Universidade de Santiago de Compostela

Facultad de Matemáticas

Departamento de Matemáticas

Topología General

Curso 2025–2026

Enrique Macías-Virgós

UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Versión: 5/12/2025

ISBN: en trámite na Axencia do ISBN de España

Topología General

Facultad de Matemáticas USC
Notas de Clase

Curso 2025–26

Índice

Presentación (1h exp)

Guía Docente

La guía docente de la asignatura está disponible en la web de la Facultad y en el Campus Virtual de la asignatura. Aquí damos un breve resumen.

Contenido de la asignatura

El objetivo del curso es estudiar los conceptos, métodos y propiedades básicas de los espacios topológicos. También conocer algunos resultados importantes en el ámbito de la Topología.

El programa está dividido en cinco temas (se da la duración aproximada en horas de clase expositiva) para 14 semanas:

1) Espacios topológicos (4-5h exps y 2 labs).

2) Continuidad (3-4h exps y 2h labs).

3) Suma, producto y cociente (8h exps y 4 labs).

4) Separación y numerabilidad (4-5h exps y 2 labs).

5) Compacidad (7-8h exps y 4 labs).

Bibliografía

Tres libros muy recomendables son:

- Masa, X.M. *Topoloxía Xeral*. Manuais Universitarios 1, USC, 1999. Hai unha edición máis recente: *Curso de topoloxía.* USC 2019 (en galego).
- Munkres, J. R. *Topología*. Prentice-Hall. Madrid, 2002 (en castellano).
- Willard, S. *General Topology*. Addison-Wesley. Reading, 1970 (en inglés).

Competencias

Además de poseer conocimientos, los estudiantes deben saber aplicarlos a su trabajo de una forma profesional y poder realizar estudios posteriores con autonomía. Deben ser capaces de resolver problemas, reunir e interpretar datos relevantes, elaborar argumentos y transmitir ideas.

En la carrera se adquieren competencias “generales” (como conocer distintas ramas de las Matemáticas y de su historia o ser capaz de estudiar organizadamente) y competencias “transversales” (utilizar recursos bibliográficos, trabajar en equipo, leer textos en inglés).

También hay unas competencias “específicas” de la carrera (escribir en lenguaje matemático, aprender demostraciones, ser capaz de hacer razonamientos abstractos, hacer modelos teóricos de situaciones reales, usar aplicaciones informáticas).

Actividades a realizar

- En las clases expositivas (28 horas) se exponen los aspectos teóricos y prácticos de la materia, ilustrados con ejemplos.
- Las clases interactivas (14 horas) están dedicadas a la resolución de problemas y ejercicios, propuestos en el Campus Virtual cada semana.
- Las tutorías y la revisión del examen sirven para aclarar dudas de manera personalizada.
- Se espera que cada estudiante dedique a la asignatura 60-70 horas adicionales de trabajo personal .

Evaluación

- La asistencia a las clases expositivas es voluntaria, aunque muy recomendable.
- La asistencia y participación en las clases interactivas se tendrá en cuenta para la evaluación continua. Pueden justificarse las faltas de asistencia.
- La evaluación continua representará el 30 % de la calificación final. Se realizará a lo largo del curso en base a la participación de cada estudiante en clase, la resolución de los problemas propuestos en los diferentes boletines, y dos controles escritos (que tienen un peso de 60 % en la EC).
- El examen final representa un 70 % de la calificación final. Consiste en una prueba escrita con una parte teórica, que incluye definiciones, enunciados y demostraciones, y una parte práctica consistente en la resolución de problemas similares a los resueltos en las clases interactivas.

Las secciones marcadas con asterisco no son materia de examen.

Ejercicios preliminares

1) Considera los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1/n\}, \quad n \geq 1, \qquad L_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > r\}, \quad r > 0.$$

Calcula la unión y la intersección de cada una de las familias $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{L_r : r \in (0,+\infty)\}$.

2) Sea X un conjunto no vacío. Supongamos que $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ son dos familias arbitrarias de subconjuntos de X. Demostrar que

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \cap \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\Big) = \bigcup_{(\lambda,\gamma)\in\Lambda\times\Gamma} (A_\lambda \cap B_\gamma).$$

3) Dados dos conjuntos X e Y, una aplicación entre ellos $f\colon X \to Y$ da lugar a dos aplicaciones

$$f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \quad \text{y} \quad f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$

definidas, respectivamente, como

$$f(A) := \{f(a) : a \in A\} \in \mathcal{P}(Y), \qquad f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \in \mathcal{P}(X),$$

para todo $A \subseteq X$ (es decir, $A \in \mathcal{P}(X)$) y $B \subseteq Y$ (es decir, $B \in \mathcal{P}(Y)$).

a) Demostrar que $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ si $A \subseteq X$. Dar una condición sobre la aplicación $f\colon X \to Y$ que sea equivalente a la igualdad entre ambos conjuntos.

b) Demostrar que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ si $B \subseteq Y$. Dar una condición sobre la aplicación $f\colon X \to Y$ que sea equivalente a la igualdad entre ambos conjuntos.

4) Sea $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ la aplicación definida en el ejercicio anterior. Comprobar que, si $\{U_\theta,\ \theta \in \Theta\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ es una familia de subconjuntos de Y, entonces

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\theta\in\Theta} U_\theta\Big) = \bigcup_{\theta\in\Theta} f^{-1}(U_\theta) \quad \text{y} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\theta\in\Theta} U_\theta\Big) = \bigcap_{\theta\in\Theta} f^{-1}(U_\theta).$$

Y además, $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y, si $U \subseteq Y$,

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U).$$

5) Sea $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ la aplicación definida en el ejercicio 2 anterior. Comprobar que, si $\{V_\theta,\ \theta \in \Theta\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X, entonces

$$f\Big(\bigcup_{\theta\in\Theta} V_\theta\Big) = \bigcup_{\theta\in\Theta} f(V_\theta).$$

Además, buscar X, Y, f y $V, V_1, V_2 \subseteq X$ apropiados para probar que puede suceder que

$$f(V_1 \cap V_2) \neq f(V_1) \cap f(V_2), \qquad f(X) \neq Y, \qquad f(X \setminus V) \neq Y \setminus f(V).$$

6) Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Sobre X definimos una relación binaria $R \subset X \times X$ de la siguiente manera: diremos que dos elementos $x, y \in X$ están relacionados $\big((x, y) \in R\big)$ si

$$x \equiv y \pmod 3.$$

Probar que la relación es de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente X/R? Describe las clases de equivalencia.

7) Sea $\sim$ la relación de equivalencia definida sobre $\mathbb{R}^2$ como

$$(x, y) \sim (x_1, y_1) \iff y = y_1.$$

Demostrar que el conjunto cociente $\mathbb{R}^2/\!\sim$ es biyectivo con $\mathbb{R}$.

8) Sea $\sim$ la relación en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ definida por

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } (x', y', z') = \lambda(x, y, z).$$

a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

b) Describir las clases de equivalencia. ¿Qué forma geométrica tienen en $\mathbb{R}^3$?

c) Probar que cada clase de equivalencia corta la esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en dos puntos antipodales.

Tema 1: Espacios topológicos
(4h exps/2 labs)

Capítulo 1
Espacios topológicos

 Clases expositivas 1 y 4

1.1. Topología usual en $\mathbb{R}^n$

Abiertos En el curso de "Topología de los espacios euclidianos" definíamos un subconjunto *abierto* en $X = \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

Definición 1.1.1. Un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es *abierto en* $\mathbb{R}^n$ si todos sus puntos son interiores, es decir, si para todo $x \in U$ existe algún $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B(x, \varepsilon) \subset U$.

En la Figura 1.1 tenemos ejemplos de: un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, un subconjunto cerrado (su complementario es abierto), un subconjunto que no es ni abierto ni cerrado.

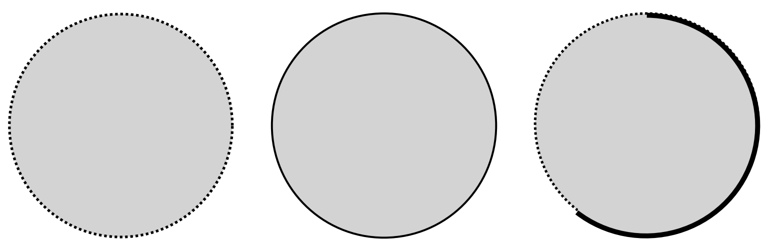


Figura 1.1: En $X = \mathbb{R}^2$, un abierto, un cerrado, un conjunto que no es ni abierto ni cerrado

Se comprueban fácilmente las siguientes propiedades:

1) El conjunto vacío es abierto en $\mathbb{R}^n$.

2) El espacio total $X = \mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

3) La unión arbitraria de abiertos en $\mathbb{R}^n$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$.

4) La intersección *finita* de abiertos en $\mathbb{R}^n$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1.2. No es cierto que la intersección *arbitraria* de abiertos sea abierta. Por ejemplo, en la recta real $\mathbb{R}$, los intervalos $U_m = (-1/m, +1/m)$ son abiertos, pero la intersección $\cap_m U_m = \{0\}$ no lo es.

Distancia En la Definición anterior 1.1.1 usamos la bola abierta

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x, y) < \varepsilon\},$$

donde

$$\mathrm{d}(x, y) = \left((x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right)^{1/2}$$

es la distancia euclidiana usual.

Queremos prescindir de la distancia, porque sabemos que muchas propiedades interesantes como la continuidad, la conexidad o la compacidad pueden expresarse únicamente en términos de conjuntos abiertos, sin usar la distancia.

Topología sin distancias Vamos a ver un ejemplo completamente diferente al espacio euclidiano, que está relacionado con la robótica. Consideramos un conjunto *finito*

$$X = \{x_0, x_1, y_0, y_1, z_0\}$$

en el que introducimos una relación de *orden parcial* dada por:

$$x_0 \leq y_0, \quad y_0 \leq z_0, \quad x_0 \leq y_1, \quad x_1 \leq y_0,$$

que está esquematizada en la Figura 1.2. Es un POSET (*partially ordered set*). Se entiende que hay que añadir las relaciones que la hagan reflexiva, antisimétrica y transitiva (por ejemplo se tiene $x_0 \leq x_0$ y $x_0 \leq z_0$, y no puede ser $z_0 \leq y_0$).

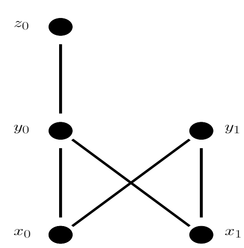


Figura 1.2: Un espacio topológico finito (poset)

Vamos a llamar *abierto en* X a cualquier subconjunto $U \subset X$ que cumpla esta condición:

"si $x \in U$ y tenemos $y \leq x$, entonces $y \in U$".

Es decir, en un abierto U todos los elementos que cuelgan de un $x \in U$ también tienen que estar en U.

Ejercicio 1.1.3. : 1) En el ejemplo anterior, encontrar un subconjunto abierto, uno cerrado, uno que no sea abierto ni cerrado. 2) Comprobar que los "abiertos" cumplen las propiedades de la lista de la página 10.

Félix Hausdorff (1868–1942) Brillante matemático alemán, es considerado uno de los fundadores de la topología moderna por su libro "Fundamentos de la teoría de conjuntos" (1914). Catedrático jubilado en la universidad de Bonn, se suicidó junto con su mujer al saber que los nazis iban a enviarlos a un campo de exterminio por ser judíos.

F. Hausdorff

1.2. Topologías

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto. Una *topología* en X es una colección τ de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:

1) El subconjunto vacío $\emptyset$ está en τ.

2) El espacio total X está en τ.

3) La unión *arbitraria* de elementos de τ está τ.

4) La intersección *finita* de elementos de τ está en τ.

Un espacio topológico (X, τ) es un conjunto en el que se ha definido una topología. A los elementos de la topología los llamaremos *conjuntos abiertos* del espacio topológico.

Nota 1.2.2. Par comprobar el axioma 4) basta hacerlo para $n = 2$ abiertos, y después procedemos por inducción, ya que

$$U_1 \cap \cdots \cap U_n = (U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1}) \cap U_n, \quad n > 2.$$

Ejemplo 1.2.3. En $X = \mathbb{R}^n$ tenemos la *topología usual* τ_{usual} definida en la Definición 1.1.1 del anterior Capítulo.

Ejemplo 1.2.4. En $X = \mathbb{R}$, la topología *cofinita* τ_{cofin} está formada por el conjunto vacío y los subconjuntos $U \subset X$ tales que su complementario $X \setminus U$ es finito.

Ejercicio 1.2.5. : Vamos a comprobar los axiomas de topología, para la topología cofinita en $X = \mathbb{R}$.

1) El vacío está en τ por definición.

2) $X \in \tau$ porque su complementario $X \setminus X = \emptyset$ se considera un conjunto finito (por definición, un conjunto es *infinito* si se puede poner en biyección con alguna parte propia).

3) Si tenemos una familia de abiertos $U_i \in \tau$, $i \in \mathcal{I}$, entonces $U = \cup U_i \in \tau$ porque: o bien todos los $U_i = \emptyset$, con lo que $U = \emptyset \in \tau$; o bien hay algún $U_j \neq \emptyset$. En este caso

se tiene $U \neq \emptyset$, y calculamos su complementario

$$X \setminus U = X - \bigcup_i U_i = \bigcap_i (X \setminus U_i),$$

que es subconjunto del conjunto finito $X \setminus U_j$ y por tanto es finito.

4) Si $U_1, \dots, U_n \in \tau$ y llamamos $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$, entonces o bien es vacío, con lo que está en en τ, o bien $U \neq \emptyset$. En este caso, todos los $U_i \neq \emptyset$. Si calculamos

$$X \setminus U = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i)$$

es finito porque es una unión de un número finito de conjuntos finitos. Por tanto $U \in \tau$.

Ejemplo 1.2.6. En un conjunto X dotado con un orden parcial $\leq$ (*poset*, partially ordered set), podemos definir una *topología del orden* τ. Sus abiertos sonn el vacío y los conjuntos $U \subset X$ que cumplen:

$$x \in U, \quad y \leq x \Rightarrow y \in U.$$

Vimos un caso particular en el Ejemplo 1.1 del anterior Capítulo.

Ejercicio 1.2.7. : Vamos a comprobar los axiomas de topología, para la topología del orden en un poset X.

1) El vacío está en τ.

2) El conjunto total X está en τ trivialmente, ya que todos los elementos de X están en $U = X$.

3) Si tenemos una familia $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ arbitraria de abiertos, vamos a comprobar que $U = \bigcup U_i$ está en τ. Sean $x \in U$, $y \leq x$. Por definición de unión, x está en en algún $U_i \in \tau$. Por tanto $y \in U_i \subset U$ luego $y \in U$.

4) Si tenemos una familia finita $U_1, \dots, U_n$ de abiertos, vamos a comprobar que $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ está en en τ. Sean $x \in U$, $y \leq x$. Como $x \in U_i$ para todos los $i = 1, \dots, n$, tenemos $y \in U_i, \forall i$. Por tanto $y \in U$ (Nótese que no hizo falta que la familia sea finita).

Ejemplo 1.2.8. En $X = \mathbb{R}$ consideramos la *topología de Kolmogorov* formada por el vacío y los conjuntos (a, ∞) donde $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Ejercicio 1.2.9. : Vamos a comprobar los axiomas de topología, para la topología de Kolmogorov en $X = \mathbb{R}$.

SOL: 1) $\emptyset \in \tau$ por definición.

2) $X = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \in \tau$.

3) Si tenemos una familia arbitraria $U_i \in \tau$, $i \in \mathcal{I}$, de abiertos, y tomamos la unión $U = \bigcup_i U_i$; o bien todos los U_i son vacíos, en cuyo caso $U = \emptyset \in \tau$, o bien hay algún $U_i = (a_i, +\infty)$. Entonces podemos tomar el ínfimo de esos a_i,

$$a = \inf\{a_i : U_i \neq \emptyset\}$$

ya que todo conjunto *no vacío* de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tiene ínfimo (que puede ser $-\infty$ si el conjunto no es acotado inferiormente o contiene algún $-\infty$).

Podemos comprobar que $U = (a, +\infty) \in \tau$.

4) Si $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ entonces $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ o bien es vacío (si alguno de los $U_i = \emptyset$), o bien no es vacío, en cuyo caso todos los $U_i = (a_i, \infty)$. Tomemos $a = \max\{a_i\}$ (que puede ser $-\infty$). Podemos comprobar que

$$U = (a, \infty) \in \tau.$$

Definición 1.2.10. Si τ, τ' son dos topologías en el conjunto X, decimos que τ es más fina que τ' si $\tau' \subset \tau$, es decir, si todo abierto de τ' es abierto de τ; en otras palabras, τ tiene *más* abiertos.

En cualquier conjunto tenemos siempre estas dos topologías:

- la topología *discreta* $\tau = \mathcal{P}(X)$, todos los subconjuntos son abiertos.
- la topología *indiscreta* o *trivial*, $\tau = \{\emptyset, X\}$, sólo dos abiertos;

Capítulo 2
Entornos y Bases

2.1. Entornos

Si (X, τ) es un espacio topológico, los elementos $U \in \tau$ de la topología se llaman *conjuntos abiertos en* X.

Definición 2.1.1. Un *entorno abierto* del punto $x \in X$ es cuaquier abierto $U \in \tau$ que lo contenga, $x \in U$.

Ejemplo 2.1.2. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, la bola abierta

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon \mathrm{d}(y, x) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

es un entorno abierto del centro x. También es un entorno abierto de cualquiera de sus puntos.

A veces usaremos entornos que no son abiertos.

Definición 2.1.3. Un *entorno* del punto $x \in X$ es un conjunto N que contiene un entorno abierto de x: es decir, existe $U \in \tau$ tal que

$$x \in U \subset N.$$

Ejemplo 2.1.4. En $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$, la bola cerrada

$$B[(0,0), \varepsilon] = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon \mathrm{d}(y, 0) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

es un entorno del centro $(0,0)$, pero no es un entorno de los puntos del borde, por ejemplo $(0, \varepsilon)$.

El siguiente resultado es un ejercicio útil para practicar.

Proposición 2.1.5. *En un espacio topológico (X, τ), un conjunto $U \subset X$ es abierto en X si y sólo si es un entorno de todos sus puntos.*

Demostración. "$\Rightarrow$:" Sea $U \in \tau$ un abierto no vacío, y sea $x \in U$. Obviamente U es un entorno (abierto) de x.

"$\Leftarrow$:" Supongamos que N es un entorno de todos sus puntos, es decir, para cada $x \in N$ existe un abierto $U_x \in \tau$ tal que

$$x \in U_x \subset N.$$

Entonces es fácil comprobar que $N = \bigcup_{x \in N} U_x$. Como es unión de abiertos, es un abierto. $\square$

2.2. Bases

En la topología usual de $\mathbb{R}^n$, las bolas abiertas son unos abiertos especiales. Vamos a aclarar su papel.

Definición 2.2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección de abiertos $\mathcal{B}$ es una *base de abiertos* de la topología, si cada abierto $U \in \tau$ se puede escribir como unión de abiertos de la colección $\mathcal{B}$.

Normalmente es más fácil comprobar la condición siguiente.

Proposición 2.2.2. *Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos es una base de abiertos de la topología si y sólo si se cumple:*

1) *Cada conjunto $B \in \mathcal{B}$ es un abierto, $B \in \tau$.*

2) *Para cada abierto $U \in \tau$ y cada punto $x \in U$ existe un abierto básico $B \in \mathcal{B}$ tal que*

$$x \in B \subset U.$$

Demostración. La prueba es un ejercicio. Si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de τ y $U \in \tau$, tenemos que

$$U = \bigcup_i B_i, \quad i \in \mathcal{I},$$

es unión de abiertos básicos (por definición de base). Entonces, dado $x \in U$, está en alguno de los B_i, luego

$$x \in B_i \subset U.$$

Recíprocamente, si se cumple la condición del enunciado, para cada $x \in U$ tomamos

$$x \in B_x \subset U, \quad B_x \in \mathcal{B}.$$

Entonces

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x,$$

y es unión de abiertos, por tanto abierto. $\square$

Ejemplo 2.2.3. Las bolas abiertas son una base de abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. En particular, los intervalos abiertos son una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.

Nota 2.2.4. Es posible dar bases que no estén formadas por abiertos, pero para simplificar sólo estudiaremos bases de abiertos. Las llamaremos simplemente *base*.

2.3. Condición para ser base

Es posible dar otras topologías en $\mathbb{R}$, diferentes de la usual. Por ejemplo la discreta, la cofinita, la de Kolmogorov y la trivial. Cada una es interesante porque sirve para determinadas aplicaciones, o para comprobar ciertas propiedades teóricas. Veamos otra más:

Ejemplo 2.3.1. La topología *del límite inferior* o topología *de Sorgenfrey* en $X = \mathbb{R}$ tiene como base los intervalos semi-abiertos $[a, b)$, con $a < b$.

Ejercicio 2.3.2. Probar que todo abierto usual es un abierto de Sorgenfrey.

Este ejemplo nos plantea el problema de si cualquier colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos que nos den puede ser base de *alguna* topología. En este caso la topología tendría que ser la formada por las uniones arbitarias de abiertos básicos, que llamaremos $\tau(\mathcal{B})$.

Proposición 2.3.3. *Una colección de subconjuntos del conjunto X es base de* alguna *topología en X (es decir la colección $\tau(\mathcal{B})$ de uniones verifica los axiomas de topología) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1) X puede escribirse como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

2) si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es base abierta de alguna topología, ésta tiene que ser $\tau(\mathcal{B})$, por definición de base abierta (Definición 2.2.1). Como se cumplen los axiomas de topología, en particular se tiene que:

- $X \in \tau(\mathcal{B})$, lo que nos da la condición 1);
- la intersección de abiertos es abierta; pero dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tenemos que B_1, B_2 son unión de elementos de $\mathcal{B}$, luego $B_1, B_2 \in \tau(\mathcal{B})$, de donde $B_1 \cap B_2 \in \tau(\mathcal{B})$, es decir, $B_1 \cap B_2$ es una unión de elementos de $\mathcal{B}$. Esta condición es equivalente a la condición 2).

Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ cumple 1) y 2) tendremos que $\mathcal{B}$ es base de la topología $\tau(\mathcal{B})$. Veamos que se cumplen los axiomas de topología:

1) $\emptyset \in \tau(\mathcal{B})$ porque se considera que el vacío es la unión de una colección vacía.

2) $X \in \tau(\mathcal{B})$ por la hipótesis 1).

3) La unión de elementos de $\tau(\mathcal{B})$ está en $\tau(\mathcal{B})$, porque es una unión de uniones.

4) Si $U, V \in \tau(\mathcal{B})$, tenemos $U = \bigcup_i B_i$, $B_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in \mathcal{I}$ y $V = \bigcup_j B_j$, $B_j \in \mathcal{B}, \forall j \in \mathcal{J}$. Tenemos

$$U \cap V = (\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i,j} B_i \cap B_j,$$

y llegará con probar que $B_i \cap B_j \in \tau(\mathcal{B})$. Pero la hipótesis 2) es equivalente a decir que $B_i \cap B_j$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$. □

Ejercicio 2.3.4. Los conjuntos de la forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (b - \delta, b + \delta) \subset \mathbb{R}^2$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$, forman una base de alguna topología en $\mathbb{R}^2$. Comprobarlo. >Qué topología es?

2.4. Base local

En vez de generar todos los abiertos de una topología puede interesarnos generar los abiertos que contengan a un punto dado $x \in X$.

Definición 2.4.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{B}_x$ una colección de abiertos. Decimos que $\mathcal{B}_x$ es una *base local* de entornos abiertos del punto x si:

1) Cada $B \in \mathcal{B}_x$ es un entorno abierto de x.

2) Dado cualquier entorno abierto U_x de x, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset U_x$.

Nota 2.4.2. Esta vez, la condición 2) *no* es equivalente a que todo entorno de x sea unión de elementos de $\mathcal{B}_x$. Por ejemplo, en la recta usual, los intervalos $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, son una base local de entornos abiertos de $x = 1$. Pero el abierto $U = (0, 2) \cup (3, 7)$ es entorno abierto de 1 que no se puede escribir como unión de entornos básicos.

Ejemplo 2.4.3. Los intervalos $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, son una base local para $0 \in \mathbb{R}$ con la topología usual.

Ejercicio 2.4.4. Los intervalos $(-1/n, +1/n)$, $\varepsilon > 0$, son una base local para $0 \in \mathbb{R}$ con la topología usual.

Ejemplo 2.4.5. Las bolas abiertas $B(x, 1/n)$ son una base local para el centro x en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.

La relación entre base y base local es la siguiente.

Proposición 2.4.6. *1) Si tenemos bases locales $\mathcal{B}_x$ en cada $x \in X$ entonces*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$$

es una base de abiertos de la topología.

2) Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología, y $x \in X$ es un punto, entonces los abiertos básicos que contienen a x forman una base local, es decir,

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \colon x \in B\}$$

es una base local en x.

Ejercicio 2.4.7. Demostrar la proposición anterior.

El siguiente resultado nos pemite comparar topologías a partir de bases locales.

Proposición 2.4.8. *Sean τ, τ' dos topologías en el mismo conjunto X. Supongamos que para cada punto $x \in X$ conocemos bases locales de entornos abiertos $\mathcal{B}_x$ y $\mathcal{B}'_x$, para τ y τ' respectivamente. Entonces τ es más fina que τ' (es decir, $\tau' \subset \tau$) si y sólo si para cada elemento $B' \in \mathcal{B}'_x$ existe un elemento $B \in \mathcal{B}_x$ tal que*

$$x \in B \subset B'.$$

Nota 2.4.9. La condición significa que todos lo puntos de un abierto básico de τ' son interiores para τ.

Demostración. "$\Rightarrow$": Partimos de que τ es más fina que τ' (tiene más abiertos). Sea $B' \in \mathcal{B}'_x$. Es un abierto de τ', por tanto de τ. Como $x \in B' \in \tau$, existe un abierto básico $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset B'$, que es lo que queríamos demostrar.

"$\Leftarrow$": Sea $U \in \tau'$ un abierto de τ'. Tenemos que demostrar que es abierto de τ. Sea $x \in U$. Por definición de base local, existe $B' \in \mathcal{B}'_x$ tal que $x \in B' \subset U$. Y por hipótesis existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que

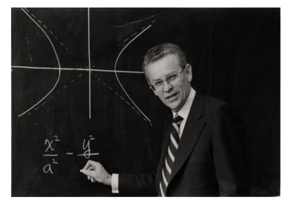
$$x \in B \subset B' \subset U.$$

Por tanto x es un punto τ-interior de U. Como esto es cierto para todos los puntos de U, es un τ-abierto. □

Ejemplo 2.4.10. En la recta real tenemos la topología usual. Una base de entornos de $x \in \mathbb{R}$ son los intervalos $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. También tenemos la topología de Sorgenfrey. Una base local en $x \in \mathbb{R}$ son los intervalos $[x, x + \varepsilon)$. Por el criterio de comparación anterior, $\tau_{\text{usual}} \subset \tau_{\text{Sorgenfrey}}$.

Ejercicio 2.4.11. Como ejercicio, comprueba que todo abierto usual es abierto en Sorgenfrey (basta hacerlo para los intervalos abiertos). El contenido es estricto, ya que hay abiertos de Sorgenfrey que no son abiertos usuales.

Robert H. Sorgenfrey (1915–1996) Fue un topólogo estadounidense, profesor emérito de la Universidad de California en Los Ángeles (UCLA). Estaba muy interesado en la enseñanza. La "recta de Sorgenfrey" $(\mathbb{R}, \tau_{\text{Sorgenfrey}})$ (1947) es un espacio normal X tal que $X \times X$ no es normal.



R.H. Sorgenfrey

Ejercicios 1-1

Topologías

1) Probar que la colección $\tau_K = \{(a,\infty), a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ define una topología sobre $\mathbb{R}$, que denominaremos *topología de Kolmogorov*.

2) Hasta ahora hemos definido cinco topologías sobre la recta real (trivial, discreta, cofinita, Kolmogorov y usual). Todas ellas son subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Dibujar un diagrama que represente las relaciones de contenido entre ellas.

3) En el conjunto $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ de los números naturales consideramos la colección τ formada por todos los subconjuntos de X cuyo complementario es *finito ó numerable*. ¿Es τ una topología sobre X?¿Qué topología es?

4) Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto $U \subseteq X$ se dice abierto si verifica la siguiente condición: si $x \in U$ e $y \leq x$ entonces $y \in U$. Demostrar que los subconjuntos abiertos así definidos forman una topología sobre X.

5) Buscar todas las topologías que se pueden definir sobre el conjunto $X = \{a, b, c\}$. Hacer un gráfico que presente las relaciones de contenido entre ellas.

Bases

6) Probar que la colección $\mathcal{B}$ de bolas abiertas $\{B(q, \frac{1}{n})\}$ con centro racional $q \in \mathbb{Q}$, y radio $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, es una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.

7) Una progresión aritmética sobre $\mathbb{Z}$ es un conjunto

$$A_{a,b} = \{\dots, a-2b, a-b, a, a+b, a+2b, \dots\} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

   a) Probar que si $m \in A_{a,b}$ entonces $A_{m,b} = A_{a,b}$.
   b) Probar que si n es múltiplo de b, entonces $A_{a,n} \subset A_{a,b}$.
   c) Demostrar que la colección de todas las progresiones aritméticas verifica las condiciones para ser base de alguna topología en $\mathbb{Z}$.

8) Recordemos que la colección $\mathcal{B} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} | a < b\}$ es una base de una topología sobre $\mathbb{R}$ que llamamos **topología de Sorgenfrey** y denotamos por τ_S. Comprobar si $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ es un cerrado para dicha topología.

9) Demostrar que $\mathcal{B} = \{[x, y) \colon x, y \in \mathbb{Q}, x < y\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{R}$. Compararla con la topología de Sorgenfrey.

Capítulo 3
Espacios métricos

3.1. Espacios métricos

Un modo muy frecuente de describir la idea de proximidad es por medio de una distancia. Dentro del análisis moderno, apareció la necesidad de generalizar distintos conceptos relativos a $\mathbb{R}^n$ a espacios más generales (como espacios de funciones o incluso conjuntos que no tienen estructura de espacio vectorial). Surgió así la noción de *espacio métrico*, introducida por Fréchet en 1906.

Definición 3.1.1. Sea X un conjunto. Una **distancia** sobre X es una aplicación

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1) $d(x, y) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in X$.

2) $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

3) Dados $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

4) (Desigualdad triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Un **espacio métrico** es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una distancia sobre X.

Vamos con un par de ejemplos.

Ejemplo 3.1.2. Sea X un conjunto no vacío. Definimos la **distancia discreta** en X mediante

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y, \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Ejemplo 3.1.3 (distancias en $\mathbb{R}^n$)**.** Consideramos $X = \mathbb{R}^n$. Las siguientes aplicaciones definen distancias sobre X:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$
$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2},$$
$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|\}_{i=1}^{n}.$$

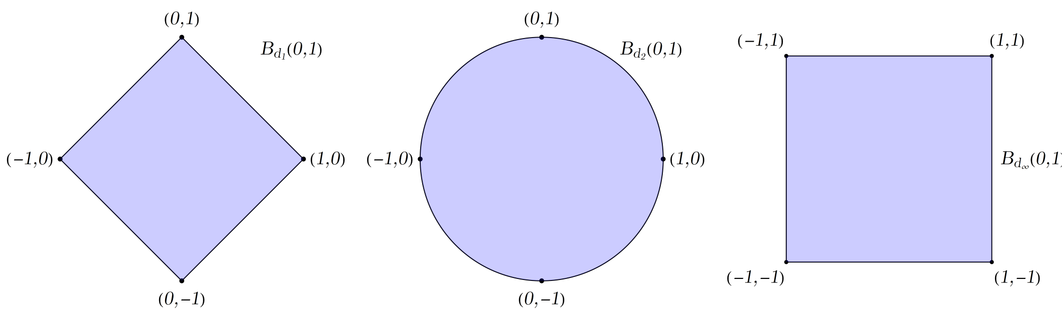


Figura 3.1: La bola unidad en $\mathbb{R}^2$ con las distancias d_1, d_2 y d_∞.

Ejemplo 3.1.4 (distancias en espacios de funciones)**.** Sea $X = C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$. Las siguientes aplicaciones definen distancias sobre X:

$$\rho_\infty(f,g) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|,$$
$$\rho_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

En la materia *Cálculo vectorial e integración de Lebesgue* se verán más ejemplos de métricas en espacios de funciones más sofisticados que $C([a,b])$.

Ejercicio 3.1.5. Intenta probar los axiomas de distancia en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 3.1.6. Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (los reales $\mathbb{R}$ o los complejos $\mathbb{C}$). Una **norma** sobre X es una aplicación $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ verificando que:

1) $||x|| \geq 0$ para todo $x \in X$.

2) $||x|| = 0 \iff x = 0$.

3) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in X$.

4) (Desigualdad triangular) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para todo $x, y \in X$.

Al par $(X, ||\cdot||)$ se le llama **espacio vectorial normado**.

Es fácil comprobar que en un espacio vectorial normado X, la aplicación $d(x, y) = ||x - y||$ define una distancia sobre X (**EJERCICIO**). No obstante, no todas las distancias en un espacio vectorial provienen de una norma.

3.2. Topología asociada a una distancia

Vamos a ver ahora la relación que hay entre distancia y topología por medio del siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Se define la bola abierta de centro $x \in X$ y radio $\varepsilon > 0$ como*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

La familia

$$\mathcal{B} = \{B(x, R) \mid x \in X, R > 0\}$$

*es base de una topología $\mathcal{T}_d$, llamada **topología métrica** inducida por d.*

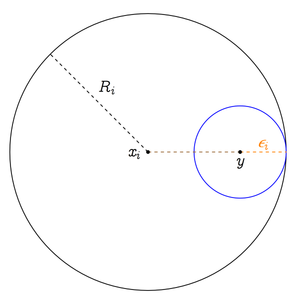


Figura 3.2: Demostración del Teorema 3.2.1

Demostración. En primer lugar, tenemos que $x \in B(x, R)$, de modo que la familia $\mathcal{B}$ cubre todo X.

Por otro lado, sean $B_1 = B(x_1, R_1)$ y $B_2 = B(x_2, R_2)$ dos bolas abiertas y supongamos que $y \in B_1 \cap B_2$. Definimos (ver Figura 3.2) $\varepsilon_i = R_i - d(y, x_i) > 0$, y veamos que $B(y, \varepsilon_i) \subseteq B(x_i, R_i)$. Dado $z \in B(y, \varepsilon_i)$, tenemos que

$$d(z, x_i) \leq d(z, y) + d(y, x_i) < \varepsilon_i + d(y, x_i) = R_i.$$

Por lo tanto, si consideramos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$, tenemos que $y \in B_3 = B(y, \varepsilon) \subseteq B_1 \cap B_2$. $\square$

Por definición de base, $U \subseteq X$ es abierto si y solamente si para todo $x \in U$ existe un $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subseteq U$, lo cual concuerda con la definición de subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ dada en primero.

Tenemos así la siguiente cadena de inclusiones *estrictas*:

$$\{\text{espacios vectoriales normados}\} \subset \{\text{espacios métricos}\} \subset \{\text{espacios topológicos}\}$$

Definición 3.2.2. Decimos que un espacio topológico X es **metrizable** si existe una distancia sobre X tal que la topología inducida por dicha distancia coincide con la topología original de X.

El problema de la *metrizabilidad*, es decir, dar condiciones necesarias y suficientes para que una topología proceda de una distancia, ha sido un tema central en el desarrollo de la topología general, especialmente a principios del siglo XX.

Para terminar, veamos que hay ejemplos donde distancias distintas sobre un conjunto dan lugar a la misma topología.

Ejemplo 3.2.3 (normas en $\mathbb{R}^2$)**.** Vamos a ver que las distancias d_1 y d_2 dan lugar a la misma topología sobre el plano $\mathbb{R}^2$. Para ello, compararemos las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$.

Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Estas normas están dadas por

$$\begin{aligned}||(x,y)||_1 &= |x| + |y| \\ ||(x,y)||_2 &= (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular,

$$||(x,y)||_2 \leq ||(x,0)||_2 + ||(0,y)||_2 = |x| + |y| = ||(x,y)||_1,$$

mientras que en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$||(x,y)||_1 = |x| + |y| = \langle(|x|,|y|),(1,1)\rangle \leq \sqrt{2}||(|x|,|y|)||_2 = \sqrt{2}||(x,y)||_2$$

En consecuencia, se sigue que dados dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$d_2(\vec{u},\vec{v}) \leq d_1(\vec{u},\vec{v}) \leq \sqrt{2}d_2(\vec{u},\vec{v}).$$

Sea $U \in \mathcal{T}_{d_2}$ y $\vec{x} \in U$, entonces existe un $\delta > 0$ para el que $B_{d_2}(\vec{x},\delta) \subseteq U$. Ahora bien, como $d_2 \leq d_1$, tenemos que $B_{d_1}(\vec{x},\delta) \subseteq B_{d_2}(\vec{x},\delta) \subseteq U$. Así, tenemos que $U \in \mathcal{T}_{d_2}$.

Recíprocamente, sea $V \in \mathcal{T}_{d_1}$ y $\vec{x} \in V$, de modo que existe un $\delta > 0$ para el que $B_{d_1}(\vec{x},\delta) \subseteq V$. Se tiene que $B_{d_2}(\vec{x},\delta/\sqrt{2}) \subseteq B_{d_1}(\vec{x},\delta) \subseteq V$, ya que si $d_2(\vec{y},\vec{x}) < \delta/\sqrt{2}$, entonces $d_1(\vec{y},\vec{x}) \leq \sqrt{2}d_2(\vec{x},\vec{y}) < \delta$. Por tanto, $V \in \mathcal{T}_{d_2}$.

Ejercicio 3.2.4. Probar que las métricas d_2 y d_∞ en $\mathbb{R}^2$ inducen la misma topología (la usual).

Capítulo 4
Interior

4.1. Interior de un conjunto

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subconjunto.

Definición 4.1.1. Un *punto interior* de A es un punto $x \in X$ tal que existe un entorno abierto $U_x \in \tau$ de x tal que

$$x \in U_x \subset A.$$

El *interior* de A es el conjunto de todos sus puntos interiores. Lo denotaremos por $\operatorname{Int}(A)$ o por $\overset{\circ}{A}$. Por la definición es obvio que $\operatorname{Int}(A) \subset A$.

Ejemplo 4.1.2. En $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$, el interior de la bola cerrada $B[x, \varepsilon]$ es la bola abierta $B(x, \varepsilon)$.

Ejemplo 4.1.3. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$, el interior del conjunto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1/n, n)$ es $\operatorname{Int}(A) = (0, +\infty) = A$.

Ejemplo 4.1.4. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{cofin}})$, el interior del intervalo $A = (0, 1)$ es $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$. Podemos razonar así: sea $x \in A$, un abierto U_x está contenido en A si y sólo si su complementario $\mathbb{R} \setminus U_x$ (finito) *contiene* a $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, lo que es imposible.

Proposición 4.1.5. *Un conjunto es abierto sii todos sus puntos son interiores.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Si U es abierto, para cada $x \in U$ tomamos $U_x = U$ y tenemos que $x \in U_x = U \subset U$, por tanto todos sus puntos son interiores.

"$\Leftarrow$" Recíprocamente, si para cada $x \in U$ encontramos $x \in U_x \subset U$, se ve fácilmente que $U = \bigcup_{x \in U} U_x$, luego es unión de abiertos, y por tanto es abierto. □

4.2. Propiedades del interior

Proposición 4.2.1 (Propiedades del interior)**.** *Se tiene:*

1) $\operatorname{Int}(\emptyset) = \emptyset$.

2) $\operatorname{Int}(X) = X$.

3) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

4) $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$.

Demostración. 1) Como el vacío no tiene puntos, no hay puntos que satisfagan la condición de punto interior, luego $\mathrm{Int}(\emptyset) = \emptyset$.

2) Todo punto de X es interior, luego $X \subset \mathrm{Int}(X)$, y se da la igualdad.

3a) Si $x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$ hay un entorno $x \in U_x \subset A \cap B$. Por tanto $x \in U_x \subset A$, es decir, $x \in \mathrm{Int}(A)$. Análogamente $x \in \mathrm{Int}(B)$.

3b) Si $x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$, entonces hay entornos $x \in U_x \subset A$ y $x \in V_x \subset B$. La intersección de entornos abiertos es un entorno abierto y tenemos

$$x \in U_x \cap V_x \subset A \cap B,$$

por tanto $x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$.

4) En la definición $x \in U_x \subset A \subset A \cup B$, luego $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$. Análogamente, $\mathrm{Int}\, B \subset \mathrm{Int}(A \cup B)$. De ahí se sigue el resultado. □

Nota 4.2.2. Si en la recta usual tomamos $A = [0, 1]$ y $B = [1, 2]$ tenemos $\mathrm{Int}(A) = (0, 1)$, $\mathrm{Int}\, B = (1, 2)$ e $\mathrm{Int}(A \cup B) = (0, 2)$, por lo que vemos que, en general, el interior de la unión no es la unión de los interiores.

Proposición 4.2.3. *1)* $\mathrm{Int}(A) \subset A$.

2) $\mathrm{Int}(A)$ *siempre es abierto.*

3) $\mathrm{Int}(A)$ *es el mayor abierto contenido en* A.

Demostración. 1) Si $x \in \mathrm{Int}(A)$, existe $x \in U_x \subset A$, en particular $x \in A$.

2) Todos los puntos de $\mathrm{Int}(A)$ son interiores de $\mathrm{Int}(A)$. En efecto, si $x \in \mathrm{Int}(A)$, existe $x \in U_x \subset A$. Pero en realidad $U_x \subset \mathrm{Int}(A)$, ya que si $y \in U_x$ entonces tomando el abierto U_x tenemos $y \in U_x \subset A$, es decir $y \in \mathrm{Int}(A)$. Como se cumple $y \in U_x \subset \mathrm{Int}(A)$, con U_x abierto, el punto y está en el interior de $\mathrm{Int}(A)$.

3) Que es un abierto y que está contenido en A ya lo hemos probado. Supongamos ahora que W es un abierto tal que $W \subset A$ y probemos que $W \subset \mathrm{Int}(A)$. Si $x \in W$, se tiene $x \in W \subset A$, por tanto $x \in \mathrm{Int}(A)$; hemos probado que $W \subset \mathrm{Int}(A)$. □

Proposición 4.2.4. *Un conjunto* $U \subset X$ *es abierto si y sólo si* $U = \mathrm{Int}\, U$.

Demostración. El contenido $\mathrm{Int}\, U \subset U$ siempre se da. Si $U \subset \mathrm{Int}\, U$, todos sus puntos son interiores, luego U es abierto por la Proposición 4.1.5. Rercíprocamente, si U es abierto todos sus puntos son interiores, luego $U \subset \mathrm{Int}\, U$. □

Corolario 4.2.5. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Int}(A)$.

Demostración. $\mathrm{Int}(A)$ es un abierto, y por tanto coincide con su interior. □

Ejercicio 4.2.6.

1) Probar que $\mathrm{Int}(A)$ es la unión de todos los abiertos contenidos en A.

2) Probar que si $A \subset B$ entonces $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$. >Es cierto el recíproco?

4.3. Cálculo del interior usando una base

Proposición 4.3.1. *Supongamos que conocemos una base $\mathcal{B}$ de la topología τ. Entonces basta comprobar la condición de punto interior usando solamente abiertos básicos. Es decir, $x \in \mathrm{Int}(A)$ si y sólo si existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.*

Recordemos que siempre suponemos que nuestra base es una base de abiertos (ver Nota 2.2.4).

Demostración. "$\Rightarrow$" Si $x \in \mathrm{Int}(A)$, existe un abierto $x \in U_x \subset A$. Pero por definición de base, hay un abierto básico $x \in B \subset U_x$. Luego $x \in B \subset A$.

"$\Leftarrow$" Los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, así que tomamos $U_x = B$. □

Ejemplo 4.3.2. En $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey, el interior del intervalo $A = [0,1]$ es $\mathrm{Int}(A) = [0,1)$. En efecto cualquier punto $0 \leq x < 1$ es interior, si tomamos el abierto $U_x = [x, x+\varepsilon)$ con un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño (digamos $0 < \varepsilon \leq 1-x$), para que $[x, x+\varepsilon) \subset [0,1]$.

En cambio el punto $x = 1$ no es interior, ya que cualquier abierto básico $1 \in [a,b)$ tiene puntos mayores que 1, por lo que no está contenido en A.

Nota 4.3.3. Un resultado análogo nos permite calcular el interior usando una base local. Es decir, si conocemos una base local de entornos $\mathcal{B}_x$ en el punto $x \in A \subset X$, se tiene que $x \in \mathrm{Int}(A)$ si y sólo si existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que

$$x \in B \subset A.$$

Capítulo 5
Clausura y frontera

5.1. Clausura de un conjunto

Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subset X$ un subconjunto.

Definición 5.1.1. Un punto $x \in X$ es *adherente* a A si cualquier entorno abierto U_x de x corta a A, es decir, $U_x \cap A \neq \emptyset$.

El conjunto de puntos adherentes se denotará por $\mathrm{Cl}(A)$ o por $\overline{A}$; se llama la *clausura* o *adherencia* del conjunto A. De la definición se sigue que $A \subset \mathrm{Cl}(A)$, pues en el entorno U_x está x.

Ejercicio 5.1.2. Probar que $x \in \mathrm{Cl}(A)$ si y sólo si cualquier *entorno* N de x corta a A, es decir, $N \cap A \neq \emptyset$.

Ejemplo 5.1.3. En la recta usual, los puntos adherentes de $A = (0, 1)$ son todos los de A, y además 0 y 1. Por ejemplo, si tomamos un entorno cualquiera U de 1, contiene un intervalo $B = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, por definición de la topología usual. Entonces B y A se cortan: si $\varepsilon \geq 1$, tomamos por ejemplo el punto $1/2$; si $\varepsilon < 1$, tomamos el punto $1 - \varepsilon/2$. Por tanto $U \cap A \neq \emptyset$, ya que contiene a $B \cap A$.

Ejemplo 5.1.4. En la topología de Sorgenfrey, el punto 1 no es adherente a $A = (0, 1)$ ya que el entorno abierto $[1, 2)$ no lo corta.

Proposición 5.1.5 (Uso de una base). *Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología, se tiene que x es adherente a A si y sólo si todo entorno básico $B_x \in \mathcal{B}$, que contenga a x, corta a A.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Si $x \in \mathrm{Cl}(A)$ y $B_x \in \mathcal{B}$ es un entorno básico, es un entorno abierto, por tanto $B_x \cap A \neq \emptyset$.

"$\Leftarrow$" Sea U_x un entorno abierto; contiene algún entorno básico $x \in B_x \subset U_x$. Como $B_x \cap A \neq \emptyset$ entonces $U_x \cap A \neq \emptyset$, por tanto $x \in \mathrm{Cl}(A)$. □

Para hacer algunas demostraciones y para practicar las definiciones, veamos la relación entre el interior y la clausura de A.

Lema 5.1.6. *Para cualquier $A \subset X$, se tiene*

$$X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(X \setminus A).$$

Nota 5.1.7. Intuitivamente, $\mathrm{Cl}(A)$ contiene los puntos de A y los puntos *próximos* a A. El interior son los que están *completamente dentro* de A (es decir, los que no están en el *borde*). Por tanto los que no están en la clausura son los que están completamente dentro del complementario.

Demostración. "$\Rightarrow$" Si $x \in X \setminus \mathrm{Cl}(A)$ entonces $x \notin \mathrm{Cl}(A)$. Por tanto hay un entorno U_x de x que no corta a A, $U_x \cap A = \emptyset$, que es lo mismo que decir $U_x \subset X \setminus A$. Es decir, x es un punto interior de $X \setminus A$.

"$\Leftarrow$" El recíproco es análogo. Si hay un entorno U_x contenido en $X \setminus A$ entonces U_x no corta a A. □

Ahora podemos estudiar las propiedades de la clausura. Son diferentes a las del interior.

Proposición 5.1.8 (Axiomas de Kuratowski)**.** *Se tiene*

1) $\mathrm{Cl}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{Cl}(X) = X$.

2) $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$.

3) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$.

4) $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subset \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$.

Demostración. Aunque pueden demostrarse a partir de la definición de punto adherente, lo más cómodo es usar el Lema 5.1.6 y las propiedades que ya conocemos del interior. Por ejemplo:

1)
$$X \setminus \mathrm{Cl}(\emptyset) = \mathrm{Int}(X \setminus \emptyset) = \mathrm{Int}(X) = X,$$
por tanto $\mathrm{Cl}(\emptyset) = \emptyset$.

3)
$$\begin{aligned} X \setminus \mathrm{Cl}(A \cup B) &= \mathrm{Int}(X \setminus (A \cup B)) = \mathrm{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= \mathrm{Int}(X \setminus A) \cap \mathrm{Int}(X \setminus B) = (X \setminus \mathrm{Cl}(A)) \cap (X \setminus \mathrm{Cl}(B)) \\ &= X \setminus (\mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)), \end{aligned}$$
por tanto $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$.

Las que faltan son análogas y quedan como ejercicio. □

Nota 5.1.9. Los axiomas anteriores ("axiomas de Kuratowski") son equivalentes a definir una topología. En concreto, si tenemos un conjunto X y una aplicación $\mathrm{Cl}\colon \mathrm{Partes}(X) \to \mathrm{Partes}(X)$ con esas propiedades, llamamos *cerrado* a los conjuntos

$F \subset X$ que cumplan $\mathrm{Cl}(F) = F$, y llamamos *abierto* a los conjuntos cuyo complementario es cerrado. Entonces esos abiertos cumplen los axiomas de topología, y el operador Cl dado corresponde a la clausura. Puedes intentar demostrarlo, aunque la demostración no es sencilla.

5.2. Conjuntos cerrados

Definición 5.2.1. Un conjunto $F \subset X$ se dice *cerrado* si su complementario $X \setminus F$ es abierto.

Los cerrados tienen propiedades que se demuestran a partir de las propiedades de los abiertos, usando las leyes de De Morgan. Pero son diferentes.

Proposición 5.2.2. *1) $\emptyset, X$ son cerrados.*

2) La unión finita *de cerrados es un cerrado.*

3) La intersección arbitraria *de cerrados es un cerrado.*

Demostración. Vamos a probar sólo 1) y 2), queda el 3) como ejercicio.

1) El vacío es cerrado porque su complementario $X \setminus \emptyset = X$ es abierto. El conjunto total X es cerrado porque su complementario $X \setminus X = \emptyset$ es abierto.

2) Basta probarlo para dos cerrados F, G. Como $X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$ es la intersección de dos abiertos, o sea abierto, se sigue que $F \cup G$ es cerrado. □

Proposición 5.2.3. *Un conjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $\mathrm{Cl}(F) = F$.*

Demostración. Usaremos el Lema 5.1.6. Si F es cerrado, entonces $X \setminus F$ es abierto, es decir, es igual a su interior,

$$\mathrm{Int}(X \setminus F) = X \setminus F.$$

Por tanto $X \setminus \mathrm{Cl}(F) = \mathrm{Int}(X \setminus F) = X \setminus F$, con lo que $\mathrm{Cl}(F) = F$. El recíproco se prueba de la misma forma. □

Vamos a dar una caracterización de la clausura.

Proposición 5.2.4. *1) $A \subset \mathrm{Cl}(A)$.*

2) $\mathrm{Cl}(A)$ es un cerrado.

3) La clausura $\mathrm{Cl}(A)$ es el menor cerrado que contiene a A.

Demostración. Lo probaremos usando la caracterización del interior que dimos en la Prop. 4.2.3 y el Lema 5.1.6.

1) Como $\mathrm{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus A$ se tiene $X \setminus \mathrm{Cl}(A) \subset X \setminus A$, que es lo enunciado.

2) Como se tiene $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(A)$ (Prop. **??**), tenemos que $F = \mathrm{Cl}(A)$ es cerrado, por la Prop. 5.2.3.

3) Si F es un cerrado que contiene a A, entonces $X \setminus F$ es un abierto contenido en $X \setminus A$. Por tanto $X \setminus F \subset \mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl}(A)$ porque el interior es el mayor abierto contenido en el conjunto $X \setminus A$. Por tanto $\mathrm{Cl}(A) \subset F$. □

Ejercicio 5.2.5. Probar la Proposición anterior usando la definición de clausura.

Ejemplo 5.2.6. En $\mathbb{R}$ usual, la clausura del conjunto $A = \{1/n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ es $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \{0\}$. En efecto, cualquier entorno $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, contiene elementos del conjunto, sin más que tomar $n > 1/\varepsilon$. Por otra parte, si $x \notin A$ y $x \neq 0$, podemos ir encontrando entornos de x que no cortan a A. Por ejemplo, si $x < 0$ podemos tomar $\varepsilon = |x|/2$. Si $x > 1$ tomamos $\varepsilon = (1-x)/2$. En los demás casos, como hay un n tal que $1/(n+1) < x < 1/n$, podemos tomar como ε la mitad de la distancia a esos dos puntos.

Ejercicio 5.2.7. Calcular la clausura del conjunto

$$A = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \in \mathbb{Q}\}$$

en $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual.

Kazimierz Kuratowski (1896–1989) Fue un matemático polaco, profesor de la Universidad de Varsovia. En su tesis doctoral (1921) desarrolló la construcción de una topología a partir de los axiomas de clausura. Trabajó con Banach en teoría de la medida y con Tarski en Lógica. Fué vice-presidente de la Unión Matemática Internacional (IMU).

K. Kuratowski

5.3. Frontera

En un espacio topológico (X, τ), se define la **frontera** de $A \subset X$ como el conjunto $\mathrm{Fr}(A)$ de los puntos $x \in X$ tales que toda entorno abierto U_x corta a A y a su complementario.

Por tanto son los puntos de la adherencia que *no* son interiores:

$$\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \quad \text{unión disjunta.}$$

Proposición 5.3.1. *1) La frontera* $\mathrm{Fr}(A)$ *es un conjunto cerrado.*

2) $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$*.*

Demostración. Como $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$, la frontera es la intersección de dos cerrados, por tanto cerrada.

Directamente por la definición, ya que el complementario de $X \setminus A$ es A. □

Ejemplo 5.3.2. En $\mathbb{R}^n$, la frontera de la bola abierta $B(O, R)$ es la esfera de centro O y radio $R > 0$, es decir

$$S(O, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R\}.$$

Ejemplo 5.3.3. En la recta de Sorgenfrey, la frontera del intervalo $A = (0, 1)$(que es un abierto) es el intervalo semiabierto $\mathrm{Fr}(A) = [0, 1)$.

Ejemplo 5.3.4. Los *lagos de Wada* son una construcción formada por tres abiertos conexos disjuntos del plano con una frontera común a los tres.

`https://es.wikipedia.org/wiki/Lagos_de_Wada`

.

Ejercicios 1.2

Espacios métricos

1) Probar que la aplicación $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = (x - y)^2$ *no* es una distancia.

2) Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos una nueva métrica D sobre X como $D(x, y) = 2d(x, y)$, $\forall x, y \in X$. Demostrar que D es una métrica. Demostrar que las topologías asociadas a las métricas d y D sobre X son la misma.

3) Si $x, y \in \mathbb{R}^2$, definınimos la distancia "volar pasando por la capital" como

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

donde $|x|$ representa la norma usual de $\mathbb{R}^2$.

a) Probar que d es una métrica en $\mathbb{R}^2$.

b) Dibujar la bola abierta $B_d((0, 1), 1)$ y la bola cerrada $B_d[(1, 0), 2]$.

Interior y Clasura

4) Sea (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ dos subconjuntos de X. Demostrar, a partir de la definición de clausura, que:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

c) Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

5) En la topología de Sorgenfrey de la recta $\mathbb{R}$, calcular el interior y la clausura del conjunto

$$A = \{1/n\colon n \in \mathbb{N}\}.$$

6) En la topología cofinita de la recta $\mathbb{R}$, calcular el interior y la adherencia del conjunto

$$A = \{n\colon n \in \mathbb{N}\}.$$

7) En la topología usual de $\mathbb{R}^2$, calcular el interior y la adherencia del conjunto

$$A = \{(x, x+q) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}\}.$$

8) Probar que $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado a la vez.

Tema 2: Continuidad
(3h exps 2 labs)

Capítulo 7
Aplicaciones continuas

7.1. Continuidad de una aplicación

Buscamos dar una noción de continuidad (puntual y global) para aplicaciones entre espacios topológicos. En la mayoría de referencias, se suele dar directamente la definición de continuidad, pero preferimos buscar alguna intuición detrás de qué queremos que sea una función continua para que la definición sea más satisfactoria. Para ello, vamos a reexplorar la definición $\varepsilon - \delta$ del análisis, y veamos si es posible extrapolarla a nuestro contexto general.

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto. Recordemos que f se dice continua en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0\colon ||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Aquí, estamos utilizando la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ (aunque tal vez sea sabido de la asignatura *Diferenciación de funciones de varias variables reales* que podemos imponer cualquier norma tanto en $\mathbb{R}^n$ como en $\mathbb{R}^m$, siendo la definición resultante equivalente a la nuestra).

Si esta definición nos parece convincente, entonces podemos aventurarnos a formular la siguiente definición de continuidad para aplicaciones entre espacios métricos.

Definición 7.1.1. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una aplicación. Decimos que f es *continua* en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0\colon d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{7.2}$$

Diremos que f es *continua* si es continua en x para todo $x \in X$.

Si bien el salto conceptual de espacios euclídeos a espacios métricos es grande, parece que la definición de continuidad permanece relativamente inalterada con respecto a nuestra idea inicial. No obstante, si queremos ser capaces de pasar a espacios topológicos, la condición (7.2) presenta el problema de que involucra distancias tanto en X como en Y, así que necesitamos readaptarla de alguna manera para que la distancia no aparezca de modo explícito en ella.

Primero, haremos un pequeño cambio a la condición (7.2) cuya utilidad será más

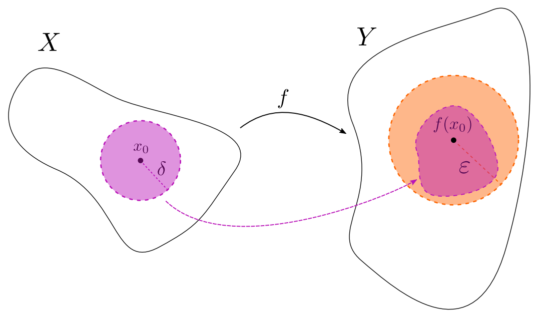


Figura 7.1: Continuidad en espacios métricos

bien psicológica. Es un ejercicio muy sencillo probar que esta es equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \colon f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon). \tag{7.3}$$

Ahora la condición está escrita en términos de entornos básicos de x_0 y $f(x_0)$.

Cabría esperar entonces que la condición (7.3) tenga un homólogo reemplazando los entornos básicos por entornos arbitrarios.

Proposición 7.1.2. *Sea $f \colon X \to Y$ una aplicación entre espacios métricos y $x_0 \in X$. Entonces f es continua en x_0 si y solamente si para todo entorno abierto $V \subseteq Y$ de $f(x_0)$ existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x_0 tal que $f(U) \subseteq V$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en x_0, y sea V un entorno abierto de $f(x_0)$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ para el cual $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. Puesto que f es continua en x_0, existe un $\delta > 0$ para el que $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$, con lo que $U = B(x_0, \delta)$ es el entorno deseado.
($\Leftarrow$) Supongamos que se cumple la condición del enunciado, y sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $V = B(f(x_0), \varepsilon)$ es un entorno abierto de $f(x_0)$ en Y, existe un entorno abierto $U \subseteq X$ de x_0 para el cual $f(U) \subseteq V$. Ahora bien, U es abierto, de modo que existe un $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq U$, con lo que $f(B(x_0, \delta)) \subseteq f(U) \subseteq V$. □

En vista de esta caracterización, por fin podemos dar una definición de continuidad válida para espacios topológicos generales.

Definición 7.1.3. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f \colon X \to Y$ una aplicación y $x_0 \in X$. Diremos que f es *continua en* x_0 si para todo entorno abierto V de $f(x_0)$ existe un entorno abierto U de x_0 tal que $f(U) \subseteq V$. Es decir,

$$\forall V \in \tau_Y \mid f(x_0) \in V, \ \exists U \in \tau_X \mid x_0 \in U, f(U) \subseteq V. \tag{7.4}$$

Definición 7.1.4. La aplicación f es *continua en* X (o simplemente, *continua*) si es continua en todos los puntos de X.

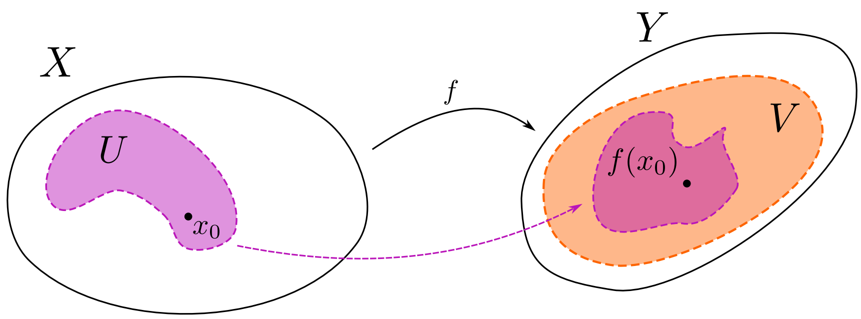


Figura 7.2: Continuidad en espacios topológicos

Nota 7.1.5. La definición de continuidad es dependiente de la topología de X y de la de Y.

Ejemplo 7.1.6 (Aplicaciones constantes)**.** Dados dos espacios topológicos X e Y, e $y_0 \in Y$, la aplicación constante $c_{y_0} \colon X \longrightarrow Y$ dada por $c_{y_0}(x) = y_0$ es continua.

Ejemplo 7.1.7 (La aplicación identidad)**.** Dado un espacio topológico X, la aplicación identidad $\mathrm{id}_X \colon X \longrightarrow X$ es continua.

Teorema 7.1.8. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f \colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Entonces f es continua si, y solamente si, la imagen recíproca $f^{-1}(V)$ de cualquier abierto V en Y es un abierto en X:*

$$\forall U \in \tau_Y, \quad f^{-1}(U) \in \tau_X. \tag{7.5}$$

Nota 7.1.9. La mayoría de referencias de topología general utilizan la condición (7.5) como la definición de continuidad.

Demostración. ($\Rightarrow$) En primer lugar, supongamos que f es continua, y sea $U \subseteq Y$ un abierto arbitrario. Veremos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X probando que todos sus puntos son interiores.

Tomado $x_0 \in f^{-1}(U)$, tenemos que $f(x_0) \in U$, de modo que U es un entorno abierto de $f(x_0)$. Ya que f es continua en x_0, existe un entorno abierto V de x_0 tal que $f(V) \subseteq U$. Esto implica que $V \subseteq f^{-1}(U)$, de modo que x_0 es un punto interior de $f^{-1}(U)$. Así, tenemos probado que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.
($\Leftarrow$) Ahora, supongamos que f satisface (7.5) y probemos que f es continua en todos sus puntos.

Dado un punto $x_0 \in X$ y un entorno abierto V de $f(x_0)$, tenemos por (7.5) que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X. Por consiguiente, $U = f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de x_0 verificando que $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Concluimos que f es continua en x_0 (y por tanto, continua en todo X). $\square$

Ejercicio 7.1.10. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Demostrar que f es continua si y solamente si la imagen recíproca de cualquier cerrado de Y es un cerrado de X.

Acabamos esta sección con una última caracterización de la continuidad, que afirma que las aplicaciones continuas no "despegan" puntos.

Proposición 7.1.11. *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Entonces f es continua si y solamente si*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}, \quad \forall A \subseteq X. \tag{7.6}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Pongamos que f es continua, y sea $x \in \overline{A}$. Dado un entorno abierto U de $f(x)$, sabemos que $f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de x. En particular, como $x \in \overline{A}$, $f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$, por lo que podemos tomar un punto $a \in f^{-1}(U) \cap A$. Así, $f(a) \in U \cap f(A)$, lo que prueba que $U \cap f(A) \neq \emptyset$. Deducimos de aquí que $f(x) \in \overline{f(A)}$.
($\Leftarrow$) Supongamos que se cumple (7.6). Probaremos que la imagen recíproca de cualquier cerrado es cerrada, lo cual es equivalente a que f sea continua.

Sea $F \subseteq Y$ un cerrado de Y. Tomado $A = f^{-1}(F) \subseteq X$, tenemos por (7.6) que $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F$, de modo que $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$. Como la inclusión inversa se tiene siempre, deducimos que $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$, con lo que $f^{-1}(F)$ es cerrado en X. □

7.2. Topología relativa

La topología relativa permite dar una topología a cualquier subconjunto de un espacio topológico.

Definición 7.2.1. Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subconjunto. Llamamos *topología relativa* o *topología de subespacio* de A a la topología

$$\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau_X\}. \tag{7.7}$$

Si A es un subconjunto de X dotado de la topología relativa, decimos que A es un *subespacio* de X.

Ejemplo 7.2.2. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $A = [0, 1]$. El intervalo semi-abierto $[0, 1)$ no es abierto en $\mathbb{R}$, pero es abierto en A, pues es la intersección de A con el abierto $(-1/2, +1) \subset \mathbb{R}$.

Lema 7.2.3. *Sea A un subespacio de un espacio topológico X.*

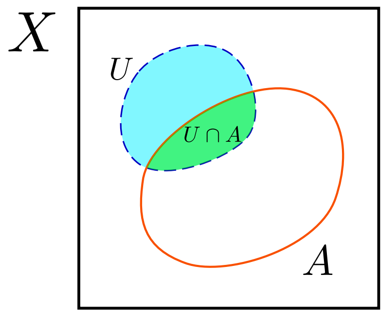


Figura 7.3: Abiertos de la topología relativa.

1) *Un subconjunto $B \subset A$ es cerrado en A si y sólo si es la intersección de un cerrado de X con A.*

2) *Si $B \subset A$ es cerrado en A y A es cerrado en X entonces B es cerrado en X.*

Demostración. 1) Si B es cerrado en A entonces su complementario $A \setminus B$ es abierto en A, es decir $A \setminus B = U \cap A$ es la intersección de un abierto U de X con A. Entonces se tiene que

$$B = A \setminus (U \cap A) = (X \setminus U) \cap A$$

es la intersección del cerrado $X \setminus U$ con A.

El recíproco es análogo.

2) Si $B = F \cap A$ es la intersección de un cerrado F de X con A, y A es cerrado, entonces B es la intersección de dos cerrados, por tanto es cerrado en X. □

7.3. Composición y restricción de aplicaciones continuas

Presentamos por medio de la siguiente proposición el comportamiento de las aplicaciones continuas con respecto a la composición y la restricción de dominio y/o codominio.

Lema 7.3.1. *Si A es un subespacio de X entonces la inclusión $i_A \colon A \hookrightarrow X$ es una aplicación continua.*

Demostración. Basta observar que para cualquier abierto $V \subset X$ se tiene

$$i_A^{-1}(V) = V \cap A. \quad \square$$

Proposición 7.3.2. *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

1) *Sean $f \colon X \to Y$ y $g \colon Y \to Z$ aplicaciones entre espacios topológicos. Si f y g son continuas, entonces la composición $g \circ f \colon X \to Z$ es continua.*

2) Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua y $A \subseteq X$ un subespacio de X. Entonces la restricción $f|_A\colon A \to Y$ es continua.

Demostración. 1) Sea $W \subseteq Z$ un abierto de Z. Entonces sabemos que $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Como g es continua, tenemos que $g^{-1}(W)$ es abierto en Y, y como f es continua, se sigue que $f^{-1}(g^{-1}(W))$ es abierto en X. Concluimos así que $g \circ f$ es continua.

2) Basta observar que $f|_A = f \circ i_A$ es continua como composición de aplicaciones continuas, donde $i_A\colon A \hookrightarrow X$ es la inclusión.

□

Capítulo 8
Continuidad (cont.)

8.1. El codominio no es esencial

El siguiente teorema es importante, porque significa que el codominio de una aplicación puede cambiarse sin afectar a la continuidad, mientras la aplicación siga estando bien definida. (En la asignatura *Variedades diferenciables* puede verse que el resultado no es cierto cuando hablamos de aplicaciones diferenciables).

Proposición 8.1.1. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $B \subset Y$ un subespacio. Si $f \colon X \to Y$ es una aplicación y $f(X) \subset B$, entonces f es continua si y sólo si la aplicación $f \colon X \to B$ es continua.*

"Subespacio" significa subconjunto con la topología relativa.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Y \\
& B \arrow[u, hook, "i_B"']
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Vamos a llamar f' a la aplicación $x \in X \mapsto f(x) \in B$. es decir, es f pero con el codominio cambiado. Si W es un abierto en B tenemos que probar que $(f')^{-1}(W)$ es un abierto en X. Como $W = U \cap B$ es la intesección de un abierto de Y con B, tenemos

$$(f')^{-1}(W) = f^{-1}(W) = f^{-1}(U \cap B) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(U) \cap X = f^{-1}(U),$$

donde hemos usado que $f^{-1}(B) = X$ porque $f(X) \subset B$. Pero $f^{-1}(U)$ es un abierto en X porque f es continua.

El recíproco también es cierto; en efecto, si $f \colon X \to B$ es continua y $B \subset Y$, entonces $f \colon X \to Y$ es continua, pues es la composición de f y la inclusión $i_B \colon B \subset Y$ (Prop. 7.3.2). □

El razonamiento del siguiente Ejercicio se usará en muchos problemas.

Ejercicio 8.1.2. Probar que la aplicación $f \colon S^1 \subset \mathbb{R}^2 \to [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$ es continua.

SOL: Consideramos $X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología relativa de la usual de $\mathbb{R}^2$, y $B = [-1, 1]$ con la topología relativa de la usual de $Y = \mathbb{R}$.

En primer lugar, la aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$, es continua, pues es la proyección (cuando se trate de $\mathbb{R}^n$ o de un abierto de $\mathbb{R}^n$ y funciones dadas por funciones elementales en su dominio usual, podemos dar la continuidad por supuesta, como demostrada en *Análisis*).

Por la Prop. 7.3.2, la restricción $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ es continua.

Ahora observamos que $x^2 + y^2 = 1$ implica $x^2 \leq 1$, luego $|x| \leq 1$. Es decir, la aplicación $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ tiene su imagen contenida en $B = [-1, +1]$.

Por la Prop. 8.1.1, $f\colon S^1 \to [-1, +1]$ es continua.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \\
S^1 \arrow[u, hook] \arrow[r] & {[-1,+1]} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 8.1.3. Probar que la aplicación $f\colon [0, 1] \to S^1$ dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es continua.

8.2. Función combinada

En *Análisis* definíamos funciones a trozos y estudiábamos su continuidad.

Ejemplo 8.2.1. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

es continua. Para verlo, basta ver que es continua en cada trozo $F_1 = (-\infty, 0]$ y $F_2 = [0, +\infty)$, y que las fórmulas f_1 y f_2 coinciden en la intersección $F_1 \cap F_2$.

Definición 8.2.2. Sea $X = F_1 \cup F_2$ la unión de dos conjuntos, y sean aplicaciones $f\colon F_1 \to Y$, $f_2\colon F_2 \to Y$. Decimos que f_1 y f_2 se pueden *combinar* en una aplicación $f\colon X \to Y$, si existe una aplicación bien definida f tal que sus restricciones son $f_{|F_1} = f_1$ y $f_{|F_2} = f_2$.
Esto es equivalente a que f_1 y f_2 coincidan en $F_1 \cap F_2$, pues definimos

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in F_1, \\ f_2(x) & \text{si } x \in F_2. \end{cases}$$

Proposición 8.2.3. *Sea X un espacio topológico. Si $X = F_1 \cup F_2$ es unión de dos* cerrados, *y $f\colon X \longrightarrow Y$ es la aplicación combinada de dos aplicaciones* continuas $f_1\colon F_1 \longrightarrow Y$, *$f_2\colon F_2 \to Y$. Entonces la función combinada f es continua.*

Demostración. Sea G un cerrado en Y. Tenemos que probar que $f^{-1}(G)$ es cerrado en X. Pero

$$\begin{aligned} f^{-1}(G) =& f^{-1}(G) \cap X = f^{-1}(G) \cap (F_1 \cup F_2) \\ =& (f^{-1}(G) \cap F_1) \cup (f^{-1}(G) \cap F_2) \\ =& f_1^{-1}(G) \cup f_2^{-1}(G). \end{aligned}$$

Como f_1 es continua, tenemos que $f_1^{-1}(G)$ es cerrado en F_1, que es cerrado en X. Por tanto $f_1^{-1}(G)$ es cerrado en X (por la Prop. 7.2.3). Análogamente, $f_2^{-1}(G)$ es cerrado en X, y por tanto $f^{-1}(G)$ es la unión de dos cerrados y por tanto cerrado. □

Una demostración completamente análoga sirve para el caso (menos frecuente) de una función combinada de dos funciones continuas definidas en abiertos.

Proposición 8.2.4. *Sea X un espacio topológico. Si $X = U_1 \cup U_2$ es unión de dos* abiertos, *y $f\colon X \longrightarrow Y$ es la aplicación combinada de dos aplicaciones* continuas $f_1\colon U_1 \longrightarrow Y$, *$f_2\colon U_2 \to Y$ (es decir, $f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in U_1 \cap U_2$)).*

Entonces la función combinada f es continua.

Nota 8.2.5. En muchas situaciones la función dada será función combinada en varios trozos, algunos de los cuales no será abierto. Veremos ahora como resolver este asunto.

Proposición 8.2.6. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos y sea $U \subset X$ un abierto en X (con la topología relativa).*

Si la restricción $f_{|U}\colon U \longrightarrow X$ es continua, entonces f es continua en U (es decir, en todos los puntos de U).

Demostración. Sea $x \in U$ y nos dan un abierto de Y, $f(x) \in V \subset Y$. Entonces

$$W = f_{|U}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U$$

es un abierto en U, por la continuidad de $f_{|U}$. Claramente $x \in W$. Además, $W = U \cap W'$ para algún abierto W' en X implica que W es abierto en X, por ser U abierto en X. Finalmente se tiene $f(W) \subset V$. □

Nota 8.2.7. El resultado no es cierto si U no es abierto. Por ejemplo la aplicación $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso *no* es continua en $F = [0, 1]$, por culpa de los puntos frontera $0, 1$, aunque la restricción $f_{|F}\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua (es constante).

Ejemplo 8.2.8. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} (t, t^2) & \text{si } t < 0, \\ (t^2, t) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Hay dos abiertos $U = (-\infty, 0)$ y $V = (0, +\infty)$ para los que la restricción de f es continua, pues aparecen funciones elementales en las coordenadas. Por tanto f es continua en todos los puntos de U y de V (los puntos son interiores y no les afecta el comportamiento de la función fuera de $U \cup V$). Sin embargo, la continuidad en $t = 0$ habrá que comprobarla de otra manera, quizás por continuidad secuencial o a partir de la definición. Es decir, el razonamiento de la restricción no vale para $[0, +\infty)$, pues tiene un punto frontera.

Ejercicio 8.2.9. En el ejemplo anterior probar que la función es continua en $t = 0$.

SOL: Supongamos $|f(t) - 0| < \varepsilon$, es decir $|t^2 + t^4| < \varepsilon$. Debemos usar $|t - 0| < \delta$, es decir $|t| < \delta$. Como $\delta > 0$ es pequeño, podemos suponer que $\delta < 1$, en ese caso $t^4 < t^2 < t$ y $0 < t^2 + t^4 < t + t = 2t < 2\delta$. Por tanto basta tomar $\delta < \min\{1, \varepsilon/2\}$.

Capítulo 9
Homeomorfismos

Ya hemos dicho que la Topología estudia propiedades que quedan invariantes por deformaciones muy generales, como por ejemplo convertir una circunferencia en una elipse o deformar una línea recta en una espiral. No se conservan ni las medidas, ni los ángulos, ni la "forma". En estas transformaciones no permitimos que puntos próximos se separen (continuidad) pero tampoco dejaremos que puntos separados se peguen; así, no valdría cortar una circunferencia para formar un intervalo, pero tampoco permitimos unir los dos extremos de un intervalo para formar una circunferencia. Además, las transformaciones tienen que ser reversibles.

9.1. Homeomorfismos

Definición 9.1.1. Un *homeomorfismo* entre dos espacios topológicos es una aplicación $f: X \to Y$ que cumple

1) f es continua;
2) f es biyectiva, o lo que es lo mismo, tiene una aplicación inversa $f^{-1}: Y \to X$;
3) la inversa f^{-1} también es continua.

Si hay un homeomorfismo entre los espacios X e Y denotamos $X \cong Y$ y decimos que son *homeomorfos*. Eso quiere decir que son indistinguibles desde el punto de vista de la Topología.

Ejemplo 9.1.2. La recta real $X = \mathbb{R}$ y el intervalo abierto $Y = (-1, +1)$ son homeomorfos.

Tenemos la aplicación $f: X \to Y$ (ver Figura 9.1) dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Es continua. Se comprueba fácilmente que es biyectiva; de hecho su aplicación inversa $f^{-1}: Y \to X$ está dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|},$$

que también es continua.

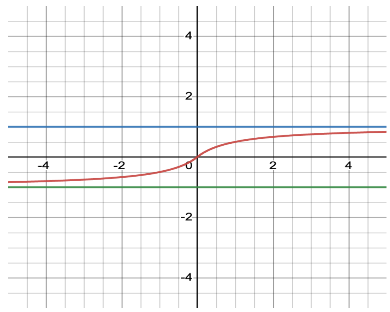


Figura 9.1: $\mathbb{R} \cong (-1, +1)$

Ejemplo 9.1.3. La circunferencia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ es homeomorfa a la elipse de semiejes $a, b > 0$ dada por

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\},$$

ambas con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$.

Se tiene el homeomorfismo $f \colon S^1 \longrightarrow E$ dado por $f(x, y) = (ax, by)$. La aplicación inversa es $f^{-1}(X, Y) = (X/a, Y/b)$. La continuidad de ambas aplicaciones se prueba usando los teoremas de restricción y cambio de codominio.

Una propiedad es *topológica* si se conserva por homeomorfismos.

Por ejemplo la circunferencia y la esfera son *conexas* (tienen un único trozo) y *compactas*, es decir, cerradas y acotadas en $\mathbb{R}^2$. Veremos estas propiedades más adelante. Otros invariantes topológicoss importantes son el *grupo fundamental* y la *característica de Euler-Poincaré*, que se estudian en las asignaturas *Topología de superficies* y *Topología algebraica*.

Usaremos esas propiedades para probar que algunos espacios no pueden ser homeomorfos.

Ejemplo 9.1.4. $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ no pueden ser homeomorfos.

Lo veremos en el tema de *conexidad*. La idea es que si quitamos un punto a $\mathbb{R}$ quedan dos trozos separados (componentes conexas) y en cambio si quitamos un punto en $\mathbb{R}^2$ sigue habiendo un único trozo.

Ejemplo 9.1.5. $\mathbb{R}$ no puede ser homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Lo veremos en el tema de *compacidad*. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pero $[0, 1]$ sí lo es (por el Teorema de Heine-Borel, es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$).

Ejercicio 9.1.6. Probar que la recta real es homeomorfa a la *espiral de Arquímedes* (Figura 9.2)

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x \tan \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

por el homeomorfismo

$$f(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \operatorname{sen} \theta).$$

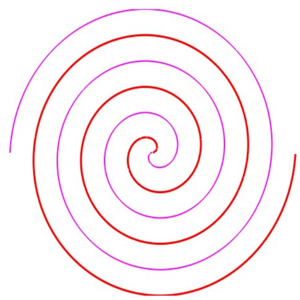


Figura 9.2: Espiral de Arquímedes $r = \theta$

Ejemplo 9.1.7. En Topología no hay diferencia entre una taza de café y una rosquilla.

Figura 9.3: Una taza es homeomorfa a una rosquilla

Ejercicios 2.1

Topología relativa

1) Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual τ_u. Probar que la topología relativa de $\mathbb{N}$ es la discreta. Probar que la topología relativa de $\mathbb{Q}$ *no* es la discreta.

2) Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Probar que la toplogía relativa en A es la menos fina (=más pequeña) que hace que la inclusión $i_A \colon A \subset X$ sea continua.

Continuidad

3) Sea $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación *parte entera*, dada por $f(x) = m$ si $m \in \mathbb{Z}$ y $m \leq x < m + 1$.

   Demostrar que la restricción $f_{|\mathbb{Z}}$ es continua pero que f no es continua en ningún punto de $\mathbb{Z}$.

4) Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) se dice *denso* si $\mathrm{Cl}(A) = X$. Probar que si $f \colon X \longrightarrow Y$ es continua y sobreyectiva, la imagen $f(A)$ de un denso es densa.

5) Estudiar la continuidad en el punto $x = 0$ de la aplicación $f \colon (\mathbb{R}, \tau_{\text{Sorgenfrey}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ 2 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

6) Estudiar la continuidad de la aplicación $g \colon (\mathbb{R}, \tau_{\text{Sorgenfrey}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ definida como

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0, \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

7) Demostrar que la aplicación $f \colon (\mathbb{R}, \tau_{\text{Sorgenfrey}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ definida por $f(x) = x^2$ es globalmente continua.

8) Sea $A \subseteq X$, se define la función característica de A, $1_A \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, como:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

   Demostrar que 1_A es continua sii A es abierto y cerrado en X.

Capítulo 10
Aplicaciones abiertas y cerradas

10.1. Aplicaciones abiertas

Definición 10.1.1. Una aplicación $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos es *abierta* si la imagen *directa* de cualquier abierto U en X es un abierto en Y,

$$U \in \tau_X \Rightarrow f(U) \in \tau_Y.$$

El ejemplo típico de aplicación abierta es una proyección.

Ejemplo 10.1.2. La proyección $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\pi(x, y) = x$ es abierta.

Basta comprobarlo para una bola $B = B((x_0, y_0), \varepsilon)$, pues las bolas abiertas son base de la topología usual. Pero la imagen de la bola

$$\pi(B) = \pi(B(x_0, y_0), \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

es un intervalo abierto.

Si tenemos un abierto arbitrario, es unión de bolas, luego

$$\pi(U) = \pi(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \bigcup_\alpha \pi(B_\alpha)$$

que es unión de abiertos, por tanto abierto.

Para comprobar que una aplicación es un homeomorfismo no hace falta calcular explícitamente la aplicación inversa.

Proposición 10.1.3. *Una aplicación $f\colon X \to Y$ biyectiva y continua es un homeomorfismo si y sólo si f es abierta.*

Demostración. Sólo falta comprobar que la aplicación inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ es continua. Pero si U es un abierto en X tenemos

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U), \tag{10.1}$$

es decir la imagen recíproca de U por f^{-1} es su imagen directa por f. Si f es abierta entonces $f(U)$ es abierto. □

Nota 10.1.4. **CUIDADO:** En la demostración anterior usamos la misma notación $()^{-1}$ para dos cosas diferentes. Si $f: X \to Y$ es una aplicación cualquiera, entonces $f^{-1}(V)$ es la imagen recíproca o imagen inversa del conjunto $V \subset Y$. A veces es preferible denotarla como $f^*(V)$. La imagen directa de $U \subset X$ puede denotarse por $f(U)$ o $f_*(U)$.

Por otra parte, si $f: X \to Y$ es una aplicación biyectiva, denotamos por $f^{-1}: Y \to X$ la aplicación inversa dada por $f^{-1}(f(x)) = x$.

Entonces la fórmula (10.1) podría escribirse

$$(f^{-1})^*(U) = f_*(U).$$

Ejercicio 10.1.5. Probar la fórmula (10.1).

SOL: "$\subset$" Si $y \in (f^{-1})^{-1}(U)$ entonces $f^{-1}(y) \in U$. Por tanto $y = f(f^{-1}(y)) \in f(U)$.

"$\supset$" Si $y \in f(U)$ entonces $y = f(x)$ para algún $x \in U$. Entonces $f^{-1}(y) = x \in U$, es decir $y \in (f^{-1})^{-1}(U)$.

10.2. Aplicaciones cerradas

Otra manera de comprobar la condición de que f^{-1} es continua es probando que f es una aplicación *cerrada*.

Definición 10.2.1. Una aplicación $f: X \to Y$ es *cerrada* si la imagen directa de cualquier cerrado en X es un cerrado en Y.

Proposición 10.2.2. *Una aplicación $f: X \to Y$ biyectiva y continua es un homeomorfismo si y sólo si f es cerrada.*

Demostración. Sólo falta comprobar que $f^{-1}: Y \to X$ es continua, para lo que podemos comprobar que la imagen recíproca de un cerrado $F \subset X$ es un cerrado. Pero

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F),$$

y como f es cerrada, tenemos que $f(F)$ es cerrado. □

Las Proposiciones 10.1.3 y 10.2.2 son ambas ciertas porque la imagen recíproca se porta bien con los complementarios. Pero en cambio la imagen directa no, con lo que puede ocurrir lo siguiente.

Ejemplo 10.2.3. Un ejemplo de una aplicación abierta que no es cerrada.

Vimos en el Ejemplo 10.1.2 que la proyección $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (por ejemplo sobre el primer factor) es abierta. Veamos que no es cerrada. Consideramos el subconjunto $F \subset \mathbb{R}^2$ que es la gráfica de la función (ver Fig. 10.1)

$$y = \frac{x^2}{1-x^2}, \quad -1 < x < +1.$$

Se comprueba que es un cerrado de $\mathbb{R}^2$ porque los puntos del complementario no son adherentes. Sin embargo la imagen

$$\pi(F) = (-1, +1)$$

no es un cerrado en $\mathbb{R}$.

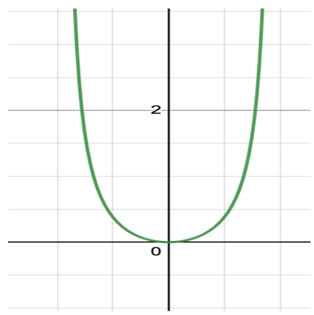


Figura 10.1: La proyección no es cerrada

10.3. Contraejemplos

En esta sección vamos a ver que una aplicación f puede ser continua y biyectiva, pero su aplicación inversa f^{-1} no ser continua.

Nota 10.3.1. Algo semejante ocurría también en *Análisis real* con algunas aplicaciones diferenciables biyectivas, cuya función inversa no es diferenciable: por ejemplo $f(x) = x^3$ es C^∞, pero $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ no es diferenciable en $y = 0$.

En cambio, si tenemos un isomorfismo de grupos, es decir, un homomorfismo de grupos (conserva las operaciones) biyectivo, el inverso es automáticamente un homomorfismo.

Ejemplo 10.3.2. Sean τ_{usual} y τ_{discreta} las topologías usual y discreta en $X = \mathbb{R}$, y consideremos la aplicación identidad $f = \mathrm{id}$, es decir $f(x) = x$. Es una biyección. Su inversa es $f^{-1} = \mathrm{id}$.

Como $\tau_{\text{usual}} \subset \tau_{\text{discreta}}$, la aplicación $\mathrm{id}\colon (X, \tau_{\text{discreta}}) \to (X, \tau_{\text{usual}})$ es continua; en efecto, si $V \in \tau_{\text{usual}}$ entonces $\mathrm{id}^{-1}(V) = V \in \tau_{\text{discreta}}$. Sin embargo, no es un homeomorfismo, porque no es abierta, ya que τ_{discreta} no es igual a τ_{usual}; entonces por ejemplo la imagen de $U = \{0\} \in \tau_{\text{discreta}}$ es U, que no es abierto en τ_{usual}.

Ejemplo 10.3.3. Lo mismo va a ocurrir siempre que consideremos dos topologías en X y una de ellas sea estrictamente más fina que la otra, es decir $\tau \subsetneq \tau'$. En ese caso la identidad $\mathrm{id}_X\colon (X, \tau') \to (X, \tau)$ será continua, biyectiva, pero no será un homeomorfismo.

Ejercicio 10.3.4. Sea $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una aplicación biyectiva entre espacios topológicos. Probar que f es un homeomorfismo si y sólo si la topología τ_X de X coincide con la inducida $f^*\tau_Y$.

SOL: "$\Rightarrow$" Si f es homeomorfismo para τ_X, es continua, por tanto $f^*\tau_Y \subset \tau_X$, por la Prop. 11.0.5. Para el otro contenido, sea $U \in \tau_X$. Como f es abierta, $f(U)) \in \tau_Y$, y como f es continua, $f^{-1}f(U) \in \tau_X$. Pero por ser f inyectiva tenemos $f^{-1}(f(U)) = U$. Por tanto $U \in f^*(\tau_Y$.

Para el recíproco se prueba que f es continua y abierta, y se aplica la Prop. 10.1.3.

Ejercicios 2.2

Aplicaciones abiertas y cerradas

1) Demostrar que la aplicación identidad $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \tau_{usual}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{Sorgenfrey})$ es abierta. ¿Es cerrada? ¿Es continua? ¿Es homeomorfismo?

2) Probar que una aplicación biyectiva es abierta sii es cerrada.

3) Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y abierta, y sea $B \subset Y$. Probar que $f^{-1}(\mathrm{Fr}(B)) = \mathrm{Fr}(f^{-1}(B))$. ¿Es necesario que f sea abierta?

4) Considera el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ o bien } y = 0 \text{ (o ambos)}\}.$$

Define $q : A \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $q(x, y) = x$. Prueba que q no es abierta pero sí es cerrada.

5) Probar que una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es cerrada si y sólo si para todo abierto U de X, el conjunto

$$U_* = \{\, y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \subseteq U \,\}$$

es abierto en Y (sugerencia: demuestra que $Y \setminus f(U) = (X \setminus U)_*$).

6) Sea (X, d) un espacio métrico y fijemos un punto $x_0 \in X$.

   a) Probar que la aplicación $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$ es *continua* para la topología en X asociada a d (sugerencia: probar que $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|, \forall x, y, z \in X$).
   b) ¿Es f abierta?

Homeomorfismos

7) Consideramos la circunferencia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ con la topología relativa de la usual de $\mathbb{R}^2$.

   Sea $h\colon S^1 \longrightarrow S^1$ la aplicación "conjugación" dada por $h(x, y) = (x, -y)$. Probar que h es un homeomorfismo.

8) Probar que el plano perforado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es homeomorfo al cilindro $S^1 \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^3$ (con las topologías usuales).

Tema 3: Nuevas construcciones

3-A: Topología inicial. Productos. Suma.

En este tema vamos a ver cómo se pueden construir nuevos espacios topológicos a partir de otros ya conocidos. Por ejemplo, los productos nos permitirán construir el *cilindro* $S^1 \times I$ y el *toro* $S^1 \times S^1$ (ver Figura 10.2) a partir de la circunferencia S^1 y el intervalo $I = [0, 1]$

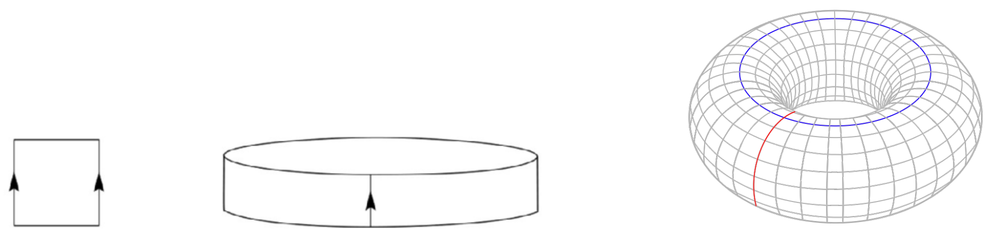


Figura 10.2: Cilindro y toro

También estudiaremos cocientes, que nos permitirán, por ejemplo, construir S^1 a partir de $[0, 1]$, identificando los puntos extremos (ver Figura 10.3).

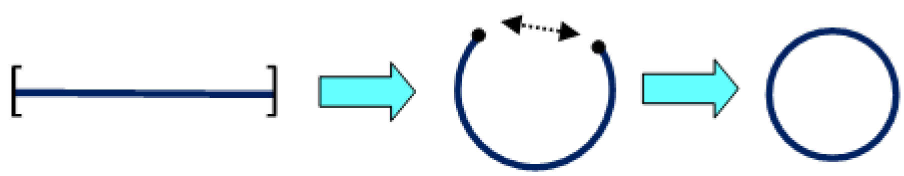


Figura 10.3: La circunferencia como cociente de un intervalo

Capítulo 11
Topología inicial

Hemos visto que en un conjunto X pueden darse diferentes topologías. Del mismo modo, dada una aplicación $f\colon X \to (Y, \tau_Y)$ desde un *conjunto* X a un *espacio topológico* (Y, τ_Y), puede haber varias topologías en X que hagan que f sea continua.

Ejemplo 11.0.1. Cualquier aplicación $f\colon (X, \tau_{\text{discreta}}) \to (Y, \tau_Y)$ es continua.

Definición 11.0.2. Llamamos *topología inicial* o topología inducida por f a

$$f^*\tau_Y = \{f^{-1}(V) \subset X : V \in \tau_Y\}.$$

La comprobación de los axiomas de topología es muy fácil usando las propiedades de la imagen recíproca f^{-1}.

Ejercicio 11.0.3. Comprobar que $f^*\tau_Y$ es una topología.

Ejemplo 11.0.4. La topología relativa es la inicial para la inclusión $i_A\colon A \subset X$.

Proposición 11.0.5. *La topología inicial es la* menos fina *(=tiene menos abiertos) de las topologías en X que hacen que f sea continua.*

Demostración. En primer lugar, $f^*\tau_Y$ hace f continua, pues la imagen recíproca de un abierto de Y es abierta en X; en efecto,

$$V \in \tau_Y \Longrightarrow f^{-1}(V) \in f^*\tau_Y,$$

por definición.

Sea ahora τ_X una topología en X que hace f continua (por ejemplo τ_{discreta}). Entonces $f^*\tau_Y \subset \tau_X$, porque si $U = f^{-1}(V) \in f^*\tau_Y$ con $V \in \tau_Y$ entonces $U \in \tau_X$, por ser $f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ continua. $\square$

La siguiente propiedad será útil cuando queramos comprobar que algunas aplicaciones son continuas.

Proposición 11.0.6. *Sea $\tau_X = f^*\tau_Y$ la topología inicial en X para una aplicación $f\colon X \to (Y, \tau_Y)$. Entonces una aplicación $g\colon (Z, \tau_Z) \to (X, \tau_X)$ es continua si y sólo si la composición $f \circ g$ es continua.*

Demostración. "$\Rightarrow$" La topología inicial hace que f sea continua. Entonces $f \circ g$ es composición de continuas, por tanto continua.

"$\Leftarrow$" Supongamos que $f \circ g$ es continua. Dado un abierto $U = f^{-1}(V) \in \tau_X = f^*\tau_Y$, tenemos
$$g^{-1}(U) = g^{-1}f^{-1}(V) = (f \circ g)^{-1}(V) \in \tau_Z.$$
Por tanto g es continua. $\square$

Ejercicio 11.0.7. El espacio de Sierpinski es el conjunto $S = \{0, 1\}$ dotado de la topología cuyos abiertos son $\tau_S = \{\emptyset, S, \{1\}\}$.
Probar que la topología τ_X de cualquier espacio topológico X es la topología inicial para la familia de todas las aplicaciones continuas $X \to S$ (es decir, la menos fina que las hace continuas a todas).

SOL: Llamemos C al conjunto de todas las aplicaciones continuas $(X, \tau_X) \to (S, \tau_S)$. Para entender la situación: si τ' es una topología *más* fina que τ_X (es decir, $\tau_X \subset \tau'$, por ejemplo la discreta), todas las funciones de C también son continuas para esa topología (razonar con imágenes inversas de abiertos); en esto S no juega ningún papel particular.

Sea ahora $\tau \subset \tau_X$ una topología *menos* fina que la dada, tal que todas las funciones en C son continuas para τ. En ese caso $\tau = \tau_X$, pues se tiene el otro contenido $\tau_X \subset \tau$. En efecto, dado un abierto $U \in \tau_X$ resulta que $U \in \tau$. El motivo es que su función característica $1_U : X \to S$, es continua,
$$1_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U, \end{cases}$$
pues
$$(1_U)^{-1}(\{1\}) = U$$
y no hay más abiertos que comprobar. Es decir, $1_U \in C$. Pero entonces 1_U es continua para τ y tenemos
$$U = (1_U)^{-1}(\{1\}) \in \tau.$$

Capítulo 12
Topología producto

12.1. Topología producto

Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son dos espacios topológicos, queremos dar una topología en el producto cartesiano

$$X \times Y = \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}.$$

Para ello daremos una base:

Definición 12.1.1. La colección

$$\mathcal{B} = \{U \times V \colon U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

es base de una topología en $X \times Y$, que llamaremos la *topología producto*. Se denota por $\tau_X \times \tau_Y$.

Nota 12.1.2. Los productos de abiertos forman una base, pero en l topología producto hay muchos más abiertos, pensad en el caso de $\mathbb{R}^2$.

Hay que comprobar que $\mathcal{B}$ es base de alguna topología (Prop. **??**):

1) El espacio total $X \times Y$ es unión de abiertos básicos, de hecho es un abierto básico tomando $U = X$, $V = Y$.

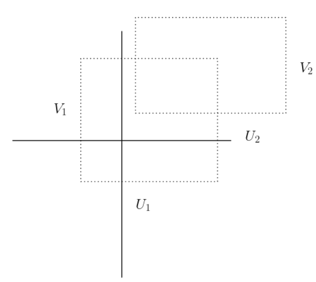


Figura 12.1: Intersección de dos abiertos básicos

2) Si $B_1 = U_1 \times V_1$ y $B_2 = U_2 \times V_2$ son abiertos básicos, se comprueba fácilmente (ver Figura 12.1) que

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2).$$

De este modo, dado $(x, y) \in B_1 \cap B_2$, podemos tomar

$$B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$$

tal que $(x, y) \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

En muchos casos tendremos que estudiar la topología producto conociendo sólo alguna base de las topologías de los factores.

Proposición 12.1.3. *Si $\mathcal{B}_X$ es una base de τ_X y $\mathcal{B}_Y$ es una base de τ_Y entonces*

$$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y = \{B \times B' \colon B \in \mathcal{B}_X, B' \in \mathcal{B}_Y\}$$

es una base de $\tau_X \times \tau_Y$.

Demostración. Dado un abierto Ω de la topología producto $\tau_X \times \tau_Y$ y un punto $(x, y) \in \Omega$, existe un abierto básico $U \times V$, de la base dada en la Definición 12.1.1, tal que

$$(x, y) \in U \times V \subset \Omega.$$

Como $x \in U$, con $U \in \tau_X$, habrá un abierto básico $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B \subset U$. Análogamente existe $B' \in \mathcal{B}_Y$ tal que $y \in B' \subset V$. Entonces

$$(x, y) \in B \times B' \subset U \times V \subset \Omega. \quad \square$$

Proposición 12.1.4. *Con la topología producto, las proyecciones $p_1 \colon X \times Y \to X$ y $p_2 \colon X \times Y \to Y$ son aplicaciones continuas, abiertas y sobreyectivas (si suponemos que X, Y son no vacíos).*

Demostración. Las proyecciones están dadas por $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$.

1) Para probar que p_1 es continua, tomamos un abierto $U \in \tau_X$. Entonces

$$p_1^{-1}(U) = U \times Y,$$

que es un abierto (básico) de la topología producto. Análogamente p_2 es continua porque

$$p_2^{-1}(V) = X \times V, \quad V \in \tau_Y.$$

2) Para probar que p_1 es abierta, sea Ω un abierto de $X \times Y$. Si $\Omega = U \times V$ es un abierto básico, con $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y$, tenemos que

$$p_1(\Omega) = p_1(U \times V) = U$$

es un abierto. Pero con esto llega, ya que un Ω arbitrario es unión de abiertos básicos, y la imagen directa se porta bien con las uniones; es decir, $\Omega = \bigcup_i U_i \times V_i$, luego

$$p_1(\Omega) = \bigcup_i p_1(U_i \times V_i) = \bigcup_i U_i$$

sería unión de abiertos, y por tanto abierto.

Análogamente se prueba que p_2 es abierta.

3) Que la proyección p_1 es sobreyectiva se deduce tomando cualquier punto $y_0 \in Y \neq \emptyset$. Entonces dado $x \in X$ existe $(x, y_0) \in X \times Y$ tal que $p_1(x, y_0) = x$. Análogamente se prueba que p_2 es sobreyectiva. □

Proposición 12.1.5. *Una aplicación* $h\colon Z \to X \times Y$ *es continua si y sólo si son continuas las composiciones* $h_1 = p_1 \circ h$ *y* $h_2 = p_2 \circ h$ *.*

Las funciones h_1, h_2 se llaman las *funciones componentes* de h y suele usarse la notación $h = (h_1, h_2)$.

Demostración. Si h es continua, entonces lo son h_1, h_2, por ser composición de continuas.

Recíprocamente, sea $U \times V$ un abierto básico de $X \times Y$. Entonces $h^{-1}(U \times V) = h_1(U) \times h_2(V)$, que es abierto. Basta hacerlo para básicos porque la imagen recíproca se porta bien con las uniones. De este modo, la imagen recíproca de cualquier abierto es unión de abiertos y por tanto abierta. □

12.2. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos:

Ejercicio 12.2.1. La topología usual de $\mathbb{R}^2$ coincide con la topología producto $\tau_{\text{usual}} \times \tau_{\text{usual}}$ donde τ_{usual} es la topología usual de $\mathbb{R}$.

SOL: Una base de $\tau_{\text{usual}}(\mathbb{R}) \times \tau_{\text{usual}}(\mathbb{R})$ está dada por los productos $B \times B'$ donde B, B' son intervalos abiertos (Prop. 12.1.3). Pero $B \times B'$ (rectángulo abierto) es abierto en la usual. Por tanto, $\tau_{\text{usual}} \times \tau_{\text{usual}} \subset \tau_{\text{usual}}(\mathbb{R}^2)$. Por otra parte, una base de la topología usual de $\mathbb{R}^2$ son las bolas abiertas de la métrica d_∞, que son cuadrados abiertos, por tanto productos de intervalos y abiertos de la topología producto. Esto prueba el otro contenido.

Ejemplo 12.2.2. En $\mathbb{R}^2$ se llama *topología lexicográfica* la topología producto

$$(\mathbb{R}, \tau_{\text{discreta}}) \times (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}).$$

Como una base de la topología discreta son los puntos $\{x\} \subset \mathbb{R}$, y una base de la topología usual son los intervalos (a, b), tenemos que los conjuntos

$$\{x\} \times (a, b) \tag{12.1}$$

forman una base de τ_{lexico}.

Ejercicio 12.2.3. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la topología lexicográfica τ_{lexico}. Calcular el interior y la clausura del conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

SOL: Tomando alrededor de cada punto (x, y) un "intervalo" de la forma $\{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ se concluye que $\mathrm{Int}(A) = \{(x, y) \in A \colon 0 < y < 2\}$ y $\mathrm{Cl}(A) = A$.

12.3. Propiedad universal del producto

En cierto sentido que vamos a precisar, el producto es el espacio más sencillo que podemos construir a partir de dos espacios X e Y.

Proposición 12.3.1. *Si $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ es el producto de los espacios (X, τ_X) e (Y, τ_Y), se tienen las siguientes propiedades:*

1) *Hay dos aplicaciones continuas (las proyecciones) $p_1 \colon X \times Y \to X$ y $p_2 \colon X \times Y \to Y$.*

2) *Si para otro espacio Z hay dos aplicaciones continuas $f_1 \colon Z \to X$ y $f_2 \colon Z \to Y$, entonces existe una única aplicación continua $h \colon Z \to X \times Y$ tal que $p_1 \circ h = f_1$ y $p_2 \circ h = f_2$ (ver el diagrama).*

3) *El producto es el único espacio (salvo homeomorfismo) que tiene esta propiedad* universal *.*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Demostración. 1) Que las proyecciones son continuas ya lo probamos en la Prop. 12.1.4.

2) Definimos la aplicación $h(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$. Es la única posible ya que nos dicen cuales tienen que ser sus funciones componentes.

Para ver que es continua vemos que las composiciones con las proyecciones, $p_i \circ h = f_i$, son continuas.

3) Supongamos que hubiese otro espacio $X * Y$ con dos aplicaciones p_1' y p_2' verificando la propiedad 2). Habría una aplicación $h \colon X * Y \to X \times Y$ con $p_1 \circ h = p_1'$ y $p_2 \circ h = p_2'$. Pero como $X * Y$ tiene la propiedad 2) habría otra aplicación $h' \colon X \times Y \to X * Y$ que cumpliría $p_1' \circ h' = p_1$ y $p_2' \circ h' = p_2$.

Ahora tenemos que comprobar que $h \circ h' = \mathrm{id}$ y $h' \circ h = \mathrm{id}$, con lo que h sería un homeomorfismo $X * Y \cong X \times Y$. Para ello necesitamos la *unicidad* que aparece en la propiedad 2). En efecto, si aplicamos la propiedad universal de $X \times Y$ al propio $Z = X \times Y$, la única aplicación $g \colon Z = X \times Y \to X \times Y$ que existe tal que $p_1 \circ g = p_1$ y $p_2 \circ g = p_2$ es la identidad $g = \ d$. Pero también serviría $h' \circ h$, porque

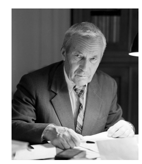
$$p_1 \circ (h' \circ h) = (p_1 \circ h') \circ h = p_1' \circ h = p_1$$

y análogamente $p_2 \circ (h' \circ h) = p_2$. Por unicidad tienen que ser iguales, $h' \circ h = \mathrm{id}$.

El otro caso es similar. □

Ejercicio 12.3.2. Probar que la topología producto en $X \times Y$ es la *menos fina* que hace continuas las dos proyecciones p_1, p_2.

Andréi N. Kolmogórov (1903–1987) Fué un matemático ruso que formuló por primera vez los *axiomas de probabilidad* (1933) y realizó aportaciones muy importantes en topología, como los *grupos de cohomología*, y en muchas otras áreas. En 1957 resolvió el problema XIII de Hilbert. Participó en las acusaciones políticas contra su maestro Luzin durante el régimen estalinista. Es considerado el mejor matemático ruso de toda la historia.



A.N. Kolmogórov

Capítulo 13
Topología Suma

13.1. Suma

Otro espacio sencillo que se construye a partir de dos espacios X, Y es su *suma*. Consiste simplemente en tomar un espacio que tiene dos "trozos" disjuntos, uno es X y el otro es Y.

Recordemos que la *unión disjunta* $X \sqcup Y$ de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos de X y los de Y pero teniendo en cuenta las repeticiones. Por ejemplo $S^1 \sqcup S^1$ serán dos copias de la circunferencia. De este modo, el punto $z = (1,0)$ de la primera se considera diferente del punto $z = (1,0)$ de la segunda. Para ello podemos ponerles etiquetas, por ejemplo llamarles $(z,1)$ y $(z,2)$. En resumen,

Definición 13.1.1. La unión disjunta de dos conjuntos es la unión

$$X \sqcup Y = (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}).$$

Por tanto, dentro de $X \sqcup Y$ hay una copia $X \times \{1\}$ de X y otra $Y \times \{2\}$ de Y. Las llamaremos simplemente X e Y.

Definición 13.1.2. Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son dos espacios topológicos, la *topología suma* en $X \sqcup Y$ está formada por los subconjuntos $W \subset X \sqcup Y$ tales que $W \cap X \in \tau_X$ y $W \cap Y \in \tau_Y$.

Ejemplo 13.1.3. En $S^1 \sqcup S^1$ el conjunto A de la Figura 15.3 no es abierto, pues su intersección con la segunda circunferencia no es abierto en S^1.

Proposición 13.1.4. *Las* inyecciones $i_1 \colon X \to X \sqcup Y$, *dada por* $i_1(x) = (x,1)$, *e* $i_2 \colon Y \to X \sqcup Y$, *dada por* $i_2(y) = (y,2)$, *son homeomorfismos con su imagen. Es decir, la unión disjunta está formada (topológicamente) por dos copias de X e Y.*

Demostración. Lo probaremos para i_1, ya que la otra es similar. Si $W \subset X \sqcup Y$ es un abierto, tenemos

$$i_1^{-1}(W) = W \cap X \in \tau_X,$$

por definición de topología suma. Por tanto i_1 es continua. Es muy fácil ver que es biyectiva con la imagen. Ahora nos llega con ver que $i_1 \colon X \to X \times \{1\}$ es una

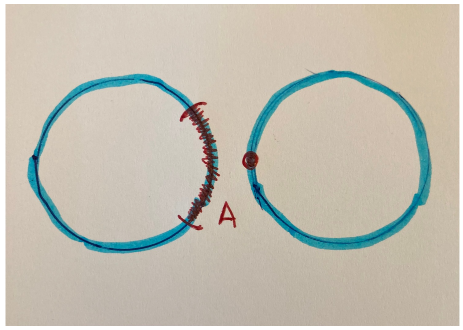


Figura 13.1: $A \subset S^1 \sqcup S^1$

aplicación abierta (por la Prop. 10.1.3). Pero si $U \in \tau_X$, entonces $i_1(U)$ es un abierto en $X \sqcup Y$ porque

$$i_1(U) \cap X = U \in \tau_X, \quad i_1(U) \cap Y = \emptyset \in \tau_Y.$$

Como $i_1(U)$ está contenido en $X \times \{1\}$, es la intersección de él mismo con $X \times \{1\}$, por tanto es abierto en $X \times \{1\}$, que es lo que queríamos probar. □

Las siguientes proposiciones son duales de las análogas del producto, y no las demostraremos aquí. Se dice que la suma es un *coproducto*.

Proposición 13.1.5. *Una aplicación $f\colon X \sqcup Y \longrightarrow Z$ es continua si y sólo si las composiciones $f \circ i_1$ y $f \circ i_2$ son continuas.*

Demostración. "$\Rightarrow$" La composición de aplicaciones continua es continua.

"$\Leftarrow$" Sea W abierto en Z, entonces

$$f^{-1}(W) = (f^{-1}(W) \cap X) \cup (f^{-1}(W) \cap Y) = (f \circ i_1)^{-1}(W) \cup (f \circ i_2)^{-1}(W)$$

que es unión de abiertos y por tanto abierto. □

Proposición 13.1.6 (Propiedad universal de la suma)**.**

1) *Tenemos dos aplicaciones continuas $i_1\colon X \longrightarrow X \sqcup Y$ e $i_2\colon Y \longrightarrow X \sqcup Y$.*

2) *Si hay otro espacio Z y dos aplicaciones continuas $i'_1\colon X \longrightarrow Z$ e $i'_2\colon Y \longrightarrow Z$, entonces existe una única aplicación $h\colon X \sqcup Y \longrightarrow Z$ tal que $h \circ i_1 = i'_1$ y $h \circ i_2 = i'_2$.*

3) *La suma topológica $X \sqcup Y$ es el único espacio con esta propiedad (salvo homeomorfismos).*

Ejercicio 13.1.7. Demuestra la proposición anterior.

Ejercicio 13.1.8. Sea $\{R_1, R_2\}$ una partición del espacio X, tal que cada R_i es abierto en X. Probar que X es homeomorfo a la suma $R_1 \sqcup R_2$.

SOL: Como conjunto, X es la unión disjunta $R_1 \sqcup R_2$. Hay que probar que la topología τ_X de X es la topología suma τ_S.

Si $U \in \tau_X$ entonces cada $U \cap R_i$, $i = 1, 2$, es abierto en R_i, por definición de topología relativa. Por tanto, $U \in \tau_S$, por definición de topología suma.

Recíprocamente, si $U \in \tau_S$, entonces $U \cap R_i$ es abierto en R_i, para $i = 1, 2$, por definición de topología suma. Pero como R_i es abierto en X se sigue que $U \cap R_i$ es abierto en X. Por tanto, $U = (U \cap R_1) \cup (U \cap R_2)$ es unión de dos abiertos, luego $U \in \tau_X$.

13.2. Un poco de historia

Leibniz y Euler iniciaron la *Topología combinatoria* estudiando problemas que no dependen de tamaños ni distancias sino de la posición relativa de objetos. El más famoso es el problema de los puentes de Könisberg, resuelto por Euler en 1736, y que ahora se considera parte de la teoría de grafos.

J.B. Listing fue el primero en utilizar la palabra *topología* en su artículo *Vorstudien zur Topologie* (Introducción al estudio de la Topología) de 1848.

La *Topología general* tiene su origen en los trabajos de Cantor sobre conjuntos y en la tesis doctoral de Fréchet en la que introduce los espacios métricos (1906). La primera definición de espacio topológico en términos de entornos la dio Hausdorff en 1914, y nuestra definición con abiertos es de Alexandrov (1926) y Sierpinski (1928). La teoría tal y como la estudiamos ahora se consolidó hacia 1940.

La *topología algebraica* se inició con Poincaré, que publicó su obra *Analysis situs* en 1895, en el que inventó el término *homeomorfismo*. Allí introdujo el grupo fundamental, que se verá en la asignatura Topología de superficies.

Ejercicios 3.1

Topología inicial

1) Dados $\mathbb{R}$ con la topología usual y $\mathbb{Z}$ con la topología discreta, definimos $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ como:

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ n & \text{si } x \in (n-1, n+1) \text{ y } n \text{ es un entero impar.} \end{cases}$$

   a) ¿En qué puntos es p continua? ¿Es p abierta?

   b) ¿Tiene $\mathbb{R}$ la topología inicial con respecto a p?

Productos

2) Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, y consideremos en $X \times Y$ la topología producto $\tau_X \times \tau_Y$. Si $A \subset X$, $B \subset Y$ son subconjuntos, probar que $\operatorname{Int}(A \times B) = \operatorname{Int}(A) \times \operatorname{Int}(B)$.

3) Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación entre espacios topológicos, se llama *gráfica* de f el conjunto
$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \colon x \in X\},$$
dotado de la topología inducida por la del producto $X \times Y$.

   Probar que si f es continua, entonces la aplicación $x \in X \mapsto (x, f(x)) \in \mathcal{G}(f)$ es un homeomorfismo.

4) En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ consideramos la topología $\tau_{\text{Sorgenfrey}} \times \tau_{\text{usual}}$. Calcular el interior y la clausura del subconjunto
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}.$$

5) Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar que la aplicación diagonal $\Delta\colon X \to X \times X$, dada por $\Delta(x) = (x, x)$, es continua.

6) Sean X, Y dos espacios topológicos, y sean $A \subset X$, $B \subset Y$ subespacios (es decir, subconjuntos con la topología inducida). Probar que coinciden las siguientes topologías en $A \times B \subset X \times Y$:

   - La topología inducida por la topología producto de $X \times Y$;
   - el producto de las topologías inducidas.

7) Sean X e Y espacios topológicos con subespacios $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar que en la topología producto de $X \times Y$ se tiene $\operatorname{Cl}(A \times B) = \operatorname{Cl}(A) \times \operatorname{Cl}(B)$.

Suma

8) Sea $f: X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Sea $F: X \sqcup Y \to Y$ la aplicación dada por
$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X, \\ z & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$
Probar que F es continua si y sólo si f es continua.

3-B: Topología final. Cocientes. Espacios cociente.

Capítulo 14
Topología final.

14.1. Topología final

Cuando introducimos una relación de equivalencia en un espacio topológico, tenemos que dotar al espacio cociente de una topología. Será un caso particular de *topología final*.

Sea $f: (X, \tau_X) \to Y$ una aplicación entre un espacio topológico y un conjunto Y. Nos interesa discutir qué topologías puede haber en Y que hagan que la aplicación f sea continua.

Tiene que cumplirse que la imagen inversa de un abierto sea un abierto.

Definición 14.1.1. La *topología final* para la aplicación $f: (X, \tau_X) \to Y$ está formada por todos los subconjuntos de Y cuya imagen recíproca es un abierto de X, es decir

$$\tau_{\text{final}} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \tau_X\}.$$

Nota 14.1.2. La topología *trivial*, $\tau_{\text{trivial}} = \{Y, \emptyset\}$ hace que f sea continua, pero es demasiado pequeña.

Proposición 14.1.3. *La topología final para $f: (X, \tau_X) \to Y$ es la topología* más fina *(=más abiertos) en Y que hace que f sea continua.*

Demostración. Es muy fácil probar que efectivamente τ_{final} verifica los axiomas de topología, pues la imagen recíproca respeta las uniones e intersecciones.

Además, es claro que hace que f sea continua, pues $V \in \tau_{\text{final}}$ implica $f^{-1}(V) \in \tau_X$, por definición, de modo que la imagen recíproca de un abierto es abierta.

Finalmente, sea τ_Y una topología en Y que hace que f sea continua: si $V \in \tau_X$ entonces $f^{\breve{}1}(V) \in \tau_X$, es decir $V \in \tau_{\text{final}}$. Hemos probado así el contenido $\tau_Y \subset \tau_{\text{final}}$. □

Ejercicio 14.1.4. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la topología usual y sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección en la primera coordenada. Probar que la topología final es la topología usual de $\mathbb{R}$.

SOL: La aplicación f es continua para la topología usual, por tanto $\tau_{\text{usual}} \subset \tau_{\text{final}}$. Para ver el otro contenido, tomemos $B \in \tau_{\text{final}}$, es decir $B \subset \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(B)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$. Como la proyección es una aplicación abierta, y sobreyectiva, tenemos que $B = f(f^{-1}(B)) \in \tau_{\text{usual}}$.

14.2. Identificaciones

Definición 14.2.1. Una *identificación* es una aplicación $f: X \to Y$ entre espacios topológicos, que cumple:

1) f es continua

2) f es sobreyectiva

3) La topología de Y es la topología final para f.

Nota 14.2.2. Como veremos más adelante (Definición 15.3.1), la proyección canónica de una relación de equivalencia dada en un espacio topológico $\pi: X \to X/R$ es una identificación.

Normalmente, la condición 3) en la Def. 14.2.1 anterior es la más difícil de comprobar. En muchos casos será consecuencia de una condición más fuerte.

Proposición 14.2.3. *Sea $f: X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva. Cualquiera de las condiciones siguientes es* suficiente *para que f sea una identificación:*

1) f es abierta;

2) f es cerrada;

3) f admite una sección continua, es decir, existe una aplicación continua $s: Y \to X$ tal que $f \circ s = \mathrm{id}_Y$.

Estas condiciones *no* son equivalentes entre sí. Tampoco son necesarias.

Demostración. 1) Siempre se cumple $\tau_Y \subset \tau_{\mathrm{final}}$, porque τ_{final} es la topología más fina que hace que f sea continua, y por hipótesis f es continua para la topología τ_Y. Para comprobar el otro contenido, $\tau_{\mathrm{final}} \subset \tau_Y$, tomamos $B \in \tau_{\mathrm{final}}$, es decir $B \subset Y$ tal que $f^{-1}(B) \in \tau_X$. Si f es abierta $f(f^{-1}(B))$ es abierto en τ_Y. Pero como f es sobre, es $f(f^{-1}(B)) = B$, por tanto $B \in \tau_Y$, como queríamos probar.

Nótese que esta demostración es la misma que el Ejemplo 14.1.4.

2) Análoga. Por un lado, $\tau_Y \subset \tau_{\mathrm{final}}$ por ser f continua. Para el otro contenido, sea $U \in \tau_{\mathrm{final}}$ y sea $F = Y \setminus U$, cerrado de τ_{final}. Entonces $F = f(f^{-1}(F))$ por ser f sobre. Además es cerrado en τ_Y porque f es cerrada y $f^{-1}(F)$ es cerrado en X ya que $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(U)$ es abierto. Por tanto U es abierto en τ_Y. 3) De nuevo tenemos sólo que probar $\tau_{\mathrm{final}} \subset \tau_Y$. Si $B \in \tau_{\mathrm{final}}$, es un $B \subset Y$ que cumple $f^{-1}(B) \in \tau_X$; entonces, como s es continua, será $s^{-1}(f^{-1}(B)) \in \tau_Y$. Pero

$$s^{-1}(f^{-1}(B)) = (f \circ s)^{-1}(B) = (\mathrm{id})^{-1}(B) = B,$$

por tanto $B \in \tau_Y$. □

Nota 14.2.4. La condición 2) (ser f cerrada, y por tanto identificación) se cumple siempre en el siguiente caso (lo demostraremos más adelante en este curso): cuando X es un subespacio cerrado y acotado de un $\mathbb{R}^m$, e Y es un subespacio cualquiera de algún $\mathbb{R}^n$. Más generalmente, cuando X es un espacio *compacto* e Y es un espacio *Hausdorff*.

Ejemplo 14.2.5. La aplicación $p\colon X = [0, 2\pi] \to Y = \mathbb{S}^1$, con $p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una identificación (por el criterio anterior). Pero no es abierta, por ejemplo $U = [0, \pi)$ es abierto en X pero su imagen no es abierta en Y.

Ejemplo 14.2.6. La proyección $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $p(x, y) = y$, es una identificación (es abierta). Pero no es cerrada.

Ejemplo 14.2.7. Si $Y \neq \emptyset$, la proyección $p_2\colon X \times Y \to Y$ es una identificación.

Ejercicio 14.2.8. Probar que una aplicación $f\colon X \to Y$ es una identificación si y sólo si es continua, sobreyectiva, y cumple que los cerrados de Y son exactamente los conjuntos $F \subset Y$ tales que $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Finalmente, vamos a dar una propiedad universal que caracteriza las identificaciones.

Proposición 14.2.9. *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua y sobreyectiva. Sea $g\colon Y \to Z$ otra aplicación definida en el codominio de f. Si f es una identificación, la continuidad de $g \circ f$ es equivalente a la continuidad de g.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Demostración. "$\Rightarrow$" Como f es una identificación, la topología que hay en Y es la final para f, $\tau_{\text{final}} = \tau_Y$. Sea $g\colon (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$ una aplicación tal que $g \circ f$ es continua. Necesitamos demostrar que g es continua. Para ello veamos que la imagen inversa por g de un abierto $W \in \tau_Z$ es un abierto de τ_Y.

Como $g \circ f$ es continua, entonces $(g \circ f)^{-1}(W) \in \tau_X$. Además,

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)),$$

por lo que $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \tau_X$, es decir $g^{-1}(W) \in \tau_{\text{final}} = \tau_Y$, como queríamos demostrar.

"$\Leftarrow$" Si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua, por ser composición de continuas. □

Proposición 14.2.10. *Recíprocamente, si una aplicación continua y sobreyectiva $f\colon X \longrightarrow Y$ tiene la propiedad de que para cualquier espacio Z y cualquier aplicación $g\colon Y \longrightarrow Z$ se cumple que la continuidad de $g \circ f$ implica la de g, entonces f es una identifcación.*

Demostración. Necesitamos ver que f es una identificación, es decir que $\tau_Y = \tau_{\text{final}}$. Dado que f es continua, $\tau_Y \subseteq \tau_{\text{final}}$, por la Prop. 14.1.3. En vez de probar directamente el otro contenido, $\tau_{\text{final}} \subset \tau_Y$, probaremos que la aplicación identidad

$$g = \mathrm{id}\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Y, \tau_{\text{final}})$$

es continua. Por definición de continuidad esto es equivalente al contenido, ya que si $U \in \tau_{\text{final}}$ entonces $U = (\mathrm{id})^{-1}(U) \in \tau_Y$.

Por hipótesis sabemos que bastará tener la continuidad de $g \circ f = \mathrm{id} \circ f = f$, que efectivamente es continua, por lo que hemos terminado. □

Ejercicio 14.2.11. A partir de la definición, probar que la composición de dos identificaciones es una identificación.

Ejemplo 14.2.12. El siguiente Ejemplo (tomado de *Topología* de Munkres) muestra que la restricción de una identificación no tiene por qué ser una identificación.

Sea $X = [0,1] \cup [2,3]$ con la topología usual, y la aplicación $f\colon X \longrightarrow Y = [0,2]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1], \\ x-1 & \text{si} \quad x \in [2,3]. \end{cases}$$

Es una identificación porque es continua, sobre y cerrada. Tomemos el subespacio $A = [0,1) \cup [2,3]$ y la aplicación restringida $F\colon A \longrightarrow [0,2]$. Esta nueva aplicación es continua y sobre. Sin embargo, no es una identificación: en efecto, el conjunto $B = [1,2]$ no es abierto en $Y = [0,2]$, pero su imagen recíproca $f^{-1}(B) = [2,3]$ es *abierto en* A, pues es la intersección $(1,4) \cap A$.

Esto quiere decir que en $[0,2]$ no tenemos la topología final para F.

Ejercicio 14.2.13. Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Un subconjunto $A \subset X$ se dice *saturado* si es de la forma $A = f^{-1}(B)$ para algún $B \subset Y$. Esto quiere decir que si un elemento $a \in A$, todos los que tienen la misma imagen $f(a)$ están en A.
Probar que si f es sobreyectiva, entonces

a) $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$, para todo $U \subset X$ *saturado*;

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, para todo $A, B \subset X$ saturados.

SOL:

a) $y \in f(X \setminus U) \Rightarrow y = f(x), x \notin U$, si fuese $y = f(x')$ con $x' \in U$ tendría que ser $x \in U$ por ser saturado, contradicción; por tanto $y \in Y \setminus f(U)$.

Para el otro contenido, si $y \in Y \setminus f(U)$ entonces $y = f(x)$ para algún $x \notin U$ por ser f sobre, luego $y \in f(X \setminus U)$.

b) Si A, B son saturados, $A \cap B$ también lo es. Por el apartado a),

$$\begin{aligned} Y \setminus f(A \cap B) =& f(X \setminus A \cap B) = f((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = \\ & f(X \setminus A) \cup f(X \setminus B) = (Y \setminus f(A)) \cup (Y \setminus f(B)) = \\ & Y \setminus f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Ejercicio 14.2.14. Sea $f: X \to Y$ una aplicación, sea $A \subset X$ saturado y sea $W \subset X$ cualquiera. Probar que si $A \cap W$ es saturado entonces $A \cap W = A \cap f^{-1}(f(W))$. Llamamos a $f^{-1}(f(W))$ la *saturación* de W.

SOL: "$\subset$" Se deduce de $W \subset f^{-1}(f(W))$.

"$\supset$" Sea $x \in A \cap f^{-1}(f(W))$, es decir $f(x) \in f(W)$, por tanto $f(x) = f(x')$ con $x' \in W$. Por tanto $x' \in A$ porque $x \in A$, saturado. Pero entonces $x' \in A \cap W$, saturado, por tanto $x \in A \cap W$.

Ejercicio 14.2.15. Sea $f: X \to Y$ una identificación. Probar que si $A \subset X$ es un subespacio saturado, entonces la "restricción" $f_{|A}: A \to f(A)$ es una identificación. >Qué hipótesis fallaba en el Ejemplo 14.2.12 anterior?

SOL: Sea f identificación. La "restricción" $F: A \to f(A)$ es continua (por restricción y cambio de codominio) y sobre. Falta ver que $\tau_{\text{final}}(F) = \tau_{f(A)}$. El contenido "$\supset$" siempre se tiene por continuidad de F. Veamos "$\subset$". Si $V \subset f(A)$ está en $\tau_{\text{final}}(F)$ entonces $F^{-1}(V) \in \tau_A$ por definición. Claramente $F^{-1}(V) = f^{-1}(V)$. Entonces $f^{-1}(V) = A \cap W$ para algún $W \in \tau_X$. Por el Ejercicio 14.2.14 tenemos

$$f^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(f(W)).$$

Ahora podemos aplicar el Ejercicio 14.2.13 y queda

$$V = f(f^{-1}(V)) = f(A) \cap f(W).$$

Finalmente, veamos que $f(W) \in \tau_Y = \tau_{\text{final}}(f)$ (f es identificación): como $X = A \cup X \setminus A$ será

$$\begin{aligned} f^{-1}f(W) =& (f^{-1}f(W) \cap A) \cup (f^{-1}f(W) \cap X \setminus A) = \\ & (W \cap A) \cup (W \cap X \setminus A) = W \in \tau_X, \end{aligned}$$

pues A y $X \setminus A$ son saturados.

Así tenemos que $V \in \tau_{f(A)}$.

Ejercicio 14.2.16. Probar que una aplicación continua y sobreyectiva $p\colon X \to Y$ es una identificación si y sólo si la imagen de cualquier abierto saturado $U \subset X$ es un abierto en Y.
(la definición de *saturado* está en el Ejercicio 14.2.13).

SOL:

"$\Rightarrow$" Sea $U \subset X$ abierto saturado, es decir $U = p^{-1}(V)$ para algún $V \subset Y$, y tenemos $V \in \tau_{\text{final}}$ por definición de la topología final. Por ser p sobre, se tiene $p(U) = p(p^{-1}(V)) = V$, abierto en Y, porque la hipótesis es $\tau_{\text{final}} = \tau_Y$.

"$\Leftarrow$" Hay que probar que $\tau_Y = \tau_{\text{final}}$. Como p es continua tenemos $\tau_Y \subset \tau_{\text{final}}$ (recordemos que la final es la topología más fina que hace a p continua). Para el otro contenido, sea $V \in \tau_{\text{final}}$, entonces $U = p^{-1}(V)$ es saturado, y abierto por continuidad, luego por ser p sobre, $p(U) = p(p^{-1}(V)) = V$, que está en τ_Y por hipótesis.

Nota 14.2.17. Sin embargo, en una identificación no tiene por qué ser cierto que la imagen de cualquier abierto sea abierta. En el Ejemplo 14.2.5, el abierto U no es saturado.

Ejercicios 3.2

Topología final

1) Dado $\mathbb{R}$ con la topología usual, definimos $p\colon \mathbb{R} \to \{a, b, c\}$ como:

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x < 0, \\ b & \text{si} \quad x = 0, \\ c & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

   Decir cuál es la topología final en $\{a, b, c\}$ para la aplicación p.

2) Sea $f\colon X \to Y$ una identificación. Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es *saturado* si $A = f^{-1}(B)$ para algún $B \subset Y$. Sea $A \subset X$ un subespacio saturado. Probar que la "restricción" $f_{|A}\colon A \to f(A)$ es una identificación.

   Sugerencia: probar que si A y $A \cap U$ son saturados entonces $A \cap U = A \cap f^{-1}(f(U))$; probar que si A y S son saturados entonces $Y \setminus f(A) = f(X \setminus A)$ y $f(A \cap S) = f(A) \cap f(S)$.

3) Sean $f\colon X \to Y$ y $f'\colon X' \to Y'$ dos identificaciones abiertas. Probar que la aplicación $f \times f'\colon X \times X' \to Y \times Y'$ dada por

$$(f \times f')(x, x') = (f(x), f'(x'))$$

   es una identificación abierta.

Capítulo 15
Cocientes

15.1. Relaciones de equivalencia

Empezamos repasando la noción elemental de “relación de equivalencia” en un conjunto.

Ua *relación* en el conjunto X es un subconjunto $R \subset X \times X$. Si el par (x, y) pertenece a R, decimos que *x está relacionado con y* y escribimos xRy.

En ocasiones se usa otra notación, por ejemplo $x \sim y$.

Ejemplo 15.1.1. En $\mathbb{Z}$ definimos la relación mRn sii $m - n = \dot{3}$.

Ejemplo 15.1.2. En $X = [0, 1] = I$ definimos la relación tRt' sii $t = t'$ cuando $t \neq 0, 1$; además $0R0$, $1R1$, $0R1$ y $1R0$.

Dicho de otra manera, como subconjunto de $X \times X$ tenemos

$$R = \{(t, t) \colon t \in I\} \cup \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

Ejemplo 15.1.3. En $X = S^1$ definimos la relación zRz' sii $z' = z$ ó $z' = -z$.

Ejemplo 15.1.4. En $\mathbb{R}^2$ definimos la relación vRw sii existe $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, tal que $w = tv$.

Definición 15.1.5. Sea $f \colon X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Tenemos en X *la relación R_f asociada a f*, que está dada como $xR_f y$ sii $f(x) = f(y)$.

Definición 15.1.6. Una relación R en el conjunto X se dice *relación de equivalencia* si verifica las siguientes propiedades:

1) (Reflexiva) Cada elemento se relaciona consigo mismo, xRx para todo $x \in X$.

2) (Simétrica) Si xRy entonces yRx.

3) (Transitiva) Si xRy e yRz entonces xRz.

Ejercicio 15.1.7. Demostrar que las relaciones de los ejemplos anteriores eran relaciones de equivalencia.

Ejemplo 15.1.8. La relación $m \leq n$ en $\mathbb{Z}$ no es de equivalencia, pues no es simétrica.

Nota 15.1.9. Muchas veces hablaremos de la relación de equivalencia *generada* por una relación $R \subset X \times X$. Esto significa que tomaremos todos los pares necesarios para que sea reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 15.1.10. En el intervalo $X = [0, 1]$ la relación (de equivalencia) generada por $0R1$ incluye, además del par $(0, 1)$, los pares $(1, 0)$ y todos los (t, t), $t \in [0, 1]$.

Definición 15.1.11. Llamamos *clase de equivalencia* de un elemento $x \in X$ el conjunto $[x] \subset X$ de todos los elementos que se relacionan con él:

$$[x] = \{y \in X \colon yRx\}.$$

Los elementos de una misma clase se llaman sus *representantes*.

El *conjunto cociente* X/R es el conjunto formado por las clases de equivalencia, es decir, cada clase se representa con una única "bandera":

$$X/R = \{[x] \colon x \in X\}.$$

La *proyección canónica* $\pi \colon X \longrightarrow X/R$ envía cada elemento $x \in X$ en su clase $\pi(x) = [x]$.

Ejemplo 15.1.12. En la relación del Ejemplo 15.1.1, hay tres clases de equivalencia (llamadas *clases de restos*):

- los múltiplos de 3 forman la clase $[0] = \{\dots, -6, -3, 0, +3, +6, +9, \dots\}$,
- $[1] = \{\dots, -7, -4, -1, +2, +5, \dots\}$,
- $[2] = \{\dots, -5, -2, +1, +4, \dots\}$.

El conjunto cociente tiene tres elementos:

$$X/R = \{[0], [1], [2]\}.$$

En este ejemplo suele usarse la notación $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ para las clases.

Nota 15.1.13. Por el contexto sabremos si estamos hablando de la clase $[x] \subset X$ como conjunto de elementos que se relacionan con x, o del elemento $[x] \in X/R$ del conjunto cociente. No es mala idea usar notaciones diferentes, por ejemplo $[x] \subset X$ pero $\pi(x) \in X/R$.

Definición 15.1.14. Una *partición* de un conjunto X es una familia $\mathcal{R} = \{R_i \colon i\}_{\in \mathcal{I}}$ de subconjuntos no vacíos de X que lo recubren y son disjuntos dos a dos, es decir,

1) $R_i \subset X, R_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathcal{I}$.

2) $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} R_i = X$.

3) $R_i \cap R_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Proposición 15.1.15. *Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia forman una partición de X. Recíprocamente, dada una partición $\mathcal{R} = \{R_i : i \in \mathcal{I}\}$, la relación $xRy \Leftrightarrow x, y \in R_i$ para algún i, es una relación de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son los R_i.*

Proposición 15.1.16. *Toda relación de equivalencia es la relación asociada a una aplicación, la proyección canónica*

Ejercicio 15.1.17. Demostrar las proposiciones anteriores.

15.2. Cómo reconocer un espacio cociente

Ejemplo 15.2.1. En el Ejemplo 15.1.3, cada clase de equivalencia tiene un único elemento, $[t] = \{t\}$, excepto la clase de $t = 0$, que tiene dos representantes, $[0] = \{0, 1\} = [1]$.

Tomando la "mitad" superior de la circunferencia vemos que el conjunto de clases tiene tantos elementos como el intervalo $[0, 1]$, excepto los extremos del intervalo, que pasan a estar identificados. Por tanto X/R es biyectivo con una circunferencia (ver Figura 15.1).

Si pensamos que $2\pi t \in [0, 2\pi]$, con $t \in [0, 1]$, representa el argumento de un punto, la biyección manda cada clase t en el punto $(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) \in S^1$.

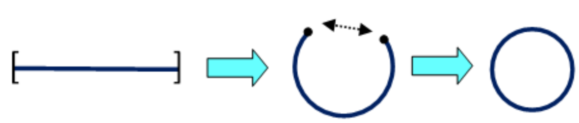


Figura 15.1: La circunferencia como cociente de un intervalo

La siguiente proposición es muy importante, pues nos ayudará a identificar el conjunto de clases de una relación dada:

Proposición 15.2.2. *Sea R una relación de equivalencia en X y sea $f : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva de conjuntos cuya relación asociada coincide con R. Entonces el espacio de clases X/R es biyectivo con Y.*

Demostración. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/R \arrow[r, "\bar{f}"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde definimos

$$\bar{f}([x]) = f(x).$$

Veamos que $\bar{f}$ es una biyección.

Está bien definida porque $R_f = R$. En efecto, tenemos que si $[x] = [x']$ entonces $f(x) = f(x')$.

Que $\bar{f}$ es inyectiva se sigue también de que $R = R_f$, pues si $\bar{f}([x]) = \bar{f}([x'])$ entonces $f(x) = f(x')$, de donde $xR_f x'$. Por tanto xRx', es decir, $[x] = [x']$.

Veamos que $\bar{f}$ es sobreyectiva. Como f es sobreyectiva, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces existe $[x] \in X/R$ tal que $\bar{f}([x]) = y$. □

La Prop. anterior se completará más adelante con el Teorema 16.1.1.

15.3. Espacio cociente

Definición 15.3.1. Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea R una relación de equivalencia en X. Llamamos *espacio cociente* al conjunto cociente X/R dotado de la topología final para la proyección canónica $\pi\colon X \to X/R$.

En muchas ocasiones esta topología en X/R será una ya conocida.

Ejemplo 15.3.2. En el cociente del intervalo $X = [0, 1]$ para obtener la circunferencia S^1, podemos comprobar que la imagen inversa de una bola abierta es o bien un intervalo $(a, b) \subset (0, 1)$ o bien un conjunto de la forma $[0, a) \cup (b, 1]$, que es abierto en $[0, 1]$. Esto sugiere que la topología cociente en X/R es la topología usual de S^1.

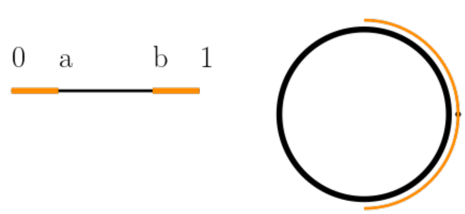


Figura 15.2: Un abierto de S^1

Ejemplo 15.3.3. En $\mathbb{R}^2$ definimos la relación de equivalencia

$$(x, y)R(x', y') \text{ sii } y - y' = 3(x - x').$$

Comprobamos que las clases de equivalencia son las rectas $y = 3x + a$ de pendiente 3. Cada clase queda identificada por el valor $a \in \mathbb{R}$, o si se prefiere por el punto $(0, a)$ en el eje OY. Parece pues que el conjunto cociente es (biyectivo con) $\mathbb{R}$.

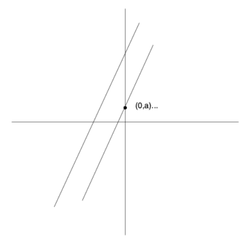


Figura 15.3: Rectas de pendiente 3

La proyección de $\mathbb{R}^2$ sobre el eje $= Y$ a lo largo de las rectas paralelas de pendiente 3 parece intuitivamente una aplicación abierta, pues la imagen de una bola abierta es un intervalo abierto. Recíprocamente, la imagen recíproca de un intervalo abierto es una franja abierta. Esto sugiere que la topología cociente es la usual de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 15.3.4. Usar la Prop. 15.2.2 para probar que los dos cocientes anteriores son efectivamente S^1 y $\mathbb{R}$, *como conjuntos*.

Para hacer demostraciones formales de que las *topologías* anteriores son las que parecen, usaremos la noción de *identificación* que vimos en el Capítulo anterior.

Capítulo 16
Espacios cociente

16.1. Espacios cociente

Con los resultados de que disponemos podemos demostrar el siguiente resultado que será muy importante en la resolución de problemas, para identificar el espacio resultante de un cociente.

Teorema 16.1.1. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una identificación y sea R_f la relación de equivalencia asociada. Entonces el espacio cociente X/R_f es homeomorfo a Y.*

En la práctica lo usaremos de la siguiente manera: nos darán un espacio topológico X y una relación de equivalencia R. Trataremos de identificar el espacio de clases X/R, digamos que creemos que es un espacio Y. Para confirmarlo, buscaremos una identificación $f\colon X \to Y$ cuya relación asociada sea la que nos dieron, $R_f = R$. Entonces, las aplicación

$$\bar{f}\colon X/R \to Y$$

dada por $\bar{f}([x]) = f(x)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Que $\bar{f}$ es biyectiva lo vimos en la Proposición 15.2.2. Para demostrar que $\bar{f}$ es continua usaremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/R \arrow[r, "\bar{f}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Tenemos que $\bar{f} \circ \pi = f$ es continua. Como π es una identificación, por la propiedad universal de la Proposición 14.2.9 se sigue que $\bar{f}$ es continua.

La aplicación inversa $(\bar{f})^{-1}$ cumple $(\bar{f})^{-1} \circ f = \pi$ porque $f = \bar{f} \circ \pi$. Como π es continua se sigue que $(\bar{f})^{-1}$ también lo es, por la propiedad universal de la identificación f. $\square$

Ejemplo 16.1.2. En $\mathbb{R}$ con la topología usual consideramos la relación de equivalencia

$$x \sim R \iff \exists m \in \mathbb{Z}\colon y = x + m.$$

El espacio cociente $X/\!\sim$ es homeomorfo a S^1.

En efecto, la aplicación $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ dada por $f(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$ cumple que $R_f = R$, ya que

$$\cos a = \cos b, \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \iff a - b = 2\pi m \quad \text{para algún } m \in \mathbb{Z}.$$

Además f es una identificación pues es continua, sobre y abierta.

Ejemplo 16.1.3. Consideremos la circunferencia S^1 como el conjunto de los números complejos de norma 1,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}.$$

Sea $f\colon S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = z^2$. La relación de equivalencia asociada está generada por $z \sim -z$, es decir, es la relación que identifica cada punto con su antipodal, que vimos en el Ejemplo 15.1.3 (un complejo no nulo tiene dos raíces cuadradas $\pm z$). Veamos que el conjunto cociente (que se llama la *recta proyectiva* $\mathbb{R}P^1$) es homeomorfo a S^1.

La aplicación f es continua, pues lo es la aplicación $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que da el cuadrado de un complejo,

$$F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

De ella se obtiene f por restricción de dominio y codominio.

Claramente f es sobre, pues todo complejo z de norma 1 tiene al menos una raíz cuadrada (de norma 1).

Como f es una identificación, pues S^1 es compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$) y $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$ y por tanto Hausdorff (ver Nota 14.2.4), se tiene que el espacio de clases es homeomorfo a S^1.

Nota 16.1.4. Conviene pensar en el ejemplo anterior de la siguiente manera: en cada clase hay dos complejos *opuestos*. Si tomo "media circunferencia" (el arco superior entre 0 y π) tengo un representante de cada clase, así que el espacio cociente parece un intervalo. Pero ahora me fijo en que los extremos son $z = 1$ y $z = -1$, que están identificados. Así que $S^1/R = S^1$.

Ejemplo 16.1.5. Consideremos la relación de equivalencia en $[0, 1]$ que identifica $0 \sim 1$. Está asociada a la aplicación $f\colon [0, 1] \to S^1$ dada por

$$f(t) = e^{2\pi \mathbf{i} t} = \cos 2\pi t + \mathbf{i} \operatorname{sen} 2\pi t;$$

en efecto, para los argumentos entre 0 y 2π, los únicos ángulos que tienen el mismo seno y coseno simultáneamente son 0 y 2π.

La aplicación f es una identificación, pues es continua, sobre y cerrada (ver Nota 14.2.4).

Por tanto el espacio de clases es homeomorfo a S^1.

En resumen, la proyección canónica de una relación de equivalencia es una identificación, y cualquier otra identificación que tenga asociada la misma relación de equivalencia tiene un espacio cociente homeomorfo.

Ejercicios 3.3

Cocientes

1) Sea $X = [0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$. Se define sobre X la relación de equivalencia generada por $(0,0) \sim (0,1)$. Demostrar que el espacio cociente $X/\sim$ es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,2] \subset \mathbb{R}$.

2) En $\mathbb{R}^2$ definimos la relación de equivalencia

$$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2.$$

Probar que el espacio cociente X/R es homeomorfo a la semirrecta usual $[0,\infty)$.

3) En $\mathbb{R}^2$ definimos la relación de equivalencia $(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow x - x' = (y')^2 - y^2$. Probar que el espacio cociente X/R es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

4) Sea S/R el espacio cociente del semiplano del plano complejo

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$$

por la relación de equivalencia R definida por:

$$zRz' \text{ si } |z| = |z'|.$$

Probar que S/R es homeomorfo a $[0,+\infty)$.

5) Sea $X = [0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\}$, subespacio de $\mathbb{R}^2$. Se define sobre X la relación de equivalencia generada por $(0,0) \sim (0,1)$ y $(1,0) \sim (1,1)$. Demostrar que el espacio cociente $X/\sim$ es homeomorfo a la circunferencia $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

6) Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ formado por la unión de dos discos $D_- = \mathrm{d}^2 \times \{-1\}$ y $D_+ = \mathrm{d}^2 \times \{+1\}$, donde

$$\mathrm{d}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Definimos en X la relación de equivalencia $\sim$ generada por $(x,y,-1) \sim (x,y,+1)$ si $x^2 + y^2 = 1$.

   a) Probar que el espacio cociente $X/\sim$ es homeomorfo a la esfera

   $$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

   b) Probar que la proyección canónica $p \colon X \to X/\sim$ no es abierta.

7) Consideramos la *recta proyectiva* $\mathbb{R}P^1$ como el cociente de la circunferencia

$$S^1 = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |z|^2 = x^2 + y^2 = 1\}$$

por la relación de equivalencia que identifica z con $-z$.

Demuestra que la proyección canónica $p \colon S^1 \to \mathbb{R}P^1$ es una aplicación abierta.

3-C: Colapsos. Superficies con borde. Superficies cerradas.

Capítulo 17
Colapsos

17.1. Colapsos

Un caso particular de espacio cociente son los llamados "colapsos", donde todos los puntos de un subespacio se identifican en una única clase de equivalencia.

Definición 17.1.1. Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subespacio. Denotamos por X/A el espacio cociente de la siguiente relación de equivalencia: cada punto de X se relaciona sólo con él mismo, excepto los puntos de A, que se relacionan todos entre sí. Es decir, $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ ó $x, y \in A$.

Ejemplo 17.1.2. En el cilindro $X = S^1 \times [0,1]$ consideramos el borde superior $A = S^1 \times \{1\}$. Entonces X/A es un cono, cuyo vértice es la clase $[A]$. (ver Figura 17.1).

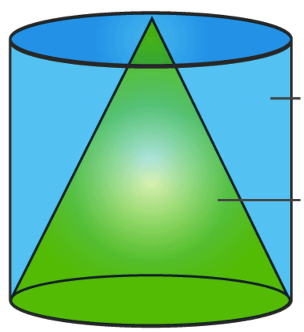


Figura 17.1: El cono se obtiene al colapsar el borde superior del cilindro

Ejercicio 17.1.3. Sea X un espacio topológico y $X \times [0,1]$ el cilindro sobre X. Se llama *cono de* X el espacio cociente $C(X) = (X \times [0,1])/A$ que resulta de colapsar el borde superior $A = X \times \{1\}$ del cilindro. Demuestra que el cono sobre S^1 es homeomorfo al disco cerrado D^2.

SOL: Vamos a probar que X/A es homeomorfo al disco

$$D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(ver Figura 17.2). Cada punto del cilindro tiene dos coordenadas (z,t), con $z \in S^1$ y $t \in [0,1]$. Podemos pensar que son análogas a las coordenadas polares de un punto

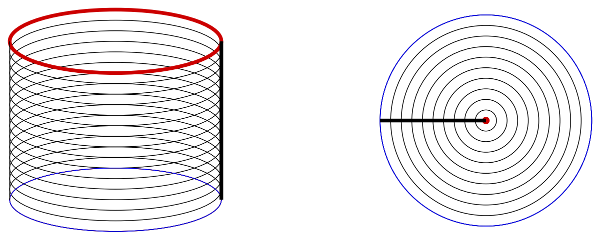


Figura 17.2: El disco como cociente del cilindro

Tomada de *Apuntes* por A. Gómez Tato

del disco, pues el vector unitario z determina una dirección en $\mathbb{R}^2$, y t determina el módulo. El borde $t = 1$ (el que se colapsa) va a corresponder al origen, mientras que el borde $t = 0$ pasará a ser el borde exterior del disco. Esto nos lleva a definir la aplicación

$$f\colon (z,t) \in S^1 \times I \mapsto (1-t)z \in D^2.$$

Nótese que consideramos z como un vector de $\mathbb{R}^2$ y lo multiplicamos por un escalar, para acercarlo o alejarlo manteniendo la dirección, usando la norma $|z|^2 = x^2 + y^2$.

Vemos que $R_f = R$ porque $f(z,1) = (0,0), \forall z$, y f es inyectiva en el resto del dominio.

Falta probar que f es una identificación, con los argumentos habituales.

Ejemplo 17.1.4. En $X = [0,2]$ consideramos $A = [1,2]$. Entonces al colapsar A obtenemos el intervalo $[0,1]$.

En efecto, tenemos la aplicación $f\colon [0,2] \longrightarrow [0,1]$ dada como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Claramente p es continua, sobreyectiva y cerrada, y $R_f = R$. Por tanto $X/A \cong [0,1]$.

Ejemplo 17.1.5. La esfera S^2 puede obtenerse a partir del disco D^2 colapsando todo su borde (ver Figura 17.3):

$$\partial D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} = S^1.$$

Ejercicio 17.1.6. Demostrar que al colapsar el borde de un disco obtenemos una esfera.

Para ello tendremos en cuenta que un punto de la esfera

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

queda unívocamente determinado por su proyección $v = (x,y)$ en el plano XY y por la coordenada $z \in [-1,+1]$, y que se cumple $|v|^2 + z^2 = 1$.

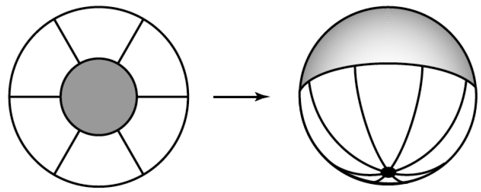


Figura 17.3: La esfera obtenida al colapsar el borde de un disco,

Tomada de *Topología* de Munkres

Por su parte, un punto del disco

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$$

es un vector w de norma $|w| \leq 1$. Para definir $v(w)$ la idea es mantener la dirección de w (que está dada por el vector unitario $w/|w|$) pero estirarlo o encogerlo en función de su norma, de modo que el origen vaya en (la proyección de) el polo norte, la circunferencia $|w| = 1/2$ vaya en el ecuador y todo el borde del disco vaya en (la proyección de) el polo sur. Es decir, pondremos como primeras coordenadas

$$h(|w|) \cdot \frac{w}{|w|}, \quad w \neq 0,$$

(ver Figura 17.3). Tiene que cumplirse $h(0) = 0$, $h(1/2) = 1$ y $h(1) = 0$. Además la función h tiene que ser creciente en $[0, 1/2]$ y decreciente en $[1/2, 1]$. Por tanto será del tipo $h(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$ (valdría también una poligonal, o una parábola invertida).

Por otro lado, la altura $z = z(|w|)$ debe cumplir $z(0) = 1$, $z(1/2) = 0$ y $z(1) = -1$, siempre decreciente. Nos vale $z(t) = \cos(\pi t)$.

Podemos interpretar $\pi t \in [0, \pi]$ como la *colatitud*, es decir, el ángulo que forma el eje OZ con el vector director del punto de la esfera (ver Figura 17.4).

De este modo $f : D^2 \longrightarrow S^2$ dada por

$$f(w) = \begin{cases} \left(h(|w|) \cdot \frac{w}{|w|}, z(|w|)\right) & \text{si } w \neq 0, \\ (0, 0, 1) & \text{si } w = 0, \end{cases}$$

cumple $|f(w)|^2 = h^2 + z^2 = 1$.

Queda por comprobar que f es una identificación. La continuidad en $w = 0$ se sigue de la continuidad de la primera componente, ya que la función

$$H(x, y) = \frac{\operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

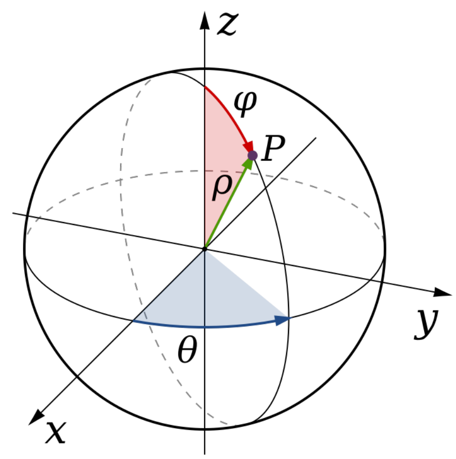


Figura 17.4: Colatitud φ (rojo) y longitud θ (azul)

Tomado de Wikimedia Commons, dominio público

cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} H(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{t} = \pi,$$

luego

$$\lim_{w\to 0} H(w)\cdot w = 0.$$

Que f es sobre y cerrada es un ejercicio.

Capítulo 18
Superficies con borde

18.1. Superficies con borde

18.1.1. El disco

El ejemplo más sencillo de superficie con borde es el disco cerrado

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

El disco es homeomorfo al producto $I \times I$.

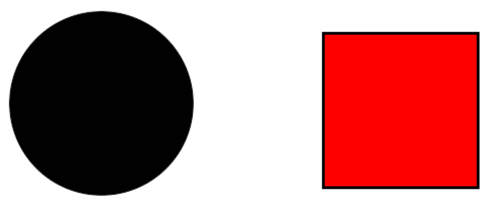


Figura 18.1: El disco unidad D^2 (círculo) y el cuadrado $I \times I$

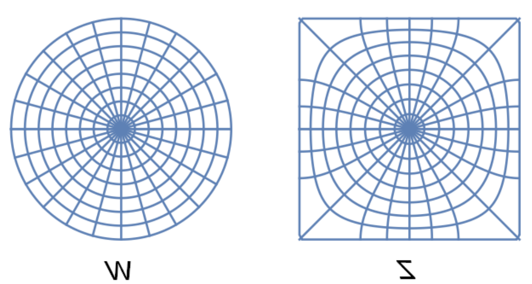


Figura 18.2: Homeomorfismo entre el disco y el cuadrado

Ejercicio 18.1.1. Probar que el disco D^2 y el cuadrado $I \times I$ son homeomorfos.

SOL: Vamos a definir explícitamente un homeomorfismo $f : \mathbb{D}^2 \to I \times I$ usando coordenadas polares (r, θ) en el disco $0 \leq r \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y en el cuadrado. Pondremos

$$f(r, \theta) = ((h(r, \theta), \theta)$$

es decir estiramos o encogemos el segmento que va del origen al punto del disco. Dividimos el disco en cuatro cuadrantes

$$C_1 = [-\pi/4, +\pi/4], C_2 = [\pi/4, 3\pi/4], C_3 = [3\pi/4, 5\pi/4], C_4 = [5\pi/4, 7\pi/4].$$

En el primer cuadrante C_1 necesitamos que $h(0) = 0$ (el origen), y

$$h(1) = (1 + \tan^2\theta)^{1/2} = \frac{1}{\cos\theta}$$

(es lo que mide el segmento correspondiente al ángulo θ hasta cortar el borde de la derecha), por lo que vamos a transformar el intervalo $[0, 1]$ en $[0, \frac{1}{\cos\theta}]$, mediante la aplicación $h(r, \theta) = r/\cos\theta$.

En general, pondremos $h(r, \theta) = r/F(\theta)$ donde

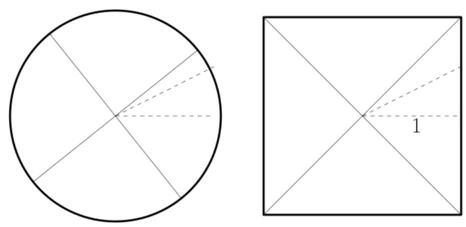


Figura 18.3: La función h

$$F(\theta) = \begin{cases} \cos\theta & \text{si } \theta \in C_1, \\ \operatorname{sen}\theta & \text{si } \theta \in C_2, \\ -\cos\theta & \text{si } \theta \in C_3, \\ -\operatorname{sen}\theta & \text{si } \theta \in C_4. \end{cases}$$

Su gráfica está en la Figura 18.4. Se demuestra que f es un homeomorfismo probando que es continua (usando que F es función combinada en cerrados o usando la fórmula $F(\theta) = \max\{|\cos\theta|, |\operatorname{sen}\theta|\}$), biyectiva y cerrada.

18.1.2. Cilindro

El cilindro $S^1 \times [0, 1]$ se obtiene a partir del cuadrado $I \times I$ introduciendo la relación de equivalencia generada por

$$(0, y)R(1, y).$$

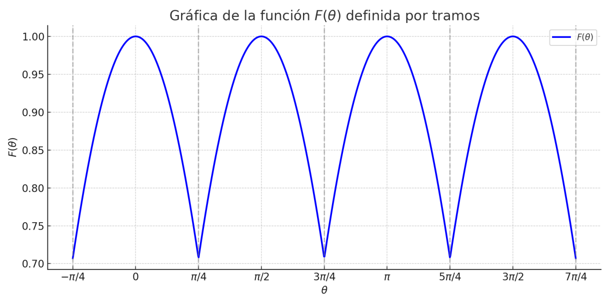


Figura 18.4: La función F

De este modo pegamos los dos bordes verticales, de modo que los intervalos de los bordes horizontales se convierten en circunferencias.

El cilindro tiene un borde formado por dos circunferencias distintas. Hay una cara "de dentro" y una cara "de fuera". Se dice que es una superficie con borde y orientable.

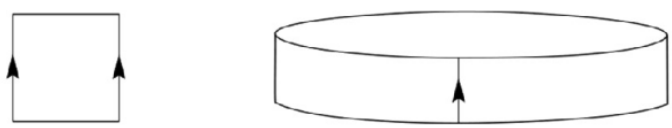


Figura 18.5: Cilindro

18.1.3. Banda de Moebius

Si en $I \times I$ consideramos la relación de equivalencia generada por

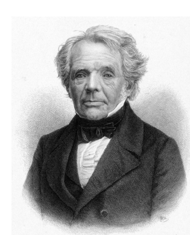
$$(0, y)R(1, 1-y),$$

de nuevo identificamos los bordes verticales, pero esta vez cambiando la orientación.

La superficie obtenida tiene como borde una *única* circunferencia.

Es una superficie no orientable y tiene una única cara.

August F. Möbius (1790 –1898) Nacido en Sajonia, estudió astronomía con Gauss, que entonces era el director del observatorio de Göttingen, y fué profesor en la universidad de Leipzig. Fue el primero en usar coordenadas homogéneas en geometría proyectiva (ver Def. 19.3.3 más adelante). Estudió su famosa "banda" en 1858, aunque el descubrimiento se debe a J.B. Listing.



A. Möbius

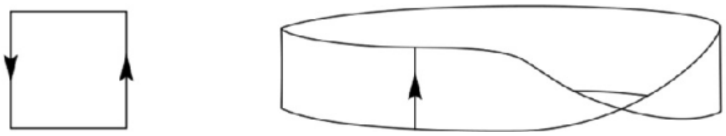


Figura 18.6: La banda de Moebius

Tanto el disco como la banda de Moebius tienen por borde una única circunferencia. Si identificamos el borde de un disco con el de otro, obtenemos la *esfera*; un disco unido por el borde con una banda de Moebius nos dará el *plano proyectivo*; dos bandas de Moebius unidas por sus bordes servirán para obtener la *botella de Klein*. Todas estas superficies "cerradas" (es decir, sin borde), las estudiaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 19
Superficies cerradas

19.1. Superficies cerradas

Las superficies que no tienen borde se llaman *cerradas* (no confundir este nombre con la noción de subconjunto *cerrado*).

19.1.1. La esfera

El ejemplo más sencillo de superficie cerrada orientable es la esfera. Puede obtenerse al pegar dos discos por el borde.

También se obtiene como cociente de $I \times I$ de la forma indicada en la Figura 19.1.

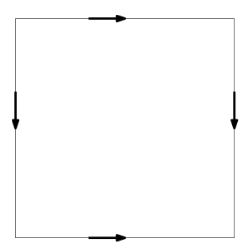


Figura 19.1: Esfera

19.1.2. El toro

Si en un cilindro indentificamos los bordes circulares con la misma orientación obtenemos un toro (Figura 19.2) El toro es el producto $S^1 \times S^1$ de dos circunferencias (Figura 19.3).

19.1.3. La botella de Klein

Para obtener la botella de Klein identificamos los bordes circulares de un cilindro, pero cambiando las orientaciones. Esta maniobra no es posible representarla en $\mathbb{R}^3$, salvo que permitamos que la superfice se corte a sí misma, como en la Figura 19.4.

Es el análogo no orientable del toro.

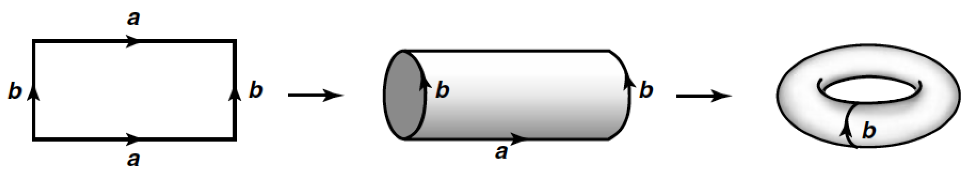


Figura 19.2: El toro como un cociente del disco,

Tomada de *Topología* de Munkres

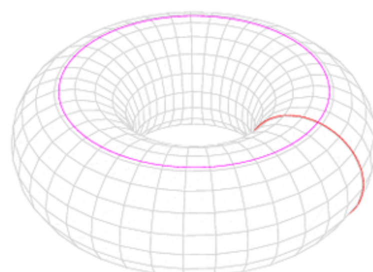


Figura 19.3: El toro como producto $S^1 \times S^1$

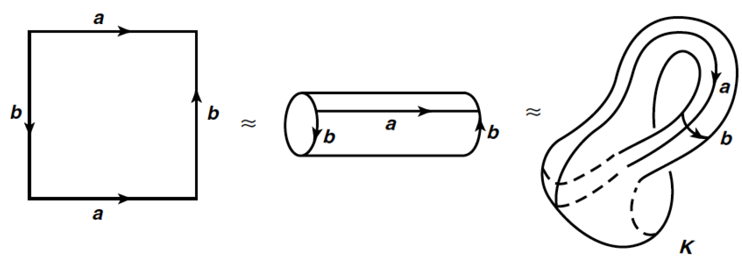


Figura 19.4: La botella de Klein,

Tomada de *Topología* de Munkres

19.2. La proyección estereográfica

La identificación de S^1 con un intervalo con los dos extremos "cosidos" puede entenderse mejor si vemos S^1 como el resultado de "compactificar" la recta real $\mathbb{R}$ con un punto del infinito (el "polo norte") mediante la llamada *proyección estereográfica*.

Ejercicio 19.2.1. Probar que $S^1 \setminus \{PN\} \cong \mathbb{R}$.

SOL: Trazamos una recta desde el Polo Norte (punto $(0, 1)$), pasando por el punto $p = (x, y)$ de la circunferencia, hasta el eje OX (dispuesto a altura $y = 0$, aunque puede ponerse a otra altura, por ejemplo $y = -1$). Llamamos $t = \sigma(p)$ al punto de corte. Por el teorema de Tales,

$$\frac{t}{1} = \frac{x}{1-y}.$$

La aplicación

$$\sigma\colon (x, y) \in S^1 \setminus \{(0, 1)\} \mapsto \frac{x}{1-y} \in \mathbb{R}$$

está bien definida porque $y \neq 1$; y es continua.

Para probar que es un homeomorfismo, calculamos su inversa. Como $x^2 + y^2 = 1$, tenemos

$$t = \frac{x}{1-y} \Longrightarrow x^2 = t^2(1-y)^2 \Longrightarrow (1-y^2) = t^2(1-y)^2 \Longrightarrow (1+y) = t^2(1-y),$$

y por tanto

$$y = \frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

Deducimos

$$x = \pm\sqrt{1-y^2} = \frac{2t}{t^2+4}.$$

Entonces la aplicación inversa es

$$\sigma^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right),$$

que es continua.

Ejercicio 19.2.2. Sea $PN = (0, \overset{n)}{\ldots}, 0, 1)$ el "polo norte" de la esfera

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Probar que $S^n \setminus \{PN\} \cong \mathbb{R}^n$.

Para simplificar las fórmulas escribiremos un punto de la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ como un par $p = (v, x_{n+1})$ tal que $|v|^2 + x_{n+1}^2 = 1$. El vector v representa la proyección del punto sobre el plano base $x_{n+1} = 0$. La recta que pasa por PN y p corta el plano base en un punto $\sigma(p)$ que corrsponde a un vector tv en la dirección de v. Razonando con el triángulo rectángulo determinado por el origen, PN y $\sigma(p)$, tenemos

$$\frac{|tv|}{1} = \frac{|v|}{1-x_{n+1}}$$

y obtenemos $t = \frac{1}{1-x_{n+1}}$. Por tanto, la proyección estereográfica es

$$\sigma\colon (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \setminus \{PN\} \mapsto (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}) \in \mathbb{R}^n;$$

está bien definida porque $x_{n+1} \neq 1$, y es continua.

Para determinar la inversa, dado $w = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, resolvemos

$$t_i = \frac{x_i}{1-x_{n+1}}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tenemos

$$|w|^2 = t_1^2 + \cdots + t_n^2 = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{1-x_{n+1}^2}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}}$$

y deducimos

$$x_{n+1} = \frac{|w|^2 - 1}{w|^2 + 1}.$$

Por tanto , con ese valor,

$$\sigma^{-1}(t_1, \ldots, t_n) = ((1-x_{n+1})t_1, \ldots, (1-x_{n+1})t_n, x_{n+1})$$

es continua.

19.3. El plano proyectivo real

El análogo no orientable de la esfera es el *plano proyectivo* $\mathbb{R}P^2$. Hay al menos tres formas distintas de definirlo: como cociente de un disco D^2; como cociente de una esfera S^2; y como cociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

19.3.1. Cociente del disco

Históricamente, el plano proyectivo surgió como una manera de simplificar la geometría afín, al suponer que dos rectas siempre se cortan en un punto; las rectas paralelas se cortarían en "el infinito". De esta manera se hacían más sencillas muchas demostraciones y se daba una base matemática a algunas ideas sobre perspectiva.

Para ello, tomamos el plano afín (dado por unos conjuntos de puntos y rectas que satisfacen ciertos axiomas) y a cada haz de rectas paralelas le añadimos *un* punto del infinito. Los puntos del infinito formarán una nueva "recta del infinito". De este modo, dos puntos distintos determinan una única recta, y dos rectas distintas determinan un único punto. Nótese que el punto del infinito de un haz de rectas paralelas es el mismo aunque miremos en dirección contraria (ya que dos rectas diferentes no pueden cortarse en dos puntos).

Topológicamente, el plano afín es un disco abierto $\overset{\circ}{D}{}^2$ (el interior de un disco cerrado). La recta del infinito correspondería al borde del disco (denotado por ∂D^2). Para que cada haz de rectas paralelas tenga un único punto del infinito tenemos que identificar cada punto $p \in \partial D^2$ *del borde* con su punto antipodal.

Definición 19.3.1. El plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ es el cociente del disco (círculo)

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$$

por la relación de equivalencia que identifica cada punto p *del borde* ∂D^2 con su punto antipodal $-p$.

Podemos representar esta idea como un cociente de $I \times I$, que es homeomorfo a D^2 (ver Figura 19.5):

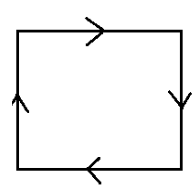


Figura 19.5: El plano proyectivo como cociente del cuadrado $I \times I$

19.3.2. Cociente de la esfera

Si representamos el disco D^2 como el hemisferio superior de una esfera, obtendremos la Figura 19.6.

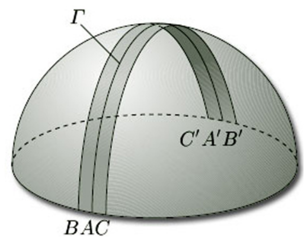


Figura 19.6: El plano proyectivo como cociente de la esfera S^2

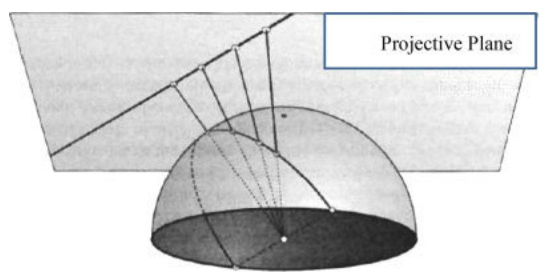


Figura 19.7: Una recta en el plano proyectivo es un círculo máximo

Cada "recta" (Figura 19.7) es ahora una sección de la esfera por un plano conectando dos puntos antipodales del ecuador ("recta del infinito"). Las rectas paralelas a la dada son los cortes que conectan los mismos puntos antipodales, con distinta inclinación de corte (si los puntos antipodales fuesen como los polos norte-sur, el haz de rectas paralelas correspondiente serían los meridianos).

En esta construcción algunas clases tienen un representante (los puntos "afines" del interior del disco) y otras tienen dos representantes antipodales (los puntos del borde o recta del infinito). Para que cada clase de equivalencia tenga dos representantes, podemos considerar la esfera S^2 (que puede verse como dos discos, pegados por el borde, es decir dos hemisferios pegados por el ecuador) y definir la relación de equivalencia que identifica cada punto $p \in S^2$ con su punto antipodal $-p$.

Definición 19.3.2. El plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ es el cociente de la esfera S^2 por la relación de equivalencia $p \sim -p$ que identifica cada punto con su antipodal (Figura 19.8).

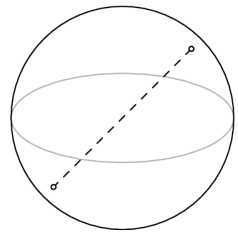


Figura 19.8: El plano proyectivo como cociente de la esfera

Intuitivamente, si nos quedamos con sólo el casquete superior, tendremos un representante de cada clase, pero teniendo cuidado de recordar que en el ecuador seguimos teniendo $p \sim -p$, lo que nos da la construcción de la subsección anterior.

19.3.3. Perspectiva

Cada par de puntos antipodales de la esfera S^2 determina una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen (ver Figura 19.9).

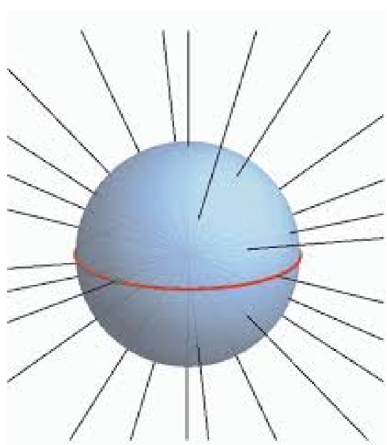


Figura 19.9: El plano proyectivo como conjunto de rectas que pasan por el origen

Por tanto, podemos pensar el plano proyectivo como el conjunto de rectas de ese tipo (subespacios de dimensión 1 en el espacio $\mathbb{R}^3$): cada elemento de $\mathbb{R}P^2$ es una recta. Para definir adecuadamente la topología de ese conjunto, tenemos la siguiente definición:

Definición 19.3.3. El plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ es el cociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ por la relación de equivalencia

$$v \sim w \Leftrightarrow w = tv \text{ para algún } t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Nótese que todos los vectores tv forman una recta. En esa recta hay dos vectores unitarios antipodales, a saber, $\pm v/|v|$.

El origen de esta construcción está en imaginar el plano afín como si contemplásemos un paisaje a través de un cuadro transparente. Cada punto del paisaje detrás del cuadro se conecta con nuestro ojo por un rayo de luz. De este modo cada punto del plano es una recta que pasa por el origen.

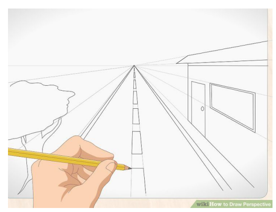


Figura 19.10: Perspectiva

Las *coordenadas homogéneas* de un punto $p \in \mathbb{R}P^2$ son la clase de un representante (vector no nulo) cualquiera, por ejemplo $[2,3,2] = [4,6,4]$ representa la recta $v = t(2,3,2)$, es decir la intersección de los planos $3x - 2y = 0, 2y - 3z = 0$. El punto $(1,2)$ del plano afin tiene coordenadas homogéneas [1,2,1] en el plano proyectivo. El punto del infinito en la dirección del vector $(3,4)$ tiene coordenadas homogéneas $[3,4,0]$.

19.4. Equivalencia de las definiciones

Tenemos una relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, y una relación $\mathcal{S}$ en la esfera. Queremos probar que los espacios cociente son homeomorfos. Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{R}}"'] & S^2 \arrow[d, "\pi_{\mathcal{S}}"] \\
\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\mathcal{R} \arrow[r, "\bar{F}"] & S^2/\mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

El homeomorfismo $\bar{F}$ va a venir inducido por la aplicación

$$F \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to S^2$$

que envía cada vector $v \neq 0$ en el vector unitario $v/|v|$,

$$F(v) = v/|v|.$$

Esta aplicación verifica

- $v \,\mathcal{R}\, w \Rightarrow F(v) \,\mathcal{S}\, F(w)$. En efecto, si $w = tv$, $t \neq 0$, entonces

  $$\frac{w}{|w|} = \frac{tv}{|t||v|} = \frac{t}{|t|}\frac{v}{|v|} = \pm\frac{v}{|v|}.$$

  Por tanto $\bar{F}$ está bien definida como

  $$\bar{F}([v]_{\mathcal{R}}) = [F(v)]_{\mathcal{S}}.$$

- $F(v) \,\mathcal{S}\, F(w) \Rightarrow v \,\mathcal{R}\, w$. Tenemos

  $$\frac{v}{|v|} = \pm\frac{w}{|w|} \Rightarrow w = \pm\frac{|w|}{|v|}v = tv, \quad t \neq 0.$$

  Esto significa que $\bar{F}$ es inyectiva, porque

  $$\bar{F}([v]) = \bar{F}([w]) \Rightarrow [F(v)] = [F(w)] \Rightarrow [v] = [w].$$

- $\bar{F}$ es continua porque sale de un cociente y $\bar{F} \circ \pi_{\mathcal{R}} = \pi_{\mathcal{S}} \circ F$, que es continua.

Para ver que $\bar{F}$ es un homeomorfismo, definimos su inversa $\bar{G}$ como la aplicación inducida en los cocientes por la inclusión

$$G\colon S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

- $\bar{G}$ está bien definida porque

  $$p \,\mathcal{S}\, q \Rightarrow q = \pm p \Rightarrow q = tp, t \neq 0, \Rightarrow p \,\mathcal{R}\, q.$$

- Tenemos $F \circ G = \mathrm{id}$ porque si $p \in S^2$ es $|p| = 1$, luego

  $$FG(p) = F(p) = \frac{p}{|p|} = p.$$

  En cambio, *no* es cierto que $G \circ F$ sea la identidad. Pero sí se cumple $\bar{F} \circ \bar{G} = \mathrm{id}$ y $\bar{G} \circ \bar{F} = \mathrm{id}$, como se comprueba fácilmente.

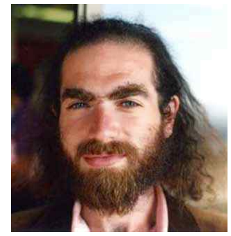
- $\bar{G}$ es continua porque sale de un cociente y

  $$\bar{G} \circ \pi_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{R}} \circ G$$

  es continua.

Por tanto $\bar{F}$ es un homeomorfismo.

Todas estas construcciones serán de utilidad en la asignatura *Topología de superficies*.



G.Y. Perelman

Grigori Y. Perelman (1966 –) Matemático ruso, probó la conjetura de Poincaré en 2006, pero rechazó aceptar la Medalla Fields y el premio Clay de 1 millón de dólares. En 1982 había ganado la Olimpiada Matemática Internacional, lo que le permitió entrar en la Universidad de Leningrado (actualmente San Petersburgo). Leyó la tesis en 1990 y después visitó París, Nueva York y Berkeley. En 1994 dió una conferencia en el ICM de Zürich. Tras conocer los artículos de R. Hamilton sobre el flujo de Ricci, empezó a trabajar solo en la conjetura de Poincaré y en el teorema de gemetrización de Thurston, que permitían clasificar todas las variedades topológicas de dimensión 3. Hizo públicos sus resultados en 2002-2003 y recibió numerosas ofertas de trabajo, que rechazó. También rechazó dar una conferencia plenaria en el ICM 2006 en Madrid, y en la actualidad parece que está retirado de las matemáticas.

Ejercicios 3.4

Colapsos

1) En el intervalo $X = [-1, +1]$ colapsamos el subespacio $A = (-1, +1)$. El espacio cociente es un espacio topológico finito con tres elementos $X/A = \{a, b, c\}$. ¿Cuál es su topología?

2) Probar que el colapso $\mathbb{R}/[-1, 1]$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Determinar si el colapso $\mathbb{R}/(-1, 1)$ es homeomorfo o no a $\mathbb{R}$.

Superficies

3) Consideramos la botella de Klein K^2 como el cociente de $I \times I$ por la relación de equivalencia que identifica $(x, 0)$ con $(1 - x, 1)$ y $(0, y)$ con $(1, y)$.

   a) Determinar si la proyección canónica $p : I \times I \longrightarrow K^2$ es una aplicación abierta.

   b) Demostrar que el subespacio $J = p(\{\frac{1}{2}\} \times I)$ de K^2 es homeomorfo a S^1.

4) Sea B la banda de Moebius definida como un cociente de $I \times I$ donde identificamos $(0, y)$ con $(1, 1 - y)$.

   a) Probar que la imagen del intervalo $y = 1/2$ es una circunferencia (la "espina de la banda").

   b) Probar que la imagen de cada uno de los intervalos $y = 0$ y $y = 1$ es una circunferencia (el "borde" de la banda).

   c) ¿Qué curva es la imagen de la unión de los intervalos $y = 1/3$ y $y = 2/3$? ¿Qué ocurre si cortamos B por esa curva? (es decir, describir las imágenes de la región $1/3 \leq y \leq 2/3$ y de su complementario).

5) Una superficie tórica S en $\mathbb{R}^3$ está dada por la ecuación

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 4.$$

   Demostrar que S es homeomorfa al cociente de $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ por la relación $(s, 0)R(s, 1)$ y $(0, t)R(1, t)$.

   Sugerencia: utilizar la parametrización

$$\begin{aligned} x &= (3 + 2 \operatorname{sen} s) \cos t, \\ y &= (3 + 2 \operatorname{sen} s) \operatorname{sen} t, \\ z &= 2 \cos s. \end{aligned}$$

6) En los complejos $X = \mathbb{C}$ (que topológicamente son $\mathbb{R}^2$) definimos la relación de equivalencia
$$z \sim w \iff \exists m, n \in \mathbb{Z} \colon z - w = m + n\mathbf{i}.$$

a) Probar que el cociente $X/\sim$ es homeomorfo al toro.

b) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Probar que la aplicación
$$f \colon X/\sim \to X/\sim, \qquad f([x + y\mathbf{i}]) = [ax + cy + (bx + dy)\mathbf{i}]$$
está bien definida.

c) Probar que f es un homeomorfismo si y sólo si $ad - bc = 1$.

Tema 4: Axiomas de separación y numerabilidad

Capítulo 16
Primer axioma de numerabilidad

Un problema importante en Topología General es decidir cuando una topología procede de una métrica. Cuando esto ocurre se dice que el espacio es *metrizable*.

Por ejemplo, hemos visto que la topología usual de $\mathbb{R}^n$ procede de la métrica euclidiana (y de otras varias diferentes). Veremos en cambio que no hay ninguna métrica que induzca la topología de Sorgenfrey en la recta.

Para ello, debemos estudiar algunas propiedades típicas de los espacios metrizables. Una de ellas será ser *Hausdorff*, una propiedad de separación que veremos más adelante. La otra es ser *primero numerable*.

16.1. Espacios primero numerables

Recordemos que

1) Un *entorno* del punto $x \in X$ es cualquier conjunto N tal que existe un abierto U con $x \in U \subset N$. Por ejemplo, un abierto que contenga a x es un entorno de x. En $\mathbb{R}^2$, una bola cerrada $B[x, r]$, con $r > 0$, es un entorno de x. En cambio $\{x\}$ no lo es.

2) La colección de todos los entornos de x se denotará por $\mathcal{N}_x$.

3) Una *base local de entornos* para el punto $x \in X$ es una colección $\mathcal{B}_x$ de entornos de x tal que para cualquier entorno $N \in \mathcal{N}_x$ existe algún $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset N$. Casi siempre usaremos entornos *abiertos*.

Ejercicio 16.1.1. Demostrar que la condición 3) basta comprobarla para los entornos *abiertos* $N = U \in \mathcal{N}_x$.

SOL: : "⇒" Si la condición 3) es cierta para todos los entornos, en particular es cierta para los entornos abiertos.

"⇐" Recíprocamente, sea $N \in \mathcal{N}_x$. Por ser entorno, existe un abierto U tal que $x \in U \subset N$. Por hipótesis, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset U$, por tanto $x \in B \subset N$.

Definición 16.1.2. Un espacio topológico (X, τ) es *primero numerable* (o verifica el "primer axioma de numerabilidad") si cada punto tiene alguna base local de entornos que sea numerable.

Ejemplo 16.1.3. En $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ sabemos que una base local en el punto $x \in \mathbb{R}$ son los intervalos $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. Sin embargo esta base local no es numerable. Pero la colección de intervalos $B_n = (x - 1/n, x + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, también es una base local en x, y es una colección numerable. Por tanto $\mathbb{R}$ es 1-numerable.

Ejemplo 16.1.4. La recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_{\text{sorgenfrey}})$ también es primero numerable. En cada punto $x \in \mathbb{R}$ podemos tomar como base local los intervalos $B_n = [x, x + 1/n)$, que forman una colección numerable.

Nota 16.1.5. En la Definición 16.1.2 anterior se pide que la base local $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea numerable. No se pide que cada conjunto B_n sea numerable.

Ejemplo 16.1.6. Cualquier espacio métrico (X, d) es primero numerable. En efecto, las bolas abiertas $B_n = B(x, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, forman una base local numerable en el punto $x \in X$. Para comprobarlo, dado un abierto $x \in U$, como las bolas abiertas forman una base de la topología, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B(x, \varepsilon) \subset U$. Ahora tomamos $n > 1/\varepsilon$, con lo que $x \in B_n \subset B(x, \varepsilon) \subset U$. Por tanto los B_n forman una base local.

Ejercicio 16.1.7. La topología cofinita en $\mathbb{R}$ no es 1-numerable.

SOL: Sea $x \in \mathbb{R}$ cualquier punto y supongamos que tuviese una base local numerable $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $x \in B_n$, todos son no vacíos, por tanto cada $F_n = \mathbb{R} \setminus B_n$ es un conjunto finito (puede ser vacío). Entonces el conjunto $F = \{x\} \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es finito o numerable. Por tanto hay algún número real $y \notin F$, pues $\mathbb{R}$ no es numerable. Tomemos $V = \mathbb{R} \setminus \{y\}$. Es abierto (complementario de un finito), es entorno de x ($x \in V$ porque $x \neq y$) pero no puede haber $x \in B_n \subset V$ porque $\{y\} = \mathbb{R} \setminus V \subset \mathbb{R} \setminus B_n = F_n \subset F$ pero $y \notin F$.

Puede cambiarse $\mathbb{R}$ por cualquier conjunto no numerable.

La siguiente proposición será útil en algunas demostraciones.

Proposición 16.1.8. *En un espacio X primero numerable, en cada punto $x \in X$ puede encontrarse una base local numerable $\{B'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que sea* contractiva*, es decir que cumpla*

$$B'_1 \supset B'_2 \supset \cdots .$$

Demostración. Si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local en x, construimos una nueva haciendo

$$\begin{aligned} B'_1 &= B_1, \\ B'_2 &= B_1 \cap B_2, \\ &\cdots \\ B'_n &= B_1 \cap \cdots \cap B_n, \\ &\cdots \end{aligned}$$

Para ver que es una base local, sea U un abierto que contiene a x; existe n tal que $x \in B_n \subset U$ y entonces $x \in B'_n \subset B_n \subset U$.

Finalmente es fácil comprobar que la nueva colección está formada por entornos de x, es contractiva y es numerable. □

Ejercicio 16.1.9. Probar que ser 1-numerable es una propiedad topológica. Probar que todo subespacio de un 1-numerable es 1-numerable. Probar que el producto de dos espacios 1-numerables es 1-numerable.

16.2. Sucesiones y convergencia

Los espacios 1-numerables nos permiten usar sucesiones para caracterizar varias nociones topológicas, lo que es cómodo en ocasiones.

Recordemos que si X es un conjunto, una *sucesión* en X es una lista de elementos de X (tal vez con repeticiones), es decir una aplicación arbitraria

$$n \in \mathbb{N} \mapsto x_n \in X.$$

La denotaremos por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. También suele usarse la notación (x_n).

Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ tenemos las sucesiones

$$\{0,0,0\dots\}, \quad \{1,1/2,1/3,\dots\}.$$

La notación $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ se usará para el *conjunto de términos* de la sucesión, es decir, sin repeticiones. En el primer ejemplo anterior tendríamos el conjunto $\{0\}$.

Definición 16.2.1. Sea (X,τ) un espacio topológico. Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* al punto $x \in X$, y lo denotamos por

$$\{x_n\} \longrightarrow x, \quad \text{ó} \quad x = \lim x_n,$$

cuando para todo entorno U de x, *casi todos* los términos de la sucesión están en U, es decir están todos salvo un número finito. Esto significa que están todos a partir de algún término x_{n_0}:

$$\exists n_0 \colon x_n \in U, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ejemplo 16.2.2. En la recta de Sorgenfrey, la sucesión $\{x_n = 1/n\}$ converge a 0. En efecto, dado un entorno cualquera U_0, existe algún entorno básico $[0,\varepsilon) \subset U$. Tomando $n_0 > 1/\varepsilon$ ocurre que $0 < 1/n < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, con lo que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.

Nota 16.2.3. Puede ocurrir que en un espacio topológico una sucesión converja a varios puntos diferentes. Por ejemplo en la topología trivial todas las sucesiones convergen a todos los puntos, ya que sólo hay un abierto no vacío.

Ejercicio 16.2.4. Probar que en la recta de Kolmogorov, la sucesión $\{1/n\}$ converge a 0 y a -1000, pero no converge a 1000.

SOL: La sucesión converge a cualquier $x \leq 0$: en efecto dado $N \in \mathcal{N}_x$, hay un abierto $x \in U = (a, +\infty) \subset N$. Como $a < x \leq 0$, *todos* los términos de la sucesión están en U (es deir podemos tomar $n_0 = 1$). En cambio, dado cualquier $y > 0$, la sucesión *no* converge a y, pues $(y/2, +\infty) \in \mathcal{N}_y$ pero en ese entorno sólo están "unos cuantos" términos (aquéllos para los que $n < 2/y$, que son un número finito).

Damos una caracterización de los puntos adherentes mediante sucesiones.

Proposición 16.2.5. *Sea (X, τ) un espacio 1-numerable y sea $A \subset X$ un subconjunto. Se tiene que $x \in \mathrm{Cl}(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Si $x \in \mathrm{Cl}(A)$ es un punto adherente, todo entorno corta a A; en particular para cada abierto B_n de una base local en x podemos encontrar un $a_n \in B_n \cap A$. Como la base puede tomarse contractiva (Prop. 16.1.8), es inmediato que la sucesión converge, $\{a_n\} \longrightarrow x$. En efecto, si U es un entorno de x, hay un $B_{n_0} \subset U$, y todos los sucesivos $n \geq n_0$ verifican $a_n \in B_n \subset B_{n_0} \subset U$.

"$\Leftarrow$" Esta implicación es cierta en cualquier espacio topológico. Si $\{a_n\} \longrightarrow x$ con $a_n \in A$, entonces dado cualquier entorno U de x se cumple $a_n \in U$ para $n \geq n_0$. En particular $a_n \in U \cap A$ por lo que $U \cap A \neq \emptyset$, que es la definición de punto adherente. □

16.3. Continuidad secuencial

Una forma intuitiva de comprobar la continuidad de una función es mediante sucesiones. Por ejemplo la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la Figura 16.1 está dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ x+1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

La función no es continua en $x = 0$ porque la sucesión $\{\frac{1}{n}\} \longrightarrow 0$ pero sus imágenes no convergen a $f(0)$,

$$\{f(\frac{1}{n})\} = \{\frac{1}{n} + 1\} \longrightarrow 1 \neq 0 = f(0).$$

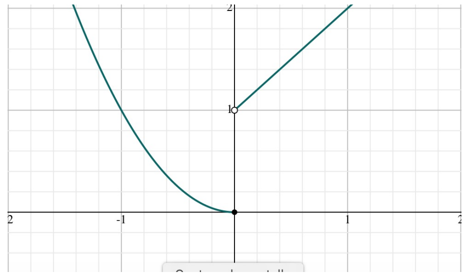


Figura 16.1: Una función discontinua en $x = 0$.

Definición 16.3.1. La función $f\colon X \longrightarrow Y$ es *secuencialmente continua* en $x \in X$ si

$$\{x_n\} \longrightarrow x \Rightarrow \{f(x_n)\} \longrightarrow f(x).$$

Esta manera de comprobar la continuidad es útil en los espacios 1-numerables.

Proposición 16.3.2. *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Supongamos que X es* 1*-numerable. La función f es continua en x si y sólo si es secuencialmente continua en x.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Supongamos que f es continua en $x \in X$ y sea $\{x_n\} \longrightarrow x$ una sucesión convergente a x. Debemos probar que la sucesión $\{f(x_n)\}$ de imágenes converge a $f(x)$. Sea V un entorno de $f(x)$. Por continuidad existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$. Por convergencia tenemos que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$, por tanto $f(x_n) \in f(U) \subset V$, $\forall n \geq n_0$, lo que prueba que $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$.

Como vemos, esta implicación es cierta en cualquier espacio topológico, aunque no sea 1-numerable.

"$\Leftarrow$" Vamos a probarla por reducción al absurdo. Tenemos una función f secuencialmente continua en x y supongamos que no es continua en x. Eso significa que para algún V entorno de $f(x)$ es imposible encontrar un entorno U tal que $f(U) \subset V$. En particular, todos los entornos B_n de su base local fallan, o sea $f(B_n) \not\subset V$ para todo n. Por tanto, para cada n podemos tomar un elemento $x_n \in B_n$ tal que $f(x_n) \notin V$. Como la base podemos suponerla contractiva, se tiene que $\{x_n\} \longrightarrow x$ (por el mismo argumento que hicimos en la primera implicación de la Prop. 16.2.5). Pero $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$, ya que en el entorno V no está ninguno de los términos de la sucesión. Entonces f no sería secuencialmente continua, lo que es una contradicción. $\square$

Ejercicio 16.3.3. Probar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$.

SOL: Tomemos la sucesión $\{(1/n^2, 1/n)\} \to (0,0)$; la sucesión de imágenes

$$f(1/n, 1/n) = \frac{(1/n^2)(1/n)^2}{(1/n^2)^2 + (1/n)^4} = \frac{1}{1+1} = 1/2$$

converge a $1/2 \neq f(0,0)$. La función no es secuencialmente continua en $(0,0)$ y por tanto no es continua en ese punto.

Capítulo 17
Segundo axioma de numerabilidad

17.1. Espacios 2-numerables

Definición 17.1.1. Un espacio X es *segundo numerable* (o verifica el “segundo axioma de numerabilidad”) si admite una base numerable.

La diferencia con 1-numerable es que ahora hablamos de una base *global*.

Ejemplo 17.1.2. La topología usual de $\mathbb{R}$ admite una base formada por todos los intervalos $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, pero ésta no es numerable. Los intervalos de la forma $(x-r, x+r)$, con $r>0$ racional, son también una base, pero tampoco es numerable. Finalmente los intervalos $(q-r, q+r)$ con q, r racionales, $r>0$, forman una base numerable. Por tanto $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ es 2-numerable.

Ejercicio 17.1.3. Demuestra la afirmación anterior.

SOL: Razonemos paso a paso. Dado un entorno N de x, puedo suponer que es de la forma $N=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Puedo tomar un racional q que cumpla $x<q<x+\varepsilon$. Llamemos $d=q-x>0$ a su distancia a x, se cumple $d<\varepsilon$, y tomemos $0<\delta<\varepsilon-d$. Más adelante tomaremos $\delta=1/n$ para algún n. Entonces

$$(q-\delta, q+\delta) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

En efecto, los extremos del intervalo cumplen

$$\begin{aligned}
&q+\delta<q+(\varepsilon-d)=x+\varepsilon, \\
&q-\delta>q-(\varepsilon-d)=q-\varepsilon+d>x-\varepsilon+d>x-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Sólo nos queda garantizar que $x \in (q-\delta, q+\delta)$, es decir que $x<q+\delta$ (siempre se cumple porque $x<q$) y que $x>q-\delta=x+d-\delta$ (se cumple si $d>\varepsilon/2$ porque $\delta<\varepsilon-d$ y sería $d-\delta>2d-\varepsilon>0$).

En resumen tenemos que tomar un racional $q>x$ a una distancia $\varepsilon/2<d<\varepsilon$ y un radio $\delta=1/n<\varepsilon-d$.

Proposición 17.1.4. *Todo espacio* 2*-numerable es* 1*-numerable.*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base numerable, entonces para cada punto $x \in X$ tenemos la base local

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \colon x \in B\}.$$

que es numerable porque $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$. □

El recíproco no es cierto.

Ejemplo 17.1.5. La recta real con la topología de Sorgenfrey no es 2-numerable (aunque era 1-numerable).

En efecto, si admitiese una base numerable $\mathcal{B}$, para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos el abierto $[x, x+1)$, con lo que existe un abierto básico $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, x+1)$. Entonces podríamos definir una aplicación de conjuntos $F \colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ dada por $F(x) = B_x$.

Esta aplicación es inyectiva: si $F(x) = F(y)$ tenemos $x \in B_x \subset [x, x+1)$, $y \in B_y \subset [y, y+1)$ pero como $B_x = B_y$, tenemos $y \geq x$, $x \geq y$ y tiene que ser $x = y$.

Si F es inyectiva, $\mathcal{B}$ no puede ser numerable, porque $\mathbb{R}$ no lo es.

Ejemplo 17.1.6. $\mathbb{R}^n$, con la topología usual, es segundo numerable.

Como base numerable podemos tomar las bolas $B((q_1, \ldots, q_n), r)$ que tienen centro los puntos con todas las coordenadas racionales, $q_i \in \mathbb{Q}$, y radio $r > 0$ también racional.

Esta base es numerable porque $\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ es numerable. Se comprueba que es una base tomando abiertos básicos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_n$.

Ejercicio 17.1.7. Probar que ser 2-numerable es una propiedad topológica. Probar que todo subespacio de un 2-numerable es 2-numerable (con la topología inducida). Probar que el producto de dos espacios 2-numerables es 2-numerable (con la topología producto).

SOL: 1) Si $\mathcal{B}$ es una base (numerable) de X y $f \colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) \subset Y \colon B \in \mathcal{B}\}$$

es una base (numerable) de Y.

2) Si $A \subset X$ es un subespacio, entonces $\mathcal{B}_A = \{B \cap A \colon B \in \mathcal{B}\}$ es una base (numerable) de la topología inducida.

3) Si $\mathcal{B}'$ es base de Y, entonces

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B}' = \{B \times B' \colon B \in \mathcal{B}, B' \in \mathcal{B}'\}$$

es base (numerable) de $X \times Y$.

Capítulo 18
Espacios separables

Definición 18.0.1. Un subespacio $A \subset X$ es *denso* en X si $\mathrm{Cl}(A) = X$.

El siguiente criterio es más fácil de comprobar muchas veces.

Proposición 18.0.2. *El subespacio $A \subset X$ es denso si y sólo si corta a todos los abiertos no vacíos.*

Demostración. "$\Rightarrow$" Si U es un abierto no vacío, tomamos un punto $x \in U$. Entonces $x \in X = \mathrm{Cl}(A)$. Por tanto $U \cap A \neq \emptyset$ por definición de clausura.

"$\Leftarrow$" Sólo tenemos que comprobar el contenido $X \subset \mathrm{Cl}(A)$. Sea $x \in X$. Dado un abierto U que contiene a x, se tiene que $U \neq \emptyset$, por tanto $U \cap A \neq \emptyset$ por hipótesis. Esto significa que x es un punto adherente de A, como queríamos probar. □

Ejemplo 18.0.3. Con la topología usual, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

En efecto, dado un abierto no vacío U, tomamos cualquier punto $x \in U$ y un intervalo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. En ese intervalo hay algún punto racional $x \leq r < x + \varepsilon$. Por tanto $\mathbb{Q} \cap U \neq \emptyset$.

Ejemplo 18.0.4. El mismo argumento, pero con el intervalo $[x, x + \varepsilon)$, prueba que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey.

Definición 18.0.5. Un espacio topológico X es *separable* si contiene un subespacio denso y numerable.

Ejemplo 18.0.6. La recta usual y la recta de Sorgenfrey son espacios separables, pues $\mathbb{Q}$ es denso y numerable.

Ejemplo 18.0.7. $\mathbb{R}^2$, con la topología usual, es separable.

Esta vez tomamos $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ como subespacio denso y numerable. Para ver que es denso basta ver que en cualquier abierto básico $U \times V$ hay puntos con las dos coordenadas racionales.

Ejemplo 18.0.8. $\mathbb{R}^n$ es separable.

Tomamos los puntos $(q_1, \ldots, q_n)$ con todas las coordenadas racionales.

Ejercicio 18.0.9. Sea X un espacio separable y sea $A \subset X$ abierto. Probar que A con la topología inducida es separable.

SOL: Por ser X separable, tiene un subespacio D que es denso y numerable. Tomemos $D' = D \cap A \subset A$. Como $D' \subset D$, es numerable. Para ver que es denso en A veamos que corta a todos los abiertos de A. Sea $U' = U \cap A$ abierto en A, con $U \subset X$ abierto, entonces U' es abierto en X, porque A es abierto. Como D es denso en X, tenemos $D \cap U' \neq \emptyset$. Pero

$$D \cap U' = D \cap U \cap A = D' \cap U = D' \cap U',$$

es decir D' corta a U'.

Proposición 18.0.10. *Si un espacio topológico (X, τ) es 2-numerable, entonces es separable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de τ. En cada abierto básico $B \in \mathcal{B}$ escogemos un punto x_B. Entonces el conjunto

$$A = \{x_B \colon B \in \mathcal{B}\}$$

así formado es numerable (por serlo $\mathcal{B}$) y denso: en efecto, si U es un abierto no vacío, tomamos $x \in U$ y existe B básico tal que $x \in B \subset U$; por tanto $x_B \in A \cap U \neq \emptyset$. □

Nota 18.0.11. El *axioma de elección numerable* necesario para construir A es independiente de los axiomas ZF de conjuntos, lo mismo que ocurre con el axioma de elección completo (es decir, no pueden probarse ni refutarse).

El recíproco no es cierto en general pero sí para los espacios métricos. Es un criterio de metrizabilidad que será usado un poco más adelante.

Proposición 18.0.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico* metrizable *(es decir, la topología procede de alguna métrica). Si X es separable entonces es* 2*-numerable.*

Demostración. El argumento es análogo al que hacíamos con $\mathbb{Q}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Si A es un subespacio denso y numerable, entonces podemos tomar las bolas $B(a, r)$ con $a \in A$ y $r > 0$ racional.

Para comprobar que así tenemos una base global, sea $x \in U$ un punto de un abierto. Entonces existe una bola intermedia $x \in B(x, \varepsilon) \subset U$, pues las bolas forman una base. Como A es denso, en la bola $B(x, \varepsilon/4)$ hay algún punto $a \in A$, por la Proposición 18.0.2. Necesitamos tomar un radio pequeño para que x no esté muy lejos de a.

Como $a \in B(x, \varepsilon/4)$ tenemos $\mathrm{d}(a, x) < \varepsilon/4$.

Tomemos la bola $B(a, r)$, con r racional, $\varepsilon/4 < r < 3\varepsilon/4$.

Por un lado, $x \in B(a, r)$ porque $\mathrm{d}(x, a) < \varepsilon/4 < r$.

Por otro lado $B(a, r) \subset B(x, \varepsilon)$ porque si $y \in B(a, r)$ tenemos

$$\mathrm{d}(y, x) \leq \mathrm{d}(y, a) + \mathrm{d}(a, x) < r + \varepsilon/4 < 3\varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon,$$

por lo que $y \in B(x, \varepsilon)$.

Así que tenemos

$$x \in B(a, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset U$$

por lo que las bolas $B(a, r)$ forman una base.

Forman una colección numerable, porque $(a, r) \in A \times \mathbb{Q}$, que es numerable. $\square$

Ejemplo 18.0.13. La topología de Sorgenfrey en la recta no procede de ninguna métrica. En efecto, es separable, porque $\mathbb{Q}$ es denso y numerable (ver Ejemplo 18.0.4), pero no es 2-numerable (ver Ejemplo 17.1.5)

Ejercicios 4.1

Axiomas de numerabilidad

1) Sea $\tau_K = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \colon x \in \mathbb{R}\}$ la topología de Kolmogorov sobre la recta real $\mathbb{R}$.

   a) Determinar si $\mathcal{B}_x = \{(x-\varepsilon, +\infty) \colon \varepsilon > 0\}$ y $\overline{\mathcal{B}}_x = \{[x-\varepsilon, +\infty) \colon \varepsilon > 0\}$ son bases locales de entornos del punto $x \in \mathbb{R}$.

   b) Demostrar que la recta de Kolmogorov $(\mathbb{R}, \tau_K)$ es 1-numerable.

   c) Determinar si la recta de Kolmogorov $(\mathbb{R}, \tau_K)$ es 2-numerable o no.

2) Probar que la sucesión constante $\{0, 0, \dots\}$ y la sucesión $\{1/n\}$ son convergentes en la recta de Kolmogorov. Determinar sus puntos límite.

3) Sea $f \colon X \to Y$ una aplicación continua, sobreyectiva y abierta entre espacios topológicos. Probar que si X es 1-numerable, entonces Y también lo es.

4) Sea $\mathbb{R}$ dotado de la topología cofinita. Probar que no puede ser 1-numerable.

5) Denotemos por Γ el semiplano cerrado superior
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

   a) Sea $\mathcal{B}$ la colección formada por las bolas usuales
   $$B((x, y), r), \quad y > 0, \ r \leq y,$$
   y por los conjuntos
   $$C(x, y) = \{(x, 0)\} \cup B((x, y), y), \quad y > 0.$$
   Comprobar que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología τ sobre Γ.
   El espacio topológico (Γ, τ) se denomina "el Plano de Moore".

   b) Comparar la topología τ con la topología inducida en Γ por la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

   c) Calcular la clausura y el interior para τ de los siguientes subconjuntos:
   $$A = \{(x, x) \in \Gamma \colon x > 0\}; \qquad B = \{(\tfrac{1}{n}, 0) \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

   d) Demostrar que (X, τ) es primero numerable.

   e) Demostrar que no es segundo numerable.

6) Demostrar que ser separable es una propiedad topológica.

Capítulo 19
Propiedades de separación: espacios Hausdorff

Continuamos estudiando propiedades topológicas que tienen los espacios métricos y que no son ciertas en general para un espacio topológico arbitrario. De este modo tendremos criterios para decidir si el espacio es metrizable.

19.1. Espacios Hausdorff

Esta propiedad aparecía en la primera lista de axiomas para un espacio topológico que dió Hausdorff en 1914. Ahora no se incluye porque hay muchos espacios interesantes que no son Hausdorff, como algunos espacios cociente.

Definición 19.1.1. Un espacio topológico (X, τ) es *Hausdorff* (también se llaman espacios T_2) si dos puntos distintos arbitrarios se pueden separar por entornos disjuntos: si $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 19.1.2. La recta de Sorgenfrey es Hausdorff. En efecto, dados $x \neq y$, supongamos por ejemplo que $x < y$. Tomamos $r = y - x > 0$ y los abiertos $U = [x, x + r)$, $V = [y, y + 1)$. Entonces $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 19.1.3. La recta de Kolmogorov no es Hausdorff.

En efecto, si $x < y$, todos los intervalos $x \in U = (a, \infty)$, $y \in V = (b, \infty)$ se cortan.

Ejemplo 19.1.4. Un espacio con la topología cofinita es Hausdorff si y sólo si es finito. En ese caso la topología es la discreta, que siempre es Hausdorff. En efecto, dos abiertos U, V, no vacíos si $x \in U$, $y \in V$, tienen complementarios F, G finitos, $U = X \setminus F$, $V = X \setminus G$. La condición $U \cap V = \emptyset$ significa $F \cup G = X$, lo que no es posible si X es infinito.

Proposición 19.1.5. *En un espacio Hausdorff los puntos son cerrados.*

Demostración. Si $x \in X$ veamos que $\{x\}$ es cerrado porque $X \setminus \{x\}$ es abierto. En efecto todo punto $y \in X \setminus \{x\}$ es interior al complementario. Para verlo, tomamos abiertos $x \in U$, $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. En particular $x \notin V$, o lo que es lo mismo, $V \subset X \setminus \{x\}$. □

Ejercicio 19.1.6. >Cuándo es Hausdorff la topología trivial?

Proposición 19.1.7. *En un espacio Hausdorff, las sucesiones convergentes tienen un límite único.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente y supongamos que converge a dos puntos x, y. Si fuesen diferentes, existirían abiertos U, V disjuntos, con $x \in U$, $y \in V$. Por definición de convergencia, todos los $x_n \in U$ a partir de un n_0, y tods estarían en V, a partir de un m_0, lo que es contradictorio, pues U, V son disjuntos. Por tanto $x = y$. □

Teorema 19.1.8. *Todo espacio métrico es Hausdorff.*

Demostración. Si $x, y \in X$ son distintos, sea $r = \mathrm{d}(x, y) > 0$ la distancia entre ellos. Entonces si tomamos $U = B(x, r/2)$ y $V = B(y, r/2)$ se tiene $U \cap V = \emptyset$. En efecto, si hubiese $z \in U \cap V$, tendríamos $\mathrm{d}(z, x) < r/2$, $\mathrm{d}(y, z) < r/2$, y por la desigualdad triangular sería

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y) < r/2 + r/2 = r,$$

es decir $\mathrm{d}(x, y) < r$, que es una contradicción. □

Ejemplo 19.1.9. La recta usual es Hausdorff. En general $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual es Haudorff.

Las siguientes proposiciones son meros ejercicios.

Proposición 19.1.10. *Todo subespacio de un Hausdorff es Hausdorff.*

Demostración. Si (X, τ) es Hausdorff, sea (A, τ_A) un subespacio (con la topología inducida). Si $a, a' \in A$, $a \neq a'$, existen abiertos $U, U' \in \tau$ tales que $a \in U$, $a' \in U'$, $U \cap V = \emptyset$. Entonces tomamos $U \cap A, U' \cap A \in \tau_A$ y se tiene $a \in U \cap A$, $a' \in U' \cap A$ y

$$(U \cap A) \cap (U' \cap A) = (U \cap U') \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset. \quad \square$$

Proposición 19.1.11. *Ser Hausdorff es una propiedad topológica. Es decir si X es Hausdorff y hay un homeomorfismo $X \cong Y$, entonces Y es Hausdorff.*

Demostración. Sean $y, y' \in Y$, $y \neq y'$. Si hay un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, entonces existen $x, x' \in$ tales que $f(x) = y$, $f(x') = y'$, porque f es sobreyectiva. Como $x \neq x'$ por ser f inyectiva, existen abiertos $x \in U$, $x' \in X$, con $U \cap V = \emptyset$, por ser X Hausdorff. Finalmente, como f^{-1} es continua, es decir, como f es abierta, tomamos los abiertos $y \in f(U)$, $y' \in f(U')$ y se tiene

$$f(U) \cap f(U') = f(U \cap U') = f(\emptyset) = \emptyset. \quad \square$$

Proposición 19.1.12. *El producto de dos espacios Hausdorff es Hausdorff.*

Demostración. Sean X, Y Hausdorff y sean $(x, y) \neq (x', y')$. Como no pueden tener las dos coordenadas iguales, será por ejemplo $x \neq x'$ (el otro caso es análogo). Entonces tomamos abiertos de X, $x \in U$, $x' \in U'$, con $U \cap U' = \emptyset$.

Ahora es fácil comprobar que $(x, y) \in U \times Y$, $(x', y') \in U' \times Y$, con $(U \times Y) \cap (U' \times Y) = \emptyset$. □

Nota 19.1.13. En general, la propiedad de ser Hausdorff no pasa a los cocientes. Por ejemplo, si en $X = [0, 1]$ colapsamos el subespacio $A = (0, 1)$, el espacio cociente no es Hausdorff. En efecto, la clase $[A]$ no es un cerrado en X/A, lo que contradice la Prop. 19.1.5.

El siguiente resultado a veces es útil en los ejercicios.

Proposición 19.1.14. *X es Hausdorff si y sólo si la diagonal Δ es un cerrado en $X \times X$.*

Demostración. La diagonal es

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X : y = x\}.$$

Sea X Hausdorff. Si $(x, y) \notin \Delta$ veamos que no está en la adherencia de Δ. Como $y \neq x$, tomamos $x \in U$, $y \in V$, con $U \cap V = \emptyset$. Entonces $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$, como se comprueba fácilmente.

La otra implicación es análoga. □

Johann B. Listing (1808–1882) Nació en Frankfurt, Alemania, y consiguió una beca para estudiar Matemáticas y Arquitectura en Göttingen. Pronto llamó la atención de Gauss, con quien colaboró en experimentos de magnetismo. Gauss dirigió su tesis doctoral (1834) y le enseñó los primeros conceptos topológicos. Finalmente Listing escribió el libro "Vorstudien zur Topologie", primera vez que aparece impresa la palabra "Topología". En 1858 descubrió independientemente la banda de Möbius. En Göttingen fue profesor de Física y se especializó en Óptica.

J. Listing

Capítulo 20
Espacios normales

Ahora estudiaremos otra propiedad típica de los espacios métricos.

20.1. Espacios normales

Definición 20.1.1. Un espacio topológico X se dice *normal* si dos cerrados disjuntos pueden separarse por abiertos disjuntos. Es decir, si A, B son cerrados, con $A \cap B = \emptyset$, entonces existen abiertos U, V con $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Proposición 20.1.2. *Todo espacio métrico es normal.*

Demostración. Sean dos cerrados A, B disjuntos, $A \cap B = \emptyset$. Para cada $a \in A$ tenemos una bola $B(a, r_a) \subset X \setminus B$, porque $a \in X \setminus B$ que es un abierto.

Análogamente, para cada $b \in B$ existe $B(b, \rho_b) \subset X \setminus A$.

Ahora tomamos

$$U = \bigcup_{a\in A} B(a, r_a/2), \quad V = \bigcup_{b\in B} B(b, \rho_b/2).$$

Claramente $A \subset U$ y $B \subset V$. Además U y V son abiertos.

Veamos que $U \cap V = \emptyset$. En efecto, si hubiese $z \in U \cap V$ tendríamos que $z \in B(a, r_a/2)$ para algún $a \in A$, y $z \in B(b, \rho_b/2)$, para algún $b \in B$. Entonces, si llamamos $r = \max\{r_a, \rho_b\}$, tenemos

$$\mathrm{d}(a, b) \leq \mathrm{d}(a, z) + \mathrm{d}(z, b) < r_a/2 + \rho_b/2 \leq r/2 + r/2 = r,$$

por tanto $\mathrm{d}(a, b) < r$. Pero esto no puede ser, porque $\mathrm{d}(a, b) \geq r_a$ (ya que $b \notin B(a, r_a) \subset X \setminus B$), y también $\mathrm{d}(a, b) \geq \rho_b$ (porque $a \notin B(b, \rho_b) \subset X \setminus A$). De las dos desigualdades se sigue $\mathrm{d}(a, b) \geq r = \max\{r_a, \rho_b\}$, lo que es una contradicción. □

Nota 20.1.3. Un espacio Hausdorff se dice bambién *espacio* T_2. Un espacio que es al mismo tiempo normal y Hausdorff se dice *espacio* T_4. Por tanto los espacios métricos son T_4.

Ser normal no es una propiedad hereditaria. Tampoco es cierto que el producto de normales sea normal.

Ejercicio 20.1.4. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología

$$\tau = \{X, \emptyset, \{d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

1) Probar que (X, τ) es un espacio normal.

2) Probar que el subespacio (Y, τ_Y), con $Y = \{b, c, d\}$, no es normal.

Ejercicio 20.1.5. Probar que todo subespacio *cerrado* de un espacio normal es normal.

Proposición 20.1.6. *La recta de Sorgenfrey X es normal.*

Demostración. Vamos a probar que $X = (\mathbb{R}, \tau_S)$ es normal. Sean A, B cerrados disjuntos. Para cada $a \in A$ podemos encontrar $a' > a$ tal que $[a, a') \cap B = \emptyset$; en efecto, B es cerrado y $a \notin B$, por lo que hay un entorno abierto básico que no lo corta. Tomemos el abierto $U = \bigcup_{a \in A}[a, a')$, que contiene a A.

Análogamente, para cada $b \in B$ tomemos $[b, b') \cap A = \emptyset$ y $B \subset V = \bigcup_{b \in b}[b, b')$.

Finalmente, tenemos que $U \cap V = \emptyset$ porque $[a, a') \cap [b, b') = \emptyset$, para todo $a \in A$, $b \in B$. Para ver esto, supongamos, por ejemplo, que $a < b$; el otro caso es similar. Pero $[a, a') \cap B = \emptyset$, por tanto $a' \leq b$ (si no, tendríamos $b \in [a, a')$); se sigue que $a, a') \cap [b, b') = \emptyset$. □

Nota 20.1.7. **Por otra parte, *el plano de Sorgenfrey $X \times X$* no es normal. No veremos la demostración.

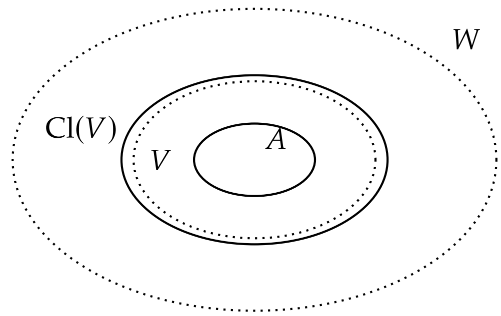
La siguiente caracterización de los espacios normales es útil en la práctica (por ejemplo en el Lema de Uryhson 20.2.1), pues en cierto sentido permite construir aproximaciones abiertas a un conjunto cerrado.

Proposición 20.1.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces son equivalentes:*

- *X es un espacio normal.*
- *Para cada cerrado $A \subset X$ y cada abierto $W \subset X$ tal que $A \subset W$, existe otro abierto $U \in \tau$ tal que*

$$A \subset U \subset \mathrm{Cl}(U) \subset W.$$

**Las secciones marcadas con asterisco no son materia de examen



Demostración. "$\Leftarrow$" Sean $A, B \subset X$ dos cerrados disjuntos. Por hipótesis, para el abierto $W = X \setminus B \supset A$, existe otro abierto U tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset W$. Entonces $B = X \setminus W \subset X \setminus \overline{U} = V$, que es un abierto con $U \cap V = \emptyset$ porque $V = X \setminus \overline{U} \subset X \setminus U$. "$\Rightarrow$" Sea A cerrado y W un abierto que lo contiene. Entonces $B = X \setminus W$ es un cerrado disjunto con A. Por normalidad, existen abiertos disjuntos $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. Veamos que U es el abierto buscado:

a) ya tenemos $A \subset U$; además, $U \subset W$, porque $U \subset X \setminus V \subset X \setminus B = W$.

b) pero además $\overline{U} \subset W$: en efecto, sea $x \in \mathrm{Cl}(U)$, si x no estuviese en W tendríamos $x \in X \setminus W = B \subset V$, y V sería un entorno abierto de x que no corta a U, contradicción. □

Aplicando dos veces la proposición anterior tenemos el siguiente resultado:

Proposición 20.1.9. *Para un espacio topológico (X, τ) son equivalentes:*

1) *X es normal;*

2) *dados dos cerrados $A, B \subset X$ disjuntos $A \cap B = \emptyset$, existen entornos abiertos $A \subset U$, $B \subset V$ tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Demostración. "$\Leftarrow$" Obvio pues si $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ entonces $U \cap V = \emptyset$. "$\Rightarrow$" Si A, B son cerrados disjuntos, por normalidad existen abiertos $A \subset U$, $B \subset V$ con $U \cap V = \emptyset$, y por la Prop. 20.1.8, existen abiertos $A \subset U' \subset \overline{U'} \subset U$, $B \subset V' \subset \overline{V'} \subset V$, y se sigue que $\overline{U'} \cap \overline{V'} = \emptyset$. □

Ejercicio 20.1.10. Probar que la imagen por una aplicación continua y cerrada de un espacio normal es normal; en consecuencia ser normal es una propiedad topológica.

SOL: Por el teorema de cambio de codominio basta hacerlo para el caso en que $f\colon X \to Y$ es continua, cerrada y sobreyectiva. Sea X normal y probemos que Y es normal. Sean A, B cerrados disjuntos de Y. Entonces $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ son cerrados en X, con

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Por normalidad, existen abiertos $U \supset f^{-1}(A)$, $V \supset f^{-1}(B)$ con $U \cap V = \emptyset$.

Si f es un homeomorfismo, podemos tomar los abiertos $f(U)$ y $f(V)$. Pero solo con la hipótesis de "f cerrada" tenemos que usar la Prop. 20.1.8. Tomemos un abierto W tal que

$$f^{-1}(A) \subset W \subset \mathrm{Cl}(W) \subset U$$

y los cerrados $F = f(X \setminus W)$ y $G = f(\mathrm{Cl}(W))$. Entonces

1) $A \subset Y \setminus F$, es decir $A \cap f(X \setminus W) = \emptyset$ porque $f^{-1}(A) \cap W = \emptyset$;

2) $B \subset Y \setminus G$, es decir $B \cap f(\mathrm{Cl}(W))$ porque $f^{-1}(B) \cap \mathrm{Cl}(W) = \emptyset$;

3) $(Y \setminus F) \cap (Y \setminus G) = \emptyset$, es decir $F \cup G = Y$ porque $f(X \setminus W) \cup f(\mathrm{Cl}(W)) = f((X \setminus W) \cup \mathrm{Cl}(W)) = f(X) = Y$.

Por tanto $Y \setminus F$ e $Y \setminus G$ son los abiertos buscados.

20.2. Lema de Uryhson

Una propiedad importante de los espacios normales es que tienen "suficientes" funciones reales.

Teorema 20.2.1 (Lema de Uryhson)**.** *Un espacio X es normal si y sólo si dados A y B dos subconjuntos cerrados disjuntos de X, existe una función continua $f\colon X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(a) = 0$ para todo $a \in A$ y $f(b) = 1$ para todo $b \in B$.*

En otras palabras, los conjuntos cerrados disjuntos no solo se pueden separar mediante entornos, sino también mediante una función.

Demostración. "$\Leftarrow$" Si existe la función f, entonces $U = f^{-1}([0,1))$ y $V = f^{-1}((0,1])$ son dos abiertos que separan A y B.

**"$\Rightarrow$" No la veremos en este curso. Puede verse en [Munkres, J. R., Topología general (en español), 2a. ed. (2002), Prentice Hall, Teorema 33.1, pág. 237]. □

Ejercicio 20.2.2. Sean $A, B \subset X$ dos cerrados disjuntos en un espacio *métrico* (X, d). Probar que la función $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

es continua, acotada y cumple $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$.
sugerencia: probar primero que $d(x,A)$ es continua.

**Las secciones marcadas con asterisco no son materia de examen

Pavel S. Urysohn (1898–1924) Matemático de Odessa (Ucrania, entonces parte de Rusia), estudió Físicas en Moscú, pero en 1919 empezó un doctorado en ecuaciones integrales con N.N. Luzin. Con su inseparable amigo P. Alexandrov visitaron a Hilbert, Hausdorff y Brouwer. Después alquilaron una casa en Bretaña y se ahogó mientras nadaba. Entre otras contribuciones a la Topología construyó una teoría de la dimensión que se publicó después de su temprana muerte. Una pérdida inmensa para la matemática, ya que era uno de los jóvenes más prometedores de su generación.

P. Urysohn

20.3. El teorema de extensión de Tietze

Los espacios normales fueron introducidos por Tietze en 1923. El siguiente Teorema es equivalente al Lema de Uryhson; L. E. J. Brouwer y H. Lebesgue lo probaron primero para $\mathbb{R}^n$, Tietze lo demostró para espacios métricos y Uryhson para espacios normales. Es uno de los resultados más fundamentales de la topología general:

Teorema 20.3.1. *Un espacio topológico X es normal si y sólo cualquier función continua definida en un cerrado puede extenderse al espacio entero, es decir, dado cualquier cerrado $A \subset X$ y cualquier función continua $f\colon A \to \mathbb{R}$, existe una función continua $F\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $F_{|A} = f$.*

20.4. Teorema de metrizabilidad de Uryhson

Los espacios métricos fueron inventados por Fréchet en su tesis doctoral (1906). Hemos visto que la topología de un espacio métrico tiene buenas propiedades (Hausdorff, primero numerable, normal). Por tanto es importante dar condiciones suficientes para que un espacio topológico proceda de una métrica. Uno de los primeros teoremas de este estilo es de Uryhson y fué publicado (póstumamente) en 1925:

Teorema 20.4.1. *Un espacio T_4 (es decir, normal y Hausdorff) y segundo numerable es metrizable (es decir, su topología procede de una métrica)*

Ejercicios 4.2

Axiomas de separación

1) Probar que un espacio topológico *finito* es Hausdorff si y sólo si tiene la topología discreta.

2) *a*) Probar que la recta de Kolmogorov no es un espacio Hausdorff.

   b) Estudiar si $\mathbb{R}$ con la topología cofinita es Hausdorff.

3) Considera el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ como el cociente de la esfera S^2 por la relación de equivalencia que identifica p con $-p$. Prueba que el plano proyectivo es Hausdorff.

4) Sean X, Y dos espacios topológicos y supongamos que Y es Hausdorff. Si $f, g \colon X \to Y$ son dos funciones continuas, demostrar que:

   a) El conjunto $\{x \in X \colon f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

   b) Si $A \subset X$ es denso en X y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, entonces $f = g$.

5) Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua, sobreyectiva y cerrada entre espacios topológicos.

   a) Demostrar que si X es normal y Hausdorff entonces Y también lo es. (sugerencia: usar $Y \setminus f(X \setminus U)$)

   b) Usarlo para probar que el plano proyectivo, la banda de Moebius y la botella de Klein son Hausdorff.

6) Probar que $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita no es normal.

7) Probar que todo subespacio *cerrado* de un espacio normal es normal.

Tema 5: Compacidad

Capítulo 20
Espacios compactos

Los espacios compactos están presentes en muchas ramas del análisis y la geometría y son de importancia fundamental. La noción de *compacidad* es una de las más elaboradas en Matemáticas, y es importante poder enunciarla en términos puramente topológicos.

20.1. Recubrimientos

Sea (X, τ) un espacio topológico.

Definición 20.1.1. Un *recubrimiento* de X es cualquier colección $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$.

Un recubrimiento es *abierto* si cada $U_\alpha \subset X$ es un abierto en X, $U_\alpha \in \tau$.
Un recubrimiento es *finito* si está formado por un número finito de conjuntos $U_1, \ldots, U_n$.

Definición 20.1.2. Un *subrecubrimiento* del recubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es cualquier subcolección $\mathfrak{V} = \{U_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ de $\mathfrak{U}$ que siga siendo recubrimiento, $X = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} U_\beta$.

Ejemplo 20.1.3. La colección $\{(-\infty, 1), (0, +\infty)\}$ es un recubrimiento abierto finito de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$.

Ejemplo 20.1.4. La familia de intervalos $\mathfrak{U} = \{(x-1, x) \subset \mathbb{R} \colon x \in \mathbb{R}\}$ es un recubrimiento abierto de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$.

La subcolección $\mathfrak{V} = \{(n-1, n) \colon n \in \mathbb{Z}\}$ NO es un subrecubrimiento de $\mathfrak{U}$, pues la unión no es $\mathbb{R}$..

Nótese que es imposible encontrar un subrecubrimiento de $\mathfrak{U}$ que sea finito: en efecto, tendría que ser de la forma

$$\{(x_1 - 1, x_1), \ldots, (x_n - 1, x_n)\}$$

y la unión $\bigcup_{k=1}^{n}(x_k - 1, x_k)$ no puede ser $\mathbb{R}$ pues los puntos $x > \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ no están cubiertos.

20.2. Espacios compactos

Definición 20.2.1. Un espacio (X,τ) es *compacto* si todo recubrimiento abierto de X tiene algún subrecubrimiento finito.

Ejemplo 20.2.2. La recta usual $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ *no* es compacta. Por ejemplo, el recubrimiento abierto $\{(x-1,x)\colon x\in\mathbb{R}\}$ no admite ningún subrecubrimiento finito, según hemos demostrado en el Ejemplo 20.1.4.

El siguiente teorema es importantísimo

Teorema 20.2.3 (Teorema de Heine-Borel)**.** *Un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Vimos la demostración en el curso *Topología de los espacios euclidianos*.

Ejemplo 20.2.4. El intervalo $X=[0,1]$ con la topología usual *es* compacto.

Nota 20.2.5. La principal motivación para este teorema fue el Teorema de Weierstrass (1877): toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un máximo. En 1872, Heine había probado que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua. En 1884, Borel enunció en su tesis doctoral el siguiente resultado: "si tenemos un número infinito de intervalos tales que cada punto de un segmento de recta está en alguno de ellos, entonces se puede encontrar un número finito de esos intervalos con la misma propiedad". Fué Schönflies, otro alumno de Weierstrass, el que se dio cuenta de la conexión entre los trabajos de Heine y de Borel. La generalización a recubrimientos arbitrarios se debe a Cousin (1895), aunque suele atribuirse a Lebesgue (1902). El término *compacto* se debe a Fréchet (1904), aunque nuestra definición coincide con lo que en la misma época Alexandrov y Urysohn llamaron *bicompacidad*[*]

En muchas ocasiones tendremos que comprobar la compacidad de un subespacio con la topología relativa. Puede hacerse usando abiertos del espacio ambiente, pero nótese que cambiamos ligeramente la definición de "recubrir" (un contenido en vez de una igualdad).

Proposición 20.2.6. *Sea $B\subset X$ un subespacio de un espacio topológico (X,τ). Entonces B, con la topología relativa τ_B, es compacto si y sólo si de cualquier colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de abiertos de X (es decir, $U_\alpha\in\tau\ \forall\alpha\in\mathcal{A}$) que* recubra *a B (es decir, $B\subset\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}U_\alpha$), existe una subcolección finita $U_{n_1},\dots,U_{n_k}$ que* recubre *a B (es decir $B\subset U_{n_1}\cup\cdots\cup U_{n_k}$).*

Demostración. La demostración es un ejercicio si tenemos en cuenta que los abiertos en B son las intersecciones de abiertos en X con B. $\square$

[*]Extractado de "A pedagogical history of compactness", por Manya Raman Sundstrom, 2010.

Nota 20.2.7. La Proposición anterior nos indica que un espacio topológico (B, τ_B) (o culquiera homeomorfo a él) que sea compacto parecerá compacto en cualquier espacio en el que viva como subespacio. Por eso no se dice *compacto "en"*.

Ejemplo 20.2.8. El intervalo $A = [-1, 0)$ no es compacto. En efecto, podemos recubrirlo con los abiertos $\{(-2, -1/n) \colon n \in \mathbb{N}\}$, de $\mathbb{R}$, y es imposible encontrar un subrecubrimiento finito, ya que

$$(-2, -1/n_1) \cup \cdots \cup (-2, -1/n_k) = (-2, -1/n), \quad n = \max\{n_1, \cdots, n_k\},$$

no contiene a A.

Ejercicio 20.2.9. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio topológico X, que sea convergente a un punto $x \in X$. Probar que el conjunto $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

La definición de compacidad puede reformularse en términos de *cerrados*.

Definición 20.2.10. Una familia $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de cerrados de (X, τ) tiene la *propiedad de intersección finita* si $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset$ para toda subcolección finita $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathcal{A}$.

Proposición 20.2.11. *El espacio (X, τ) es compacto si y sólo si toda familia de cerrados $\mathcal{F}$ con la propiedad de intersección finita tiene una intersección no vacía, $\cap \mathcal{F} = \cap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \neq \emptyset$.*

Demostración. Pasando a los complementarios $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$, si $\cap \mathcal{F} = \emptyset$ entonces $\cup U = X$, es decir los U_α serían un recubrimiento abierto, y un subrecubrimiento finito $U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} = X$ nos daría una familia finita de cerrados con intersección vacía, $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_n} = \emptyset$. □

Ejercicio 20.2.12. Probar que una sucesión *decreciente* de cerrados no vacíos, $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ tiene la propiedad de intersección finita. Por tanto, en un espacio compacto tendría intersección no vacía, $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \neq \emptyset$.

20.3. Propiedades

Proposición 20.3.1. *En un espacio Hausdorff todo subespacio compacto es cerrado.*

Demostración. Sea $A \subset X$ compacto, tenemos que probar $\mathrm{Cl}(A) \subset A$. Sea $x \notin A$ y veamos que no es un punto adherente. Para cada $a \in A$ existen abiertos $a \in U_a$ y $x \in V_a$ tales que $U_a \cap V_a = \emptyset$. Como $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$, de este recubrimiento (por abiertos de X, ver la Proposición 20.2.6), podemos extraer algún subrecubrimiento finito

$V_{a_1}, \dots, V_{a_n}$. Entonces tomamos los abiertos $U = V_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$ y $V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n}$. Se tiene que $A \subset U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. En particular $V \cap A = \emptyset$. Así x no es adherente.

Nótese que necesitamos la compacidad para que V sea intersección *finita* de abiertos. □

La siguiente proposición es similar a la anterior.

Proposición 20.3.2. *Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea X compacto y $F \subset X$ un cerrado. Si tenemos un recubrimiento $\{U_\alpha\}$ de F por abiertos de X, es decir $F \subset \bigcup U_\alpha$, lo completamos con el abierto $X \setminus F$ y ya tenemos un recubrimiento de X. De él extraemos un subrecubrimiento finito $\{U_1, \dots, U_n\} \cup \{X \setminus F\}$, y está claro que los $U_1, \dots, U_n$ recubren F. □

El siguiente resultado es importantísimo:

Proposición 20.3.3. *La imagen continua de un compacto es compacta.*

Demostración. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación continua y sea $A \subset X$ compacto. Sea $\{V_\alpha\}$ un recubrimiento de $f(A)$ por abiertos de Y, es decir

$$f(A) \subset \bigcup_\alpha V_\alpha.$$

Entonces $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ es un recubrimiento abierto de A, porque f es continua y

$$A \subset f^{-1}(\bigcup_\alpha V_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha).$$

Si extraemos un subrecubrimiento finito $f^{-1}(V_1), \dots, f^{-1}(V_n)$, entonces

$$A \subset f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_n)$$

implica

$$f(A) \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n,$$

ya que la imagen directa de la unión es la unión de las imágenes directas, y $f(f^{-1}(V_i)) \subset V_i$. Con lo que hemos encontrado un subrecubrimiento finito para $f(A)$. □

Corolario 20.3.4. *La compacidad es una propiedad topológica, es decir, si X es compacto y $X \cong Y$ es un homeomorfismo, entonces Y es compacto.*

Ejemplo 20.3.5. La circunferencia S^1 es compacta, pues es la imagen de $[0, 1]$ por una aplicación cociente $[0, 1] \to S^1$ que identifica $0 \sim 1$.

La siguiente proposición es muy útil en muchas ocasiones que queramos probar que una aplicación es una identificación.

Corolario 20.3.6. *Sea $f: X \to Y$ una aplicación continua, sea X compacto y sea Y Hausdorff. Entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea $F \subset X$ cerrado. Por la Prop. 20.3.2, F es compacto. La imagen continua $f(F)$ es un compacto; como está contenido en el Hausdorff Y, es cerrado en Y (por la Prop. 20.3.1). □

20.4. Productos

Vamos a probar que el producto de dos espacios compactos es compacto. Necesitamos un lema previo.

Lema 20.4.1 (Lema del tubo)**.** *Sea x_0 un punto del espacio X y sea N un abierto del espacio producto $X \times Y$ tal que $\{x_0\} \times Y \subset N$. Si Y es compacto, entonces existe un entorno abierto W de x_0 en X tal que $W \times Y \subset N$ (ver la Figura 20.1).*

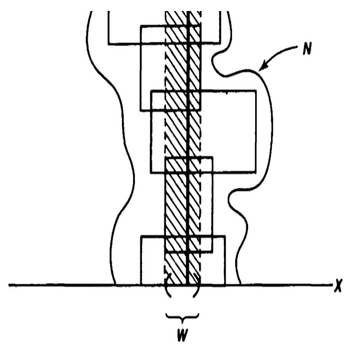


Figura 20.1: Lema del tubo

Demostración. Cada punto $(x_0, y) \in \{x_0\} \times Y$ es interior al abierto N, por tanto hay un abierto básico

$$(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset N,$$

donde $U_y \subset X$ es un entorno abierto de x_0 (entorno que depende de y) y $V_y \subset Y$ es un entorno abierto de y. Los abiertos V_y forman un recubrimiento de Y, que es compacto; por tanto podemos extraer un subrecubrimiento finito $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$.

Tomaremos

$$W = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n},$$

que es un entorno abierto de x_0. Claramente se tiene

$$\{x_0\} \times Y \subset W \times Y \subset N.$$

Para comprobar el último contenido, si $(x, y) \in W \times Y$ entonces $y \in V_{y_k}$ para algún k, y tendremos $x \in U_{y_k}$ porque $x \in W$. Por tanto $(x, y) \in U_{y_k} \times V_{y_k} \subset N$. □

Teorema 20.4.2. *Sean X, Y espacios. Entonces $X \times Y$ es compacto si y sólo si X, Y son compactos.*

Demostración. La implicación "$\Rightarrow$" se sigue de que las proyecciones son continuas y la imagen continua de un compacto es compacta. Por tanto si $X \times Y$ es compacto tenemos que $X = p_1(X \times Y)$ es compacto, y análogamente $Y = p_2(X \times Y)$ es compacto.

"$\Leftarrow$" Sea $\{\Omega_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de $X \times Y$. Para cada $x \in X$, esos abiertos también recubren $\{x\} \times Y$, que es homeomorfo a Y y por tanto es compacto. Podemos extraer un subrecubrimiento finito (que depende de x)

$$\{x\} \times Y \subset \Omega_1^x \cup \cdots \cup \Omega_k^x = N_x$$

y llamamos N_x a la unión. Por el Lema del tubo 20.4.1, encontramos un entorno $x \in W_x \subset X$ tal que $W_x \times Y \subset N_x$.

Ahora, los W_x son un recubrimiento abierto de X, que es compacto, por lo que podemos extraer algún subrecubrimiento finito $X = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_n}$. De este modo

$$X \times Y = (W_{x_1} \times Y) \cup \cdots \cup (W_{x_n} \times Y).$$

Pero como cada $W_{x_i} \times Y$ está contenido en N_{x_i}, que es unión de un número finito de abiertos $\Omega_j^{x_i}$, en total tenemos una cantidad finita de abiertos del recubrimiento original $\{\Omega_\alpha\}$ que recubren $X \times Y$.

Con eso hemos probado que $X \times Y$ es compacto. □

Ejemplo 20.4.3. El toro $S^1 \times S^1$ es compacto. El cilindro $S^1 \times [0, 1]$ es compacto. El cilindro "infinito" $S^1 \times \mathbb{R}$ no es compacto.

Capítulo 21
Espacios compactos Hausdorff

Vamos a probar propiedades especiales de los espacios que son compactos y Hausdorff a la vez.

Lema 21.0.1. *Sea $A \subset X$ un subespacio compacto de un espacio Hausdorff X. Sea un punto $x \notin A$. Entonces existen abiertos $x \in U$, $A \subset V$ tales que $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. No tenemos más que repetir la demostración de la Prop. 20.3.1. □

Corolario 21.0.2. *Un espacio compacto Hausdorff es normal.*

Demostración. Sea X compacto Hausdorff. Sean A, B cerrados en X. Para cada punto $a \in A$ existen abiertos $a \in U_a$, $B \subset V_a$, con $U_a \cap V_a = \emptyset$. (por el Lema 21.0.1). Como los abiertos $\{U_a : a \in A\}$ recubren el compacto A, podemos quedarnos con algún subrecubrimiento finito $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}\}$. Entonces $A \subset U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n} =: U$ y $B \subset V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n} =: V$. Ahora se comprueba que $U \cap V = \emptyset$. □

Ejercicio 21.0.3. Sea (X, τ) un espacio compacto Hausdorff.

1) Sea $\tau_1 \subset \tau$ una topología estrictamente menos fina que τ (es decir, tiene menos abiertos). Probar que (X, τ_1) es compacto pero no puede ser Hausdorff.

2) Sea $\tau_2 \supset \tau$ una topología estrictamente más fina que τ (es decir, tiene más abiertos). Probar que (X, τ_2) es Hausdorff pero no puede ser compacta.

(Sugerencia: considerar la identidad de X con las diferentes topologías).

SOL: 1) Si (X, τ) es compacto Hausdorff y $\tau_1 \subsetneq \tau$, entonces la identidad $\mathrm{id}\colon (X, \tau) \to (X, \tau_1)$ es continua pero no es homeomorfismo. Por tanto no es cerrada. Entonces (X, τ_1) es compacto (imagen continua de un compacto) pero no puede ser Hausdorff, si lo fuese la aplicación sería cerrada (Cor. 20.3.6).

2) Si $\tau \subsetneq \tau_2$, entonces es continua la identidad $(X, \tau_2) \to (X, \tau)$. Obviamente τ_2 es Hausdorf, pues τ lo es y nos sirven sus abiertos para separar puntos. Pero si τ_2 fuese compacta, de nuevo la aplicación sería cerrada y por tanto un homeomorfismo.

Ejercicios 5-1

Compacidad

1) Determinar los subespacios compactos de la recta de Kolmogorov $(\mathbb{R}, \tau_K)$.

2) Probar que, en un espacio compacto, una sucesión decreciente de cerrados no vacíos, $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ tiene intersección no vacía, $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \neq \emptyset$.

3) Sea $(\mathbb{R}, \tau_S)$ la recta de Sorgenfrey. Determinar si los siguientes subespacios son compactos o no:

   a) $A = \mathbb{R}$,
   b) $B = [0, 1)$,
   c) $C = (0, 1]$.

4) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a un punto x en un espacio topológico X. Demuestra que el conjunto

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

   es compacto.

5) Sea X un conjunto infinito con la topología cofinita. Demostrar que X es compacto.

6) Sea X un espacio Hausdorff. Probar que si A es un subespacio compacto de X, entonces su conjunto derivado A' (conjunto de puntos de acumulación) también es compacto.

7) Sean X, Y espacios topológicos compactos Hausdorff, y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que f es continua si y sólo si su gráfica

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

   es cerrada en $X \times Y$.

   (sugerencia: probar que $f^{-1}(A) = p_X(G(f) \cap (X \times A)), \quad \forall A \subset Y$.)

Capítulo 22
Compacidad en espacios métricos

En primer curso vimos la equivalencia, *para subespacios de* $\mathbb{R}^n$, entre ser compacto y ser cerrado y acotado (Teorema de Heine-Borel). Esta equivalencia no es cierta para todos los espacios topológicos, ni siquiera para todos los espacios métricos. Vamos a dar algunas propiedades específicas de los espacios *métricos* compactos.

22.1. Número de Lebesgue

Teorema 22.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $\{U_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de X. Se puede encontrar un número real $\varepsilon > 0$ con la propiedad de que, para todo $x \in X$, la bola $B(x, \varepsilon)$ está contenida en algún abierto U_α (que depende de x) del recubrimiento.*

Un número real $\varepsilon > 0$ con esa propiedad se denomina *nuḿero de Lebesgue* del recubrimiento.

Demostración. Por compacidad existe algún subrecubrimiento finito $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$. Si alguno de ellos es X, nos vale cualquier $\varepsilon > 0$. En caso contrario, los $F_i = X \setminus U_{\alpha_i}$ son no vacíos, y definimos la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{n}\mathrm{d}(x, F_i).$$

Como f es continua y definida en un compacto, tiene un valor mínimo ε (imagen compacta y por tanto acotada y cerrada, así que tiene ínfimo y el ínfimo está en el conjunto). Como $\cap F_i = \emptyset$, para cada $x \in X$ alguna de las $\mathrm{d}(x, F_i) > 0$ (pues $x \notin F_i = \mathrm{Cl}(F_i)$), por tanto $f(x) > 0$. Entonces $\varepsilon > 0$.

Ahora verificamos que este es el número buscado: dado $x \in X$, es $f(x) \geq \varepsilon$, por lo que tiene que existir algún i con $\mathrm{d}(x, F_i) \geq \varepsilon > 0$, por tanto $B(x, \varepsilon) \cap F_i = \emptyset$, es decir $B(x, \varepsilon) \subset U_{\alpha_i}$. □

22.2. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Teorema 22.2.1. *Un espacio métrico es compacto si y sólo si todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación en X.*

Demostración. **

"⇒" Si un subconjunto infinito A de X no tiene puntos de acumulación, entonces A es cerrado en X, y cada punto $a \in A$ es aislado, es decir, tiene un entorno V_a que no contiene otros puntos de A. Entonces los V_a junto con $X \setminus A$ forman un recubrimiento abierto de X que no tiene subrecubrimientos finitos (pues cualquier subrecubrimiento debe contener todos los V_a). Así que X no sería compacto.

"⇐" Supongamos que X no es compacto. Entonces X tiene un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ sin subrecubrimientos finitos. Para cada $x \in X$ sea ε_x el supremo de los radios de las bolas centradas en x y contenidas en algún abierto de $\mathcal{U}$. Si el supremo no es finito, uno de los abiertos es X y ya tenemos un subrecubrimiento finito. Por tanto el supremo es finito y para cada $x \in X$ hay un abierto $U_{\alpha(x)}$ de la cubierta que contiene una bola centrada en x de radio $r_x \geq \frac{1}{2}\varepsilon_x$.

Sea x_1 cualquier punto de X, sea x_2 cualquier punto de X que no esté en $U_{\alpha(x_1)}$ y, en general, sea x_{n+1} cualquier punto de X que no está en la unión $U_{\alpha(x_1)} \cup \cdots \cup U_{\alpha(x_n)}$ (como el recubrimiento no tiene subrecubrimientos finitos, esta unión no puede ser todo X). En particular, todos los x_i son distintos.

Veamos que el conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ no tiene puntos de acumulación. Si los tuviera, las distancias entre los puntos de la sucesión se aproximarían a 0, y como la distancia de x_m a x_n para $m < n$ es al menos $\frac{1}{2}\varepsilon_{x_m}$, entonces los ε_{x_i} tenderían a 0.

Pero si los x_i se aproximan al punto x, los ε_{x_i} se aproximan a ε_x, que no es 0. Así tenemos una contradicción. □

22.3. Espacios secuencialmente compactos

Definición 22.3.1. Un espacio topológico es *secuencialmente compacto* si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Ser compacto y ser secuencialmente compacto son condiciones independientes para un espacio topológico (es decir, ninguna implica la otra, aunque los contraejemplos están fuera del alcance de este curso). Sin embargo, para espacios métricos son equivalentes, como demostraremos a lo largo de este tema.

22.4. Espacios totalmente acotados

Definición 22.4.1. Un espacio métrico X es *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$, se puede recubrir X con un número finito de bolas de radio ε.

** Las secciones marcadas con asterisco no son materia de examen

Ejercicio 22.4.2. Totalmente acotado implica acotado.

SOL: Supongamos que $X = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$. Sea

$$M = \max\{\mathrm{d}(x_i, x_j)\}.$$

Dados $x, y \in X$ existen centros x_i, x_j tales que $x \in B(x_i, 1)$, $y \in B(x_j, 1)$. Entonces

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, x_i) + \mathrm{d}(x_i, y) \leq \mathrm{d}(x, x_i) + \mathrm{d}(x_i, x_j) + \mathrm{d}(x_j, y) < 1 + M + 1,$$

por tanto $\operatorname{diam} X \leq 2 + M$.

Ejercicio 22.4.3. Probar que $\mathbb{Z}$ con la distancia *discreta*

$$\mathrm{d}(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n, \\ 1 & \text{si } m \neq n, \end{cases}$$

es acotado pero no es totalmente acotado.

SOL: Obviamente $\mathbb{Z} = B(0, 2)$, por tanto es acotado; de hecho $\operatorname{diam} \mathbb{Z} = 1$. Sin embargo, para $\varepsilon = 1/2$ tenemos $B(m, \varepsilon) = \{m\}$ así que es imposible recubrir $\mathbb{Z}$ con un número finito de estas bolas.

Proposición 22.4.4. *Todo espacio métrico compacto es totalmente acotado.*

Demostración. Fijando un radio cualquiera $\varepsilon > 0$, las bolas abiertas $B(x, \varepsilon)$, $x \in X$, forman un recubrimiento abierto, del que se puede extraer un subrecubrimiento finito $X = B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$. □

Nota 22.4.5. El recíproco no es cierto. Lo sería si las bolas cerradas fuesen compactas, porque $X = \overline{B}_1 \cup \cdots \cup \overline{B}_n$ sería una unión finita de compactos y por tanto compacto. Vamos a dar un contraejemplo.

Ejemplo 22.4.6. Sea $C([0, 1])$ el espacio formado por todas las funciones continuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, con la distancia $\mathrm{d}(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$. La bola cerrada unidad $B[0, 1]$ alrededor de la función constante $f \equiv 0$ no es compacta, porque no es secuencialmente compacta (ver Teorema 22.6.1). En efecto la sucesión de funciones $y = x^n$ está en la bola, pero ninguna subsucesión es convergente (para esta métrica, la convergencia es la *convergencia uniforme*), ya que la sucesión converge puntualmente a una función discontinua.

22.5. Sucesiones de Cauchy

Definición 22.5.1. En un espacio métrico (X, d), una sucesión $\{x_n\}$ es *de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un índice n_0 tal que $\mathrm{d}(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todo $m, n \geq n_0$.

Al igual que en $\mathbb{R}^n$ tenemos los siguientes resultados:

Proposición 22.5.2. *1) Toda sucesión convergente es de Cauchy;*

2) Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, ella misma es convergente.

3) El conjunto de términos de una sucesión de Cauchy es acotado.

Ejercicio 22.5.3. Probar la Proposición anterior.

Definición 22.5.4. Un espacio métrico se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Esta noción no es topológica. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es completo pero $(0, 1)$ no (aunque son homeomorfos).

En *Topología de les espacios euclidianos* probamos lo siguiente:

Teorema 22.5.5. *1) $\mathbb{R}^n$ es completo.*

2) Un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es completo si y sólo si es cerrado.

22.6. Caracterización de la compacidad en espacios métricos

Teorema 22.6.1. *Para un* espacio métrico *son equivalentes:*

1) X es compacto;

2) toda sucesión decreciente de cerrados no vacíos $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ tiene intersección no vacía;

3) X es secuencialmente compacto.

4) X es totalmente acotado y completo.

Demostración. [**][†]

[**]Las secciones marcadas con asterisco no son materia de examen

[†]Adaptada de Apuntes de A. Sobolev, MATHEMATICS 3103 (Functional Analysis), curso 2012-13, University College London.

"$1 \Rightarrow 2$" La vimos en el Ejercicio 20.2.12.

"$2 \Rightarrow 3$" Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y llamemos

$$F_n = \mathrm{Cl}(\{x_n, x_{n+1}, \dots\})$$

a la clausura del conjunto de términos $\{x_k : k \geq n\}$. Por hipótesis, hay un punto $x \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora construímos una subsucesión convergente $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\} \to x$ poniendo $n_1 = 1$, y para n_{k+1} tomamos el primer término de la sucesión, posterior a n_k y que cumpla $\mathrm{d}(x_{n_{k+1}}, x) < 1/k$. Ese término existe porque $x \in \cap F_n$, luego la bola $B(x, 1/k)$ corta a todas las clausuras.

"$3 \Rightarrow 4$" Primero probemos que X es completo. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, contiene una subsucesión convergente, y por tanto ella es convergente (Ejercicio 22.5.2).

Ahora probemos que es totalmente acotado, por reducción al absurdo. Si hubiese un $\varepsilon > 0$ tal que X no se puede recubrir por un número finito de bolas de radio ε, construyamos una sucesión como sigue: empezamos con cualquier punto $x_1 \in X$; si ya tenemos $x_1, \dots, x_k$, sabemos que

$$B(k) = B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_k, \varepsilon) \neq X$$

y podemos tomar $x_{k+1} \notin B(k)$, es decir $\mathrm{d}(x_{k+1}, x_i) \geq \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces la sucesión no puede tener ninguna subsucesión convergente, porque $\mathrm{d}(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, para todo $i \neq j$.

"$4 \Rightarrow 1$" ‡

Sea X totalmente acotado y completo. Supongamos que hubiese un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X tal que ninguna subcolección finita recubre X, y llegaremos a una contradicción.

Tomemos un recubrimiento finito por bolas de radio $\varepsilon = 1/2$, Alguna de esas bolas, por ejemplo $B(x_1, 1/2)$ no puede estar recubierta por un número finito de abiertos U_α (si no, X lo estaría). Ahora tomemos un recubrimiento finito por bolas de radio $1/4$. De estas bolas fijémonos en las que cortan a $B(x_1, 1/2)$ (tiene que haberlas, puesto que la recubren); de ellas hay alguna, por ejemplo $B(x_2, 1/4)$, que no está cubierta por un número finito de U_α's (si no, $B(x_1, 1/2)$ lo estaría). En la etapa $n + 1$ tendremos un punto x_{n+1} tal que $B(x_{n+1}, 1/2^{n+1})$ corta a $B(x_n, 1/2^n)$ y no está recubierta por un número finito de abiertos U_α.

Entonces tenemos (haciendo la desigualdad triangular con un punto de la intersección de las bolas):

$$\mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

‡Adaptado de T. Tao, UCLA Math 121, Spring 2000 (Section 1) Introduction to Topology: Notes on compact metric spaces.

y por tanto, para $m < n$, será

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= \frac{1 + \cdots + 2^{n-m-1}}{2^{n-2}} = \frac{2^{n-m} - 1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^{m-2}}, \end{aligned}$$

ya que $n - 2 = (m - 1) + (n - m - 1)$.

Esto prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy y por tanto convergente a algún punto $x \in X$. Ese punto está en algún U_{α_0} (los U_α formaban un recubrimiento). Por ser abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$. Por definición de límite de una sucesión hay algún x_{n_0} tal que $d(x_{n_0}, x) < \varepsilon/2$. Y tomando un n más grande, podemos suponer que $2^n > 2/\varepsilon$ y que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$.

Pero entonces se tendría (usando la desigualdad triangular) que

$$B(x_n, \frac{1}{2^n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0},$$

lo que contradice el hecho de que la bola $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ no se puede recubrir con un número finito de U_α's. □

Corolario 22.6.2. *Un espacio métrico compacto es separable, y por tanto 2-numerable.*

Demostración. Por ser totalmente acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto finito A_n tal que las bolas $B(a, 1/n)$, $a \in A_n$, recubren X. Es decir, para cada $x \in X$ existe $a \in A_n$ con $d(x, a) < 1/n$; por ello, $d(x, A_n) < 1/n$. Entonces el conjunto $A = \cup_n A_n$ es numerable (unión numerable de finitos) y es denso: en efecto para todo $x \in X$ se tiene

$$d(x, A) \leq d(x, A_n) < 1/n, \quad \forall n,$$

por tanto $d(x, A) = 0$, es decir $x \in \mathrm{Cl}(A)$. □

Nota 22.6.3. En resumen, en esta versión de Heine-Borel para espacios métricos en vez de $\mathbb{R}^n$, se cambia "cerrado" por "completo" y "acotado" por "totalmente acotado".

Pavel S. Aleksandrov (1896 –1982) Matemático ruso, inventó el término "núcleo" de un homomorfismo. En 1913 entró en la Universidad de Moscú, donde formó parte del grupo de investigación "Luzitania" formado alrededor de N.N. Luzin. Como tema de tesis le propusieron resolver la *hipótesis del continuo*, en el que fracasó (es un indecidible, como probó Cohen hacia 1960). En

P.S. Alexandroff

consecuencia abandonó las matemáticas y se dedicó al teatro. En 1921 empezó a trabajar en Topología con Uryhsonn. Tras la muerte de éste, trabajó con Brouwer en Amsterdam, con Hopf en Göttingen y con Lefschetz en Princeton. En 1935 Alexandrov y su amigo Kolmogorov compraron una casa en Komarovka, cerca de Moscú, por la que durante 40 años pasaron famosos matemáticos extranjeros como Hadamard, Fréchet, Banach, Hopf y Kuratowski. Alexandrov recibió muchos premios y honores y fue vicepresidente del ICM International Congress of Mathematicians en 1962.

Si encuentras alguna errata o tienes alguna observación, por favor escribe a quique.macias@usc.es