión* $\pi\cdot r^2$ *, el valor de r por* $\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$ *, ambas expresiones escritas en el encerado].*

67 Profesor: Tú dime qué escribo y yo lo escribo.

68 A4: Cambias la letra, poner *h* de *x*, por ejemplo, igual a pi por dos con tres por raíz de *x* partido dos entre paréntesis elevado a dos. [*El profesor escribe en el encerado* $h(x)=\pi\cdot\left(\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$ *. A partir de este momento escribe lo que le indican los s*].

69 Profesor: ¿Así?

70 A4: Sí.

71 Profesor: ¿Sí?

72 Varios s: Sí.

73 Profesor: ¿*x* será?

74 Varios s: Cantidad de aceite.

75 Profesor: ¿Y *h* de *x*?

76 Varios s: El área

77 Profesor: En, ¿qué?

78 Varios s: Centímetros cuadrados.

79 Profesor: ¿Sí?

80 Varios s: Sí.

81 Profesor: ¿Todos de acuerdo? ¿Todos de acuerdo?

82 Varios s: Sí.

<u>Curso 2011-2012</u>

105 Profesor: (é) Pero el círculo es un área. Entonces, ¿qué habría que hacer para poner el área?

106 A19: Hallar el área del círculo.

107 Profesor: Para que aparezca el área.

108 A19: Hallar el área del círculo.

109 Profesor: El volumen de aceite. El volumen de aceite se corresponde con un círculo de tal diámetro, se corresponde con un círculo de tal radio, se corresponde con un círculo de tal área.

110 A14: ¿Cómo era el área de un círculo?

111 Profesor: ¿La fórmula del área? Pi erre cuadrado [*Los s hablan entre ellos en grupos pequeños*] ¿Cómo? *x* igual a, bueno, ¿*f* de *x* pongo? *f* de *x* [*El profesor escribe en el encerado lo que los s indican*].

112 Varios s: Sí .

113 Profesor: ¿Y ahora?

114 A15: Pi dos con uno por raiz de *x* partido dos al cuadrado.

112 Profesor: ¿Todo al cuadrado?

113 A15: Sólo ese, sólo la fracción [*El profesor escribe en el encerado*

$$f(x)=\pi\cdot\left(\frac{2.1\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$$]

114 A15: Non, a raíz de *x* fora. E que si non vai [*No, la raíz de x fuera. Es que si no, no va*].

115 A17: ¿Y tiene que estar partido dos? No, con el diámetro.

116 Profesor: ¿Así? [Señ*ala la expresión previamente escrita en el encerado*]

117 A14: Pero eu poría a raiz de *x* fora do cuadrado [*Pero yo pondría la raíz de x fuera del cuadrado*].

118 Profesor: O así [*Escribe en el encerado* $f(x)=\pi\cdot\left(\frac{2.1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{x}$].

119 A16: Así.

120 A15: Sí, sí, sí, sí.

121 A21: Pero así estás partindo a fracción. Cando realmente o radio é todo é dous coma un por raíz de *x* partido dous. Se colles solo un cacho non estás collendo o valor real do radio. Estás hallando outro [*Pero así estás partiendo la fracción. Cuando*

realmente el radio es todo, es dos coma uno por raíz de x partido dos. Si coges sólo un trozo no estás cogiendo el valor real del radio. Estás hallando otro].

122 A16: Pero, ¿non che daba igual que colleras un couso que outro? [*Pero, ¿no te daba igual que cogieras una cosa que otra?*]. [*Se refiere a las expresiones de la función que expresaban el radio en función de la cantidad de aceite*].

123 A21: Sí, pero ahí é pi por r [*Sí, pero ahí es pi por r*].

124 A16: Xa [*Ya*].

125 A21: Pero r ten que ser todo [*Pero r tiene que ser todo*].

126 A22: ¡Hum! Claro, sí, sí, claro.

127 A21: Non podes coller un cacho elevalo ó cadrado e despois o outro, ten que estar todo elevado ó cadrado. [*No puedes coger un trozo elevarlo al cuadrado y después el otro, tiene que estar todo elevado al cuadrado*].

128 A22: Eu penso que ten que ser todo elevado ó cadrado. [*Yo creo que tiene que ser todo elevado al cuadrado*].

129 A14: Vale, sí.

130 A21: r realmente é calquera das tres formas anteriores. [*r realmente es cualquiera de las tres formas anteriores*].

131 A22: Porque o radio componse da cantidade de cantidade de aceite que hai, entonces tería queé [*Porque el radio se compone de la cantidad de cantidad de aceite que hay, entonces tendría que**é***]

132 A14: Sí, pero.

133 Profesor: Hay una dependencia, es decir, la cantidad de aceite determina diámetro, determina radio, también determina área. Determina lo que quieras, en el círculo, lo que quieras. En un círculo, todo esto es aceite, pues tú en este círculo puedes medir diámetro, pero también puedes medir radio y también puedes medir área, en un círculo.

134 A22: Eu creo que tería que ser todo elevado ó dous [*Yo creo que tendría que ser todo elevado al dos*].

135 Profesor: Todo, ¿el qué?

136 Varios s: Toda la fracción.

137 Profesor: Es decir, ¿así? [*Escribe* $f(x) = \pi \cdot \left(\frac{2.1 \cdot \sqrt{x}}{2}\right)^2$]

138 Varios s: Sí.

139 Profesor: ¿Todos de acuerdo?

140 Varios s: Sí.

- ¿Qué función obtendría si representase en el eje x el diámetro y en el eje y la cantidad de aceite? (O el área y la cantidad de aceite).

<u>Curso 2010-2011</u>

176 Profesor: (é) lo que vais a hacer es, medir el área y sacar la cantidad de aceite y aquí está al revés. Sabéis la cantidad de aceite y obtenéis el área pero eso no interesa en la práctica, interesa justo al revés. ¿Me explico? ¿Y qué habría que hacer?

177 A1: La inversa

178 Profesor: ¿Todos de acuerdo?

179 Varios s: Sí.

<u>Curso 2011-2012</u>

142 Profesor: Pues a la siguiente. [é] Ahora lo quiero al revés.

143 A16: ¿Eh?

144 Profesor: Es decir, vosotros tenéis como *x* la cantidad de de aceite, ¿no?, entonces en el eje *x* está la cantidad de aceite y en el eje *y*, en la del principio, la primera, estaba el diámetro, ¿sí?, pues ahora lo quiero al revés, quiero ponerlo al revés.

145 A14: *x* es la cantidad de aceite.

146 Profesor: En eso que tenéis ahí, ¿no? con el área y la cantidad de aceite es porque da igual. Es decir, da igual que lo hagáis con la última que pusisteis que con la primera que estaba, o con la segunda, da igual [*Se refiere a las tres funciones obtenidas por los s y que están escritas en el encerado*]

147 A14: Eu creo que máis o menos así [*Yo creo que más o menos así*] [*Enseña a sus compañeros cercanos un gráfico que ha dibujado en un papel*].

148 A25: Sí, pero non sei si funciona [é] A ver, sí, pero pregunta a función como é [*Sí, pero no sé si funciona. A ver , sí, pero pregunta cómo es la función*].

149 A14: ¡Ahhh!, la función.

150 A21: Gráficamente no se podría. Realmente en una gráfica sólo puede haber un valor de *x*.

151 Profesor: No, o sea, a ver. A ver si me explico. Cuando representasteis, ¿no?

152 Varios s: Sí.

153 Profesor: Aquí pusisteis. [*Dibuja un sistema de ejes cartesianos en el encerado, la gráfica de la raíz cuadrada y señala el eje x*].

154 A14: Los mililitros.

155 A21: La cantidad de aceite.

156 Profesor: Los mililitros, ¿no?

157 A14: Sí.

158 Profesor: ¿Y aquí? [*Señala el eje y en el sistema de ejes cartesianos del encerado]*

159 s A14 y A21: Centímetros.

160 Profesor: El radio, al principio. Bueno, pero a mi no me interesa así, a mi me interesa al revés. Aquí el radio y aquí la cantidad de aceite, los mililitros [*Escribe en el eje x radio y en el eje y cantidad de aceite*].

161 A14: ¿E témosche que dar o debuxo ou a función?. [*Por* **ñ***debuxo***ò** *se refiere a la gráfica de la función*]. [*¿Y te tenemos que dar el dibujo o la función?*].

162 Profesor: Me tenéis que dar la función. Trabajáis con funciones.

163 A14: Vale.

164 A21: En vez de ser a raíz de *x* sería raíz de *y*.

165 A16: Non, porque sería *parriba*. Unha raíz vai así [*Imita la forma de la gráfica de raíz de x con las manos*]. [*No, porque sería hacia arriba. Una raíz va así*].

166 A21: Terías que seguir calculando, a *x* tería que seguir sendo, tería que seguir sendo os mililitros de aceite. [*Tendrías que seguir calculando, la x tendría que seguir siendo, tendría que seguir siendo los mililitros de aceite*].

167 Profesor: La tabla de valores la hicisteis todos igual. O sea, pusisteis aquí mililitros, ¿no?, y aquí radio. Suponeos que alguien hace al revés, aquí radio y aquí mililitros. ¿Qué sale aquí? Si fuesen dos grupos y al que hace esto le sale ésta, qué le saldría a éste? [*Dibuja las líneas de una tabla de valores y escribe en la primera columna* ***ñ****mililitros****ò*** *y en la segunda* ***ñ****radio****ò****, borra y escribe en la primera* ***ñ****radio****ò*** *y en la segunda* ***ñ****mililitros****ò*** *Después señala, mientras habla, la gráfica de la raíz cuadrada y las tablas de valores].*

168 A17: ¿Sigue siendo la función de raíz cuadrada ahí?

169 Profesor: ¿Uh?

170 A17: ¿Sigue siendo la función raíz cuadrada también?

171 Profesor: ¡Ah!, lo tienes que averiguar.

172 A17: Sería una parábola, ¿no?

173 Profesor: ¿Qué?

174 A17: Una parábola.

175 A15: Cambia de forma.

176 A25: Cambia de forma pero hacia arriba.

177 A14: Sería, sería *f* de *x* igual a *x* partido *k*, todo entre elevado al cuadrado

178 Profesor: ¿Y este *k*?

179 A14: Bueno, dos con uno.

180 Profesor: ¿Así? [*Escribe lo que ha dicho A14,* $f(x)=\left(\dfrac{x}{2.1}\right)^2$]

181 Varios s: Sí.

182 A21: Sería calcularlle a inversa. [*Sería calcularle la inversa*].

183 Profesor: ¿Todos de acuerdo?

184 Varios s: Sí.

185 A14: Pero bueno, pero non sei si é así ou non. [*Bueno, pero no sé si es así o no*].

186 Profesor: ¡Ah!, pero es que para eso estáis.

187 A14: Bueno, o que fixen foi despejar a *x* [é] E da eso. E despois cambiar a *x* pola *y* e a *y* pola *x* [*Bueno, lo que hice fue despejar la x [****é*** *] Y da eso. Y después cambiar la x por la y y la y por la x*]

188 A21: Pero é a inversa dunha función. [*Pero es la inversa de una función*] [*Varios s asienten y afirman también* ***ñ****es la inversa****ò***].

189 A14: Vale. [*Se ríe*

Anexo XI

Introducción al uso de GeoGebra

La introducción en el uso de GeoGebra, de aquello que los alumnos iban a necesitar en las tres actividades, se realizó en los siguientes pasos:

a) Introducción de puntos del plano y parámetros en GeoGebra

Los puntos en el plano se introducen de la forma *A=(x,y)*. Por ejemplo (Figura 15), *A=(2,3)*, *B=(-1,4)*. Se ha indicado al ordenador que suprima el nombre del punto B en la pantalla (*Botón izquierdo->Muestra rótulo*). Si no se desea que GeoGebra asigne nombre automáticamente a los objetos que se introducen, debe marcarse en *Opciones->Rotulado-> Ningún nuevo objeto.*

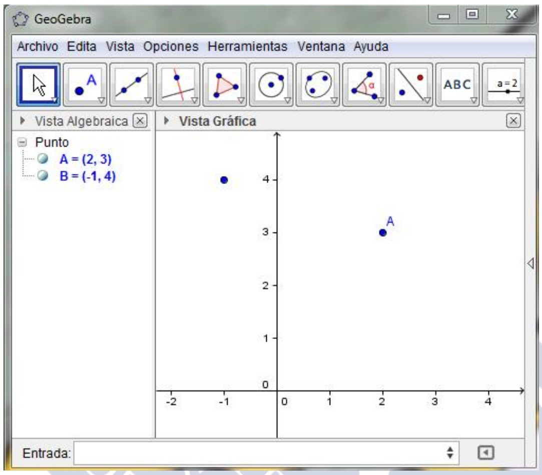
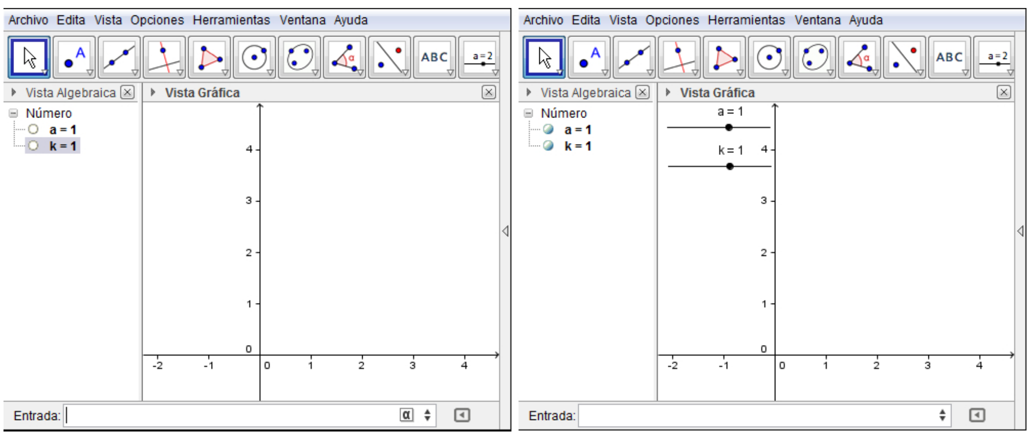


Figura 15. Introducción de puntos del plano en GeoGebra

Los parámetros se introducen asignando un valor concreto a una variable. Escribiendo en la línea de entrada, por ejemplo, *a=1, k=1*, etc. (Figura 16a). Para que el deslizador sea visible en pantalla es necesario mostrar el objeto, pulsando el botón derecho sobre el parámetro ya introducido y escogiendo ñMostrar objetoò o ticando sobre el círculo blanco que aparece a la izquierda del parámetro en la ventana ñVista Algebraicaò. Aparecerá una línea con un punto central (Figura 16b).



Figuras 16a y 16b. Introducción de parámetros en GeoGebra

El punto se puede mover, tanto con el ratón como con las teclas de desplazamiento, con lo que el valor del parámetro cambiará. Se puede indicar que aparezca el nombre del parámetro en la línea seleccionando ñMostrar rótuloò en el menú que se despliega al pulsar el botón derecho sobre el objeto. El paso de cambio con cada pulsación de una tecla de desplazamiento y el intervalo en el que el parámetro puede tomar valores se modifica en el menú ñPropiedades de Objetoò: ticando en el botón derecho sobre el objeto en la ventana ñVista Gráficaò o sobre el parámetro en la ventana de ñVista Algebraicaò, se despliega un menú. En la pestaña ñDeslizadorò podemos modificar el paso de cambio y los valores máximo y mínimo del valor del número (Figura 17).

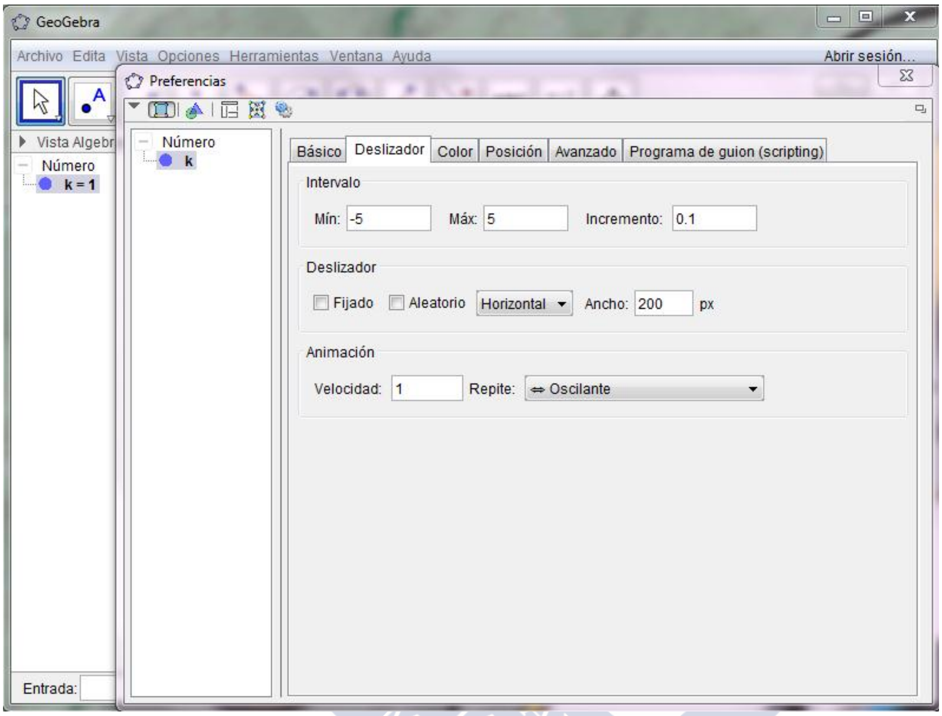
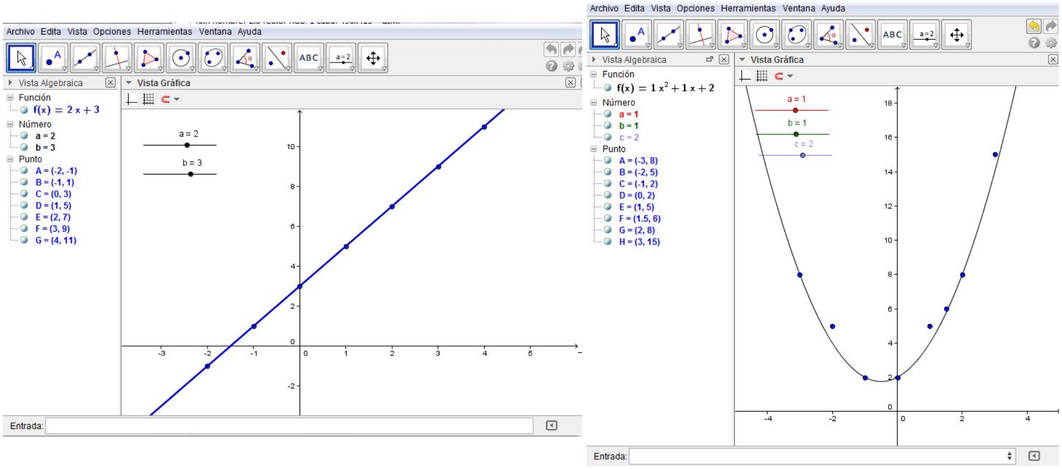


Figura 17. GeoGebra. Propiedades de un deslizador.

b) Obtención de funciones de ajuste de puntos visibles en el plano

Se realizaron dos prácticas de ajuste de datos procedentes de una tabla de datos mediante una función. Cada grupo de trabajo disponía de un ordenador con GeoGebra instalado. Se proyectaron ambas tablas de datos (una a continuación de la otra) usando el proyector de vídeo del aula de informática. Los alumnos debían introducir los pares de puntos, decidir qué función era la adecuada para ajustar los datos, introducir los parámetros necesarios, introducir la función dependiente de dichos parámetros y modificar estos hasta conseguir una función que ajustase los datos. En la primera, el ajuste es pleno, en el sentido de que la gráfica de la función *pasa* por todos los puntos (Figura 18a). En la segunda, no es posible que la gráfica *pase* por todos los puntos (Figura 18b), situación que se corresponde con la que se encontrarán posteriormente en las tres modelizaciones.



Figuras 18a y 18b. Prácticas previas. Generación de funciones de ajuste