TRABAJO DE FIN DE MÁSTER:

Ecuaciones Diferenciales Funcionales con Involuciones

F. ADRIÁN FDEZ. TOJO

Tutor: ALBERTO CABADA FERNÁNDEZ

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

2011/2012

Versión editada para su publicación en Minerva

Índice general

1. Introducción

El ser de las ecuaciones diferenciales funcionales: Física y no localidad

> *"La siguiente idea caracteriza la independencia relativa de dos objetos distanciados en el espacio, A y B: la influencia externa en A no tiene influencia directa en B; esto es conocido como el Principio de Acción Local, que se usa de forma consistente solamente en teoría de campos. Si este axioma fuese abolido por completo, la idea de la existencia de sistemas casi cerrados, y por consiguiente la posibilidad de postular leyes que pudiesen ser verificadas empíricamente en el sentido comúnmente aceptado, se volvería imposible."*
>
> Albert Einstein
> *Quanten-Mechanik und Wirklichkeit*
> Dialectica 2:320-324, 1948

Con estas palabras, Albert Einstein rechazaba la idea de que la física pudiese ser *no local* en el sentido que acabamos de ver. En términos de ecuaciones diferenciales, que son las que gobiernan las leyes de la física, la localidad en este sentido equivaldría a postular que cualquier ley física formulable en términos de ecuaciones diferenciales puede expresarse con una ecuación en la cual sólo intervengan la función incógnita evaluada en un punto t y sus derivadas en dicho punto. Cualquier otra cosa (una ecuación diferencial funcional, por ejemplo, que la función estuviese evaluada en $-t$) no podría constituir una ley física salvo que fuese equivalente a otra ecuación en las condiciones antes expuestas.

La discusión sobre la localidad o no localidad del espacio venía de antiguo. Durante más de doscientos años se admitió que la fuerza de la gravedad, tal y cómo había sido descrita por Newton, actuaba a distancia. El mecanismo por el cuál esto sucedía era desconocido y permaneció siendo un misterio hasta que, en 1916, fue el propio Einstein quien desmontó la teoría de Newton y devolvió la localidad al espacio con su *Teoría General de la Relatividad*. En ella, la gravedad, en vez de ser una fuerza a distancia, no es más que una deformación del espacio que se propaga a la velocidad de la luz y con esto quedó sentado el asunto de la localidad brevemente, hasta que apareció la mecánica cuántica.

Cuando Einstein escribió ese texto estaba apelando más a la razón y al espíritu filosófico de sus lectores que a las conclusiones de la teoría a las que él, junto a Podolsky y Rosen, habían llegado en 1936. La paradoja EPR establecía que, si los principios de la mecánica cuántica eran ciertos, entonces el espacio no podía ser local. Lo que en principio era un argumento en contra de la teoría cuántica se fue convirtiendo, poco a poco y ante el estupor de Einstein, en un arma de doble filo. Años más tarde, en 1964, Bell estableció su famoso teorema ofreciendo a su vez una forma de demostrarlo de forma empírica y, en 1972, se realizó el primer experimento que confirmó la no localidad del espacio.

Einstein, quizás por suerte, no vivió para conocer el teorema de Bell ni su comprobación experimental, pero de hacerlo probablemente habría mirado la física con otros ojos y habría comenzado a pensar en nuevas teorías y a considerar nuevas ecuaciones.

Si nos alejamos de la física, observamos que las ecuaciones diferenciales funcionales aparecen también en otras ramas de la ciencia, como por ejemplo la biología [3, 9, 18], y es de esperar que aparezcan también en un futuro cercano en aquellos campos científicos en los cuales la descripción del sistema a estudiar sea necesariamente global y no local, obligando así al estudio de ecuaciones diferenciales no ordinarias.

1.2. Breve historia de las ecuaciones diferenciales con involuciones

El estudio de las ecuaciones diferenciales con involuciones comienza con la resolución de la ecuación $x'(t) = x\left(\frac{1}{t}\right)$ por parte de Silberstein en 1940 [24]. Éste es un ejemplo de ecuación diferencial con una *involución*, es decir, una función que compuesta consigo misma es la identidad, como es el caso de la función $f(t) = \frac{1}{t}$.

Wiener también fue uno de los pioneros en este campo y realizó grandes avances en él*. Es él quien demuestra en [30] que las soluciones de la ecuación de Silberstein satisfacen la ecuación singular de Euler $t^2x''(t) + x(t) = 0$ y resuelve varios casos más generales de éste problema.

En algunos casos, las ecuaciones con involuciones pueden transformarse unas en otras y, haciendo el cambio de variable $y(t) = x(e^t)$, la ecuación de Silberstein puede expresarse como $y'(t) = e^{-t}y(-t)$ donde $f(t) = -t$ es otra involución llamada *reflexión*. Šarkovskiĭ muestra en [27] que las ecuaciones con reflexión tienen aplicaciones en el estudio de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales y en diferencias. Además, estas ecuaciones tienen propiedades muy interesantes que estudiaremos a fondo en esta memoria, como que la única solución de la ecuación del oscilador armónico $x''(t)+m^2x(t) = 0$, con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $x'(0) = -m\,x_0$, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, es la única solución de la ecuación de primer orden con reflexión $x'(t) + m\,x(-t) = 0$, $x(0) = x_0$ y viceversa.

Son Wiener y Watkins en [33] los que estudian la solución de la ecuación $x'(t)-a\,x(-t) = 0$ con condiciones iniciales. La ecuación $x'(t)+a\,x(t)+b\,x(-t) = g(t)$ es estudiada por Piao en [21, 22] y en [14, 23, 28, 31, 33] aparecen varios resultados para transformar problemas con involuciones y condiciones iniciales de segundo orden, o sistemas de dos ecuaciones y primer orden, en EDO de segundo orden y condiciones iniciales, garantizando que la solución del segundo problema es solución del primero. Por otra parte, también se han estudiado las propiedades asintóticas y la acotación de las soluciones de problemas de primer orden y condiciones iniciales como se puede ver en [29] y [1] respectivamente. El estudio de problemas de segundo orden con condiciones de contorno aparece recogido en [11,12,20,31] para

*En la Sección 3.1 se detallan estos avances.

condiciones de contorno tipo Dirichlet y Sturm-Liouville. En [19] se estudian ecuaciones de orden superior.

A pesar de todo este progreso en el campo y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, el caso de las ecuaciones diferenciales con reflexión y condiciones de contorno periódicas no ha sido considerado. Éste será el principal tema de estudio en esta memoria, en la que usaremos algunos de los métodos descritos en [5, 6] para encontrar una expresión de la solución de la ecuación $x'(t)+m\,x(-t)=h(t)$ con condiciones de contorno periódicas, en forma de la integral de lo que llamaremos la función de Green de la ecuación. Este estudio nos permitirá obtener principios del máximo y del antimáximo que presentan numerosas aplicaciones a la hora de resolver problemas de ecuaciones diferenciales con involuciones más generales.

Este trabajo se estructurará de la siguiente manera: en lo que queda de Introducción motivaremos el uso de involuciones con un problema sencillo apelando a su relación con las simetrías. En el Capítulo 2 definiremos formalmente el concepto de involución en el campo del análisis matemático y nos adentraremos en sus propiedades. Además, estudiaremos los operadores diferenciales con involuciones, los cuales, a partir de unas observaciones básicas, se amoldan a una teoría algebraica que nos permitirá manejar más fácilmente los conceptos y adentrarnos en la comprensión de la estructura de las ecuaciones. El Capítulo 3 está destinado a las ecuaciones diferenciales con involuciones. Por una parte, vamos a recoger los resultados previos en este campo de estudio. Muchos de los autores que aparecen en él ya han sido mencionados en esta introducción y sus resultados nos sirven de base para obtener nuevos teoremas y generalizar los ya existentes. Por otra, tenemos el bloque principal de esta memoria y la mayor parte del trabajo de investigación que contiene. En él se resuelve la ecuación $x'(t)+m\,x(-t)=h(t)$ con condiciones de contorno periódicas, se halla su función de Green y se estudian sus propiedades y aplicaciones. Finalmente, el Capítulo 4 contiene una breve descripción de varias líneas de investigación que se podrían seguir a partir de este trabajo.

1.3. Ecuaciones diferenciales y simetrías

El objetivo de esta sección es motivar el interés de las ecuaciones diferenciales con involuciones a partir de un problema sencillo.

Supongamos que $x(t)=a\,t+b$, donde $a,b\in\mathbb{R}$, es una recta en el plano real. Entonces, usando la fórmula de la pendiente entre los puntos $(-t,x(-t))$ y $(t,x(t))$, tenemos que

$$x'(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2t}. \tag{1.1}$$

Toda recta satisface esta ecuación, sin embargo, obsérvese que en ningún momento se pide que la pendiente sea constante. Surgen, por tanto, varias preguntas de forma natural: ¿son todas las soluciones de la ecuación (1.1) rectas?, ¿cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales de este tipo, es decir, de la forma $x'(t)=f(t,x(t),x(-t))$?, ¿cuándo puede garantizarse que estas ecuaciones tienen solución?, ¿cómo afecta a las soluciones de la ecuación del hecho de que x' dependa tanto el punto t como de la imagen de t por una simetría, o, más generalmente, de una involución de la recta real?

Para responder a la primera pregunta estudiaremos las funciones pares e impares –cada una con una propiedad de simetría distinta– y cómo actúa el operador derivación sobre ellas.

Definición 1.1. Sean G, H grupos, $A \subset G$ tal que $A^{-1} \subset A$. Diremos que $f : A \to H$ es una *función simétrica* o *par* si $f(x^{-1}) = f(x) \;\; \forall x \in A$. Diremos que f es una *función antisimétrica* o *impar* si $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \;\; \forall x \in A$.

Observación 1.1. f no tiene por qué ser un homomorfismo de grupos en las definiciones anteriores. Es más, si f es un homomorfismo, entonces es antisimétrica, y si f es un homomorfismo simétrico, entonces $f(G)$ es una potencia del grupo $\mathbb{Z}_2$.

Observación 1.2. El conjunto de funciones simétricas –respectivamente antisimétricas– de $A \subset G$ a un grupo H es un grupo con la operación punto a punto inducida por la operación de H.

Proposición 1.1. *Sea G un grupo, $A \subset G$ tal que $A^{-1} \subset A$, V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica distinta de $2^{\dagger}$. Entonces existen dos aplicaciones $f_e : A \to (V, +)$ y $f_o : A \to (V, +)$, simétrica y antisimétrica respectivamente, de forma que $f = f_e + f_o$. Además, esta descomposición es única.*

Demostración. Basta definir

$$f_e(x) := \frac{f(x) + f(x^{-1})}{2}, \quad f_o(x) := \frac{f(x) - f(x^{-1})}{2}.$$

Es evidente que f_e y f_o son simétrica y antisimétrica respectivamente y que $f = f_e + f_o$, con lo cual la existencia es obvia. Supongamos que existen dos descomposiciones $f = f_e + f_o = \tilde{f}_e + \tilde{f}_o$. Entonces $f_e - \tilde{f}_e = \tilde{f}_o - f_o$, pero $f_e - \tilde{f}_e$ es simétrica y $\tilde{f}_o - f_o$ antisimétrica, luego $f_e - \tilde{f}_e = \tilde{f}_o - f_o = 0$ y la descomposición es única. ∎

A partir de ahora, dada una función $f : A \to V$, f_e indicará su parte simétrica y f_o su parte antisimétrica.

Corolario 1.2. *En las condiciones de la proposición anterior, el espacio vectorial $\mathscr{F}(G, V) := \{f : G \to V\}$ se descompone en la suma directa de los espacios vectoriales $\mathscr{F}_e(G, V) := \{f : G \to V \mid f \text{ simétrica}\}$ y $\mathscr{F}_o(G, V) := \{f : G \to V \mid f \text{ antisimétrica}\}$, es decir, $\mathscr{F}(G, V) = \mathscr{F}_e(G, V) \oplus \mathscr{F}_o(G, V)$.*

Sea a partir de ahora $A \subset \mathbb{R}$ tal que $-A \subset A$. Dada la expresión de f_e y f_o en la descomposición podemos afirmar que $\mathscr{D}(A, \mathbb{R}) = \mathscr{D}_e(A, \mathbb{R}) \oplus \mathscr{D}_o(A, \mathbb{R})$ donde $\mathscr{D}(A, \mathbb{R})$ son las funciones diferenciables de A en $\mathbb{R}$ y $\mathscr{D}_e(A, \mathbb{R})$ y $\mathscr{D}_o(A, \mathbb{R})$ aquellas funciones que son diferenciables pares e impares respectivamente.

La siguiente proposición es un resultado elemental de cálculo diferencial.

Proposición 1.3. *El operador derivada actúa de la siguiente manera*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_e(A, \mathbb{R}) \oplus \mathscr{D}_o(A, \mathbb{R}) & \xrightarrow{D} & \mathscr{D}_e(A, \mathbb{R}) \oplus \mathscr{D}_o(A, \mathbb{R}) \\ (g, h) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = (h', g'). \end{array}$$

[†] Esta condición se toma para poder dividir entre 2 en el espacio vectorial.

Corolario 1.4. *Para toda $f \in \mathscr{D}(A,\mathbb{R})$ se verifica*

(1) $(f')_e = f' \iff f = f_o + c,\ c \in \mathbb{R}$,

(2) $(f')_o = f' \iff f = f_e$.

Ahora estamos en condiciones de resolver el *"problema de la recta"*. La ecuación (1.1) puede escribirse como

$$x'(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2t} = \frac{x_o(t)}{t},$$

y puesto que $\frac{x_o(t)}{t}$ es simétrica, teniendo en cuenta la Proposición 1.3, tenemos el sistema

$$\begin{aligned}(x_e)'(t) &= 0,\\ (x_o)'(t) &= \frac{x_o(t)}{t}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_e(t) = c$, $x_o(t) = k\,t$ con $c,k \in \mathbb{R}$, es decir, x es la recta $x(t) = k\,t + c$, lo cual responde a la primera pregunta que nos planteábamos.

Más adelante usaremos el método de descomposición en parte par e impar para encontrar soluciones a problemas con ecuaciones diferenciales con reflexión más complejos.

2. Propiedades de las involuciones y su relación con las ecuaciones diferenciales

Las involuciones, como veremos, tienen propiedades muy especiales. Esto se debe a su doble naturaleza analítica y algebraica. Este capítulo está por tanto dividido en dos secciones que explorarán los dos tipos de propiedades, llegando en la última a un cierto paralelismo entre las involuciones y los números complejos por su propiedad de descomponer ciertos polinomios (ver Observación 2.4).

2.1. Involuciones y sus propiedades

2.1.1. El concepto de involución

El concepto de involución es fundamental para la teoría de grupos y álgebras*, pero al mismo tiempo, al ser un objeto del análisis matemático, sus propiedades analíticas nos permiten obtener información a mayores acerca de este objeto. Para ser más claros al respecto, empezaremos por definir lo que es en este contexto analítico.

Definición 2.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto con más de un punto y $f : A \to A$ tal que f no es la función identidad Id. Entonces se dice que f es una *involución* si

$$f^2 \equiv f \circ f = \mathrm{Id}$$

o, equivalentemente, si

$$f = f^{-1}.$$

Si $A = \mathbb{R}$, f se dice una *involución fuerte* [31].

Ejemplo 2.1. Las siguientes involuciones son los ejemplos más comunes [31, 33]:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ es una involución fuerte conocida como *reflexión*.

(2) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ conocida como *inversión*.

*Para esta sección se ha seguido principalmente [31, 33].

(3) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c\,b + a^2 \neq 0$, $c \neq 0$,

$$f : \mathbb{R} \Big\backslash \left\{ \frac{a}{c} \right\} \to \mathbb{R} \Big\backslash \left\{ \frac{a}{c} \right\}, \; f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

es una familia de involuciones conocidas como *involuciones bilineales*. Si $a^2 + b\,c > 0$, la involución se dice *hiperbólica* y tiene dos puntos fijos.

La definición de involución se puede extender de forma natural a conjuntos arbitrarios (no necesariamente de números reales) o, de la siguiente manera, a involuciones de orden n [31].

Definición 2.2. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to A$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Entonces se dice que f es una *involución de orden* $\boldsymbol{n}$ si

(1) $f^n \equiv f \circ \overset{n}{\smile}{\cdots} \circ f = \mathrm{Id}$,

(2) $f^k \neq \mathrm{Id} \quad \forall k = 1, \ldots, n-1$.

Ejemplo 2.2. Este es un ejemplo de una involución definida en un conjunto que no es un subconjunto de $\mathbb{R}$:

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ es una involución de orden n en el plano complejo [31].

Ejemplo 2.3.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0) \cup (n, +\infty), \\ x+1, & x \in (0,1) \cup (1,2) \cup \cdots \cup (n-2, n-1), \\ x-(n-1), & x \in (n-1, n) \end{cases}$$

es un involución de orden n en $\mathbb{R} \backslash \{0, 1, \ldots, n\}$ [31].

Obsérvese que f no está definida en un conexo ni admite extensión continua a un conexo. Esto tiene que ver con el Teorema 2.4.

2.1.2. Propiedades de las involuciones

Ahora estableceremos una serie de resultados útiles a la hora de estudiar involuciones.

Proposición 2.1. *Sea $f : A \to A$ una involución de orden n, entonces f es invertible.*

Demostración. Si la composición $h \circ g$ es biyectiva, entonces h es sobreyectiva y g inyectiva, por tanto, dado que $f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f = \mathrm{Id}$, f es biyectiva (invertible). ■

La siguiente proposición es una generalización de los resultados de [33].

Proposición 2.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ conexo y $f : A \to A$ una involución continua. Entonces*

(1) f es estrictamente decreciente,

(2) f tiene un único punto fijo.

Demostración. (1). Por ser f invertible, es estrictamente monótona. Puesto que $f \neq \mathrm{Id}$, existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) \neq x_0$. Supongamos que f es creciente. Si $x_0 < f(x_0)$, por ser A conexo, $f(x_0) < f^2(x_0) = x_0$ (contradicción) y lo mismo ocurre si $f(x_0) < x_0$, por tanto, f tiene que ser decreciente.

(2). Por ser A conexo, A es un intervalo. Sea $a \in A$, entonces $f(a) \in A$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(a) > a$. Entonces $[a, f(a)] \subset A$ y $f([a, f(a)]) = [a, f(a)]$. Sea $g = f - \mathrm{Id}$, g es continua y $g(a) = f(a) - a > 0$, $g(f(a)) = a - f(a) < 0$ luego, por el teorema de Bolzano, existe $\alpha \in (a, f(a))$ tal que $g(\alpha) = 0$, i.e. $f(\alpha) = \alpha$.

Puesto que f es estrictamente decreciente, dicho punto fijo es único. ∎

Observación 2.1. Si A no es conexo, el punto (2) de la Proposición 2.1 tiene por qué cumplirse. Por ejemplo, las involuciones bilineales tienen 0 ó 2 puntos fijos.

Ahora demostraremos un teorema que ilustra la importancia de las involuciones ordinarias (de orden dos). Para demostrarlo, necesitaremos un teorema clásico de la teoría del caos: el Teorema de Šarkovskiĭ.

Teorema 2.3 (Šarkovskiĭ, [26])**.** *Consideremos el siguiente orden en* $\mathbb{N}$*:*

$$1 \lhd 2 \lhd \cdots \lhd 2^n \lhd \cdots \lhd 2^n \cdot 7 \lhd 2^n \cdot 5 \lhd 2^n \cdot 3 \lhd \cdots \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \cdots \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3$$

Si A es un conexo en $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua que presenta puntos periódicos de primer periodo k, es decir, tales que $f^k(x_0) = x_0$ y $f^j(x_0) \neq x_0 \ \ \forall j = 1, \ldots, k-1$, entonces f tiene puntos periódicos de primer periodo r para todo $r \lhd k$, $r \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4. *Las únicas involuciones continuas definidas en conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son de orden* 2*.*

Demostración. Sea A un conexo de $\mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una involución continua de orden n. Demostraremos en varios pasos que $n = 2$.

(a) *n es par*. Demostraremos primero que f es decreciente. Puesto que $f \neq \mathrm{Id}$, existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) \neq x_0$. Supongamos que f es creciente. Si $x_0 < f(x_0)$, por ser A conexo,

$$x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < \cdots < f^{n-1}(x_0) < f^n(x_0) = x_0,$$

lo cual es absurdo, y lo mismo ocurre si $f(x_0) < x_0$, por tanto f tiene que ser decreciente.

La composición de dos funciones que son ambas crecientes o decrecientes es una función creciente. Si una es creciente y la otra decreciente, entonces la composición es una función decreciente. Así, si n es impar y f es decreciente, f^n es decreciente lo cual es absurdo ya que $f^n = \mathrm{Id}$.

(b) *$n = 2m$ con m impar*. En caso contrario, $n = 2^k m$ donde $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ y m es un número natural impar. Entonces, si $g = f^{2^{k-1}m}$, $g^2 = \mathrm{Id}$ y por la Proposición 2.2 g es decreciente, pero eso es absurdo ya que $2^{k-1}m$ es par.

(c) $n = 2$. Si $n = 2m$ con m impar, $m \geqslant 3$, entonces $2n \lhd n$. Según el Teorema de Šarkovskiĭ, existe al menos un punto $x_0 \in A$ tal que $f^k(x_0) \neq x_0$, $k = 1, \ldots, 2n-1$ y $f^{2n}(x_0) = x_0$, pero esto es absurdo ya que $f^n(x_0) = x_0$. ∎

La demostración de la Proposición 2.2 nos sugiere una forma de construir un método iterativo convergente al punto fijo de la involución. Esto lo ilustra el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ conexo, $f : A \to A$ una involución continua, α el único punto fijo de f y f de clase dos en un entorno de α. Entonces el método iterativo*

$$\begin{cases} x_0 \in A, \\ x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

donde $g := \frac{f+\mathrm{Id}}{2}$, es globalmente convergente a α y de orden al menos 2.

Demostración. Consideremos el intervalo cerrado entre x_k y $f(x_k)$ que denotaremos por $[x_k, f(x_k)]$. Dado que x_{k+1} es el punto medio del intervalo $[x_k, f(x_k)]$, $x_{k+1} \in [x_k, f(x_k)]$ y además, puesto que $f([x_k, f(x_k)]) = [x_k, f(x_k)]$, $f(x_{k+1}) \in [x_k, f(x_k)]$. Entonces tenemos

$$|f(x_{k+1}) - x_{k+1}| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_k) - x_k| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}|f(x_0) - x_0|.$$

Así,

$$|x_{k+1} - x_k| = \left| \frac{f(x_k) + x_k}{2} - x_k \right| = \frac{1}{2}|f(x_k) - x_k| \leqslant \frac{1}{2^k}|f(x_0) - x_0|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |x_{k+m} - x_k| &\leqslant |x_{k+m} - x_{k+m-1}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{2^{k+j}}|f(x_0) - x_0| \\ &= \frac{1}{2^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)|f(x_0) - x_0| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}|f(x_0) - x_0|. \end{aligned}$$

Por consiguiente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $[x_0, f(x_0)]$ y por tanto convergente. Esto demuestra que el método es globalmente convergente en A.

Por otra parte, $f(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ y, por tanto, $f'(f(x))f'(x) = 1$. Así,

$$1 = f'(f(\alpha))f'(\alpha) = (f'(\alpha))^2.$$

Puesto que f es decreciente por la Proposición 2.2, $f'(a) = -1$. Así pues, $g'(\alpha) = 0$ y, por tanto, haciendo el desarrollo de Taylor hasta el orden 2 de g en α, tenemos que

$$g(x) = \alpha + g'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{g''(\xi_x)}{2}(x - \alpha)^2 = \alpha + \frac{g''(\xi_x)}{2}(x - \alpha)^2,$$

donde ξ es un punto en el intervalo $[\alpha, x]$. Como consecuencia, si c es una cota para el valor absoluto de g'' en un entorno de α,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - \alpha| = \left| \alpha + \frac{g''(\xi_{x_{k+1}})}{2}(x_k - \alpha)^2 - \alpha \right| \leqslant \frac{c}{2}|x_k - \alpha|^2,$$

para k suficientemente grande, lo cual demuestra que el método es de al menos orden 2. ■

2.2. Operadores diferenciales con involuciones

2.2.1. Teoría algebraica

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto sin puntos aislados. Vamos a considerar ahora una serie de operadores lineales en el espacio de funciones $\mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R})$. Para empezar, el *operador diferencial*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R}) & \xrightarrow{D} & \mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R}) \\ f & \longrightarrow & f' \end{array}$$

que asigna a cada función su derivada. Así definido, el operador lineal D es sobreyectivo.

Sea $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(A,A)$. Entonces podemos considerar el *pullback* por φ

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R}) \\ f & \longrightarrow & f\circ\varphi \end{array}$$

Sea $a \in \mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R})$. Tenemos también la *multiplicación* –punto a punto– por a

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R}) & \xrightarrow{a} & \mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R}) \\ f & \longrightarrow & a\cdot f \end{array}$$

Estos operadores están bien definidos y presentan la propiedad asociativa de la composición, pero en general no conmutan. Para ser exactos, se tienen las siguientes igualdades:

$$Da = a' + aD, \tag{2.1}$$
$$\varphi^* a = \varphi^*(a)\varphi^*, \tag{2.2}$$
$$D\varphi^* = \varphi'\varphi^* D, \tag{2.3}$$

para todo $a \in \mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(A,A)$. De éstas se deducen las siguientes:

$$DaD = a'D + aD^2, \tag{2.4}$$
$$Da\varphi^* = a'\varphi^* + a\varphi'\varphi^* D, \tag{2.5}$$
$$\varphi^* aD = \varphi^*(a)\varphi^* D, \tag{2.6}$$
$$\varphi^* a\varphi^* = \varphi^*(a)(\varphi^*)^2. \tag{2.7}$$

Estas igualdades nos permiten expresar cualquier composición de los operadores en cuestión como la composición en un determinado orden. Dicho de otro modo, si fijamos $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(A,A)$ tal que $\varphi^k \neq \mathrm{Id} \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ y consideramos $\mathscr{A}_\varphi$ como el $\mathscr{C}^\infty(A,\mathbb{R})$-módulo libre generado por $\{(\varphi^*)^i D^j\}_{i,j\geqslant 0}$ (elevar a 0 es la identidad), éste es un $\mathbb{R}$-álgebra asociativa unitaria con la composición.

Supongamos ahora que φ es una involución de orden n. En este caso el álgebra $\mathscr{A}_\varphi$ está generada por $\{(\varphi^*)^i D^j\}_{\substack{i=0,\dots,n-1 \\ j\geqslant 0}}$.

2.2.2. Ecuaciones diferenciales lineales con involuciones

Vamos a exponer ahora un método inspirado en el método del anulador que nos ayudará a resolver ecuaciones diferenciales lineales con involuciones. Nos interesa por tanto pensar en una forma de pasar de expresiones en $\mathscr{A}_\varphi$ a expresiones en el anillo de polinomios $\mathscr{C}^\infty(A)[D]$, ya que las ecuaciones del tipo $Lx = 0$ son de solución conocida para $L \in \mathscr{C}^\infty(A)[D]$ (i.e. L un operador diferencial lineal ordinario). Dicho de otro modo, ¿Existe para todo $L \in \mathscr{A}_\varphi$ un $R \in \mathscr{A}_\varphi$ tal que $RL \in \mathscr{C}^\infty(A)[D]$? Además, es conveniente que dicho R sea "minimal" en algún sentido que concretaremos luego, pues si la diferencia entre el núcleo de L y el núcleo de RL es pequeña podemos acercarnos a las soluciones de la ecuación $Lx = 0$ a través de las de $RLx = 0$. El caso ideal sería aquel en que ambos núcleos coincidiesen.

Proposición 2.6. *Sea $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(A,A)$ involución y $D + c\varphi^* + d \in \mathscr{A}_\varphi$, $c(t) \neq 0\ \ \forall t \in A$. Entonces existen $a, b, \alpha, \beta \in \mathscr{C}^1(A,\mathbb{R})$ tales que*

$$(D + a\varphi^* + b)(D + c\varphi^* + d) = D^2 + \alpha D + \beta \in \mathscr{C}^\infty(A)[D]$$

Demostración. Usando las igualdades (2.1) – (2.7), se tiene que

$$\begin{aligned}(D + a\varphi^* + b)(D + c\varphi^* + d) = D^2 + (b + d)D + b\,d + d' + a\varphi^*(c) + (a + c\varphi')\varphi^* D\\ + (c' + b\,c + a\varphi^*(d))\varphi^*\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que resolver el sistema lineal de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas

$$\begin{cases} b + d = \alpha, \\ b\,d + d' + a\varphi^*(c) = \beta, \\ a + c\varphi' = 0, \\ c' + b\,c + a\varphi^*(d) = 0, \end{cases}$$

que tiene por única solución

$$\begin{cases} a = -c\varphi', \\ b = \varphi'\varphi^*(d) - \dfrac{c'}{c}, \\ \alpha = d + \varphi'\varphi^*(d) - \dfrac{c'}{c}, \\ \beta = d\left(\varphi'\varphi^*(d) - \dfrac{c'}{c}\right) + d' - c\varphi'\varphi^*(c). \end{cases}$$

■

Observación 2.2. La proposición anterior sigue siendo válida simplemente considerando que todas las funciones son diferenciables.

Observación 2.3. La condición de que φ sea involución es necesaria, ya que en caso contrario la ecuación $c' + b\,c + a\varphi^*(d) = 0$ se dividiría en dos: $c' + b\,c = 0$ y $a\varphi^*(d) = 0$, forzando así $a = 0$, lo cual es incompatible con $a = -c\varphi'$.

Corolario 2.7. *En las condiciones de la proposición anterior, si $d = 0$, tenemos*

$$\left(D-\varphi' c\varphi^* - \frac{c'}{c}\right)(D+c\varphi^*) = D^2 - \frac{c'}{c}D - \varphi'\varphi^*(c)c.$$

Observación 2.4. En este corolario, si c es contante y φ es la reflexión tenemos que

$$(D+c\varphi^*)(D+c\varphi^*) = D^2 + c^2.$$

Obsérvese el paralelismo entre esta expresión y

$$(D+ic)(D-ic) = D^2 + c^2.$$

donde i denota la unidad imaginaria.

Definición 2.3. Sea $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(A)$, $L := \sum_{i,j=0}^{m,n} \alpha_{ij}(\varphi^*)^i D^j \in \mathscr{A}_\varphi$ tal que $\alpha_{mk}, \alpha_{ln} \neq 0$ para algún $k \in \{0,\dots,n\}$ y algún $l \in \{0,\dots,m\}$. Llamamos *grado* de L a $\partial L := (m,n)$.

Pongamos ahora que φ es una involución de orden p. Sean $L,R \in \mathscr{A}_\varphi$ tales que $LR \in \mathscr{C}^\infty[D]$. Entonces, si $\partial R = (m_1,n_1)$, $\partial L = (m_2,n_2)$ y $\partial(LR) = (0,n_3)$, tenemos que $0 \leqslant m_1, m_2 \leqslant p-1$ y $n_1+n_2 = n_3$, lo cual supone que tenemos que resolver un sistema de $(1+n_1+n_2)\min\{p, m_1+m_2+1\}$ ecuaciones con $(m_2+1)(n_2+1)+n_3$ incógnitas. Suponiendo $m_1 = m_2 = p-1$, tenemos $(1+n_1+n_2)$ ecuaciones y $p(n_2+1)+n_1+n_2$ incógnitas. Así, si pretendemos encontrar un operador “minimal” como decíamos antes, buscaremos que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas, de forma que la solución del sistema lineal que se plantea al hacer $LR = 0$, si existe, sea única, lo cual ocurre si y sólo si $n_2 = n_1(p-1)$.

En el caso en que φ sea una involución, $p = 2$ y por tanto nuestra condición es $n_2 = n_1$. El caso $n_1 = n_2 = 1$ lo ilustra la Proposición 2.6. Por supuesto, la complejidad de las ecuaciones y su resolución aumentan a medida que aumenta el grado de R.

Usaremos ahora la Proposición 2.6 para estudiar un ejemplo con el que trabajaremos durante el resto de esta memoria.

Ejemplo 2.4. Sea $T \in \mathbb{R}^+$, $I = [\varphi(T), T] \subset \mathbb{R}$ donde φ es una involución diferenciable en I, $m, h \in \mathscr{C}^1(I)$, $m(T) = m(\varphi(T))$ y $m(t) \neq 0 \;\; \forall t \in I$. Consideremos el operador $L = D + m\varphi^*$ y el problema de contorno

$$\begin{aligned} Lx(t) &= h(t) \;\; \forall t \in I, \\ x(\varphi(T)) &= x(T). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Obsérvese que la condición de contorno puede expresarse, con nuestra notación, como $(T^* - (\varphi(T))^*)x = 0$ y que $Lx(t) = x'(t) + m(t)x(\varphi(t))$. Según la Proposición 2.6, si $R = D - m\varphi'\varphi^* - \frac{m'}{m}$, entonces se tiene que

$$RL = D^2 + \frac{m'}{m}D - \varphi'\varphi^*(m)m.$$

Recordemos que $\varphi(\varphi(T)) = T$, por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} x'(T) - x'(\varphi(T)) &= (T^* - (\varphi(T))^*)Dx = (T^* - (\varphi(T))^*)(L - m\varphi^*)x \\ &= (T^* - (\varphi(T))^*)Lx - (T^* - (\varphi(T))^*)m\varphi^* x \\ &= h(T) - h(\varphi(T)) - m(T)x(\varphi(T)) + m(\varphi(T))x(\varphi(\varphi(T))) \\ &= h(T) - h(\varphi(T)) - m(T)x(\varphi(T)) + m(T)x(T) = h(T) - h(\varphi(T)). \end{aligned}$$

Por tanto, cualquier solución del problema (2.8) es solución del problema

$$\begin{aligned} RLx &= Rh, \\ x(\varphi(T)) &= x(T), \\ x'(T)-x'(\varphi(T)) &= h(T)-h(\varphi(T)). \end{aligned}$$

Escrito de otro modo,

$$\begin{aligned} x''(t)+\frac{m'(t)}{m(t)}x'(t)-\varphi'(t)m(\varphi(t))m(t)x(t) &= h'(t)-m(t)\varphi'(t)h(\varphi(t))-\frac{m'(t)}{m(t)}h(t), \\ x(\varphi(T)) &= x(T), \\ x'(T)-x'(\varphi(T)) &= h(T)-h(\varphi(T)), \end{aligned}$$

lo cual es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno no homogéneas. El problema de decidir si una solución de este sistema es solución de (2.8) es mucho más complicado y sólo lo podremos garantizar en ciertos casos como veremos más adelante.

3. Ecuaciones diferenciales con involuciones

Este nuevo capítulo está dividido en dos partes: La primera está dedicada a recoger de la bibliografía los resultados más importantes hasta la fecha en el campo de las ecuaciones diferenciales con involuciones. Las demostraciones de dichos resultados se pueden encontrar en la bibliografía señalada en cada caso. Lo interesante es ver la progresión y el tipo de resultados obtenidos para después compararlos con los nuevos que aporta esta memoria.

De dichos nuevos resultados versa la segunda parte del capítulo, donde expondremos el grueso de la investigación realizada y destacaremos los avances en el campo.

3.1. Reseña sobre ecuaciones diferenciales con involuciones

3.1.1. Las bases del estudio

Como indicamos en la introducción, el estudio de las ecuaciones diferenciales con involuciones comienza con la resolución de la ecuación de Silberstein en 1940 [24]. El teorema es el siguiente.

Teorema 3.1 (Solución de la ecuación de Silberstein)**.** *La ecuación*

$$x'(t) = x\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

tiene por únicas soluciones

$$x(t) = c\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t - \frac{\pi}{6}\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

En el artículo original de Silberstein aparecía $\frac{\pi}{3}$ en vez de $\frac{\pi}{6}$, lo cual aparece corregido en [30, 31]. Además Wiener nos proporciona una resultado más general [31].

Teorema 3.2. *Sea $n \in \mathbb{R}$. La ecuación*

$$t^n x'(t) = x\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

tiene por únicas soluciones

$$x(t) = \begin{cases} c\,t & \text{si } n = -1, \\ c\,t(1 - 2\ln t) & \text{si } n = 3, \\ c(t^{\lambda_1} + \lambda_1 t^{\lambda_2}) & \text{si } n < -1 \text{ ó } n > 3, \\ c\,t^{\frac{1-n}{2}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2} \ln t \right) + \sqrt{\frac{n+1}{3-n}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2} \ln t \right) \right] & \text{si } n \in (-1, 3), \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ *y* λ_1 *y* λ_2 *son las raíces del polinomio* $\lambda^2 + (n-1)\lambda + 1$.

Es Wiener [30, 31] también el que formaliza el concepto de ecuación diferencial con involuciones*.

Definición 3.1. Una expresión de la forma

$$f(t, x(\varphi_1(t), \dots, x(\varphi_k(t)), \dots, x^{n)}(\varphi_1(t)), \dots, x^{n)}(\varphi_k(t))) = 0$$

Donde $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ son involuciones y F es una función real de $nk + 1$ variables reales se llama *ecuación diferencial con involuciones*.

El objetivo inicial en la investigación de estas ecuaciones fue encontrar la forma de reducirlas a ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este sentido, Wiener demuestra los siguientes resultados de existencia de soluciones [30, 31].

Teorema 3.3. *Consideremos la ecuación*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\varphi(t))) \tag{3.1}$$

y supongamos que se satisfacen las siguientes hipótesis:

- *La función φ es una involución fuerte continuamente diferenciable con un punto fijo t_0.*
- *La función $f(t, y, z)$ está definida y es continuamente diferenciable en el espacio donde toman valores sus argumentos.*
- *La ecuación (3.1) es resoluble de forma única respecto a $x(\varphi(t))$, i.e. existe una única función $g(t, x(t), x'(t))$ tal que*

$$x(\varphi(t)) = g(t, x(t), x'(t)).$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$x''(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + x'(t) \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi'(t) f(\varphi(t), g(t, x(t), x'(t)), x(t)) \frac{\partial f}{\partial z} \right] (t, x(t), g(t, x(t), x'(t)))$$

con condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = f(t_0, x_0, x_0)$$

es una solución de la ecuación (3.1) con condición inicial $x(t_0) = x_0$.

*En esta sección seguiremos principalmente [31].

Corolario 3.4. *Supongamos que en la ecuación*

$$x'(t) = f(x(\varphi(t))) \tag{3.2}$$

la función φ es una involución continuamente diferenciable con un punto fijo t_0 y que la función f es monótona y continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$. entonces la ecuación diferencial ordinaria

$$x''(t) = f'(f^{-1}(x'(t)))f(x(t))f'(t),$$

con condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = f(x_0),$$

es una solución de la ecuación (3.2) con condición inicial $x(t_0) = x_0$.

Corolario 3.5. *El Teorema 3.3 y el Corolario 3.4 siguen siendo válidos cuando φ es una involución hiperbólica y la ecuación está considerada en una de las componentes conexas de su dominio.*

En el Lema 3.18 tendremos un resultado más general que el Corolario 3.4. En él probaremos la equivalencia de ambas ecuaciones.

Lučić, por su parte, obtiene los siguientes teoremas más generales [16, 17].

Teorema 3.6 ([17])**.** *Consideremos la ecuación*

$$f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{n)}(t)) = x(\varphi(t)), \tag{3.3}$$

donde

- *φ es una involución de orden m, $(m-1)n$ veces diferenciable en un abierto A de $\mathbb{R}$ y tal que $\varphi'(t) \neq 0 \ \ \forall t \in A$,*
- *f es una función definida en $A \times \mathbb{R}^n$, $(m-1)n$ veces diferenciable y tal que su primera derivada parcial respecto a la última variable nunca se anula.*

Entonces existe una ecuación diferencial ordinaria de orden $m\,n$ tal que si u es una solución de (3.3) $m\,n$ veces diferenciable, u es solución de dicha EDO.

Teorema 3.7. *Consideremos la ecuación*

$$f(\varphi_1(t), x(\varphi_1(t)), \dots, x^{k_1)}(\varphi_1(t)), \dots, x(\varphi_n(t)), \dots, x^{k_n)}(\varphi_n(t))) = 0, \tag{3.4}$$

donde

- *$\varphi_1 = \mathrm{Id}$ y φ_k es una involución de orden n, $p = \text{máx}\{k_1, \dots, k_n\}$ veces diferenciable en un abierto A, tal que φ_k' nunca se anula en A para todo $k = 2, \dots, n$.*
- *f es p veces diferenciable y tal que su primera derivada parcial respecto a una de sus variables, sin ser ésta la primera, nunca se anula.*

Entonces existe un sistema de EDO tal que si u es una solución de (3.4) p veces diferenciable, u es una componente de una solución de dicho sistema.

Por otra parte, Šarkovskiĭ [27] estudia la ecuación $x'(t) = f(x(t), x(-t))$ y, denotando $y(t) := x(-t)$, llega a la conclusión de que las soluciones de dicha ecuación son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,y),\\ y'(t) &= -f(y,x), \end{aligned}$$

con la condición $x(0) = y(0)$. Nosotros llegaremos a esta expresión por otra vía con la Proposición 3.21.

3.1.2. Ecuaciones lineales

En esta sección vamos a estudiar las ecuaciones de la forma

$$Lx(t) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^{k)}(t) = x(\varphi(t)) + h(t), \tag{3.5}$$

donde φ es una involución [31].

Teorema 3.8 ([33]). *Consideremos la ecuación (3.5) con condiciones iniciales*

$$x^{k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0,\dots,n-1, \tag{3.6}$$

y supongamos que

- *φ es una involución fuerte o hiperbólica, de clase n, con fijo t_0 y cuya primera derivada nunca se anula si $n > 1$,*
- *a_k es de clase n en $\mathbb{R}$, $k = 0,\dots,n$.*

Entonces, si M denota el operador

$$M := \frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},$$

la solución de la EDO lineal

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(\varphi(t))M^k Lx(t) - x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\varphi(t))M^k h(t) + h(\varphi(t))$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x^{k)}(t_0) &= x_k, \quad k = 0,\dots,n-1,\\ M^k Lx(t_0) &= x_k + M^k h(t_0), \quad k = 0,\dots,n-1, \end{aligned}$$

es una solución del problema (3.5)–(3.6).

Gracias a este resultado, Wiener [30,31] estudia varios ejemplos, variaciones de la ecuación de Silberstein.

Ejemplo 3.1. La ecuación
$$x^{n)}(t)=x\left(\frac{1}{t}\right)$$
tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma
$$t^a(\ln t)^j\operatorname{sen}(b\ln t),\quad t^a(\ln t)^j\cos(b\ln t),$$
donde a, $b\in\mathbb{R}$ y $j\in\{0,1,\dots,n-1\}$.

Ejemplo 3.2. La ecuación
$$x'(t)=x\left(\frac{1}{t}\right)+h(t),\quad t\in(0,+\infty),\quad h\in\mathscr{C}^1(0,+\infty),$$
con condición inicial $x(1)=x_0$ tiene por solución
$$\begin{aligned}x(t)&=x_0\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{x_0}{2}+h(1)\right)\sqrt{t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right)\\&+\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{3}}\int_1^t u^{-\frac{3}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{t}{u}\right)\left[u^2h'(u)-h\left(\frac{1}{u}\right)\right]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

De la misma forma demuestra que el problema
$$\begin{aligned}&x'(t)=\alpha t^\beta x\left(\frac{1}{t}\right),\quad t\in(0,+\infty),\\&x(1)=x_0,\end{aligned}$$
donde α, $\beta\in\mathbb{R}$, más general que la ecuación del Teorema 3.2, tiene solución representable de forma cerrada y obtiene su expresión.

Lučić [16] también obtiene resultados para el caso de ecuaciones lineales con involuciones de orden n, como es el caso del siguiente teorema.

Teorema 3.9. *Consideremos la ecuación*
$$x'(t)=a(t)x(\varphi(t))+b(t),\tag{3.7}$$
donde φ es una involución de orden n definida sobre un abierto A y las funciones a, b y φ son $m-1$ veces diferenciables en A. Entonces, las soluciones de (3.7) m veces diferenciables son soluciones de una EDO lineal de orden m.

También podemos plantear sistemas de ecuaciones lineales. Tenemos por ejemplo el siguiente teorema.

Teorema 3.10 ([31])**.** *Consideremos el sistema con condiciones iniciales*
$$X'(t)=AX(t)+BX(c-t),\quad X\left(\frac{c}{2}\right)=X_0\tag{3.8}$$
donde $X(t)\in\mathbb{R}^r$, $A,B\in\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ son conmutativas y B es no singular. Entonces la solución del sistema de EDO con condiciones iniciales
$$X''(t)=(A^2-B^2)X(t),\quad X\left(\frac{c}{2}\right)=X_0,\quad X'\left(\frac{c}{2}\right)=(A+B)X_0$$
es solución del problema (3.8).

Castelán e Infante [8] obtienen resultados para ecuaciones con matrices, como es el caso del siguiente teorema.

Teorema 3.11. *La ecuación diferencial*

$$Q'(t) = AQ(t) + BQ^T(\tau - t), \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $Q(t), A, B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ *y* $\tau \geqslant 0$ *tiene* n^2 *soluciones linealmente independientes. Si le añadimos la condición inicial*

$$Q\left(\frac{\tau}{2}\right) = K \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),$$

entonces tiene solución única.

3.1.3. Problemas diferenciales con reflexión

Cuando consideramos que la involución es una reflexión, el estudio de las ecuaciones diferenciales se simplifica y podemos obtener más resultados. En la literatura se han seguido principalmente dos líneas de investigación: la búsqueda de soluciones acotadas [1,31] y los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales con reflexión y condiciones de contorno [11,12,31,32].

Teorema 3.12 ([1])**.** *Considérese la ecuación*

$$x'(t) = f(t, x(t), x(-t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

y supongamos que

- $f(\cdot, 0, 0)$ *es acotada en* $\mathbb{R}$*,*
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existen en* $\mathbb{R}^3$*,*
- $\frac{\partial f}{\partial x} \geqslant -a$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y} \geqslant -b$*,*
- $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \leqslant \frac{q\lambda^2}{|a|+|b|} - (a+b)$ *para cierto* $q \in (0,1)$*,*

donde a *y* b *son constantes reales y* $\lambda^2 = a^2 - b^2$*,* $\lambda > 0$*. Entonces la ecuación (3.9) tiene una única solución acotada en* $\mathbb{R}$*.*

Establecemos las siguientes definiciones para entender el enunciado del próximo teorema.

Definición 3.2. Sea $A \subset \mathbb{R}$. A se dice *relativamente denso* si existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \cap (x, x+\epsilon) \neq \emptyset \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Definición 3.3. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *casi periódica* si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe un conjunto relativamente denso T_ϵ tal que $|f(t+\tau) - f(t)| < \epsilon \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \tau \in T_\epsilon$.

Teorema 3.13 ([1])**.** *Consideremos el sistema diferencial*

$$X'(t) = f(t, X(t), X(-t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *y supongamos que*

- *$f(t,x,y)$ es casi periódica en t, uniformemente con respecto a X e Y en cualquier conjunto acotado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,*
- *$\langle f(t,X,Y)-f(t,Z,Y), X-Z\rangle \geqslant K_1\|X-Z\|^2$,*
- *$\|f(t,X,Y)-f(t,X,Z)\| \leqslant K_2\|Y-Z\|$,*

donde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ y $K_1 - K_2 > 0$. Si X es una solución acotada de (3.10), entonces X es casi periódica.

Los siguientes resultados analizan la existencia de solución para el problema

$$x''(t) = f(t, x(t), x(-t)), \tag{3.11}$$

con dos tipos de condiciones de contorno,

$$x(-a) = x_0, \quad x(a) = x_1, \tag{3.12}$$

ó

$$x'(-a) = h\,x(-a), \quad x'(a) = k\,x(a), \tag{3.13}$$

donde $h, k \geqslant 0$, $h + k > 0$.

Teorema 3.14 ([31]). *Si f es acotada en $[-a,a] \times \mathbb{R}^2$, entonces el problema (3.11), (3.12) tiene solución.*

Teorema 3.15 ([31]). *Si se cumplen las siguientes condiciones*

- *$|f(x,y_1,z_1)-f(x,y_1,z_1)| \leqslant L_1|y_1-y_2|+L_2|z_1-z_2| \;\; \forall (x,y_1,z_1),(x,y_2,z_2) \in [-a,a]\times \mathbb{R}^2$ donde $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^+$,*
- *$a^2(L_1+L_2) < 2$, entonces el problema (3.11), (3.12) tiene solución única.*

Teorema 3.16 ([31]). *Si se cumplen las siguientes condiciones:*

- *existen $r, m \in \mathbb{R}^+$ tal que $\sup|f(x,0,y)| \leqslant r\frac{\pi^2-4ma^2}{2\pi a^2}$ para todo $x \in [-a,a]$, $|y| \leqslant r$,*
- *la segunda derivada respecto a y de $f(x,y,z)$ existe en $[-a,a] \times \mathbb{R}^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \geqslant -m > \frac{-\pi^2}{4a^2}$ para $x \in [-a,a]$, $y \in \mathbb{R}$, $|z| \leqslant r$,*

entonces la ecuación (3.11) con condiciones de contorno (3.12) homogéneas $x(-a) = x(a) = 0$ tiene solución.

Teorema 3.17 ([31]). *Si se cumplen las siguientes condiciones:*

- *existen $r, m \in \mathbb{R}^+$ tal que $\sup|f(x,0,y)| \leqslant mr$ para todo $x \in [-a,a]$, $|y| \leqslant r$,*
- *la segunda derivada respecto a y de $f(x,y,z)$ existe en $[-a,a] \times \mathbb{R}^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \geqslant m$ para $x \in [-a,a]$, $y \in \mathbb{R}$, $|z| \leqslant r$,*

entonces el problema (3.11), (3.13) tiene solución.

Es en este campo de las ecuaciones diferenciales con reflexión en el que más nos vamos a centrar en este trabajo y en el que obtendremos un mayor número de resultados nuevos.

3.2. Nuevos resultados para ecuaciones diferenciales con involuciones

Estos nuevos resultados para ecuaciones diferenciales con involuciones se recogen en [7].

3.2.1. Reducción de ecuaciones diferenciales con involuciones a EDO

Veamos en primer lugar un resultado que prueba la equivalencia entre un problema inicial con involución de primer orden y una EDO de orden dos. Consideremos las ecuaciones

$$x'(t) = f(x(\varphi(t))), \quad x(c) = x_c \tag{3.14}$$

y

$$x''(t) = f'(f^{-1}(x'(t)))f(x(t))\varphi'(t), \quad x(c) = x_c,\ x'(c) = f(x_c). \tag{3.15}$$

Entonces tenemos el siguiente lema que mejora el Corolario 3.4.

Lema 3.18. *Sea $(a,b) \subset \mathbb{R}$ y sea $f:(a,b) \to (a,b)$ un difeomorfismo. Sea $\varphi \in \mathscr{C}^1((a,b))$ una involución y c el punto fijo de φ. Entonces x es una solución de la ecuación diferencial de primer orden con involución (3.14) si y sólo si x es una solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (3.15).*

Demostración. Que las soluciones de (3.14) son soluciones de (3.15) se tiene de forma directa. Las condiciones de contorno se justifican por el hecho de que $\varphi(c) = c$. Puesto que al diferenciar (3.14) obtenemos

$$x''(t) = f'(x(\varphi(t)))\,x'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

y teniendo en cuenta que $x'(\varphi(t)) = f(x(t))$ por (3.14), obtenemos (3.15).

Recíprocamente, sea x una solución de (3.15). La ecuación implica que

$$(f^{-1})'(x'(t))x''(t) = f(x(t))\varphi'(t). \tag{3.16}$$

Integrando de c a t en (3.16),

$$f^{-1}(x'(t)) - x_c = f^{-1}(x'(t)) - f^{-1}(x'(c)) = \int_c^t f(x(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s \tag{3.17}$$

y, por tanto, definiendo $g(s) := f(x(\varphi(s))) - x'(s)$, concluimos de (3.17) que

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\left(x_c + \int_c^t f(x(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s\right) = f\left(x(\varphi(t)) + \int_c^t (f(x(s)) - x'(\varphi(s)))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ &= f\left(x(\varphi(t)) + \int_c^{\varphi(t)} (f(x(\varphi(s))) - x'(s))\,\mathrm{d}s\right) = f\left(x(\varphi(t)) + \int_c^{\varphi(t)} g(s)\,\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

Fijemos ahora $t > c$ tal que $x(t)$ está definido. Probaremos que (3.15) se satisface en $[c,t]$ (de forma análoga se prueba para $t < c$). Recordemos que φ tiene que ser decreciente, por tanto $\varphi(t) < c$. Además, puesto que f es un difeomorfismo, la derivada de f es acotada en $[c,t]$, por tanto f es lipchitziana en $[c,t]$. Puesto que f, x, x' y φ' son continuas, podemos definir

$$\begin{aligned}K_1 := \operatorname{ínf}\Bigg\{\alpha\in\mathbb{R}^+ \ : \ &\left|f\left(x(\varphi(r))+\int_c^{\varphi(r)} g(s)\,\mathrm{d}s\right)-f(x(\varphi(r)))\right|\\ &\leqslant \alpha\left|\int_c^{\varphi(r)} g(s)\,\mathrm{d}s\right| \quad \forall r\in[c,t]\Bigg\}\end{aligned}$$

y

$$K_2 := \operatorname{ínf}\left\{\alpha\in\mathbb{R}^+ \ : \ \left|f\left(x(r)+\int_c^{r} g(s)\,\mathrm{d}s\right)-f(x(r))\right| \leqslant \alpha\left|\int_c^{r} g(s)\,\mathrm{d}s\right| \quad \forall r\in[c,t]\right\}.$$

Sea $K = \operatorname{máx}\{K_1, K_2\}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}|g(t)| &= \left|f\left(x(\varphi(t))+\int_c^{\varphi(t)} g(s)\,\mathrm{d}s\right)-f(x(\varphi(t)))\right| \leqslant K\left|\int_c^{\varphi(t)} g(s)\,\mathrm{d}s\right|\\ &\leqslant -K\int_c^{\varphi(t)}|g(s)|\,\mathrm{d}s = -K\int_c^{t}|g(\varphi(s))|\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Aplicando esta desigualdad en $r = \varphi(s)$ dentro de la integral se deduce que

$$\begin{aligned}|g(t)| &\leqslant -K\int_c^t K\left|\int_c^s g(r)\,\mathrm{d}r\right|\varphi'(s)\,\mathrm{d}s \leqslant -K^2\int_c^t\int_c^t |g(r)|\,\mathrm{d}r \ \ \varphi'(s)\,\mathrm{d}s\\ &= K^2|\varphi(t)-\varphi(c)|\int_c^t |g(r)|\,\mathrm{d}r \leqslant K^2(c-a)\int_c^t|g(r)|\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Por tanto, por el Lema de Grönwall, $g(t) = 0$ y en consecuencia (3.14) se satisface para todo $t < b$ donde x está definido. ■

Obsérvese que, como una consecuencia inmediata de este resultado, tenemos que la única solución de la ecuación

$$x''(t) = \sqrt{1+(x'(t))^2}\,\operatorname{senh} x(t), \quad x(0) = x_0,\ x'(0) = \operatorname{senh} x_0,$$

coincide con la única solución de

$$x'(t) = \operatorname{senh} x(-t), \quad x(0) = x_0.$$

Además, el Lema 3.18 puede ser extendido, con una demostración muy parecida, al caso con condiciones de contorno periódicas. Consideremos las ecuaciones

$$x'(t) = f(x(\varphi(t))), \quad x(a) = x(b) \tag{3.18}$$

y

$$x''(t) = f'(f^{-1}(x'(t)))f(x(t))\varphi'(t), \quad x(a) = x(b),\ x'(a) = x'(b). \tag{3.19}$$

Lema 3.19. *Sea $[a,b]\subset\mathbb{R}$ y sea $f:[a,b]\to[a,b]$ un difeomorfismo. Sea $\varphi\in\mathscr{C}^1([a,b])$ una involución tal que $\varphi([a,b])=[a,b]$. Entonces x es una solución de la ecuación diferencial de primer orden con involución (3.18) si y sólo si x es una solución de la ecuación diferencial ordinaria (3.19).*

Demostración. Sea x una solución de (3.18). Puesto que $\varphi(a)=b$ deducimos que x es una solución de (3.19).

Sea x una solución de (3.19). Al igual que en la demostración del lema anterior, tenemos que

$$x'(t)=f\left(x(\varphi(t))+\int_b^{\varphi(t)}g(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

donde $g(s):=f(x(\varphi(s)))-x'(s)$.

Sea K_1, K_2 con en la demostración del Lema 3.18 pero cambiando c por a y $[c,t]$ por $[a,b]$. Sean K_1', K_2' como K_1, K_2 pero cambiando c por b. Sea $K=\text{máx}\{K_1,K_2,K_1',K_2'\}$. Entonces, para t en $[a,b]$,

$$\begin{aligned}|g(t)|&\leqslant K\left|\int_b^{\varphi(t)}g(s)\,\mathrm{d}s\right|\leqslant -K\int_a^t|g(\varphi(s))|\varphi'(s)\,\mathrm{d}s\leqslant -K\int_a^t K\left|\int_a^s g(r)\,\mathrm{d}r\right|\varphi'(s)\,\mathrm{d}s\\&\leqslant K^2|\varphi(t)-\varphi(a)|\int_a^t|g(r)|\,\mathrm{d}r\leqslant K^2(b-a)\int_a^t|g(r)|\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

y concluimos de forma análoga a como lo hicimos en la otra demostración. ∎

Sea $I:=[-T,T]\subset\mathbb{R}$. En el caso de un problema del tipo

$$x'(t)=f(t,x(-t),x(t)),\quad x(-T)=x(T),\tag{3.20}$$

podemos pensar en otros métodos para reducir el problema a un sistema de EDO de primer orden que no se obtiene del problema con EDO de segundo orden (3.15). Por lo visto en la introducción, cualquier función real $g:I\to\mathbb{R}$ puede ser expresada de forma única como $g=g_e+g_o$ donde $g_e,\ g_o:I\to\mathbb{R}$ son una función par y una impar respectivamente. Recordemos que g_e y g_o se pueden expresar como

$$g_e(t)=\frac{g(t)+g(-t)}{2},\quad g_o(t)=\frac{g(t)-g(-t)}{2}\quad\text{para todo }\ t\in I,$$

y que esta descomposición nos permite establecer un sistema de dos ecuaciones diferenciales.

Si consideramos ahora el automorfismo $\xi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido como

$$\xi(t,z,w)=(t,z-w,z+w)\quad\forall z,w\in\mathbb{R},$$

y con inversa

$$\xi^{-1}(t,y,x)=\left(t,\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)\ \ \forall\, x,\, y\in\mathbb{R},$$

queda claro que

$$f(t,x(-t),x(t))=(f\circ\xi)(t,x_e(t),x_o(t))\text{ y }f(-t,x(t),x(-t))=(f\circ\xi)(-t,x_e(t),-x_o(t)).$$

Por otra parte definimos

$$\begin{aligned} g_e(t) := f_e(t, x(-t), x(t)) &= \frac{f(t, x(-t), x(t)) + f(-t, x(t), x(-t))}{2} \\ &= \frac{(f \circ \xi)(t, x_e(t), x_o(t)) + (f \circ \xi)(-t, x_e(t), -x_o(t))}{2} \end{aligned}$$

y

$$g_o(t) := f_o(t, x(-t), x(t)) = \frac{(f \circ \xi)(t, x_e(t), x_o(t)) - (f \circ \xi)(-t, x_e(t), -x_o(t))}{2},$$

que son una función par y una impar respectivamente.

Además, puesto que x_e es par, $x_e(-T) = x_e(T)$ y dado que x_o es impar, $x_o(-T) = -x_o(T)$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.3, podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 3.20. *Si x es una solución del problema (3.20) e $y(t) = x(-t)$, entonces $(z, w) : I \to \mathbb{R}^2$ tal que satisface $(t, z, w) = \xi^{-1}(t, y, x)$ es una solución para el sistema de EDO con condiciones de contorno*

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{(f \circ \xi)(t, z(t), w(t)) - (f \circ \xi)(-t, z(t), -w(t))}{2}, \quad t \in I, \\ w'(t) &= \frac{(f \circ \xi)(t, z(t), w(t)) + (f \circ \xi)(-t, z(t), -w(t))}{2}, \quad t \in I, \\ (z, w)(-T) &= (z, -w)(T). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Podemos llevar esto un paso más lejos tratando de “deshacer” lo que hemos hecho:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (z + w)'(t) = (f \circ \xi)(t, z(t), w(t)) = f(t, y(t), x(t)) \;\; \forall t \in I, \\ y'(t) &= (z - w)'(t) = -(f \circ \xi)(-t, z(t), -w(t)) = -f(-t, x(t), y(t)) \;\; \forall t \in I, \\ (y, x)(-T) &= ((z - w)(-T), (z + w)(-T)) = ((z + w)(T), (z - w)(T)) = (x, y)(T). \end{aligned}$$

Obtenemos entonces el siguiente resultado.

Proposición 3.21. *(z, w) es una solución del problema (3.21) si y sólo si el par de funciones (y, x) tal que $\xi(t, z, w) = (t, y, x)$ es una solución para el sistema de EDO con condiciones de contorno*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, y(t), x(t)), \\ y'(t) &= -f(-t, x(t), y(t)), \\ (y, x)(-T) &= (x, y)(T). \end{aligned} \tag{3.22}$$

El próximo corolario también puede ser obtenido de forma directa sin pasar a través del problema (3.21).

Corolario 3.22. *Si x es una solución del problema (3.20) e $y(t) = x(-t)$, entonces $(y, x) : I \to \mathbb{R}^2$ es una solución del problema (3.22).*

Resolviendo los problemas (3.21) ó (3.22) podemos comprobar si x, obtenida a partir de la relación $(t, y, x) = \xi(t, z, w)$ es una solución de (3.20). Desgraciadamente, no toda solución de (3.21) –ó (3.22)– es una solución de (3.20), como vamos a mostrar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. Consideremos el problema

$$x'(t) = x(t)\,x(-t),\ t \in I; \quad x(-T) = x(T). \tag{3.23}$$

Usando la Proposición 3.21, sabemos que las soluciones de (3.23) son aquéllas que resuelven el problema

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)\,y(t), \quad t \in I;\\ y'(t) &= x(t)\,y(t), \quad t \in I;\\ (y,x)(-T) &= (x,y)(T). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Resulta fácil comprobar que las únicas soluciones del problema (3.24) definidas en I son aquellas de la forma

$$(x,y) = \left(\frac{ce^{ct}}{e^{ct}+1}, \frac{c}{e^{ct}+1}\right),$$

con $c \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si $c \neq 0$, $x(T) \neq x(-T)$ y, como consecuencia, ninguna de ellas es solución de (3.23).

Es más, usando la Proposición 3.21 de nuevo, concluimos que $x \equiv 0$ es la única solución de (3.23).

De forma completamente análoga, podemos estudiar el problema

$$x'(t) = f(t, x(-t), x(t)), \quad x(0) = x_0. \tag{3.25}$$

En tal caso tendríamos las siguientes versiones de los resultados previos:

Teorema 3.23. *Si $x : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ es una solución del problema (3.25) e $y(t) = x(-t)$, entonces $(z,w) : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}^2$ tal que $(t,z,w) = \xi^{-1}(t,y,x)$ es una solución del sistema de EDO con condiciones iniciales*

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{(f\circ\xi)(t,z(t),w(t)) - (f\circ\xi)(-t,z(t),-w(t))}{2}, \quad t \in I,\\ w'(t) &= \frac{(f\circ\xi)(t,z(t),w(t)) + (f\circ\xi)(-t,z(t),-w(t))}{2}, \quad t \in I,\\ (z,w)(0) &= (x_0, 0). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Proposición 3.24. *(z,w) es una solución del problema (3.26) si y sólo si (y,x) tal que $\xi(t,z,w) = (t,y,x)$ es una solución del sistema de EDO con condiciones iniciales*

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, y(t), x(t)),\\ y'(t) &= -f(-t, x(t), y(t)),\\ (y,x)(0) &= (x_0, x_0). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Corolario 3.25. *Si $x : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$ es una solución del problema (3.25) e $y(t) = x(-t)$, entonces $(y,x) : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}^2$ es una solución del problema (3.27).*

Observación 3.1. La relación $y(t) = x(-t)$ ya es usada por Šarkovskiĭ (ver pg. 22) y también se usa en [31] para estudiar condiciones bajo las cuales el problema

$$x'(t) = f(t, x(t), x(-t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

tiene una única solución acotada.

3.2.2. Soluciones de la ecuación $x'(t)+m\,x(-t)=h(t)$

En esta sección resolveremos una ecuación lineal de primer orden bajo una condición de contorno periódica. Más precisamente, consideraremos la siguiente ecuación diferencial:

$$x'(t)+m\,x(-t)=h(t),\quad t\in I, \tag{3.28a}$$
$$x(T)-x(-T)=0, \tag{3.28b}$$

donde m es una constante real distinta de cero, $T\in\mathbb{R}^+$ y $h\in L^1(I)$.

En el caso homogéneo, esto es, $h\equiv 0$, y siguiendo el Ejemplo 2.4, llegamos a la conclusión de que cualquier solución de (3.28) tiene que satisfacer el problema

$$x''+m^2x=0,\quad x(T)-x(-T)=x'(T)-x'(-T)=0.$$

Consideremos ahora la siguiente ecuación diferencial ordinaria con condiciones de contorno homogéneas.

$$\begin{aligned} x''(t)+m^2x(t)&=f(t),\quad t\in I,\\ x(T)-x(-T)&=0,\\ x'(T)-x'(-T)&=0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde f es una función continua sobre I.

Se ha escrito mucho sobre como resolver este problema y las propiedades de la solución (véase, por ejemplo, [2, 5, 6]). Es bien sabido que para todo $m^2\neq(k\pi/T)^2$, $k=0,1,\dots$, el problema (3.29) tiene una única solución dada por la expresión

$$u(t)=\int_{-T}^{T}G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

donde G se conoce como *función de Green*.

Esta función es única en tanto que satisface las siguientes propiedades:

(1) $G\in\mathscr{C}(I^2,\mathbb{R})$,

(2) $\frac{\partial G}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$ existe y son continuos en $\{(t,s)\in I^2 \mid s\neq t\}$,

(3) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,t^-)$ y $\frac{\partial G}{\partial t}(t,t^+)$ existen para todo $t\in I$ y satisfacen

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,t^-)-\frac{\partial G}{\partial t}(t,t^+)=1\ \ \forall t\in I,$$

(4) $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}+m^2G=0$ en $\{(t,s)\in I^2 \mid s\neq t\}$,

(5) *a)* $G(T,s)=G(-T,s)\ \ \forall s\in I$,
b) $\frac{\partial G}{\partial t}(T,s)=\frac{\partial G}{\partial t}(-T,s)\ \ \forall s\in(-T,T)$.

La solución del problema (3.29) es única siempre que $T\in\mathbb{R}^+\backslash\{\frac{k\pi}{|m|}\}_{k\in\mathbb{N}}$, por lo tanto la solución de (3.28) es única en tal caso. Asumiremos a partir de ahora condiciones de unicidad para dicha solución.

La siguiente proposición nos proporciona más propiedades de la función de Green para el problema (3.29).

Proposición 3.26. *Para todo $t, s \in I$, la función de Green asociada al problema (3.29) satisface las siguientes propiedades:*

(6) $G(t,s) = G(s,t)$,

(7) $G(t,s) = G(-t,-s)$,

(8) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \frac{\partial G}{\partial s}(s,t)$,

(9) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = -\frac{\partial G}{\partial t}(-t,-s)$,

(10) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = -\frac{\partial G}{\partial s}(t,s)$.

Demostración. (VI). El operador diferencial $L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + m^2$ asociado a la ecuación (3.29) es autoadjunto, por lo que, de forma análoga a como se hace en [2, Chapter 33], deducimos que la función G es simétrica.

(VII). Sea u una solución de (3.29) y definamos $v(t) := u(-t)$, entonces v es una solución del problema (3.29) con $f(-t)$ en vez de $f(t)$. De esta forma

$$v(t) = \int_{-T}^{T} G(t,s) f(-s)\,\mathrm{d}s = \int_{-T}^{T} G(t,-s) f(s)\,\mathrm{d}s,$$

pero también se tiene que

$$v(t) = u(-t) = \int_{-T}^{T} G(-t,s) f(s)\,\mathrm{d}s,$$

por tanto

$$\int_{-T}^{T} [G(t,-s) - G(-t,s)] f(s) = 0$$

y, puesto que el conjunto de funciones continuas es denso en $L^2(I)$, $G(t,-s) = G(-t,s)$ en I^2, esto es,

$$G(t,s) = G(-t,-s) \ \ \forall t,s \in I.$$

Para demostrar $(VIII)$ y (IX) es suficiente con derivar (VI) y (VII) con respecto a t.

(X) Supongamos que f es diferenciable. Sea u una solución de (3.29), entonces $u \in C^1(I)$ y $v \equiv u'$ es una solución de

$$\begin{aligned} x''(t) + m^2 x(t) &= f'(t), \quad t \in I, \\ x(T) - x(-T) &= 0, \\ x'(T) - x'(-T) &= f(T) - f(-T). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$v(t) = \int_{-T}^{T} G(t,s) f'(s)\,\mathrm{d}s - G(t,-T)[f(T) - f(-T)],$$

donde el segundo término en el lado derecho aparece por la no homogeneidad de las condiciones de contorno y las propiedades (III), (IV) y (V) (a).

Así, por $(V)(a)$ y (VI), se tiene que

$$\begin{aligned} v(t) &= G(t,s)f(s)\Big|_{s=-T}^{s=T} - \int_{-T}^{t} \frac{\partial G}{\partial s}(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s - \int_{t}^{T} \frac{\partial G}{\partial s}(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s \\ &\quad -G(t,-T)[f(T)-f(-T)] \\ &= G(t,-T)[f(T)-f(-T)] - \int_{-T}^{T} \frac{\partial G}{\partial s}(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s - G(t,-T)[f(T)-f(-T)]. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$v(t) = u'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-T}^{t} G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t}^{T} G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-T}^{T} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Puesto que el conjunto de funciones diferenciables es denso en $L^2(I)$, concluimos que

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = -\frac{\partial G}{\partial s}(t,s). \qquad \blacksquare$$

Ahora estamos en condiciones para probar el principal resultado de esta sección, en el cual deducimos la expresión de la función de Green relativa al problema (3.28).

Proposición 3.27. *Supongamos que $m \neq k\pi/T$, $k \in \mathbb{Z}$. Entonces el problema (3.28) tiene una única solución dada por la expresión*

$$u(t) := \int_{-T}^{T} \overline{G}(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s, \tag{3.30}$$

donde

$$\overline{G}(t,s) := m\,G(t,-s) - \frac{\partial G}{\partial s}(t,s)$$

es la función de Green *relativa al problema (3.28).*

Demostración. Como habíamos resaltado previamente, el problema (3.28) tiene a lo sumo una solución para todo $m \neq k\pi/T$, $k \in \mathbb{Z}$. La existencia de solución se deduce del Teorema de la Alternativa. Veamos ahora que la función u definida en (3.30) satisface (3.28) (asumimos $t > 0$, el otro caso sería análogo):

$$\begin{aligned} u'(t) + m\,u(-t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-T}^{-t} \overline{G}(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-t}^{t} \overline{G}(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t}^{T} \overline{G}(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s + m\int_{-T}^{T} \overline{G}(-t,s)h(s)\,\mathrm{d}s \\ &= (\overline{G}(t,t^-) - \overline{G}(t,t^+))h(t) + \int_{-T}^{T}\left[m\frac{\partial G}{\partial t}(t,-s) - \frac{\partial^2 G}{\partial t\partial s}(t,s)\right]h(s)\,\mathrm{d}s \\ &\quad + m\int_{-T}^{T}\left[m\,G(-t,-s) - \frac{\partial G}{\partial s}(-t,s)\right]h(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Usando (III) y (X), deducimos que esta última expresión es igual a

$$h(t)+\int_{-T}^{T}\left[m\frac{\partial G}{\partial t}(t,-s)-\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial s}(t,s)+m^2G(-t,-s)-m\frac{\partial G}{\partial s}(-t,s)\right]h(s)\,\mathrm{d}s.$$

que es, por (IV), (VII), (IX) y (X), igual a

$$h(t)+\int_{-T}^{T}\left(m\left[\frac{\partial G}{\partial t}(t,-s)-\frac{\partial G}{\partial s}(-t,s)\right]+\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)+m^2G(t,s)\right)h(s)\,\mathrm{d}s=h(t).$$

Por tanto, (3.28a) se satisface.

Las condiciones (V) y (X) nos permiten verificar la condición de contorno:

$$u(T)-u(-T)=\int_{-T}^{T}\left[m\,G(T,-s)-\frac{\partial G}{\partial s}(T,s)-m\,G(-T,-s)+\frac{\partial G}{\partial s}(-T,s)\right]h(s)=0.\quad\blacksquare$$

Como la función de Green original, $\overline{G}$ satisface varias propiedades.

Proposición 3.28. *$\overline{G}$ satisface las siguientes propiedades:*

(1) $\frac{\partial\overline{G}}{\partial t}$ *existe y es continua en* $\{(t,s)\in I^2 \mid s\neq t\}$,

(2) $\overline{G}(t,t^-)$ *y* $\overline{G}(t,t^+)$ *existen para todo* $t\in I$ *y satisfacen* $\overline{G}(t,t^-)-\overline{G}(t,t^+)=1\ \ \forall t\in I$,

(3) $\frac{\partial\overline{G}}{\partial t}(t,s)+m\overline{G}(-t,s)=0$ *para casi todo* $t,s\in I,\ s\neq t$,

(4) $\overline{G}(T,s)=\overline{G}(-T,s)\ \ \forall s\in(-T,T)$,

(5) $\overline{G}(t,s)=\overline{G}(-s,-t)\ \ \forall t,s\in I$.

Demostración. Las propiedades (I'), (II') y (IV') son directas a partir de las propiedades análogas de la función G.

(III'). En la demostración de la Proposición 3.27 mostramos implícitamente que la función u definida en (3.30), y por tanto la única solución de (3.28), satisface

$$u'(t)=h(t)+\int_{-T}^{T}\frac{\partial\overline{G}}{\partial t}(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Por tanto, puesto que $u'(t)-h(t)+m\,u(-t)=0$,

$$\int_{-T}^{T}\frac{\partial\overline{G}}{\partial t}(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s+m\int_{-T}^{T}\overline{G}(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s=0$$

esto es,

$$\int_{-T}^{T}\left[\frac{\partial\overline{G}}{\partial t}(t,s)+m\overline{G}(t,s)\right]h(s)\,\mathrm{d}s=0\text{ para todo }h\in L^1(I),$$

y entonces

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}(t,s)+m\overline{G}(-t,s)=0 \text{ para casi todo } t,s\in I,\ s\neq t.$$

(V'). Este resultado se demuestra usando las propiedades $(VI)-(X)$:

$$\begin{aligned}\overline{G}(-s,-t)&=m\,G(-s,t)-\frac{\partial G}{\partial s}(-s,-t)=m\,G(t,-s)+\frac{\partial G}{\partial t}(-s,-t)\\&=m\,G(t,-s)-\frac{\partial G}{\partial t}(s,t)=m\,G(t,-s)-\frac{\partial G}{\partial s}(t,s)=\overline{G}(t,s).\end{aligned}$$

■

Observación 3.2. Debido a la expresión de G dada en la siguiente sección, las propiedades (II) y (I') pueden ser mejoradas añadiendo que G y $\overline{G}$ son analíticas en $\{(t,s)\in I^2 \mid s\neq t\}$ y $\{(t,s)\in I^2 \mid s\neq |t|\}$ respectivamente.

Usando las propiedades $(II')-(V')$ obtenemos el siguiente corolario de la Proposición 3.27.

Corolario 3.29. *Supongamos que $m\neq k\,\pi/T$, $k\in\mathbb{Z}$. Entonces el problema*

$$\begin{aligned}x'(t)+m\,x(-t)&=h(t),\quad t\in I:=[-T,T],\\x(-T)-x(T)&=\lambda,\end{aligned}$$

donde $\lambda\in\mathbb{R}$, tiene una única solución dada por la expresión

$$u(t):=\int_{-T}^{T}\overline{G}(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s+\lambda\overline{G}(t,-T).$$

3.2.3. Signo constante de la función $\overline{G}$

Ahora daremos un resultado sobre la positividad o negatividad de la función de Green para el problema (3.28). Para conseguir esto, necesitamos un nuevo lema y la expresión explícita de la función $\overline{G}$.

Sea $\alpha:=mT$ y $\overline{G}_\alpha$ la función de Green para el problema (3.28) para un valor particular del parámetro α. Obsérvese que $\operatorname{sign}(\alpha)=\operatorname{sign}(m)$ porque T siempre es positivo.

Lema 3.30. $\overline{G}_\alpha(t,s)=-\overline{G}_{-\alpha}(-t,-s)\ \ \forall t,s\in I.$

Demostración. Sea $u(t):=\int_{-T}^{T}\overline{G}_\alpha(t,s)h(s)\,\mathrm{d}s$ una solución del problema (3.28). Sea $v(t):=-u(-t)$. Entonces $v'(t)-m\,v(-t)=u'(-t)+m\,u(t)=h(-t)$ y, por tanto,

$$v(t)=\int_{-T}^{T}\overline{G}_{-\alpha}(t,s)h(-s)\,\mathrm{d}s.$$

Por otra parte, por definición de v,

$$v(t)=-\int_{-T}^{T}\overline{G}_\alpha(-t,s)h(s)\,\mathrm{d}s=-\int_{-T}^{T}\overline{G}_\alpha(-t,-s)h(-s)\,\mathrm{d}s,$$

así que concluimos que $\overline{G}_\alpha(t,s)=-\overline{G}_{-\alpha}(-t,-s)$ para todo $t,\ s\in I$. ■

Corolario 3.31. *$\overline{G}_\alpha$ es positiva si y solo si $\overline{G}_{-\alpha}$ es negativa en I^2.*

Con este corolario, para hacer un estudio completo de la positividad y la negatividad de la función, es suficiente averiguar para qué valores $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la función $\overline{G}$ es positiva y para cuáles no lo es. Esto será muy útil a la hora de enunciar principios del máximo y del anti-máximo para el problema (3.28) debido a la forma en la que expresamos su solución como una integral con núcleo $\overline{G}$.

Usando el algoritmo descrito en [6] podemos obtener la expresión explícita de G:

$$2m \operatorname{sen}(mT)G(t,s) = \begin{cases} \cos m(T+s-t) & \text{si} \quad s \leqslant t, \\ \cos m(T-s+t) & \text{si} \quad s > t. \end{cases}$$

Por tanto,

$$2\operatorname{sen}(mT)\overline{G}(t,s) = \begin{cases} \cos m(T-s-t) + \operatorname{sen} m(T+s-t) & \text{si} \quad t > |s|, \\ \cos m(T-s-t) - \operatorname{sen} m(T-s+t) & \text{si} \quad |t| < s, \\ \cos m(T+s+t) + \operatorname{sen} m(T+s-t) & \text{si} \quad -|t| > s, \\ \cos m(T+s+t) - \operatorname{sen} m(T-s+t) & \text{si} \quad t < -|s|. \end{cases} \tag{3.31}$$

Obsérvese que $\overline{G}$ es continua en $I^2\backslash\{(t,s) \in I^2 \mid t \neq s\}$. Haciendo el cambio de variables $t = Tz$, $s = Ty$, podemos simplificar esta expresión a

$$2\operatorname{sen}(\alpha)\overline{G}(z,y) = \begin{cases} \cos\alpha(1-y-z) + \operatorname{sen}\alpha(1+y-z) & \text{si} \quad z > |y|, \\ \cos\alpha(1-y-z) - \operatorname{sen}\alpha(1-y+z) & \text{si} \quad |z| < y, \\ \cos\alpha(1+y+z) + \operatorname{sen}\alpha(1+y-z) & \text{si} \quad -|z| > y, \\ \cos\alpha(1+y+z) - \operatorname{sen}\alpha(1-y+z) & \text{si} \quad z < -|y|. \end{cases}$$

Usando la identidad trigonométrica $\cos(a-b) \pm \operatorname{sen}(a+b) = (\cos a \pm \operatorname{sen} a)(\cos b \pm \operatorname{sen} b)$, podemos factorizar esta expresión de la siguiente manera:

$$2\operatorname{sen}(\alpha)\overline{G}(z,y) = \begin{cases} [\cos\alpha(1-z) + \operatorname{sen}\alpha(1-z)][\operatorname{sen}\alpha y + \cos\alpha y] & \text{si} \quad z > |y|, \\ [\cos\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z][\operatorname{sen}\alpha(y-1) + \cos\alpha(y-1)] & \text{si} \quad |z| < y, \\ [\cos\alpha(1+y) + \operatorname{sen}\alpha(1+y)][\cos\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z] & \text{si} \quad -|z| > y, \\ [\cos\alpha y + \operatorname{sen}\alpha y][\cos\alpha(z+1) - \operatorname{sen}\alpha(z+1)] & \text{si} \quad z < -|y|. \end{cases}$$

Si usamos ahora la identidad trigonométrica $\cos a + \operatorname{sen} a = \sqrt{2}\cos(a - \frac{\pi}{4})$, la expresión se reduce a

$$\operatorname{sen}(\alpha)\overline{G}(z,y) = \begin{cases} \cos[\alpha(1-z) - \frac{\pi}{4}]\cos(\alpha y - \frac{\pi}{4}) & \text{si} \quad z > |y|, \\ \cos(\alpha z + \frac{\pi}{4})\cos[\alpha(y-1) - \frac{\pi}{4}] & \text{si} \quad |z| < y, \\ \cos(\alpha z + \frac{\pi}{4})\cos[\alpha(1+y) - \frac{\pi}{4}] & \text{si} \quad -|z| > y, \\ \cos[\alpha(z+1) + \frac{\pi}{4}]\cos(\alpha y - \frac{\pi}{4}) & \text{si} \quad z < -|y|. \end{cases} \tag{3.32}$$

La Figura 3.1 ilustra la gráfica de $\overline{G}$ para $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\xi-\frac{\pi}{4}\right)>0\ \ \forall\xi\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right),\ k\in\mathbb{Z}\\
&\cos\left(\xi-\frac{\pi}{4}\right)<0\ \ \forall\xi\in\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right),\ k\in\mathbb{Z}\\
&\cos\left(\xi+\frac{\pi}{4}\right)>0\ \ \forall\xi\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right),\ k\in\mathbb{Z}\\
&\cos\left(\xi+\frac{\pi}{4}\right)<0\ \ \forall\xi\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right),\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}\tag{3.33}$$

Usando la expresión (3.32) y las fórmulas (3.33) podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 3.32. *Sea $\alpha\neq k\pi\ \ \forall k\in\mathbb{Z}$.*

(1) Si $\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$ entonces $\overline{G}$ es estrictamente positiva en I^2.

(2) Si $\alpha\in(-\frac{\pi}{4},0)$ entonces $\overline{G}$ es estrictamente negativa en I^2.

(3) Si $\alpha=\frac{\pi}{4}$ entonces $\overline{G}$ se anula en $P:=\{(-T,-T),(0,0),(T,T),(T,-T)\}$ y es estrictamente positiva en $(I^2)\backslash P$.

(4) Si $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ entonces $\overline{G}$ se anula en P y es estrictamente negativa en $(I^2)\backslash P$.

(5) Si $\alpha\in\mathbb{R}\backslash[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ entonces $\overline{G}$ no es ni positiva ni negativa en I^2.

Demostración. El Lema 3.30 nos permite restringir la demostración a estudiar valores positivos de α.

Estudiaremos aquí los valores positivos de $\overline{G}(z,y)$ en $A:=\{(z,y)\in[-1,1]^2\mid z\geqslant|y|\}$. El resto de los casos se realizan de forma análoga. Sean

$$\begin{aligned}
&B_1:=\bigcup_{k_1\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{\pi}{\alpha}\left(2k_1+\frac{3}{4}\right),1-\frac{\pi}{\alpha}\left(2k_1-\frac{1}{4}\right)\right),\ B_2:=\bigcup_{k_2\in\mathbb{Z}}\frac{\pi}{\alpha}\left(2k_2-\frac{1}{4},2k_2+\frac{3}{4}\right),\\
&C_1:=\bigcup_{k_1\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{\pi}{\alpha}\left(2k_1+\frac{7}{4}\right),1-\frac{\pi}{\alpha}\left(2k_1+\frac{3}{4}\right)\right),\ C_2:=\bigcup_{k_2\in\mathbb{Z}}\frac{\pi}{\alpha}\left(2k_2+\frac{3}{4},2k_2+\frac{7}{4}\right),\\
&B:=\{(z,y)\in B_1\times B_2\mid z>|y|\},\quad \text{y}\quad C:=\{(z,y)\in C_1\times C_2\mid z>|y|\}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que $B\cap C=\emptyset$. Además, tenemos que $\overline{G}(z,y)>0$ en A si y sólo si $A\subset B\sqcup C$.

Para probar el caso $A\subset B$, es condición suficiente y necesaria que $[-1,1]\subset B_2$ y $[0,1]\subset B_1$.

$[-1,1]\subset B_2$ si y sólo si $k_2\in\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{\pi}-\frac{3}{4},\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{\pi})$ para algún $k_2\in\mathbb{Z}$, pero, dado que $\alpha>0$, esto sólo ocurre si $k_2=0$. En tal caso $[-1,1]\subset\frac{\pi}{4\alpha}(-1,3)$, lo cual implica $\alpha<\frac{\pi}{4}$. Por tanto, $\frac{\pi}{\alpha}>4$, luego $[0,1]\subset(1-\frac{3}{4}\frac{\pi}{\alpha},1+\frac{1}{4}\frac{\pi}{\alpha})=\left(1-\frac{\pi}{\alpha}\left(2k_1+\frac{3}{4}\right),1-\frac{\pi}{\alpha}\left(2k_1-\frac{1}{4}\right)\right)$ para $k_1=0$. Por consiguiente, $A\subset B$.

Repetimos este estudio para el caso $A\subset C$ y todas las otras subdivisiones del dominio de $\overline{G}$, probando así el teorema. ∎

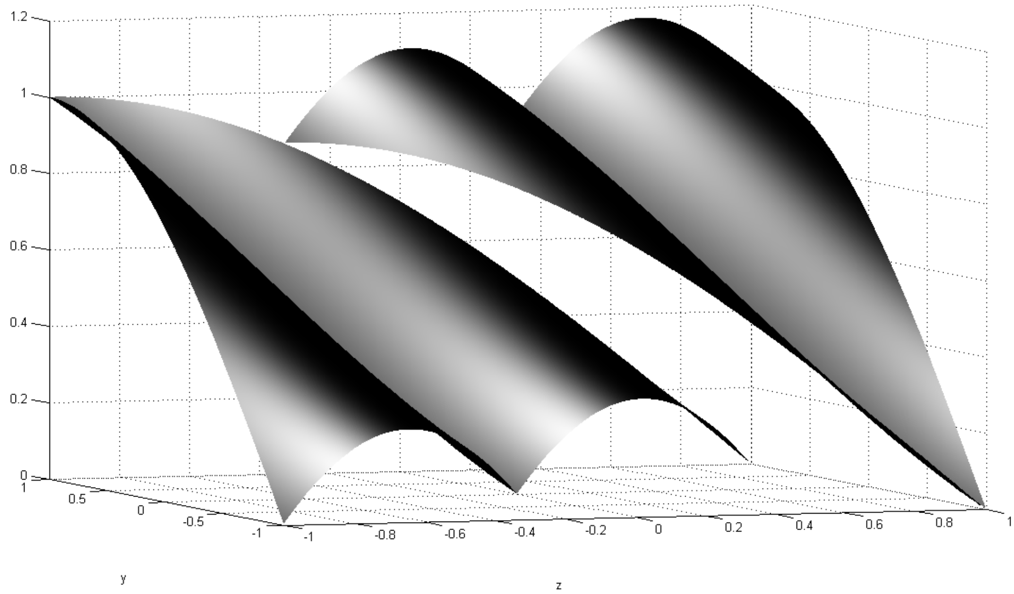

Fig. 3.1. *Gráfica de la función* $\overline{G}(z,y)$ *para* $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Las siguientes definiciones [4] llevan a un corolario directo del Teorema 3.32.

Definición 3.4. Sea $\mathscr{F}_\lambda(I)$ el conjunto de las funciones reales diferenciables definidas en I tales que $f(-T)-f(T)=\lambda$ para cada $f \in \mathscr{F}_\lambda(I)$. Un operador lineal $R:\mathscr{F}_\lambda(I)\to\mathscr{F}_\lambda(I)$ se dice

(1) *fuertemente inverso-positivo en* $\mathscr{F}_\lambda(I)$ si $Rx \succ 0 \Rightarrow x>0 \ \ \forall x\in\mathscr{F}_\lambda(I)$,

(2) *fuertemente inverso-negativo en* $\mathscr{F}_\lambda(I)$ si $Rx \succ 0 \Rightarrow x<0 \ \ \forall x\in\mathscr{F}_\lambda(I)$,

donde $x \succ 0$ y $x \prec 0$ simbolizan $x>0$ y $x<0$ en casi todas partes, respectivamente.

Corolario 3.33. *El operador* $R_m:\mathscr{F}_\lambda(I)\to\mathscr{F}_\lambda(I)$ *definido como* $R_m(x(t)) = x'(t)+m\,x(-t)$, *con* $m\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, *satisface*

(1) R_m *es fuertemente inverso-positivo si y sólo si* $m\in(0,\frac{\pi}{4T}]$ *y* $\lambda\geqslant 0$,

(2) R_m *es fuertemente inverso-negativo si y sólo si* $m\in[-\frac{\pi}{4T},0)$ *y* $\lambda\geqslant 0$.

Este último corolario establece un principio del máximo y del antimáximo (cf. [4, Lemma 2.5, Remark 2.3]).

La función $\overline{G}$ tiene una expresión bastante complicada que no nos permite ver de forma directa su dependencia de m. Esta dependencia puede ser analizada, sin calcular ni estudiar la derivada respecto a m, simplemente usando las propiedades de la ecuación (3.28a) en aquellas regiones en las que el operador R es inverso-positivo o inverso negativo. Un método distinto del usado aquí pero persiguiendo un propósito similar puede ser encontrado en [5, Lemma 2.8] para la función de Green relativa a la ecuación de Hill de segundo orden.

Proposición 3.34. *Sean* $G_{m_i}:I\to\mathbb{R}$ *la función de Green y* u_i *la solución al problema (3.28) con constante* $m=m_i,\ i=1,2$ *respectivamente. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(1) Si $0 < m_1 < m_2 \leqslant \frac{\pi}{4T}$ *entonces* $u_1 > u_2$ *en* I *para todo* $h \succ 0$ *y* $G_{m_1} > G_{m_2}$ *en* I^2.

(2) Si $-\frac{\pi}{4T} \leqslant m_1 < m_2 < 0$ *entonces* $u_1 > u_2$ *en* I *para todo* $h \succ 0$ *y* $G_{m_1} > G_{m_2}$ *en* I^2.

Demostración. (1). Sea $h \succ 0$ en la ecuación (3.28a). Entonces $u_i > 0$ $i = 1,2$. Tenemos que

$$u_i'(t) + m_i u_i(-t) = h(t) \quad i = 1,2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 = (u_2 - u_1)'(t) + m_2 u_2(-t) - m_1 u_1(-t) > (u_2 - u_1)'(t) + m_1(u_2 - u_1)(-t), \\ (u_2 - u_1)(T) = (u_2 - u_1)(-T) = 0, \end{aligned}$$

y así, por el Corolario 3.33, $u_2 < u_1$ en I.

Por otra parte, para todo $t \in I$, se satisface que

$$0 > (u_2 - u_1)(t) = \int_{-T}^{T} (G_{m_2}(t,s) - G_{m_1}(t,s))h(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall h \succ 0, \quad i = 1,2, \tag{3.34}$$

Esto deja claro que $0 \prec G_{m_2} \prec G_{m_1}$ en I^2.

Para demostrar que $G_{m_2} < G_{m_1}$ en I^2, sea $s \in I$ fijado, y definamos $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la extensión $2\,T$–periódica a la recta real de $G_{m_i}(\cdot, s)$.

Usando (I') y (II'), se tiene que v_1 y v_2 son dos funciones continuamente diferenciables en $I_s \equiv (s, s + 2\,T)$. Usando (III'), tenemos que $v_i'(t) + m_i\, v_i(-t) = 0$ en I_s para $i = 1,2$. Como consecuencia $v_i''(t) + m_i^2\, v_i(t) = 0$ para todo $t \in I_s$. Es más, usando (IV'), sabemos que

$$(v_2 - v_1)(s) = (v_1 - v_2)(s + 2\,T), \quad (v_2 - v_1)'(s) = (v_1 - v_2)'(s + 2\,T).$$

Por consiguiente, para todo $t \in I_s$, tenemos que

$$0 = (v_2 - v_1)''(t) + m_2^2\, v_2(t) - m_1^2\, v_1(t) > (v_2 - v_1)''(t) + m_1^2\,(v_2 - v_1)(t).$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno periódicas y el hecho de que para este rango de valores de m_1 el operador $v'' + m_1^2\, v$ es fuertemente inverso-positivo (ver [4, 5]), concluimos que $v_2 < v_1$ en I_s, esto es, $G_{m_2}(t,s) < G_{m_1}(t,s)$ para todo $t,\, s \in I$.

(2). Esta parte se obtiene de forma directa usando la parte (1), el Lema 3.30 y el Teorema 3.32:

$$G_{m_2}(t,s) = -G_{-m_2}(-t,-s) < -G_{-m_1}(-t,-s) = G_{m_1}(t,s) < 0 \;\; \forall t,s \in I.$$

Por la ecuación (3.34), $u_2 < u_1$ en I. ■

Observación 3.3. En (1) y (2) podíamos haber añadido que $u_1 < u_2$ $\forall h \prec 0$. Éstas son consecuencias directas del resto de la proposición.

3.2.4. Aplicaciones

Esta sección está dedicada a algunas aplicaciones de los resultados previos para la existencia de soluciones de problemas de contorno periódicos no lineales.

Método monótono

Los métodos de sub y sobresoluciones son un amplio conjunto de técnicas que proporcionan información acerca de la existencia –y a veces también construcción– de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Dependiendo del tipo particular de ecuación diferencial y de las condiciones de contorno a las que la sometamos, estas técnicas cambian, pero son en general válidas –con las modificaciones adecuadas– para otros casos.

Para esta aplicación seguiremos los pasos de [4] y usaremos el Corolario 3.33 para establecer condiciones bajo las cuales el problema más general

$$x'(t) = f(t, x(-t)) \ \ \forall t \in I, \quad x(-T) = x(T), \tag{3.35}$$

tiene solución. Aquí $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función de Carathéodory*, esto es, $f(\cdot, x)$ es medible para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(t, \cdot)$ es continua para casi todo $t \in I$, y para todo $R > 0$, existe $h_R \in L^1(I)$ tal que, si $|x| < R$, entonces

$$|f(t,x)| \leqslant h_R(t) \quad \text{para casi todo } t \in I.$$

Definición 3.5. Decimos $\alpha \in AC(I)$ es una *subsolución* del problema (3.35) si α satisface

$$\alpha'(t) \geqslant f(t, \alpha(-t)) \quad \text{para casi todo } t \in I, \quad \alpha(-T) - \alpha(T) \geqslant 0.$$

Definición 3.6. Decimos que $\beta \in AC(I)$ es una *sobresolución* del problema (3.35) si β satisface

$$\beta'(t) \leqslant f(t, \beta(-t)) \quad \text{para casi todo } t \in I, \quad \beta(-T) - \beta(T) \leqslant 0.$$

Establecemos ahora un teorema, en la línea del método monótono de sub y sobresoluciones, que demuestra la existencia de soluciones de (3.35) bajo algunas condiciones adicionales.

Teorema 3.35. *Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Si existen $\alpha \geqslant \beta$ sub y sobresoluciones de (3.35) respectivamente y $m \in (0, \frac{\pi}{4T}]$ tales que*

$$f(t,x) - f(t,y) \geqslant -m(x-y) \quad \text{para casi todo } t \in I \text{ con } \beta(t) \leqslant y \leqslant x \leqslant \alpha(t),$$

entonces existen dos sucesiones monótonas $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, decreciente y creciente respectivamente, con $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$ y tales que convergen uniformemente a las soluciones extremales en $[\beta, \alpha]$ de (3.35) respectivamente†.

Además, la cota $m = \frac{\pi}{4T}$ es óptima en el sentido de que hay problemas cuya única solución está fuera del intervalo $[\alpha, \beta]$ para $m > \frac{\pi}{4T}$.

Demostración. Consideremos el problema

$$x'(t) + m\,x(-t) = f(t, \gamma(-t)) + m\gamma(-t) \quad \text{para casi todo } t \in I, \quad x(-T) = x(T), \tag{3.36}$$

donde $\gamma \in L^1(I)$, $\beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha$. Entonces,

$$(\alpha - x)'(t) + m(\alpha - x)(-t) \geqslant f(t, \alpha(-t)) - f(t, \gamma(-t)) + m(\alpha - \gamma)(-t) \geqslant 0,$$

†Las *soluciones extremales* en $[\beta, \alpha]$ de (3.35) son un par de soluciones u_{min}, u_{max} de (3.35) tales que $\beta \leqslant u_{min} \leqslant u_{max} \leqslant \alpha$ y cualquier otra solución u de (3.35) satisface $u_{min} \leqslant u \leqslant u_{max}$.

$$(\alpha - x)(-T) \geqslant (\alpha - x)(T).$$

Por tanto, $x \leqslant \alpha$. Análogamente, podemos demostrar que $x \geqslant \beta$.

Sea $u_i = T\gamma_i$ la única solución del problema (3.36) para $\gamma = \gamma_i \in L^1(I)$. Supongamos que $\beta \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \alpha$. Entonces,

$$(u_2 - u_1)'(t) + m(u_2 - u_1)(-t) = f(t, \gamma_2(-t)) - f(t, \gamma_1(-t)) + m(\gamma_2 - \gamma_1)(-t) \geqslant 0,$$
$$(u_2 - u_1)(-T) = (u_2 - u_1)(T).$$

Por consiguiente, $u_1 \leqslant u_2$. Como consecuencia, podemos construir las sucesiones $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera. Sean $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\alpha_{n+1} = T\alpha_n$, $\beta_{n+1} = T\beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son decreciente y creciente punto a punto respectivamente.

Para comprobar la optimalidad de la cota, supongamos que $m > \frac{\pi}{4T}$. Consideremos el problema

$$x'(t) = f(t, x(-t)) \quad \text{para casi todo } t \in I, \quad x(-T) = x(T), \tag{3.37}$$

donde $f(t, y) = -my + h(t)$, $h \in L^1(I)$.

Es fácil comprobar que $\alpha \equiv 1$ y $\beta \equiv 0$ son sub y sobresoluciones del problema (3.37) respectivamente siempre y cuando $0 \leqslant h \leqslant m$.

Sea $\overline{G}$ la función de Green para (3.37). Dado que $m > \frac{\pi}{4T}$, existe $(t_0, s_0) \in I^2$ tal que $\overline{G}(t_0, s_0) < 0$. Simplemente teniendo en cuenta la expresión de $\overline{G}$, sabemos que $\overline{G}$ es negativa en un entorno $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$ de (t_0, s_0) para algún $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Por tanto, tomemos una función $h \in L^1(I)$ tal que $\operatorname{sop}(h) \subset (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$, $h(s_0) > 0$, $0 \leqslant h \leqslant m$. Entonces,

$$x(t_0) = \int_{-T}^{T} \overline{G}(t_0, s) h(s)\, \mathrm{d}s = \int_{s_0-\epsilon}^{s_0+\epsilon} \overline{G}(t_0, s) h(s)\, \mathrm{d}s < 0.$$

Por tanto, $\beta \nleqslant x$. ■

De forma análoga se puede probar el siguiente teorema.

Teorema 3.36. *Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory. Si existen $\alpha \leqslant \beta$ sub y sobresoluciones del problema (3.35) respectivamente y $m \in [-\frac{\pi}{4T}, 0)$ tales que*

$$f(t, x) - f(t, y) \leqslant -m(x - y) \quad \textit{para casi todo } t \in I \textit{ con } \alpha(t) \leqslant y \leqslant x \leqslant \beta(t),$$

entonces existen dos sucesiones monótonas $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, creciente y decreciente respectivamente, con $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$, las cuales convergen uniformemente a las soluciones extremales en $[\alpha, \beta]$ de (3.35) respectivamente.

Además, la cota $m = -\frac{\pi}{4T}$ es óptima en el sentido de que hay problemas cuya única solución está fuera del intervalo $[\alpha, \beta]$ para $m < -\frac{\pi}{4T}$.

Existencia de soluciones vía el Teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ

En esta sección implementaremos los métodos usados en [13] para la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden para demostrar nuevos resultados de existencia para el problema

$$x'(t) = f(t, x(-t), x(t)) \;\; \forall t \in I, \quad x(-T) = x(T), \tag{3.38}$$

donde $f : I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función de Carathéodory en L^1 y $2T$-periódica en t.

Establezcamos primero el teorema de punto fijo que vamos a usar [13].

Teorema 3.37 (Krasnosel'skiĭ)**.** *Sea $\mathscr{B}$ un espacio de Banach, y sea $\mathscr{P}\subset\mathscr{B}$ un cono en $\mathscr{B}$. Supongamos que Ω_1, Ω_2 son subconjuntos abiertos de $\mathscr{B}$ con $0\in\Omega_1$, $\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$ y sea $A:\mathscr{P}\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\to\mathscr{P}$ un operador completamente continuo tal que una de las siguientes condiciones se satisface:*

(K_1) $\|Au\|\leqslant\|u\|$ *si* $u\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_1$ *y* $\|Au\|\geqslant\|u\|$ *si* $u\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_2$,

(K_2) $\|Au\|\geqslant\|u\|$ *si* $u\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_1$ *y* $\|Au\|\leqslant\|u\|$ *si* $u\in\mathscr{P}\cap\partial\Omega_2$.

Entonces, A tiene al menos un punto fijo en $\mathscr{P}\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$.

De aquí en adelante, sea $m\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ y G la función de Green para el problema

$$x'(t)+m\,x(-t)=h(t),\quad x(-T)=x(T).$$

Sea $M=\text{máx}\{G(t,s)\ :\ t,s\in I\}$, $L=\text{mín}\{G(t,s)\ :\ t,s\in I\}$.

Teorema 3.38. *Sea $m\in(0,\frac{\pi}{4T})$. Asumamos que existen $r,\ R\in\mathbb{R}^+$, $r<R$ tales que*

$$f(t,x,y)+m\,x\geqslant 0\ \ \forall x,y\in\left[\frac{L}{M}r,\frac{M}{L}R\right],\ \textit{para casi todo } t\in I. \tag{3.39}$$

Entonces, si alguna de las siguientes condiciones se satisface,

(1)

$$f(t,x,y)+m\,x\geqslant\frac{M}{2TL^2}x\ \ \forall x,y\in\left[\frac{L}{M}r,r\right],\ \textit{para casi todo } t\in I,$$
$$f(t,x,y)+m\,x\leqslant\frac{1}{2TM}x\ \ \forall x,y\in\left[R,\frac{M}{L}R\right],\ \textit{para casi todo } t\in I;$$

(2)

$$f(t,x,y)+m\,x\leqslant\frac{1}{2TM}x\ \ \forall x,y\in\left[\frac{L}{M}r,r\right],\ \textit{para casi todo } t\in I,$$
$$f(t,x,y)+m\,x\geqslant\frac{M}{2TL^2}x\ \ \forall x,y\in\left[R,\frac{M}{L}R\right],\ \textit{para casi todo } t\in I;$$

el problema (3.38) tiene una solución positiva.

La demostración sigue los pasos de [25].

Demostración. Por el Teorema 3.32, sabemos que $M>L>0$. La ecuación (3.38) puede ser escrita como

$$x'(t)+m\,x(-t)=f(t,x(-t),x(t))+m\,x(-t).$$

Definamos

$$\Omega_1:=\{x\in\mathscr{C}(I)\ :\ \|x\|<r\},\ \Omega_2:=\left\{x\in\mathscr{C}(I)\ :\ \|x\|<\frac{M}{L}R\right\},$$

$$\mathscr{P} := \left\{ x \in \mathscr{C}(I) \; : \; \min_{t \in I} x(t) > \frac{L}{M} \|x\| \right\},$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo. Ω_1 y Ω_2 son conjuntos abiertos y $\mathscr{P}$ un cono abierto en el espacio de Banach $\mathscr{B} = (\mathscr{C}(I), \|\cdot\|_\infty)$.

Podemos comprobar fácilmente para $x \in \mathscr{P} \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$ que

$$\frac{L}{M} r \leqslant x(t) \leqslant \frac{M}{L} R \;\; \forall t \in I. \tag{3.40}$$

Defínase el operador completamente continuo $A : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ tal que, para todo $x \in \mathscr{B}$,

$$(Ax)(t) := \int_{-T}^{T} G(t,s)[f(s, x(-s), x(s)) + m\, x(-s)]\, \mathrm{d}s.$$

Las soluciones del problema (3.38) no son más que los puntos fijos del operador A. Por tanto, es suficiente probar que las hipótesis del Teorema 3.37 se satisfacen.

Usando (3.39) y (3.40) tenemos que

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &\geqslant L \int_{-T}^{T} [f(s, x(-s), x(s)) + m\, x(-s)]\, \mathrm{d}s \\ &\geqslant \frac{L}{M} \int_{-T}^{T} \max_{z \in I} G(z,s)[f(s, x(-s), x(s)) + m\, x(-s)]\, \mathrm{d}s = \frac{L}{M} \|Ax\|.\end{aligned}$$

Por consiguiente $A(\mathscr{P} \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)) \subset \mathscr{P}$.

Supongamos que (1) se satisface (para (2) la demostración es análoga). Si $x \in \partial \Omega_2 \cap \mathscr{P}$, entonces $\|x\| = \frac{M}{L} R$ y $R \leqslant x(t) \leqslant \frac{M}{L} R$ para todo t. Así,

$$(Ax)(t) \leqslant M \int_{-T}^{T} [f(s, x(-s), x(s)) + m\, x(-s)]\, \mathrm{d}s \leqslant M \frac{1}{2TM} \int_{-T}^{T} x(s)\, \mathrm{d}s \leqslant \frac{M}{L} R = \|x\|.$$

Si $x \in \partial \Omega_1 \cap \mathscr{P}$, entonces $\|x\| = r$ y $\frac{L}{M} r \leqslant x(t) \leqslant r$ para todo t. Por tanto,

$$(Ax)(t) \geqslant L \int_{-T}^{T} [f(s, x(-s), x(s)) + m\, x(-s)]\, \mathrm{d}s \geqslant \frac{M}{2TL} \int_{-T}^{T} x(s)\, \mathrm{d}s \geqslant r = \|x\|.$$

En consecuencia, por la condición (K_1) del Teorema 3.37, existe una solución $x \in \mathscr{P} \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$ para (3.38) y, por tanto,

$$\frac{L}{M} r \leqslant x \leqslant \frac{M}{L} R,$$

por lo que, en particular, x es positiva. ■

Presentamos ahora dos corolarios (análogos a los de [25]). El primero se obtiene reforzando las hipótesis y haciéndolas más fáciles de comprobar.

Corolario 3.39. *Sea $m \in (0, \frac{\pi}{4T})$, $f(t, x, y) \geqslant 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ y para casi todo $t \in I$. Si alguna de las siguientes condiciones se satisface:*

(1)

$$\lim_{x,y\to 0^+} \frac{f(t,x,y)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x,y\to +\infty} \frac{f(t,x,y)}{x} = 0,$$

(2)

$$\lim_{x,y\to 0^+} \frac{f(t,x,y)}{x} = 0, \quad \lim_{x,y\to +\infty} \frac{f(t,x,y)}{x} = +\infty,$$

uniformemente para casi todo $t \in I$, entonces el problema (3.38) tiene una solución positiva.

El segundo corolario se obtiene sin más que hacer el cambio de variables $y = -x$.

Corolario 3.40. *Supongamos que existen r, $R \in \mathbb{R}^+$, $r < R$, tales que*

$$f(t,x,y) + m\,x \leqslant 0 \ \ \forall x, y \in \left[-\frac{M}{L}R, -\frac{L}{M}r\right], \text{ para casi todo } t \in I.$$

Entonces, si alguna de las siguientes condiciones se satisface,

(1)

$$\begin{aligned} f(t,x,y) + m\,x &\leqslant \frac{M}{2TL^2}x \ \ \forall x, y \in \left[-r, -\frac{L}{M}r\right], \text{ para casi todo } t \in I, \\ f(t,x,y) + m\,x &\geqslant \frac{1}{2TM}x \ \ \forall x, y \in \left[-\frac{M}{L}R, -R\right], \text{ para casi todo } t \in I; \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(t,x,y) + m\,x &\geqslant \frac{1}{2TM}x \ \ \forall x, y \in \left[-r, -\frac{L}{M}r\right], \text{ para casi todo } t \in I, \\ f(t,x,y) + m\,x &\leqslant \frac{M}{2TL^2}x \ \ \forall x, y \in \left[-\frac{M}{L}R, -R\right], \text{ para casi todo } t \in I; \end{aligned}$$

el problema (3.38) tiene una solución negativa.

Resultados parecidos a estos –con demostraciones análogas– pueden establecerse cuando la función de Green es negativa.

Teorema 3.41. *Sea $m \in (-\frac{\pi}{4T}, 0)$. Supongamos que existen r, $R \in \mathbb{R}^+$, $r < R$ tales que*

$$f(t,x,y) + m\,x \leqslant 0 \ \ \forall x, y \in \left[\frac{M}{L}r, \frac{L}{M}R\right], \text{ para casi todo } t \in I.$$

Entonces, si alguna de las siguientes condiciones se satisface,

(1)

$$\begin{aligned} f(t,x,y) + m\,x &\leqslant \frac{L}{2TM^2}x \ \ \forall x, y \in \left[\frac{M}{L}r, r\right], \text{ para casi todo } t \in I, \\ f(t,x,y) + m\,x &\geqslant \frac{1}{2TL}x \ \ \forall x, y \in \left[R, \frac{L}{M}R\right], \text{ para casi todo } t \in I; \end{aligned}$$

(2)

$$f(t,x,y)+mx \geqslant \frac{1}{2TL}x \quad \forall x,y \in \left[\frac{M}{L}r, r\right], \textit{ para casi todo } t \in I,$$
$$f(t,x,y)+mx \leqslant \frac{L}{2TM^2}x \quad \forall x,y \in \left[R, \frac{L}{M}R\right], \textit{ para casi todo } t \in I;$$

el problema (3.38) tiene una solución positiva.

Corolario 3.42. *Supongamos que existen r, $R \in \mathbb{R}^+$, $r < R$, tales que*

$$f(t,x,y)+mx \geqslant 0 \quad \forall x,y \in \left[-\frac{L}{M}R, -\frac{M}{L}r\right], \textit{ para casi todo } t \in I.$$

Entonces, si alguna de las siguientes condiciones se satisface,

(1)

$$f(t,x,y)+mx \geqslant \frac{L}{2TM^2}x \quad \forall x,y \in \left[-r, -\frac{M}{L}r\right], \textit{ para casi todo } t \in I,$$
$$f(t,x,y)+mx \leqslant \frac{1}{2TL}x \quad \forall x,y \in \left[-\frac{L}{M}R, -R\right], \textit{ para casi todo } t \in I;$$

(2)

$$f(t,x,y)+mx \leqslant \frac{1}{2TL}x \quad \forall x,y \in \left[-r, -\frac{M}{L}r\right], \textit{ para casi todo } t \in I,$$
$$f(t,x,y)+mx \geqslant \frac{L}{2TM^2}x \quad \forall x,y \in \left[-\frac{L}{M}R, -R\right], \textit{ para casi todo } t \in I;$$

el problema (3.38) tiene una solución negativa.

Podríamos enunciar corolarios análogos al Corolario 3.39 para el Teorema 3.41 y los Corolarios 3.40 y 3.42.

Ejemplos

Analizaremos ahora dos ejemplos a los cuales les podemos aplicar los resultados previos. Obsérvese que ambos ejemplos no caen bajo las hipótesis de los teoremas de existencia de soluciones acotadas para ecuaciones diferenciales con reflexión del argumento en [31] ni en aquellos más resultados más generales que se pueden encontrar en [1, 23, 28, 29, 33].

Ejemplo 3.4. Considérese el problema

$$x'(t) = \lambda \operatorname{senh}(t - x(-t)), \quad \forall\, t \in I, \quad x(-T) = x(T). \tag{3.41}$$

Es fácil comprobar que $\alpha \equiv T$ y $\beta \equiv -T$ son sub y sobresoluciones respectivamente del problema (3.41) para todo $\lambda \geqslant 0$. Puesto que $f(t,y) := \lambda \operatorname{senh}(t-y)$ satisface que $|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)| \leqslant \lambda \cosh(2T)$, para todo $(t,y) \in I^2$, sabemos, por el Teorema 3.35, que el problema (3.41) tiene soluciones extremales $[-T, T]$ para todo

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\pi}{4T\cosh(2T)}.$$

Ejemplo 3.5. Consideremos el problema

$$x'(t) = t^2 x^2(t)[\cos^2(x^2(-t)) + 1] \ \ \forall t \in I, \quad x(-T) = x(T). \tag{3.42}$$

Definiendo $f(t, x, y)$ como la extensión $2T$-periódica en t de la función $t^2 x^2(\cos^2(y^2)+1)$, podemos aplicar el Corolario 3.39 y deducimos que el problema (3.42) tiene una solución positiva. Usando el corolario análogo para el Corolario 3.42, sabemos que también tiene una solución negativa.

4. Futuras líneas de investigación

A lo largo de los capítulos de esta memoria han ido surgiendo nuevas incógnitas y problemas. La investigación en ecuaciones diferenciales con involuciones está aún en sus comienzos y muchos de sus caminos aún están por explorar. Este último capítulo de la memoria analiza brevemente unas pocas líneas de investigación que se podrán seguir en un futuro cercano.

Ecuaciones con involuciones y geometría

Una posible línea de investigación es intentar plantear ecuaciones con involuciones en variedades. Para ello podemos optar por varias opciones. La primera es darse cuenta de que las ecuaciones con condiciones periódicas no son más que ecuaciones en la circunferencia. De este modo podemos pensar la ecuación en una región cerrada de $\mathbb{R}^n$ (el intervalo unidad, un rectángulo, una variedad piramidal* embebida en $\mathbb{R}^n$...) de forma que las condiciones de contorno nos permitan tomar su cociente de manera que se identifiquen puntos de la frontera de la región. En este caso la involución estaría definida sobre la región de $\mathbb{R}^n$ (recordemos una de las generalizaciones de involución) y plantear la ecuación sobre la variedad no sería más que considerar una ecuación en derivadas parciales con condiciones de contorno periódicas†.

Ejemplo 4.1. *Ecuaciones en el toro* $\mathbb{T}^2$*:*

Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(t,s) = (-t,s)$. φ es una involución en $\mathbb{R}^2$. Vamos a plantear el problema (3.28) en I^2 de forma que garanticemos que la solución $x : I^2 \to \mathbb{R}$ factorice a través de la proyección al cociente $p : [-T,T]^2 \to \mathbb{T}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}(t,s) + m\,x(-t,s) &= h(t,s), \quad t,s \in I, \\ x(-T,s) &= x(T,s), \quad s \in I, \\ x(t,-T) &= x(t,T), \quad t \in I, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

$$h(t,-T) = h(t,T) \;\; \forall t \in I. \tag{4.2}$$

*El estudio de variedades variedades piramidales es muy parecido al de variedades con borde. Una monografía interesante es [15].

†Ya hay estudios sobre ecuaciones en derivadas parciales con involuciones. Ver, por ejemplo, [31].

Fijemos $s_0 \in I$ y supongamos que G_{s_0} denota la función de Green asociada al problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}(t,s_0) + m\,x(-t,s_0) &= h(t,s_0),\ t \in I, \\ x(-T,s_0) &= x(T,s_0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Entonces la solución del problema (4.1) viene dada por

$$u(t,s) = \int_{-T}^{T} G_s(t,r)h(r)\,\mathrm{d}\,r.$$

Obsérvese que esto tiene sentido ya que en condiciones de unicidad de solución para (4.3) $G_{-T} = G_T$ por la condición (4.2).

La otra aproximación entra en el campo de las variedades de Riemann. Si M es una variedad de Riemann completa, podemos plantear las ecuaciones en involuciones sobre las geodésicas que parten de un punto. Si no queremos que el punto sea destacado, podemos pensar en variedades de Riemann homogéneas o simétricas. El problema principal de esta aproximación es que no controlamos a priori cuando esas geodésicas son cerradas y cuando no, y en el caso en el que fuesen cerradas, las condiciones de contorno deberían ser tales que reflejasen este hecho, de lo contrario podríamos encontrarnos con problemas que no tuviesen solución.

Ejemplo 4.2. Sea M una variedad de Riemann completa, $p \in M$. Sea Γ_p el conjunto de geodésicas pasando por p parametrizadas por longitud de arco. Entonces podemos plantear el problema análogo a (3.28)

$$\begin{aligned} (x \circ \gamma)'(t) + mx(\gamma(-t)) &= h(\gamma(t)), \quad \gamma \in \Gamma_p,\ t \in [0,+\infty), \\ x(p) &= x_0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde x y h son funciones de M en $\mathbb{R}$.

En este ejemplo denotaremos por F_γ a la función $F \circ \gamma$. Así, si $g(t) = h'(t) + m\,h(-t)$, el problema (4.4) puede reducirse a

$$\begin{aligned} x_\gamma''(t) + m^2 x_\gamma(t) &= g_\gamma(t), \quad \gamma \in \Gamma_p,\ t \in [0,+\infty), \\ x(p) &= x_0, \\ x_\gamma'(0) &= h(p) - mx_0. \end{aligned}$$

La solución general de $x_\gamma''(t) + m^2 x_\gamma(t) = g_\gamma(t)$ se obtiene usando el método de variación de constantes y es

$$x_\gamma(t) = \left[c_1 - \frac{1}{m}\int_0^t g_\gamma(s)\,\mathrm{sen}(m\,s)\,\mathrm{d}\,s\right]\cos(m\,t) + \left[c_2 + \frac{1}{m}\int_0^t g_\gamma(s)\cos(m\,s)\,\mathrm{d}\,s\right]\mathrm{sen}(m\,t),$$

donde las constantes c_1 y c_2 se determinan usando las condiciones iniciales $x(p) = x_0$ y $x_c'(0) = h(p) - mx_0$, de forma que $c_1 = x_0$ y $c_2 = \frac{h(p)}{m} - x_0$. Además, para que la solución x sea diferenciable en t, necesitamos que las geodésicas $\gamma(t)$ y $\gamma(-t)$ “peguen bien”, de esta forma tenemos el sistema

$$\begin{aligned} (x \circ \gamma)'(0) + mx(\gamma(0)) &= h(\gamma(0)), \\ -(x \circ \gamma)'(0) + mx(\gamma(0)) &= h(\gamma(0)), \end{aligned}$$

con lo cual necesitamos $x_0 = \frac{h(p)}{m}$ o, equivalentemente, $c_2 = 0$. Por tanto,

$$x_\gamma(t) = \left[x_0 - \frac{1}{m}\int_0^t g_\gamma(s)\operatorname{sen}(ms)\,\mathrm{d}s\right]\cos(mt) + \frac{\operatorname{sen}(mt)}{m}\int_0^t g_\gamma(s)\cos(ms)\,\mathrm{d}s,\ t \in [0,\infty).$$

Supongamos ahora que $M = \mathbb{R}^2$. Las geodésicas en el plano pasando por el origen vienen dadas por $\gamma_\theta(t) = (t\cos\theta,\ t\operatorname{sen}\theta)$ donde θ es un ángulo en $[0,2\pi)$. Así, dado un punto $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, éste determina una geodésica γ_θ y un t de forma que $t = \|q\|$, $\cos(\theta) = \frac{q_1}{\|q\|}$ y $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{q_2}{\|q\|}$. De esta forma la solución del problema (4.4) viene dada por

$$\begin{aligned}
x(q) =& \left[x_0 - \frac{1}{m}\int_0^{\|q\|} g\left(\frac{q_1 s}{\|q\|}, \frac{q_2 s}{\|q\|}\right)\operatorname{sen}(ms)\,\mathrm{d}s\right]\cos(m\|q\|) \\
&+ \frac{\operatorname{sen}(m\|q\|)}{m}\int_0^{\|q\|} g\left(\frac{q_1 s}{\|q\|}, \frac{q_2 s}{\|q\|}\right)\cos(ms)\,\mathrm{d}s, \quad q \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \\
x(0) =& x_0.
\end{aligned}$$

Algo interesante a tener en cuenta es que existen involuciones continuas de orden n definidas en conexos que no son subconjuntos de $\mathbb{R}$, como se pudo observar en el Ejemplo 2.2, lo cual supone que en variedades de dimensión $n \geqslant 2$, podemos estudiar ecuaciones con este tipo de involuciones. En esta línea, también se puede realizar el estudio de ecuaciones con involuciones en los números complejos.

Estudio del álgebra $\mathscr{A}_\varphi$

Respecto a la reducibilidad de ecuaciones diferenciales funcionales a sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ya se han encontrado resultados de caracterización (ver, por ejemplo, [10]), sin embargo la forma de reducir el sistema puede ser crucial a la hora de resolverlo, como podemos recordar de la Sección 3.2.1. El álgebra asociativa $\mathscr{A}_\varphi$ introducida en la Sección 2.2.1, pude ayudar a encontrar formas sencillas de reducción en el caso lineal, sin embargo, no es de esperar encontrar una reducción de ese tipo de forma que la nueva ecuación sea equivalente a la primera. De hecho, el caso que estudiamos, $x'(t) + mx(-t) = h(t)$, parece ser un caso particular en este sentido ya que para él existe correspondencia de soluciones. Si cambiamos la involución o hacemos que m no sea constante se puede reducir la ecuación, pero no podemos garantizar que las soluciones de la ecuación reducida (con sus correspondientes condiciones de contorno) sean soluciones del problema original.

Estudio de ecuaciones con involuciones no continuas

Las involuciones en subconjuntos de $\mathbb{R}$ no continuas pueden ser de orden n para $n \geqslant 2$. El mismo efecto ocurre cuando el dominio de definición no es conexo. Se han estudiado casos particulares de este fenómeno como reflejan los resultados de Wiener para involuciones hiperbólicas [31], sin embargo, el caso de involuciones con discontinuidades aún está por estudiar. En esta línea pueden intentar aplicarse los teoremas para ecuaciones diferenciales de la forma $x'(t)=f(t,x(t))$ donde f es discontinua o se puede intentar un enfoque caso por caso en el cual se separa el dominio en aquellas componentes en las que la función es continua. Esto lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3. Consideremos la involución

$$\varphi(t)=\begin{cases} t-1 & \text{si} \quad t\in[0,1], \\ t+1 & \text{si} \quad t\in[-1,0), \end{cases}$$

y la ecuación

$$x'(t)=x(\varphi(t)), \tag{4.5}$$

con condición inicial $x(0)=x_0$. Ya que φ tiene una discontinuidad de salto en el 0, no es de esperar que alguna solución al problema sea diferenciable en tal punto. Buscamos por tanto una solución

$$x\in\mathscr{C}([-1,1])\cap\mathscr{C}^2([-1,1]\backslash\{0\}).$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación (4.5), obtenemos la ecuación reducida $x''(t)=x(t)$, cuya solución, considerando las dos partes del dominio en las que la involución es continua, toma la forma

$$x(t)=\begin{cases} a_1e^t+b_1e^{-t} & \text{si} \quad t\in[0,1], \\ a_2e^t+b_2e^{-t} & \text{si} \quad t\in[-1,0), \end{cases}$$

cuya derivada es

$$x'(t)=\begin{cases} a_1e^t-b_1e^{-t} & \text{si} \quad t\in[0,1], \\ a_2e^t-b_2e^{-t} & \text{si} \quad t\in[-1,0). \end{cases}$$

Si imponemos ahora la ecuación (4.5), tenemos que $a_1e^t+b_1e^{-t}=a_2e^{t-1}-b_2e^{1-t}$ (pues $x(t)=x'(\varphi(t))$ por ser φ involución) para todo $t\in[0,1]$ y por tanto $a_2=e\,a_1$ y $b_1=-e\,b_2$. Sean $a:=a_1$, $b:=b_2$. Entonces tenemos

$$x(t)=\begin{cases} a\,e^t-b\,e^{1-t} & \text{si} \quad t\in[0,1], \\ a\,e^{t+1}+b\,e^{-t} & \text{si} \quad t\in[-1,0). \end{cases}$$

y

$$x'(t)=\begin{cases} a\,e^t+b\,e^{1-t} & \text{si} \quad t\in[0,1], \\ a\,e^{t+1}-b\,e^{-t} & \text{si} \quad t\in[-1,0). \end{cases}$$

Si ahora imponemos que x sea continua, es decir $x(0^+)=x(0^-)$, concluimos que $b=\frac{1-e}{1+e}a$, por lo que la función queda como

$$x(t)=\begin{cases} a\left(e^t-\frac{1-e}{1+e}e^{1-t}\right) & \text{si} \quad t\in[0,1], \\ a\left(e^{t+1}+\frac{1-e}{1+e}e^{-t}\right) & \text{si} \quad t\in[-1,0). \end{cases}$$

Finalmente, tenemos que $a=\frac{e+1}{e^2+1}x_0$, y, por consiguiente,

$$x(t)=\frac{x_0}{e^2+1}\begin{cases} (e+1)e^t+(e-1)e^{1-t} & \text{si} \quad t\in[0,1], \\ (e+1)e^{t+1}-(e-1)e^{-t} & \text{si} \quad t\in[-1,0). \end{cases}$$

Resultados de existencia vía el teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ con función de Green con signo cambiante

Los resultados que obtuvimos en esta memoria usando el teorema de Krasnosel'skiĭ pueden ser ampliados si utilizamos conos distintos, así, con conos apropiados, podríamos estudiar los casos en los que la función de Green (3.31) cambiase de signo. Un ejemplo de conos que sería interesante estudiar son aquellos de la forma

$$K_\sigma = \left\{ x \in \mathscr{C}([0,T]) : \int_0^T a(t)\,x(t)\,\mathrm{d}\,t \geqslant \sigma \|x\| \right\},$$

donde $\sigma \in \mathbb{R}$. Otra forma de abordar este problema sería introducir pequeñas modificaciones en el teorema de punto fijo de Krasnosel'skiĭ para poder considerar casos más generales.

Agradecimientos

No podría terminar esta memoria sin agradecer a mi director de Trabajo de Fin de Máster, Alberto Cabada, todo su esfuerzo y dedicación para que este proyecto llegara a buen puerto, sus buenas ideas y su siempre refrescante sentido del humor. También quiero dar gracias a todos aquellos que participan en mi día a día y hacen así de mi vida un lugar mejor, algo imprescindible cuando uno se atreve a algo, por veces tan árido, como la investigación. A Santiago Codesido, físico y buen amigo, por tantas charlas acerca de la naturaleza del universo y de su interpretación matemática, que tan a menudo espolean mi curiosidad y me llevan a investigar sobre tantas otras cosas sobre las que aún no sé nada. A Sandra, por sus cafés, paciencia, afecto y ánimos. A David, quien me recuerda día a día que no estoy solo en el mundo, y a mi familia, que siempre me ha apoyado, incluso en la distancia.

Bibliografía

[1] Aftabizadeh, A.R., Huang, Y.K., Wiener, J.: *Bounded solutions for differential equations with reflection of the argument*. J. Math. Anal. Appl. **135**(1), 31–37 (1988)

[2] Agarwal, R.P., O'Regan, D.: An introduction to ordinary differential equations. Springer (2008)

[3] Busenberg, S.N., Travis, C.C.: *On the use of reducible-functional differential equations in biological models*. J. Math. Anal. Appl. **89**(1), 46–66 (1982)

[4] Cabada, A.: *The method of lower and upper solutions for second, third, fourth, and higher order boundary value problems*. J. Math. Anal. Appl. **185**(2), 302–320 (1994)

[5] Cabada, A., Cid, J.Á.: *On comparison principles for the periodic Hill's equation*. J. Lond. Math. Soc. pp. 272–290 (2012)

[6] Cabada, A., Cid, J.Á., Máquez-Villamarín, B.: *Computation of Green's functions for boundary value problems with Mathematica*. Appl. Math. Comput. **219**(4), 1919–1936 (2012)

[7] Cabada, A., Tojo, F.A.F.: *Comparison results for first order linear operators with reflection and periodic boundary value conditions*. Nonlinear Anal. **78**, 32–46 (2013)

[8] Castelan, W., Infante, E.: *On a functional equation arising in the stability theory of difference-differential equations*. Quart. Appl. Math. (1976)

[9] Cushing, J.M., et al.: Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Springer (1977)

[10] Fargue, D.M.: *Réducibilité des systémes héréditaires a des systémes dynamiques*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. B **227**, 471–473 (1973)

[11] Gupta, C.P.: *Existence and uniqueness theorems for boundary value problems involving reflection of the argument*. Nonlinear Anal. **11**(9), 1075–1083 (1987)

[12] Gupta, C.P.: *Two-point boundary value problems involving reflection of the argument*. Int. J. Math. Math. Sci. **10**(2), 361–371 (1987)

[13] Krasnosel'skiĭ, M.: Positive solutions of operator equations. Noordhoff, Groningen (1964)

[14] Kuller, R.G.: *On the Differential Equation $f' = f \circ g$ where $g \circ g = I$*. Math. Mag. pp. 195–200 (1969)

[15] León Delgado, N.: *Sobre las Deformaciones en la Mecánica de los Medios Continuos*. Trabajo Académico Dirigido (2011). Dirigido por Oscar López Pouso y José Antonio Oubiña Galiñanes, USC

[16] Lučić, R.: *On a functional differential equation*. Publ. Electrotechn. Fac. Univ. Belgrade, Ser. Math. Phys. **338**(352), 55–56 (1971)

[17] Lučić, R.: *On a class of functional differential equations*. Publ. Electrotechn. Fac. Univ. Belgrade, Ser. Math. Phys. **461**(497), 31–32 (1974)

[18] MacDonald, N.: *Time lags in biological models*. Lect. Notes Biomath. (1978)

[19] O'Regan, D.: *Existence results for differential equations with reflection of the argument*. J. Aust. Math. Soc. **57**(02), 237–260 (1994)

[20] O'Regan, D., Zima, M.: *Leggett-Williams norm-type fixed point theorems for multivalued mappings*. Appl. Math. Comput. **187**(2), 1238–1249 (2007)

[21] Piao, D.: *Periodic and almost periodic solutions for differential equations with reflection of the argument*. Nonlinear Anal. **57**(4), 633–637 (2004)

[22] Piao, D.: *Pseudo almost periodic solutions for differential equations involving reflection of the argument*. J. Korean Math. Soc. **41**(4), 747–754 (2004)

[23] Shah, S., Wiener, J.: *Reducible functional differential equations*. Int. J. Math. Math. Sci. **8**(1), 1–27 (1985)

[24] Silberstein, L.: *Solution of the equation* $f(x) = f(1/x)$. Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag. **30**(200), 185–186 (1940)

[25] Torres, P.J.: *Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnosel'skiĭ fixed point theorem*. J. Differential Equations **190**(2), 643–662 (2003)

[26] Šarkovskiĭ, A.N.: *Co-Existence of Cycles of a Continuous Mapping of a Line onto Itself*. Ukr. Math. J. **16**, 61–71 (1969)

[27] Šarkovskiĭ, A.N.: *Functional-differential equations with a finite group of argument transformations in Asymptotic Behavior of Solutions of Functional-Differential Equations*. Akad. Nauk. Ukrain Inst. Mat. Kiev **1**, 118–142 (1978)

[28] Watkins, W.T.: *Modified Wiener equations*. Int. J. Math. Math. Sci. **27**(6), 347–356 (2001)

[29] Watkins, W.T.: *Asymptotic properties of differential equations with involutions*. Int. J. Math. Math. Sci. **44**(4), 485 (2008)

[30] Wiener, J.: *Differential equations with involutions*. Differencial'nye Uravnenija **5**, 1131–1137 (1969)

[31] Wiener, J.: Generalized solutions of functional differential equations. World Scientific (1993)

[32] Wiener, J., Aftabizadeh, A.: *Boundary value problems for differential equations with reflection of the argument*. Int. J. Math. Math. Sci. **8**(1), 151–163 (1985)

[33] Wiener, J., Watkins, W.T.: *A glimpse into the wonderland of involutions*. Missouri J. Math. Sci **14**(3), 175–185 (2002)

Índice alfabético