



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Variedades de Lorentz y Operador de d'Alembert

Trabajo Fin de Grado

Autor: Tania Rivas Quelle

Tutor: Jesús Antonio Álvarez López

Curso 2019 - 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Grado en Matemáticas
Trabajo Fin de Grado

Variedades de Lorentz y Operador de d'Alembert

Autor: Tania Rivas Quelle
Tutor: Jesús Antonio Álvarez López

Septiembre 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Geometría y Topología
Título: Variedades de Lorentz y operador de d'Alembert
Breve descripción del contenido
<ol style="list-style-type: none">1. Tendrá que hacerse una introducción a las distribuciones (funciones generalizadas) en variedades, operadores diferenciales hiperbólicos, espacio de Minkowski y geometría de Lorentz.2. Se estudiará el operador de d'Alembert en el espacio de Minkowski, su relación con las distribuciones de Riesz, y la generalización a variedades de Lorentz.3. Si hubiese tiempo, se usaría lo anterior para iniciar el estudio de la ecuación de ondas en variedades de Lorentz con el operador de d'Alembert.
Recomendaciones
Es conveniente cursar la materia Variedades Diferenciables. En el caso de estudiantes del doble grado de Matemáticas y Física, es interesante cursar las materias de Electromagnetismo y Teoría Cuántica de Campos.

Índice general

Resumen	vii
Introducción	ix
1. Relatividad Especial	1
1.1. Introducción histórica	1
1.2. Postulados de la Relatividad Especial	2
1.3. La relatividad del tiempo y el espacio	3
1.3.1. Dilatación del tiempo	3
1.3.2. Contracción de Lorentz	5
1.4. Transformaciones de Lorentz	7
1.4.1. Introducción histórica	7
1.4.2. Transformaciones de Lorentz para las coordenadas	7
1.4.3. Aplicaciones	10
2. Espacio de Minkowski	15
2.1. Introducción histórica	15
2.1.1. Espacio-tiempo complejo de Minkowski	17
2.1.2. Espacio-tiempo real de Minkowski	18
2.2. Diagrama de Minkowski	18
2.2.1. Observador en reposo	19
2.2.2. Observador en movimiento relativo: Transformaciones de Lorentz	20
2.2.3. El intervalo y la calibración de los ejes	21
2.3. Estructura	22
2.4. Propiedades de los vectores temporales	23
2.4.1. Producto Escalar	24
2.4.2. Norma y desigualdad de Cauchy invertida	24
2.4.3. Desigualdad del triángulo invertido	25
2.5. Estructura Matemática	25
2.5.1. Vectores tangentes	26
2.5.2. Signatura de la métrica	27
2.5.3. Métricas pseudo-euclidianas	28

2.5.4. Métrica de Minkowski	29
2.5.5. Base estándar	33
2.6. Generalizaciones	33
3. Operador de d'Alembert	37
3.1. Cuerda vibrante finita	38

Resumen

En este trabajo fin de grado nos centraremos en el estudio del espacio de Minkowski, comúnmente conocido como espacio-tiempo de Minkowski, introducido en matemáticas por el matemático alemán Hermann Minkowski en 1908. Lo enfocaremos en la física haciendo un repaso a la relatividad especial, la cual fue desarrollada por Albert Einstein en 1905 y que sustentó con dos postulados. Posteriormente, estudiaremos dicho espacio, que está asociado a la relatividad especial, con todas sus propiedades. Por último, veremos el operador de d'Alembert, que es el operador de Laplace del espacio de Minkowski.

Abstract

In this final degree project we will focus on the study of Minkowski space, commonly known as Minkowski space-time, introduced in mathematics by the German mathematician Hermann Minkowski in 1908. We will focus on physics by reviewing the special relativity, which was developed by Albert Einstein in 1905 and supported by two postulates. Later, we will study this space, which is associated with special relativity, with all of its properties. Finally, we will see the d'Alembert operator, which is the Laplace operator of the Minkowski space.

Introducción

Cuando uno piensa en el espacio de Minkowski, lo primero que se nos viene a la cabeza es de dónde proviene o sobre qué se sustenta. En este punto es donde nos encontramos en el primer capítulo del trabajo, la denominada teoría de la Relatividad especial que fue publicada en 1905 por el físico alemán Albert Einstein (1879-1955), en la cual generalizaba la relatividad de Galileo Galilei explicando que tanto la velocidad como el tiempo medidos por un observador dependen del movimiento relativo respecto de otro observador. Por otra parte, estableció que la velocidad de la luz es constante para todos los observadores.

En el segundo capítulo nos encontramos en el estudio del espacio de Minkowski, introducido por el matemático alemán Hermann Minkowski (1864-1909). Plasmaremos las propiedades de este espacio junto con el conocido diagrama de Minkowski en distintas fases, es decir, cuando el observador está en reposo y cuando está en movimiento. Todo esto lo estudió Minkowski ya que estaba muy interesado en la teoría de la Relatividad especial de Einstein, la cual formalizó a través de conceptos geométricos.

Por último, en el tercer capítulo veremos el operador de d'Alembert, también llamado operador de Laplace en el espacio de Minkowski, que lleva el nombre del físico francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Aquí estudiaremos la ecuación de ondas en la cuerda vibrante y daremos una solución mediante el método de variables separadas.

Capítulo 1

Relatividad Especial

En este primer capítulo voy a dar un breve rapaso a la Relatividad Especial, veremos el carácter relativista de distancia y tiempo, y obtendremos las transformaciones de Lorentz. Para ello utilizaremos sobre todo [2] y [5].

1.1. Introducción histórica

A finales del siglo XIX , los físicos pensaban que la mecánica clásica de Newton, la cual estaba basada en la relatividad de Galileo Galilei, describía los conceptos de velocidad y fuerza para todos los sistemas de referencia. Además, Hendrik Lorentz observó que la Teoría de Maxwell no cumplía las transformaciones de Galileo cuando el sistema de referencia inercial varía. En especial, las ecuaciones de Maxwell requerían que la velocidad de la luz fuera constante, pero fue el experimento de Michelson y Morley el que confirmó que la velocidad de la luz permanecía constante para cualquier velocidad.

Entonces, en este momento, se abría un problema teórico asociado a las transformaciones de Galileo, para el cual Lorentz encontró que las transformaciones que garantizaban la invarianza son las que actualmente se conocen como transformaciones de Lorentz.

Durante los siguientes años estas transformaciones de Lorentz quedarán inexplicadas hasta que el físico Albert Einstein, en 1905, fue capaz de darles una solución considerando el carácter relativo del tiempo y el espacio. De hecho, fue en su artículo “Sobre la electrodinámica de los cuerpos” donde se introdujo lo que hoy en día conocemos como teoría de la Relatividad Especial.

Esta teoría estaba basada en el principio de relatividad y en la constancia de la velocidad de la luz en cualquier sistema de referencia inercial. De este hecho Einstein dedujo las ecuaciones de Lorentz, que veremos más adelante.

La Relatividad Especial no solo ofrece una nueva manera de ver la física, sino que incluso implica una visión nueva de la estructura del espacio y el tiempo, combinados en una sola entidad cuadrimensional, llamado el espacio-tiempo, o el espacio de Minkowski.

1.2. Postulados de la Relatividad Especial

El esfuerzo de Einstein por conciliar el principio de relatividad y la electrodinámica le llevó a elaborar en el artículo mencionado anteriormente una teoría sustentada por dos postulados fundamentales.

- Primer postulado.- Todas las leyes de la Física son invariantes respecto a las transformaciones entre sistemas de referencia inerciales.

- Segundo postulado.- La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma para cualquier sistema de referencia inercial.

El primer postulado se conoce como *Principio de la relatividad especial*, lo que se pretende es indicar que en todos los sistemas inerciales todos los fenómenos ocurren de la misma forma, es decir, tienen el mismo comportamiento. Por lo tanto todos los sistemas inerciales resultan absolutamente equivalentes e indistinguibles.

Además, no hay ninguna posibilidad de determinar cuál está en reposo o en movimiento. Por lo que, este primer postulado hace innecesaria la existencia de un sistema de referencia absoluto.

En el segundo postulado se acepta la constancia de la velocidad de la luz sustentada en resultados experimentales, dando como resultado la clave para vincular dos sistemas inerciales, ya que permite encontrar las transformaciones de coordenadas necesarias para que la velocidad de la luz sea la misma en ambos sistemas.

Llevar estos dos postulados hasta las últimas consecuencias implica abandonar las ideas intuitivas del espacio y el tiempo.

1.3. La relatividad del tiempo y el espacio

1.3.1. Dilatación del tiempo

Definición 1.1 *De acuerdo con la teoría de la relatividad, la dilatación del tiempo es una diferencia en el tiempo transcurrido medido por dos observadores, ya sea debido a una diferencia de velocidad relativa entre sí, o por estar situado de manera diferente en relación con un campo gravitacional.*

Veamos esta definición plasmada en un experimento ficticio:

Consideramos un tren que se mueve con velocidad v , con respecto al andén de una estación. Sea \mathcal{O}' el pasajero que viaja en el tren, el cual dispone de un reloj de luz que consiste en dos espejos, colocados uno encima del otro a una altura d y un pulso de luz que viaja continuamente entre los dos espejos. Luego \mathcal{O}' medirá el tiempo, $\Delta t'$, que tarda la luz en subir y bajar entre los dos espejos, es decir,

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}.$$

Por otra parte tenemos un observador \mathcal{O} en el andén, que verá que la luz sale del espejo de abajo pero llega al espejo de arriba después de un tiempo $\Delta t/2$ cuando el tren se ha desplazado una distancia $v\Delta t/2$, y llega al espejo de abajo después de un tiempo total Δt cuando el tren se ha desplazado una distancia total $v\Delta t$.

Para este observador \mathcal{O} , como la luz recorre una trayectoria más larga y se mueve a

velocidad c , tenemos que la distancia que recorre al subir es

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

de donde tenemos

$$\Delta t = \frac{2d/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Para obtener esta expresión hemos tenido que suponer que $v < c$.

Podemos observar que el tiempo Δt que tarda la luz en recorrer un ciclo observado por el observador que está en el andén, es mas largo que el tiempo $\Delta t'$ del viajero. Este efecto se conoce como la *dilatación del tiempo*.

Además sabemos que el coeficiente $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ aparece en tantas fórmulas relativistas que hasta se le da su propio símbolo γ :

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Puesto que la velocidad v siempre es mas pequeña que c , el denominador es siempre menor o igual a 1 y, por tanto, $\gamma \geq 1$.

El factor $\gamma = 1$ se verifica si $v = 0$. Es decir, cuanto mayor hagamos v , mayor será γ y, si v se aproxima a c , el valor de γ aumenta sin límite.

Por lo tanto, la situación que acabamos de describir es simétrica entre los dos observadores. Luego cada uno ve el reloj del otro ir mas lento que el suyo, puesto que cada uno ve el otro en movimiento. Es decir, no hay manera de saber cual de los dos va mas lento, ya que esto depende del punto de vista del observador.

1.3.2. Contracción de Lorentz

Los postulados de la Relatividad nos han llevado a deducir que el tiempo depende del sistema de referencia en el que se mide. Luego podemos usar este hecho para mostrar que se debe aplicar lo mismo a las distancias. Es decir, la distancia medida entre dos sucesos depende del sistema de referencia respecto al que se mide.

Mostraremos esto con el mismo experimento imaginario que utilizamos anteriormente.

Consideremos de nuevo los dos observadores, \mathcal{O} en el andén y \mathcal{O}' en un tren que se mueve a velocidad v respecto al andén. Ahora supongamos observadores en \mathcal{O} y en \mathcal{O}' midiendo la longitud del tren.

Para el observador \mathcal{O}' esta medida se obtiene fácilmente puesto que para él el tren está en reposo. En cambio, para el observador \mathcal{O} en el andén la medición es más difícil ya que el tren está en movimiento. Quizás lo más sencillo sea cronometrar el tiempo transcurrido desde que pasa el principio del tren por \mathcal{P} hasta que vuelve a pasar por el final del tren \mathcal{P} , es decir :

Si t_1 y t_2 son los tiempos del principio y del final del tren a su paso por \mathcal{P} , siendo $\Delta t = t_2 - t_1$, entonces \mathcal{O} puede calcular la longitud l como

$$l = v\Delta t. \quad (1.1)$$

Para comparar esta longitud con la medida l' obtenida por \mathcal{O}' debemos obtener l' con un procedimiento similar.

Luego, si nos situamos en el tren, el punto \mathcal{P} , que está en el andén, está moviéndose hacia la izquierda con velocidad v , y los observadores en el tren pueden medir el tiempo para que \mathcal{P} se mueva del principio al final del tren.

Esto requiere dos observadores en el tren, uno en el frente \mathcal{P}_1 y otro al final \mathcal{P}_2 . Si llamamos t'_1 al tiempo que marca el reloj de \mathcal{P}_1 cuando \mathcal{P} pasa frente a él, y t'_2 al tiempo que marca el reloj de \mathcal{P}_2 al pasar \mathcal{P} por su lado, entonces $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ es el tiempo que tarda \mathcal{P} en recorrer la longitud del tren. Por lo tanto,

$$l' = v\Delta t'. \quad (1.2)$$

Si comparamos (1.1) y (1.2) inmediatamente podemos observar que puesto que los tiempos Δt y $\Delta t'$ son diferentes, debe verificarse lo mismo de las longitudes l y l' . Para calcular la diferencia necesitamos relacionar Δt y $\Delta t'$ usando la fórmula de la dilatación del tiempo

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

En este experimento los dos sucesos de interés, \mathcal{P} al principio del tren y \mathcal{P} al final del tren, ocurren en el mismo sitio en \mathcal{O} . Por consiguiente, Δt es el tiempo propio y la fórmula de dilatación del tiempo implica que $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Comparando (1.1) y (1.2) vemos que

$$l = \frac{l'}{\gamma} \leq l' \quad (1.3)$$

La longitud del tren medida en \mathcal{O} es menor a la longitud medida en \mathcal{O}' , ya que la igualdad sólo se da si $v = 0$. Este resultado es asimétrico, es decir, el sistema \mathcal{O}' es especial puesto que es el único sistema donde el objeto medido está en reposo. Para resaltar esta asimetría y para evitar confusión sobre qué sistema es cada uno, lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \leq l_0 \quad (1.4)$$

donde indicamos con el subíndice 0 que l_0 es la longitud de un objeto medido en su sistema en reposo mientras l se refiere a la longitud medida en cualquier otro sistema. A la longitud l_0 se le llama longitud propia del objeto. Como $l \leq l_0$, suele recibir el nombre de *contracción de la longitud* (o *contracción de Lorentz*).

1.4. Transformaciones de Lorentz

1.4.1. Introducción histórica

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) fue un físico nativo de Arnhem, Holanda. Recibió un doctorado de física de la Universidad de Leyden en 1895 y en esta misma universidad fue profesor honorario.

En 1902, recibió el premio nobel en la física, compartido con uno de sus discípulos, Pieter Zeeman, quién había hecho las verificaciones de la teoría de Lorentz sobre la estructura atómica.

En 1903 desarrolló las famosas transformaciones de Lorentz, las cuales ayudaron a Einstein en la formulación de la teoría de la relatividad. También estudió el electromagnetismo, la gravitación, la termodinámica, la radiación y la energía cinética.

Es bastante justo, de parte del mundo de la física teórica, considerar a Hendrik Antoon Lorentz como el alma que completó la labor teórica pendiente de sus predecesores y preparó el terreno para que se genere una recepción a nuevas ideas con base en la teoría cuántica. En las transformaciones de Lorentz se encuentra, entre otras cosas, la velocidad de la luz.

Por lo tanto, al final del siglo XIX es cuando Lorentz dedujo sus ecuaciones de transformación.

1.4.2. Transformaciones de Lorentz para las coordenadas

Con todo lo que hemos visto hasta el momento, ya estamos en condiciones de averiguar las coordenadas x', y', z' y t' de un suceso medido en un sistema S' si sabemos las coordenadas x, y, z y el tiempo t de un suceso medido en un sistema S . Consideremos, por lo tanto, dos sistemas S y S' , en los cuales S está ligado al suelo y S' está ligado a un tren que viaja con velocidad v respecto a S . Puesto que las leyes de la Física son todas independientes de nuestra elección del origen y la orientación, somos libres de elegir ambos ejes OX y OX' a lo largo de la misma recta, paralela a v . Podemos incluso elegir los orígenes del tiempo de modo que $t = t' = 0$ en el momento en el que \mathcal{O}' pasa \mathcal{O} . Nos referimos a esta colocación de sistemas S y S' como la configuración estándar.

Ahora consideraremos un suceso en la posición x, y, z y tiempo t medido en S . Nuestro problema es calcular, en términos de x, y, z, t , las coordenadas x', y', z', t' del mismo suceso medido en S' .

En primer lugar, sabemos que $t=t'$ según la Mecánica Newtoniana. Por lo tanto, la Mecánica Newtoniana dice que la relación entre los dos sistemas de referencia viene dada por las transformaciones de Galileo, es decir,

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.5)$$

Estas cuatro expresiones transforman las coordenadas x, y, z, t de cualquier suceso observado en S en las correspondientes coordenadas x', y', z', t' observadas en S' .

La transformación de Galileo no puede ser la relación relativista correcta entre x, y, z, t y x', y', z', t' . Además se adecúa perfectamente con nuestra experiencia diaria y por tanto debe ser correcta cuando la velocidad v es pequeña comparada con c . Así, la relación correcta entre x, y, z, t y x', y', z', t' tendrá que reducirse a la relación de Galileo cuando v/c es pequeño.

Para obtener la relación correcta entre x, y, z, t y x', y', z', t' consideramos que las distancias perpendiculares a v son las mismas medidas en S y en S' . Así que

$$y' = y, \quad z' = z, \quad (1.6)$$

exactamente como en la transformación de Galileo. Para encontrar x' es útil preparar una explosión cuyas coordenadas estamos discutiendo para que produzca una pequeña quemadura en la pared del tren en el punto \mathcal{P}' donde ocurre. La distancia horizontal del origen \mathcal{O}' a la marca en \mathcal{P}' , medida en S' , es precisamente la coordenada deseada x' .

Luego, la misma distancia, medida en S , es $x - vt$ (puesto que x y vt son las distancias horizontales de \mathcal{O} a \mathcal{P}' y de \mathcal{O} a \mathcal{O}' en el instante t medidas en S). Así que,

de acuerdo con la fórmula de la contracción de la longitud $x - vt = x'/\gamma$, es decir

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (1.7)$$

Esto nos expresa x' en términos de x y t , y es la tercera de nuestras cuatro ecuaciones requeridas. Notemos que si v es pequeña, entonces $\gamma \approx 1$ y la relación (1.7) se reduce a la primera de las relaciones de Galileo, tal y como se pedía.

Por último, para obtener t' en términos de x, y, z, t , podemos repetir el argumento mediante el cual obtuvimos (1.7) pero con los papeles de \mathcal{S} y \mathcal{S}' invertidos. Es decir, dejamos a la explosión hacer una marca en el punto \mathcal{P} fijada a \mathcal{S} y, razonando como antes, tenemos que

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (1.8)$$

(Esto se puede obtener directamente de (1.7) cambiando x, t por x', t' y reemplazando v por $-v$). La ecuación (1.8) no es aún el resultado buscado, pero podemos combinarlo con (1.7) para eliminar x' y hallar t' . Insertando (1.7) en (1.8), obtenemos

$$x = \gamma[\gamma(x - vt) + vt'].$$

Despejando t' tenemos

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v} x,$$

o

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \quad (1.9)$$

Esta es la expresión buscada para t' en términos de x y t . Cuando v/c es mucho menor que 1 podemos despreciar el segundo término y, puesto que $\gamma \approx 1$, obtenemos $t' \approx t$ de acuerdo con la transformación de Galileo.

Si tenemos en cuenta (1.6), (1.7) y (1.9) obtendremos nuestras cuatro ecuaciones buscadas:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}). \end{cases} \quad (1.10)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *Transformación de Lorentz*, o *Transformación de Lorentz-Einstein*, en honor al físico holandés Lorentz, que las propuso por primera vez, y de Einstein, que fue el primero que las interpretó correctamente. La transformación de Lorentz es la modificación relativista correcta de la transformación de Galileo (1.5).

Si uno quiere saber x, y, z, t en términos de x', y', z', t' , se pueden permutar las variables con prima por aquellas sin prima, y viceversa, y cambiar v por $-v$, para dar

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}). \end{cases}$$

Estas ecuaciones se denominan la *Transformación inversa de Lorentz*.

1.4.3. Aplicaciones

En este apartado vamos a probar una aplicación muy interesante, que será ver que la ecuación de ondas electromagnética permanece invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

Para ello consideramos la *ecuación de ondas* en tres dimensiones

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0.$$

Por lo tanto vamos a pasar del sistema \mathcal{S}' al sistema \mathcal{S} y tenemos que las transfor-

maciones vienen dadas por las siguientes relaciones (que obtuvimos anteriormente):

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \end{cases}$$

con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

En primer lugar, tomamos derivadas parciales sobre las transformaciones de Lorentz y obtenemos los siguientes resultados preliminares:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Tenemos además:

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \dots = 0.$$

Ahora recurrimos a la regla de la cadena para derivadas parciales:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}.$$

Utilizando los resultados anteriores obtenidos con las ecuaciones de transformaciones de Lorentz, obtenemos el resultado siguiente para la derivada parcial de ϕ con respecto a la variable x :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial \phi}{\partial x'} - \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial \phi}{\partial t'}.$$

Tomando la segunda derivada parcial de la expresión anterior tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - \frac{2v}{c^2 - v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'}.$$

Recurriendo a la regla de la cadena y simplificando, obtenemos la primera derivada parcial de ϕ con respecto a la variable t :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial \phi}{\partial t'},$$

de lo cual obtenemos lo siguiente al tomar la segunda derivada parcial,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left(v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - \frac{2v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'}.$$

Por otra parte, tenemos que los siguientes resultados son los más fáciles de obtener y deben resultar obvios:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}.$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación de ondas electromagnética original, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} = 0.$$

Después de la transformación, esta ecuación es idéntica a la ecuación original. Se concluye entonces que la ecuación de ondas electromagnética permanece invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

Capítulo 2

Espacio de Minkowski

En este capítulo estudiaremos el espacio-tiempo de Minkowski con todas sus propiedades. La principal referencia que hemos utilizado en este capítulo será [6].

2.1. Introducción histórica

En física matemática, el espacio de Minkowski (o espacio-tiempo de Minkowski) es una combinación de espacio y tiempo euclidianos tridimensionales en una variedad de cuatro dimensiones donde el intervalo espacio-tiempo entre dos eventos es independiente del sistema de referencia inercial en el que se registran. Aunque en un principio desarrollado por el matemático Hermann Minkowski para las ecuaciones de electromagnetismo de Maxwell se demostró que la estructura matemática del espacio-tiempo de Minkowski es una consecuencia inmediata de los postulados de la Relatividad Especial.

El espacio de Minkowski está asociado con la teoría de la relatividad especial de Einstein, y es la estructura matemática más común sobre la cual se formula la relatividad especial. Mientras que las componentes individuales en el espacio y el tiempo euclidianos pueden diferir debido a la contracción de la longitud y la dilatación del tiempo, en el espacio-tiempo de Minkowski todos los sistemas de referencia estarán

de acuerdo en la distancia total en el espacio-tiempo entre eventos, debido a que trata el tiempo de manera diferente de lo que trata las 3 dimensiones espaciales, el espacio de Minkowski difiere del espacio euclidiano de cuatro dimensiones.

En el espacio euclidiano tridimensional, el grupo de isometrías es el grupo euclidiano. Este generado por rotaciones, reflexiones y traslaciones. Cuando el tiempo se modifica como una cuarta dimensión, se agregan las transformaciones adicionales de las traducciones en el tiempo y los impulsos galileanos. El grupo de todas estas transformaciones se llama grupo galileano. Todas las transformaciones galileanas conservan la distancia euclidiana tridimensional. Esta distancia es puramente espacial. Las diferencias de tiempo también se conservan por separado. Todo esto cambia en el espacio-tiempo de la relatividad especial, donde el espacio y el tiempo están entrelazados.

El espacio-tiempo está equipado con una forma bilineal indefinida no degenerada, llamada métrica de Minkowski, norma de Minkowski al cuadrado o producto interno de Minkowski en función del contexto.

El producto interno de Minkowski se utiliza para producir el intervalo de espacio-tiempo entre dos eventos cuando se les da su vector de diferencia de coordenadas como argumento. Conteniendo este producto interno, el modelo matemático del espacio-tiempo recibe el nombre de *espacio de Minkowski*. El análogo del grupo de Galileo para el espacio de Minkowski conservando el intervalo espacio-tiempo es el grupo de Poincarè.

Todo esto quiere decir que, el espacio-tiempo galileano y el espacio-tiempo de Minkowski son lo mismo. Se diferencian en que otras estructuras se definen en ellos. El primero tiene la función de distancia euclidiana y el tiempo (por separado) junto con sistemas inerciales cuyas coordenadas están relacionadas por transformaciones galileanas, mientras que el segundo tiene la métrica de Minkowski junto con los sistemas inerciales cuyas coordenadas están relacionadas por transformaciones de Poincarè.

2.1.1. Espacio-tiempo complejo de Minkowski

En 1905-1906 Poincarè mostró como las transformaciones de Lorentz pueden visualizarse como rotaciones ordinarias de la esfera euclidiana de cuatro dimensiones ya que se tomó el tiempo para ser una cuarta coordenada imaginaria espacio-tiempo, ict , donde c es la velocidad de la luz e i es la unidad imaginaria.

En la relatividad especial se establece que la cantidad

$$x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

En realidad, Poincarè establece $c = 1$ por conveniencia. Las rotaciones en planos generados por dos vectores de unidades espaciales aparecen en el espacio de coordenadas, así como en el espacio-tiempo físico como rotaciones euclidianas, y se interpretan en el sentido ordinario.

En un plano generado por un vector unitario espacial y un vector unitario temporal formalmente, una rotación sigue teniendo el sentido de Lorentz en el espacio-tiempo físico con coordenadas inerciales reales. La analogía con las rotaciones euclidianas es sólo parcial ya que el radio de la esfera es realmente imaginario, lo que convierte las rotaciones en rotaciones en el espacio hiperbólico.

Esta idea fue detallada por Minkowski en un artículo en alemán en 1908 titulado “*Las ecuaciones fundamentales para procesos electromagnéticos en cuerpos en movimiento*”. El uso de esta formulación reafirmó la teoría de la relatividad de Einstein. En particular, al reafirmar las ecuaciones de Maxwell como un conjunto simétrico de ecuaciones en las cuatro variables (x, y, z, ict) combinadas con variables vectoriales redefinidas para cantidades electromagnéticas, pudo mostrar su invarianza bajo la transformación de Lorentz. También usó la notación matricial por primera vez en este contexto. A partir de su reformulación, concluyó que el tiempo y el espacio debían ser tratados por igual, y así surgió su concepto de eventos que tienen lugar en espacio-tiempo unificado de cuatro dimensiones.

2.1.2. Espacio-tiempo real de Minkowski

En un desarrollo posterior, Minkowski dio una formulación alternativa de esta idea que usaba una coordenada en tiempo real en lugar de una imaginaria, que representaba las cuatro variables (x, y, z, t) de espacio y tiempo en forma coordinada en un espacio vectorial real de cuatro dimensiones. Los puntos en este espacio corresponden a eventos en el espacio-tiempo. En este espacio-tiempo, hay un cono de luz definido con cada punto, y los eventos se clasifican por su relación con el cono de luz como espaciales o temporales. Principalmente, esta visión del espacio-tiempo es la que se usa hoy en día, aunque la visión mas antigua que involucra el tiempo imaginario también ha influido en la relatividad especial.

La herramienta principal de Minkowski es el llamado *diagrama de Minkowski* y lo utiliza para definir conceptos y demostrar propiedades de las transformaciones de Lorentz, y para proporcionar una interpretación geométrica de la generalización de la mecánica newtoniana a la mecánica relativista.

2.2. Diagrama de Minkowski

El concepto unificado de espacio-tiempo, introducido por H. Minkowski en 1908, es una mera simplificación matemática. El espacio y el tiempo son completamente diferentes, se miden de formas muy distintas y los percibimos también de distinto modo.

Ahora bien, en realidad no se analizan las localizaciones de objetos en el espacio, sino sucesos que están localizados en el espacio y en el tiempo: para especificar un suceso hay que decir dónde (tres dimensiones espaciales) y cuándo (una dimensión más, el tiempo). Minkowski propuso concebir el mundo como una red espaciotemporal tetradimensional. Esta visión tiene dos ventajas:

Primero, nos lleva a una resolución gráfica muy sencilla y práctica de las trans-

formaciones de Lorentz, haciendo uso de los *diagramas espacio-tiempo* o *diagramas de Mikowski*, que estudiaremos a continuación.

Segundo, los diagramas espacio-tiempo nos permiten visualizar la película completa de la evolución de un objeto en el espacio y el tiempo: su línea de universo.

2.2.1. Observador en reposo

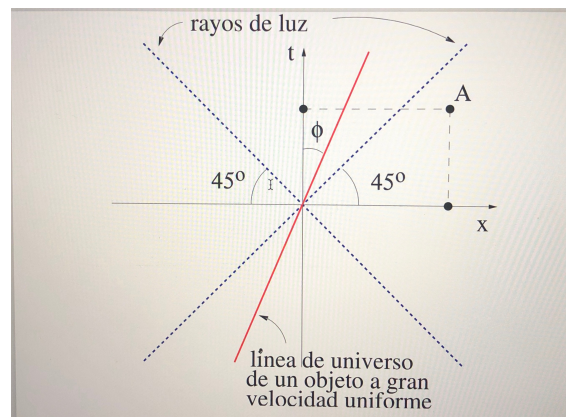


Figura 2.1: Diagrama espacio-tiempo para un observador \mathcal{O}

En realidad nos referimos a un observador inercial cualquiera, ya que, según el principio de relatividad no existe un observador privilegiado. Lo llamamos así para especificar el observador que se halla en reposo respecto a la vía (considerando el ejemplo del tren visto anteriormente). Nótese que un observador no es más que un sistema de referencia, unos ejes de coordenadas espaciotemporales (figura 2.1)

Localizamos un suceso A mediante un punto cuyas coordenadas espacial, x , y temporal, t , se pueden leer sobre los ejes de coordenadas del diagrama espacio-tiempo (Fig. 2.1). La coordenada t indica el tiempo propio del suceso y la x es la distancia medida desde el origen que se toma como punto de referencia. Recuérdese que t no es la hora en la que \mathcal{O} ve el suceso sino el tiempo medido en el sistema común de tiempos.

El eje x es el conjunto de sucesos simultáneos que ocurren a $t = 0$. Una paralela

cualquiera al eje x ($t = T$) indica sucesos simultáneos que ocurren en otro instante de tiempo T .

El eje t es el conjunto de sucesos que ocurren en el mismo lugar, $x = 0$. Cada paralela al eje t ($x = X$) indica sucesos que ocurren en otro lugar X .

Elegiremos las escalas de modo que $c = 1$. De este modo, longitudes y tiempos tienen las mismas unidades (metros, por ejemplo). Así, $t = 1$ m es el tiempo que tarda la luz en recorrer un metro según \mathcal{O} (un metro-luz).

Los rayos luminosos (líneas de universo de la luz) se representan por líneas inclinadas 45° , pues para ellos $t = x$ ó $t = -x$ (según la luz viaje de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, respectivamente), ya que hemos tomado $c = 1$.

La línea de universo de un objeto que se mueva con velocidad uniforme v es una línea recta ($t = v/x$) que forma un ángulo $\phi = \arctan v$ con el eje t . El signo es positivo o negativo según se mueva de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, respectivamente. Veremos que el ángulo ϕ en valor absoluto es siempre $|\phi| < 45^\circ$. Si la línea de universo del objeto no es recta entonces el movimiento no es uniforme.

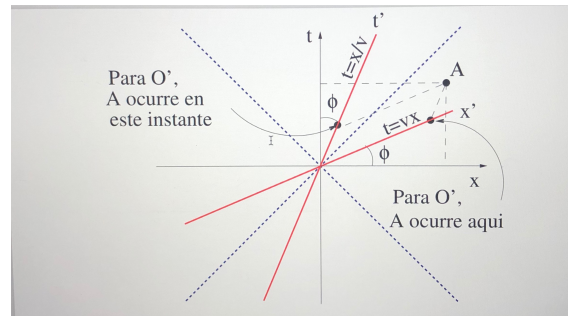
2.2.2. Observador en movimiento relativo: Transformaciones de Lorentz

Hasta ahora hemos descrito las cosas tal y como las mediría un observador en reposo respecto a la vía. Veamos cómo dibujar el diagrama espacio-tiempo para otro observador \mathcal{O}' , que se mueve uniformemente en un vagón a gran velocidad, v , según el eje x . Seguimos tomando $c = 1$. Hacemos coincidir, por simplicidad, el origen de coordenadas de ambos observadores.

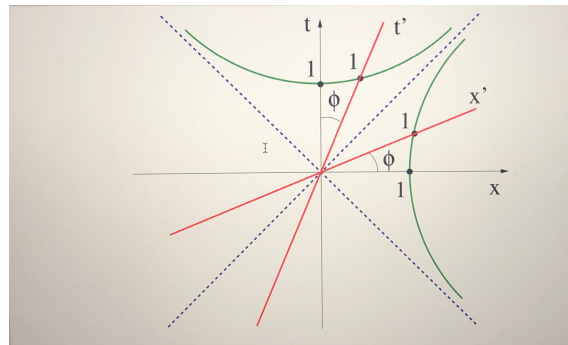
El eje x' es el conjunto de sucesos simultáneos que ocurren a $t' = 0$, lo que es lo mismo que la recta $t = vx$. Por tanto, forma un ángulo $\phi = \arctan v$ con el eje x .

El eje t' es el conjunto de sucesos que ocurren en $x' = 0$, lo que es lo mismo que la recta $t = \frac{1}{v}x$. Por tanto, forma el mismo ángulo $\phi = \arctan v$, esta vez el eje t .

Las coordenadas espaciotemporales de un suceso, por ejemplo el suceso A de antes, se hallan trazando paralelas a los ejes x e y , que ahora no serán perpendiculares entre sí (Fig. 2.2).

Figura 2.2: Diagrama espacio-tiempo para un observador móvil O'

2.2.3. El intervalo y la calibración de los ejes

Figura 2.3: Calibrado de los ejes del observador O'

No todo es relativo al observador. Ya hemos visto que la velocidad de la luz es la misma para cualquier observador. Además hay otra cantidad muy importante que también es invariante. Se trata del intervalo entre dos sucesos, que cualquier observador puede determinar fácilmente a partir de sus medidas de la localización en el espacio y en el tiempo de dos sucesos cualesquiera. Supongamos, por simplicidad, que uno de los dos sucesos es el origen espaciotemporal, que lo tomamos coincidente para dos observadores inerciales, \mathcal{O} y \mathcal{O}' , y sean (x, t) y (x', t') las coordenadas de otro suceso A , según cada observador. Entonces se define el *intervalo* como

$$\Delta s^2 \equiv (ct)^2 - x^2.$$

Es fácil comprobar usando las transformaciones de Lorentz que esta igualdad se cumple.

El intervalo nos ayuda a calibrar los ejes: las distancias entre las marcas de referencia

de los ejes de cada observador no miden lo mismo (Fig. 2.3):

Para encontrar la relación entre las marcas de los ejes temporales (recordemos que tomamos $c = 1$) basta mirar dónde cortan las hipérbolas $t^2x^2 = 1$ al eje t' , dado por $t = \frac{1}{v}x$.

Para los ejes espaciales hay que mirar dónde cortan las hipérbolas $t^2x^2 = 1$ al eje x , dado por $t = vx$.

2.3. Estructura

En esta sección vamos a ver cual es y explicaremos la estructura de los vectores en el espacio de Minkowski.

Por una parte tenemos que v es la velocidad, y x, y, z son coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional, c es la constante que representa el límite de velocidad universal, t es el tiempo y el vector de cuatro dimensiones

$$v = (ct, x, y, z) = (ct, r)$$

se clasifica según el signo de $c^2t^2 - r^2$. Un vector es *temporal* si $c^2t^2 > r^2$, *espacial* si $c^2t^2 < r^2$, y *nulo* si $c^2t^2 = r^2$. Esto también puede expresarse en términos del signo de la norma de v pero dependería de la signatura. La clasificación de cualquier vector será la misma en todos los sistemas de referencia que están relacionados por una transformación de Lorentz debido a la invarianza del intervalo.

Por ejemplo, el conjunto de todos los vectores nulos en un evento del espacio de Minkowski constituye el *cono de luz* de ese evento. Dado un vector temporal v , hay una línea de velocidad constante asociada con él, representada por una línea recta en un diagrama de Minkowski. Una vez que se elige una dirección de tiempo, los vectores temporales y nulos se pueden descomponer aún más en varias clases.

Para vectores temporales tenemos:

1. *Vectores temporales dirigidos hacia el futuro* cuya primer componente es positiva.
2. *Vectores temporales dirigidos por el pasado* cuya primer componente es nega-

tiva.

Los vectores nulos los dividiremos en tres clases:

1. *Vector cero*, cuyas componentes en cualquier base son $(0,0,0)$ (origen).
2. *Vectores nulos dirigidos hacia el futuro* cuya primer componente es positiva (cono de luz superior).
3. *Vectores nulos dirigidos al pasado* cuya primer componente es negativa.

Junto con los vectores espaciales, hay 6 clases en total.

Una base ortonormal para el espacio de Minkowski consiste necesariamente en un vector temporal y tres vectores unitarios. Si se desea trabajar con bases no ortonormales, es posible tener otras combinaciones de vectores. Por ejemplo, uno puede construir fácilmente una base (no ortonormal) constituida completamente por vectores nulos, llamada base nula.

Los campos vectoriales se denominan *temporales*, *espaciales* o *nulos* si los vectores asociados son temporales, espaciales o nulos en cada punto donde se define el campo.

2.4. Propiedades de los vectores temporales

Los vectores temporales tienen especial importancia en la teoría de la relatividad, ya que corresponden a eventos que son accesibles para el observador en $(0,0,0,0)$ con una velocidad menor que la de la luz. De mayor interés son los vectores temporales que se dirigen de manera similar, es decir, todos en los conos hacia adelante o hacia atrás. Dichos vectores tienen varias propiedades que no comparten los vectores espaciales. Estos surgen porque los conos temporales hacia adelante y hacia atrás son convexos, mientras que la región similar espacial no es convexa.

2.4.1. Producto Escalar

Definición 2.1 *El producto escalar de dos vectores temporales $u_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ y $u_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ es*

$$(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2 = c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

Una propiedad importante es que el producto escalar de dos vectores temporales similares es siempre positivo. Esto se puede ver a partir de la desigualdad de Cauchy invertida. De ello se deduce que si el producto escalar de dos vectores es cero, al menos uno de estos debe ser no temporal.

El producto escalar de dos vectores espaciales puede ser positivo o negativo, como se puede ver al considerar el producto de dos vectores espaciales que tienen componentes espaciales ortogonales y tiempos de signos diferentes o iguales.

Utilizando esta propiedad de positividad de los vectores similares temporales, es fácil verificar que una suma lineal con coeficientes positivos de vectores similares temporales también se dirige al mismo tiempo (la suma permanece dentro del cono de luz debido a la convexidad).

2.4.2. Norma y desigualdad de Cauchy invertida

Definición 2.2 *La norma de un vector temporal $u = (t, x, y, z)$ se define como*

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

La desigualdad de Cauchy invertida es otra consecuencia de la convexidad de cualquier dominio de vectores temporales similares. Para dos vectores distintos temporales similares u_1, u_2 se tiene

$$(u_1, u_2) > \|u_1\| \cdot \|u_2\|$$

o algebraicamente,

$$c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 > \sqrt{(c^2 t_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)(c^2 t_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2)}$$

De esto se puede ver la propiedad de positividad del producto escalar.

2.4.3. Desigualdad del triángulo invertido

Para dos vectores temporales de dirección similar u y w , se cumple la desigualdad

$$\|u + w\| \geq \|u\| + \|w\|,$$

donde la igualdad se tiene cuando dos vectores son linealmente dependientes.

La prueba utiliza la definición algebraica con la desigualdad de Cauchy invertida:

$$\|u + w\|^2 = \|u\|^2 + 2(u, w) + \|w\|^2 \geq \|u\|^2 + 2\|u\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|u\| + \|w\|)^2$$

Si tomamos raíces cuadradas a ambos lados de la desigualdad obtenemos la desigualdad buscada.

2.5. Estructura Matemática

A continuación se supone que el espacio-tiempo está dotado de un sistema de coordenadas correspondiente a una referencia inercial. Esto proporciona un origen, que es necesario para poder referirse al espacio-tiempo como modelo de un espacio vectorial. No está realmente motivado físicamente por que un origen canónico debería existir. Uno puede tener menos estructura, la de un espacio afín, pero esto complicaría innecesariamente la discusión y no se reflejaría en el espacio-tiempo plano.

Para una visión general, el *espacio de Minkowski* es un espacio vectorial real de 4 dimensiones equipado con una forma bilineal simétrica no degenerada en el espacio tangente en cada punto del espacio tiempo, aquí simplemente llamado el producto interno Minkowski, con signatura métrica $(+ - - -)$ o $(- + + +)$. El espacio tangente

en cada evento es un espacio vectorial de la misma dimensión que el espacio-tiempo, es decir, 4 dimensiones.

2.5.1. Vectores tangentes

En la práctica, no es necesario preocuparse por los espacios tangentes. La naturaleza del espacio vectorial del espacio de Minkowski permite la identificación canónica de vectores en espacios tangentes en puntos (eventos) con vectores (puntos, eventos) en el mismo espacio Minkowski. Estas identificaciones se realizan rutinariamente en matemáticas. Se pueden expresar formalmente en coordenadas cartesianas como

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \longleftrightarrow x^0 e_0|_p + x^1 e_1|_p + x^2 e_2|_p + x^3 e_3|_p \longleftrightarrow x^0 e_0|_q + x^1 e_1|_q + x^2 e_2|_q + x^3 e_3|_q$$

con vectores base en los espacios tangentes definidos por

$$e_\mu|_p = \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p \quad \text{o} \quad e_0|_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Aquí p y q son dos eventos y la última identificación se conoce como transporte paralelo. La primera identificación es la identificación canónica de vectores en el espacio tangente en cualquier punto con vectores en el mismo espacio. La aparición de vectores base en espacios tangentes como operadores diferenciales de primer orden se debe a esta identificación. Está motivado por la observación de que un vector tangente geométrico puede asociarse de manera individual con un operador derivada direccional en el espacio de funciones. Esto se extiende a una definición de vectores tangentes múltiples no necesariamente integrados en \mathbb{R}^n . Esta definición de vectores tangentes no es la única posible ya que por ejemplo también se pueden usar n -tuplas ordinarias.

Definición 2.3 *Se puede definir un vector tangente en un punto p , en este caso especializado para coordenadas cartesianas en referencias de Lorentz, como vectores columna, v , 4×1 , asociados a cada referencia de Lorentz relacionados por transformaciones de Lorentz Λ de modo que el vector v en una referencia relacionada con otra referencia por Λ se transforma de acuerdo con $v \rightarrow \Lambda v$. Esta es la misma*

forma en que se transforman las coordenadas x^μ . Explícitamente,

$$\begin{aligned}x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \\v'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu v^\nu.\end{aligned}$$

Esta definición es equivalente a la definición dada anteriormente bajo un isomorfismo canónico.

Para algunos propósitos, es deseable identificar vectores tangentes en un punto p con vectores de velocidad de desplazamiento en p , lo cual es admisible esencialmente por la misma identificación canónica.

2.5.2. Signatura de la métrica

La *signatura* métrica se refiere al signo del producto interno de Minkowski cuando se le da una base de vectores espaciales y temporales como argumentos.

Veamos la manera de la elección de la signatura métrica:

En general, los matemáticos y los relativistas generales prefieren los vectores espaciales para obtener un signo positivo, $(- + + +)$, mientras que los físicos de partículas tienden a preferir los vectores temporales para producir un signo positivo, $(+ - - -)$. Autores que cubren varias áreas de la física, como Steven Weinberg y Landau y Lipshitz $(- + + +)$ y $(+ - - -)$ respectivamente) se adhieren a una opción independiente del tema. Los argumentos a favor para la primera convención anterior incluyen continuidad del caso euclidiano correspondiente al límite no relativista $c \rightarrow \infty$. Los argumentos a favor de la última convención incluyen que los signos $-$, que de otro modo se encuentran en todas partes en la física de partículas, desaparecen. Sin embargo, otros autores, especialmente de textos introductorios, no eligen una signatura en absoluto, sino que optan por coordinar el espacio-tiempo de manera que la coordenada del tiempo sea imaginaria. Esto elimina la necesidad de la introducción explícita de un tensor métrico, y no es necesario preocuparse por los vectores covariantes y los vectores contravariantes que se describen mas adelante. En cambio, el producto interno se efectúa mediante una extensión directa del producto escalar en \mathbb{R}^3 a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}$. Esto funciona en el espacio-tiempo plano de la relatividad especial, pero no en el espacio-tiempo curvo de la relatividad general.

2.5.3. Métricas pseudo-euclidianas

Excepto para los vectores temporales, el producto interno de Minkowski no es un producto interno, ya que no es definido positivo, es decir, la forma cuadrática $\eta(v, v)$ no necesita ser positiva para v . La condición definida positiva ha sido reemplazada por la condición más débil de la no degeneración. Se dice que la forma bilineal es indefinida. La *métrica de Minkowski* η es el tensor métrico del espacio de Minkowski. Es una métrica pseudo-euclidiana, o más generalmente una métrica pseudo-riemanniana constante en coordenadas cartesianas. Como tal, es una forma bilineal simétrica no degenerada, un tensor de tipo $(0,2)$. Acepta dos argumentos, u_p, v_p , vectores en T_pM , $p \in M$, que es el espacio tangente de p en M . Debido a la identificación canónica mencionada anteriormente de T_pM con M , acepta los argumentos u, v con u y v en M .

Como convención de notación, los vectores v en M , llamados 4-vectores, se denotan en cursiva.

La definición

$$u \cdot v = \eta(u, v)$$

produce una estructura similar a un producto interno en M llamado *producto interno de Minkowski*, similar al producto interno euclidiano, pero describe una geometría diferente. También se le llama el producto relativista. Si los dos argumentos son iguales,

$$u \cdot u = \eta(u, u) \equiv \|u\|^2 \equiv u^2,$$

la cantidad resultante se llamará la *norma Minkowski* al cuadrado.

El producto interno de Minkowski satisface las siguientes propiedades:

1. Linealidad en el primer argumento:

$$\eta(au + v, w) = a\eta(u, w) + \eta(v, w), \forall u, v \in M, \forall a \in \mathbb{R}$$

2. Simetría: $\eta(u, v) = \eta(v, u)$

3. No degeneración: $\eta(u, v) = 0, \forall v \in M \Rightarrow u = 0$

Las dos primeras condiciones implican bilinealidad. La diferencia entre un producto pseudo-euclidiano y un producto interno propiamente dicho es que no se requiere

que el primero sea definido positivo, es decir, se permite $\eta(u, u) < 0$.

La característica más importante del producto interno y la norma al cuadrado es que estas son cantidades que no se ven afectadas por las transformaciones de Lorentz. De hecho, se puede tomar como la propiedad definitoria de una transformación de Lorentz que preserve el producto interno. Este enfoque se toma de manera más general para todos los grupos clásicos definidos de esta manera en el grupo lineal general. En nuestro caso, el grupo clásico $O(3,1)$ (el *grupo de Lorentz*) está formado por las matrices que conservan el producto interior η , que también se expresa como una matriz, como se mostrará a continuación.

Se dice que dos vectores v y w son *ortogonales* si $\eta(v, w) = 0$.

Un vector e se llama vector *unitario* si $\eta(e, e) = \pm 1$. Una base para M formada por vectores unitarios mutuamente ortogonales se denomina base *ortonormal*.

Para un sistema inercial dado, una base ortonormal en el espacio, se puede combinar con un vector unitario temporal para formar una base ortonormal en el espacio de Minkowski. El número de vectores unitarios positivos y negativos en cualquiera de tales bases es un par fijo de números, igual a la signatura de la forma bilineal asociada con el producto interno. Esta es la ley de inercia de Sylvester.

La métrica de Minkowski es una métrica pseudo-Riemanniana, mas específicamente. El término métrica de Lorentz se reserva para el espacio-tiempo plano de 4 dimensiones con la ambigüedad de la convención de la signatura.

2.5.4. Métrica de Minkowski

Del segundo postulado de la relatividad especial, junto con la homogeneidad del espacio-tiempo y la isotropía del espacio, se deduce que el intervalo espacio-tiempo entre dos eventos arbitrarios llamados 1 y 2 es:

$$\sqrt{c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}$$

La invarianza del intervalo bajo transformaciones coordinadas entre referencias inerciales se deriva de la invarianza de

$$\pm[c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2]$$

siempre que las transformaciones sean lineales. Esta forma cuadrática se puede usar para definir una forma bilineal

$$u \cdot v = \pm[c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2]$$

a través de la identidad de polarización. Esta forma bilineal a su vez puede escribirse como

$$u \cdot v = u^t [\eta] v$$

donde $[\eta]$ es una matriz 4×4 asociada con η . La matriz se obtiene de la forma bilineal explícita como

$$\eta = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

usando

$$u \cdot v = \eta(u, v).$$

Para mayor precisión y presentación mas corta, la signatura $(- + + +)$ se adopta a continuación. Esta elección no tiene implicaciones físicas. El grupo de simetría que conserva la forma bilineal con una opción de signatura es isomorfo con el grupo de simetría que conserva la otra opción de signatura. Esto significa que ambas opciones están de acuerdo con los dos postulados de relatividad. Cambiar entre las dos convenciones es sencillo, basta sustituir η por $-\eta$.

Formalismo de la métrica de Minkowski

El propósito actual es mostrar semi-rigurosamente cómo se puede aplicar formalmente la métrica de Minkowski a dos vectores y obtener un número real, es decir, mostrar el papel de las diferenciales y como desaparecen en un cálculo.

Veamos un enfoque formal de la métrica de Minkowski:

Una versión completa de la métrica de Minkowski en coordenadas como un campo tensorial en el espacio-tiempo es de la forma

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \odot dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Vamos a dar una breve explicación de cómo se obtiene esta versión de la métrica de Minkowski.

Las diferenciales de coordenadas son campos de 1-formas. Se definen como la derivada exterior de las funciones de coordenadas x^μ . Estas cantidades evaluadas en un punto p proporcionan una base para el espacio cotangente en p . El producto tensorial (denotado por el símbolo \otimes) produce un campo tensorial de tipo $(0,2)$, es decir, el tipo que toma dos vectores contravariantes como argumentos. En el lado derecho, se ha tomado el producto simétrico (denotado por el símbolo \odot). La igualdad se mantiene ya que, por definición, la métrica de Minkowski es simétrica. La notación en el extremo derecho también se usa a veces. Los vectores tangentes son, en este formalismo, dados en términos de una base de operadores diferenciales de primer orden,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p,$$

donde p es un evento. Este operador aplicado a una función f nos da la derivada direccional de f en p en la dirección de aumentar x^μ . Proporcionan una base para el espacio tangente en p . La derivada exterior df de una función f es un campo de referencia, es decir, una asignación de un vector cotangente a cada punto p de manera que

$$df(X) = Xf$$

para cada campo vectorial X . Un campo vectorial es una asignación de un vector tangente a cada punto p . En un sistema de coordenadas X se puede expresar en cada punto p en la base dada por $\left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p$.

Aplicando esto con $f = x^\mu$ y $X = \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p$, se obtiene

$$dx^\mu \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu.$$

Dado que esta relación se mantiene en cada punto p , los covectores $dx^\mu|_p$ forman una base para el espacio cotangente en cada p y las bases $dx^\mu|_p$ y $\left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_p$ son duales

entre sí, es decir,

$$dx^\mu|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_p \right) = \delta_\nu^\mu$$

en cada p . Además, uno tiene

$$\alpha \otimes \beta(a, b) = \alpha(a)\beta(b)$$

para formas generales en un espacio tangente, α, β , y vectores tangentes generales, a, b .

Por lo tanto, cuando el tensor métrico recibe dos campos de vectores a, b , ambos expresados en términos de la base de coordenadas de los campos de vectores, tenemos el siguiente resultado

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu(a, b) = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu,$$

donde a^μ, b^ν son las funciones coeficientes de los campos vectoriales. La ecuación anterior se cumple en cada punto p , y se puede considerar para la métrica de Minkowski en p aplicada a dos vectores tangentes en p .

Tal y como hemos mencionado anteriormente, en un espacio vectorial, como el que modela el espacio-tiempo de la relatividad especial, los vectores tangentes se pueden identificar canónicamente con vectores en el mismo espacio, y viceversa. Esto significa que los espacios tangentes en cada punto se identifican canónicamente con elementos del espacio vectorial. Esto nos explica como el lado derecho de la ecuación anterior puede emplearse directamente, sin tener en cuenta el punto del espacio-tiempo.

Toda esta situación cambia al pasar de la relatividad especial a la relatividad general. Se tiene

$$g(p)_{\mu\nu} dx^\mu|_p dx^\nu|_p(a, b) = g(p)_{\mu\nu} a^\mu b^\nu,$$

donde g sigue siendo un tensor métrico pero ahora depende del punto p en el espacio-tiempo y es una solución de las ecuaciones de Einstein. Además a, b deben ser vectores tangentes en el punto p y ya no se pueden mover libremente de punto.

2.5.5. Base estándar

Definición 2.4 Una base estándar para el espacio de Minkowski es un conjunto de cuatro vectores mutuamente ortogonales $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ de modo que

$$-\eta(e_0, e_0) = \eta(e_1, e_1) = \eta(e_2, e_2) = \eta(e_3, e_3) = 1.$$

Estas condiciones se pueden escribir de forma compacta usando

$$\eta(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}.$$

En relación con una base estándar, tenemos que las componentes de un vector v se escriben (v^0, v^1, v^2, v^3) donde la notación de Einstein se usa para escribir

$$v = v^\mu e_\mu.$$

La componente v^0 se denomina componente temporal de v , mientras que las otras tres componentes se denominan componentes espaciales. Las componentes espaciales de un 4-vector v se pueden identificar con un 3-vector $v = (v_1, v_2, v_3)$.

En términos de componentes, el producto interno de Minkowski entre dos vectores v y w viene dado por

$$\eta(v, w) = \eta_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = -v^0 w^0 + v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3$$

y

$$\eta(v, v) = \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2.$$

En este caso se utilizó la reducción de un índice con la métrica.

2.6. Generalizaciones

Una variedad lorentziana es una generalización del espacio de Minkowski. El número total de dimensiones espacio-tiempo no está restringido a cuatro (2 o más)

y una variedad Lorentziana no necesita ser plana, es decir, permite la curvatura.

Espacio generalizado de Minkowski

El espacio de Minkowski se refiere a una formulación matemática en cuatro dimensiones. Sin embargo, las matemáticas se pueden ampliar o simplificar fácilmente para crear un espacio de Minkowski generalizado análogo en cualquier cantidad de dimensiones. Si $n \geq 2$, el espacio de Minkowski n -dimensional es un espacio vectorial de dimensión real n en el que hay una métrica de signatura constante $(n-1, 1)$ ó $(1, n-1)$. Estas generalizaciones se usan en teorías donde se supone que el espacio-tiempo tiene más o menos de cuatro dimensiones.

Curvatura

Como un espacio-tiempo plano, las tres componentes espaciales del espacio-tiempo de Minkowski siempre obedecen al Teorema de Pitágoras. El espacio de Minkowski es una base adecuada para la relatividad especial, una buena descripción de los sistemas físicos sobre distancias finitas en sistemas sin gravitación significativa. Sin embargo, para tener en cuenta la gravedad, los físicos utilizan la teoría de la relatividad general, que se formula en las matemáticas de una geometría no euclidiana. Cuando esta geometría se usa como modelo de espacio físico, se conoce como *espacio curvo*. Precisamente, la curvatura representa la gravedad.

Incluso en un espacio curvo, el espacio de Minkowski sigue siendo una buena descripción en una región infinitesimal que rodea cualquier punto, para el cual el espacio tangente a cualquier punto es un espacio de Minkowski de 4 dimensiones. Por lo tanto, la estructura del espacio de Minkowski sigue siendo esencial en la descripción de la relatividad general.

Geometría

Es significado del término geometría para el espacio de Minkowski depende en gran medida del contexto. El espacio de Minkowski no está dotado de una geo-

metría euclidiana, ni de ninguna de las geometrías riemannianas generalizadas con curvatura intrínseca, las expuestas por los espacios modelo en geometría hiperbólica (curvatura negativa) y la geometría modelada por la esfera (curvatura positiva). La razón es la indefinición de la métrica de Minkowski. El espacio de Minkowski no es, en particular, un espacio métrico ni una variedad riemanniana con una métrica riemanniana. Sin embargo, el espacio de Minkowski contiene subvariedades dotadas de una métrica riemanniana que produce geometría hiperbólica.

Los espacios modelo de geometría hiperbólica de baja dimensión, digamos 2 o 3, no pueden embeberse isométricamente en el espacio euclidiano con una dimensión más, es decir, \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^4 respectivamente, con la métrica euclidiana y, lo que impide la visualización fácil. En comparación, los espacios modelo con curvatura positiva son solo esferas en el espacio euclidiano de una dimensión superior. Sin embargo, resulta que estos espacios hiperbólicos pueden embeberse isométricamente en espacios de una dimensión más cuando el espacio de inclusión está dotado con la métrica de Minkowski η .

Podemos definir $H_R^{1(n)} \subset M^{n+1}$ como la lámina superior del hiperboloide en el espacio de Minkowski generalizado de dimensión $n+1$, es decir

$$H_R^{1(n)} = \{(ct, x^1, \dots, x^n) \in M^n : c^2t^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2 = R^2, ct > 0\}.$$

Esta es una de las hipersuperficies de transitividad del grupo generalizado de Lorentz. La métrica inducida en esta subvariedad será

$$h_R^{1(n)} = i^*\eta$$

siendo η la métrica de Minkowski, es una métrica riemanniana. Con esta métrica $H_R^{1(n)}$ es una variedad riemanniana.

Uno de los espacios modelo de la geometría riemanniana es el espacio hiperbólico. Es un espacio de curvatura negativa constante $-1/R^2$. El 1 en el índice superior se refiere a una enumeración de los diferentes espacios modelo de geometría hiperbólica, y el n para su dimensión.

Capítulo 3

Operador de d'Alembert

En este capítulo introduciremos el operador de d'Alembert en el espacio de Minkowski, junto con la ecuación de ondas para cuerdas vibrantes. Las principales referencias de este capítulo son [1] y [3]. El lector que quiera obtener una visión más profunda sobre este operador puede consultar [4].

En relatividad especial, electromagnetismo y teoría de ondas, el *operador de d'Alembert* (denotado por un recuadro \square) también llamado *d'Alembertiano*, *operador de ondas* u *operador de caja*, es el operador de Laplace del espacio de Minkowski. El operador lleva el nombre del matemático y físico francés Jean le Rond d'Alembert. En el espacio de Minkowski, en coordenadas estándar (t, x, y, z) , tiene la forma

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Aquí $\nabla^2 := \Delta$ es el Laplaciano tridimensional y $g^{\mu\nu}$ es la métrica inversa de Minkowski con

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ para } \mu \neq \nu$$

Tenemos que tener en cuenta que los índices de μ y ν varían de 0 a 3. Por lo tanto hemos asumido unidades tales que la velocidad de la luz es $c = 1$. (Algunos físicos

utilizan la signatura métrica negativa $(- + + +)$ con $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$. Las transformaciones de Lorentz dejan la métrica de Minkowski invariante, por lo que el d'Alembertiano produce un escalar de Lorentz. Las expresiones de coordenadas anteriores siguen siendo válidas para las coordenadas estándar en cada sistema inercial.

Por otra parte, tenemos una gran variedad de notaciones para el d'Alembertiano. El más común es el símbolo del cuadrado (\square) cuyos cuatro lados representan las cuatro dimensiones del espacio-tiempo.

En el siguiente apartado vamos a ver un ejemplo de la resolución de la ecuación de ondas para pequeñas vibraciones.

3.1. Cuerda vibrante finita

Consideramos la ecuación de ondas en una dimensión para pequeñas vibraciones,

$$\square_c u(x, t) = u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

es decir, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ definida para $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$.

Este problema describe la propagación de ondas transversales a lo largo de una línea, la cual hacemos coincidir con el eje X . En este contexto $u(x, t)$ representa la desviación del eje X de la cuerda (su altura) en el punto x al tiempo t , es decir, $u(x, t)$ describe el desplazamiento. La constante c será la magnitud de la velocidad de propagación de las ondas sobre la línea.

Para resolver esta ecuación se puede llevar a cabo un cambio de variables independientes

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(x, t), \\ \eta &= \eta(x, t). \end{aligned}$$

Si las introducimos en $u(x, t)$ se obtiene $u(\mu(x, t), \eta(x, t))$. Ahora, usamos la regla

de la cadena para derivar u respecto a x y a t . De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}u_x &= u_\mu \mu_x + u_\eta \eta_x, \\u_t &= u_\mu \mu_t + u_\eta \eta_t.\end{aligned}$$

Derivando nuevamente se tiene

$$u_{xx} = u_{\mu x} \mu_x + u_\mu \mu_{xx} + u_{\eta x} \eta_x + u_\eta \eta_{xx}, \quad (3.2)$$

$$u_{tt} = u_{\mu t} \mu_t + u_\mu \mu_{tt} + u_{\eta t} \eta_t + u_\eta \eta_{tt}, \quad (3.3)$$

en donde las derivadas mixtas $u_{\mu x}$, $u_{\eta x}$, $u_{\mu t}$, $u_{\eta t}$ deben calcularse usando la regla de la cadena ya que u_μ y u_η son funciones de $(\mu(x, t), \eta(x, t))$. Se obtiene

$$u_{\mu x} = u_{\mu\mu} \mu_x + u_{\mu\eta} \eta_x, \quad (3.4)$$

$$u_{\eta x} = u_{\eta\mu} \mu_x + u_{\eta\eta} \eta_x, \quad (3.5)$$

$$u_{\mu t} = u_{\mu\mu} \mu_t + u_{\mu\eta} \eta_t, \quad (3.6)$$

$$u_{\eta t} = u_{\eta\mu} \mu_t + u_{\eta\eta} \eta_t. \quad (3.7)$$

Si sustituimos (3.4) y (3.5) en (3.2) tenemos

$$\begin{aligned}u_{xx} &= (u_{\mu\mu} \mu_x + u_{\mu\eta} \eta_x) \mu_x + u_\mu \mu_{xx} + (u_{\eta\mu} \mu_x + u_{\eta\eta} \eta_x) \eta_x + u_\eta \eta_{xx} = \\&= u_{\mu\mu} \mu^2(x) + u_{\mu\eta} \eta_x \mu_x + u_\mu \mu_{xx} + u_{\eta\mu} \mu_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta^2(x) + u_\eta \eta_{xx} = \\&= u_{\mu\mu} \mu_x^2 + 2u_{\mu\eta} \mu_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\mu \mu_{xx} + u_\eta \eta_{xx},\end{aligned} \quad (3.8)$$

donde hemos supuesto u de clase \mathcal{C}^2 . Análogamente, sustituyendo (3.6) y (3.7) en (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned}u_{tt} &= (u_{\mu\mu} \mu_t + u_{\mu\eta} \eta_t) \mu_t + u_\mu \mu_{tt} + (u_{\eta\mu} \mu_t + u_{\eta\eta} \eta_t) \eta_t + u_\eta \eta_{tt} = \\&= u_{\mu\mu} \mu^2(t) + u_{\mu\eta} \eta_t \mu_t + u_\mu \mu_{tt} + u_{\eta\mu} \mu_t \eta_t + u_{\eta\eta} \eta^2(t) + u_\eta \eta_{tt} = \\&= u_{\mu\mu} \mu_t^2 + 2u_{\mu\eta} \mu_t \eta_t + u_{\eta\eta} \eta_t^2 + u_\mu \mu_{tt} + u_\eta \eta_{tt}.\end{aligned} \quad (3.9)$$

Veamos que, en particular, para una transformación lineal de la forma

$$\mu = Ax + Bt,$$

$$\eta = Cx + Dt,$$

con A, B, C, D constantes, se tiene

$$\mu_x = A,$$

$$\mu_t = B,$$

$$\eta_x = C,$$

$$\eta_t = D,$$

$$\mu_{xx} = \mu_{tt} = \eta_{xx} = \eta_{tt} = 0,$$

de tal forma que en este caso las ecuaciones (3.8) y (3.9) se reducen a

$$u_{xx} = A^2 u_{\mu\mu} + 2AC u_{\mu\eta} + C^2 u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = B^2 u_{\mu\mu} + 2BD u_{\mu\eta} + D^2 u_{\eta\eta},$$

Al sustituir éstas en la ecuación de ondas original, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, se reduce a

$$(B^2 - c^2 A^2) u_{\mu\mu} + 2(BD - c^2 AC) u_{\mu\eta} + (D^2 - c^2 C^2) u_{\eta\eta} = 0. \quad (3.10)$$

Notemos que una transformación útil es la que anula dos de los tres términos, de lo contrario convierte el problema en otro del mismo o mayor grado de dificultad. Analizando los sistemas de tres ecuaciones algebraicas asociados a los coeficientes de $u_{\mu\mu}$, $u_{\mu\eta}$ y $u_{\eta\eta}$ en (3.10) se concluye que las únicas transformaciones no singulares que anulan los dos primeros (y análogamente los dos últimos) términos, en realidad anulan los tres términos (con lo cual convierten la ecuación en la identidad $0 \equiv 0$). Por otra parte, la transformación que anula el primer y tercer términos debe satisfacer $B = \pm cA$ y $D = \pm cC$, de donde se sigue que va a ser no singular sólo si $B = cA$ y $D = -cC$ ó $B = -cA$ y $D = cC$, con $A, C \neq 0$. Escogemos la segunda opción, esto es:

$$\mu = A(x - ct), \quad (3.11)$$

$$\eta = C(x + ct), \quad (3.12)$$

que si sustituimos en (3.10) obtenemos

$$-4c^2 AC u_{\mu\eta} = 0, \quad (3.13)$$

o bien, observando que $4c^2 AC \neq 0$, se tiene

$$u_{\mu\eta} = 0. \quad (3.14)$$

Si integramos parcialmente respecto a η se encuentra

$$u_\mu = \tilde{f}(\mu),$$

con \tilde{f} una función escalar arbitraria. Ahora, integrando ésta parcialmente respecto a μ da

$$u(\mu, \eta) = \int \tilde{f}(\mu) d\mu + \tilde{G}(\eta),$$

donde \tilde{G} es otra función escalar arbitraria. Por lo tanto, la solución general es

$$u(\mu, \eta) = \tilde{F}(\mu) + \tilde{G}(\eta),$$

donde \tilde{F} y \tilde{G} son funciones escalares arbitrarias. En términos de las variables originales la solución es

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (3.15)$$

con F y G funciones escalares arbitrarias.

Esta solución tiene una interpretación física interesante:

$F(x - ct)$ representa una onda de forma que $F(x)$ se mueve a la derecha con velocidad c sin sufrir cambios. Análogamente, $G(x + ct)$ representa una onda de forma que $G(x)$ se mueve a la izquierda con velocidad c e igualmente sin presentar cambios.

Para concluir vale la pena observar que la transformación lineal que permitió resolver este problema, dada por las ecuaciones (3.11) y (3.12), depende de los parámetros no nulos A y C . Si $A = C$ la dependencia es sólo de uno, pero si $A \neq C$ la dependencia es de dos. Si denotamos $k_1 = A, w_1 = cA, k_2 = C$ y $w_2 = cC$, entonces las

transformaciones lineales (3.11) y (3.12) se escriben como

$$\begin{aligned}\mu &= k_1x - w_1t, \\ \eta &= k_2x + w_2t,\end{aligned}$$

donde $w_1, w_2, k_1, k_2 > 0$. Si sustituimos estas variables en la solución general que obtuvimos anteriormente de la ecuación de ondas unidimensionales es

$$u(x, t) = F(k_1x - w_1t) + G(k_2x + w_2t)$$

con F y G funciones escalares arbitrarias. Los nuevos parámetros son llamados *número de onda* (k) y *diferencia angular* (w), y su relación ($w = ck$) es llamada *relación de dispersión* para las ondas descritas por la ecuación (3.1).

Bibliografía

- [1] Courant, R., Method of Mathematical Physics Vol.2 , John Wiley and Sons, New York 1989.
- [2] d’Inverno, R., Introducing Einstein’s Relativity, Oxford University Press, 1992.
- [3] John, F., Partial Differential Equations, Springer, Berlin 1971.
- [4] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M., Teoría Clásica de los Campos Vol. 2, Editorial Reverté, 1981.
- [5] Resnick, R., Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad, Limusa, Mexico 1977.
- [6] Vesselin, P., Space, Time and Spacetime : Physical and Philosophical Implications of Minkowski’s Unification of Space and Time, Springer, 2010.