FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Introducción de coordenadas en un plano afín

Ada Suárez Urruzola

2021/2022

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Introducción de coordenadas en un plano afín

Ada Suárez Urruzola

Enero, 2022

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Álgebra	
Título: Introducción de coordenadas en un plano afín	
Breve descripción de contenido	
El propósito de este trabajo es unir dos enfoques diferentes de la geometría afín: el enfoque algebraico (o analítico) de la geometría de coordenadas y el enfoque axiomático de la geometría sintética. Para cualquier anillo de división R, el plano de coordenadas R^2 es un plano afín Desarguesiano. El objetivo principal de este trabajo es mostrar lo contrario: que todo plano afín Desarguesiano puede ser considerado como un R^2 al renombrar a sus puntos como pares ordenados de elementos de un anillo de división R y asociar una ecuación lineal con cada recta. Se manejarán los siguientes temas: Axiomas del plano afín. Dilataciones y traslaciones. Construcción del cuerpo. Teorema de Desargues. Teorema de Pappus.	
Recomendaciones	
Otras observaciones	
Bibliografía: E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957. M. K. Bennett, *Affine and Projective Geometry*, A Wiley-Interscience publication, Inc., New York, 1995. R. Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.	

Índice general

Resumen

El objetivo de este trabajo es relacionar la geometría sintética con la geometría analítica coordinatizando un plano afín. Para ello partiremos de una geometría plana, y formularemos tres axiomas geométricos, que asumiremos como verdaderos; y que nos garantizarán la existencia de suficientes puntos y rectas. A continuación introduciremos los conceptos de dilatación y de traslación, con los que, junto con un cuarto axioma, construiremos un cuerpo. Todo esto nos permitirá describir los puntos a través de coordenadas, y las rectas mediante ecuaciones lineales, definiendo así la geometría afín sobre un cuerpo dado, lo cual es el principal objetivo del trabajo. Culminaremos presentando dos teoremas: el Teorema de Desargues y el Teorema de Pappus, y añadiremos también dos ejemplos de planos afines que no verifican los dos últimos resultados.

Abstract

The aim of this work is to relate synthetic geometry to analytic geometry by coordinatizing an affine plane. For that purpose, we will start from plane geometry, and we will formulate three geometrical axioms, which we will assume as true; and which will guarantee the existence of sufficient points and lines. Afterwards, we will introduce the concepts of dilatation and translation, with which, alongside a fourth axiom, we will construct a field. All of this will permit us to describe points through coordinates, and lines by linear equations, defining this way the affine geometry based on a given field, which is the main purpose of the work. We will culminate by presenting two theorems: Desargues' Theorem and Pappus' Theorem, and we will also add two examples of affine planes which do not verify the two last results.

Introducción

Cuando uno piensa en geometría, lo primero que le viene a la cabeza es la geometría Euclidiana, que Euclides describió en su libro *Los Elementos* sobre el año 300 A.C. Partiendo de sus famosos cinco axiomas, desarrolló un conjunto de definiciones y teoremas que le llevarían a construir una de las geometrías más usadas y conocidas de la historia.

En el siglo XIX se desarrollaron otro tipo de geometrías, como la geometría hiperbólica, formulada de forma independiente por los matemáticos János Bolyai y Nikolai Ivanovich Lobachevsky; y la geometría elíptica, descubierta por el matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann. Ambas satisfacen los cuatro primeros axiomas de Euclides, pero no el famoso quinto postulado, el referente a las paralelas, que ha dado lugar a controversia durante siglos, y ha supuesto un verdadero quebradero de cabeza para muchos grandes matemáticos.

Sin embargo esto no nos concierne, pues trabajaremos con una generalización de la geometría euclidiana, la geometría afín.

Los geómetras griegos introdujeron el "álgebra geométrica" sumando y multiplicando longitudes de segmentos en el plano euclidiano. René Descartes (1596–1650) formalizó el álgebra geométrica cuando representó el plano sintético euclidiano como el plano de coordenadas reales. En particular, los puntos de los ejes x e y están en correspondencia biyectiva con los números reales; estos puntos se pueden sumar y multiplicar geométricamente. La adición se realiza mediante desplazamientos paralelos, mientras que la multiplicación utiliza segmentos proporcionales.

Descartes publicó en 1637 *La Géométrie*, en la que esbozaba lo que hoy se denomina geometría analítica (o cartesiana). La idea es bastante sencilla. Se puede asociar a cada punto del plano euclidiano un par de números reales (o coordenadas) de tal manera que toda recta está representada por una ecuación lineal de la forma $ax+by=c$, donde a, b y c son constantes ($a, b \neq 0$). Las circunferencias y las secciones cónicas son representadas por ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$. Descartes comenzó su libro afirmando que "cualquier problema de geometría se puede reducir a términos tales que sólo se necesita conocer las longitudes de ciertas líneas rectas" para resolverlo.

En su *Geometric Algebra* (1957) [1], Emil Artin plantea el problema de coordinatizar un plano afín en los siguientes términos. ¿Qué es lo mínimo que tenemos que suponer sobre un plano afín, desde el punto de vista geométrico, para poder describir sus puntos por pares de elementos de un cuerpo, y sus rectas por ecuaciones lineales?

Esto sugiere una cuestión más general.

¿Qué axiomas de la geometría afín darán una estructura que sea equivalente a la de un espacio vectorial (de dimensión arbitraria) de tal manera que las rectas del espacio vectorial (es decir, las variedades lineales de dimensión 1) correspondan a las rectas de la geometría?

Artin da cuatro axiomas relativos a los puntos, a las rectas y a un cierto grupo de transformaciones llamadas dilataciones; i.e. (intuitivamente) el grupo que consiste en ampliaciones desde los puntos y traslaciones (ampliaciones desde el infinito). Estos axiomas le permiten introducir las coordenadas.

En este caso nuestro enfoque es el siguiente: dada una geometría plana cuyos objetos son puntos y rectas, y donde se suponen ciertos axiomas de naturaleza geométrica, ¿es posible encontrar un cuerpo K tal que los puntos de la geometría dada puedan ser descritos por coordenadas de K y las rectas mediante ecuaciones lineales? Artin elige cuatro axiomas y luego comienza a construir el cuerpo. Al hacerlo, tiene la oportunidad de estudiar el grupo de las dilataciones y su subgrupo normal, el grupo de las traslaciones. Luego demuestra que el conjunto K de todos los homomorfismos que conservan la traza es un cuerpo (el Teorema de Hilbert de que el cuerpo K es conmutativo si y sólo si se cumple el Teorema de Pappus es probado más tarde). Las coordenadas se introducen mediante el uso de un punto fijo y dos traslaciones con trazas diferentes.

A continuación se ataca el problema inverso, en el que se da un cuerpo K y se construye una geometría afín. El cuarto axioma, en presencia de los otros tres, es equivalente al Teorema de Desargues en el plano. Por lo tanto, la geometría que se ha considerado es una geometría Desarguesiana.

Los planes afines más obvios, que se llaman los planos afines clásicos, son aquellos que están coordinatizados por cuerpos conmutativos, como $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ o $GF(q)$, el cuerpo de q elementos, donde $q = p^r$, con p un número primo. Todos estos planos son Desarguesianos y Pappianos. Mostramos el plano afín sobre el cuerpo de los cuaternios de Hamilton, no conmutativo (i.e. un anillo de división), y por lo tanto no Pappiano. También mostraremos algún plano no Desarguesiano, el Plano de Moulton, y que existen muchos planos afines diferentes de los clásicos, por ejemplo, existen siete planos afines de orden 9, incluyendo el plano Desarguesiano asociado al cuerpo de 9 elementos $GF(9)$; que no existen planos afines de orden 6 y 10 y, que actualmente, no se sabe si existen planos afines de orden 12.

Procederemos ahora a describir la organización y contenido del trabajo. Comenzaremos el primer capítulo definiendo la relación binaria entre punto y recta, y la notación. Formularemos tres axiomas geométricos que nos dan la definición de plano afín. Introduciremos también los conceptos de orden de un plano afín, y haz de rectas paralelas, y probaremos algunos resultados sobre planos afines finitos. Concluiremos con una sección de ejemplos, empezando por el plano euclidiano y el plano afín más pequeño (de orden 2), y terminando con un plano afín de orden 9. Con los teoremas de Bruck-Ryser y de Lam-Thiel-Swiercz, afirmamos que no existe un plano afín de órdenes 6 y 10, entre otros. Destacamos también que existen siete planos afines de orden 9, aunque nosotros sólo expondremos uno de ellos, el asociado al cuerpo de Galois de 9 elementos, que es Desarguesiano; y que, a día de hoy, no se conoce ningún plano afín de orden 12.

En el capítulo 2 introduciremos dos aplicaciones: las dilataciones y las traslaciones, definiendo también su traza y su dirección, respectivamente. Veremos que se determinan de forma única, y demostraremos que el conjunto de las dilataciones es un grupo, y que el de las traslaciones es su subgrupo normal. Formularemos y probaremos algunos resultados sobre estos grupos según sus puntos fijos. Para finalizar el capítulo, enunciaremos y demostraremos un teorema que especifica que el subgrupo de traslaciones es conmutativo cuando existen dos traslaciones con direcciones distintas.

Después de haber enunciado nuestros tres axiomas en el primer capítulo, nos falta un cuarto y último axioma, que dividiremos en dos partes. Comenzaremos el tercer capítulo formulando la primera parte del cuarto axioma, Axioma 4a. Definiremos el concepto de homomorfismo que conserva la traza, ilustrándolo con algunos ejemplos. A continuación introduciremos dos aplicaciones, que llamaremos $\alpha + \beta$ y $\alpha \cdot \beta$, y una serie de teoremas referentes a estas y al conjunto de homomorfismos K que conservan la traza. Remataremos el capítulo demostrando que este conjunto K es un cuerpo.

La segunda parte del cuarto axioma la formularemos en el capítulo 4 como Axioma 4b y Axioma 4b P, demostrando acto seguido que ambos enunciados son equivalentes. Expondremos un teorema relativo a dos traslaciones con distinta dirección, que nos servirá para cumplir el propósito de este trabajo: introducir coordenadas. Describiremos así, a través de coordenadas, y apoyándonos para ello en dos traslaciones con direcciones distintas; los puntos y las rectas de un plano afín. Finalmente construiremos una geometría afín sobre un cuerpo, expresando todos los conceptos vistos a lo largo del trabajo (haz de rectas paralelas, los axiomas, las dilataciones, etc.), en términos de coordenadas sobre el cuerpo de los homomorfismos. Concluiremos el capítulo justificando la unicidad de las coordenadas salvo isomorfismos.

El quinto capítulo girará en torno al Teorema de Desargues, publicado por primera vez en 1648 por Girard Desargues (1591–1661). Lo enunciaremos primeramente, distinguiendo dos casos: en el que las tres rectas dadas son paralelas, y en el que las tres rectas intersecan en un punto. Demostraremos la equivalencia de estos con los Axiomas 4b y 4b P, respectivamente. Terminaremos el capítulo exponiendo el Plano de Moulton, ilustrando que es un plano afín no Desarguesiano.

En el último capítulo enunciaremos el Teorema de Pappus, la base para la geometría proyectiva moderna, formulado por el matemático de la antigua Grecia, Pappus de Alejandría (290–350 A.C.). Probaremos seguidamente el Teorema de Hilbert, i.e., el cuerpo construido es conmutativo si y sólo si es Pappiano. Expondremos tres teoremas, entre los que destacamos el Teorema de Hessenberg (1905), que nos garantiza que si un plano afín es Pappiano, entonces es Desarguesiano. Finalizaremos el trabajo con el Plano de Hamilton, el plano afín sobre el conjunto de los cuaterniones, justificando que no es Pappiano con el Teorema de Hilbert.

Capítulo 1

Axiomas del plano afín

1.1. Geometría afín

Tendremos un conjunto de puntos, un conjunto de rectas, y una relación binaria entre ellos: *"P está en l"*.

Así pues, dado un punto P y dos rectas l, m, introduciremos la siguiente notación:

1. Si la recta l pasa por P, diremos que "*P está en l*" y lo denotaremos por $P \in l$. En caso contrario se denotará por $P \notin l$.

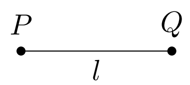
2. Si $P \in l$, $P \in m$, diremos que "*l y m se cortan en P*", y lo denotaremos por $P \in l \cap m$.

3. Si P es el único punto tal que $P \in l \cap m$, diremos que "*l y m intersecan en P*", y lo denotamos por $P = l \cap m$.

Definición 1.1. Sean l y m **dos rectas** tales que $l = m$, o l y m no tienen ningún punto en común, se dice que "l y m son **paralelas**", y lo denotamos por $l \parallel m$. En caso contrario, se denota $l \nparallel m$. Además, si $l \nparallel m$ entonces existe al menos un punto $P \in l \cap m$.

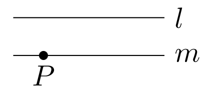
Dicho esto, introduciremos tres axiomas geométricos:

Axioma 1. *Dados P, Q dos puntos distintos, existe una única recta l tal que P y Q están en l. Se denota por $l := PQ$.*

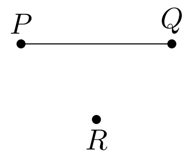


- *Si $l \nparallel m$ entonces existe un único punto $P \in l \cap m$.*
- *Si en $l \cap m$ hay más de un punto, entonces $l = m$.*

Axioma 2. *Dados un punto P y una recta l, existe una única recta m tal que $m \parallel l$ y $P \in m$.*



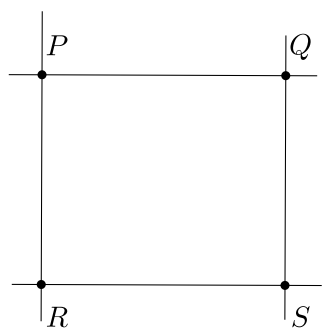
Axioma 3. *Existen tres puntos distintos P, Q, R tal que PQ no pasa por R; o lo que es lo mismo, existen tres puntos no alineados.*



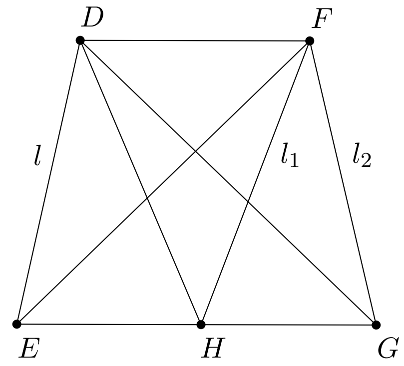
Definición 1.2. Un **plano afín** es un par ordenado $(\mathscr{P},\mathscr{L})$, donde $\mathscr{P}$ es un conjunto no vacío de elementos llamados puntos, $\mathscr{L}$ es una colección no vacía de subconjuntos de $\mathscr{P}$ llamados rectas, y en el que se verifican los Axiomas 1, 2 y 3.

Estos tres axiomas son independientes entre sí. Veámoslo con los tres siguientes ejemplos:

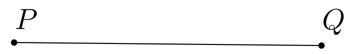
Ejemplo 1.3. Este plano de cuatro puntos y cuatro rectas cumple los Axiomas 2 y 3, pero no verifica el Axioma 1.



Ejemplo 1.4. Este plano de cinco puntos y ocho rectas satisface los Axiomas 1 y 3, pero no el Axioma 2, pues por el punto F se pueden trazar dos rectas l_1 y l_2 paralelas a la recta l.



Ejemplo 1.5. Este plano de dos puntos y una recta verifica los Axiomas 1 y 2, pero no el Axioma 3.



Teorema 1.6. *"Ser paralelo" es relación de equivalencia.*

Demostración.

- Propiedad reflexiva: $l \parallel l$ inmediato por definición.
- Propiedad simétrica: $l \parallel m$ entonces $m \parallel l$ inmediato por definición.
- Propiedad transitiva: Si $l \parallel m$ y $m \parallel r$ entonces:

  Si no hay ningún punto P en $l \cap r$, entonces $l \parallel r$ por definición.

  Si por el contrario l y r se cortan en un punto P, puesto que $l \parallel m$ y $m \parallel r$ por hipótesis, entonces $l = r$ por unicidad de la recta paralela (A2), luego $l \parallel r$.

□

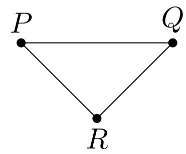
Definición 1.7. A la clase de equivalencia de rectas paralelas la denominamos "**haz de rectas paralelas**".

Teorema 1.8. *Supongamos que existen tres haces de rectas paralelas distintos* π_1, π_2, π_3. *Entonces cualquier otro haz* π *contiene el mismo número de rectas, y dicho número es igual al número de puntos en cualquier recta.*

Observación 1.9. Nótese que con el Axioma 3 podemos concluir que:

$$RP \nparallel PQ \nparallel QR \nparallel RP$$

lo que nos garantiza la existencia de tres haces de rectas paralelas distintos dados tres puntos no alineados.



Definición 1.10. Si cada recta de un plano afín (finito) contiene exactamente n puntos, entonces se dice que el plano es de "**orden** $\boldsymbol{n}$".

Teorema 1.11. *Sea un plano afín de orden* n*, entonces:*

(i) *tiene exactamente* n^2 *puntos.*

(ii) *cada punto está en* $n+1$ *rectas.*

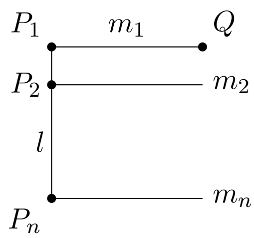
(iii) *cada haz contiene* n *rectas.*

(iv) *el número total de rectas es* $n(n+1)$.

(v) *hay* $n+1$ *haces de rectas paralelas.*

Demostración.
(i) *El plano contiene exactamente* n^2 *puntos.*

Sean l una recta que contiene a los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, y Q un punto que no está en l, $m_1 = P_1Q$, y m_i la recta paralela (y única) a m_1 que pasa por P_i para cada $i = 2, \ldots, n$.



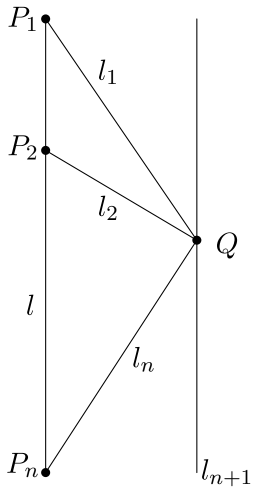
Cada una de las rectas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ contiene n puntos, pues este es el orden del plano. Ninguna de estas n rectas tiene puntos en común con las demás. Luego el número total de puntos es de n^2.

Sea R un punto cualquiera del plano. Entonces o R está en m_1, o existe una recta t paralela a m_1 que contiene a R. De ser como en el último caso, entonces t y l intersecan en uno de los puntos P_i, luego $t = m_i$ para algún $i = 2, \ldots, n$. Así pues, cualquier punto del plano estará en una de estas rectas m_i, luego tiene exactamente n^2 puntos.

(ii) Cada punto está en $n+1$ rectas.

Sea de nuevo l la recta que contiene a los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, y supongamos que Q es un punto arbitrario que no está en dicha recta.

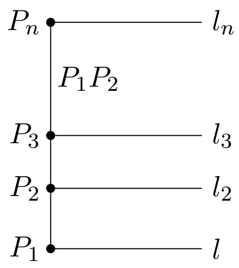
Sean las rectas $l_i = QP_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$; y l_{n+1} la recta paralela a l que pasa por Q.



Todas estas rectas son distintas. Además, cualquier recta que pase por Q, o interseca con l (en cuyo caso será una de las rectas l_i), o es paralela a l (luego será la recta l_{n+1}).

(iii) Cada haz contiene n rectas.

Sea l una recta cualquiera, P_1 un punto en l y P_2 un punto que no está en l. Los puntos de la recta P_1P_2 pueden escribirse de la forma $P_1, \ldots, P_n$. Sea l_i la recta paralela a l que pasa por P_i con $i = 2, \ldots, n$.



Como los puntos $P_2, \ldots, P_n$ son todos distintos, entonces estas $n-1$ rectas también lo son, luego tenemos un total de n rectas.

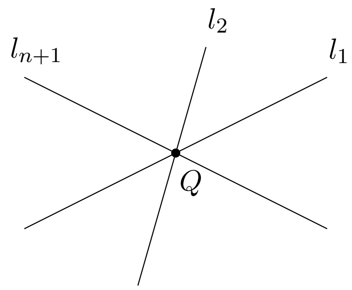
Veamos que son exactamente n.

Sea t cualquier recta paralela a l, entonces debe intersecar con la recta P_1P_2, pues l es la única recta paralela a t que contiene a P_1 (A2). Entonces t interseca con P_1P_2 en P_i para algún i, y así $t = l_i$ para algún $i = 2, \ldots, n$.

Concluimos que las rectas $l_2, \ldots, l_n$ son las únicas rectas paralelas a l, y por tanto cada haz contiene n rectas.

(iv) Hay un total de $n(n+1)$ rectas.

Sea Q un punto cualquiera y $l_1, \ldots, l_{n+1}$ las $n+1$ rectas que pasan por Q.



Cada una de estas rectas pertenece a un haz distinto, y por el apartado anterior, cada uno de estos haces contiene n rectas paralelas, ya demostrado en el anterior apartado. Esto nos da un total de $n(n+1)$ rectas distintas.

Para cualquier recta m, puede ocurrir una de las siguientes cosas:

- m contiene a Q, en cuyo caso $m = l_i$ para algún i, y entonces ya la hemos contado.
- m no contiene a Q, entonces por (A2) existe una única recta paralela a m que pasa por Q, que será una de las rectas l_i. Así m pertenece al haz de rectas paralelas que contiene dicha l_i, ya mencionada en el apartado anterior.

Con esto, deducimos que el número total de rectas es exactamente $n(n+1)$.

(v) *Hay* $n+1$ *haces de rectas paralelas.*

Puesto que cada una de estas $n(n+1)$ rectas está en un y sólo un haz, y cada haz contiene n rectas; entonces hay $n+1$ haces.

□

1.2. Ejemplos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de planos afines. Nótese que para órdenes primos p, los únicos planos conocidos son los asociados al cuerpo $GF(p)$, que además son Desarguesianos. Sí se conocen otros planos afines para potencias de un primo, exceptuando los órdenes 4 y 8. También se sabe que existen siete planos afines de orden 9, de los cuales sólo describiremos el único Desarguesiano. Por último, destacamos que todavía no se ha podido encontrar ningún plano afín de orden 12.

Teorema 1.12 (Teorema de Lam-Thiel-Swiercz)**.** *No existe un plano afín de orden* 10.

Teorema 1.13 (Teorema de Bruck-Ryser)**.** *Si* $n \equiv 1$ *o* $2 \mod 4$*, y* n *no es la suma de dos cuadrados, entonces no existe un plano afín de orden* n*.*

Como consecuencia del Teorema de Bruck-Ryser no existen planos afines de orden 6, 14, 21, 22, ...

Ejemplo 1.14. El plano euclidiano.

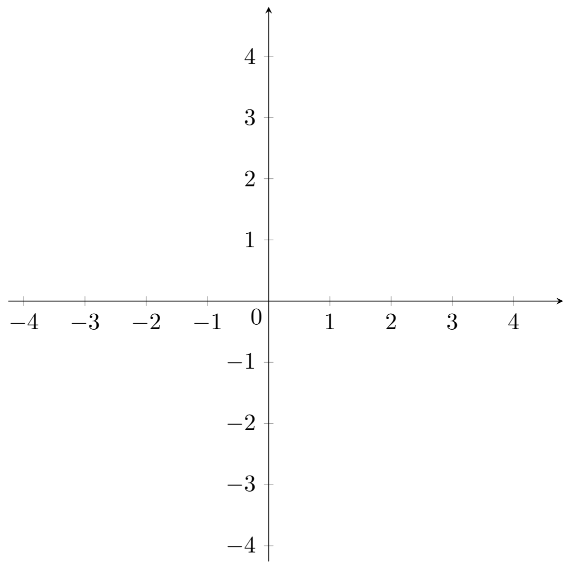


Figura 1.1: Plano euclidiano

Este plano verifica los tres axiomas, luego es un plano afín.

Ejemplo 1.15. $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}_2)$.

Este es el plano afín más pequeño.

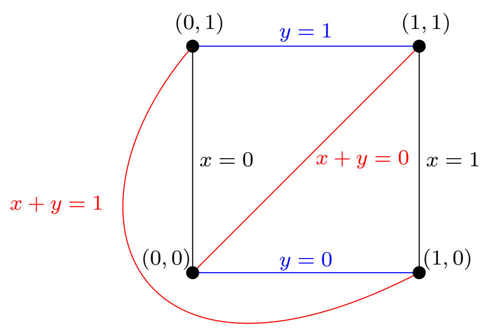


Figura 1.2: Plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}_2)$

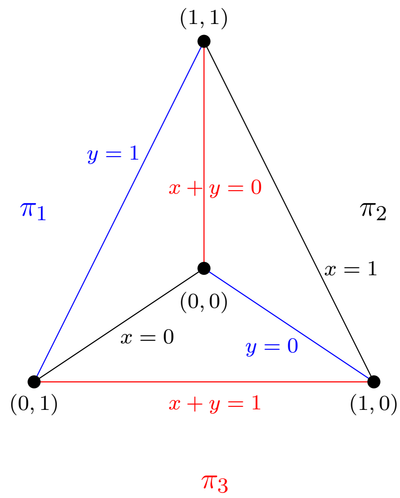


Figura 1.3: Plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}_2)$

Cada recta contiene dos puntos, luego este plano es de orden 2. Así pues, por el Teorema 1.11 sabemos:

(i) El plano contiene $2^2 = 4$ puntos: $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$.

(ii) Cada punto estará en $2+1 = 3$ rectas.

(iii) Cada haz contendrá 2 rectas.

(iv) El número total de rectas es $2(2+1) = 6$, las cuales podemos asociar con una ecuaciones como se muestra en la Tabla 1.15.

(v) Habrá $2+1 = 3$ haces de rectas paralelas, representados en la Figura 1.3 como π_1, π_2, π_3, con los distintos colores correspondiendo a las rectas que contienen.

Para expresar cada una de las rectas como una ecuación, simplemente tenemos en cuenta que estas serán de la forma $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Así pues, las 6 rectas de este plano afín son las siguientes:

Rectas	(a, b, c)
$x = 0$	$(1, 0, 0)$
$y = 0$	$(0, 1, 0)$
$x = 1$	$(1, 0, 1)$
$y = 1$	$(0, 1, 1)$
$x + y = 0$	$(1, 1, 0)$
$x + y + 1 = 0$	$(1, 1, 1)$

Ejemplo 1.16. $\mathbb{A}^3(\mathbb{Z}_3)$.

Este plano es de orden 3, luego por el Teorema 1.11 tendremos lo siguiente:

(i) El plano tiene $3^2 = 9$ puntos.

(ii) Cada punto estará en $3 + 1 = 4$ rectas. Por ejemplo, el punto $(0, 0)$ está en las rectas $x = 0, y = 2, x + y = 2, 2x + y = 2$.

(iii) Cada haz contendrá 3 rectas.

(iv) El número total de rectas es $3(3 + 1) = 12$, cuyas ecuaciones vemos en la Tabla 1.16.

(v) Habrá $3 + 1 = 4$ haces de rectas paralelas, que en la Figura 1.4 se corresponden con los distintos colores.

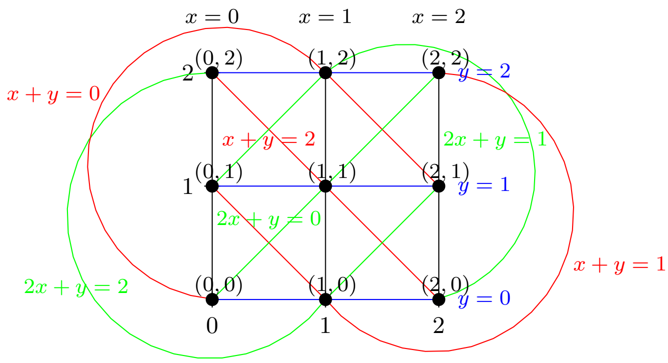


Figura 1.4: Plano afín $\mathbb{A}^3(\mathbb{Z}_3)$

Podemos obtener las ecuaciones de las rectas de forma análoga al Ejemplo 1.15, con la diferencia de que a, b, c están en $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$:

Rectas	(a, b, c)
$x = 0$	$(1, 0, 0)$
$x + 2 = 0$	$(1, 0, 2)$
$x + 1 = 0$	$(1, 0, 1)$
$y = 0$	$(0, 1, 0)$
$y + 1 = 0$	$(0, 1, 1)$
$y + 2 = 0$	$(0, 1, 2)$
$x + y = 0$	$(1, 1, 0)$
$x + y + 1 = 0$	$(1, 1, 1)$
$x + y + 2 = 0$	$(1, 1, 2)$
$2x + y = 0$	$(2, 1, 0)$
$2x + y + 1 = 0$	$(2, 1, 1)$
$2x + y + 2 = 0$	$(2, 1, 2)$

Ejemplo 1.17. $\mathbb{A}(GF(4))$.

En este plano afín sobre el cuerpo de Galois de 4 elementos, $GF(4)$, se describen los puntos como los pares ordenados de $GF(4) \times GF(4)$, y las rectas como los conjuntos de puntos que verifican las ecuaciones lineales con coeficientes en $GF(4)$.

Recordemos que este cuerpo $(GF(4), +, \cdot)$ es de la forma $GF(4) = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\}$, con α raíz del polinomio $X^2 + X + 1$ (irreducible sobre $\mathbb{Z}_2$), y con las dos operaciones definidas como en las siguientes tablas:

$+$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	1	α	$1+\alpha$
1	1	0	$1+\alpha$	α
α	α	$1+\alpha$	0	1
$1+\alpha$	$1+\alpha$	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$1+\alpha$
α	0	α	$1+\alpha$	1
$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	1	α

Como el plano es de orden 4, de nuevo el Teorema 1.11 nos garantiza lo siguiente:

(*i*) Este plano tiene $4^2 = 16$ puntos.

(*ii*) Cada punto estará en $4 + 1 = 5$ rectas.

(*iii*) Cada haz contendrá 4 rectas.

(*iv*) El número total de rectas es $4(4 + 1) = 20$.

(*v*) Habrá $4 + 1 = 5$ haces de rectas paralelas.

Igual que en los ejemplos anteriores, podemos dar las ecuaciones de las rectas como sigue. Cada fila corresponderá a las 5 rectas paralelas pertenecientes a cada uno de los 5 haces distintos:

$$\begin{aligned} x &= 0, 1, \alpha, 1 + \alpha. \\ y &= 0, 1, \alpha, 1 + \alpha. \\ x + y &= 0, 1, \alpha, 1 + \alpha. \\ x + \alpha y &= 0, 1, \alpha, 1 + \alpha. \\ x + (1 + \alpha)y &= 0, 1, \alpha, 1 + \alpha. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18. $\mathbb{A}(\mathbb{Z}_5)$.

Los puntos de este plano son los pares ordenados de $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, y las rectas son los conjuntos de puntos que verifican las ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Como el plano es de orden 5, el Teorema 1.11 nos dice:

(*i*) Este plano tiene $5^2 = 25$ puntos.

(*ii*) Cada punto estará en $5 + 1 = 6$ rectas.

(*iii*) Cada haz contendrá 5 rectas.

(*iv*) El número total de rectas es $5(5 + 1) = 30$.

(*v*) Habrá $5 + 1 = 6$ haces de rectas paralelas.

Las ecuaciones de las rectas se reflejan a continuación. Cada fila corresponderá a las 5 rectas paralelas pertenecientes a cada uno de los 6 haces distintos:

$$\begin{aligned} x &= 0,1,2,3,4. \\ y &= 0,1,2,3,4. \\ x+y &= 0,1,2,3,4. \\ x+2y &= 0,1,2,3,4. \\ x+3y &= 0,1,2,3,4. \\ x+4y &= 0,1,2,3,4. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.19. $\mathbb{A}(\mathbb{Z}_7)$.

El plano afín de orden 7 se construiría de la misma manera que los anteriores.

Ejemplo 1.20. $\mathbb{A}(GF(8))$.

En este plano afín sobre el cuerpo de Galois de 8 elementos, $GF(8)$, los puntos se describen como los pares ordenados de $GF(8) \times GF(8)$, y las rectas como los conjuntos de puntos que verifican las ecuaciones lineales con coeficientes en $GF(8)$.

Recordemos que este cuerpo $(GF(8),+,\cdot)$ es de la forma $GF(8) = \{0,1,\alpha,\alpha^2,1+\alpha,1+\alpha^2,1+\alpha+\alpha^2,\alpha+\alpha^2\}$, con α raíz del polinomio X^3+X+1 (irreducible sobre $\mathbb{Z}_2$), y con las dos operaciones definidas como en las siguientes tablas:

$+$	0	1	α	α^2
0	0	1	α	α^2
1	1	0	$1+\alpha$	$1+\alpha^2$
α	α	$1+\alpha$	0	$\alpha+\alpha^2$
α^2	α^2	$1+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$	0
$1+\alpha$	$1+\alpha$	α	1	$1+\alpha+\alpha^2$
$1+\alpha^2$	$1+\alpha^2$	α^2	$1+\alpha+\alpha^2$	1
$1+\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha^2$	$1+\alpha$
$\alpha+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$	α^2	α

$+$	$1+\alpha$	$1+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$
0	$1+\alpha$	$1+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$
1	α	α^2	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$
α	1	$1+\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha^2$	α^2
α^2	$1+\alpha+\alpha^2$	1	$1+\alpha$	α
$1+\alpha$	0	$\alpha+\alpha^2$	α^2	$1+\alpha^2$
$1+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$	0	α	$1+\alpha$
$1+\alpha+\alpha^2$	α^2	α	0	1
$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha^2$	$1+\alpha$	1	0

$\cdot$	0	1	α	α^2
0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2
α	0	α	α^2	$1+\alpha$
α^2	0	α^2	$1+\alpha$	$\alpha+\alpha^2$
$1+\alpha$	0	$1+\alpha$	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$
$1+\alpha^2$	0	$1+\alpha^2$	1	α
$\alpha+\alpha^2$	0	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha^2$
$1+\alpha+\alpha^2$	0	$1+\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha^2$	1

$\cdot$	$1+\alpha$	$1+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$
0	0	0	0	0
1	$1+\alpha$	$1+\alpha^2$	$\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha+\alpha^2$
α	$\alpha+\alpha^2$	1	$1+\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha^2$
α^2	$1+\alpha+\alpha^2$	α	$1+\alpha^2$	1
$1+\alpha$	$1+\alpha^2$	α^2	1	α
$1+\alpha^2$	α^2	$1+\alpha+\alpha^2$	$1+\alpha$	$\alpha+\alpha^2$
$\alpha+\alpha^2$	1	$1+\alpha$	α	α^2
$1+\alpha+\alpha^2$	α	$\alpha+\alpha^2$	α^2	$1+\alpha$

Como el plano es de orden 8, por el Teorema 1.11 se verifica que:

(i) Este plano tiene $8^2 = 64$ puntos.

(ii) Cada punto estará en $8 + 1 = 9$ rectas.

(iii) Cada haz contendrá 8 rectas.

(iv) El número total de rectas es $8(8 + 1) = 72$.

(v) Habrá $8 + 1 = 9$ haces de rectas paralelas.

Aunque es posible dar las ecuaciones para las 72 rectas, expondremos solamente 16 de ellas, pertenecientes a dos de los haces de rectas paralelas, π_1 y π_2:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : \quad x & = & 0, 1, \alpha, \alpha^2, 1+\alpha, 1+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2, \alpha+\alpha^2 \\ \pi_2 : \quad y & = & 0, 1, \alpha, \alpha^2, 1+\alpha, 1+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2, \alpha+\alpha^2 \end{array}$$

Ejemplo 1.21. $\mathbb{A}(GF(9))$.

Los puntos de este plano son los pares ordenados de $GF(9) \times GF(9)$, y las rectas los conjuntos de puntos que verifican las ecuaciones lineales con coeficientes en $GF(9)$.

Recordemos que este cuerpo es de la forma $GF(9) = \{0, 1, 2, \alpha, \alpha+1, \alpha+2, 2\alpha, 2\alpha+1, 2\alpha+2\}$, con α raíz del polinomio X^2+1 (irreducible sobre $\mathbb{Z}_3$), y con las dos operaciones definidas como en las siguientes tablas:

$+$	0	1	2	α	$\alpha+1$
0	0	1	2	α	$\alpha+1$
1	1	2	0	$\alpha+1$	$\alpha+2$
2	2	0	1	$\alpha+2$	α
α	α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$
$\alpha+1$	$\alpha+1$	$\alpha+2$	α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
$\alpha+2$	$\alpha+2$	α	$\alpha+1$	$2\alpha+2$	2α
2α	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$	0	1
$2\alpha+1$	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$	2α	1	2
$2\alpha+2$	$2\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	2	0

$+$	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
0	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
1	α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$	2α
2	$\alpha+1$	$2\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$
α	$2\alpha+2$	0	1	2
$\alpha+1$	2α	1	2	0
$\alpha+2$	$2\alpha+1$	2	0	1
2α	2	α	$\alpha+1$	$\alpha+2$
$2\alpha+1$	0	$\alpha+1$	$\alpha+2$	α
$2\alpha+2$	1	$\alpha+2$	α	$\alpha+1$

$\cdot$	0	1	2	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	α	$\alpha+1$
2	0	2	1	2α	$2\alpha+2$
α	0	α	2α	2	$\alpha+2$
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	$2\alpha+2$	$\alpha+2$	2α
$\alpha+2$	0	$\alpha+2$	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$	1
2α	0	2α	α	1	$2\alpha+1$
$2\alpha+1$	0	$2\alpha+1$	$\alpha+2$	$\alpha+1$	2
$2\alpha+2$	0	$2\alpha+2$	$\alpha+1$	$2\alpha+1$	α

$\cdot$	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
0	0	0	0	0
1	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
2	$2\alpha+1$	α	$\alpha+2$	$\alpha+1$
α	$2\alpha+2$	1	$\alpha+1$	$2\alpha+1$
$\alpha+1$	1	$2\alpha+1$	2	α
$\alpha+2$	α	$\alpha+1$	2α	2
2α	$\alpha+1$	2	$2\alpha+2$	$\alpha+2$
$2\alpha+1$	2α	$2\alpha+2$	α	1
$2\alpha+2$	2	$\alpha+2$	1	2α

Como el plano es de orden 9, por el Teorema 1.11 sabemos que:

(i) Este plano tiene $9^2 = 81$ puntos.

(ii) Cada punto estará en $9 + 1 = 10$ rectas.

(iii) Cada haz contendrá 9 rectas.

(iv) El número total de rectas es $9(9 + 1) = 90$.

(v) Habrá $9 + 1 = 10$ haces de rectas paralelas.

Uno de los haces estaría constituido por las siguientes 10 rectas:

$$x = 0, 1, 2, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, 2\alpha, 2\alpha + 1, 2\alpha + 2$$

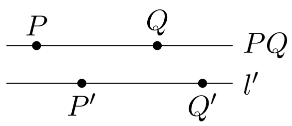
Este plano afín no es el único que se conoce de este orden, hay exactamente siete planos afines. Sin embargo, este es el único de ellos que es Desarguesiano.

Capítulo 2

Dilataciones y Traslaciones

2.1. Dilataciones

Definición 2.1. Una **dilatación** es una aplicación σ que lleva puntos en puntos y que cumple además que: dados dos puntos distintos P, Q; sus imágenes $P' = \sigma(P)$, $Q' = \sigma(Q)$ y l' una recta que pasa por P' y paralela a PQ, entonces $Q' \in l'$.



Denominaremos **dilatación degenerada** a aquella que lleva a todos sus puntos en uno, es decir $\sigma(P) = P'$ para todo P.

Teorema 2.2. *Una dilatación σ queda determinada de forma única por las imágenes P',Q' de dos puntos P, Q distintos.*

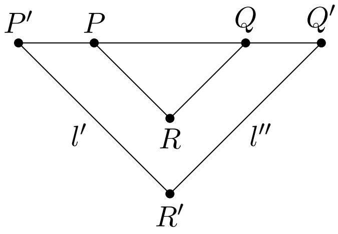
- *Si $P' = Q'$, entonces σ es una dilatación degenerada que lleva todos los puntos a P'.*
- *Si $P' \neq Q'$, entonces σ es biyectiva.*

Demostración.
• Veamos que σ queda determinada de forma única por las imágenes de dos puntos distintos. Para ello tomaremos un punto arbitrario R y veremos que su imagen queda determinada de forma única.

(i) Si R un punto que no está en la recta PQ.

Por (A3) sabemos que $RP \nparallel PQ \nparallel QR \nparallel RP$.

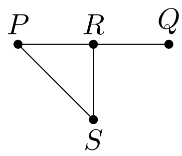
Sea l' la recta que pasa por P' y paralela a RP, entonces $R' \in l'$ por definición de dilatación. Sea l'' la recta que pasa por Q' y paralela a RQ, entonces de nuevo por definición de dilatación $R' \in l''$.



Puesto que l' y l'' se cortan en R' y que $l' \nparallel l''$, entonces por el Axioma 1, l' y l'' intersecan en R'. Luego la imagen $\sigma(R) = R'$ queda determinada de forma única.

(ii) Si R un punto sobre la recta PQ.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $R \neq P$. Tomamos un punto S que no esté en PQ.

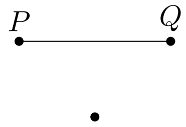


Si R está en PS, entonces ambos puntos R y P están en las rectas PS y PQ, y por tanto $PQ = PS$ por el Axioma 1. Esto contradice con la elección del punto S, luego R no esta en la recta PS.

Tenemos entonces un punto S que no está en la recta PQ. Como vimos en el apartado (i), la imagen $S' = \sigma(S)$ queda determinada de forma única. Asimismo, sabemos que R no está en la recta PS y las imágenes P', S' están determinadas. Usando de nuevo el apartado (i), R' queda determinada de forma única.

• Si $P' = Q'$, entonces σ es degenerada y $\sigma(P) = P'$ para todo P.

Sea τ la dilatación degenerada que lleva todo punto en P' de la misma manera que σ en P y Q.



$$\sigma(Q) = Q' = P' = \tau(P) = \sigma(P)$$

Por unicidad, ya vista en el apartado anterior, $\sigma = \tau$.

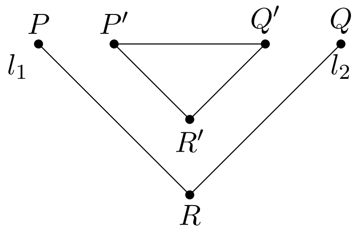
• Veamos que si $P' \neq Q'$, entonces σ biyectiva.

Tenemos que demostrar que existe un punto R tal que $\sigma(R) = R'$. Sea R' un punto dado.

- Si R' no está en la recta $P'Q'$.

  Por el Axioma 3 tenemos que $P'Q' \nparallel Q'R' \nparallel R'P' \nparallel P'Q'$.

  Sean l_1 la recta paralela a $P'R'$ que pasa por P, y l_2 la recta paralela a $Q'R'$ que pasa por Q. Como $P'Q' \nparallel Q'R'$ entonces $l_1 \nparallel l_2$, luego por el Axioma 1 existe un único punto R en la intersección.



  Veamos que dicho punto cumple que $R' = \sigma(R)$. Supongamos para ello que R está en PQ. Puesto que los puntos P y R están en ambos en las rectas PQ y l_1, entonces por el Axioma 1 $PQ = l_1$. Análogamente con los puntos Q, R, deducimos que $PQ = l_2$.

  Como por hipótesis l_1 es paralela a $P'R'$, y l_2 a $Q'R'$, entonces deducimos que:

$$P'R' \parallel l_1 \parallel PQ \parallel l_2 \parallel Q'R'.$$

  Luego $P'R' \parallel Q'R'$, lo que contradice con la suposición de que R' no está en $P'Q'$. Con lo cual $P'Q'$ sí pasa por R', y por el apartado (i) tenemos que $R' = \sigma(R)$.

- Si R' está en la recta $P'Q'$.

  Tomamos un punto S' que no esté en $P'Q'$. Análogamente al apartado (ii), encontramos el punto S tal que $\sigma(S) = S'$ y procedemos de la misma manera.

Que σ inyectiva es claro, pues dados dos puntos P, Q iguales, entonces que $\sigma(P) = \sigma(Q)$ ya demostrado en el apartado (ii), concluyendo así la demostración.

$\square$

Corolario 2.3. *Si una dilatación σ tiene dos puntos fijos, entonces $\sigma = 1$ es la aplicación identidad.*

Demostración. Si $P \neq Q$ puntos fijos de σ, i.e. $\sigma(P) = P$ y $\sigma(Q) = Q$, es inmediato por el Teorema 2.2 que $\sigma = 1$. $\square$

Definición 2.4. Sea σ una dilatación no degenerada y P un punto. Una recta que contenga a P y $\sigma(P)$ se denomina **traza de P**.
Si $P \neq \sigma(P)$, entonces la traza es **única** y se denota por $P\sigma(P)$.

$P = \sigma(P)$ $\qquad$ $P \neq \sigma(P)$

Teorema 2.5. *Sea σ una dilatación no degenerada, P un punto y l la traza de P. Si Q está en l, entonces $\sigma(Q)$ también está en l.*

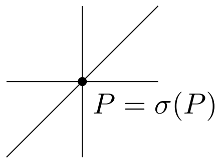
Demostración. Supongamos que $P \neq Q$. Como l es la traza de P, y Q está en l por hipótesis, entonces $l = PQ$.
Si $\sigma(P) = \sigma(Q)$, por el Teorema 2.2 σ es degenerada, luego $\sigma(P) \neq \sigma(Q)$.
Tenemos pues que $Q \neq P$, $l \parallel PQ$ y $P' \in l$, luego por definición de dilatación Q' está en l.

$\square$

Corolario 2.6. *La intersección de dos trazas no paralelas es un punto fijo. Las posibles trazas de una dilatación σ no degenerada son:*

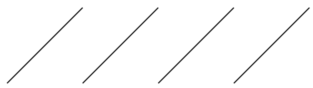
1. $\sigma = 1 \Leftrightarrow$ *Todas las rectas.*

2. $\left.\begin{array}{c}\textit{Si } \sigma\neq 1\\ P \textit{ punto fijo de } \sigma\end{array}\right\} \Rightarrow$ *Todas las rectas que pasan por P.*



   De hecho, puesto que $\sigma \neq 1$ no puede tener más de un punto fijo, cualquier recta que pase por P será una traza, y cualquier otra no podrá serlo.

3. *Si σ no tiene puntos fijos $\Rightarrow$ Un haz de rectas paralelas.*



Demostración.

Sean P, Q dos puntos distintos, l_1 y l_2 sus trazas respectivamente (no paralelas). Entonces por el Axioma 1 existe un único punto R en la intersección.

Puesto que l_1 traza de P, y R está en l_1, entonces por el teorema anterior $\sigma(r)$ está en l_1. Análogamente con Q y l_2, deducimos que $\sigma(R)$ está en l_2. Así pues, nuevamente el Axioma 1 nos garantiza que $\sigma(R) = R$ por unicidad, y así R es punto fijo de σ.

1. $\sigma = 1 \Leftrightarrow$ Todas las rectas.

   "$\Rightarrow$"

   Si $\sigma = 1$ entonces $\sigma(P) = P$ para cualquier punto P, luego todos los puntos son puntos fijos.

   Sea l una recta cualquiera que pasa por P. Como P es punto fijo de σ, entonces $\sigma(P)$ está en l, luego l es traza de P.

   "$\Leftarrow$"

   Sean l, m dos rectas, por hipótesis son trazas de σ.

   Si $l \nparallel m$, entonces por el Axioma 1 existe un único punto R en la intersección de las dos rectas, y además es un punto fijo (ya demostrado en el apartado anterior).

Supongamos que $P \neq \sigma(P)$. Por definición de traza tenemos que $l_1 = P\sigma(P)$, y como R y $\sigma(R)$ y R están en l_1, entonces por unicidad tenemos que $R\sigma(R) = l_1$.

Por otro lado R y $\sigma(R)$ están en l_2, luego $l_2 = Q\sigma(Q)$ es traza de R. Por unicidad de traza tenemos que $Q\sigma(Q) = P\sigma(P)$, lo cual contradice con la hipótesis, y así $P = \sigma(P)$.

Puesto que $P = \sigma(P)$ y $R = \sigma(R)$, entonces por el Teorema 2.2 tenemos que $\sigma = 1$.

2. $\left.\begin{smallmatrix} \text{Si } \sigma\neq 1 \\ P \text{ punto fijo de } \sigma \end{smallmatrix}\right\} \Rightarrow$ Todas las rectas que pasan por P.

   De hecho, puesto que $\sigma \neq 1$ no puede tener más de un punto fijo, cualquier recta que pase por P será una traza, y cualquier otra no podrá serlo.

   Sea l una recta arbitraria que contiene a P. Como P es un punto fijo de σ por hipótesis, entonces $\sigma(P)$ también está en l, luego l es traza de σ.

   Si existe otro punto fijo $Q = \sigma(Q)$, entonces por el Corolario 2.3 $\sigma = 1$, contradicción con la hipótesis inicial, luego P es el único punto fijo.

   Supongamos ahora que l es una traza que no contiene a P. Podemos tomar una de las trazas de P, m, que no sea paralela a l, luego intersecan en un punto, que será un punto fijo como hemos demostrado en el primer apartado. Como no puede haber dos puntos fijos, entonces l no es una traza de σ.

3. Si σ no tiene puntos fijos $\Rightarrow$ Un haz de rectas paralelas.

   Sean P, Q dos puntos cualesquiera y distintos. Como σ no tiene puntos fijos, entonces $P \neq \sigma(P)$ y $Q \neq \sigma(Q)$, luego las trazas $P\sigma(P)$ y $Q\sigma(Q)$ son únicas. Si estas se cortan, la intersección sería un punto fijo de σ, lo cual contradice la hipótesis, luego las trazas son paralelas. Así pues, las trazas de σ son un haz de rectas paralelas.

$\square$

2.2. Traslaciones

Definición 2.7. Una dilatación no degenerada τ se denomina **traslación** si $\tau = 1$ o si no tiene puntos fijos.

Si además $\tau \neq 1$ entonces las trazas de τ forman un haz de rectas paralelas, que denominamos **dirección** de τ.

Teorema 2.8. *Una traslación τ queda determinada de manera única por la imagen de un punto P.*
Nótese que no afirmamos la existencia de traslaciones con una imagen previamente asignada.

Demostración.

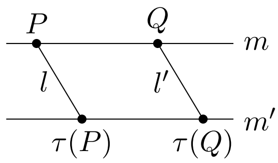
Sean P un punto, l la traza de τ que contiene a P, y l' recta paralela a l.

Si $\tau = 1$ entonces por el Corolario 2.6 l' también es traza de τ.

Si $\tau \neq 1$, τ no tiene puntos fijos por definición de traslación, luego por Corolario 2.6 l' también es traza de τ.

Entonces cualquier recta l' paralela a l también será una traza de τ. Así pues, dado un punto Q en l', tendremos que $\tau(Q) = Q'$ también está en l'.

Sea $m = PQ$ y m' la recta paralela a m que pasa por $\tau(P)$. Por definición de dilatación, $\tau(Q)$ está en m'. Puesto que $l \nparallel m$, entonces $l' \nparallel m$ y por tanto $l' \nparallel m'$. Como $\tau(Q)$ está en m' y en l', tenemos que $\tau(Q)$ queda determinado de forma única.



Puesto que una dilatación queda determinada de forma única por la imagen de dos puntos (Teorema 2.2), concluimos así la demostración. □

Observación 2.9. De ahora en adelante asumiremos que una dilatación es siempre no degenerada (a no ser que se especifique lo contrario). Podremos entonces simplificar la Definición 2.1 como se expone a continuación.

Definición 2.10. Una aplicación σ es una **dilatación** si, dados dos puntos P, Q distintos, entonces $\sigma(P) \neq \sigma(Q)$ y $PQ \parallel \sigma(P)\sigma(Q)$.

Teorema 2.11. *El conjunto de las dilataciones D forma un grupo, y el de las traslaciones T un subgrupo normal de D.*

Además, dada una dilatación σ y una traslación $\tau \neq 1$, entonces τ y $\sigma\tau\sigma^{-1}$ tienen la misma dirección.

Demostración.

• D es un grupo:

▲ $\sigma_1\sigma_2$ está en D.

Sean σ_1, σ_2 dos dilataciones y P, Q dos puntos distintos. Como σ_2 es una dilatación, por Definición 2.10:

$$\sigma_2(P) \neq \sigma_2(Q).$$
$$PQ \parallel \sigma_2(P)\sigma_2(Q).$$

Análogamente para σ_1:

$$\sigma_1(\sigma_2(P)) \neq \sigma_1(\sigma_2(Q)).$$
$$\sigma_2(P)\sigma_2(Q) \parallel \sigma_1(\sigma_2(P))\sigma_1(\sigma_2(Q)).$$

Concluyendo que:

$$\sigma_1(\sigma_2(P)) \neq \sigma_1(\sigma_2(Q)).$$

$$PQ \parallel \sigma_1(\sigma_2(P))\sigma_1(\sigma_2(Q)).$$

▲ σ^{-1} está en D.

Puesto que $\sigma(P) \neq \sigma(Q)$, entonces por el Teorema 2.2 σ biyectiva, luego existe su inversa σ^{-1}.

Como $\sigma^{-1}(\sigma(P)) = P$ y $\sigma^{-1}(\sigma(Q)) = Q$, entonces tenemos:

$$P \neq Q.$$
$$\sigma(P)\sigma(Q) \parallel PQ.$$

• T es un grupo:

▲ $\tau_1\tau_2$ está en T.

Supongamos que la composición $\tau_1\tau_2$ tiene un punto fijo P, i.e. $\tau_1(\tau_2(P)) = P$. Entonces $\tau_2(P) = \tau_1^{-1}(P)$, luego $\tau_2 = \tau_1^{-1}$. De esto se deduce que $\tau_1\tau_2 = 1$, y así $\tau_1\tau_2$ está en T.

▲ τ^{-1} está en T.

Sea τ una traslación, entonces existe su inversa τ^{-1} y es biyectiva. Supongamos que P' es un punto fijo de τ^{-1}, i.e. $\tau^{-1}(P') = P'$. Como τ es biyectiva, entonces existe un punto P tal que $\tau(P) = P'$. Juntando estas dos igualdades:

$$\tau(P) = P' = \tau^{-1}(P') = \tau^{-1}(\tau(P)) = P.$$

Luego $P = \tau^{-1}(P)$. Tenemos pues que P y P' son puntos fijos de τ^{-1}, luego por el Corolario 2.3 $\tau^{-1} = 1$, y entonces τ^{-1} es una traslación.

• T es un subgrupo normal de D.

Sean σ una dilatación y τ una traslación, veamos que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau_1$ es una traslación.

Si τ_1 tiene un punto fijo P, i.e. $\sigma\tau\sigma^{-1}(P) = P$, entonces basta aplicar σ^{-1} por la izquierda para deducir que $\sigma^{-1}(P)$ es un punto fijo de τ. Con esto sacamos que $\tau = 1$, y por lo tanto $\sigma\tau\sigma^{-1} = 1$, luego es una traslación.

• La dirección de τ y $\sigma\tau\sigma^{-1}$ es la misma.

Por hipótesis $\tau \neq 1$, y sean π la dirección de τ y P un punto.

La recta $\sigma^{-1}(P)\tau(\sigma^{-1}(P))$ es la traza de $\sigma^{-1}(P)$, y por tanto está en π. Por definición de dilatación, las rectas $\sigma^{-1}(P)\tau\sigma^{-1}(P)$ y $\sigma(\sigma^{-1}(P))\sigma(\tau(\sigma^{-1}(P))) = P\sigma\tau\sigma^{-1}(P)$ son paralelas.

Entonces $P\sigma\tau\sigma^{-1}(P)$ también está en π, y es la traza de $\sigma\tau\sigma^{-1}$ que pasa por P. Luego τ y $\sigma\tau\sigma^{-1}$ tienen la misma dirección, concluyendo así la demostración.

$\square$

Teorema 2.12. *La identidad y las traslaciones T con un haz π de rectas paralelas como dirección forman un grupo.*

Demostración.

• τ^{-1} es una traslación.

Si $\tau \neq 1$ entonces $P\tau(P) = \tau(P)\tau^{-1}(\tau(P))$ es la traza de τ que pasa por P y la traza de τ^{-1} que pasa por $\tau(P)$, luego τ^{-1} tiene π como dirección.

• $\tau_1\tau_2$ es una traslación.

Si τ_1, τ_2 tienen la dirección π y $\tau_1 \neq 1 \neq \tau_2$, entonces $P\tau_2(P)$ está en π y contiene a $\tau_2(P)$, luego por el Teorema 2.5 también contiene a $\tau_1\tau_2(P)$.

Si $\tau_1(\tau_2(P)) = P$ entonces $\tau_1\tau_2 = 1$ por definición de traslación.

Si $\tau_1(\tau_2(P)) \neq P$, como $\tau_1\tau_2(P)$ está en $P\tau_2(P)$ entonces $P\tau_2(P) = P\tau_1(\tau_2(P))$, que es la traza de $\tau_1\tau_2$. Así pues $\tau_1\tau_2$ tiene a π como dirección.

$\square$

Teorema 2.13. *Si existen traslaciones con direcciones distintas, entonces T es un grupo conmutativo.*

Demostración.
(i) Supongamos que τ_1, τ_2 traslaciones con direcciones distintas.

Por el Teorema 2.11, $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}$ tiene la misma dirección que τ_2, y por tanto la misma que τ_2^{-1}.

Si $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1} \neq 1$, entonces por el Teorema 2.12 la dirección de $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$ y τ_2 es la misma.

Análogamente $\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$ tiene la misma dirección que τ_1, por lo que $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$ también tiene la dirección de τ_1. Esto contradice la suposición inicial de que τ_1 y τ_2 tienen direcciones distintas, luego $\tau_1\tau_2\tau_1^{-1}\tau_2^{-1} = 1$, y así $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$.

(ii) Supongamos que τ_1, τ_2 tienen la misma dirección.

Por hipótesis existe una traslación τ_3 con distinta dirección a la de τ_1 y τ_2, luego $\tau_3\tau_1 = \tau_1\tau_3$ como vimos en (i).

Por otro lado, la dirección de $\tau_2\tau_3$ tiene que ser distinta a la de τ_1, pues si no $\tau_2^{-1}\tau_2\tau_3 = \tau_3$ tendría la misma dirección que τ_1. Sabemos entonces que $(\tau_1\tau_2)\tau_3 = \tau_1(\tau_2\tau_3) = (\tau_2\tau_3)\tau_1 = \tau_2(\tau_3\tau_1) = \tau_2(\tau_1\tau_3) = (\tau_2\tau_1)\tau_3$, luego $\tau_2\tau_3\tau_1 = \tau_2\tau_1\tau_3$. Concluimos así que $\tau_2\tau_1 = \tau_2\tau_1$.

$\square$

Capítulo 3

Construcción de un cuerpo

Llegados a este punto, necesitamos introducir un cuarto axioma para conseguir una geometría con suficientes simetrías.

3.1. Nuevo axioma

Dividiremos este axioma en dos partes, Axioma 4a y Axioma 4b, e introduciremos la primera en este capítulo, mientras que la segunda la formularemos en el siguiente.

Recordemos que una traslación queda determinada de forma única por la imagen de un sólo punto.

Axioma 4a. *Dados P, Q dos puntos, existe una única traslación τ_{PQ} que lleva P en Q.*

Observación 3.1. Puesto que existen traslaciones con direcciones distintas, el Teorema 2.13 nos garantiza que el grupo T será conmutativo.

Observación 3.2. De ahora en adelante, la imagen de una traslación τ a través de una aplicación $\alpha \colon T \to T$ la denotaremos por $\alpha(\tau) := \tau^{\alpha}$.

Definición 3.3. Una aplicación $\alpha \colon T \to T$ es un **homomorfismo que conserva la traza** (H.C.T.) si:

(T1) Es un homomorfismo de T: $(\tau_1\tau_2)^{\alpha} = \tau_1^{\alpha}\tau_2^{\alpha}$.

(T2) Las trazas de τ están entre las trazas de τ^{α}, es decir: $\tau^{\alpha} = 1$ o τ y τ^{α} tienen la misma dirección.

Al conjunto de todos los homomorfismos que conservan la traza lo denotaremos por K.

Veamos algunos ejemplos de este tipo de homomorfismos.

Ejemplo 3.4. La aplicación que lleva a toda traslación en la identidad está en K. La denotaremos por $\alpha := 0$, pues la relación $\tau^0 = 1$ nos es de sobra conocida.

$$0\colon T \to T, \tau \mapsto \tau^0 = 1 \text{ para todo } \tau \in T.$$

(T1) $\tau_1^0 \tau_2^0 = 1 = (\tau_1\tau_2)^0$.

(T2) $\tau^0(P) = P$, luego conserva la traza.

Ejemplo 3.5. La aplicación identidad, que denotaremos por $\alpha := 1$, está en K.

$$1\colon T \to T, \tau \mapsto \tau^1 = \tau \text{ para todo } \tau \in T.$$

Ejemplo 3.6. La aplicación que lleva una traslación τ en su inversa τ^{-1} está en K. La denotaremos por $\alpha := -1$.

$$-1\colon T \to T, \tau \mapsto \tau^{-1} \text{ para todo } \tau \in T.$$

(T1) $(\tau_1\tau_2)^{-1} = \tau_2^{-1}\tau_1^{-1} = \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}$.

(T2) T conmutativo, luego τ y τ^{-1} tienen la misma traza.

Ejemplo 3.7. La aplicación α que lleva una traslación τ en $\sigma\tau\sigma^{-1}$, con σ una dilatación fijada, está en K.

$$\alpha\colon T \to T, \tau \mapsto \tau^\alpha = \sigma\tau\sigma^{-1} \text{ para todo } \tau \in T.$$

(T1) $(\tau_1\tau_2)^\alpha = \sigma\tau_1\tau_2\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\sigma^{-1}\sigma\tau_2\sigma^{-1} = \tau_1^\alpha\tau_2^\alpha$.

(T2) τ y $\sigma\tau\sigma^{-1}$ tienen la misma dirección por el Teorema 2.11.

3.2. Construcción de un cuerpo

Definición 3.8. Sean $\alpha, \beta \in K$, definimos las siguientes aplicaciones:

$$\alpha + \beta\colon T \to T, \tau \mapsto \tau^{\alpha+\beta} = \tau^\alpha \cdot \tau^\beta$$
$$\alpha \cdot \beta\colon T \to T, \tau \mapsto \tau^{\alpha\cdot\beta} = (\tau^\beta)^\alpha$$

Teorema 3.9. *Si α, β son dos elementos de K, entonces $\alpha+\beta$ y $\alpha\cdot\beta$ también son elementos de K.*
Con este resultado, K con la aplicación 1 como elemento neutro es un anillo asociativo.

Demostración.

- $\alpha + \beta$ está en K:

(T1) $(\tau_1\tau_2)^{\alpha+\beta} = (\tau_1\tau_2)^{\alpha}(\tau_1\tau_2)^{\beta} = \tau_1^{\alpha}\tau_2^{\alpha}\tau_1^{\beta}\tau_2^{\beta} = \tau_1^{\alpha}\tau_1^{\beta}\tau_2^{\alpha}\tau_2^{\beta} = \tau_1^{\alpha+\beta}\tau_2^{\alpha+\beta}$.

(T2) Si $\tau = 1$, entonces $\tau^{\alpha} = \tau^{\beta} = 1$, luego $\tau^{\alpha+\beta} = 1$.

Si $\tau \neq 1$ y π su dirección, entonces por Definición 3.3 de H.C.T., la dirección de τ está entre las trazas de τ^{α} y entre las de τ^{β}. Así pues, π está entre las trazas de $\tau^{\alpha} \cdot \tau^{\beta} = \tau^{\alpha+\beta}$.

- $\alpha \cdot \beta$ está en K:

(T1) $(\tau_1\tau_2)^{\alpha\cdot\beta} = ((\tau_1\tau_2)^{\beta})^{\alpha} = (\tau_1^{\beta}\tau_2^{\beta})^{\alpha} = (\tau_1^{\beta})^{\alpha}(\tau_2^{\beta})^{\alpha} = \tau_1^{\alpha\cdot\beta}\tau_2^{\alpha\cdot\beta}$.

(T2) Las trazas de τ están entre las trazas de τ^{β}, luego también están entre las trazas de $(\tau^{\beta})^{\alpha} = \tau^{\alpha\cdot\beta}$.

- (K,+) es un grupo abeliano:
  - Elemento neutro:

    $\tau^{0+\alpha} = \tau^{0} \cdot \tau^{\alpha} = 1 \cdot \tau^{\alpha} = \tau^{\alpha}$. Deducimos que $0 + \alpha = \alpha$.
  - Elemento inverso:

    $\tau^{\alpha+(-1)\alpha} = \tau^{\alpha} \cdot \tau^{(-1)\alpha} = \tau^{\alpha} \cdot (\tau^{\alpha})^{-1} = 1 = \tau^{0}$. Entonces $\alpha + (-1)\alpha = 0$.
  - Propiedad asociativa:

    $\tau^{(\alpha+\beta)+\gamma} = \tau^{\alpha+\beta} \cdot \tau^{\gamma} = \tau^{\alpha} \cdot \tau^{\beta} \cdot \tau^{\gamma} = \tau^{\alpha} \cdot \tau^{\beta+\gamma} = \tau^{\alpha+(\beta+\gamma)}$. Luego $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
  - Propiedad conmutativa:

    $\tau^{\alpha+\beta} = \tau^{\alpha} \cdot \tau^{\beta} = \tau^{\beta} \cdot \tau^{\alpha} = \tau^{\beta+\alpha}$. De esta forma $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

- $(K, +, \cdot)$ es un anillo asociativo:
  - Elemento neutro:

    $\tau^{1\cdot\alpha} = (\tau^{\alpha})^{1} = \tau^{\alpha} = (\tau^{1})^{\alpha} = \tau^{\alpha\cdot 1}$, por lo que $1 \cdot \alpha = 1 = \alpha \cdot 1$.
  - Propiedad asociativa:

    $\tau^{(\alpha\beta)\gamma} = (\tau^{\gamma})^{\alpha\beta} = ((\tau^{\gamma})^{\beta})^{\alpha} = (\tau^{\beta\gamma})^{\alpha} = \tau^{\alpha(\beta\gamma)}$, luego $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

- Propiedad distributiva:

  Por la derecha:

  $\tau^{\alpha(\beta+\gamma)} = (\tau^{\beta+\gamma})^{\alpha} = (\tau^{\beta}\tau^{\gamma})^{\alpha}$. Como α es un homomorfismo, entonces $(\tau^{\beta}\tau^{\gamma})^{\alpha} = (\tau^{\beta})^{\alpha}(\tau^{\gamma})^{\alpha}$, y entonces $\tau^{\alpha(\beta+\gamma)} = \tau^{\alpha\beta}\tau^{\alpha\gamma} = \tau^{\alpha\beta+\alpha\gamma}$, luego $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

  Por la izquierda:

  $\tau^{(\beta+\gamma)\alpha} = (\tau^{\alpha})^{\beta+\gamma} = (\tau^{\alpha})^{\beta}(\tau^{\alpha})^{\gamma} = \tau^{\beta\alpha}\tau^{\gamma\alpha} = \tau^{\beta\alpha+\gamma\alpha}$. Entonces $(\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha+\gamma\alpha$.

□

Teorema 3.10. *Sean α un elemento de K distinto de 0 y P un punto dado. Entonces existe una única dilatación σ con P como punto fijo y tal que $\tau^{\alpha} = \sigma\tau\sigma^{-1}$ para todo τ en T.*

Demostración.
• Unicidad de σ.

Supongamos que existe dicha dilatación σ, y sea Q un punto cualquiera. Tomamos τ_{PQ} para la traslación τ, y entonces por hipótesis:

$$\tau_{PQ}^{\alpha} = \sigma\tau_{PQ}\sigma^{-1}.$$

Aplicándolo a P, punto fijo de σ por hipótesis, tenemos:

$$\tau_{PQ}^{\alpha}(P) = \sigma\tau_{PQ}\sigma^{-1}(P) = \sigma\tau_{PQ}(P) = \sigma(Q).$$

Luego deducimos que:

$$\tau_{PQ}^{\alpha}(P) = \sigma(Q). \tag{3.1}$$

Esto muestra cómo dar la imagen de un punto Q a través de σ. Puesto que el Axioma 4a nos garantiza que la traslación τ_{PQ} es única, entonces σ es única.

• Existencia.

. $\sigma(P) = P$.

Definimos una aplicación σ en el punto Q de la forma (3.1). Nótese que existe la posibilidad de que dicha dilatación sea degenerada.

Sean Q, R dos puntos distintos, por el Axioma 4a existen las traslaciones τ_{PQ}, τ_{QR} y son únicas. Si aplicamos la composición a P:

$$\tau_{QR}\tau_{PQ}(P) = \tau_{QR}(Q) = R.$$

Entonces, de nuevo por el Axioma 4a, $\tau_{QR}\tau_{PQ} = \tau_{PR}$. Aplicando α a ambos lados de las igualdad, y teniendo en cuenta que es un homomorfismo, nos queda:

$$\tau_{QR}^{\alpha}\tau_{PQ}^{\alpha} = \tau_{PR}^{\alpha}.$$

y aplicando a P a ambos lados de la ecuación:

$$\tau_{QR}^{\alpha}(\tau_{PQ}^{\alpha}(P)) = \tau_{PR}^{\alpha}(P).$$

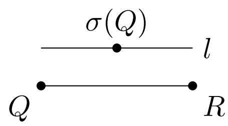
Usando (3.1) obtenemos:

$$\tau_{QR}^{\alpha}(\sigma(Q)) = \tau_{QR}^{\alpha}(\tau_{PQ}^{\alpha}(P)) = \tau_{PR}^{\alpha}(P) = \sigma(R).$$

Y por tanto:

$$\tau_{QR}^{\alpha}(\sigma(Q)) = \sigma(R). \tag{3.2}$$

Sea l la recta paralela a QR que pasa por $\sigma(Q)$.



l es la traza de τ_{QR}, y también es la traza de τ_{QR}^{α}, pues α conserva la traza. Entonces $\sigma(Q)$ está en esta traza de τ_{QR}^{α}, luego su imagen $\sigma(R)$ también lo esta. Pero esta es precisamente la condición para ser dilatación según la Definición 2.1.

Como $\tau_{PP}(P) = P$, y una traslación queda determinada por la imagen de un único punto (Teorema 2.8), entonces $\tau_{PP} = 1$, y con (3.1) tenemos:

$$\sigma(P) = \tau_{PP}^{\alpha}(P) = 1^{\alpha}(P) = 1(P) = P.$$

En el caso de que σ sea degenerada, entonces lleva todo punto a P, y usando la igualdad (3.1):

$$\tau_{PQ}^{\alpha}(P) = \sigma(Q) = P.$$

Entonces $\tau_{PQ}^{\alpha} = 1$ para todo Q. Como toda traslación τ es de la forma τ_{PQ}, entonces:

$$\tau^{\alpha} = 1 \text{ para todo } \tau \in T.$$

Luego $\alpha = 0$. Si $\alpha \neq 0$, entonces σ es no degenerada.

- $\tau^\alpha = \sigma\tau\sigma^{-1}$.

Sea $\alpha \neq 0$. Como ya sabemos que P es punto fijo de σ, podemos reescribir la igualdad (3.1) de la forma:

$$Q = \sigma^{-1}\tau_{PQ}^\alpha(P) = \sigma^{-1}\tau_{PQ}^\alpha\sigma(P).$$

Esta igualdad nos dice que la traslación $\sigma^{-1}\tau_{PQ}^\alpha\sigma$ lleva a P en Q, luego por unicidad (Axioma 4a):

$$\sigma^{-1}\tau_{PQ}^\alpha\sigma = \tau_{PQ}.$$

Aplicando σ por la izquierda y σ^{-1} por la derecha en ambos lados de la igualdad, obtenemos que $\tau_{PQ} = \sigma\tau_{PQ}^\alpha\sigma^{-1}$.

Puesto que cualquier traslación τ es de la forma τ_{PQ}, finalmente tenemos que $\tau^\alpha = \sigma\tau\sigma^{-1}$ para todo $\tau \in T$, concluyendo así la demostración.

□

Observación 3.11. Recordemos el Ejemplo 3.7 de homomorfismos que conservan la traza, definido de la forma $\tau^\alpha = \sigma\tau\sigma^{-1}$, donde σ es una dilatación.

Si $\alpha = 0$ entonces $\sigma\tau\sigma^{-1} = 1$, y así $\tau = 1$. Luego el teorema no se cumple para todo τ. Así pues $\alpha \neq 0$. Esto nos muestra que el recíproco del Teorema 3.10 no se verifica.

Teorema 3.12. *K es un cuerpo (probablemente no conmutativo para la multiplicación, i.e. un anillo de división).*

Demostración.

Puesto que ya hemos probado que K es un anillo asociativo (Teorema 3.9), sólo necesitamos demostrar que todo elemento de K tiene inverso para la multiplicación.

Sea $\alpha \neq 0$ el homomorfismo que conserva la traza que lleva τ en $\sigma\tau\sigma^{-1}$, con σ una dilatación. La aplicación que lleva τ en $\sigma^{-1}\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau(\sigma^{-1})^{-1}$ también es un elemento de K, que llamaremos α^{-1}. Tenemos entonces que $\tau^\alpha = \sigma\tau\sigma^{-1}$ y $\tau^{\alpha^{-1}} = \sigma^{-1}\tau\sigma$, de lo que deducimos:

- $\tau^{\alpha\cdot\alpha^{-1}} = (\tau^{\alpha^{-1}})^\alpha = (\sigma^{-1}\tau\sigma)^\alpha = \sigma\sigma^{-1}\tau\sigma\sigma^{-1} = \tau = \tau^1$.
- $\tau^{\alpha^{-1}\cdot\alpha} = (\tau^\alpha)^{\alpha^{-1}} = (\sigma\tau\sigma^{-1})^{\alpha^{-1}} = \sigma^{-1}\sigma\tau\sigma^{-1}\sigma = \tau = \tau^1$.

De estas dos cadenas de igualdades obtenemos que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$, luego todo elemento de K tiene inverso para la multiplicación, y por lo tanto es un cuerpo.

□

Observación 3.13. Sea $\alpha \neq 0$ el homomorfismo definido en el Ejemplo 3.7 que lleva τ en $\sigma\tau\sigma^{-1}$. Si K es conmutativo, entonces $\tau^\alpha = \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\sigma\sigma^{-1} = \tau$, luego $\alpha = 1$ para todo τ, o $\tau = 1$. Esto muestra que K no es un cuerpo conmutativo.

Teorema 3.14.

(i) *Si se cumple que* $\tau^\alpha = 1$ *para algún* α, τ *concretos, entonces* $\alpha = 0$ *o* $\tau = 1$.

(ii) *Si se cumple que* $\tau^\alpha = \tau^\beta$ *para algún* α, β, τ *concretos, entonces* $\alpha = \beta$ *o* $\tau = 1$.

Demostración.
(i) Supongamos que $\tau^\alpha = 1$ y $\alpha \neq 0$. Aplicando α^{-1} tenemos:

$$(\tau^\alpha)^{\alpha^{-1}} = 1^{\alpha^{-1}} = 1.$$

Y entonces ocurre una de las siguientes:

$$\tau = 1.$$
$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 0.$$

Como hemos supuesto que $\alpha \neq 0$, entonces $\tau = 1$.

(ii) Supongamos ahora que $\tau^\alpha = \tau^\beta$. Multiplicando por $\tau^{-\beta}$ por la derecha a ambos lados de la igualdad:

$$\tau^{\alpha-\beta} = \tau^{\beta-\beta} = \tau^0 = 1.$$

Si $\alpha - \beta = 0$ o $\tau = 1$.

Nótese que para cualquier anillo con la propiedad distributiva se cumple que $\beta \cdot 0 = 0$; pero puede comprobarse también de la forma: $\tau^{\beta\cdot 0} = (\tau^0)^\beta = 1^\beta = 1 = \tau^0$ y entonces $\beta \cdot 0 = 0$.

$\square$

Capítulo 4

Introducción de coordenadas

Nuestra geometría todavía no es suficientemente simétrica. Necesitaremos un axioma más, que formularemos de dos maneras distintas, probando posteriormente la equivalencia entre ambas como un teorema adicional.

4.1. Último axioma

Axioma 4b. *Si τ_1, τ_2 son traslaciones con las mismas trazas y $1 \neq \tau_1 \neq \tau_2 \neq 1$, entonces existe un único elemento α en K tal que $\tau_2 = \tau_1^\alpha$.*

Observación 4.1. La unicidad de α se sigue del Teorema 3.14. Además, la única condición realmente necesaria es $\tau_1 \neq 1$, pues:

- Si $\tau_2 = \tau_1$, entonces $\tau_2 = \tau_1^1$. Por tanto $\alpha = 1$ es el homomorfismo buscado.
- Si $\tau_2 = 1$, entonces $\tau_2 = 1 = \tau_1^0$. El homomorfismo buscado es $\alpha = 0$.

Añadimos las demás condiciones para formular el axioma de la forma más general posible.

Axioma 4b P. *(Para un punto P dado). Dados dos puntos Q, R tal que $P \neq Q \neq R \neq P$ pero alineados (sobre una misma recta), entonces existe una única dilatación σ, con P como punto fijo, que lleva a Q en R. Es decir:*

(i) $\sigma(P) = P$.

(ii) $\sigma(Q) = R$.

Observación 4.2. La unicidad de σ se sigue del Teorema 2.2, pues una dilatación queda determinada de forma única por la imagen de dos puntos distintos.

Teorema 4.3.

(i) *Si se cumple el Axioma 4b P para un punto P, entonces se verifica el Axioma 4b.*

(ii) *Si se cumple el Axioma 4b, entonces se verifica el Axioma 4b P para todo P.*

Más esquemáticamente:

$$\begin{aligned} \textit{Axioma 4b } P \quad \textit{para } P \quad \textit{dado} &\Rightarrow \ \textit{Axioma 4b} \\ \textit{Axioma 4b } P \quad \textit{para todo } P &\Leftarrow \ \textit{Axioma 4b} \end{aligned}$$

Demostración.
"$\Rightarrow$"

Supongamos que se cumple el Axioma 4b P para cierto punto P.

Sean τ_1, τ_2 traslaciones que satisfacen las hipótesis del Axioma 4b, y pongamos que:

$$\tau_1(P) = Q, \text{ luego } \tau_1 = \tau_{PQ}.$$
$$\tau_2(P) = R, \text{ luego } \tau_2 = \tau_{PR}.$$

Puesto que $1 \neq \tau_1 \neq \tau_2 \neq 1$ y τ_1, τ_2 tienen las mismas trazas por hipótesis, entonces $P \neq Q \neq R \neq P$ y P, Q, R están alineados. Estamos pues en las condiciones del Axioma 4b P.

Sea ahora σ una dilatación con P como punto fijo tal que $\sigma(Q) = R$. La composición $\sigma\tau_1\sigma^{-1}$ es una traslación (Teorema 2.11). Si la aplicamos a P:

$$\sigma\tau_1\sigma^{-1}(P) = \sigma\tau_1(P) = \sigma(Q) = R.$$

Así pues $\sigma\tau_1\sigma^{-1}$ es la traslación que lleva a P en R, luego por unicidad $\tau_2 = \sigma\tau_1\sigma^{-1}$.

Sea α el elemento de K que lleva τ en $\sigma\tau\sigma^{-1}$, entonces:

$$\tau_1^{\alpha} = \sigma\tau_1\sigma^{-1} = \tau_2.$$

"$\Leftarrow$"

Supongamos que se verifica el Axioma 4b. Sean P, Q, R puntos distintos y alineados, y tomemos $\tau_1 = \tau_{PQ}, \tau_2 = \tau_{PR}$. Tenemos entonces que:

- P, Q, R alineados, y por tanto τ_1 y τ_2 tienen las mismas trazas.

- P, Q, R distintos, luego $1 \neq \tau_1 \neq \tau_2 \neq 1$.

Pero estas son justamente las hipótesis del Axioma 4b, y por consiguiente existe un único α en K distinto de 0 tal que $\tau_2 = \tau_1^\alpha$.

Por el Teorema 3.10, existe una única dilatación σ con P como punto fijo y tal que $\tau^\alpha = \sigma\tau\sigma^{-1}$ para todo $\tau \in T$. Si elegimos $\tau = \tau_1$ entonces:

$$\tau_2 = \tau_1^\alpha = \sigma\tau_1\sigma^{-1},$$

luego $\tau_2\sigma = \sigma\tau_1$. Si aplicamos a P a ambos lados de la ecuación, teniendo en cuenta que P es punto fijo de σ:

$$\tau_2(P) = \tau_2\sigma(P) = \sigma\tau_1(P),$$

y por la elección de $\tau_1 = \tau_{PQ}$ y $\tau_2 = \tau_{PR}$, entonces tenemos:

$$R = \tau_2(P) = \sigma\tau_1(P) = \sigma(Q),$$

luego $\sigma(Q) = R$. Así pues σ es la dilatación buscada.

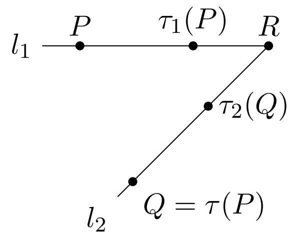
□

Teorema 4.4. *Sean $\tau_1 \neq 1 \neq \tau_2$ traslaciones con direcciones distintas. Para cualquier traslación $\tau \in T$, existen $\alpha, \beta \in K$ únicos tal que $\tau = \tau_1^\alpha\tau_2^\beta = \tau_2^\beta\tau_1^\alpha$.*

Demostración. La conmutatividad es inmediata, pues T es conmutativo.

• Existencia:

Sea P un punto cualquiera, y supongamos que $\tau(P) = Q$. Sean l_1 la traza de τ_1 que pasa por P, y l_2 la traza de τ_2 que pasa por Q. Como τ_1 y τ_2 tienen direcciones distintas por hipótesis, entonces $l_1 \nparallel l_2$, y por tanto l_1 y l_2 se cortan el menos en un punto R.



Si $P = R$ deducimos que la traslación $\tau_{PR} = 1$, y si $P \neq R$ que τ_{PR} y τ_1 tienen la misma dirección. Puesto que $\tau_1 \neq 1$ por hipótesis, entonces estamos en las condiciones del Axioma 4b (teniendo en cuenta la Observación 4.1), luego existe un único α en K tal que $\tau_{PR} = \tau_1^\alpha$. Análogamente existe un único β en K tal que $\tau_{RQ} = \tau_2^\beta$.

Si componemos ambas traslaciones, y la aplicamos a P:

$$\tau_2^{\beta}\tau_1^{\alpha}(P) = \tau_{RQ}\tau_{PR}(P) = \tau_{RQ}(R) = Q.$$

Por unicidad $\tau_2^{\beta}\tau_1^{\alpha}(P) = \tau_{PQ}$, que es precisamente nuestra elección inicial para la traslación τ.

• Unicidad:

Si $\tau_2^{\beta}\tau_1^{\alpha} = \tau_2^{\gamma}\tau_1^{\delta}$, entonces $\tau_1^{\alpha-\delta} = \tau_2^{\gamma-\beta}$, por lo que $\alpha - \delta = \gamma - \beta$.

Si $\tau_1^{\alpha-\gamma} \neq 1$, tenemos que $\tau_1^{\alpha-\gamma}$ y τ_1 tienen la misma dirección. El Teorema 3.14 nos garantiza que $\alpha = \gamma$. Análogamente deducimos que $\delta = \beta$.

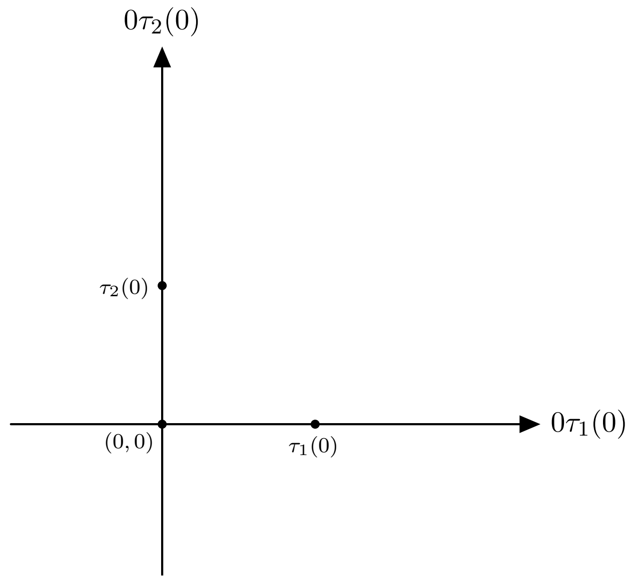
□

Con todos estos resultados, tenemos ya las suficientes herramientas como para introducir coordenadas.

4.2. Introducción de coordenadas

En la geometría ordinaria describimos las coordenadas seleccionando primeramente un origen 0, dibujando dos ejes, y marcando en ellos ciertos “puntos unidad”. Nosotros lo haremos de la misma manera. Nuestro origen será un punto 0, y tomaremos las traslaciones $\tau_1 \neq 1 \neq \tau_2$. La interpretación de estas será la siguiente:

- La traza de τ_1 que pasa por 0 será un eje de coordenadas.
- La traza de τ_2 que pasa por 0 será el otro eje de coordenadas.
- Los puntos $\tau_1(0)$ y $\tau_2(0)$ serán los “puntos unidad” de cada uno de los ejes, respectivamente.



• **Descripción de un punto**.

Sea pues P un punto cualquiera, escribiremos la traslación τ_{0P} como sigue:

$$\tau_{0P} = \tau_1^{\xi}\tau_2^{\eta}.$$

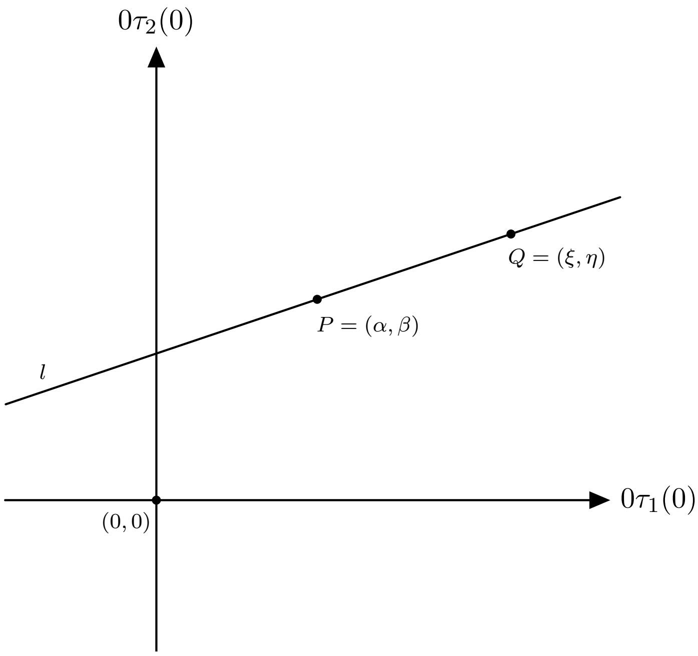
con $\xi, \eta \in K$ únicos (Teorema 4.4). Asignaremos a P el par de coordenadas (ξ, η).

- Para $P = 0$: $\tau_{00} = 1 = \tau_1^0\tau_2^0$, luego el origen de coordenadas es $(0,0)$, entendiéndolo como $\xi = 0, \eta = 0$, i.e. el 0 como elemento de K.
- Para $(1,0)$: $\tau_1^1\tau_2^0 = \tau_1 = \tau_{0P} \Rightarrow \tau_1(0)$ es el “punto unidad” del primer eje.
- Para $(0,1)$: $\tau_1^0\tau_2^1 = \tau_2 = \tau_{0Q} \Rightarrow \tau_2(0)$ es el “punto unidad” del segundo eje.

• **Descripción de una recta**.

Sea ahora una recta cualquiera l, $P = (\alpha, \beta)$ un punto en l y $\tau = \tau_1^{\gamma}\tau_2^{\delta} \neq 1$ una traslación que tiene a l como traza.

Sea $Q = (\xi, \eta)$ en l otro punto, y tomamos τ_{PQ}, que tendrá la misma dirección que τ. Puesto que $1 \neq \tau$, el Axioma 4b nos garantiza, teniendo en cuenta la Observación 4.1, que $\tau_{PQ} = \tau^t$ para algún $t \in K$.



Recíprocamente dado t en K, encontraremos la recta l entre las trazas de τ^t; $\tau^t(P) = Q \in l$ que muestra que toda τ^t es de la forma τ_{PQ} con Q en l.

Así pues, tenemos que:

$$\tau_{PQ} = \tau^t.$$
$$\tau = \tau_1^{\gamma}\tau_2^{\sigma}.$$
$$\tau_{0P} = \tau_1^{\alpha}\tau_2^{\beta}.$$

Con esto, podemos obtener las coordenadas del punto Q de la siguiente manera:

$$\tau_{0Q} = \tau_{PQ}\tau_{0P} = \tau^t\tau_{0P} = (\tau_1^{\gamma}\tau_2^{\delta})^t\tau_1^{\alpha}\tau_2^{\beta} = \tau_1^{t\gamma+\alpha}\tau_2^{t\delta+\beta}.$$

Luego las coordenadas del punto son $Q = (t\gamma + \alpha, t\delta + \beta)$.

Puesto que $P = (\alpha, \beta)$ puede ser cualquier punto, entonces α y β son arbitrarios. $\tau = \tau_1^{\gamma}\tau_2^{\delta}$ debe ser una traslación distinta de 1, lo que significa que $\gamma \neq 0 \neq \delta$. Si este es el caso, entonces la recta que pasa por P y que es una traza de τ, es la recta $(t\gamma + \alpha, t\delta + \beta)$ cuando t recorre K.

Podemos abreviarlo en notación vectorial.

Sea $A = (\gamma, \delta)$ y $P = (\alpha, \beta)$. Entonces $Q = P + tA$, con t recorriendo K, nos da los puntos de la recta. La única restricción es que $A \neq 0$, pues entonces $P = Q$.

Tenemos de esta manera cubiertas las descripciones usuales de rectas y puntos con coordenadas.

4.3. Geometría afín sobre un cuerpo

Supongamos que K es un cuerpo dado, y construiremos una geometría afín sobre K.

- Definimos un punto P como el par ordenado (ξ, η) con ξ y η elementos de K.
- Una recta l la definiremos como el conjunto de puntos $\{P + tA\}$, con P un punto dado, $A \neq 0$ un vector dado, y t recorriendo K.
- La relación "*Q está en l*" significará que Q es un elemento del conjunto de puntos $\{P + tA\}$.

Nuestro problema ahora es demostrar que esta geometría satisface todos los axiomas descritos anteriormente.

Consideremos primeramente las posibles intersecciones entre dos rectas $P+tA$ y $Q+uB$, con $A \neq 0 \neq B$ vectores; t, u recorriendo K.

Si ambas rectas intersecan, tendremos que $P + tA = Q + uB$, es decir:

$$tA - uB = Q - P. \tag{4.1}$$

• **Intersección de dos rectas**.

A y B son linealmente independientes por la izquierda. Esto es lo mismo que decir que si $xA + yB = 0$ entonces $x = y = 0$.

Los elementos t, u que resuelven la ecuación (4.1), son únicos; lo que significa que la intersección es un único punto.

• **Rectas paralelas**.

A y B son linealmente dependientes por la derecha. Esto es lo mismo que decir que existen α y β distintos de 0 y tal que $A\alpha + B\beta = 0$.

Si $A\alpha + B\beta = 0$ entonces $\alpha \neq 0$, pues de lo contrario $\beta B = 0$, luego $\beta = 0$, pues hemos supuesto que $B \neq 0$. Análogamente $\beta \neq 0$. Entonces $B = -\beta^{-1}\alpha A$ con $-\beta^{-1}\alpha \neq 0$.

Podemos entonces simplificar la recta $Q + uB$ como sigue:

$$Q + uB = Q - u\beta^{-1}\alpha A = Q + vA.$$

con $v = -u\beta^{-1}\alpha$, si u recorre K, también lo hará v.

Asumiremos que $B = A$, luego la intersección de las rectas $P + tA$, $Q + tA$ será:

$$(t - u)A = Q - P. \tag{4.2}$$

Si $Q - P$ no es un "múltiplo por la izquierda" de A, no es posible resolver la ecuación, luego las rectas no intersecan, son paralelas.

Si $Q - P = \delta A$ es un "múltiplo por la izquierda" de A, entonces $Q = P + \delta A$, y la recta $Q + uA$ se convierte en $P + (u + \delta)A$. Si u recorre K, también lo hará $u + \gamma$, y vemos que las dos rectas son iguales, y por tanto paralelas.

Concluimos entonces que dos rectas $P + tA$ y $Q + uB$ son paralelas si y sólo si $B = \gamma A$ con $\gamma \neq 0$ un elemento de K.

• **Haz de rectas paralelas**.

Un haz de rectas paralelas consiste en las rectas $P + tA$, para un A fijado si P recorre todos los puntos.

• **Axioma 1**.

Dados P, Q dos puntos distintos, entonces $Q - P \neq 0$, luego $P + t(Q - P)$ es una recta. Para $t = 0$ tenemos P, para $t = 1$ tenemos Q. Entonces esta recta es única.

• **Axioma 2**.

Sean $P + tA$ una recta y Q un punto dado. Entonces $Q + uA$ recta paralela a $P + tA$ que contiene a Q (para $u = 0$). Nuestra discusión muestra la unicidad.

• **Axioma 3**.

Sean $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ y $C = (0, 1)$ tres puntos. Como $A \neq B$ entonces $A + t(B - A)$ recta que contiene a A y B pero no a C. Así pues existen tres puntos no alineados.

• **Definición de Dilatación**.

Sea σ una aplicación, α un elemento de K y C cualquier vector. Pongamos:

$$\sigma(X) = \alpha(X) + C. \tag{4.3}$$

- Si $\alpha = 0$ entonces $\sigma(X) = +C$, luego todo punto va a C y σ es una dilatación.

- Si $\alpha \neq 0$:

La imagen de la recta $P + tA$ a través de σ es:

$$\begin{aligned}\sigma(P + tA) &= \alpha(P + tA) + C = \alpha(P) + \alpha(tA) + C\\ &= (\alpha(P) + C) + \alpha(t)A = (\alpha(P) + C) + uA,\end{aligned}$$

con $u = \alpha(t)$ recorriendo K si t recorre K.

Luego la imagen de $P + tA$ a través de σ es la recta $(\alpha(P) + C) + uA$. Puesto que $u = \alpha(t)$ y α es un H.C.T., entonces las dos rectas son paralelas. Así pues, σ lleva una recta en otra recta, luego es una dilatación, y además es no degenerada.

• **Definición de Traslación**.

Los puntos fijos de σ deben satisfacer:

$$X = \sigma(X) = \alpha(X) + C. \tag{4.4}$$

Es decir $(1 - \alpha)(X) = C$. Distinguimos dos casos:

1. $\alpha \neq 1$. Por lo tanto $(1 - \alpha)^{-1}(C)$ es el único punto fijo.

2. $\alpha = 1$. Entonces $0(X) = C$. Puede ocurrir una de las siguientes cosas:

    - Si $C \neq 0$ entonces no tiene puntos fijos.

    - Si $C = 0$ entonces $\sigma = 1$ es la aplicación identidad.

Vemos que estas son las condiciones de la Definición 2.7 de traslación. Luego una traslación será de la forma $\tau \colon X \to X + C$. Así pues, las denotaremos por τ_C.

• **Axioma 4a**.

Dados P, Q dos puntos, obsérvese que:

$$\tau_{Q-P}(P) = P + (Q - P) = Q.$$

Luego el Axioma 4a se verifica, y muestra que las traslaciones τ_C son todas las traslaciones de nuestra geometría.

• **Axioma 4b** P.

Sean P, Q, R puntos distintos y alineados. Puesto que R está en la recta $P + t(Q - P)$, que pasa por P y Q, entonces podemos determinar α de tal forma que:

$$P + \alpha(Q - P) = R.$$

Puesto que $R \neq P$ entonces $\alpha \neq 0$. Con este α, formamos la dilatación:

$$\sigma(X) = \alpha(X) + P - \alpha(P).$$

Claramente:

$$\begin{aligned} &\sigma(P) = \alpha(P) + P - \alpha(P) = P && \text{i.e. } \sigma(P) = P. \\ &\sigma(Q) = \alpha(Q) + P - \alpha(P) = \alpha(Q - P) + P = R - P + P = R && \text{i.e. } \sigma(Q) = R. \end{aligned}$$

Esto muestra que el Axioma 4b P se cumple para todo P, y también que cualquier dilatación con P como punto fijo es de esta forma. Sabemos entonces que la ecuación (4.3) nos da todas las dilataciones de nuestra geometría.

• **Determinar los homomorfismos del grupo de traslaciones T que conservan la traza**.

Tomamos como punto P el origen $(0, 0)$.

Si la dilatación σ tiene a P como punto fijo, entonces:

$$(0, 0) = \sigma(0, 0) = \alpha(0, 0) + C.$$

Como vimos en (4.4), debe ocurrir que $C = (0, 0)$. Así pues, las dilataciones σ con P como punto fijo serán de la forma:

$$\sigma(X) = \alpha(X) \quad \text{con } \alpha \neq 0.$$

Así pues, σ determina a α de forma única. Por el Teorema 3.10, los H.C.T. son aquellos distintos de 0 que llevan τ en $\sigma\tau\sigma^{-1}$, y distintas dilataciones σ nos darán distintos homomorfismos α.

Tomemos $\sigma^{-1}(X) = \alpha^{-1}(X)$. Sea la traslación τ_C, su imagen a través de α será:

$$\begin{aligned}\sigma\tau_C\sigma^{-1}(X) &= \sigma\tau_C(\alpha^{-1}(X)) = \sigma(\alpha^{-1}(X) + C)\\ &= \alpha(\alpha^{-1}(X) + C) = \alpha\alpha^{-1}(X) + \alpha(C) = X + \alpha(C) = \tau_{\alpha(C)}.\end{aligned}$$

Vemos que, para un homomorfismo $\alpha \neq 0$ dado, la aplicación que lleva τ_C en $\tau_{\alpha C}$ es el H.C.T. buscado. A esto debemos añadir la aplicación 0 que lleva a cada τ_C en $\tau_{0(C)} = \tau_0 = 1$.

Concluimos que los H.C.T. de nuestra geometría, que denotaremos por $\bar{\alpha}$, son de la forma:

$$\bar{\alpha}\colon T \to T, \tau_C \mapsto \tau_C^{\bar{\alpha}}.$$

El cuerpo de todos estos H.C.T. lo denotaremos por $\bar{K}$.

- **K y $\bar{K}$ son isomorfos**.

Ya hemos visto que $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ es una correspondencia inyectiva entre el cuerpo K y el cuerpo $\bar{K}$.

Veamos que en efecto es un isomorfismo. Para ello, tendremos que demostrar que:

(*i*) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$.

(*ii*) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$.

(*i*) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$.

Sean las aplicaciones:

$$\bar{\alpha}\colon T \to T, \tau_C \mapsto \tau_{\alpha(C)}.$$
$$\bar{\beta}\colon T \to T, \tau_C \mapsto \tau_{\beta(C)}.$$

Entonces $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ (por definición de adición en $\bar{K}$) es la aplicación:

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta}\colon T \to T, \tau_C \mapsto \tau_{\alpha(C)} \cdot \tau_{\beta(C)}.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha(C)}\tau_{\beta(C)}(X) &= \tau_{\alpha(C)}(X+\beta(C)) = X+\beta(C)+\alpha(C)\\ &= X+(\alpha+\beta)(C) = \tau_{(\alpha+\beta)(C)}(X).\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$, pues ambas llevan a la traslación τ_C en $\tau_{(\alpha+\beta)(C)}$.

(ii) $\overline{\alpha\cdot\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\bar{\beta}\colon T \to T, \tau_C &\mapsto \tau_{\beta(C)}.\\ \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}\colon T \to T, \tau_C &\mapsto \tau_C^{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}} = \tau_{\alpha\beta(C)}.\\ \overline{\alpha\cdot\beta}\colon T \to T, \tau_C &\mapsto \tau_C^{\overline{\alpha\cdot\beta}} = \tau_{\alpha\beta(C)}.\end{aligned}$$

Luego $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=\overline{\alpha\cdot\beta}$, concluyendo así la demostración.

Así pues, los cuerpos K y $\bar{K}$ serán isomorfos bajo la correspondencia $\alpha \longleftrightarrow \bar{\alpha}$.

- **Coordenadas en el cuerpo** $\bar{K}$.

Seleccionamos el origen $(0,0)$ como θ para las coordenadas en $\bar{K}$. Tomamos los puntos $C=(1,0)$ y $D=(0,1)$; y $\tau_1=\tau_C$, $\tau_2=\tau_D$.

Sea $P=(\xi,\eta)$ un punto dado. Entonces:

$$\begin{aligned}\tau_1^{\bar{\xi}} &= \tau_C^{\bar{\xi}} = \tau_{\xi(C)}.\\ \tau_2^{\bar{\eta}} &= \tau_D^{\bar{\eta}} = \tau_{\eta(D)}.\end{aligned}$$

Si componemos ambas traslaciones y la aplicamos al origen, tenemos:

$$\tau_{\xi(C)}\tau_{\eta(D)}(\theta) = \tau_{\xi(C)}(\eta(D)) = \eta(D)+\xi(C) = (\xi,\eta) = P.$$

Así pues, la traslación $\tau_{\xi(C)}\tau_{\eta(D)}$ llevará el origen a P, i.e. $\tau_{\xi(C)}\tau_{\eta(D)}=\tau_{0P}$, con lo cual las coordenadas de P sobre $\bar{K}$ son el par ordenado $(\bar{\xi},\bar{\eta})$.

Esto significa que las coordenadas de un punto cualquiera son únicas salvo isomorfismos. Además, nos muestra que en conjunto hemos recuperado nuestro cuerpo original K. Nótese que el isomorfismo $K \longleftrightarrow \bar{K}$ es un isomorfismo canónico.

Capítulo 5

Teorema de Desargues

Asumiremos que solamente se verifican los tres primeros axiomas para nuestra geometría. El siguiente teorema puede verificarse o no en ella (ver Figuras 5.1 y 5.2).

Teorema 5.1 (Teorema de Desargues)**.**

Sean l_1, l_2 y l_3 tres rectas distintas, que además son paralelas o intersecan en un punto P. Sean Q, Q' dos puntos en l_1; R, R' en l_2; y S, S' en l_3, distintos de P en caso de intersección.

$$\textit{Si } QR \parallel Q'R' \textit{ y } QS \parallel Q'S', \textit{ entonces } RS \parallel R'S'.$$

Observación 5.2.

- Si $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_1$ lo llamaremos Teorema (D_a).

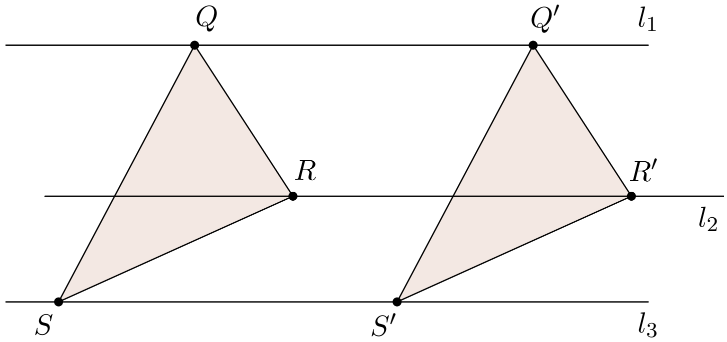


Figura 5.1: Teorema (D_a)

- Si $P = l_1 \cap l_2 \cap l_3$, lo llamaremos Teorema (DP).

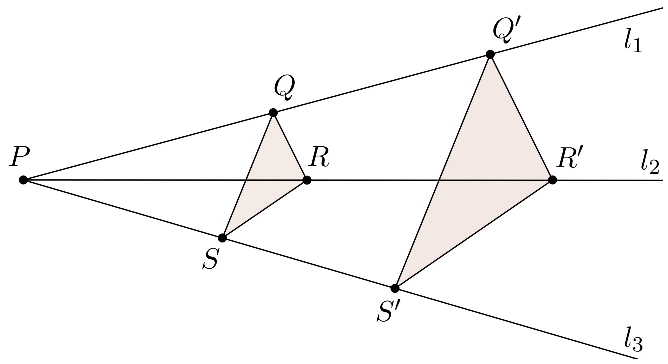


Figura 5.2: Teorema (DP)

Habrá distintos casos triviales en los que el teorema sí se verifica.

Ejemplo 5.3. Si $Q = Q'$, entonces $QR = Q'R'$, y puesto que l_2 y QR tienen el punto R en común, pero no Q, se sigue que $R = R'$ y $S = S'$. Por tanto podremos suponer que los puntos son distintos.

Ejemplo 5.4. Si Q, R, S están alineados, entonces Q', R', S' están alineados, y por tanto el teorema se verifica.

Teorema 5.5. *El Axioma 4a implica (D_a), y el Axioma 4b P implica (DP).*

Demostración.

Sea σ la traslación que lleva a Q en Q' (D_a), o la dilatación con P como punto fijo que lleva a Q en Q' (DP). Como $\sigma(Q) = Q'$, y la recta l_1 contiene a Q y a Q', entonces por definición l_1 es la traza de σ que pasa por Q y por Q'.

Puesto que l_1, l_2, l_3 paralelas por hipótesis (D_a), entonces estarán entre las trazas de σ. Como $QR \parallel Q'R' = \sigma(Q)\sigma(R)$, entonces por definición de dilatación $QR \parallel \sigma(Q)\sigma(R)$, y entonces:

$$QR \parallel \sigma(Q)\sigma(R) = Q'\sigma(R).$$

Como por hipótesis $QR = Q'\sigma(R)$, entonces por unicidad (Axioma 2) $Q'R' = Q'\sigma(R)$, de lo que se sigue que $\sigma(R) = R'$. Análogamente obtendremos que $\sigma(S) = S'$.

Con esto, puesto que

$$RS \parallel \sigma(R)\sigma(S) = R'S',$$

entonces $RS \parallel R'S'$, concluyendo así la demostración. $\square$

Teorema 5.6. *(D_a) implica el Axioma 4a, y (DP) implica el Axioma 4b P.*

Demostración.

Tomemos primeramente el plano afín más pequeño, $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}_2)$, sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ visto en el Ejemplo 1.15.

Este espacio afín cumple, según el Teorema 1.11, lo siguiente:

(i) Tiene exactamente $2^2 = 4$ puntos.

(ii) Cada punto está en $2 + 1 = 3$ rectas.

(iii) Cada haz contiene 2 rectas.

(iv) El número total de rectas es $2(2 + 1) = 6$.

(v) hay $2 + 1 = 3$ haces de rectas paralelas.

En este espacio afín se verifican todos los axiomas, especialmente: Axioma 4a, Axioma 4b y Axioma 4b P.

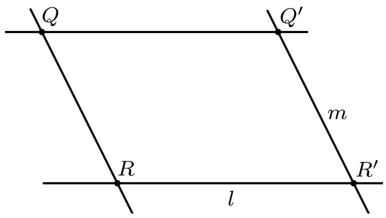
Podemos entonces asumir que cada recta contiene al menos tres puntos. De esto se sigue que dadas dos rectas, podremos encontrar un punto que no esté en ninguna.

(i) (D_a) implica Axioma 4a.

Supongamos que se verifica (D_a). Cualquier par de puntos distintos Q, Q', podrán ser asociados con la aplicación $\tau^{Q,Q'}$, que estará bien definida solamente para los puntos R que no estén en la recta QQ'.

Sea l la recta paralela a QQ' que pasa por R. Puesto que R no está en la recta QQ', entonces l y QQ' son distintas.

Sea m la recta paralela a QR que pasa por Q'. Entonces m y l no son paralelas, luego se cortan en un punto R'.



Puesto que R' está en l pero no en QQ', y como R' está en m pero no es QR; entonces deducimos respectivamente que $R' \neq Q'$ y $R' \neq R$.

Puesto que R y R' están el l, entonces por unicidad $l = RR'$, luego RR' y QQ' son paralelas. Análogamente Q' y R' están en m, luego $Q'R' = m$, y así $Q'R'$ y QR también son paralelas.

Esto describe la imagen de R a través de $\tau^{Q,Q'}$; $\tau^{Q,Q'}(R) = R'$.

De la misma manera, con el par de puntos R, R' podemos describir la aplicación $\tau^{R,R'}$, $\tau^{R,R'}(Q) = Q'$.

Sea ahora un punto S que no está ni en RR' ni en QQ', y S' su imagen a través de $\tau^{Q,Q'}$. Análogamente al caso anterior, deducimos que $QQ' \parallel SS'$, teniendo así RR', QQ', SS' tres rectas paralelas y distintas. De nuevo de manera análoga al caso anterior, tenemos que $QS \parallel Q'S'$. Puesto que por hipótesis (D_a) se verifica, entonces $RS \parallel R'S'$.

Tenemos pues $RR' \parallel SS'$ y $RS \parallel R'S'$, lo que significa que $\tau^{R,R'}(S) = S'$. Las aplicaciones $\tau^{R,R'}$ y $\tau^{Q,Q'}$ coinciden dondequiera que estén definidas. La aplicación buscada τ será la combinación de $\tau^{Q,Q'}, \tau^{R,R'}, \tau^{S,S'}$, donde para cualquier punto, su imagen a través de τ deberá ser la imagen a través de una de estas tres aplicaciones.

Supongamos que $\tau = \tau^{R,R'}$ sin pérdida de generalidad. Como hemos visto al describirla, esta aplicación tiene la propiedad de que:

$$\tau(Q) = \tau^{R,R'}(Q) = Q'.$$

Si probamos que τ es una dilatación, entonces es claro que es una traslación, pues todas las trazas son paralelas.

En el caso trivial de que $Q = Q'$, la aplicación buscada será la identidad $\tau = 1$.

Veamos que esta aplicación es una dilatación.

Sean U, V dos puntos distintos. Supongamos sin pérdida de generalidad que, de las tres rectas, es QQ' la que no contiene ni a U ni a V. Así pues $\tau = \tau^{Q,Q'}$.

Si UV y QQ' son paralelas entonces U' y V' están en UV. Supondremos entonces que UV y QQ' no son paralelas. Entonces dichos puntos están en las mismas hipótesis exigidas para los puntos R y S, para los cuales hemos probado que $RS \parallel R'S'$. Así pues, τ es una dilatación, y por tanto es la traslación buscada, por lo que se verifica el Axioma 4a.

(i) (DP) implica Axioma 4b P.

Si suponemos que (DP) se verifica, entonces podemos probar el Axioma 4b P de forma análoga al caso anterior, con la pequeña diferencia de que en vez de las rectas paralelas a QQ', deberemos tomar las rectas que pasan por P.

$\square$

5.1. Plano de Moulton

El *Plano de Moulton* es un plano afín ($\mathscr{P}$,$\mathscr{L}$), con $\mathscr{P}$ el conjunto de pares de puntos ordenados de $\mathbb{R}$, y $\mathscr{L}$ el conjunto de rectas que se definen de la siguiente manera:

- Las rectas verticales y horizontales del plano real.
- Las rectas con pendiente negativa del plano real.
- Las rectas quebradas del plano real euclidiano que tienen pendiente positiva m por encima del eje x, y pendiente $2m$ por debajo del eje x.

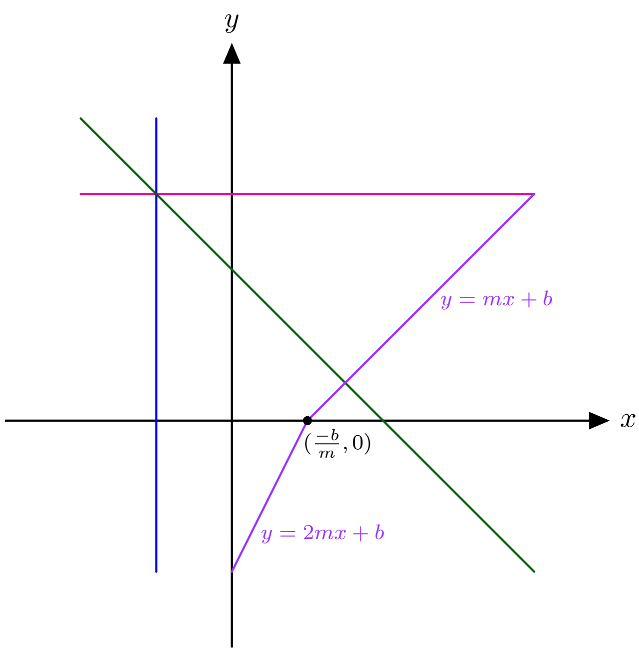
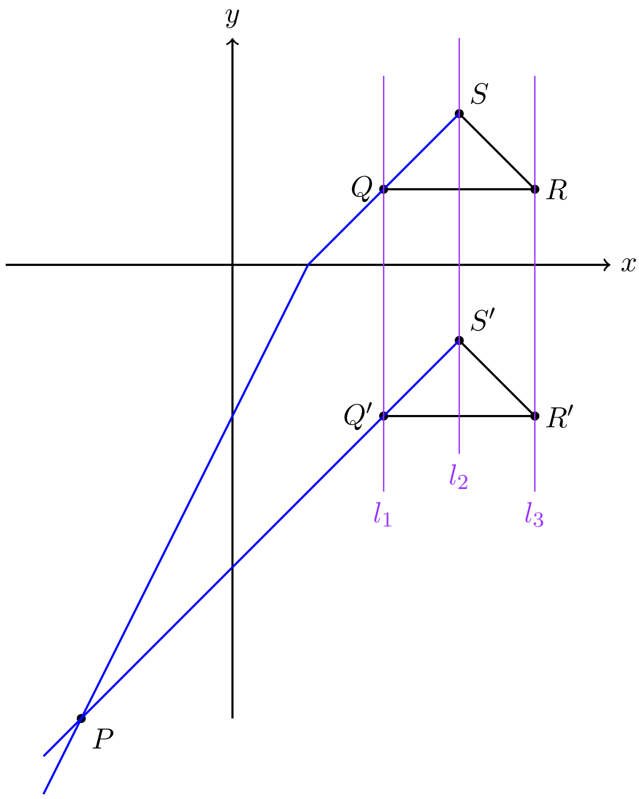


Figura 5.3: Plano de Moulton

En la siguiente figura, podemos observar que $QR \parallel Q'R'$ y $RS \parallel R'S'$. Sin embargo, QS y $Q'S'$ no son paralelas, se cortan en el punto P.



Vemos que este es un ejemplo de un plano afín que satisface los axiomas, pero que no verifica el Teorema de Desargues.

Capítulo 6

Teorema de Pappus

En un plano Desarguesiano, la multiplicación no tiene por qué ser conmutativa. Sin embargo, su equivalente geométrico es el Teorema de Pappus, que se enuncia a continuación, y que nos garantiza la conmutatividad.

Teorema 6.1 (Teorema de Pappus)**.** *Sean l y m dos rectas que se cortan en un punto P; R, R' y S tres puntos distintos en la recta m; y Q, Q' y T tres puntos distintos en la recta l. Entonces:*

$$\textit{Si } RQ' \parallel R'T \textit{ y } R'Q \parallel Q'S \Rightarrow RQ \parallel ST.$$

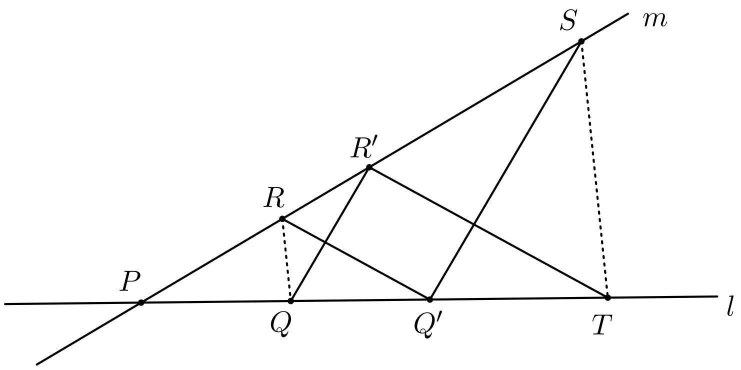


Figura 6.1: Configuración de Pappus

Teorema 6.2 (Teorema de Hilbert).

El cuerpo K es conmutativo si y sólo si se verifica el Teorema 6.1 de Pappus.

Demostración.

Tomamos un punto arbitrario P. Por el Teorema 3.10, un elemento α de K distinto de cero queda determinado por una única dilatación, σ_α, que tiene a P como punto fijo, y tal que para toda traslación τ, $\tau^\alpha = \sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1}$.

Si tenemos otro elemento β distinto de α en K de tal manera que $\tau^\beta = \sigma_\beta \tau \sigma_\beta^{-1}$; entonces, por un lado, tenemos:

$$\tau^{\alpha\beta} = (\tau^\beta)^\alpha = (\sigma_\beta \tau \sigma_\beta^{-1})^\alpha = \sigma_\alpha \sigma_\beta \tau \sigma_\beta^{-1} \sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha \sigma_\beta \tau (\sigma_\alpha \sigma_\beta)^{-1}.$$

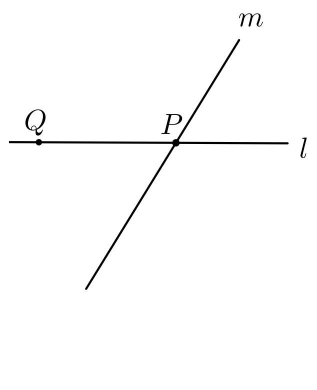
Y por otro lado tenemos:

$$\tau^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \tau \sigma_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Puesto que σ_α queda determinada de forma única por α, tenemos que $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \sigma_\beta$. Esto significa que el grupo multiplicativo de elementos no nulos de K es isomorfo al grupo de dilataciones que tienen a P como punto fijo. K será conmutativo si y sólo si este grupo de dilataciones es conmutativo.

Veamos ahora que D es conmutativo.

Tomamos dos rectas l y m que pasan por P, y sea Q cualquier punto en l distinto de P.



Si σ_1 es una dilatación que tiene a P como punto fijo, entonces l es una σ_1- traza, y además el punto $\sigma_1(Q) = Q'$ será distinto de P, y por el Axioma 4b P, será cualquier punto de la recta l.

Entonces σ_1 queda completamente definida por $\sigma_1(Q) = Q'$.

Análogamente, sean R, R' puntos en m distintos de P, y definamos una segunda dilatación σ_2, que tenga a P como punto fijo, por $\sigma_2(R) = R'$ (ver Configuración de Pappus en Figura 6.1).

Construiremos primeramente los dos puntos S y T de la forma $S = \sigma_1\sigma_2(R)$ y $T = \sigma_2\sigma_1(Q)$. De esta manera, quedan completamente determinados, pues:

$$QR' \parallel \sigma_1(Q)\sigma_1(R') = Q'\sigma_1\sigma_2(R) = Q'S.$$
$$RQ' \parallel \sigma_2(R)\sigma_2(Q') = R'\sigma_2\sigma_1(Q) = R'T.$$

Para tener $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ es necesario y suficiente que $\sigma_1\sigma_2(Q) = \sigma_2\sigma_1(Q)$ o que $\sigma_1\sigma_2(Q) = T$. Puesto que $\sigma_1\sigma_2(Q)$ está en l, queda determinada por:

$$QR' \parallel Q'S.$$
$$RQ' \parallel R'T.$$

Veamos ahora que $QR \parallel TS$:

Tenemos seis rectas en esta configuración: QR', $R'T$, TS, SQ', $Q'R$ y RQ, que podemos pensar como un hexágono inscrito en el par de rectas l y m, con nuestros seis puntos como vértices. QR' y $Q'S$, $Q'R$ y $R'T$, RQ y TS serían los pares de lados opuestos del hexágono. □

Teorema 6.3 (Frobenius, 1877). *Las únicas álgebras de división asociativas reales son* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ *y* $\mathbb{H}$.

Hessenberg probó, en 1905, el siguiente resultado:

Teorema 6.4. *Si en un plano afín se verifican el Teorema de Pappus, entonces también se verifica el Teorema de Desargues.*

Realmente, el Teorema de Pappus se verifica en cualquier plano afín Desarguesiano que sea finito, y esto se puede probar utilizando métodos algebraicos. La demostración más conocida la realizó el matemático Wedderburn en 1905, utilizando el siguiente resultado:

Teorema 6.5 (Teorema de Wedderburn). *Todo cuerpo con un número finito de elementos es conmutativo.*

6.1. Plano de Hamilton

El *Plano de Hamilton* $\mathbb{A}(\mathbb{H})$ es el plano afín sobre el conjunto de los cuaternios $\mathbb{H}$, definido de la siguiente manera:

- Los puntos son los pares $\mathbb{H}^2$.
- Las rectas son los conjuntos de la forma:

$$\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid xa + yb + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{H} \text{ y } a \text{ y } b \text{ no simultáneamente cero}\}$$

Recordemos que los cuaternios $\mathbb{H}$ se definen como el conjunto:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

La suma y la multiplicación se definen considerando los elementos de este conjunto como polinomios en i, j y k. Así pues, la suma de dos cuaternios se define de la siguiente manera:

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k.$$

De forma similar, la multiplicación se define como la de los polinomios, teniendo en cuenta las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = -ji &= k \\ jk = -kj &= i \\ ki = -ik &= j \end{aligned}$$

Con esto, la multiplicación de dos cuaternios se define como sigue:

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk) \cdot (a' + b'i + c'j + d'k) = {} & aa' - bb' - cc' - dd' + (ab' + ba' + cd' - dc')i \\ & + (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbb{H}$ no es conmutativo (pues $ij \neq ji$), entonces por el Teorema 6.2, este plano afín no verifica el Teorema de Pappus.

Bibliografía

[1] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

[2] M. K. Bennett, *Affine and Projective Geometry*, A Wiley-Interscience publication, Inc., New York, 1995.

[3] R. Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[4] D. Hilbert, *Foundations of Geometry*, (2nd Ed.), Open Court Publishing, Chicago, IL, 1971.

[5] H. Tecklenburg, *A proof of the theorem of Pappus in finite Desarguesian affine planes*, J. Geom. 30 (1987), 172–181.

[6] J. H. M. Wedderburn, *A theorem on finite algebras*, Trans. Amer. Math, Soc. 6 (1905), 349–352.