ATANASIO
LASALA

ORENSE
1875

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS,

POR

DON ATANASIO LASALA MARTINEZ,

Licenciado en Ciencias exactas,
Catedrático por oposicion de dicha asignatura
en el Instituto de Orense.

TOMO I.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

ORENSE.

IMP. DE D.ª PILAR SIDAROL, Á CARGO DE D. RAMON LOZANO.

Calle de San Pedro número 4.

1875.

PRÓLOGO.

Presentamos al público este libro poseidos del natural temor que debe acompañar á quien, por primera vez, somete los humildes y quizá no sazonados frutos de su trabajo al exámen y censura de los hombres de ciencia; temor que se convierte en duda y desaliento al considerar las múltiples condiciones que debe reunir un tratado elemental de Matemáticas, y la dificultad de satisfacerlas, áun para inteligencias más altas y mejor cultivadas que la nuestra.

Tanto influyen en nuestro ánimo dichos sentimientos, que despues de escrita esta obra, coleccion en su orígen de apuntes y notas sueltas, sacadas muchas de los mejores autores y resultado algunas de nuestras largas meditaciones, acaso hubiera permanecido inédita mucho tiempo, á no obligarnos á su pronta publicacion la apremiante necesidad de conciliar las doctrinas del libro elegido para texto con nuestras explicaciones, sin recurrir al penoso y casi estéril trabajo de modificarlo, ya ampliándolo, ya reduciéndolo, ya hasta cambiando su propio carácter, por medio de apuntes, que pocos alumnos redactan con exactitud y los menos consultan con fruto.

Esta necesidad, sentida á cada curso, y el deseo de facilitar á nuestros discípulos el estudio de las Matemáticas, son los móviles que nos impulsan á publicar nuestros modestos trabajos.

Acojan con benevolencia los que nos conocen estas consideraciones y disculparán seguramente la atrevida decision de acometer una empresa tan superior á nuestras facultades, y que exige juicio maduro y larga práctica de la enseñanza, cualidades ambas difíciles de hermanar con los pocos años.

Convencidos plenamente de que todo ramo del saber humano imprime en la inteligencia de los que asiduamente le cultivan un sello particular y propio, visible en todas las manifestaciones de aquella, y de que las Matemáticas, obedeciendo á ley tan cierta acaso mas que otras ciencias, ejercen paulatinamente su poderoso influjo en el entendimiento, mejorando el juicio, desarrollando el amor á la verdad, formando espíritus rectos, capaces de internarse con planta firme en los dominios de la razon, hemos procurado con ahinco, al escribir la presente obra, que los alumnos á quienes está destinada alcancen con su estudio el fruto más precioso que tienen derecho á esperar: *el desarrollo de sus facultades intelectuales.*

Á este fin, hemos cuidado muy especialmente de presentar enunciados exactos y claros, y demostraciones rigurosas, procurando en lo posible que los razonamientos nazcan sin violencia ni artificio de la naturaleza de la cuestion, porque así, á la vez que patentizan una verdad, muestran la razon íntima de su existencia; y las proposiciones necesarias para que los alumnos puedan adquirir conocimiento de lo más fundamental en cada teoría, se han enlazado de modo que el conjunto resulte sólido y capaz de servir de base, por la firmeza é íntima trabazon de sus partes, á las teorías subsiguientes.

Aunque damos la preferencia al fin puramente racional indicado arriba, no hemos descuidado las aplicaciones prácticas. Tanto en la Aritmética como en el Álgebra se tratan con la debida extension las cuestiones de aquel género más comunes en la vida del hombre y en el ejercicio de algunas profesiones, y todos los libros llevan al final un número suficiente de problemas en cuya resolucion podrán ejercitarse los alumnos.

La extension de la obra es, á nuestro juicio, suficiente para que pueda servir de preparacion á los que deseen emprender con éxito el estudio de las Matemáticas superiores. Podria encerrar más doctrina, es indudable; pero la corta duracion del curso, la edad de los alumnos, y sobre todo, la índole general de la segunda enseñanza, determinan límites que no debíamos traspasar.

No mencionaremos ahora las reformas que introducimos en la Aritmética y Álgebra: la sucinta enumeracion que podríamos hacer aquí nos parece insuficiente para dar idea de ellas á los que sólo lean este prólogo, y superflua para los que nos dispensen la honra de leer todo el libro.

Si los últimos tienen á bien comunicarnos sus razonadas observaciones, y con su ayuda llegase esta obra á ser de alguna utilidad á la enseñanza, nuestro reconocimiento sería grande y nuestras aspiraciones quedarian satisfechas.

Orense, Agosto 1875.

Atanasio Lasala.

NOCIONES DE LÓGICA

convenientes para estudiar con fruto las Matemáticas.

I. Atencion es el acto por el que nuestra inteligencia se detiene en la consideracion de un objeto.

Idea es la simple percepcion de una cosa.

Los objetos que percibe el entendimiento existen en sí mismos con vida propia, ó tienen una existencia relativa. Los primeros se llaman *sustancias*, y los segundos son las *propiedades* ó *manifestaciones* de la sustancia.

Ideas *simples* son aquellas cuyo objeto no puede descomponerse.

Ideas *compuestas* son las que constan de varios elementos.

Las ideas de *color*, *forma*, *direccion* son simples; las de *libro*, *mesa*, *circulo* son compuestas.

Las primeras solo se adquieren percibiéndolas directamente; las segundas pueden ser trasmitidas por medio de una descripcion ó de una definicion.

Ideas *individuales* son las que adquirimos de un sér determinado.

Ideas *generales*, las que abrazan todos los objetos de una clase.

Las ideas de *tal hombre*, *tal libro* son individuales; las de *hombre*, *libro* son generales.

Se forman las ideas generales considerando los caractéres comunes á un género de objetos, y haciendo abstraccion de los no comunes.

Ideas *abstractas* son las que adquirimos de las manifestaciones ó propiedades de los seres considerándolas en sí mismas, como separadas de estos.

La *velocidad* de un cuerpo, la *longitud* de un paseo, consideradas en sí, con entera independencia del cuerpo ó del paseo, son ideas abstractas.

Las Matemáticas puras no contienen mas que ideas generales y abstractas.

II. COMPARACION es el acto por el que nuestra inteligencia considera simultáneamente dos objetos.

JUZGAR es percibir una relacion entre dos objetos, ó referir de algun modo una cosa á otra.

JUICIO es la percepcion de una relacion entre dos ideas.

CONOCER es juzgar, tener conciencia de una relacion entre dos objetos.

Si consideramos simultáneamente la idea de *nieve* y la de *blancura* procurando relacionarlas, comparamos; si percibimos que estas ideas se relacionan, juzgamos; y como resultado del juicio adquirimos este conocimiento: *la nieve es blanca.*

PROPOSICION es el enunciado de un juicio por medio del lenguaje.

Las Matemáticas son ciencias, es una proposicion.

Consta de tres elementos, que son: *sujeto,* el sér de quien se afirma ó niega alguna cosa; *predicado,* lo que se afirma ó niega del sujeto; *cópula,* la afirmacion ó negacion. Así, *Matemáticas* es el sujeto, *ciencias* el predicado, *son* la cópula.

III. RACIOCINIO es la percepcion de una relacion entre dos juicios.

La relacion entre dos juicios extremos se percibe en el mayor número de casos por una serie de relaciones intermedias.

El raciocinio puede ser *deductivo* é *inductivo.*

Es *deductivo* cuando va de lo general á lo particular, é *inductivo* cuando va de lo particular á lo general.

Cuando se conoce un principio general y se aplica á un caso particular, el procedimiento es deductivo; si sabemos, por ejemplo, que *todos los cuerpos* son pesados, y afirmamos que *un cuerpo* tiene peso, el raciocinio es deductivo.

Cuando observando varios hechos particulares formulamos un principio general, el procedimiento es inductivo; si observamos, por ejemplo, que *varios cuerpos* son pesados y afirmamos que *todos los cuerpos* pesan, el raciocinio es inductivo.

RAZONAMIENTO es el enunciado de un raciocinio por medio del lenguaje.

El razonamiento deductivo mas comun es el de tres términos ó *silogismo.*

SILOGISMO es un razonamiento compuesto de tres términos ó proposiciones tales que de dos de ellas, llamadas *premisas,* sededuce la tercera, llamada *conclusion.*

Por ejemplo: *todo hombre es mortal: yo soy hombre,* luego *soy mortal.* Las premisas son: *todo hombre es mortal* y *yo soy hombre;* y la conclusion *soy mortal.*

Una de las premisas enuncia comunmente un principio general, la otra expresa que un caso particular está comprendido en el general, y la conclusion que el principio general conviene al caso particular.

Si las premisas son ciertas, la conclusion es cierta; porque es claro que la verdad solo contiene la verdad, no pudiendo engendrar el error.

Si la conclusion es falsa, las premisas son falsas, esto es, *un principio que conduce lógicamente á una conclusion absurda, es absurdo;* porque un absurdo no puede estar contenido en la verdad, que siempre engendra verdad.

IV. Ciencia es una serie de conocimientos verdaderos dependientes unos de otros, apoyada en principios evidentes.

La ciencia forma un organismo completo cuyas partes se prestan mutuo apoyo y se enlazan estrechamente mediante la *demostracion* y el *método.*

Demostracion es un raciocinio que hace ver con evidencia la verdad de una proposicion.

Sin demostracion no hay conocimientos ciertos ni ciencia.

La demostracion es *simple* cuando tiene la forma del silogismo, y *compuesta* cuando consta de varios silogismos.

Se llama demostracion *directa* la que se funda en una relacion entre un principio evidente y la proposicion que se demuestra; y demostracion *indirecta* ó *ad absurdum* la que se funda en que todas las proposiciones que se oponen á la propuesta son absurdas.

La demostracion debe patentizar que la proposicion enunciada está contenida en otra mas general evidente por sí misma ó en otra demostrada antes, con sujecion á las mismas condiciones.

El razonamiento debe dar por resultado la verdad de la proposicion tal como se enunció, sin ampliarla ni restringirla.

Método es el órden que sigue la inteligencia en la adquisicion de la verdad.

El método procede siempre de lo conocido á lo desconocido.

Si marcha de lo compuesto á lo simple, de lo particular y determinado á lo general é indeterminado, se llama *método analítico;* si por el contrario, partiendo de lo simple y general desciende á lo compuesto y particular, se llama método *sintético*.

El primero es mas ventajoso cuando se trata de descubrir una verdad, y el segundo cuando se quiere ordenar ó trasmitir á otros los conocimientos adquiridos.

En la organizacion y exposicion de la ciencia se emplean estos dos métodos, que se completan mútuamente.

V. Definicion es la exposicion verbal de la idea clara de un objeto.

Definir es analizar un objeto en sus elementos mas simples; por esto las ideas simples no pueden definirse.

Axioma es una verdad evidente por sí misma.

Por ejemplo: *el todo es mayor que una parte.*

Postulado es una verdad de carácter práctico, no evidente y que no puede demostrarse.

Teorema es una verdad que debe demostrarse.

En un teorema se distingue dos partes: el *enunciado* de la verdad y la *demostracion.*

El enunciado consta de hipótesis, que es un supuesto, y *conclusion,* que es una afirmacion.

La demostracion se funda en los axiomas, en la hipótesis, en las definiciones y en los teoremas ya demostrados; su fin es evidenciar la conclusion.

Un teorema es *recíproco* de otro cuando el primero tiene por hipótesis la conclusion del segundo; y por conclusion la hipótesis.

Corolario es una verdad que se deduce de un teorema inmediatamente ó por medio de un raciocinio muy sencillo.

Lema es un teorema auxiliar que sirve para facilitar la demostracion de otro teorema ó el desarrollo de una teoría.

Teoría es el conjunto sistemático de proposiciones relativas á un mismo objeto particular.

Escolio es una advertencia ú observacion sobre un objeto cualquiera.

Problema es una cuestion práctica en que se propone determinar cosas desconocidas, llamadas *incógnitas*, por medio de sus relaciones con otras conocidas, llamadas *datos.*

Resolver un problema es determinar las cosas desconocidas.

En el problema hay una *propuesta,* un procedimiento ó *resolucion* para obtener el fin propuesto, y este fin ó sea la *solucion.*

Despues de resolver un problema es necesario demostrar que la solucion satisface á las condiciones de la propuesta.

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS.

Introduccion.

1. Si nuestra inteligencia se detiene en la consideracion de un sér ú objeto limitado, distingue en él diversas manifestaciones ó propiedades; percibe, por ejemplo, que el sér se manifiesta por su peso, longitud, volúmen, velocidad, fuerza, olor, color, etc.

Un exámen mas detenido de estas manifestaciones hace descubrir en ellas un carácter comun: todas pueden aumentar y disminuir, todas poseen la propiedad de poder ser mayores y menores; esta propiedad ha recibido el nombre de *magnitud.*

MAGNITUD *es una propiedad por la que las manifestaciones de los seres limitados se conciben mayores y menores.*

2. Las manifestaciones mencionadas, si bien tienen un carácter comun, presentan otros diferentes: unas, como el peso y la longitud, pueden relacionarse y medirse, esto es, dado un peso ó una longitud se puede comparar con otro peso ú otra longitud, determinando de este modo su relacion exacta ó aproximada, la que distingue y separa el peso ó longitud dados de todos los de su género encerrándolo en sus propios límites; otras, como el olor y el color, rechazan toda determinacion, esto es, no puede decirse de cuántos olores ó colores se componen.

La propiedad en virtud de la cual se relacionan y determinan algunas manifestaciones de los seres es la *cantidad.*

Cantidad *es una propiedad por la que algunas manifestaciones de los seres limitados son determinables.*

Debemos advertir que las mismas manifestaciones de los seres se llaman con frecuencia magnitudes, si poseen la propiedad de poder ser mayores y menores, y cantidades si además son susceptibles de determinacion.

3. Para determinar una cantidad se compara, concibiéndola descompuesta en partes, con otra de igual naturaleza determinada á su vez por medio de un tipo ó patron arbitrario; de modo que conociendo este tipo y el resultado de la comparacion, se tiene la medida de la cantidad.

Si, por ejemplo, queremos determinar la longitud de un paseo, y vemos que puede considerarse descompuesta en doscientas longitudes iguales á la del metro, este resultado *doscientos,* unido al conocimiento del término de comparacion, distingue y separa la longitud propuesta de cualquiera otra.

Hay, segun vemos, en la determinacion de las cantidades, una cosa que se compara con otra y una relacion ó resultado de la comparacion.

La cosa que se compara es la cantidad, el *cuánto* de cierta manifestacion de un sér; el término de comparacion, la *unidad;* y el resultado, el *número.*

La unidad es necesariamente de igual naturaleza que la cantidad, de lo contrario la comparacion es imposible.

El valor de la unidad es arbitrario, pues no hay nada que lo fije en absoluto.

El valor que demos á la unidad debe ser invariable hasta el fin de la comparacion.

Unidad *es una cantidad arbitraria que sirve de término de comparacion al medir las cantidades de su especie.*

Número *es la expresion del resultado que se obtiene comparando una cantidad con la unidad.*

4. Una propiedad sin la que no pueden existir los cuerpos es la *extension.*

Extension *es la propiedad que tienen los cuerpos de ocupar un lugar en el espacio.*

5. Matematicas *son las ciencias que exponen las propiedades y relaciones de la cantidad.*

Las Matemáticas *puras* consideran la cantidad de tres modos:

Representándola por números y viendo en estos relaciones abstractas entre la cantidad y la unidad, no la expresion de una cantidad concreta y determinada.

Este modo de considerar la cantidad origina una parte de las Matemáticas, llamada ARITMÉTICA.

Estudiando sus leyes generales, sin representarla por signos particulares.

De aquí nace otra parte, que se llama ÁLGEBRA.

Tratando las propiedades de la extension con entera independencia de los cuerpos materiales.

Lo que forma otra ciencia, llamada GEOMETRÍA.

6. Las propiedades que constituyen estas ciencias parciales tienen inmensas aplicaciones prácticas, y cuando se llega á éstas se considera el número como la expresion de una magnitud determinada y concreta, y la extension se combina con otras propiedades de los cuerpos, dando así orígen á las ciencias llamadas Matemáticas *mixtas*.

Antonio

ARITMÉTICA.

ARITMÉTICA.

Definiciones y division.

7. Al comparar una cantidad con la unidad elegida para medir las de su especie, pueden ocurrir tres casos:

1.° Que separando de la cantidad, mientras sea posible, partes iguales todas á la unidad, no quede ningun resto.

El número se llama en tal caso *entero*.

NÚMERO ENTERO *es el que expresa que la cantidad es una totalidad de unidades de la misma especie.*

2.° Que efectuando la separacion mencionada cuantas veces sea posible, quede todavía un resto menor que la unidad. Entónces se divide ésta en partes iguales de tal modo que una de ellas esté contenida exactamente en el resto; esta parte será una unidad nueva, que comparada con la cantidad, dará un número entero de partes iguales de la unidad primitiva.

El número que resulta en este caso se llama *fraccionario*.

NÚMERO FRACCIONARIO *es el que expresa que la cantidad es una totalidad de partes de la unidad iguales entre sí.*

3.° Que la unidad no esté exactamente contenida en la cantidad y haya un resto como en el caso anterior, siendo además imposible encontrar una parte de la unidad capaz de estar contenida exactamente en el resto.

En este caso la cantidad no es una totalidad de unidades ni de partes de la unidad, no puede expresarse con exactitud, y se dice que la cantidad y la unidad son *inconmensurables*, esto es, que no tienen medida comun.

Sin embargo, dividiendo la unidad en un número de partes bastante crecido para que sean muy pequeñas, y separando una de éstas de la cantidad cuantas veces sea posible, el resto, que obtendremos necesariamente, será menor que dicha parte, y despreciándolo, la expresion de la cantidad propuesta disminuida en el resto será en general un número fraccionario. Dividiendo la unidad por segunda vez de modo que las nuevas partes sean menores que el primer resto, y separando una de éstas de la cantidad mientras sea posible, el resto que obtendremos será menor que el primero; si lo despreciamos, la expresion de la cantidad propuesta disminuida en el nuevo resto, será en general otro número fraccionario. Continuando de este modo, obtendremos números fraccionarios que representarán cantidades cada vez mas próximas á la propuesta, pudiendo por tanto considerarse como expresiones aproximadas de la misma.

El límite de estos números fraccionarios se llama *número inconmensurable.*

Número inconmensurable *es el límite á que tienden los números fraccionarios que expresan, con aproximacion creciente, el resultado de medir una cantidad, que no tiene medida comun con la elegida para término de comparacion.*

Los números enteros y fraccionarios se comprenden bajo la denominacion comun de *números conmensurables.*

8. Con los números se efectúan diversas combinaciones que se reducen á componerlos y descomponerlos; pero estas combinaciones serian imposibles si no consiguiéramos ante todo representarlos con palabras y por escrito.

9. Las combinaciones de los números entre sí, ó sea su composicion y descomposicion, es el fin de la Aritmética, que se define diciendo:

Aritmética *es la ciencia de los números.*

Para su estudio la dividimos en tres libros ó partes principales: la primera tratará del número entero, la segunda del número fraccionario y la tercera del número inconmensurable.

LIBRO PRIMERO.

NÚMEROS ENTEROS.

CAPÍTULO PRIMERO.

NUMERACION.

10. Numeracion *es el arte de representar los números.*

Consta de dos partes: la primera tiene por objeto representar los números con palabras, y se llama numeracion *verbal* ó hablada; la segunda escribirlos, y se llama numeracion *escrita.*

I.—Numeracion verbal.

11. Si de una cantidad puede separarse la unidad una sola vez exactamente, el resultado de la comparacion es un número, que se llama *uno;* si la unidad puede separarse de la cantidad una vez y despues otra sin quedar residuo, el número se llama *dos;* si podemos separar dos unidades y despues otra, el número se llama *tres* etc.

Vemos, pues, que un número cualquiera se forma añadiendo una unidad al anterior; y como esta operacion podemos repetirla siempre, resulta que *la serie de los números enteros es ilimitada.*

De aquí se desprende naturalmente que cada número no puede recibir un nombre particular arbitrario, porque necesitaríamos infinidad de nombres; luego es preciso combinar, con sujecion á leyes determinadas, un corto número de palabras, de tal modo que sus diversas combinaciones den nombres distintos que expresen todos los números imaginables.

12. El artificio de estas combinaciones es el siguiente:

Los primeros números reciben nombres particulares arbitrarios, que son:

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez; llamando *dos* á la reunion de una unidad y otra unidad, *tres* á la reunion de dos unidades y otra unidad, *cuatro* á la de tres unidades y otra unidad, y así sucesivamente hasta *diez*, que es la reunion de nueve unidades y una unidad.

El conjunto ó reunion de diez unidades se considera como una nueva unidad, llamada *decena* ó *unidad numerativa de segundo órden*, para distinguirla de la anterior, que es de *primer órden* ó *simple;* y se cuenta por decenas del mismo modo que se ha contado por unidades; asi diremos:

una decena, dos decenas, tres decenas,....... diez decenas, que el uso ha querido expresar por

diez, veinte, treinta,................ ciento.

La reunion de diez decenas se considera como una nueva unidad, que se llama *centena* ó *unidad numerativa de tercer órden;* y se cuenta por centenas desde una hasta diez lo mismo que por unidades y decenas; así diremos:

una centena, dos centenas, tres centenas,..... diez centenas, que abreviadamente se enuncian

ciento, dos cientos, tres cientos,............. mil.

La reunion de diez centenas ó mil unidades se considera como una nueva unidad llamada *millar* ó *unidad numerativa de cuarto órden;* y se cuenta por millares desde uno hasta mil lo mismo que se ha contado por unidades; tendremos segun esto:

un millar, dos millares,................................ diez millares,
una decena de millar, dos decenas de millar... diez decenas de millar,
una centena de millar, dos centenas de millar... diez centenas de millar.

Las decenas, centenas y millares de millar, se llaman tambien respectivamente *unidades numerativas de quinto, sexto y sétimo órden* ó *millones.*

Contando por millones desde uno hasta un millon formaremos una nueva unidad, que será el millon de millones ó *billon,* al millon de billones llamaremos *trillon* etc.

13. Se habrá observado que una unidad de un órden cualquiera es la reunion de diez unidades del órden inmediato inferior, pero esto es convencional, pudiendo establecerse que dos, tres, cuatro etc. unidades de un órden cualquiera compusieran la superior inmediata. De aquí proceden los diferentes sistemas de numeracion, los cuales se fundan todos en

que *cierto número de unidades de un órden componen una unidad del órden inmediato superior,* y se distinguen entre sí por aquel número, que se llama *base* del sistema.

En el sistema que exponemos la base es diez, y se llama por esto *sistema decimal de numeracion.*

14. Habiendo formado ya las unidades numerativas, pasemos á la formacion de los demás números.

Observemos para esto que un número mayor que diez y menor que veinte se compone de una decena y cierto número de unidades que no llegará á diez; un número mayor que veinte y menor que treinta se compone de dos decenas y un número de unidades que no llega á diez; en general, un número menor que ciento se compondrá de cierto número de decenas y cierto número de unidades, no llegando á diez ni las unas ni las otras.

Luego con las palabras unidad y decena y los nombres de los nueve primeros números se podrán expresar todos los menores que ciento.

Tambien observaremos que un número mayor que ciento y menor que mil se compone de un número de centenas inferior á diez y de un número de unidades inferior á cien; y como los números inferiores á cien se expresan con las palabras unidad y decena y los nombres de los nueve primeros números, los menores que mil se expresarán con las palabras unidad, decena, centena y los nombres de los nueve primeros números.

Como este razonamiento se extiende sin dificultad á números menores que diez mil, cien mil, un millon etc., resulta que *el número de unidades de un órden es siempre inferior á diez,* por consiguiente *con las palabras unidad, decena, centena, millar, millon etc., y los nombres de los nueve primeros números, pueden expresarse todos los enteros.*

Así, el número compuesto de seis millones, cuatro centenas de millar, dos decenas y tres unidades se enunciará: *seis millones cuatro cientos mil veintitres.*

II.—Numeracion escrita.

15. Ocupémonos ahora de la escritura de los números.

Así como cada número no puede recibir un nombre particular arbitrario, tampoco puede escribirse con un signo particular, sino por combinaciones convenientes de un corto número de ellos.

Estos signos, llamados cifras ó guarismos, son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

que representan respectivamente los números

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

Estas cifras se llaman *significativas*.

Además hay otra cifra 0 llamada *cero*, que no representa valor alguno y se llama *no significativa*.

16. Con las nueve cifras significativas y el cero, se escriben todos los números en virtud del siguiente principio convencional: *una cifra colocada á la derecha de un número escrito, le hace representar unidades diez veces mayores*.

Tiene pues cada cifra dos valores: uno *absoluto*, que es el que expresa la figura de la misma; otro *relativo*, que depende del lugar que ocupa.

Así la cifra 1, que representa por su figura *una unidad* simple, seguida de un cero será 10 y representará *una decena;* esta seguida de un cero será 100 y representará *una centena*. Del mismo modo 1000 será *un millar*, 10000 *una decena de millar*. En el número 4 esta cifra vale *cuatro unidades*, en 45 vale *cuatro decenas*, en 478 vale *cuatro centenas etc.*

17. El principio enunciado en la numeracion verbal que dice: el número de unidades de un órden es siempre inferior á diez, y el convencional de la numeracion escrita, permiten escribir todos los números con solo el cero y las nueve cifras significativas que conocemos.

Bastará para esto expresar el número de unidades de cada órden por una de estas nueve cifras y colocar cada una en el lugar correspondiente á las unidades numerativas que deba representar. Ocupará el primer lugar de la derecha la cifra que deba representar unidades simples, el segundo la de las decenas, el tercero la de las centenas y así sucesivamente: de modo que sabiendo de qué órden son las unidades que representa una cifra, sabremos el lugar que debe ocupar y recíprocamente.

Cuando el número dado no tenga unidades de un órden, el lugar correspondiente se ocupará con un cero.

Para escribir un número entero se descompone en sus unidades simples, decenas, centenas, etc., y se escriben las cifras que expresan el número de unidades de cada órden unas al lado de otras, empezando por las de órden superior, y cuidando de ocupar con ceros los lugares correspondientes *á las unidades numerativas de que carezca el número dado.*

Ejemplo. Escribir el número *diez y ocho millones cuatro cientos veinte mil treinta y siete.*

Este número se compone de *una* decena de millon, *ocho* unidades de millon, *cuatro* centenas de millar, *dos* decenas de millar, *tres* decenas y *siete* unidades simples, luego se escribirá con las cifras significativas 1, 8, 4, 2, 3, 7 y dos ceros, que ocuparán los lugares correspondientes á los millares y centenas; el número será pues:

18420037.

18. En la lectura de los números distinguiremos dos casos: 1.° que el número no tenga mas de tres cifras; 2.° que tenga mas de tres.

Si el número que se trata de leer no tiene mas de tres cifras *se enunciará sucesivamente todas las significativas, empezando por la izquierda, y dando á cada una la denominacion que le corresponda, segun el órden de unidades que represente.*

Si tiene mas de tres, *se dividirá en periodos de tres cifras, empezando por la derecha; el primer periodo constará de unidades simples, el segundo de millares, el tercero de millones, etc.; se leerá sucesivamente todos los grupos, empezando por la izquierda, segun la regla anterior, añadiendo á cada uno la denominacion que le corresponda, segun el órden de unidades principales que represente.*

Ejemplo. Leer el número 327.

El *tres* representa centenas ó cientos, el *dos* decenas y el *siete* unidades: será pues *tres cientos veinte y siete.*

Otro ejemplo. Leer el número 23.570.089.064.

Dividido el número en grupos de tres cifras, empezando por la derecha, el primer grupo vale 64 unidades, el segundo 89 millares, el tercero 570 millones, y el cuarto 23 millares de millon; empezando la lectura por estos últimos será: *veintitres mil quinientos setenta millones ochenta y nueve mil sesenta y cuatro.*

CAPÍTULO SEGUNDO.

OPERACIONES.

I.—Adicion.

19. La adicion *es una operacion que tiene por objeto reunir en un solo número el valor de dos ó más.*

En esta operacion se *conocen* dos ó mas números, y se *busca* otro que represente por sí solo el conjunto de las cantidades representadas por los primeros.

Los números dados se llaman *sumandos* y el que se busca *suma.*

Para expresar que varios números deben sumarse, se escriben unos á continuacion de otros separados por el signo $+$ que se lee *mas*. Así, la suma de los números 3, 5 y 7 se expresa por $3 + 5 + 7$, y se lee tres *mas* cinco *mas* siete.

20. En la adicion distinguiremos dos casos: 1.° que los sumandos sean números menores que 10; 2.° que sean números cualesquiera.

21. Primer caso. Se pueden sumar varios números menores que diez añadiendo al primero las unidades del segundo una á una, al resultado las unidades del tercero, tambien una á una, y así sucesivamente hasta añadir todas las unidades del último.

Es evidente que de este modo se obtiene un número que contiene las unidades de todos los sumandos.

Ejemplo. Para sumar los números 3, 5 y 7, añadiremos al 3 las 5 unidades del segundo sumando y obtendremos el número 8, y á este resultado agregaremos las 7 unidades del tercer sumando. La suma será, pues, igual á 15.

Este resultado se llama *suma efectuada* para distinguirle de la expresion $3 + 5 + 7$, que se llama *suma indicada*.

La igualdad de dos cantidades se expresa por el signo $=$ que se lee *igual á;* tendremos, pues,

$$3 + 5 + 7 = 15.$$

Esta expresion se llama *igualdad* y consta de dos miembros, llamados primero y segundo. *Primer miembro* es toda la cantidad colocada á la izquierda del signo igual, y *segundo miembro* la colocada á su derecha.

Escolios. 1.° Todos tenemos desde los primeros años un modo especial de añadir á un número cualquiera otro menor que diez, lo que evita el empleo del procedimiento explicado y abrevia mucho la operacion de sumar.

2.° En la numeracion formábamos los números por la agregacion de sumandos iguales á la unidad; en la adicion se forman ó componen por la agregacion de sumandos cualesquiera.

22. SEGUNDO CASO. *Los sumandos son mayores que diez ó unos mayores y otros menores.*

Sabemos, por el primer caso, sumar las unidades simples de estos números, así como sus decenas, centenas, etc., y es evidente que la reunion de estas sumas parciales será la suma total. Nada se opone á que algunas de estas sumas parciales sean mayores que nueve, esto es, á que la suma contenga mas de nueve unidades de algunos órdenes, lo que hace imposible su representacion por un solo número si no variamos su forma, puesto que tanto la lectura como la escritura de los números, exigen que las unidades de cada órden no pasen de nueve. Esta dificultad se evita descomponiendo cada suma parcial en decenas y unidades, escribiendo estas en la suma total y reservando aquellas para agregarlas á la suma parcial siguiente, con la que se repite despues la misma descomposicion, y continuando así hasta la última suma, que se escribe tal como se obtiene.

Ejemplo. Sumar los números 7578, 19634 y 9878.

$$\begin{array}{r} 7578 \\ 19634 \\ 9878 \\ \hline 37090 \end{array}$$

Se colocan, para mayor comodidad, unos debajo de otros de modo que las cifras de las unidades simples estén en columna vertical; es claro que bastará esto para que las cifras de las decenas, centenas, etc. lo estén igualmente. La suma se acostumbra á separar de los sumandos por una raya horizontal.

Sumando por columnas resultan 20 unidades simples, 17 decenas, 19 centenas, 25 millares y 1 decena de millar. Para expresar por un solo número este resultado, diremos: 20 unidades valen *dos* decenas y *cero* unidades; escribo un cero en la columna de las unidades y reservo dos decenas para la suma parcial siguiente; esta consta de 17 decenas y dos reservadas son 19, ó sea *una* centena y *nueve* decenas; escribo éstas y reservo la centena para agregarla á la suma de las centenas etc.

Luego *para sumar varios números se suman las unidades simples de todos los sumandos, despues sus decenas, centenas, etc. Las sumas menores que diez se escriben sin alterarlas, y de las mayores ó iguales solo se escriben las unidades, reservando las decenas para agregarlas á la suma parcial siguiente. La última suma se escribe segun se obtiene.*

23. Se llama *prueba* de una operacion una segunda operacion, cuyo objeto es cerciorarse de la exactitud del resultado obtenido en la primera.

La prueba de la adicion consiste en repetir la operacion variando el órden de los sumandos; lo mas sencillo es sumar de abajo arriba, si antes se habia hecho de arriba abajo, y los dos resultados deben ser iguales, si la operacion y la prueba estan bien hechas.

La prueba no demuestra la exactitud de la primera operacion: únicamente aumenta en sumo grado las probabilidades.

24. Escolio. Al sumar dos números cualesquiera, ninguna suma parcial puede ser mayor que 18; si es menor que 10 se escribe sin alteracion, y si es igual ó mayor solo se escriben las unidades. En este caso, la suma parcial siguiente aumenta en una unidad.

De aquí se deduce que una cifra de la suma total representa la suma parcial de las cifras del mismo órden de los sumandos, ó la cifra de las unidades de esta suma parcial; pero si la suma anterior contiene una decena, deberá disminuirse la cifra que consideramos en una unidad para que tenga la representacion indicada, y si dicha cifra es cero se pondrá un nueve en su lugar.

II.—Sustraccion.

25. La sustraccion *tiene por objeto descomponer una suma en dos sumandos, siendo conocido uno de estos.*

En esta operacion se *conoce* la suma de dos números y uno de estos, y se *busca* el otro.

La suma se llama *minuendo,* el sumando conocido *sustraendo,* y el resultado *resto, exceso* ó *diferencia.*

Segun la definicion, *el minuendo es igual á la suma del sustraendo y del resto.*

Es claro que el resto es lo que falta al sustraendo para valer el minuendo, ó sea el exceso de éste sobre aquel, ó bien la diferencia entre ambos, por consiguiente *restar es hallar la diferencia entre dos números.*

Para indicar esta diferencia, se escribe el minuendo y á continuacion el sustraendo, separados por el signo —, que se lee *menos*. Así la diferencia de los números 15 y 8 se indica por 15—8, y se lee 15 *menos* 8.

26. En la sustraccion distinguiremos dos casos: 1.° que el minuendo y el sustraendo sean menores que 100 y su diferencia menor que 10; 2.° que sean números cualesquiera.

27. Primer caso. Se pueden restar dos números quitando del mayor todas las unidades del menor una á una, pero el primer caso de la adicion abrevia mucho su correspondiente en la sustraccion. Sabemos, en efecto, añadir á un número cualquiera otro menor que 10; luego restaremos dos números menores que 100 y cuya diferencia no llegue á 10, buscando el número que debe añadirse al menor para hallar el mayor.

Ejemplo. Hallar la diferencia entre 67 y 59. El número que sumado con 59 da 67 es 8, luego este es la diferencia buscada. Podemos, pues, escribir 67—59=8.

El número 8 se llama *diferencia efectuada*, para distinguirle de 67—59, que se llama *diferencia indicada.*

28. Segundo caso. Restar los números 47589 y 18694.

$$\begin{array}{r} 47589 \\ 18694 \\ \hline 28895 \end{array}$$

Para mayor comodidad colocamos el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc., y trazamos una raya horizontal por debajo del sustraendo.

Ahora, recordando que el minuendo es la suma del sustraendo y del resto, y el escolio del número 24, vemos que si sumásemos estos números la primera suma parcial seria 9, puesto que la cifra 4 del sustraendo sumada con otra que no es mayor que 9 no puede dar 19, luego las unidades del resto son 5, único número que sumado con 4 da 9. La segunda suma parcial es 18, puesto que uno de los sumandos vale 9 por sí solo, luego el otro sumando es 9. Esta suma ha dado una centena, por consiguiente la suma de las centenas ha sido 4 ó 14; 4 es imposible, por ser 6 uno de los sumandos, luego será 14, por consiguiente el otro sumando es 8. Del mismo modo vemos que la cuarta suma parcial es 16 y por consiguiente 8 el sumando desconocido, y que la última suma es 3 y 2 el sumando desconocido.

Vemos, pues, que si la cifra del sustraendo es menor que la correspondiente del minuendo, su diferencia es la cifra del mismo órden del resto; y que si la cifra del sustraendo es mayor que la del minuendo, se añaden á esta 10 unidades, ó sea una del órden superior inmediato, teniendo despues cuidado de disminuir en esta unidad la cifra de dicho órden.

En la práctica no se efectúa esta disminucion, pero en cambio se aumenta la cifra del sustraendo en una unidad, lo que da el mismo resultado.

Ejemplo. Restar los números 345729 y 273854.

$$\begin{array}{r} 345729 \\ 273854 \\ \hline 71875 \end{array}$$

Diremos: de 4 á 9 van 5; de 5 á 2 no se puede restar, añadiremos al 2 una centena ó sea 10 decenas y diremos, de 5 á 12 van 7; añadiremos otra centena al sustraendo y serán 9; de 9 á 7 no se puede restar, de 9 á 17 van 8; y continuando de este modo obtendremos las cifras restantes.

El procedimiento explicado se resume en la siguiente regla.

Para restar dos números enteros cualesquiera se resta cada cifra del sustraendo de la del mismo órden del minuendo, empezando por la derecha; cuando una cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente en el minuendo, se agregan á esta diez unidades y se efectúa la sustraccion, cuidando despues de aumentar en una unidad la cifra siguiente del sustraendo.

La prueba de la sustraccion consiste en sumar el sustraendo con la diferencia; es evidente que si la operacion y la prueba están bien hechas, la suma será igual al minuendo.

III.—Multiplicacion.

29. La multiplicacion *tiene por objeto, dados dos números hallar un tercero que sea respecto de uno de los dados, lo que el otro es respecto de la unidad.*

En esta operacion se *conocen* dos números, y se *busca* otro que comparado con uno de los primeros, dé el mismo resultado que se obtiene comparando el otro con la unidad.

El número que se busca se llama *producto,* y los números conocidos *factores* del producto.

El factor que se compara con el producto se llama *multiplicando;* el que se compara con la unidad, *multiplicador.*

Se indica el producto de dos números poniendo entre ellos el signo $\times$ ó . que se lee *multiplicado por;* así el producto de los números 7 y 5 se expresa por 7×5 ó $7 . 5$, y se lee 7 *multiplicado por* 5.

Convendremos en escribir primero el número que se tome por multiplicando.

30. En la multiplicacion de 7×5 el producto ha de ser respecto del multiplicando 7, lo que 5 es respecto de la unidad; pero $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, esto es, 5 es la suma de cinco sumandos iguales á la unidad, luego el producto será $7 + 7 + 7 + 7 + 7$, esto es, la suma de cinco sumandos iguales al multiplicando.

De aquí se deduce que *el producto de un número cualquiera por otro entero es una suma de tantos números iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador,* y la siguiente definicion:

Multiplicar un número cualquiera por otro entero, es hacer el primer número tantas veces mayor como unidades tiene el segundo.

31. Teorema. *Puede tomarse por multiplicando cualquiera de los dos factores, sin que el producto se altere.*

Sean los factores 5 y 3; vamos á demostrar que $5 \times 3 = 3 \times 5$.

En efecto: examinemos el siguiente cuadro

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

y veremos que cada línea horizontal contiene cinco unidades y que hay tres líneas, luego la reunion de todas las unidades del cuadro vale $5 + 5 + 5 = 5 \times 3$; pero cada columna vertical contiene 3 unidades y hay 5 columnas, luego la reunion de todas las unidades vale tambien $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 5$. Pero es evidente que el número total de unidades del cuadro es el mismo, cualquiera que sea el órden en que se cuenten, luego $5 \times 3 = 3 \times 5$.

32. En la multiplicacion distinguiremos tres casos principales: 1.° multiplicar dos números menores que 10; 2.°

multiplicar un número mayor que 10 por otro menor; 3.ª multiplicar dos números mayores que 10.

Todos estos casos pueden resolverse sumando tantos números iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador; pero este método tiene el inconveniente de ser muy largo. Nuestro objeto actual es hallar un procedimiento para obtener brevemente las sumas de números iguales.

33. Primer caso. Si los números son menores que 10, su producto debe saberse de memoria. La tabla que encierra estos productos es la siguiente.

Tabla de Pitágoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Se forma escribiendo en línea horizontal los nueve primeros números, que serán los productos de los mismos por 1; sumando cada número de estos consigo mismo, se halla la segunda línea, que evidentemente contiene los productos de los números de la primera por 2; sumando por columnas los números de estas dos líneas, se obtiene la tercera, que contiene los productos por 3, y se continúa del mismo modo hasta hallar la novena línea.

Para hallar, en esta tabla, *el producto de dos números, se busca uno de ellos en la primera línea horizontal y el otro en la primera vertical, y se desciende por la columna vertical encabezada por el primero hasta llegar enfrente del segundo. En el punto donde nos detengamos se hallará el producto.*

Ejemplo. Para hallar el producto 5 × 7 buscaremos el 5 en la primera línea horizontal, y descendiendo por la columna vertical que empieza por 5 hasta llegar enfrente de 7, encontramos el número 35, que es el producto buscado.

34. Segundo caso. *El multiplicando es mayor que* 10 *y el multiplicador menor.*

Sea 3528 el primero y 4 el segundo.

El producto será la suma de cuatro sumandos iguales á 3528.

$$\begin{array}{r} 3528 \\ 3528 \\ 3528 \\ 3528 \\ \hline 14112 \end{array}$$

Efectuando esta suma se ve que la cifra 8 de las unidades debe repetirse cuatro veces por sumando, lo que equivale á multiplicarla por 4; lo mismo la cifra 2 tiene que repetirse cuatro veces por sumando, lo que equivale á multiplicarla por 4, y así todas las demás.

El producto de cada cifra del multiplicando por el multiplicador 4 sabe hallarse por el primer caso, y siendo inútil y hasta embarazoso escribir el 3528 cuatro veces, se dispone la operacion del modo siguiente, mucho mas breve y cómodo,

$$\begin{array}{r} 3528 \\ 4 \\ \hline 14112 \end{array}$$

y se dice: 4 por 8, 32, escribo un 2 y reservo 3 decenas; 4 por 2, 8; 8 y 3, 11, escribo 1 y reservo 1 centena; 4 por 5, 20; 20 y 1, 21, escribo 1 y reservo 2 millares, etc.

Vemos que este procedimiento es en el fondo el mismo de la adicion, solo que lo abreviamos considerablemente en virtud de haber aprendido ya de memoria las sumas de cada columna vertical, que equivalen siempre á productos de números menores que 10.

Para multiplicar un número mayor que 10 *por otro menor, se hallan los productos de cada cifra del multiplicando por el multiplicador, empezando por la derecha, y se escriben* *solamente las unidades de cada producto parcial, reservando las decenas para añadirlas al siguiente.*

35. TERCER CASO. *Multiplicando y multiplicador son mayores que* 10.

Consideremos ante todo dos casos particulares.

1.° Multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, por ejemplo, 3527×100.

Segun el principio convencional de la numeracion escrita [16], si escribimos dos ceros á la derecha del número propuesto, representará unidades 100 veces mayores que anteriormente ó se habrá hecho 100 veces mayor, luego

Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se colocan á la derecha del número tantos ceros como siguen á la unidad.

2.° Multiplicar un número cualquiera por una cifra significativa seguida de ceros, por ejemplo, 547×300.

El producto se compondrá de 300 sumandos iguales á 547, que pueden distribuirse en 100 grupos de 3 sumandos; cada grupo equivale al producto de 547×3, ó sea 1641, y los 100 grupos al producto de 1641 por 100, ó sea á 164100; luego

Para multiplicar un número cualquiera por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por la cifra significativa y se añade al producto tantos ceros como siguen á esta.

Consideremos, ahora, dos números cualesquiera, por ejemplo, 4728 y 346.

El producto es la suma de 346 sumandos iguales á 4728, que pueden distribuirse en un grupo de 300, otro de 40 y otro de 6. La suma de los 300 sumandos se obtiene multiplicando el número 4728 por 300; la de los 40 sumandos se obtiene multiplicando el mismo número por 40; por último, la suma de 6 sumandos es el producto de 4728 por 6. La reunion de los tres productos mencionados, es el producto que se busca.

En la práctica se empiezan estas multiplicaciones parciales por la cifra de las unidades simples del multiplicador, disponiendo la operacion del modo siguiente:

			4728
			346
Producto del multiplicando		por 6.....	28368
Id.	id.	por 40.....	189120
Id.	id.	por 300.....	1418400
Producto total.			1635888

Observando que los ceros en que terminan los productos parciales no afectan á la suma, no se escriben; pero deberemos cuidar de que la primera cifra significativa esté en el lugar correspondiente, lo que se consigue colocándola en línea vertical con la cifra del multiplicador que haya producido el producto parcial que se considera.

De lo dicho se deduce la siguiente regla.

Para multiplicar dos números mayores que 10, *se hallan sucesivamente los productos parciales del multiplicando por las unidades, decenas, centenas, etc. del multiplicador, y se suman estos productos parciales.*

36. Escolio. El producto total se compone de tantos productos parciales como cifras tiene el multiplicador, y cada uno de ellos es un número justo de unidades numerativas del mismo órden que la cifra del multiplicador que le ha producido, esto es, el primero representa unidades simples, el segundo decenas, el tercero centenas, etc.

37. La prueba de la multiplicacion consiste en repetir la operacion, tomando para multiplicando el número que ha servido de multiplicador. Si la operacion y la prueba están bien hechas, los dos productos serán iguales [31].

38. Teorema. *El producto de dos números, tiene tantas cifras como los dos factores ó tantas ménos una.*

Sean los números 459 y 78.

Su producto es menor que 459×100, ó sea 45900, luego no puede tener mas de *cinco* cifras; y mayor que 459×10, ó sea 4590, luego no puede tener menos de *cuatro* cifras. Por consiguiente, el producto tiene cuatro ó cinco cifras, esto es, tantas como los dos factores ó una menos.

39. Un número es *múltiplo* de otro cuando es el producto de este por un número entero.

Así, 30 es múltiplo de 5, porque es el producto de 5 por el número entero 6.

El producto de un número por 2 se llama *duplo* de dicho número; el producto por 3, se llama *triplo;* el producto por 4, *cuádruplo,* el producto por 10, *décuplo,* etc.

40. Para expresar el producto de una suma ó diferencia indicada por un número, sin efectuar la suma ó diferencia, se coloca esta dentro de un paréntesis, y el número por que debe multiplicarse, fuera del mismo.

Así, el producto de $14 + 6 + 5$ por 8 se expresa por

$$(14 + 6 + 5) \times 8.$$

41. Teorema. *Para multiplicar una suma indicada por*

un número, se multiplica cada sumando por este número y se suman los productos.

Vamos á demostrar que

$$(3 + 5 + 8) \times 4 = 3 \times 4 + 5 \times 4 + 8 \times 4.$$

En efecto: segun dijimos en el número 30, el producto propuesto es una suma de 4 sumandos iguales á $3 + 5 + 8$; pero cada número 3, 5 y 8 está repetido en la suma 4 veces, ó lo que es igual, multiplicado por 4; luego

$$(3 + 5 + 8) \times 4 = 3 \times 4 + 5 \times 4 + 8 \times 4.$$

ESCOLIO. Este teorema puede enunciarse diciendo: *Si todos los sumandos de una suma se multiplican por un número, la suma queda multiplicada por el mismo número.*

42. TEOREMA. *Para multiplicar una diferencia indicada por un número, se multiplican el minuendo y el sustraendo por dicho número y se restan los productos.*

Queremos demostrar que

$$(15 - 8) \times 6 = 15 \times 6 - 8 \times 6.$$

En efecto: $15 - 8 = 7$, luego [25] $7 + 8 = 15$; pero si dos cantidades iguales se multiplican por el mismo número los productos son iguales, luego

$$(7 + 8) \times 6 = 15 \times 6 \text{ ó } 7 \times 6 + 8 \times 6 = 15 \times 6,$$

y restando de estas dos últimas cantidades iguales el producto 8×6, las diferencias serán iguales, luego

$$7 \times 6 = 15 \times 6 - 8 \times 6;$$

poniendo ahora en el primer miembro en vez de 7 su igual $15 - 8$, resulta por último

$$(15 - 8) \times 6 = 15 \times 6 - 8 \times 6,$$

lo cual debíamos demostrar.

ESCOLIO. Puede enunciarse este teorema diciendo: *Si el minuendo y sustraendo se multiplican por un mismo número, la diferencia queda multiplicada por dicho número.*

43. Si en todos los términos de una suma ó diferencia indicada entra un mismo número por factor, puede darse á la expresion otra forma mas sencilla, colocando dentro de un paréntesis los términos de la suma ó diferencia, prescindiendo del factor comun, y escribiendo éste fuera del paréntesis. Así, las expresiones

$$3 \times 4 + 5 \times 4 + 8 \times 4, \qquad 15 \times 6 - 8 \times 6$$

pueden expresarse respectivamente por

$$(3 + 5 + 8) \times 4, \qquad (15 - 8) \times 6.$$

Sabemos, en efecto, por los teoremas precedentes, que estas expresiones son iguales á las propuestas.

44. Teorema. *Para multiplicar un producto de dos factores por un número, se multiplica cualquiera de los factores por dicho número.*

En efecto: si tomamos para multiplicando aquel de los dos factores que se supone multiplicado por un número, el producto será una suma de tantos sumandos iguales á dicho factor como unidades tenga el otro; como el primero de estos factores se multiplica por un número, cada sumando resulta multiplicado por el mismo número, luego la suma está en igual caso [41], y como ésta no es mas que el producto propuesto, el teorema queda demostrado.

Escolio. Es muy comun enunciar esta verdad diciendo: *Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número, el producto queda multiplicado por el mismo número.*

IV.—Division.

45. La division *tiene por objeto descomponer un producto dado en dos factores, siendo conocido uno de estos.*

En esta operacion se *conoce* el producto de dos números y uno de estos, y se *busca* el otro.

El producto se llama *dividendo*, el factor conocido *divisor*, y el factor que se busca, ó sea el resultado de la operacion, *cociente*.

Segun la definicion, *el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente.*

La division de dos números se expresa poniendo entre ellos el signo : que se lee *dividido por;* así la division de 12 por 4 se escribe 12 : 4, y se lee 12 *dividido por* 4.

46. Hemos dicho [30] que un producto de números enteros equivale á una suma de tantos sumandos iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador; por tanto, éste indica las veces que el producto contiene al multiplicando; luego *el dividendo*, que es un producto, *es una suma de tantos números iguales al divisor como unidades tiene el cociente*. Por esto se dice con frecuencia: *dividir un número cualquiera por otro entero, es hacer el primero tantas veces menor como unidades tiene el segundo.*

Indica, pues, el cociente las veces que el dividendo contiene al divisor, y se hallará su valor restando éste de aquel cuantas veces sea posible.

Así, para hallar el cociente de 52 por 13, tendremos:

```
52
13
——
39 . . . . .  1.ª sustraccion.
13
——
26 . . . . .  2.ª  id.
13
——
13 . . . . .  3.ª  id.
13
——
00 . . . . .  4.ª  id.
```

Donde vemos que 52 contiene al 13 cuatro veces exactamente, luego el cociente de estos dos números es 4.

Hallemos del mismo modo el cociente de 57 por 13.

```
57
13
——
44 . . . . .  1.ª sustraccion.
13
——
31 . . . . .  2.ª  id.
13
——
18 . . . . .  3.ª  id.
13
——
 5 . . . . .  4.ª  id.
```

Vemos que 57 contiene á 13 cuatro veces y sobran además 5 unidades. El cociente es, pues, mayor que 4 y no llega á 5; por consiguiente no puede ser un número entero.

Como solo nos ocupamos ahora de estos números, no es posible hallar el cociente con exactitud, debiendo limitarnos á obtener el número entero de veces que el dividendo contiene al divisor.

A este número se llama *cociente entero* ó *incompleto* para distinguirle del obtenido en el ejemplo anterior, que se llama *exacto* ó *completo*. El último resto 5 se llama *residuo*, y vemos que *en la division incompleta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente mas el residuo.*

Estas divisiones incompletas provienen de tomar para dividendo un número que no puede ser el producto del divisor por un número *entero*.

47. En la division de enteros distinguiremos tres casos: 1.° que el divisor sea menor que 10 y el dividendo menor que diez veces el divisor; 2.° que el divisor sea mayor que 10 y el dividendo menor que diez veces el divisor; 3.° que el divisor sea un número cualquiera y el dividendo mayor que diez veces el divisor.

Todos estos casos pueden resolverse restando el divisor del dividendo cuantas veces se pueda; pero siendo muy largo en general semejante procedimiento, expondremos otro mucho más breve.

48. Primer caso. *El divisor es menor que* 10 *y el dividendo menor que diez veces el divisor.*

Sabiendo la tabla de la multiplicacion, los productos se presentan fácilmente á la memoria. Por ejemplo, si queremos dividir 48 por 6, la memoria nos dice que el número 8 es el cociente, puesto que multiplicado por 6 da 48.

49. Lema. *Un número cualquiera es menor que la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene.*

El caso más desfavorable es aquel en que todas las cifras del número son nueves.

Ahora bien,

$$10 = 9 + 1, \text{ luego } 10 > 9 \text{ [1]}$$
$$100 = 99 + 1, \text{ luego } 100 > 99$$
$$1000 = 999 + 1, \text{ luego } 1000 > 999$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Por consiguiente el lema es cierto.

Obsérvese que la menor diferencia entre el número propuesto y la unidad numerativa es uno.

50. Segundo caso. *El divisor es mayor que* 10 *y el dividendo menor que diez veces el divisor.*

Propongámonos dividir 6548 por 729.

El dividendo no contiene diez veces al divisor, porque 6548 es menor que $729 \times 10 = 7290$, luego el cociente tendrá una cifra.

$$\begin{array}{r|l} 6548 & 729 \\ \cline{2-2} 5832 & 8 \\ \cline{1-1} 716 & \end{array}$$

Prescindamos en el divisor de todas las cifras que siguen

---

[1] El signo > se lee *mayor que*.

á la primera, y de otras tantas en el dividendo, y considerando los números 65 y 7 que resultan, reduciremos el caso presente al anterior.

Demostremos ahora que el cociente de los números dados no puede ser mayor que el de 65 por 7, esto es, que 9.

En efecto, un cociente mayor que 9, multiplicado por las 7 centenas del divisor, daría un número de centenas mayor que 65, y por lo tanto mayor que el dividendo, que no puede valer 66 centenas [49].

Pero el cociente verdadero puede ser menor que 9; en efecto, las 65 centenas del dividendo pueden contener, además de las centenas que resultan de multiplicar el cociente por las 7 del divisor, otras centenas resultantes de multiplicar el cociente por las decenas y unidades del divisor, y las del residuo; solamente las últimas pueden ascender á 7, luego la cifra 9 podrá ser mayor que la verdadera.

Para comprobarla se multiplica por el divisor, y si el producto es mayor que el dividendo, como sucede en este caso, el cociente evidentemente es menor que 9; por lo tanto debemos disminuir esta cifra en una unidad, y someter el número 8 á la misma comprobacion.

El producto de 8 por el divisor es 5832, que puede restarse del dividendo, luego 8 es el verdadero cociente. Restando 5832 del dividendo, se obtiene el residuo 716.

Advirtiremos que la cifra 8 podria tambien ser mayor que la verdadera, y que entónces debia disminuirse en otra unidad, y comprobar el cociente 7, continuando del mismo modo hasta obtener un producto menor que el dividendo.

Este es el procedimiento en su parte esencial, pero existen reglas que lo facilitan y abrevian.

1.ª El dividendo y divisor se separan por una línea vertical, y debajo del último se traza una horizontal, para separarle del cociente, que se coloca debajo.

2.ª Si la segunda cifra del divisor es mayor que 5, se considera aumentada la primera en una unidad; es evidente que si, por ejemplo, el divisor es 487, se acerca mas á cinco que á cuatro centenas, luego tomando el 5 para divisor nos aproximaremos mas al cociente verdadero.

3.ª El producto de la cifra que se comprueba por el divisor, y la diferencia entre este producto y el dividendo se obtienen simultáneamente. En el ejemplo propuesto diremos: 8 por 9, 72; de 72 á 78 van 6; 8 por 2, 16; y como el minuendo ha sido aumentado en 7 decenas, se añaden tambien al sustraendo, 16 y 7, 23; de 23 á 24, 1; 8 por 7, 56; 56 y 2, 58; de 58 á 65, 7.

Ya podemos enunciar la siguiente regla.

Para dividir un número por otro, cuando el cociente es menor que 10, *se prescinde en el divisor de todas las cifras que siguen á la primera, y de otras tantas de la derecha en el dividendo, y se efectúa la division de los números que resultan. El cociente obtenido se multiplica por el divisor, y si el producto puede restarse del dividendo, dicho cociente será el verdadero; pero si el producto es mayor que el dividendo, se disminuirá en una unidad la cifra del cociente, sometiendo despues la nueva cifra á la misma comprobacion. Continuando de este modo se hallará un producto que podrá restarse del dividendo, y la operacion quedará terminada efectuando la sustraccion.*

Si la cifra del cociente se ha puesto por tanteo, podrá ser menor que la verdadera, lo que se conoce por el residuo, que es en tal caso igual ó mayor que el divisor.

Tercer caso. *El divisor es un número cualquiera y el dividendo mayor que diez veces el divisor.*

Propongámonos dividir 34595 por 129.

El divisor 129 multiplicado por 100 da 12900, número menor que el dividendo, luego éste contiene cien veces cuando menos al divisor. Si éste se multiplica por 1000 resulta 129000, número mayor que el dividendo, luego éste no contiene mil veces al divisor.

Por consiguiente, el cociente es mayor que 100 y menor que 1000; tendrá, pues, tres cifras.

Siendo el dividendo un producto del divisor por el cociente, se compone [36] de tres productos parciales, que son los que resultan de multiplicar el divisor por las unidades, decenas y centenas del cociente. Además, si la division no es exacta, el dividendo contendrá el residuo.

Si del dividendo lográsemos separar sucesivamente los tres productos parciales, bastaría dividirlos por el divisor para hallar las cifras correspondientes del cociente. Estas divisiones parciales pertenecerian al segundo caso, puesto que los cocientes tendrían una sola cifra.

Veamos hasta qué punto es posible separar sucesivamente del dividendo los productos parciales mencionados.

El último de estos es un número exacto de centenas, puesto que resulta de multiplicar el divisor por las centenas del cociente [36], y forma parte del dividendo; pero éste contiene en general algunas otras centenas, que proceden de los demás productos parciales y aun del residuo, las cuales agregándose al producto parcial último, impiden aislarle.

Sin embargo, las centenas agregadas no bastan para que dividiendo la suma de unas y otras, esto es, todas las del dividendo, por el divisor, resulte una cifra mayor que la primera del cociente. En efecto, las que siguen á ésta forman un número menor que una centena [49], luego el producto de este número por el divisor, que es la suma de los productos parciales, excepcion hecha del último, será menor que 129 centenas, faltándole por lo menos 129 unidades simples, y no pudiendo el residuo alcanzar este valor, porque necesariamente es menor que el divisor, resulta que *el número de centenas agregadas al último producto parcial no llega á componer una vez el divisor,* y como dicho producto vale á lo mas nueve veces el divisor, se infiere que *el número de centenas del dividendo es menor que el décuplo del divisor.* Además es evidente que dicho número de centenas debe ser igual ó mayor que el divisor.

De estas conclusiones se deduce:

1.° *Dividiendo las centenas del dividendo por el divisor, se obtendrá precisamente la primera cifra del cociente.*

2.° *Para separar en el dividendo las unidades numerativas del mismo órden que las superiores del cociente, se tomarán de la izquierda de aquel las cifras necesarias para formar un número igual ó mayor que el divisor y menor que el décuplo de éste.*

Es evidente que estas cifras serán tantas como tiene el divisor ó una mas.

345.95	129
258 00	268
879.5	
774 0	
105 5	
103 2	
2 3	

Separemos, pues, las tres primeras cifras, y dividamos 345 por 129; el cociente es 2. Multiplicando 2 centenas por el divisor se obtiene el último producto parcial, y restando éste, que es 258 centenas, del dividendo, la diferencia 8795 es la suma de los demás productos parciales y del residuo.

Aplicando á 8795 el razonamiento anterior, se veria que separando sus 879 decenas y dividiendo este número por el divisor, se obtienen las 6 decenas del cociente.

Multiplicando 6 decenas por el divisor se obtiene el segundo producto parcial 774 decenas, y restándolo de 8795, la diferencia 1055 será el primer producto parcial mas el residuo.

Finalmente, dividiendo 1055 por el divisor se obtiene la cifra 8 del cociente, que multiplicada por el divisor da el primer producto parcial, y restando éste de 1055, la diferencia 23 es el residuo de la operacion.

Obsérvese que los números que se han dividido por 129 han sido 345,879 y 1055, pudiendo formarse estos dos últimos restando del dividendo parcial anterior el producto de la cifra del cociente, en su valor absoluto, por el divisor, y colocando á la derecha de la diferencia la cifra siguiente del dividendo. Ademas, las sustracciones pueden efectuarse al mismo tiempo que los productos, como se explicó en el segundo caso.

La disposicion práctica de la operacion es como sigue.

$$\begin{array}{r|l} 345.95 & 129 \\ \cline{2-2} 87\,9 & 268 \\ 10\,55 & \\ 23 & \end{array}$$

Los razonamientos anteriores conducen á la siguiente regla.

Para dividir dos números, cuando el divisor es un número cualquiera y el dividendo mayor que diez veces el divisor, se separan de la izquierda del dividendo tantas cifras como tiene el divisor, ó una mas, si las primeras forman un número menor que el divisor; se divide el número separado por el divisor, con lo que se obtiene la cifra de órden superior del cociente; el producto de esta cifra por el divisor se resta del dividendo parcial, y á la derecha del resto se coloca la primera cifra de las no separadas; dividiendo el número que así se forma por el divisor, se obtiene la segunda cifra del cociente, con la que se repiten las mismas operaciones que se hicieron con la primera; continuando de este modo hasta que se hayan empleado sucesivamente todas las cifras no separadas del dividendo, se obtendrá el cociente entero, y el resto de la última sustraccion será el residuo de la operacion.

Si alguno de los dividendos parciales fuese menor que el divisor, la cifra correspondiente del cociente será cero, y se colocará á la derecha de dicho dividendo parcial la siguiente del total, continuando despues del modo dicho.

52. Es muy conveniente comparar las operaciones siguientes, para formar cabal idea de cómo la division descompone la multiplicacion.

MULTIPLICACION.

Multiplicando.	129
Multiplicador.	268
1.er producto parcial. .	1032
2.° id. id. . .	7740
3.er id. id. . .	25800
Producto total.	34572
Residuo.	23
Dividendo.	34595

LA OPERACION ANTERIOR DESCOMPUESTA POR LA DIVISION.

Dividendo.	34595	129	Multiplicando.
3.er producto parcial. .	25800	268	Multiplicador.
	8795		
2.° id. id. . .	7740		
	1055		
1.er id. id. . .	1032		
Residuo.	23		

53. *Otra teoría de la division.*

Vamos á dividir 34572 por 267.

Siendo el dividendo mayor que diez veces el divisor, el cociente será mayor que 10, y constará por consiguiente de decenas y unidades.

El producto de las decenas del cociente por el divisor es un número exacto de decenas, las cuales estarán contenidas en las del dividendo; pero estas contienen además algunas otras que han podido resultar del producto de las unidades del cociente por el divisor y del residuo; luego si dividimos las 3457 decenas por 267, el cociente no será menor que el verdadero. Tampoco puede ser mayor, porque para resultar el cociente aumentado en una decena, sería necesario que 3457 contuviese 267 decenas resultantes de multiplicar el divisor por las unidades del cociente, lo que es imposible, porque este producto es á lo mas igual á 267 $\times$ 9, y aunque añadamos el residuo, si lo hay, será á lo sumo igual á 266, de modo que todavía faltará una unidad para completar las 267 decenas; luego

Dividiendo las decenas de un número por el divisor, se obtienen las decenas del cociente.

Si restamos del dividendo el producto del divisor por las decenas del cociente, el resto contendrá el producto del divisor por las unidades del cociente y además el residuo de la operacion. Dividiendo aquel resto por el divisor, obtendremos las unidades del cociente; el producto de estas por el divisor restado del dividendo parcial dará el residuo; luego

Para dividir dos números se dividen las decenas del dividendo por el divisor, y se obtendrán las decenas del cociente; para hallar las unidades, se resta del dividendo el producto del divisor por las decenas del cociente, y se divide la diferencia por el divisor.

34572	267
2670	129
787	
534	
2532	
2403	
129	

Segun esta regla, debemos dividir 3457 por 267; y como el cociente contiene á su vez decenas y unidades, dividiremos 345 decenas por 267, y obtendremos 1 para cifra de las decenas. Multiplicando 1 decena por el divisor y restando el producto de 3457, se obtiene el resto 787, que dividido por 267 da las unidades. Multiplicando 2 por el divisor y restando el producto 534 del resto anterior, se obtiene el resto 253 de la division de 3457 por 267.

El cociente obtenido 12 representa las decenas de la division total, luego debemos multiplicarle por el divisor y restar el producto del dividendo; sin embargo, esta sustraccion la hemos efectuado ya en parte, puesto que se ha restado de 3457 el producto de 267 por 12 unidades; para completarla, observaremos que el producto de 267 por 12 decenas se forma añadiendo un cero al de 267 $\times$ 12, y que poniendo la última cifra 2 á la derecha de 3457, se tiene el dividendo total; luego la diferencia que buscamos se obtendrá colocando la cifra 2 á la derecha del resto 253; resulta así el número 2532, que dividido por 267 da la última cifra del cociente.

De este nuevo razonamiento se deduce la misma regla que del primero.

54. *La prueba de la division consiste en multiplicar el cociente por el divisor y añadir al producto el residuo: la suma será igual al dividendo* [46], *si la operacion y la prueba están bien hechas.*

55. Si se suprime uno ó mas ceros de la derecha de un número, quedará éste dividido por la unidad seguida de los ceros suprimidos.

En efecto: si suprimimos los ceros del número 37000, cada cifra significativa adquiere un valor *mil* veces menor [16], luego el número queda dividido por 1000.

56. *Caso particular.* Si el dividendo tiene varias cifras y el divisor una sola, se simplifica mucho el procedimiento del tercer caso omitiendo los restos y los dividendos parciales, que se encomiendan á la memoria.

Por ejemplo, para dividir 37249 por 7, diremos:

$$\begin{array}{r|l} 37249 & 7 \\ 5321 & \\ 2 & \end{array}$$

la sétima parte de 37 es 5 y sobran 2, que con la cifra siguiente del dividendo componen 22; la sétima parte de 22 es 3 y sobra 1, que con la cifra siguiente forma 14; la sétima parte de 14 es 2 y no sobra nada; la sétima parte de 9 es 1 y sobran 2, que es el residuo de la operacion.

57. Un número es *divisible* por otro, cuando la division del primero por el segundo es exacta.

El primer número es *múltiplo* del segundo y éste á su vez es *factor, divisor* ó *parte alícuota* del primero.

Así, 24 es divisible por 6, y 6 es divisor, factor ó parte alícuota de 24.

58. Teorema. *Para dividir una suma indicada por un factor de todos los sumandos, se divide cada uno de estos por el factor comun, y se suman los cocientes.*

Vamos á demostrar que

$$(15 + 18 + 27) : 3 = 15 : 3 + 18 : 3 + 27 : 3.$$

El cociente ha de ser un número que multiplicado por 3 dé $15+18+27$; pero si multiplicamos $15:3+18:3+27:3$, que es una suma indicada, por 3, el producto de multiplicar cada cociente de los que componen la suma por el divisor 3 debe dar el dividendo respectivo, luego

$$(15 : 3 + 18 : 3 + 27 : 3) \times 3 = 15 + 18 + 27.$$

Lo que demuestra el teorema.

Esta verdad se enuncia con frecuencia diciendo: *Si todos los sumandos de una suma se dividen por un factor comun, la suma quedará dividida por dicho factor.*

59. Teorema. *Para dividir la diferencia entre dos números por un factor de ambos, se divide cada uno de ellos por el factor comun, y se restan los cocientes.*

Queremos demostrar que

$$(28 - 16) : 4 = 28 : 4 - 16 : 4.$$

En efecto,

$$(28 : 4 - 16 : 4) \times 4 = 28 - 16,$$

que es la diferencia dada; luego $28 : 4 - 16 : 4$ es el cociente.

Tambien podemos decir: *Si el minuendo y el sustraendo se dividen por un factor comun, la diferencia queda dividida por dicho factor.*

60. Teorema. *Para dividir un producto de dos números por un divisor de uno de los factores, se divide este factor por su divisor.*

En efecto: si consideramos como multiplicando el factor que se supone dividido, el producto será una suma de tantos números iguales á dicho factor como unidades tiene el otro; dividiendo el primero por un número, cada sumando queda dividido por el mismo número, luego la suma está en igual caso [58], y como la suma no es mas que el producto propuesto, el teorema queda demostrado.

Esta verdad puede tambien enunciarse diciendo: *Si uno de los factores de un producto se parte por un divisor suyo, el producto quedará partido por el mismo divisor.*

61. Expongamos una aplicacion importante de este teorema.

Cuando uno ó los dos factores de un producto terminan en ceros, para efectuar la multiplicacion, se prescinde de estos, se multiplican los números que resultan, y á la derecha del producto se añaden tantos ceros como tienen los factores propuestos.

Si queremos, por ejemplo, multiplicar 56300 por 43000, se multiplica solamente 563 por 43, y se añaden cinco ceros al producto 24209.

En efecto: suprimiendo dos ceros en el multiplicando, se divide por 100 [55], luego el producto quedará dividido por 100; suprimiendo tres ceros en el multiplicador, se divide por 1000; luego el producto se hace 1000 veces menor. Por consiguiente, para que el producto sea el verdadero, hay que hacerle 100 veces mayor y despues 1000 veces mayor, lo que se consigue añadiendo cinco ceros, precisamente tantos como tienen los dos factores.

Será, pues, $56300 \times 43000 = 2420900000$.

V.—Producto de varios factores enteros.

62. Lema. *Un producto de dos factores no se altera dividiendo uno de los factores por un divisor suyo, y multiplicando el otro factor por dicho divisor.*

En efecto: dividiendo uno de los factores por un divisor suyo, el producto queda dividido por dicho divisor [60]; pero multiplicando el otro factor por el mismo número, el producto queda multiplicado [44]; y como estas alteraciones del producto se destruyen mútuamente, dicho producto no varía.

63. Una expresion de la forma

$$2 \times 3 \times 5 \times 4$$

se llama *producto de varios factores,* y significa que el primero de ellos 2 debe multiplicarse por el siguiente 3, el producto 6 por el tercer factor 5, y el producto 30 de los tres primeros por el cuarto 4. De modo que

$$2 \times 3 \times 5 \times 4 = 120.$$

Por consiguiente, un producto de varios números $2 \times 3 \times 5 \times 4$ puede considerarse compuesto de dos factores solamente, siendo uno de ellos el valor efectuado de $2 \times 3 \times 5$ y 4 el otro. De modo que

$$2 \times 3 \times 5 \times 4 = (2 . 3 . 5) \times 4.$$

Siempre que escribamos un producto de varios factores en una de las formas

$$(2 . 3 . 5) \times 4 \quad \text{ó} \quad 2 . 3 . 5 \times 4,$$

se entenderá que lo consideramos como el producto de las cantidades separadas por el signo $\times$.

64. Teorema. *Para multiplicar un número por un producto de varios factores, se multiplica el número sucesivamente por cada uno de los factores.*

Si los factores son dos, el teorema es cierto.

En efecto: $3 \times (2 . 5) = (3 . 2) \times 5$ [62];

pero es evidente que $(3 . 2) \times 5 = 3 . 2 . 5$;

luego $3 \times (2 . 5) = 3 . 2 . 5$.

Si el teorema es cierto cuando el producto consta de varios factores, lo será igualmente cuando el producto tenga un factor mas.

Supongamos que

$$3 \times (2 \,.\, 5 \,....\, 4) = 3 \,.\, 2 \,.\, 5 \,....\, 4;$$

vamos á demostrar que el teorema será tambien cierto si al producto 2 . 5 .... 4 se añade un factor nuevo 7, esto es, que

$$3 \times (2 \,.\, 5 \,....\, 4 \,.\, 7) = 3 \,.\, 2 \,.\, 5 \,....\, 4 \,.\, 7.$$

El producto 2 . 5 .... 4 . 7 puede considerarse compuesto de solo dos factores: 2 . 5 .... 4 y 7; si lo dividimos por el factor 2 . 5 .... 4, el cociente será 7; segun esto y el lema [62], tendremos

$$3 \times (2 \,.\, 5 \,....\, 4 \,.\, 7) = (3 \times 2 \,.\, 5 \,....\, 4) \times 7;$$

pero suponemos que $3 \times 2 \,.\, 5 \,....\, 4 = 3 \,.\, 2 \,.\, 5 \,....\, 4;$
luego la anterior igualdad se convierte en

$$3 \times (2 \,.\, 5 \,....\, 4 \,.\, 7) = (3 \,.\, 2 \,.\, 5 \,....\, 4) \times 7;$$

pero es evidente que $(3.2.5 \,....\, 4) \times 7 = 3.2.5 \,....\, 4.7,$
luego finalmente $3 \times (2.5 \,....\, 4.7) = 3.2.5 \,....\, 4.7.$

Ahora bien, como el teorema es cierto para dos factores, lo será igualmente para tres; siendo cierto para tres, lo será para cuatro, y así sucesivamente; luego es siempre cierto.

65. Teorema. *Para multiplicar entre sí dos productos indicados, se multiplica el primero sucesivamente por cada uno de los factores del segundo.*

Queremos demostrar que

$$(3 \,.\, 5 \,.\, 2) \times (4 \,.\, 6 \,.\, 7) = 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 7.$$

En efecto: 3 . 5 . 2 puede sustituirse por su valor efectuado 30, y tendremos

$$(3.5.2) \times (4.6.7) = 30 \times (4.6.7) = 30.4.6.7 = 3.5.2.4.6.7.$$

66. Teorema. *Para multiplicar un producto indicado por un número, se multiplica cualquiera de sus factores por dicho número.*

Vamos á demostrar que para multiplicar el producto 2 . 3 . 5 . 4 por 7, basta multiplicar cualquiera de sus factores, el 3 por ejemplo, por 7.

Sabemos [65] que

$$2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 4 = 2 \,.\, 3 \times 5 \,.\, 4,$$

luego $(2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 4) \times 7 = (2 \,.\, 3 \times 5 \,.\, 4) \times 7;$
pero se multiplica un producto de *dos* factores por un número, multiplicando cualquiera de los factores; luego

$$(2 \,.\, 3 \times 5.4) \times 7 = 2.\,3\,.\,7 \times 5\,.\,4 = 2.\,3.\,7\,.\,5\,.\,4. = 2.\,21\,.\,5\,.\,4.$$

67. Teorema. *Un producto de varios factores no se altera variando el órden de los factores.*

Si estos son dos, el teorema está ya demostrado [31].

Supongamos que sean mas de dos, y probemos, en primer lugar, que uno cualquiera de ellos puede colocarse el último.

Sea el producto 2 . 3 . 5 . 4 . 7; digo que el factor 5 puede ocupar el último lugar.

En efecto: $2 . 3 . 5 . 4 . 7 = 2 . 3 \times 5 . 4 . 7$ [64];
pero $5 . 4 . 7 = 5 \times 4 . 7 = 4 . 7 \times 5 = 4 . 7 . 5$;
luego $2 . 3 . 5 . 4 . 7 = 2 . 3 \times 4 . 7 . 5 = 2 . 3 . 4 . 7 . 5$.

Demostremos ahora que el último factor puede ocupar un lugar cualquiera.

El producto 2 . 3 . 4 . 7 . 5 puede considerarse compuesto de los factores 2 . 3 . 4 . 7 y 5; pero habiendo demostrado que para multiplicar un producto por un número, se multiplica cualquiera de los factores por dicho número, tendremos

$$(2 . 3 . 4 . 7) \times 5 = 2 . 3 . (4 . 5) . 7 = 2 . 3 . 4 . 5 . 7.$$

Acabamos de ver que todo factor puede ocupar el último lugar y de éste pasar á otro cualquiera, luego se puede alterar arbitrariamente el órden de los factores, sin que varíe el valor del producto.

68. Teorema. *Para dividir un producto indicado por un divisor de uno de sus factores, se divide este factor por su divisor.*

Sea 2 . 8 . 15 . 7 el producto que se quiere dividir por 5; vamos á demostrar que basta dividir el factor 15 por 5, esto es, que

$$(2 . 8 . 15 . 7) : 5 = 2 . 8 . 3 . 7.$$

En efecto: multiplicando el segundo miembro de esta igualdad por el divisor 5, para lo cual basta multiplicar por este número el factor 3, resulta el dividendo 2 . 8 . 15 . 7, luego el mencionado segundo miembro es el cociente buscado.

69. Teorema. *Dividiendo un número por uno de sus factores, el cociente por uno de los suyos, el segundo cociente por otro factor etc., el último cociente es el mismo que se obtendria dividiendo el número dado por el producto de todos los divisores.*

Supongamos que se divide 840 por 2, el cociente 420 por 3, el segundo cociente 140 por 5; vamos á demostrar que el tercer cociente 28 es el mismo que se obtendria dividiendo 840 por 2 . 3 . 5.

En efecto: multiplicando el tercer cociente 28 por 5 se obtiene el segundo; multiplicando éste por 3, se obtiene el primero; y multiplicando éste por 2 se obtiene el número dado 840. Pero habiendo multiplicado 28 sucesivamente por 5, 3 y 2, se ha multiplicado por el producto 2 . 3 . 5; luego 28 es el cociente de 840 por el producto 2 . 3 . 5 de los divisores.

70. Los productos de factores iguales dan origen á las potencias.

Potencia *de un número es el producto de varios factores iguales al número.*

Si los factores iguales son dos, la potencia se llama *segunda ó cuadrado;* si son tres, *tercera ó cubo;* si son cuatro, cinco etc., se llama *cuarta, quinta etc.*

Así, 5×5 es la segunda potencia ó el cuadrado de 5,
$5 \times 5 \times 5$ es la tercera potencia ó el cubo de 5,
$5 \times 5 \times 5 \times 5$ es la cuarta potencia de 5 etc.

Con objeto de abreviar la expresion de las potencias, se escribe el factor una sola vez y á su derecha, un poco elevado, un número que indica las veces que el propuesto se repite por factor.

De modo que
el cuadrado de 5, que es 5 . 5, se escribe 5^2,
el cubo de 7, que es 7 . 7 . 7, se escribe 7^3.

Las expresiones 5^2, 7^3 se enuncian respectivamente diciendo: *cinco elevado al cuadrado, siete elevado al cubo.*

Grado de una potencia es *el número ordinal que expresa cuántos factores la componen.*

Exponente de una potencia es *el número cardinal correspondiente á su grado.*

2^5 es la potencia de quinto grado de 2, el exponente es 5.

Para hallar la potencia de cierto grado de un número, se multiplica éste por sí mismo tantas veces menos una como unidades tiene el exponente; puesto que una multiplicacion contiene dos factores, dos multiplicaciones, tres; en fin, el número de multiplicaciones es inferior en una unidad al de factores.

Siempre que un número quiera expresarse en forma de potencia, convendremos en asignarle el exponente 1; así $5 = 5^1$, y diremos: *la primera potencia de un número es el mismo número.*

71. Teorema. *Para multiplicar dos potencias de un mismo número, se eleva éste á una potencia cuyo exponente sea la suma de los exponentes de los factores.*

En efecto:

$$2^3 \times 2^4 = 2 . 2 . 2 \times 2 . 2 . 2 . 2 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 2^7.$$

CAPÍTULO TERCERO.

PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

I.—Divisibilidad.

72. Teorema. *Todo número divisor de otros varios, es divisor de su suma.*

Sea 3 el número divisor de 15, 21 y 30; queremos demostrar que 3 es divisor de $15 + 21 + 30$.

En efecto: el cociente de $15 + 21 + 30$ por 3 es la suma de los cocientes que se obtienen dividiendo cada sumando por 3 [58], pero estos cocientes son exactos por hipótesis, luego el de $15 + 21 + 30$ es tambien exacto, ó lo que es igual, 3 es divisor de $15 + 21 + 30$.

73. Teorema. *Si un número es divisor de un sumando y no lo es del otro, no es divisor de la suma.*

7 es divisor de 35 y no lo es de 27; queremos demostrar que 7 no es divisor de $35 + 27$.

Sabemos que $35 = 5 . 7$, $27 = 3 . 7 + 6$; sumando miembro á miembro estas igualdades, resulta

$$35 + 27 = 5 . 7 + 3 . 7 + 6 = (5 + 3) . 7 + 6;$$

si dividimos $35 + 27$ por 7, el cociente será $5 + 3$ y quedará 6 de residuo, luego la suma de los números propuestos no es divisible por 7.

Escolio. El residuo correspondiente á la suma $35 + 27$, es el mismo que se obtendría dividiendo el segundo sumando.

74. Teorema. *Todo divisor de un número, es tambien divisor de cualquier múltiplo de este número.*

5 es divisor de 15; vamos á demostrar que tambien lo es de $15 . 4$.

En efecto: $15 . 4 = 15 + 15 + 15 + 15$; siendo 5 divisor de todos estos sumandos, es divisor de la suma, ó sea del producto $15 . 4$.

Conviene enunciar tambien este teorema de la manera siguiente: *Todo múltiplo de un número, es tambien múltiplo de cualquier divisor de dicho número.*

Esto es, siendo $15 . 4$ múltiplo de 15, es tambien múltiplo de cualquier divisor de 15, de 5 por ejemplo.

75. Teorema. *Todo divisor de dos números, es tambien divisor de su diferencia.*

Sea 7 el número, divisor de 3 5 y 14, decimos que 7 es tambien divisor de 35 — 14.

En efecto: el cociente de 35 — 14 por 7 es la diferencia de los cocientes que se obtiene dividiendo el minuendo y el sustraendo por 7 [59]; pero estos cocientes son exactos por hipótesis, luego el de 35 — 14 por 7 es tambien exacto, ó lo que es igual, 7 es divisor de la diferencia.

76. Teorema. *Si un número es divisor del minuendo y no lo es del sustraendo, no es divisor de la diferencia.*

En efecto: la diferencia mas el sustraendo es igual al minuendo; si la diferencia fuese divisible por el número propuesto, como el sustraendo nó lo es, la suma, esto es el minuendo, no podria serlo [73], lo cual es contrario á la hipótesis; luego el número propuesto no puede ser divisor de la diferencia.

77. Teorema. *Si la diferencia de dos números es divisible por un tercero, los residuos de dividir aquellos por éste son iguales.*

Sean 41 y 29 los números; tenemos $41 - 29 = 12$, y sea 3 un factor de la diferencia 12; vamos á demostrar que los residuos de dividir 41 y 29 por 3 son iguales.

En efecto: $41 = 12 + 29$;

3 es divisor de 12; si divide á 29 será factor de 41, luego los residuos serán ambos iguales á *cero*. Si 3 no divide á 29, tampoco divide á 41; pero el residuo de dividir por 3 la suma es igual al de dividir el sumando 29 [73, escolio]; luego el teorema enunciado es cierto.

78. Teorema recíproco. *Si dividiendo dos números por un tercero se obtienen residuos iguales, la diferencia de dichos dos números es divisible por el tercero.*

Supongamos que los números 72 y 46 divididos por 13 den ambos el residuo 7; queremos demostrar que 72 — 46 es divisible por 13.

En efecto: La diferencia 72 — 46 no se altera restando 7 unidades del minuendo y otras 7 del sustraendo; pero estos números disminuidos en el residuo 7 son divisible por 13, luego su diferencia lo es tambien.

79. Todo número divisible por 2 se llama *par*, y si no lo es, *impar*.

2, 4, 6, 8 son números pares; 1, 3, 5, 7 son impares.

Teorema. *Para que un número sea divisible por* 10, *se necesita y basta que termine en cero.*

En efecto: si el cociente de un número por 10 es exacto, multiplicándole por el divisor se obtendrá el número propuesto; pero el producto por 10 termina en cero, luego si un número es divisible por 10 termina necesariamente en cero.

Además el cociente de dicho número por 10 es la cantidad que resulta suprimiendo el cero en que termina [55]; luego basta que un número termine en cero para que sea divisible por 10.

80. De un modo semejante se demuestra el siguiente

Teorema. *Para que un número sea divisible por la unidad seguida de varios ceros, se necesita y basta que termine en tantos ceros como acompañan á la unidad.*

81. Teorema. *Para que un número sea divisible por* 2, *es necesario y suficiente que termine en cero ó en cifra par.*

Sea el número 350; este número es múltiplo de 10; 10 es el producto de 2 . 5, luego 2 es divisor de 10; por consiguiente tambien lo será de su múltiplo 350 [74].

Sea el número 346, que termina en cifra par; se puede descomponer este número en los sumandos 340 y 6; 2 es divisor de 340, es tambien divisor de 6, luego será divisor de la suma 340 + 6, ó de 346; luego todo número que termina en cero ó cifra par es divisible por 2, lo que manifiesta que la condicion del enunciado es suficiente.

Además es necesaria, porque 237, por ejemplo, se descompone en 230+7, y como el primer sumando es múltiplo de 2 y el segundo no lo es, tampoco lo será la suma.

82. Teorema. *Para que un número sea divisible por* 5, *se necesita y basta que termine en cero ó en* 5.

Si el número termina en cero es divisible por 10, y como 10 es múltiplo de 5, el número propuesto lo será tambien.

Si termina en 5, por ejemplo 375, se descompone en 370 + 5, y como estos sumandos son divisibles por 5, la suma lo será tambien; luego la condicion es suficiente.

Si el número no termina en cero ni en 5, por ejemplo 273, se descompone en 270 + 3; el primer sumando es divisible por 5, el segundo no lo es, luego tampoco lo será la suma; lo que prueba que la condicion del enunciado es necesaria.

83. Teorema. *Para que un número sea divisible por* 4, *es necesario y suficiente que las dos últimas cifras sean ceros ó compongan un múltiplo de* 4.

En efecto: todo número terminado en dos ceros es divisible por 100 [80[; pero 100 = 25 . 4 es divisible por 4, luego el número propuesto lo será tambien.

Sea el número 3528, cuyas dos últimas cifras componen el número 28, múltiplo de 4.

3528 = 3500 + 28; el primer sumando es divisible por 4, el segundo lo es tambien, luego la suma 3528 es un múltiplo de 4.

Por consiguiente la condicion del enunciado es suficiente.

Del mismo modo que en los teoremas anteriores se demostraría que es necesaria.

84. Teorema. *Para que un número sea divisible por 25, se necesita y basta que las dos últimas cifras sean ceros ó compongan un múltiplo de* 25.

Se demuestra este teorema como los anteriores.

85. Lema. *Toda cifra significativa seguida de ceros, es un múltiplo de* 9 *aumentado en el valor absoluto de la cifra significativa.*

Sea el número 7000; demostremos que este número se compone de un múltiplo de 9 mas 7 unidades.

En efecto: 7000 = 1000 . 7; y 1000 = 999 + 1, pero todo número escrito solo con nueves es un múltiplo de 9, porque puede considerarse como el producto por 9 de un número escrito solo con unos; luego

$$1000 = m\ .\ \text{de}\ 9 + 1\ ;$$ [1]

poniendo en la igualdad 7000 = 1000 . 7 en lugar de 1000 este valor, será

$$7000 = (m\ .\ \text{de}\ 9 + 1)\ .\ 7 = m\ .\ \text{de}\ 9\ .\ 7 + 7;$$

y como todo múltiplo de 9 multiplicado por 7 es tambien múltiplo de 9, tendremos por último

$$7000 = m\ .\ \text{de}\ 9 + 7.$$

86. Teorema. *Para que un número sea divisible por* 9, *se necesita y basta que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea múltiplo de* 9.

Sea el número 3564.

Tenemos $3564 = 3000 + 500 + 60 + 4;$

pero
$$\begin{aligned} 3000 &= m\ .\ \text{de}\ \ 9 + 3 \\ 500 &= m\ .\ \text{de}\ \ 9 + 5 \\ 60 &= m\ .\ \text{de}\ \ 9 + 6 \\ 4 &= \qquad\qquad\quad\ 4 \end{aligned}$$

Sumando los primeros miembros de estas igualdades y despues los segundos, las sumas serán iguales. La primera

---

1 La expresion m . de 9, léase *múltiplo* de 9.

es el número propuesto; en cuanto á la segunda se compone de varios múltiplos de 9, cuya suma es tambien divisible por 9 [72], y de $3 + 5 + 6 + 4$. Tenemos, pues,

$$3564 = m \text{ . de } 9 + (3 + 5 + 6 + 4).$$

Escribimos el segundo miembro en esta forma, para considerarle como la suma de dos números: uno de ellos, m . de 9, es divisible por 9; si el segundo sumando $3 + 5 + 6 + 4$ es igualmente divisible por 9, la suma lo será tambien; pero si dicho sumando no es múltiplo de 9, tampoco lo será el número propuesto. Ahora bien, $3 + 5 + 6 + 4$ es la suma de los valores absolutos de las cifras de éste, luego el teorema es cierto.

87. Teorema. *Para que un número sea divisible por 3, se necesita y basta que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea múltiplo de* 3.

Acabamos de ver, en efecto, que cualquiera que sea el número dado, es igual á un múltiplo de 9 mas la suma de los valores absolutos de sus cifras. Siendo 3 factor de 9, el mencionado múltiplo de 9 será tambien múltiplo de 3; luego si la suma de las cifras del número dado es divisible por 3, lo será el número, y no lo será en el caso contrario.

88. Lema. *Una cifra significativa seguida de ceros es un múltiplo de 11 aumentado ó disminuido en el valor absoluto de dicha cifra, segun que el número de ceros sea par ó impar.*

Dividamos la unidad seguida de un número indefinido de ceros por 11,

$$\begin{array}{r|l} 100.0.0.0.0.\ldots\ldots & 11 \\ \cline{2-2} 1\;0\;0\quad\;\; & 90909\ldots \\ 1\;0\;0\; & \\ 1\; & \end{array}$$

y veremos que las cifras del cociente son 9 y 0 alternativamente, y los residuos 1 y 10: es claro que esta ley se observará siempre. Luego 100, 10000, 1000000, en una palabra, la unidad seguida de un número par de ceros, da 1 de residuo, ó es un múltiplo de 11 aumentado en una unidad; mientras que 10, 1000, 100000, esto es, la unidad seguida de un número impar de ceros, da 10 de residuo, ó es un multiplo de 11 disminuido en una unidad.

Ahora es fácil demostrar el lema.

Sea, por ejemplo, el número 50000.

Tenemos $50000 = 10000 \,.\, 5$, pero $10000 = m \text{ . de } 11 + 1$, luego $50000 = (m \text{ . de } 11 + 1) \,.\, 5 = m \text{ . de } 11 \,.\, 5 + 5;$

pero m . de 11 . 5 es un múltiplo de 11 [74]; luego

$$50000 = m \,.\, \text{de } 11 + 5.$$

Sea el número 5000.

Tenemos $5000 = 1000 \,.\, 5$, pero $1000 = m \,.\, \text{de } 11 - 1$,

luego $$5000 = (m \,.\, \text{de } 11 - 1) \,.\, 5 = m \,.\, \text{de } 11 \,.\, 5 - 5$$

pero m . de 11 . 5 es un múltiplo de 11; luego

$$5000 = m \,.\, \text{de } 11 - 5.$$

89. Teorema. *Para que un número sea divisible por* 11, *es necesario y suficiente que la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar, contando de derecha á izquierda, y la suma de las cifras de lugar par sea cero ó un múltiplo de* 11.

Sea el número 374869.

Tenemos $374869 = 300000 + 70000 + 4000 + 800 + 60 + 9$;

pero
$$\begin{aligned} 300000 &= m \,.\, \text{de } 11 - 3 \\ 70000 &= m \,.\, \text{de } 11 + 7 \\ 4000 &= m \,.\, \text{de } 11 - 4 \\ 800 &= m \,.\, \text{de } 11 + 8 \\ 60 &= m \,.\, \text{de } 11 - 6 \\ 9 &= \phantom{m \,.\, \text{de } 11 + {}} 9 \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, y recordando que la suma de los múltiplos de 11 contenidos en los segundos miembros, es un múltiplo de 11, tendremos

$$374869 = m \,.\, \text{de } 11 - 3 + 7 - 4 + 8 - 6 + 9,$$

ó $$374869 = m \,.\, \text{de } 11 + (7 + 8 + 9) - (3 + 4 + 6);$$

luego *un número cualquiera es un múltiplo de* 11 *mas la suma de las cifras de lugar impar, menos la suma de las cifras de lugar par.*

Restando las sumas comprendidas en los paréntesis, resultará un número, que representaremos por D, y tendremos

$$374869 = m \,.\, \text{de } 11 + D;$$

si D fuese cero, tendríamos

$$374869 = m \,.\, \text{de } 11,$$

esto es, el número dado sería divisible por 11; si D no es cero, el número propuesto es la suma de otros dos: el primero m. de 11 es divisible por 11, si el segundo D es tambien divisible, la suma lo será igualmente; y si D no es múltiplo de 11, tampoco lo será la suma.

Réstanos suponer el caso en que la cantidad comprendida en el primer paréntesis sea menor que la del segundo, siendo por tanto imposible la sustraccion de las mismas.

Representemos la primera, esto es, la suma de las cifras de lugar impar por I, y la segunda, ó sea la suma de las cifras de lugar par por P; el número propuesto se compone de

$$m \,.\, \text{de } 11 + I - P,$$

y puede ser considerado como la diferencia entre m . de 11 + I y P; si disminuimos el minuendo en I queda m . de 11, y debemos disminuir tambien el sustraendo, para que no se altere la diferencia; de este modo el número dado se puede expresar por

$$m \,.\, \text{de } 11 - (P - I),$$

siendo ahora posible la sustraccion entre P é I.

Llamemos D á la diferencia, y el número será

$$m \,.\, \text{de } 11 - D.$$

Si D es divisible por 11, el número tambien lo será [75]; pero si D no es divisible por 11, tampoco lo será el número [76].

90. Hallando, por medio de la division, los residuos de las unidades numerativas de los diversos órdenes por un número cualquiera n, se descubre, al cabo de algunas divisiones, una ley, con arreglo á la cual se repiten dichos residuos.

En efecto: estos son todos menores que el divisor n, luego al cabo de tantas divisiones á lo mas como unidades tiene n, se repetirá necesariamente uno de los residuos anteriores; añadiendo un cero á la derecha del residuo repetido, y prosiguiendo las divisiones, se reproducirán periódicamente los dividendos parciales, y por tanto los residuos, puesto que el divisor es constante.

Ahora bien, una unidad numerativa cualquiera es un múltiplo de n mas el residuo respectivo, que ya conocemos; luego 2, 3, 4... unidades del mismo órden serán un múltiplo de n mas 2, 3, 4... veces el residuo; y como un número dado puede descomponerse en las unidades de sus diversos órdenes, será igual á un múltiplo de n mas los productos que resulten de multiplicar cada cifra significativa por el residuo correspondiente á la unidad numerativa de su órden.

Si la suma de estos productos es un múltiplo de n, el número tambien lo será; pero si la suma no es divisible por el divisor n, tampoco lo será el número.

Este es el método general que, modificado convenientemente en cada caso particular, debe seguirse para hallar los caracteres de divisibilidad de los números por un divisor determinado.

Un ejemplo aclarará las anteriores consideraciones.

Propongámonos hallar los caracteres de divisibilidad de los números por 7.

10.0.0.0.0.0.0...	7
3 0	142857
2 0	
6 0	
4 0	
5 0	
1 0	

Dividiremos la unidad seguida de un número indefinido de ceros por 7, y veremos que la sétima division da 1 por residuo, y que éste seguido de un cero reproduce el primer dividendo parcial 10; luego se reproducirán en el mismo órden, y de seis en seis, todos los residuos.

La ley que siguen estos es la siguiente: una unidad, una decena, una centena, dan respectivamente por residuo 1, 3, 2; luego estas unidades numerativas son un múltiplo de 7 mas 1, 3 ó 2: una unidad de millar, una decena de millar, una centena de millar, dan por residuo respectivamente 6, 4, 5; luego son un múltiplo de 7 mas 6, 4 ó 5, ó sea, menos 1, 3 ó 2, que es lo que falta á 6, 4 ó 5 para valer 7.

Esta misma ley siguen los residuos de las seis unidades numerativas siguientes, repitiéndose siempre.

Si una unidad numerativa cualquiera es un múltiplo de 7 mas ó menos 1, 3 ó 2, varias unidades numerativas del mismo órden, serán un múltiplo de 7 mas ó menos 1, 3 ó 2 multiplicado por el número de dichas unidades.

Ahora bien, si descomponemos el número dado en periodos de tres cifras, empezando por la derecha, cada periodo constará de unidades, decenas y centenas: un periodo de lugar impar será un múltiplo de 7 mas los productos de multiplicar sus cifras por 1, 3 y 2; y un periodo de lugar par será un múltiplo de 7 menos los productos de sus cifras por los mismos números.

Luego, *si suponemos un número descompuesto en periodos de tres cifras, á partir de la derecha, dicho número será igual á un múltiplo de 7 mas los productos de multiplicar por* 1, 3, 2 *respectivamente las unidades, decenas y centenas de los periodos de lugar impar, menos los productos de multiplicar por los mismos números las unidades, decenas y centenas de los periodos de lugar par.*

Ejemplo. Queremos saber si el número

1.782.759.041

es divisible por 7.

Dispondremos los cálculos del modo siguiente:

Periodos de lugar impar.	Periodos de lugar par.
$1 . 1 = 1$	$9 . 1 = 9$
$4 . 3 = 12$	$5 . 3 = 15$
$0 . 2 = 0$	$7 . 2 = 14$
$2 . 1 = 2$	$1 . 1 = 1$
$8 . 3 = 24$	39
$7 . 2 = 14$	
53	

La diferencia $53 - 39 = 14$ es divisible por 7, luego el número propuesto tambien lo es.

Escolio. Cuando se trata de averiguar si un número es divisible por otro, generalmente lo mas breve es efectuar la division. Los únicos caracteres de divisibilidad verdaderamente importantes en la práctica, son los enunciados en los números anteriores.

II.—Máximo comun divisor.

91. Maximo comun divisor *de varios números es el mayor número que divide exactamente á todos ellos.*

El máximo comun divisor de 24 y 18 es 6; porque 6 es divisor de 24 y 18, y ningun número mayor que 6 divide exactamente á dichos números.

92. Teorema. *Si el cociente de dos números es exacto, el menor de ellos será el m. c. d.* [1] *de ambos.*

Sean los números 64 y 16.

Siendo 16 divisor de 64, como tambien lo es de sí mismo, es divisor comun de 64 y 16: es además el mayor, porque evidentemente ningun número mayor que 16 puede dividir á éste; luego 16 es el m. c. d.

93. Teorema. *Si el cociente de dos números no es exacto, el m. c. d. de ellos es igual al m. c. d. del divisor y residuo.*

Sean 54 y 12 los números propuestos.

Dividiendo el mayor por el menor el cociente es 4, y 6 el residuo; si del dividendo se resta el producto del divisor por el cociente, la diferencia es igual al residuo, esto es,

$$54 - 12 . 4 = 6;$$

1 Léase *máximo comun divisor.*

ahora bien, todo divisor de 54 y 12 es divisor de 12 . 4 [74], luego lo será tambien de la diferencia 54 — 12 . 4, ó sea del residuo 6.

Tambien sabemos que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente mas el residuo, esto es,

$$54 = 12 . 4 + 6;$$

ahora bien, todo divisor de 12 y 6, lo es de 12 . 4, luego lo será de la suma 12 . 4 + 6, ó sea, del dividendo 54.

Por consiguiente, *el dividendo y divisor tienen los mismos factores comunes que el divisor y residuo;* luego el m. c. d. de los primeros números es igual al m. c. d. de los segundos; lo cual debiamos demostrar.

94. Determinemos ahora el m. c. d. de dos números.

Sean estos 120 y 72.

Si el cociente de dividir el mayor por el menor fuese exacto, 72 sería el m. c. d. [92]; pero esta division da un residuo 48, lo que indica que no siendo 72 divisor de 120, no es el m. c. d.

Sabemos [93], que el m. c. d. de 120 y 72 es igual al de 72 y 48, luego la cuestion se reduce á determinar el m. c. d. de estos números.

Repitiendo el razonamiento anterior, diremos: si el cociente de 72 por 48 fuese exacto, 48 sería el m. c. d.; como resulta un residuo 24, el m. c. d. de 72 y 48 es igual al de 48 y 24.

El cociente de estos números es exacto, por consiguiente 24 es el m. c. d. de los mismos, y tambien el de los números propuestos.

Vemos que el m. c. d. de dos números se determina por medio de varias divisiones, las que serán en número limitado; porque todo residuo *R* pasa á ser divisor, y como el residuo siguiente es menor que el divisor *R*, es claro que los residuos disminuyen cierto número de unidades á cada division, y que se llegará necesariamente á un residuo cero, en cuyo caso concluye la operacion.

95. De lo dicho se deduce que

Para hallar el m. c. d. de dos números se divide el mayor por el menor; si la division es exacta, el menor es el m. c. d.; pero si queda residuo, se divide el número menor por el residuo, y se continúa dividiendo cada divisor por su residuo, hasta obtener un cociente exacto. El último divisor es el m. c. d. buscado.

Ejemplos.

1.° Hallar el m. c. d. de 2082 y 930.

La operacion se dispone del modo siguiente.

2082	930	222	42	12	6
222	2	4	5	3	2
	42	12	6	0	

El m. c. d. es 6.

2.° Sean los números 940 y 216.

940	216	76	64	12	4
76	4	2	1	5	3
	64	12	4	0	

El m. c. d. es 4.

96. Escolio 1.° El razonamiento del número 94 demuestra que el m. c. d. de los números dados es igual al de dos residuos consecutivos cualesquiera; luego siempre que conozcamos el de estos residuos, daremos por terminada la operacion.

97. 2.° *Todo divisor mayor que la mitad del dividendo, debe reemplazarse por la diferencia entre estos dos números.*

En el ejemplo 2.°, el divisor 64 debe reemplazarse por la diferencia 76 — 64, ó sea por 12, lo que economiza siempre una division.

En efecto: siendo 64 mayor que la mitad de 76, el cociente de estos números es 1, y el residuo la diferencia entre ellos; si llamamos R á este residuo, será $76 - 64 = R$; y como R es divisor de 76 — 64, los residuos de dividir estos números por R son iguales [77].

Dividiendo, segun se ha hecho en el ejemplo 2.°, 76 por 64, el residuo es R; dividiendo despues 64 por R, hallaremos un residuo r, y tendremos que dividir R por r.

Si, por el contrario, dividimos 76 por R, el residuo es tambien r, y tendremos igualmente que dividir R por r; pero habiendo efectuado una division menos.

Así tendremos

940	216	76	12	4
76	4	2	6	3
	64	4	0	

98. Teorema. *Todo divisor de dos números es divisor de su m. c. d.*

Sabemos, en efecto, que todo divisor n del dividendo y divisor, divide al residuo; éste pasa á ser divisor en la segunda division, luego el número n, siendo factor del menor de los dados y del primer residuo, lo será tambien del segundo. Razonando de este modo, veríamos que el número propuesto es divisor de todos los residuos, ó sea, de todos los divisores, y por tanto del último de estos, que es el m. c. d.

99. Determinemos ahora el m. c. d. de varios números.

Sean estos 120, 72 y 54.

El m. c. d. de los dos primeros es 24, y el m. c. d. del tercer número y de 24 es 6.

Vamos á demostrar que 6 es el m. c. d. de los tres números propuestos.

En efecto: 6 es divisor de 54 y 24, pero 120 y 72 son múltiplos de 24, por ser este número su m. c. d.; luego 6 es divisor de 54, 120 y 72.

Queda demostrado que 6 es divisor comun, faltándonos hacer ver que es el mayor.

Todo divisor de los números propuestos, en el mero hecho de dividir á 120 y 72, divide á su m. c. d. 24 [98], y dividiendo á éste y á 54, divide tambien al m. c. d. de estos, es decir á 6; luego todo divisor de los números propuestos es divisor de 6, por lo que no puede ser mayor que 6; luego 6 es el m. c. d. de los números dados.

100. Examinando la serie de operaciones que nos han dado este resultado, veremos que

Para hallar el m. c. d. de varios números se determina el de dos de ellos; se halla despues el m. c. d. del número obtenido y del tercero de los dados; despues el del nuevo m. c. d. y el cuarto número, y se continúa de este modo hasta haber operado con todos los números dados. El último m. c. d. hallado es el m. c. d. de los números propuestos.

Ejemplo. Hallar el m. c. d. de los números 22680, 21294, 5929 y 3465.

Primera operacion.

22680	21294	1386	504	126
1386	1	15	2	4
	7434	378	0	
	504			

Segunda operacion.		
5929	126	7
889	47	18
07	56	
	0	

Tercera operacion.	
3465	7
66	495
35	
0	

7 es el m. c. d. de los números dados.

101. Teorema. *Si multiplicamos el dividendo y el divisor por un número entero, el cociente no varía, y el residuo queda multiplicado por el mismo entero.*

Sean, en efecto, 50 el dividendo, 8 el divisor; el cociente es 6 y el residuo 2.

Sabemos que

$$50 = 8 \,.\, 6 + 2;$$

si multiplicamos ambos miembros de esta igualdad por un número entero cualquiera, 4 por ejemplo, resultará

$$50 \,.\, 4 = (8 \,.\, 6 + 2) \times 4 = (8 \,.\, 6) \times 4 + 2 \,.\, 4;$$

para multiplicar el producto 8 . 6 por el número 4, basta multiplicar el primer factor, y será

$$50 \,.\, 4 = (8 \,.\, 4) \times 6 + 2 \,.\, 4;$$

si ahora consideramos á 50.4 como dividendo, y á 8 . 4 como divisor, el cociente será 6, el mismo de los números propuestos, y el residuo 2 . 4; que es menor que el divisor, porque de $2 < 8$ [1] se deduce $2 \,.\, 4 < 8 \,.\, 4$

Queda demostrado el teorema.

Escolio. Si la division es exacta, el residuo es cero; multiplicando este residuo por el número entero, resultará cero para residuo de la segunda division, la que será tambien exacta.

102. Teorema. *Si se multiplican dos números por un tercero, su m. c. d. queda multiplicado por dicho tercer número.*

Sabemos, en efecto, que multiplicando el dividendo y el divisor por un número *N*, el residuo queda multiplicado por dicho número; este residuo pasa á ser divisor en la segunda division, luego estando multiplicado el menor de los números propuestos y el primer residuo por *N*, resultará multiplicado por el mismo número el segundo residuo.

Razonando de este modo veríamos que todos los residuos resultan multiplicados por *N*; luego el último, que es cero,

---

1 El signo $<$ se lee *menor que*.

será $0 \times N$, ó sea cero; y el anterior, que es el m. c. d., estará multiplicado por N, lo que demuestra el teorema.

103. Teorema. *Si se divide el dividendo y el divisor por un factor comun, el cociente no varía y el residuo queda dividido por dicho factor.*

Sean, en efecto, 72 el dividendo, 27 el divisor; el cociente es 2 y el residuo 18.

Sabemos que

$$72 = 27 \,.\, 2 + 18\,;$$

dividiendo los dos miembros de esta igualdad por un factor de 72 y 27, por ejemplo 9, será

$$72 : 9 = (27 \,.\, 2 + 18) : 9\,;$$

siendo 9 factor de 72 y 27, lo es de 27 . 2 y del residuo 18; luego la division indicada en el segundo miembro se efectuará dividiendo por 9 los sumandos 27 . 2 y 18 [58]; para dividir el primero basta dividir el factor 27 [60]; luego

$$72 : 9 = (27 : 9) \,.\, 2 + 18 : 9\,;$$

si ahora consideramos á 72 : 9 como dividendo, y á 27 : 9 como divisor, el cociente será 2, el mismo de los números propuestos, y el residuo 18 : 9, que es menor que el divisor, pues de $18 < 27$ se deduce $18 : 9 < 27 : 9$.

Queda demostrado el teorema.

Escolio. Si la division es exacta, el residuo es cero; dividiendo este residuo por el factor comun á dividendo y divisor; resultará cero para residuo de la segunda division, la que será tambien exacta.

104. Teorema. *Si se dividen dos números por un factor comun, su m. c. d. resulta dividido por dicho factor.*

En efecto: sabemos que dividiendo el dividendo y el divisor por un factor comun N, el residuo queda dividido por dicho factor; este residuo pasa á ser divisor en la segunda division, luego estando partido el menor de los números propuestos y el primer residuo por N, resultará partido por N el segundo residuo.

Razonando de este modo veríamos que todos los residuos resultan divididos por N; luego el último, que es cero, será $0 : N$, que evidentemente es cero; y el anterior, que es el m. c. d., estará dividido por N, lo que demuestra el teorema.

105. Escolio 1.° Siempre que se descubra á simple vista un factor comun á los números cuyo m. c. d. quiere hallarse, convendrá suprimirlo, dividiendo los números por dicho factor. Con esto queda tambien dividido el m. c. d.; por con-

siguiente para obtener el buscado, se multiplicará el obtenido por el factor comun.

Lo mismo deberá hacerse con dos residuos consecutivos, puesto que su m. c. d. es igual al de los números propuestos.

106. 2.° *Si se dividen dos números por su m. c. d., los cocientes que resultan tienen la unidad por m. c. d.*

En efecto: si M es el m. c. d. de los dos números, y estos se dividen por M, el m. c. d. de los cocientes será $M : M$, ó sea, la unidad.

III.—Números primos y descomposicion de los compuestos.

107. *Se llama* NÚMERO PRIMO *ó* SIMPLE *el que es divisible solamente por sí mismo y por la unidad.*

Los números 1, 2, 3, 5, 7, 11 son primos.

Se llama NÚMERO COMPUESTO *el que además de ser divisible por sí mismo y por la unidad, lo es por otro número.*

8, 15, 36 son números compuestos.

108. TEOREMA. *Todo número compuesto es divisible cuando menos por un número primo mayor que uno.*

Siendo el número compuesto divisible por otro distinto de sí mismo y de la unidad, es igual al producto de éste por el cociente de la division. Si alguno de los factores de este producto, menores ambos que el número propuesto, es primo, queda demostrado el teorema; pero si los dos son compuestos, cada uno será igual al producto de dos factores menores que él.

De modo que mientras los factores sean compuestos, podrá descomponerse cada uno en el producto de otros dos; pero esta serie de descomposiciones es necesariamente limitada, porque los factores son números enteros cada vez menores; luego encontraremos un factor que no sea compuesto, esto es, un factor primo.

109. TEOREMA. *La serie de los números primos es ilimitada.*

Supongamos que sea limitada: en este supuesto existirá un número primo P mayor que todos los demás. El producto de todos los números primos $1 . 2 . 3 . 5 .... P$, es un número compuesto, divisible por cualquier primo; añadiendo una unidad á este producto resulta

$$1 . 2 . 3 . 5 .... P + 1.$$

Ahora bien, el primer sumando $1 . 2 . 3 . 5 .... P$ es divisible por cualquier número primo, y como el segundo no puede serlo por ninguno, tampoco lo será la suma [73].

Luego 1 . 2 . 3 . 5.... P es un número primo [108], y siendo mayor que P, resulta que existe un número primo mayor que P.

Aplicando á este nuevo número el mismo razonamiento, veríamos que existe todavía otro primo mayor que él, y así sucesivamente; luego la serie de estos números es ilimitada.

110. *Formacion de una tabla de números primos.*

Para hallar todos los números primos desde 1 hasta un límite dado, se escriben los números impares menores que el límite, y además el 2, porque los otros números pares son compuestos.

Entre los números impares, hay muchos que no son primos; pero las consideraciones siguientes dan un medio fácil de suprimirlos.

Dos números impares consecutivos difieren en 2 unidades, luego el que está tres lugares despues que otro, es igual á éste mas 6 unidades; como 6 es múltiplo de 3, todo número que esté tres lugares despues de un múltiplo de 3, será tambien múltiplo de este número, por ser la suma de dos múltiplos de 3; y todo número que esté tres lugares despues de otro que no es múltiplo de 3, tampoco es divisible por este número [73].

Por consiguiente, tomando el 3 por punto de partida, se tachará el tercero de los siguientes, y se continuará contando de 3 en 3, tachando siempre el tercero. De este modo quedan suprimidos todos los múltiplos de 3.

Análogamente veríamos que tomando el 5 por punto de partida, contando los siguientes de 5 en 5, y tachando cada vez el quinto, se suprimen los múltiplos de 5.

Igualmente, contando de 7 en 7, se suprimirán los múltiplos de 7, y así sucesivamente.

Al suprimir los múltiplos de un número, se empieza en la práctica suprimiendo su cuadrado; si se trata del 5 se empieza por 5^2 ó 25, porque los múltiplos 5 . 2, 5 . 3 y 5 . 4, ó son números pares, ó múltiplos de algun primo menor que el que se considera.

Por consiguiente, la construccion de la tabla terminará cuando se llegue á un número primo, cuyo cuadrado sea mayor que el límite de aquella. [1]

---

1 La tabla formada de este modo se llama *Criba de Eratóstenes.*

111. Se puede averiguar si un número es primo, sin consultar la tabla, por medio del siguiente

TEOREMA. *Si dividiendo un número por los primos sucesivos 2, 3, 5, 7 etc. se llega, sin obtener cociente exacto, á un cociente entero menor que el divisor, el número es primo.*

Para fijar las ideas, llamemos *D* al último divisor.

Habiendo sido incompletas todas las divisiones, el número propuesto no es divisible por *D* ni por ningun número primo menor que *D*. Tampoco puede ser divisible por un número compuesto menor que *D*, porque si lo fuese, tambien sería divisible por un factor primo de dicho compuesto.

Si el número propuesto fuese divisible por otro mayor que *D*, sería igual al producto del divisor por el cociente, y por tanto sería múltiplo del cociente, lo que es imposible, por ser éste menor que el último divisor *D*.

No siendo el número dado divisible por *D*, ni por ningun número menor que éste, ni tampoco por otro mayor, dicho número es primo.

Ejemplo. Averiguar si el número 83 es primo.

Dividiéndole sucesivamente por 2, 3, 5, 7 y 11, se llega, sin obtener cociente exacto, al cociente entero 7, menor que el último divisor 11; luego 83 es número primo.

112. NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ *son los que no tienen mas factor comun que la unidad.*

4 y 9 son dos números primos entre sí.

Los cocientes de dividir dos números por su m. c. d., son primos entre sí; porque su m. c. d. es la unidad [106].

113. NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ DOS Á DOS *son varios números tales que cada uno de ellos es primo con cada uno de los demás.*

5, 7, 8, 9 son números primos entre sí dos á dos.

4, 9, 8, 15 no son primos entre sí dos á dos; porque 4 y 8 tienen el factor comun 4; 9 y 15 tienen el factor comun 3. Sin embargo, estos números son primos entre sí; porque ningun número mayor que 1 es divisor de todos ellos.

114. TEOREMA. *Todo número divisor de un producto de dos factores y primo con uno de ellos, es divisor del otro.*

Sea *a* un número divisor del producto *bc* [1] y primo con el factor *b*; vamos á demostrar que *a* es divisor de *c*.

Siendo *a* y *b* primos entre sí, su m. c. d. es 1 [112]. Si estos números se multiplican por *c*, su m. c. d. queda

---

1 Cuando los factores de un producto se representan por letras, puede suprimirse el signo *multiplicado por*.

multiplicado por c [102]; por consiguiente, el m. c. d. de los productos ac y bc es $1 \times c$ ó c; ahora bien, todo divisor de dos números es divisor de su m. c. d.; pero a es divisor de ac, por ser un factor de este producto, es divisor de bc por hipótesis; luego a es divisor del m. c. d. de ac y bc, que es c.

Queda demostrado el teorema.

115. TEOREMA. *Todo número primo divisor de un producto de varios factores, es divisor por lo menos de uno de estos.*

Sea p un número primo divisor del producto $abcd$; vamos á demostrar que p es cuando menos divisor de uno de los factores.

Si p es divisor del factor d, el teorema es cierto; si no lo es, los números p y d son primos entre sí; porque siendo p un número primo es divisible solamente por p y por 1: como p no es divisor de d, el único factor comun á estos números es 1. El producto $abcd$ puede considerarse compuesto de los factores abc y d; p es divisor de este producto y primo con d; luego, segun el teorema anterior, es divisor de abc.

Si p fuese divisor de c, sería cierto el teorema; pero si no lo es, p y c serán primos entre sí, por las razones dadas anteriormente para p y d. El producto abc puede considerarse compuesto de los factores ab y c; p es divisor de este producto y primo con c, luego es divisor de ab.

Si p fuese divisor de b, sería cierto el teorema; si no lo es, será primo con b, luego será divisor de a.

Por consiguiente p es divisor de a, b, c ó d.

116. COROLARIO 1.° *Todo número primo divisor de una potencia de un número, es divisor de este número.*

Si p es primo y divisor de a^3 ó de $a.\ a.\ a$, es divisor de uno de los factores, y como estos son todos iguales á a, p es divisor de a.

117. 2.° *Si dos números son primos entre sí, sus potencias de cualquier grado tambien son números primos entre sí.*

Sean a y b dos números primos entre sí.

Si dos potencias cualesquiera a^3 y b^5 tuviesen un factor comun primo p, siendo p divisor de a^3 y b^5 lo sería de a y b, lo que es contrario á la hipótesis.

Si a^3 y b^5 tuviesen un factor comun compuesto, serian divisibles por algun factor primo del compuesto, lo que acabamos de ver que es imposible.

Luego a^3 y b^5 no tienen ningun factor comun distinto de la unidad.

118. Teorema. *Todo número compuesto es igual al producto de varios factores primos.*

Un número compuesto es divisible cuando menos por otro primo [108]; si el cociente de los dos fuese primo, quedaría demostrado el teorema; pero si el cociente es compuesto, podrá á su vez dividirse por un número primo.

Si continuamos dividiendo los cocientes sucesivos por factores simples, serán aquellos cada vez menores, y la operacion terminará, esto es, llegaremos á obtener el cociente 1.

Ahora bien, el número dado se habrá dividido por un producto de factores primos [69], obteniendo el cociente 1; luego es igual á dicho producto.

119. El razonamiento anterior manifiesta la marcha que debe seguirse para hallar un producto indicado de varios factores primos igual á un número propuesto, ó sea, para descomponer un número en factores primos.

Se descompone un número en factores primos, dividiendo el número y los cocientes sucesivos por su menor factor primo, distinto de la unidad, hasta que se obtenga el cociente 1. *El producto de todos los divisores es igual al número propuesto.*

No es necesario empezar las divisiones por el menor factor primo, pero procediendo así, se facilita y abrevia la operacion.

Esta se dispone en la práctica del modo siguiente.

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

El número propuesto 540 es divisible por 2; este factor primo se escribe á la derecha, y el cociente 270 debajo del número; 270 es tambien divisible por 2; el cociente 135 se escribe debajo del dividendo, y así sucesivamente.

Los factores primos que se han separado son 2, 2, 3, 3, 3, 5; de modo que

$$540 = 2^2 . 3^3 . 5.$$

120. Por medio de la regla anterior se descompone un número en factores primos, pero debemos demostrar ahora que si

la descomposicion se efectuase de otro modo, obtendríamos los mismos factores.

Tal es el objeto del siguiente

TEOREMA. *Un número no admite dos descomposiciones diferentes en factores primos.*

Supongamos que descompuesto un número en sus factores primos haya dado $a. b. c. d....$, pudiendo ser iguales algunos de estos factores, y que otra descomposicion produzca $a'. b'. c'. d'$.

Siendo iguales ambos productos al número dado, son iguales entre sí, esto es,

$$a. b. c. d... = a'. b'. c'. d'... \quad [1].$$

El número primo a es divisor del primer producto, por consiguiente tambien lo es del segundo, y segun el teorema del número 115, será divisor de uno de sus factores; pero estos son números primos, luego a es igual á uno de ellos, por ejemplo, $a = a'$.

Dividiendo por a y a' respectivamente los miembros de la igualdad [1], resulta

$$b. c. d... = b'. c'. d'... \quad [2].$$

Aplicando á esta igualdad el razonamiento anterior, veríamos que b es igual á un factor del segundo miembro, b' por ejemplo.

Dividiendo los dos miembros de la igualdad [2] por b y b', será

$$c. d... = c'. d'...;$$

de donde se deducirá $c = c'$, y así sucesivamente.

Luego los dos productos se componen de los mismos factores.

121. TEOREMA. *Para que el cociente de dos números sea exacto, se necesita y basta que el mayor de ellos contenga los factores primos del menor, con exponentes iguales ó mayores.*

Supongamos que el número menor, descompuesto en sus factores primos, sea $a^2 b^3 c$; si el cociente de los números dados es exacto, el mayor es igual al producto de $a^2 b^3 c$ por el cociente. Este producto contiene los factores de $a \; b^3 c$ con sus exponentes, y además los factores del cociente, que podrán aumentar algun exponente de a, b, c; pero nunca disminuirlo.

Si ahora suponemos descompuesto el número mayor en sus factores primos, contendrá dos veces por lo menos el factor a, tres veces el b y una el c, de lo contrario admitiría dos descomposiciones diferentes.

Luego la condicion enunciada es necesaria.

Si el número mayor es $a^4 b^3 c^3 d$, puede escribirse en la forma $a^2. a^2. b^3. c^2. c. d$; considerándole como el producto de $a^2 c^2 d \times a^2 b^3 c$, se ve que es divisible por $a^2 b^3 c$.

Luego la condicion enunciada es suficiente.

122. *Hallar los factores simples y compuestos de un número.*

Sea el número 720, que descompuesto en sus factores primos da

$$720 = 2^4 . 3^2 . 5.$$

Este número es divisible solamente por todos los que pueden formarse con los factores primos 2, 3 y 5, siempre que estos no se repitan mas de cuatro, dos y una vez respectivamente [121]; luego es divisible por todos los siguientes:

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2.3	$2^2.3$	$2^3.3$	$2^4.3$
3^2	2.3^2	$2^2.3^2$	$2^3.3^2$	$2^4.3^2$
5	2.5	$2^2.5$	$2^3.5$	$2^4.5$
3.5	$2.3.5$	$2^2.3.5$	$2^3.3.5$	$2^4.3.5$
$3^2.5$	$2.3^2.5$	$2^2.3^2.5$	$2^3.3^2.5$	$2^4.3^2.5$

Estos son los únicos divisores de 720; porque otro número cualquiera tendrá un factor primo distinto de 2, 3 y 5, ó uno de estos factores con exponente mayor que el del mismo factor en el número propuesto.

Observando la marcha seguida para obtener los factores de 720, podremos enunciar la siguiente regla.

Para hallar todos los divisores de un número, se descompone éste en sus factores primos; despues se escribe la unidad, y las potencias sucesivas del primer factor primo, contenidas en el número; estos factores se multiplican por cada una de las potencias del segundo factor primo; los números obtenidos se multiplican por las potencias del tercer factor primo; y se continúa del mismo modo hasta emplear el último factor primo.

123. Teorema. *El número total de divisores simples y compuestos de un entero, es igual al producto de los exponentes de sus factores primos, aumentado cada exponente en una unidad.*

Supongamos que la descomposicion del número en sus factores primos haya dado $a^m. b^n. c^p$.

Para obtener todos los factores se escribe, segun la regla anterior,

$$1, \quad a, \quad a^2, \quad a^3 \ldots\ldots \quad a^m,$$

que son $m+1$ factores; al multiplicar todos estos por una potencia de b, se obtiene $m+1$ factores, y como hay n potencias de b, se obtendrá $(m+1)\,n$ factores, que añadidos á los $m+1$ anteriores serán

$$(m+1)\,n+(m+1)=(m+1)\,(n+1);$$

cada uno de estos multiplicado por una potencia de c, da $(m+1)\,(n+1)$ factores; como hay p potencias de c, resultarán $(m+1)\,(n+1)\,p$, que añadidos á los anteriores serán $(m+1)\,(n+1)\,p+(m+1)\,(n+1)=(m+1)\,(n+1)\,(p+1)$.

IV.—Mínimo comun múltiplo.

124. MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO *de varios números es el menor número divisible por todos ellos.*

El m. c. m. [1] de 4, 10 y 15 es 60; porque 60 es múltiplo de los tres números, y es el menor posible.

Propongámonos determinar el m. c. m. de los números 36, 42 y 120.

Descomponiéndolos en sus factores primos, resulta

$$36=2^2.\,3^2, \qquad 42=2\,.\,3\,.\,7, \qquad 120=2^3.\,3.\,5.$$

Todo múltiplo comun de estos números debe contener los factores primos de 36, los de 42 y los de 120; por consiguiente constará de los factores 2, 3, 5 y 7, por lo menos. Entre los diferentes múltiplos que existen, será menor aquel que conste solamente de dichos factores, con los menores exponentes que se pueda asignar á cada uno. Segun el teorema del número 121, un factor primo del m. c. m. no puede tener exponente menor que ninguno de los exponentes del mismo factor en los números dados; y como dicho exponente debe ser el menor posible, es evidente que será igual al mayor de los que tiene, en los números propuestos, el factor que se considera.

Luego el m. c. m. es $2^3.\,3^2.\,5\,.\,7=2520$.

Vemos que *se determina el m. c. m. de varios números descomponiéndolos en sus factores primos, y formando el producto de las mayores potencias de todos los factores.*

Si alguno de los números dados es divisor de otro, se prescindirá del primero; puesto que sus factores se encontrarán todos en el segundo con exponentes iguales ó mayores.

---

1 Léase *mínimo comun múltiplo.*

Ejemplo. Hallar el m. c. m. de los números 4, 6, 15, 25, 64 y 120.

Prescindiremos del 4, por ser divisor de 64, del 6 y del 15, por serlo de 120; y descomponiendo los números restantes, se obtiene

$$25 = 5^2, \qquad 64 = 2^6, \qquad 120 = 2^3 . 3 . 5.$$

El m. c. m. será

$$2^6 . 3 . 5^2 = 4800.$$

125. Teorema. *El m. c. m. de varios números primos entre sí dos á dos, es el producto de todos ellos.*

En efecto: descomponiendo los números dados en factores primos, ninguno de los que entran en uno de aquellos, se encontrará repetido en otro; pues si dos números tuviesen un factor comun, no serian primos entre sí, lo que es contrario á la hipótesis; luego el m. c. m. es un producto que contiene todos los factores de cada uno de los números dados, con los mismos exponentes que en estos tienen dichos factores, esto es, el m. c. m. es el producto de los números dados.

126. Por medio de la descomposicion en factores primos, se puede hallar el m. c. d. de varios números.

Sean estos 5400, 2772 y 2520.

Descomponiéndolos en sus factores primos resulta:

$$5400 = 2^3 . 3^3 . 5^2, \quad 2772 = 2^2 . 3^2 . 7 . 11, \quad 2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7.$$

Los números propuestos deben ser divisibles por su m. c. d., luego cada uno de ellos contendrá los factores primos de éste, que serán el 2 y el 3, únicos contenidos en todos los números dados.

Además, segun el teorema del número 121, un factor primo del m. c. d. no puede tener exponente mayor que ninguno de los exponentes del mismo factor primo en los números dados; y como dicho exponente debe ser el mayor posible, es evidente que será igual al menor de los que tiene el factor que se considera en los números propuestos.

Luego el m. c. d. de estos es $2^2 . 3^2 = 36$.

Vemos que *para hallar el m. c. d. de varios números, se descomponen en sus factores primos, y se forma el producto de las menores potencias de los factores primos comunes á los números dados.*

EJERCICIOS.

I. Un número cualquiera 8, ¿puede expresar pesos diferentes?

II. El peso de un cuerpo está expresado por el número 8, ¿puede expresarse el mismo peso por el número 4?

III. ¿Cuántas centenas tiene una decena de millar? Un millon, ¿cuántas decenas tiene?

IV. Si la base del sistema de numeracion fuese *doce*, los números 10, 20, 30, 16, 23, 39, ¿de cuántas unidades simples constarian?

V. Escribir un número que contenga 53 centenas, 24 decenas y 17 unidades.—Sumar estos tres números sin escribir ceros á su derecha.

VI. Si un sumando aumenta en cierta cantidad y otro sumando disminuye en la misma, ¿sufre la suma alteracion?

VII. La suma de dos números es 45237 y uno de ellos 8954, ¿cuál será el otro?

VIII. Una suma de cuatro números en 59728; uno de los sumandos es 5729, otro 7274, ¿cuánto valdrán los otros dos sumandos?

IX. Si del minuendo restamos la diferencia, ¿qué resultado obtendremos?

X. En la tabla de Pitágoras los productos, á excepcion de los cuadrados, están escritos dos veces, ¿cuál es la causa de esta repeticion?

XI. Demostrar que para multiplicar un número cualquiera por otro escrito sólo con nueves, basta añadir al primero tantos ceros como nueves tiene el segundo, y restar éste del resultado.

XII. Si el dividendo de una division exacta se divide por el cociente, ¿qué resultado se obtiene?

XIII. Si el dividendo de una division inexacta se divide por el cociente entero, ¿se obtendrá siempre el divisor?

XIV. En toda division, el dividendo es mayor que el duplo del residuo. ¿Porqué?

XV. Demostrar que dividiendo todas las unidades de un órden cualquiera del dividendo por el divisor, se obtienen las unidades del mismo órden del cociente.

XVI. Escribir en forma mas sencilla las expresiones
$3.11+5.11+6.11$, $18.7-13.7$, $3.7-3.4+5.7-5.4$.

XVII. Dados los productos 12.9 y 12.27, averiguar las veces que el mayor contiene al menor, sin efectuar las multiplicaciones.

XVIII. Dados los cocientes $18:6$ y $72:6$, averiguar las veces que el mayor contiene al menor.

XIX. Escribir en forma mas sencilla las expresiones

$36 : 3 + 12 : 3 + 15 : 3, \qquad 35 : 7 - 21 : 7.$

XX. Averiguar si los productos $54 . 7$, $6 . 63$ y $18 . 21$ son iguales, sin efectuarlos.

XXI. Demostrar que todo divisor del sustraendo y de la diferencia, divide al minuendo; y que todo divisor del minuendo y de la diferencia, divide al sustraendo.

XXII. Demostrar que si un número es divisor del sustraendo y no lo es de la diferencia, no es factor del minuendo.

XXIII. Demostrar que todo divisor del cociente ó del divisor de una division exacta, es factor del dividendo.

XXIV. Demostrar que si una division es inexacta, todo factor del dividendo y cociente es factor del residuo, y todo factor del cociente y residuo divide al dividendo.

XXV. La diferencia entre dos números escritos con las mismas cifras, es un múltiplo de 9. Demostracion.

XXVI. Todo producto de dos factores, es un múltiplo de 9 mas el producto de los residuos que se obtienen dividiendo dichos factores por 9.

Demostrar este teorema y deducir de él una prueba de la multiplicacion.

XXVII. Hallar los caracteres de divisibilidad de un número por 15.

XXVIII. Hallar los caracteres de divisibilidad por 4, 6, 8 y 12, empleando el método general (90).

Enúnciense los resultados en forma de teoremas.

XXIX. Hallar los caracteres de divisibilidad por 6, 12, 15, 18 y 36, fundándose en el teorema del número 121.

XXX. Si el cociente de dos números es exacto, el mayor es el m. c. m. de ambos. Demostracion.

LIBRO SEGUNDO.

NÚMEROS FRACCIONARIOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

FRACCIONES ORDINARIAS.

I.—Numeracion y nociones preliminares.

127. Siendo la fraccion una totalidad de partes iguales de la unidad, es evidente que se necesitan dos números para expresarla: uno que indique *en cuántas partes se divide la unidad,* y otro que indique *cuántas de estas partes contiene el quebrado.*

El primero de estos números se llama *denominador,* y el segundo *numerador.*

Los dos se llaman *términos* de la fraccion.

Se escribe una fraccion poniendo el denominador debajo del numerador, y separando los términos por una raya horizontal.

Así, $\frac{3}{5}$ representa una fraccion.

El denominador 5 indica que la unidad se ha dividido en 5 partes iguales, y el numerador 3, que la fraccion contiene 3 de estas partes; por consiguiente el quebrado representa las *tres quintas partes de la unidad.*

Si el denominador es 2, 3, 4, 5... hasta 10, cada parte se llama *medio, tercio, cuarto, quinto,.... décimo.*

Si el denominador es mayor que 10, se formará el nombre de la parte correspondiente, añadiendo al nombre de aquel, la terminacion *avo;* por ejemplo si es 15, 20, se dice *quinceavo, veinteavo.*

Para enunciar un quebrado se lee su numerador, y despues se enuncia la parte de unidad que expresa el denominador.

Así, los quebrados

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{6}{7}, \quad \frac{3}{16}, \quad \frac{5}{21},$$

se enunciarán respectivamente
tres quintos, seis sétimos, tres diez y seis avos, cinco veintiun avos.

128. Sabemos [46] que en las divisiones incompletas, solamente se obtiene cociente entero, esto es, un número que multiplicado por el divisor da el mayor múltiplo de éste, contenido en el dividendo; siendo así que la definicion de division exige que el cociente multiplicado por el divisor produzca exactamente el dividendo. Ya dijimos entónces que las mencionadas divisiones provienen de tomar para dividendo un número, que no puede ser el producto del divisor por un entero; pero existe siempre un número fraccionario que satisface á las condiciones de la definicion, siendo por consiguiente el cociente exacto.

Para convencernos de ello, demostremos el siguiente

Teorema. *El cociente exacto de dos números es un quebrado, cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.*

Sean los números 18 y 7; digo que

$$18 : 7 = \frac{18}{7}.$$

Para demostrarlo, haremos ver que multiplicando $\frac{18}{7}$ por el divisor 7, se obtiene el dividendo.

En efecto: $\frac{18}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \ldots;$

luego $\frac{18}{7} \times 7 = \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \ldots\right) \times 7;$

para multiplicar esta suma indicada por 7, se multiplica por 7 cada sumando; pero el producto de uno de estos por 7, es la suma de siete sétimos, ó sea, la unidad; luego

$$\frac{18}{7} \times 7 = 1 + 1 + 1 \ldots = 18.$$

En lo sucesivo, cuando hablemos de cocientes, se entenderá que nos referimos á los exactos, si expresamente no advertimos lo contrario.

129. Teorema. *Un quebrado es el cociente de dividir su numerador por su denominador.*

En efecto: de la igualdad

$$\frac{18}{7} \times 7 = 18,$$

se deduce, dividiendo por 7 sus dos miembros,

$$\frac{18}{7} = 18 : 7.$$

130. Es evidente que un quebrado cuyos términos son iguales, vale una unidad; si el numerador es menor que el denominador, el quebrado es menor que uno; y si el numerador es mayor que el denominador, el quebrado es mayor que uno; así

$$\frac{15}{15} = 1, \qquad \frac{7}{15} < 1, \qquad \frac{38}{15} > 1.$$

Los quebrados menores que la unidad suelen llamarse *propios*, é *impropios* los iguales ó mayores que uno.

131. Teorema. *Todo quebrado cuyo numerador es múltiplo del denominador, es igual á un número entero.*

Puesto que dicho quebrado es igual al cociente de su numerador por su denominador.

132. Teorema recíproco. *Todo número entero puede convertirse en quebrado.*

Basta, en efecto, multiplicar y dividir el entero por un mismo número; así

$$7 = \frac{7 . 4}{4} = \frac{28}{4}, \qquad 5 = \frac{5 . 1}{1} = \frac{5}{1}.$$

133. Teorema. *Toda fraccion mayor que la unidad, es igual al cociente entero que resulta de dividir su numerador por su denominador, mas una fraccion, cuyos términos son el residuo y el divisor.*

Sea la fraccion $\frac{30}{7}$; dividiendo 30 por 7, el cociente es 4 y el residuo 2; luego

$$30 = 4 . 7 + 2,$$

de donde se deduce

$$\frac{30}{7} = \frac{4 . 7 + 2}{7};$$

el segundo miembro, evidentemente es igual á

$$\frac{4 . 7}{7} + \frac{2}{7} \text{ ó } 4 + \frac{2}{7},$$

lo que demuestra el teorema.

Las expresiones compuestas de una parte entera y una fraccion, se llaman *números mixtos;* así, son números mixtos

$$2\frac{3}{5},\quad 7\frac{5}{8}.$$

134. Teorema recíproco. *Un número mixto puede convertirse en quebrado equivalente, multiplicando el entero por el denominador del quebrado, añadiendo al producto el numerador, y poniendo á esta suma por denominador el del quebrado.*

Vamos á demostrar que

$$9\frac{3}{5}=\frac{9.5+3}{5}.$$

En efecto:

$$9\frac{3}{5}=\frac{9.5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{9.5+3}{5}.$$

135. Hemos visto [128] que el cociente completo de dos números es un quebrado, cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor: como todo quebrado mayor que uno puede convertirse en número mixto, resulta que *el cociente completo de una division inexacta es un número mixto, que se compone del cociente entero mas una fraccion que tiene por numerador el residuo y por denominador el divisor.*

Por ejemplo, si dividimos 47 por 13, encontramos 3 para cociente entero y 8 para residuo; luego

$$47:13=3\frac{8}{13}.$$

136. Teorema. *Multiplicando el numerador de un quebrado por un número entero, queda multiplicado el quebrado por el mismo número.*

Sea el quebrado $\frac{7}{11}$.

Vamos á demostrar que multiplicando su numerador por 8, queda multiplicado el quebrado por 8.

En efecto: si el numerador del quebrado se multiplica por 8, el quebrado que resulte contendrá 8 veces mas partes de la unidad que el propuesto, y como las partes son iguales, el primero será ocho veces mayor que el segundo.

137. Teorema. *Multiplicando el denominador de un quebrado por un número entero, queda dividido el quebrado por el mismo número.*

Sea el quebrado $\frac{7}{11}$.

Si multiplicamos el denominador por 8, el quebrado que resulte contendrá el mismo número de partes de la unidad que el propuesto; pero en aquel se divide la unidad en 8 veces mas partes que en éste; luego las del primero son 8 veces menores que las del segundo; por consiguiente el quebrado propuesto ha sido dividido por 8.

138. TEOREMA. *Multiplicando los dos términos de un quebrado por un mismo número entero, el quebrado no varía.*

En efecto: multiplicando el numerador de un quebrado por un número cualquiera 8, el quebrado se hace 8 veces mayor: multiplicando el denominador por el mismo número, el quebrado se hace 8 veces menor; pero estos cambios simultáneos que experimenta la fraccion, se destruyen mútuamente; luego no varía su valor.

139. TEOREMA. *Dividiendo el numerador de un quebrado por uno de sus factores, queda dividido el quebrado por el mismo factor.*

Sea el quebrado $\frac{12}{28}$.

Vamos á demostrar que dividiendo su numerador por 4' queda dividido el quebrado por 4.

En efecto: si el numerador se divide por 4, el quebrado que resulta contiene 4 veces menos partes de la unidad que el propuesto, y como las partes son iguales en ambos quebrados, por tener igual denominador, el primero será 4 veces menor que el segundo.

140. TEOREMA. *Dividiendo el denominador de un quebrado por uno de sus factores, queda multiplicado el quebrado por el mismo factor.*

Sea el quebrado $\frac{12}{28}$.

Si dividimos el denominador por 4, el quebrado que resulta contiene el mismo número de partes de la unidad que el propuesto; pero en aquel está la unidad dividida en 4 veces menos partes que en éste; luego las del primero son cuatro veces mayores que las del segundo; por consiguiente el quebrado propuesto se ha multiplicado por 4.

141. TEOREMA. *Dividiendo los dos términos de un quebrado por un factor comun, el quebrado no varía.*

En efecto: dividiendo el numerador de un quebrado por un número cualquiera, 4 por ejemplo, el quebrado se hace 4 veces menor: dividiendo el denominador por el mismo número, el quebrado se hace 4 veces mayor; pero estos cambios simultáneos que experimenta la fraccion, se destruyen mútuamente; luego no varía su valor.

142. Teniendo en cuenta la identidad entre cociente y fraccion, demostrada anteriormente [128 y 129], los teoremas de los números 136 hasta 141, pueden enunciarse del modo siguiente:

En toda division de números enteros se verifica:

1.° *Multiplicando el dividendo por un número entero, queda multiplicado el cociente por el mismo número.*

2.° *Multiplicando el divisor por un número entero, queda dividido el cociente por dicho número.*

3.° *Multiplicando el dividendo y el divisor por un mismo número entero, el cociente no varía.*

4.° *Dividiendo el dividendo por uno de sus factores, queda dividido el cociente por el mismo factor.*

5.° *Dividiendo el divisor por uno de sus factores, queda multiplicado el cociente por el mismo factor.*

6.° *Dividiendo el dividendo y el divisor por un factor comun, el cociente no varía.*

143. Los teoremas de los números 138 y 141, demuestran que una misma fraccion puede escribirse con términos mas ó menos sencillos, lo que origina la operacion de reducir quebrados á su mas simple expresion.

Reducir un quebrado á su mas simple expresion, es convertirle en otro equivalente, cuyos términos sean tan pequeños como se pueda.

Se llama FRACCION IRREDUCIBLE *la que no puede expresarse por términos menores que los suyos.*

144. TEOREMA. *Si una fraccion cuyos términos son primos entre sí es igual á otra, los términos de ésta son equimúltiplos de los términos de la primera; y dicha primera es irreducible.*

Sean las fracciones iguales

$$\frac{5}{8}, \quad \frac{a}{b}.$$

Siendo primos entre sí los términos de la primera, queremos demostrar que a y b son iguales respectivamente á 5 y 8 multiplicados por un mismo número entero, y que $\frac{5}{8}$ es una fraccion irreducible.

En efecto: sabemos por hipótesis que

$$\frac{5}{8}=\frac{a}{b}.$$

Multiplicando los dos términos del primer quebrado por b y los del segundo por 8, estos quebrados no varían, luego

$$\frac{5 \cdot b}{8 \cdot b}=\frac{a \cdot 8}{b \cdot 8};$$

siendo iguales los denominadores de estos quebrados, lo són tambien sus numeradores, esto es,

$$5 \cdot b = a \cdot 8. \quad [1]$$

Ahora bien, 5 es factor del primer miembro, luego divide al segundo; y siendo primo con 8, es divisor de a [114]; llamando m al cociente de a por 5, será $a = 5 \cdot m$. Sustituyendo a por este valor $5 \cdot m$ en la igualdad, resulta

$$5 \cdot b = 5 \cdot m \cdot 8,$$

y dividiendo por 5 los dos miembros, será $b = m \cdot 8$; luego a y b son iguales respectivamente á 5 y 8 multiplicados por m.

De aquí se deduce que toda fraccion equivalente á $\frac{5}{8}$ tiene términos mayores que los de ésta; luego $\frac{5}{8}$ es una fraccion irrreducible.

145. *Para reducir un quebrado á su mas simple expresion, se dividen el numerador y el denominador por el m. c. d. de ambos.*

En efecto: esta division no altera el valor del quebrado; además los cocientes son primos entre sí [112], y por tanto el nuevo quebrado es irreducible.

Así se obtiene

$$\frac{2520}{3960}=\frac{2520:360}{3960:360}=\frac{7}{11}, \quad \frac{141}{235}=\frac{141:47}{235:47}=\frac{3}{5}.$$

Cuando los términos del quebrado presentan á simple vista factores comunes, se simplifica la operacion suprimiéndolos préviamente. Con frecuencia se obtiene por este medio la reduccion completa de la fraccion dada.

Operando así con el quebrado del primer ejemplo, se obtendrá sucesivamente

$$\frac{2520}{3960}=\frac{252}{396}=\frac{126}{198}=\frac{63}{99}=\frac{21}{33}=\frac{7}{11}.$$

146. TEOREMA. *Dos fracciones irreducibles iguales, tienen iguales sus numeradores y denominadores.*

Sean las fracciones irreducibles

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}.$$

Siendo la primera irreducible, m es múltiplo de a [144]; pero siendo tambien irreducible la segunda, a es múltiplo de m; luego $a = m$.

Del mismo modo se demuestra que $b = n$.

147. Una aplicacion importante del teorema [138], es la reduccion de quebrados á un comun denominador.

Reducir quebrados á un comun denominador, es convertirlos en otros equivalentes, cuyos denominadores sean todos iguales.

Supongamos reducidos á su mas simple expresion los quebrados

$$\frac{5}{8}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{3}{20}, \quad \frac{6}{25};$$

y tratemos de obtener otros equivalentes á ellos, y que tengan todos el mismo denominador.

Siendo irreducible la primera de las fracciones dadas, cualquier quebrado equivalente á ella tiene sus términos iguales á 5 y 8 multiplicados por un mismo número; luego el denominador comun de las fracciones equivalentes á las propuestas, será múltiplo de 8. Por idéntica razon, dicho denominador será múltiplo de los otros denominadores 9, 20 y 25.

Luego el denominador comun será múltiplo de los denominadores de las fracciones propuestas,

Todo múltiplo comun de los denominadores, puede ser denominador comun. En efecto, si dicho múltiplo se divide por un denominador, el 8 por ejemplo, y los dos términos de la fraccion se multiplican por el cociente, aquella no se altera, y el denominador del resultado será el mismo múltiplo, puesto que el divisor 8 se ha multiplicado por el cociente.

Haciendo lo mismo con las demás fracciones, quedarán reducidas todas á un comun denominador.

Ahora bien, es evidente que las fracciones equivalentes á las propuestas serán tanto mas sencillas, cuanto menor sea el múltiplo de los denominadores elegido para denominador comun: elegiremos, por consiguiente, el m. c. m.

Luego *para reducir fracciones á un comun denominador,* *se halla el m. c. m. de los denominadores, y éste será el denominador comun. Para hallar los numeradores, se divide el m. c. m. por cada denominador de las fracciones dadas, y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.*

En el ejemplo propuesto, el m. c. m. de los denominadores es 1800. Dividiéndole por los denominadores 8, 9, 20 y 25, se obtienen los cocientes 225, 200, 90 y 72; multiplicando cada uno de estos por el numerador respectivo, y partiendo los productos por el m. c. m., resultan las fracciones

$$\frac{1125}{1800}, \quad \frac{1400}{1800}, \quad \frac{270}{1800}, \quad \frac{432}{1800}.$$

148. Aplicando la regla anterior á varias fracciones cuyos denominadores sean primos entre sí dos á dos, se obtendrá para m. c. m. el producto de todos ellos [125]; y el cociente de dividir este m. c. m. por cada denominador, será evidentemente el producto de los demas denominadores; luego

Para reducir quebrados á un comun denominador, cuando los denominadores son primos entre sí dos á dos, *se halla el producto de todos los denominadores, y este producto será el denominador comun; para hallar los numeradores se multiplica el de cada fraccion por el producto de los denominadores de las demás.*

Ejemplo. Sean las fracciones

$$\frac{7}{13}, \quad \frac{6}{11}, \quad \frac{3}{7}.$$

El denominador comun será $13 \,.\, 11 \,.\, 7 = 1001$; los numeradores serán respectivamente

$7 \,.\, 11 \,.\, 7 = 539; \qquad 6 \,.\, 13 \,.\, 7 = 546, \qquad 3 \,.\, 13 \,.\, 11 = 429;$

luego las fracciones pedidas son

$$\frac{539}{1001}, \quad \frac{546}{1001}, \quad \frac{429}{1001}.$$

149. *De dos fracciones que tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.*

Sean las fracciones

$$\frac{19}{8}, \quad \frac{7}{8}.$$

Las partes de la unidad son iguales en las dos fracciones; pero la primera consta de mas partes que la segunda, luego es mayor que ésta.

150. *De dos fracciones que tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.*

Sean las fracciones

$$\frac{5}{8},\quad \frac{5}{13}.$$

Las dos constan de igual número de partes de la unidad; pero las partes de la primera son mayores que las de la segunda; luego aquella es mayor que ésta.

Escolio. Si las fracciones tienen diferentes numeradores y denominadores, se averigua cuál de ellas es la mayor reduciéndolas á un comun denominador.

151. Teorema. *Si á los dos términos de un quebrado se añade un mismo número entero, el quebrado aumenta ó disminuye, segun que sea propio ó impropio.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$.

Añadiendo á sus dos términos el entero m, resulta

$$\frac{a+m}{b+m};$$

Reduciendo los dos quebrados á un comun denominador, tendremos

$$\frac{a(b+m)}{b(b+m)},\quad \frac{b(a+m)}{b(b+m)};$$

efectuando las operaciones indicadas en los numeradores, resulta

$$\frac{ab+am}{b(b+m)},\quad \frac{ab+bm}{b(b+m)}.$$

Ahora bien; si el quebrado propuesto es menor que la unidad, será $a < b$, de donde $am < bm$, y

$$ab+am < ab+bm;$$

luego $\frac{ab+am}{b(b+m)} < \frac{ab+bm}{b(b+m)}$, ó $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$.

Luego la fraccion propuesta ha aumentado.

Si esta fraccion es mayor que uno, será $a > b$, $am > bm$, y

$$ab+am > ab+bm;$$

luego $\frac{ab+am}{b(b+m)} > \frac{ab+bm}{b(b+m)}$, ó $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$.

Luego la fraccion propuesta ha disminuido.

II.—Adicion.

152. La adicion de quebrados tiene el mismo objeto que la de enteros. Las expresiones *sumandos* y *suma* tienen tambien la misma significacion, y el signo de la operacion es el mismo [19].

153. En la suma de quebrados distinguiremos dos casos principales: 1.° que los sumandos sean quebrados; 2.° que sean números mixtos.

154. Primer caso. *Para sumar quebrados que tienen el mismo denominador, se suman los numeradores, y á la suma se pone por denominador el que tienen todos los sumandos.*

Sean los quebrados

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{9}{5}.$$

Es evidente que *dos* quintos, mas *siete* quintos, mas *nueve* quintos, es igual á *dos* mas *siete* mas *nueve* quintos; luego

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{5}+\frac{9}{5}=\frac{18}{5}.$$

Para sumar quebrados que tienen denominadores diferentes, se reducen á un comun denominador, y se continúa como en el caso anterior.

Ejemplos.

$$1.° \quad \frac{7}{12}+\frac{5}{8}+\frac{3}{10}+\frac{11}{60}=\frac{70}{120}+\frac{75}{120}+\frac{36}{120}+\frac{22}{120}=\frac{203}{120}.$$

$$2.° \quad \frac{2}{3}+\frac{5}{8}+\frac{7}{11}=\frac{176}{264}+\frac{165}{264}+\frac{168}{264}=\frac{509}{264}.$$

155. Segundo caso. *Para sumar números mixtos, se suman separadamente los quebrados y los enteros, y las unidades enteras que se obtengan en la primera suma, se añaden á la suma de los enteros.*

Ejemplo.

$$2\frac{1}{3}+5\frac{8}{9}+11\frac{7}{8}=\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{9}+\frac{7}{8}\right)+(2+5+11)=$$
$$2\frac{7}{72}+18=20\frac{7}{72}.$$

Caso particular. Si algun sumando es entero ó quebrado, el procedimiento será el mismo; así

$$7+\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+2\,\frac{5}{9}=\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+\frac{5}{9}\right)+(7+2)=$$

$$2\,\frac{11}{360}+9=11\,\frac{11}{360}.$$

III.—Sustraccion.

156. Todo lo dicho en el número 25 respecto de los números enteros, se aplica igualmente á los quebrados.

157. En la sustraccion de fracciones distinguiremos dos casos principales: 1.° que el minuendo y el sustraendo sean quebrados; 2.° que sean números mixtos.

158. Primer caso. *Para restar quebrados que tienen igual denominador, se restan los numeradores y se pone á la diferencia por denominador el que tienen los números dados.*

Sean los quebrados

$$\frac{36}{17},\quad \frac{20}{17}.$$

Vamos á demostrar que

$$\frac{36}{17}-\frac{20}{17}=\frac{36-20}{17}=\frac{16}{17}.$$

En efecto: sumando la diferencia con el sustraendo se obtiene el minuendo, lo que demuestra la regla.

Para restar quebrados que tienen denominadores diferentes, se reducen á un comun denominador; y se continúa como en el caso anterior.

Ejemplos.

1.° $\frac{35}{48}-\frac{19}{60}=\frac{175}{240}-\frac{76}{240}=\frac{99}{240}=\frac{33}{80}.$

2.° $\frac{3}{11}-\frac{2}{13}=\frac{39}{143}-\frac{22}{143}=\frac{17}{143}.$

159. Segundo caso. *Para restar dos números mixtos, se restan separadamente los quebrados y los enteros, y se suman las diferencias. Si la fraccion del sustraendo es mayor*

que la del minuendo, se agrega á ésta una unidad entera, disminuyendo despues en la misma unidad la parte entera del minuendo.

Así,

$$8\,\frac{3}{5} - 5\,\frac{2}{9} = (8-5) + \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{9}\right) = 3\,\frac{17}{45}.$$

Si queremos efectuar la sustraccion indicada

$$9\,\frac{3}{5} - 5\,\frac{7}{8},$$

veremos, reduciendo los quebrados á un comun denominador, que la sustraccion de estos es imposible, por ser el quebrado del minuendo menor que el del sustraendo; pero aumentando aquel en una unidad entera, la sustraccion se hace posible; así tendremos

$$9\,\frac{3}{5} - 5\,\frac{7}{8} = 9\,\frac{24}{40} - 5\,\frac{35}{40} = 8\,\frac{64}{40} - 5\,\frac{35}{40} = 3\,\frac{29}{40}.$$

160. *Casos particulares.*

1.° *Restar de un número mixto un quebrado ó un entero.*

Si el sustraendo es un quebrado, se considera como un número mixto cuya parte entera es cero. Si es entero, se resta de la parte entera del minuendo.

EJEMPLOS.

1.° $7\,\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = 7 + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = 7\,\frac{1}{15}.$

2.° $15\,\frac{3}{7} - 8 = 7\,\frac{3}{7}.$

2.° *Restar de un quebrado impropio un número entero ó mixto.*

Se convierte el minuendo en número mixto, y queda reducido este caso á uno de los anteriores.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{25}{4} - 6 = 6\,\frac{1}{4} - 6 = \frac{1}{4}.$

2.° $\frac{29}{3} - 5\,\frac{3}{7} = 9\,\frac{2}{3} - 5\,\frac{3}{7} = 4\,\frac{5}{21}.$

3.° *Restar de un entero un quebrado ó mixto.*

Se convierte una unidad del minuendo en quebrado de términos iguales al denominador de la fraccion del sustraendo. De este modo el minuendo se convierte en número mixto, y queda reducido el caso á uno de los anteriores.

EJEMPLOS.

$$1.^\circ\ 15 - \frac{7}{8} = 14\,\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = 14\,\frac{1}{8}.$$

$$2.^\circ\ 12 - 7\,\frac{5}{7} = 11\,\frac{7}{7} - 7\,\frac{5}{7} = 4\,\frac{2}{7}.$$

IV.—Multiplicacion.

161. Todo lo dicho en el número 29 respecto de los números enteros, se aplica igualmente á los quebrados.

162. Segun la definicion general de la multiplicacion, el producto $a \times \frac{3}{5}$, en el cual a representa un número entero ó fraccionario, será respecto de a, lo que $\frac{3}{5}$ es respecto de la unidad. El multiplicador es menor que la unidad, luego el producto será menor que el multiplicando.

En general, el multiplicador $\frac{m}{n}$ es una totalidad de partes de la unidad, que se forma dividiendo ésta en n partes iguales, y tomando m partes; luego el producto será una totalidad de partes de a, que se formará dividiendo a en n partes iguales, y tomando m de estas.

De aqui se deduce que si el multiplicador es mayor, igual ó menor que la unidad, el producto será mayor, igual ó menor que el multiplicando; por consiguiente la multiplicacion de quebrados no envuelve la idea de aumento.

163. En esta operacion distinguiremos tres casos principales: 1.° Multiplicar un quebrado por un entero; 2.° multiplicar un quebrado ó entero por un quebrado; 3.° multiplicar dos números mixtos.

164. PRIMER CASO. *Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador del quebrado por el entero, sin variar el denominador.*

En efecto: hemos demostrado [136] que multiplicando el numerador por un entero, queda multiplicado el quebrado.

Tambien sabemos [140] que dividiendo el denominador de un quebrado por uno de sus factores, queda multiplicado el quebrado; luego

Se puede multiplicar un quebrado por un factor de su denominador, dividiendo éste por dicho factor, sin variar el numerador.

La primera regla puede aplicarse siempre.

La segunda produce resultados mas sencillos; pero no es aplicable en todos los casos.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{8}{7} \times 5 = \frac{8.5}{7} = \frac{40}{7}$. 2.° $\frac{7}{30} \times 6 = \frac{7}{30:6} = \frac{7}{5}$.

165. SEGUNDO CASO. *Para multiplicar un quebrado por otro, se halla el producto de los numeradores y se parte por el de los denominadores.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{7.3}{8.5}.$$

El multiplicador es las *tres quintas partes* de la unidad, luego segun la definicion de la multiplicacion, el producto debe ser las *tres quintas partes* del multiplicando. Obtendremos, pues, el producto hallando la quinta parte del multiplicando, y reuniendo tres de estas partes.

La quinta parte del multiplicando se obtiene dividiendo éste por 5; será pues [137].

$$\frac{7}{8} : 5 = \frac{7}{8.5}.$$

La reunion de tres de estas partes es el producto de una de ellas por el número 3, esto es,

$$\frac{7}{8.5} \times 3 \quad \text{ó} \quad \frac{7.3}{8.5}.$$

Luego esta fraccion es el producto.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{15}{26} \times \frac{7}{4} = \frac{105}{104}$. 2.° $\frac{3}{28} \times \frac{19}{4} = \frac{57}{112}$.

Si el multiplicando es un número entero, se multiplica por el numerador del quebrado, y el producto se parte por el denominador.

La demostracion es enteramente análoga á la que acabamos de dar.

166. Tercer caso. *Para multiplicar dos números mixtos, se reducen á quebrados, y se halla el producto de estos.*

Así,

$$3\frac{2}{7}\times 5\frac{8}{11}=\frac{23}{7}\times\frac{63}{11}=\frac{1449}{77}=\frac{207}{11}=18\frac{9}{11}.$$

Si uno de los factores es mixto y el otro entero ó quebrado, se reduce el mixto á quebrado, y resulta uno de los casos anteriores.

Ejemplos.

1.° $7\frac{5}{9}\times 4=\frac{68}{9}\times 4=\frac{272}{9}=30\frac{2}{9}.$

2.° $9\times 3\frac{7}{11}=9\times\frac{40}{11}=\frac{360}{11}=32\frac{8}{11}.$

3.° $5\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{17}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{68}{15}=4\frac{8}{15}.$

4.° $\frac{2}{13}\times 7\frac{1}{5}=\frac{2}{13}\times\frac{36}{5}=\frac{72}{65}=1\frac{7}{65}.$

V.—Division.

167. Lo dicho en el número 45 respecto de los números enteros, es aplicable á las fracciones.

168. Segun la definicion general de division, el cociente de a por $\frac{m}{n}$, siendo a un número entero ó fraccionario, es otro número que multiplicado por $\frac{m}{n}$ da a por producto.

Pero [162] el *producto a* será mayor, igual ó menor que el *multiplicando*, segun que el *multiplicador* sea mayor, igual ó menor que la unidad; en otros términos, el *dividendo* será mayor, igual ó menor que el *cociente*, segun que el divisor sea mayor, igual ó menor que la unidad; por consiguiente, la division de quebrados no envuelve idea de disminucion.

169. En la division de quebrados distinguiremos tres casos principales: 1.° Dividir un quebrado por un entero; 2.°

dividir un quebrado ó entero por un quebrado; 3.° dividir dos números mixtos.

170. Primer caso. *Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador del quebrado por el entero, sin variar el numerador.*

En efecto: hemos demostrado [137] que multiplicando el denominador de un quebrado por un entero, queda dividido el quebrado por el mismo número entero.

Tambien sabemos [139] que dividiendo el numerador de un quebrado por uno de sus factores, queda dividido el quebrado por dicho factor; luego

Se puede dividir un quebrado por un factor de su numerador, dividiendo éste por dicho factor, sin variar el denominador.

La primera regla puede aplicarse siempre.

La segunda produce resultados mas sencillos; pero no es aplicable en todos los casos.

Ejemplos.

1.° $\frac{13}{21}:5=\frac{13}{21.5}=\frac{13}{105}$. 2.° $\frac{27}{38}:9=\frac{27:9}{38}=\frac{3}{38}$.

171. Segundo caso. *Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, el denominador de aquel por el numerador de éste, y se parte el primer producto por el segundo.*

Sea $\frac{5}{9}$ el dividendo y $\frac{3}{4}$ el divisor.

Vamos á demostrar que

$$\frac{5}{9}:\frac{3}{4}=\frac{5.4}{9.3}.$$

Si llamamos c al cociente, será

$$\frac{5}{9}=c\times\frac{3}{4}.$$

Sabemos que el producto de c por $\frac{3}{4}$ es las *tres cuartas partes* de c; pero este producto es igual á $\frac{5}{9}$, luego las *tres cuartas partes* del cociente valen $\frac{5}{9}$. Entendido esto, es ya fácil hallar el cociente.

Este se divide en cuatro cuartas partes; si tres de ellas valen $\frac{5}{9}$, una valdrá tres veces menos, esto es,

$$\frac{5}{9} : 3 = \frac{5}{9 \cdot 3},$$

y las cuatro, ó sea el cociente completo, valdrá cuatro veces mas que una sola, ó sea

$$\frac{5}{9 \cdot 3} \times 4 = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 3}.$$

Luego esta fraccion es el cociente buscado.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{8}{13} : \frac{7}{15} = \frac{120}{91}$. 2.° $\frac{3}{8} : \frac{7}{9} = \frac{27}{56}$.

Si el dividendo es un número entero, se multiplica por el denominador del divisor, y se parte el producto por el numerador.

EJEMPLOS.

1.° $15 : \frac{3}{8} = \frac{120}{3} = 40$. 2.° $40 : \frac{8}{3} = \frac{120}{8} = 15$.

172. TERCER CASO. *Para dividir dos números mixtos, se reducen á quebrados y se halla el cociente de estos.*

EJEMPLOS.

1.° $7\frac{3}{4} : 11\frac{2}{3} = \frac{31}{4} : \frac{35}{3} = \frac{93}{140}$.

2.° $6\frac{1}{2} : 15\frac{11}{10} = \frac{13}{2} : \frac{161}{10} = \frac{130}{322}$.

Si uno de los términos de la division es mixto y el otro entero ó quebrado, se reduce el mixto á quebrado, y resulta uno de los casos anteriores.

EJEMPLOS.

1.° $19\frac{2}{5} : 3 = \frac{97}{5} : 3 = \frac{97}{15} = 6\frac{7}{15}$.

2.° $9\frac{7}{11} : \frac{3}{8} = \frac{106}{11} : \frac{3}{8} = \frac{848}{33} = 25\frac{23}{33}$.

3.° $\frac{31}{23} : 2\frac{5}{7} = \frac{31}{23} : \frac{19}{7} = \frac{217}{437}$.

VI.—Operaciones indicadas y producto de varios factores conmensurables. [1]

173. Es evidente que los teoremas demostrados en los números 41 y 58, son ciertos en el caso de ser todos los sumandos fraccionarios, ó unos enteros y otros fraccionarios, puesto que las demostraciones serian las mismas, luego

Para multiplicar ó dividir una suma de números conmensurables por un número entero, se multiplica ó divide cada sumando por este número, y se suman los productos ó cocientes.

174. TEOREMA. *Para multiplicar una suma de números conmensurables por una fraccion, se multiplica cada sumando por esta fraccion, y se suman los productos.*

Sea $$(a+b+c)\times\frac{5}{8}.$$

El producto es los $\frac{5}{8}$ de $a+b+c$; para hallar $\frac{1}{8}$ de esta suma, la dividiremos por 8, y resultará

$$\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8},$$

y para hallar los $\frac{5}{8}$, ó sea el producto buscado, multiplicaremos por 5 el valor de $\frac{1}{8}$; pero

$$\left(\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}\right)\times 5=\frac{a\,.\,5}{8}+\frac{b\,.\,5}{8}+\frac{c\,.\,5}{8}=$$
$$a\,.\,\frac{5}{8}+b\,.\,\frac{5}{8}+c\,.\,\frac{5}{8}.$$

Lo que demuestra el teorema.

175. Aplicando la demostracion dada en el número 58, al caso en que el divisor sea un número fraccionario, se demuestra que

Para dividir una suma indicada de números conmensurables por una fraccion, se divide cada sumando por esta fraccion, y se suman los cocientes.

---

1 Esto es, enteros ó fraccionarios.

176. Por medio de razonamientos análogos á los de los números 42 y 59, se puede ahora demostrar que

Para multiplicar ó dividir una diferencia de números conmensurables por un número conmensurable, se multiplican ó dividen el minuendo y el sustraendo por dicho número, y se restan los productos ó cocientes.

177. TEOREMA. *Para multiplicar entre sí varios números fraccionarios ó unos enteros y otros fraccionarios, se halla un producto compuesto de los numeradores de los quebrados y de los números enteros, y se parte por el producto de los denominadores.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot 4\cdot\frac{6}{11}=\frac{3.2.4.6}{5.7.11}.$$

En efecto: las operaciones que debemos efectuar para hallar el producto, son las siguientes:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3.2}{5.7},\quad \frac{3.2}{5.7}\cdot 4=\frac{3.2.4}{5.7},\quad \frac{3.2.4}{5.7}\cdot\frac{6}{11}=$$
$$\frac{3.2.4.6}{5.7.11}.$$

Lo que demuestra el teorema.

178. TEOREMA. *Para multiplicar un número conmensurable por un producto de varios factores conmensurables, se multiplica el número sucesivamente por cada uno de los factores del producto.*

Queremos demostrar que

$$\frac{4}{7}\times\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{11}\right)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{11}.$$

En efecto: $\frac{4}{7}\times\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{11}\right)=\frac{4}{7}\times\frac{3.2.1}{5.9.11}=$

$$\frac{4.3.2.1}{7.5.9.11}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{11}.$$

Lo cual debíamos demostrar.

179. TEOREMA. *Para multiplicar entre sí dos productos indicados de factores conmensurables, se multiplica el primer producto sucesivamente por cada uno de los factores del segundo.*

Vamos á demostrar que

$$\left(7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{5}{8} \cdot 4 \cdot \frac{3}{7}\right) = 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot 4 \cdot \frac{3}{7}.$$

En efecto: efectuando el primer producto indicado, tendremos

$$\left(7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{5}{8} \cdot 4 \cdot \frac{3}{7}\right) = \frac{7 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 9} \times \left(\frac{5}{8} \cdot 4 \cdot \frac{3}{7}\right);$$

pero, segun el teorema anterior,

$$\frac{7 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 9} \times \left(\frac{5}{8} \cdot 4 \cdot \frac{3}{7}\right) = \frac{7 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 9} \cdot \frac{5}{8} \cdot 4 \cdot \frac{3}{7} = 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot 4 \cdot \frac{3}{7}.$$

180. Teorema. *Para multiplicar un producto indicado por un número conmensurable, se multiplica cualquiera de los factores por dicho número.*

Vamos á demostrar que para multiplicar el producto $\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{11}$ por $\frac{3}{4}$, basta multiplicar cualquiera de sus factores, el $\frac{5}{8}$ por ejemplo, por $\frac{3}{4}$.

En efecto: efectuando el producto indicado resulta

$$\left(\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{11}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 8 \cdot 11} \times \frac{3}{4} = \frac{(2 \cdot 5 \cdot 7) \times 3}{(9 \cdot 8 \cdot 11) \times 4} = \frac{2 \cdot (5 \cdot 3) \cdot 7}{9 \cdot (8 \cdot 4) \cdot 11} = \frac{2}{9} \cdot \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 4} \cdot \frac{7}{11}.$$

Escolio. Puede enunciarse este teorema diciendo: *Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número, queda multiplicado el producto por dicho número.*

181. Teorema. *Un producto de varios números conmensurables, no se altera cambiando el órden de sus factores.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot 9 \cdot 5 \cdot \frac{3}{7}.$$

En efecto: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 5}{7 \cdot 5 \cdot 3}$,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot 9 \cdot 5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7};$$

los segundos miembros de las dos últimas igualdades tienen iguales los numeradores y denominadores [67]; luego son iguales; por consiguiente los primeros miembros lo son tambien.

182. Teorema. *Para multiplicar dos sumas indicadas de números conmensurables, se multiplica cada sumando de una de ellas por cada sumando de la otra, y se suman los productos.*

Sea $(a+b+c)(p+q)$.

Si consideramos á $p+q$ como un número, será

$$(a+b+c)(p+q)=a(p+q)+b(p+q)+c(p+q);$$

alterando el órden de los factores, tendremos

$$(a+b+c)(p+q)=(p+q)a+(p+q)b+(p+q)c;$$

por último, efectuando las multiplicaciones del segundo miembro, resulta

$$(a+b+c)(p+q)=ap+aq+bp+bq+cp+cq.$$

Igualdad que demuestra el teorema.

183. Teorema. *Para dividir un producto indicado por un número conmensurable, se divide cualquiera de los factores por dicho número.*

Vamos á demostrar que para dividir el producto $\frac{3}{5}.\frac{2}{11}.\frac{5}{9}$ por $\frac{7}{8}$, basta dividir cualquiera de sus factores, por ejemplo $\frac{2}{11}$, por $\frac{7}{8}$; esto es, que $\frac{3}{5}.\frac{2.8}{11.7}.\frac{5}{9}$ es el cociente.

En efecto: multiplicando $\frac{3}{5}.\frac{2.8}{11.7}.\frac{5}{9}$ por el divisor $\frac{7}{8}$, para lo cual basta multiplicar el factor $\frac{2.8}{11.7}$, se obtiene $\frac{3}{5}.\frac{2}{11}.\frac{5}{9}$, que es el dividendo; luego el cociente es $\frac{3}{5}\times\frac{2.8}{11.7}\times\frac{5}{9}$.

Escolio. Puede enunciarse este teorema diciendo: *Si uno de los factores de un producto se divide por un número, queda dividido el producto por dicho número.*

184. De los principios demostrados en los números 180 y 183, se deduce el siguiente

TEOREMA. *Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número y el otro factor se divide, el producto no varía.*

185. TEOREMA. *Para dividir un número conmensurable por un producto de varios factores, se divide el número sucesivamente por cada uno de los factores del producto.*

Queremos demostrar que para dividir $\frac{2}{3}$ por el producto $5 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{9}{11}$ basta dividir $\frac{2}{3}$ por 5, el cociente $\frac{2}{3 \cdot 5}$ por $\frac{2}{7}$, el segundo cociente $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 2}$ por $\frac{9}{11}$, y que el tercer cociente $\frac{2 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9}$ es el buscado.

En efecto: multiplicando el tercer cociente por $\frac{5}{11}$, obtenemos el segundo $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 2}$; multiplicando éste por $\frac{2}{7}$, se obtiene el primero $\frac{2}{3 \cdot 5}$; y multiplicando éste por 5, se obtiene el dividendo $\frac{2}{3}$; pero habiendo multiplicado $\frac{2 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9}$ sucesivamente por $\frac{9}{11}$, $\frac{2}{7}$ y 5, se ha multiplicado por el divisor $5 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{9}{11}$; luego $\frac{2 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9}$ es el cociente.

186. TEOREMA. *Para elevar un quebrado á una potencia cualquiera, se elevan á dicha potencia sus dos términos.*

Decimos que $\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5^3}{8^3}$.

En efecto: segun la definicion de potencia [70], tenemos

$$\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{5^3}{8^3}.$$

Para elevar un número mixto á una potencia cualquiera, *se reduce el mixto á quebrado, y se continúa como en el caso anterior.*

Así, $$\left(3\,\frac{7}{9}\right)^2 = \left(\frac{34}{9}\right)^2 = \frac{34^2}{9^2} = \frac{1156}{81}.$$

187. Así como el cociente indicado de dos números enteros se escribe con frecuencia en forma de quebrado, tambien el cociente de dos fracciones, ó de un entero y una fraccion, pueden recibir la misma forma; por ejemplo,

$$\frac{4}{7} : \frac{5}{9} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{5}{9}}, \qquad 8 : \frac{3}{4} = \frac{8}{\frac{3}{4}}.$$

Los teoremas del número 142 se generalizan, para las divisiones de números conmensurables, de la manera siguiente:

Si el dividendo y el divisor son números enteros ó fraccionarios, ó uno entero y otro fracionario, se verifica

1.° *Multiplicando ó dividiendo el dividendo por un número entero ó fraccionario, el cociente queda multiplicado ó dividido por dicho número.*

Sea a el dividendo, b el divisor y c el cociente.

Tenemos: $a : b = c$, de donde $a = bc$; multiplicando ó dividiendo los dos miembros de esta igualdad por un número conmensurable m, resulta

$$am = b\,.\,cm \qquad [180],$$
$$a : m = b\,.\,(c : m) \qquad [183];$$

de donde se deduce

$$\frac{am}{b} = cm, \qquad \frac{a : m}{b} = c : m.$$

Lo que demuestra el teorema.

2.° *Multiplicando ó dividiendo el divisor por un número entero ó fraccionario, el cociente queda dividido ó multiplicado por dicho número.*

Tenemos, como en el teorema anterior, $a : b = c$, de donde $a = bc$; de esta igualdad se deduce [184]

$$a = bm\,.\,(c : m),$$
$$a = (b : m)\,.\,cm;$$

de donde

$$\frac{a}{bm} = c : m, \qquad \frac{a}{b : m} = cm.$$

3.° *Multiplicando ó dividiendo el dividendo y el divisor por un número entero ó fraccionario, el cociente no varía.*

Tenemos $a: b = c$, $a = bc$; multiplicando y dividiendo por m ambos miembros de esta igualdad, resultan otras dos

$$am = bm \, . \, c \qquad [180],$$
$$a : m = (b : m) \, . \, c \qquad [183];$$

de donde

$$\frac{am}{bm} = c, \; \frac{a : m}{b : m} = c;$$

resultados que demuestran el teorema.

VII.—Propiedades de las fracciones iguales.

188. Si comparamos entre sí dos cantidades, el resultado de la comparacion se llama *razon* ó *relacion*, y no es mas que el cociente de dividir la primera cantidad por la segunda.

Razon *es el cociente de dos cantidades.*

Todo cociente es igual á una fraccion, que tiene por numerador el dividendo y por denominador el divisor [128 y 187]; por consiguiente las ideas de *razon, cociente y fraccion son idénticas.*

189. Igualdad fraccionaria *es la expresion de la igualdad de dos fracciones* [1].

$$\frac{3}{5} = \frac{27}{45}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

son igualdades fraccionarias.

a, b, c, d se llaman respectivamente *primero, segundo, tercero* y *cuarto término.*

Llamaremos *términos opuestos* al a y d, así como tambien á b y c [2].

---

1 Hasta hace algunos años se llamaba, y aun hoy sigue llamándose por algunos autores, *proporcion* á la igualdad de dos razones, y se estudiaba una serie de propiedades de las proporciones, que constituia una teoría extensa y complicada. Considerando la proporcion como la igualdad de dos quebrados, y transformando ésta, por medio de operaciones iguales efectuadas con sus dos miembros, se obtienen las mismas propiedades con la mayor sencillez.

2 Antes las proporciones se escribian en la forma $a : b :: c : d$, y se leian a es á b como c es á d, llamando á $a : b$ *primera razon*, á $c : d$ *segunda razon*, á a y c *antecedentes*, b y d *consecuentes*, a y d *extremos*, b y c *medios*.

190. Teorema. *En toda igualdad fraccionaria, los productos de los términos opuestos son iguales* [1].

Sea $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Multiplicando los dos miembros por el producto bd de los denominadores, resulta

$$\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d},$$

y simplificando será

$$ad=bc.$$

191. Problema. *Dados tres términos de una igualdad fraccionaria, hallar el cuarto.*

De $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. se deduce $ad=bc$; dividiendo por a los dos miembros de la igualdad última, resulta

$$d=\frac{bc}{a}.$$

Si la misma igualdad se divide por b, c y d, se obtendrá respectivamente

$$c=\frac{ad}{b},\quad b=\frac{ad}{c},\quad a=\frac{bc}{d}.$$

Luego, *un término de una igualdad fraccionaria se obtiene dividiendo por su opuesto el producto de los otros dos* [2].

192. Si tenemos las igualdades

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c},\quad \frac{m}{p}=\frac{q}{m},$$

será $\qquad ac=b^2,\qquad m^2=pq.$

Luego, *si dos términos opuestos de una igualdad fraccionaria son iguales, el cuadrado de uno de estos es igual al producto de los otros dos.*

Cada uno de los términos b y m de las anteriores igual-

---

1 En toda proporcion, el producto de los extremos es igual al de los medios.

2 Un extremo de una proporcion es igual al producto de los medios partido por el otro extremo. Un medio de una proporcion es igual al producto de los extremos partido por el otro medio.

dades, se llama *medio factorial* ó *medio proporcional* entre los otros dos [1].

193. Teorema. *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, los cuatro pueden formar una igualdad fraccionaria, siendo términos opuestos los factores de cada producto* [2].

Supongamos $ad = bc$; partiendo ambos miembros de esta igualdad por el producto de un factor del primer miembro por otro del segundo, por ejemplo db, será

$$\frac{ad}{db} = \frac{bc}{db},$$

ó simplificando

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Corolario. *Alterando el órden de los términos de una igualdad fraccionaria, de modo que dos términos opuestos de ella no dejen de serlo, subsistirá la igualdad* [3].

Puesto que el producto de los términos opuestos será siempre el mismo, y segun el teorema, habrá igualdad fraccionaria.

Así, la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ puede escribirse de los modos siguientes:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a},\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a},\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c},\ \frac{b}{d} = \frac{a}{c},$$
$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b},\ \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

194. Teorema. *Si los numeradores ó denominadores de*

---

1 Se llama *proporcion continua* la que tiene iguales sus términos medios. El término medio se llama *medio proporcional* entre los extremos, y el cuarto término de la proporcion se llama *tercero proporcional* á los dos primeros.

En toda proporcion continua el producto de extremos es igual al cuadrado del término medio.

2 Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, los cuatro pueden formar proporcion, siendo extremos los factores de un producto y medios los del otro.

3 Alterando el órden de los términos de una proporcion, de modo que el producto de los extremos sea siempre igual al de los medios, subsistirá la proporcion.

una igualdad fraccionaria son iguales respectivamente á los de otra, los otros cuatro términos pueden formar una igualdad fraccionaria [1].

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{m}=\frac{c}{n}$, tendremos

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{a}{c}=\frac{m}{n},$$

de donde $$\frac{b}{d}=\frac{m}{n}.$$

195. Teorema. *En toda igualdad fraccionaria, la suma de los términos del primer quebrado partida por el numerador ó denominador del mismo, es igual á la suma de los términos del segundo partida por su numerador ó denominador* [2].

Sea la igualdad $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Aumentando en una unidad sus dos miembros, será

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1;$$

efectuando la adicion indicada en cada miembro, resulta

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

Además, la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ puede escribirse en la forma $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, de donde

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}.$$

196. Teorema. *En toda igualdad fraccionaria, la diferencia entre los términos del primer quebrado partida por el numerador ó denominador del mismo, es igual á la diferen-*

---

1 Si los antecedentes ó consecuentes de dos proporciones son iguales, se puede formar proporcion con los otros cuatro términos.

2 En toda proporcion, la suma de los términos de la primera razon es al antecedente ó consecuente, como la suma de los términos de la segunda razon es al antecedente ó consecuente de la misma.

cia entre los términos del segundo partida por su numerador ó denominador [1].

Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y supongamos que las fracciones sean propias. Si cada una de ellas se resta de la unidad, las diferencias serán iguales, esto es,

$$1-\frac{a}{b}=1-\frac{c}{d}, \text{ ó sea } \frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{d}.$$

Supongamos ahora que sean impropias: restando la unidad de cada una, tendremos

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1, \text{ ó } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

Además, de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, y de ésta

$$\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}, \text{ ó } \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},$$

segun que las fracciones dadas sean propias ó impropias.

197. Teorema. *En toda igualdad fraccionaria, la suma de los términos de la primera fraccion partida por su diferencia, es igual á la suma de los términos de la segunda fraccion partida por la diferencia de los mismos* [2].

De $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \text{ y } \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}.$$

Teniendo las dos últimas denominadores iguales, será [194]

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

198. Teorema. *En toda igualdad fraccionaria, la suma ó diferencia de los numeradores partida por la suma ó dife-*

---

1 En toda proporcion, la diferencia entre los términos de la primera razon es al antecedente ó consecuente, como la diferencia entre los términos de la segunda razon es á su antecedente ó consecuente.

2 En toda proporcion, la suma de los términos de la primera razon es á su diferencia, como la suma de los términos de la segunda razon es á la diferencia de los mismos.

rencia de los denominadores, es igual á cualquiera de las fracciones dadas [1].

De $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, y de ésta $\frac{a\pm c}{a}=\frac{b\pm d}{b}$

ó sea $$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b},\quad \text{ó}\quad \frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{c}{d}.$$

199. Teorema. *En toda igualdad fraccionaria, la suma de los numeradores partida por su diferencia, es igual á la suma de los denominadores partida por la diferencia de los mismos* [2].

De $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$, $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$;

luego $$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}\quad \text{ó}\quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}.$$

200. Teorema. *Si tenemos tres ó mas fracciones iguales, la suma de varios ó de todos los numeradores partida por la suma de los denominadores respectivos, es igual á cualquiera de las fracciones dadas* [3].

Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\ldots.$

De $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$; pero $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$,

luego $\frac{a+c}{b+d}=\frac{m}{n}$, de donde $\frac{a+c+m}{b+d+n}=\frac{m}{n}$.

Del mismo modo hallaríamos que $\frac{a+c+m+p+\ldots}{b+d+n+q+\ldots}$ es igual á una de las fracciones dadas, y como éstas son iguales entre sí, resulta por último

$$\frac{a+c+m+p+\ldots.}{b+d+n+q+\ldots.}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}=\ldots.$$

1 En toda proporcion, la suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

2 En toda proporcion, la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á la diferencia de estos.

3 La igualdad de tres ó mas razones, se llama *serie de razones iguales.*

En toda serie de razones iguales, la suma de varios ó de todos los antecedentes es á la suma de los consecuentes respectivos, como un antecedente es á su consecuente.

CAPÍTULO SEGUNDO.

FRACCIONES DECIMALES.

I.—Numeracion y nociones preliminares.

201. Los números menores que uno pueden ser expresados por fracciones, en las que las divisiones de la unidad no sean arbitrarias, sino que, por el contrario, estén sujetas á una ley; y así como la uniformidad en la formacion de las unidades numerativas decena, centena, millar etc., nos proporcionó, en la numeracion de enteros, la inmensa ventaja de poder representar estos verbalmente y por escrito con suma sencillez, de igual modo, aplicando las mismas leyes á las subdivisiones de la unidad, debemos hallar, por analogía, medios sencillos de enunciar y escribir las fracciones que se originen, llamadas *fracciones decimales.*

Se llaman FRACCIONES DECIMALES, *las que tienen por denominador la unidad seguida de ceros.*

202. El fundamento de la numeracion de enteros es que una unidad de un órden cualquiera, se compone de *diez* unidades del órden inmediato inferior.

El fundamento de la numeracion de decimales será el mismo exactamente.

Estas nuevas unidades fraccionarias tienen la unidad simple por punto de partida; ésta se compone de diez *décimas;* la décima se compone de diez *centésimas;* ésta de diez *milésimas,* y así sucesivamente. Por lo tanto, una unidad tiene diez décimas, cien centésimas, mil milésimas etc.

La nomenclatura de las unidades decimales, manifiesta claramente la analogía que guardan con las enteras; tenemos, en efecto,

decena, unidad *diez veces mayor* que la unidad simple,
décima, unidad *diez veces menor* que la unidad simple;
centena, unidad *cien veces mayor* que la unidad simple,
centésima, unidad *cien veces menor* que la unidad simple;
millar, unidad *mil veces mayor* que la unidad simple,
milésima, unidad *mil veces menor* que la unidad simple.

. . . .

Vemos que los nombres de las unidades decimales se forman cambiando la terminacion de las enteras en *ésimas.*

203. El fundamento de la numeracion escrita es que una cifra colocada á la derecha de otra representa unidades diez veces menores.

Apliquemos este principio al número

$$638\overline{4}\,257,$$

y suponiendo que 4 sea la cifra de las unidades simples, tendremos que la cifra 2 expresará unidades diez veces menores ó décimas; la cifra 5 expresará unidades diez veces menores que las décimas ó cien veces menores que las unidades simples, esto es, centésimas; la cifra 7 representará unidades diez veces menores que las centésimas ó mil veces menores que las unidades simples, esto es, milésimas.

De aquí resulta que las décimas deben ocupar el primer lugar á la derecha de las unidades simples, las centésimas el segundo, las milésimas el tercero y así sucesivamente.

204. Ya tenemos los medios necesarios para leer y escribir los números decimales; sin embargo haremos algunas simplificaciones.

En el número $638\overline{4}\,257$, si consideramos solo la parte decimal, observamos que la cifra 2 es centenas respecto del 7, y el 5 decenas; por lo tanto dicha parte decimal se compone de 257 milésimas.

Para expresarla, hubiera pues bastado leerla como un número entero, añadiendo la denominacion correspondiente á la última cifra 7; luego

Los números decimales se leen como si fusen enteros, añadiendo además la denominacion correspondiente á la última cifra.

Esta denominacion puede obtenerse fácilmente observando que *dos cifras, una decimal y otra entera, colocadas á igual distancia de las unidades simples, tienen nombres análogos.*

Así, el 6, que en el número $638\overline{4}\,257$ ocupa el tercer lugar á la izquierda de las unidades simples, representa *millares;* y el 7, que tambien ocupa el tercer lugar, pero á la derecha, representa *milésimas;* el 3 es *centenas,* el 5 *centésimas;* el 8 *decenas,* el 2 *décimas.*

La parte entera se lee separadamente y antes que la decimal.

Ejemplo. Leer el número $95\overline{6}\,4327$.

La última cifra ocupa el cuarto lugar, luego expresa diezmilésimas; el número es por tanto

956 *enteros* 4327 *diezmilésimas.*

205. De lo dicho se desprende que los números decimales se escriben como los enteros; así *ocho mil trescientas cuatro* millonésimas, se escribirá

8304;

pero á fin de no confundir este número con 8304 unidades simples, es necesario distinguirlos de algun modo. Podria emplearse para esto signos convencionales, pero como *dos cifras, una entera y otra decimal, que tienen nombres análogos, están á igual distancia de las unidades simples,* la cifra 4 que debe representar millonésimas, ocupará á la derecha de las unidades simples, el mismo lugar que los millones á la izquierda, esto es, el sexto; para lo que es indispensable ocupar con ceros los lugares correspondientes á las unidades que faltan en el número, y separar la parte entera de la decimal por medio de algun signo convencional, que generalmente es una coma.

Por consiguiente escribiremos

0,008304.

Podemos ya formular la siguiente regla.

Para escribir un número decimal, se escribe su parte entera y despues la decimal, cuidando de que la última cifra de ésta ocupe el lugar correspondiente á las unidades que debe representar, lo que se consigue poniendo despues de la coma los ceros necesarios.

Ejemplo. Escribir *treinta y cinco unidades mil veinticuatro cienmilésimas.*

Las cienmilésimas ocuparán el quinto lugar; el número 1024 tiene cuatro cifras; luego despues de la coma se pondrá un cero. Tendremos, pues,

35,01024.

206. Escolio 1.° La parte entera y la decimal pueden leerse de una vez.

Sea el número 35,045.

Valiendo cada unidad 1000 milésimas, 35 unidades valdrán 35000 milésimas; luego el número puede leerse

treinta y cinco mil cuarenta y cinco milésimas.

Basta, segun se ve, leer todo el número prescindiendo de la coma, y añadir la denominacion correspondiente á la última cifra

2.° Si al escribir un número decimal no se da parte entera, y observamos que tiene mas cifras de las necesarias para que la última ocupe el lugar correspondiente, es señal de que existe parte entera, incluida en las unidades fraccionarias que se dieron.

En este caso se escribe el número dado como si fuese entero, y se pone la coma en el lugar conveniente, para que la última cifra de la derecha represente unidades del órden decimal á que se refiere el número.

Supongamos, por ejemplo, que se pide escribir el número *treinta y cinco mil cuarenta y cinco milésimas.*

Las milésimas ocupan el tercer lugar, pero el número dado tiene cinco cifras, luego tiene parte entera. Escribiéndole como si fuese entero será 35045; y poniendo ahora la coma de modo que el 5 represente milésimas, resulta el número 35,045.

207. Teorema. *Una fraccion decimal no se altera añadiendo ceros á la derecha, ó suprimiendo los que ya tenia.*

Sea la fraccion 5,87; añadiendo dos ceros á su derecha, resulta 5,8700; digo que

$$5,87 = 5,8700.$$

La primera fraccion se compone de 5 unidades enteras, 8 décimas y 7 centésimas; y la segunda consta de 5 unidades, 8 décimas, 7 centésimas, *cero* milésimas y *cero* diezmilésimas; luego tienen ambas igual valor.

Es evidente que tampoco varía la fraccion suprimiendo ceros de la derecha.

208. Teorema. *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma hácia la derecha tantos lugares como ceros siguen á la unidad.*

Propongámonos multiplicar la fraccion 0,3479 por 100, y demostremos que

$$0,3479 \times 100 = 34,79.$$

En efecto: al correr la coma dos lugares hácia la derecha, cada cifra del número dado avanza dos lugares hácia la izquierda, adquiriendo por consiguiente un valor relativo 100 veces mayor.

En el ejemplo propuesto, la cifra 3 que representa décimas, despues del movimiento de la coma representa decenas; las 4 centésimas se convierten en 4 unidades simples, y lo mismo sucede á las demás cifras, esto es, se hacen todas 100 veces mayores; luego el número que resulta es 100 veces mayor.

Si el número de cifras decimales no es bastante para que pueda correrse la coma los lugares necesarios, se añadirán ceros á la derecha del decimal.

Así, $3,56 \times 10000 = 35600$.

209. Teorema. *Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma hácia la izquierda tantos lugares como ceros siguen á la unidad.*

Vamos á demostrar que

$$584,2 : 100 = 5,842.$$

En efecto: al correr la coma dos lugares hácia la izquierda, cada cifra del número dado avanza hácia la derecha dos lugares, adquiriendo por consiguiente un valor relativo 100 veces menor.

En nuestro ejemplo, la cifra 5 que representa centenas, despues de correr la coma representa unidades; las 8 decenas se han convertido en 8 décimas, y lo mismo sucede á las demás cifras, esto es, se hacen todas 100 veces menores; luego el número que resulta es 100 veces menor que el propuesto.

Si el número de cifras enteras no es bastante para que pueda correrse la coma los lugares necesarios, se añadirán ceros á la izquierda de la parte entera.

Así, $3,14 : 1000 = 0,00314$; $24,5 : 100 = 0,245$.

II.—Adicion.

210. Fundándose la numeracion de los números decimales en los mismos principios que la de enteros, la regla para sumar los primeros debe ser análoga á la que dimos en el número 22 para los segundos. Así,

Para sumar varios números decimales, se suman las unidades de cada órden, empezando por las inferiores. Las sumas menores que diez se escriben sin alterarlas, y de las mayores ó iguales solo se escriben las unidades, reservando las decenas para agregarlas á la suma parcial siguiente. La última suma se escribe segun se obtiene.

Para mayor comodidad se colocan los sumandos unos debajo de otros, de modo que las unidades del mismo órden estén en columna vertical, lo que evidentemente se consigue poniendo las comas en columna.

EJEMPLO.

28,357
3,04
128,3392
0,2
―――――――
159,9862

III.—Sustraccion.

211. El escolio del número 24 se aplica igualmente á los números decimales que á los enteros; por consiguiente la regla para restar dos de aquellos, debe ser la misma dada en el número 28 para estos.

Para restar dos números decimales, se resta cada cifra del sustraendo de la del mismo órden del minuendo, empezando por las de órden inferior. Cuando una cifra del sustraendo es mayor que la correspondiente en el minuendo, se agrega á ésta diez unidades y se efectúa la sustraccion, cuidando despues de aumentar en una unidad la cifra siguiente del sustraendo.

Para mayor comodidad se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades del mismo órden se correspondan. Si el número de cifras decimales de los números dados es diferente, se añaden ceros á la derecha del que tenga menos.

Sean los números 35,47 y 18,325.

Para igualar el número de cifras decimales, añadiremos un cero al minuendo, y tendremos

35,470
18,325
――――――
17,145

IV.—Multiplicacion.

212. En la multiplicacion de decimales distinguiremos dos casos: 1.° multiplicar un número decimal por un entero; 2.° multiplicar dos números decimales.

213. PRIMER CASO. *Para multiplicar un número decimal por un entero, se multiplican como si los dos fuesen enteros,*

y de la derecha del producto se separan tantas cifras decimales como tiene el multiplicando.

Sea 5,274 el multiplicando y 28 el multiplicador.

Suprimiendo la coma en el primero, se hace este número 1000 veces mayor, luego el producto queda multiplicado por 1000 [180]: para que sea el verdadero es necesario dividirle por 1000, lo que se consigue separando tres cifras decimales, esto es, tantas como tiene el multiplicando.

Así obtendremos

$$\begin{array}{r} 5{,}274 \\ 28 \\ \hline 42\,192 \\ 105\,48 \\ \hline 147{,}672 \end{array}$$

214. Segundo caso. *Para multiplicar dos números decimales, se multiplican como si fuesen enteros, y de la derecha del producto se separan tantas cifras decimales como tienen los dos factores.*

Sea 3,246 el multiplicando y 6,37 el multiplicador.

Suprimiendo la coma en el último, se convierte en 637, número 100 veces mayor que el propuesto, y se reduce este caso al anterior. Pero habiendo multiplicado por 100 el multiplicador, el producto resulta multiplicado por 100; luego deberá dividirse por el mismo número, separando al efecto dos cifras de la derecha; y como segun la regla del primer caso, debemos separar además tres que tiene el multiplicando, resultan cinco, esto es, tantas como tienen los dos factores.

Tendremos segun esto

$$\begin{array}{r} 3{,}2\,46 \\ 6{,}37 \\ \hline 22\,7\,22 \\ 97\,3\,8 \\ 19\,47\,6 \\ \hline 20{,}67\,7\,02 \end{array}$$

V.—Division.

215. En esta operacion distinguiremos dos casos: 1.° dividir un número decimal por un entero; 2.° dividir un entero ó decimal por otro decimal.

216. Primer caso. *Para dividir un número decimal por un entero, se dividen como si los dos fuesen enteros, y de la derecha del cociente se separan tantas cifras decimales como tiene el dividendo.*

Sean los números 35,296 y 27.

Suprimiendo la coma en el dividendo, se multiplica este número por 1000; luego el cociente queda multiplicado por 1000 [187. 1.°]; para obtener el verdadero, debemos, por consiguiente, dividir por 1000 el cociente hallado, lo que se consigue separando de su derecha tres cifras decimales, esto es, tantas como tiene el dividendo.

Segun lo dicho, tendremos

35,296	27
8 2	1,307
196	
7	

217. El cociente exacto de los números propuestos es mayor que 1,307, puesto que se ha obtenido residuo, y menor que 1,308, porque el producto de este número por 27 sería mayor que el dividendo: estando comprendido el cociente entre 1,307 y 1,308, que difieren en una milésima, se comete, tomando 1,307 para cociente, un error menor que esta diferencia.

Aplicando el mismo razonamiento á nn cociente cualquiera, se verá que

Si al dividir un decimal por un entero, se desprecia la fraccion complementaria formada por el residuo y el divisor, el error que se comete es menor que una unidad del último órden decimal del cociente.

Obsérvese que podemos aumentar cuanto queramos el número de cifras del cociente, con solo añadir ceros á la parte decimal del dividendo, y que por tanto los cocientes podrán expresarse en decimales con cuanta aproximacion sea necesaria.

Ejemplo. Hallar el cociente de 75,32 por 23 con un error menor que 0,0001.

75,3200	23
6 3	3,2747
1 72	
110	
180	
19	

Es inútil añadir los ceros al dividendo, bastando colocarlos uno á uno á la derecha de los residuos.

El medio expuesto para aproximar los cocientes, se puede aplicar á la division de enteros, considerando el dividendo como un número decimal, cuyas cifras decimales son ceros.

218. Segundo caso. *Para dividir un número entero ó decimal por otro decimal, se multiplican el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor, y queda reducido el caso á dividir dos números enteros ó un decimal por un entero.*

Sea 24,375 el dividendo y 3,128 el divisor.

Multiplicando estos números por la unidad seguida de tres ceros, esto es, por 1000, el cociente no varía [187. 3.°], y la cuestion se reduce á dividir 24375 por 3128.

Aproximando el cociente hasta centésimas, tendremos

$$\begin{array}{r|l} 24375 & 3128 \\ \cline{2-2} 24790 & 7,79 \\ 28940 & \\ 788 & \end{array}$$

Sea 35,2745 el dividendo y 3,24 el divisor.

Multiplicando por 100 estos números, el cociente no varía, y tendremos que dividir 3527,45 por 324, operacion que pertenece al primer caso.

$$\begin{array}{r|l} 3527,45 & 324 \\ \cline{2-2} 287\ 4 & 10,88 \\ 28\ 25 & \\ 2\ 33 & \end{array}$$

Sea el dividendo 18,37 y el divisor 3,4526.

Aproximando hasta centésimas, será

$$\begin{array}{r|l} 183700 & 34526 \\ \cline{2-2} 110700 & 5,32 \\ 71220 & \\ 2168 & \end{array}$$

CAPÍTULO TERCERO.

CONVERSION DE FRACCIONES ORDINARIAS EN DECIMALES Y VICE-VERSA.

I.—Conversion de fracciones ordinarias en decimales.

219. Propongámonos convertir la fraccion $\frac{19}{8}$ en otra decimal equivalente.

Para resolver esta cuestion determinaremos las unidades enteras, décimas, centésimas etc. que contienen los $\frac{19}{8}$ de la unidad.

Este quebrado es igual al cociente exacto de su numerador por su denominador. Dividiendo 19 por 8, el cociente entero es 2; luego 2 es la parte entera del número decimal que buscamos. Para completar el cociente debemos dividir el residuo 3 por el divisor 8: el residuo 3 no puede dividirse por 8; pero si se convierte en décimas valdrá 30 décimas, las cuales divididas por 8, dan 3 décimas de cociente entero, luego el decimal que buscamos contiene 3 décimas. Para completar el cociente de 30 décimas por 8, debemos dividir el residuo 6 por el divisor: las 6 décimas valen 60 centésimas, que divididas por 8, dan 7 centésimas para el número decimal que buscamos. Completaremos el cociente último, dividiendo el residuo 4 centésimas ó 40 milésimas por 8, lo que da 5 milésimas exactamente.

Luego el número decimal equivalente á $\frac{19}{8}$ es 2,375.

En vista de la marcha seguida para obtener este resultado, formularemos la siguiente regla.

Para convertir un quebrado ordinario en decimal, se divide el numerador por el denominador, y el cociente entero será la parte entera del decimal. El residuo seguido de un cero se parte por el denominador, y se continúa la operacion añadiendo un cero á cada residuo, y dividiendo por el denominador.

Este procedimiento es idéntico al que expusimos en el número 217 para aproximar los cocientes.

La operacion se dispone en la práctica del modo siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
19 & 8 \\ \cline{2-2}
30 & 2,375 \\
60 & \\
40 & \\
0 &
\end{array}
$$

EJEMPLOS.

1.° Sea el quebrado $\frac{78}{125}$.

$$
\begin{array}{r|l}
780 & 125 \\ \cline{2-2}
300 & 0,624 \\
500 & \\
0 &
\end{array}
$$

2.° Sea el quebrado $\frac{7}{11}$.

$$
\begin{array}{r|l}
70 & 11 \\ \cline{2-2}
40 & 0,6363... \\
70 & \\
40 & \\
7 &
\end{array}
$$

3.° Sea el quebrado $\frac{52}{55}$.

$$
\begin{array}{r|l}
520 & 55 \\ \cline{2-2}
250 & 0,94545... \\
300 & \\
250 & \\
300 & \\
25 &
\end{array}
$$

En el segundo ejemplo, los dividendos parciales son alternativamente 70 y 40, y como el divisor es constante, las cifras del cociente serán siempre 6 y 3, no pudiendo concluir nunca la operacion. De esto se infiere que $\frac{7}{11}$ no puede convertirse exactamente en fraccion decimal; pero se obtendrá una que se aproxime á $\frac{7}{11}$ cuanto se quiera, tomando un número suficiente de cifras decimales; así

$$\frac{7}{11} = 0,6363 \text{ con un error menor que } 0,0001.$$

En el tercer ejemplo, tambien se reproducen periódicamente las cifras 4 y 5, siendo imposible terminar la operacion.

220. La fraccion ordinaria que se convierte en decimal, se llama *generatriz* de la decimal equivalente.

En vista de los resultados obtenidos en los ejemplos del número anterior, dividiremos las fracciones decimales equivalentes á otras ordinarias en fracciones decimales *exactas* y *periódicas*.

FRACCION DECIMAL EXACTA *es toda fraccion decimal que equivale exactamente á otra ordinaria.*

FRACCION DECIMAL PERIÓDICA *es toda fraccion de un número ilimitado de cifras, tal que un grupo de éstas se repite indefinidamente en el mismo órden.*

El grupo de cifras que se repite indefinidamente, se llama *periodo.*

Las fracciones periódicas se subdividen en *puras* y *mixtas.*

Una fraccion periódica es *pura* cuando el periodo empieza en las décimas; y *mixta* cuando el periodo empieza despues de las décimas.

5,3838... es una fraccion periódica pura; el periodo es 38.

0,89134134... es una fraccion periódica mixta; el periodo es 134, y la parte decimal 89 que precede al primer periodo, se llama *parte irregular* ó *no periódica.*

221. TEOREMA. *Si el denominador de un quebrado irreducible no tiene ningun factor primo distinto de 2 y 5: 1.° la fraccion decimal equivalente es exacta; 2.° el número de cifras decimales es igual al mayor de los exponentes de 2 y 5.*

Sea la fraccion irreducible $\dfrac{A}{2^3 \cdot 5^2}$.

Queremos demostrar que puede convertirse exactamente en decimal, y que el número de cifras será 3.

1.° Para convertir la fraccion propuesta en decimal, dividiremos el numerador por el denominador, añadiendo un cero á cada residuo; lo que equivale á dividir el numerador seguido de ceros por el denominador. Por cada cero añadido al numerador, se multiplica este número por 10, y como $10 = 2 \cdot 5$, se introducen los factores 2 y 5. Como el denominador se compone solamente del factor 2 y del factor 5, llegará el numerador á contener todos los factores primos del denominador con exponentes iguales ó mayores, y por consiguiente se obtendrá cociente exacto [121], quedando reducido exactamente el quebrado á decimal.

2.° El numerador A no contiene el factor 2 ni el 5, por ser irreducible la fraccion; luego para que sea divisible por $2^3 . 5^2$ es necesario y suficiente añadirle 3 ceros; pero cada cero produce una cifra decimal, luego el número de éstas es 3, ó sea tantas como unidades tiene el mayor exponente de 2 y 5.

Ejemplo. Sea el quebrado irreducible $\frac{13}{40}$.

El denominador es igual á $2^3 . 5$, luego la fraccion decimal equivalente es exacta y tiene 3 cifras decimales.

Se ve efectivamente, efectuando la reduccion, que

$$\frac{13}{40} = 0{,}325.$$

222. TEOREMA. *Si el denominador de un quebrado irreducible contiene algun factor primo distinto de 2 y 5, la fraccion decimal equivalente es periódica.*

En efecto: siendo la fraccion irreducible, su numerador no contiene ninguno de los factores del denominador: añadiendo ceros al primero, se introducen solamente los factores 2 y 5; luego nunca contendrá todos los factores del denominador, y el cociente no llegará á ser exacto [121].

Ahora bien, siendo los residuos menores que el divisor, al cabo de tantas divisiones á lo mas como unidades tenga éste, se repetirá un residuo de los obtenidos anteriormente; añadiéndole un cero, se repetirá uno de los dividendos parciales, y como el divisor es constante, volverán periódicamente los mismos cocientes y los mismos restos; luego la fraccion decimal será periódica.

223. Es evidente que todo quebrado se halla comprendido en una de las hipótesis de los dos teoremas últimos; luego

Toda fraccion decimal equivalente á otra ordinaria, es necesariamente exacta ó periódica.

224. LEMA. *Todo número entero primo con 10, tiene un múltiplo que se escribe sólo con nueves.*

Sea B un entero primo con 10, esto es, que no contiene el factor 2 ni el 5; vamos á demostrar que el número 999.... es divisible por B, siempre que se tome un número suficiente de nueves.

En efecto: los residuos de dividir 999.... por B son menores que B; luego si no se llega á obtener cociente exacto, los residuos se repetirán. Supongamos que sin haber obtenido cociente exacto, llegásemos á encontrar dos dividendos

999999 y 999 que diesen residuos iguales; en este caso, la diferencia 999999 — 999 sería divisible por B [78], esto es,

$$999999 - 999 = m \,.\text{ de } B, \text{ ó } 999000 = m \,.\text{ de } B;$$

pero B es factor del segundo miembro, luego divide tambien al primero, y como es primo con 1000, puesto que 1000 sólo contiene factores 2 y 5, es divisor de 999; luego es imposible obtener dos residuos iguales sin hallar antes un cociente exacto; por consiguiente 999... es múltiplo de B.

225. Teorema. *Si el denominador de una fraccion irreducible es primo con 10, la fraccion decimal equivalente es periódica pura.*

Sea la fraccion $\frac{A}{B}$ y R el resíduo de dividir A por B.

Añadiendo un cero al residuo R y dividiendo por B, se obtiene la cifra de las décimas: si en el curso de la operacion se repite el residuo R, añadiéndole un cero y dividiendo por B, se reproducirán dicha cifra y las siguientes en el mismo órden, y la fraccion será periódica pura.

La operacion de convertir $\frac{A}{B}$ en decimal, se reduce á dividir A seguido de un número indefinido de ceros por B; por tanto, los dividendos totales pueden representarse por $A \,.\, 10^m$, donde m valdrá sucesivamente 1, 2, 3, 4 etc.

Para que un dividendo total $A \,.\, 10^m$ reproduzca el residuo R dado por el numerador A, basta que la diferencia $A \,.\, 10^m - A$ sea divisible por B [77].

Pero $$A \,.\, 10^m - A = A\,(10^m - 1),$$
y siendo $10^m - 1$ un número escrito sólo con nueves, llegará á ser múltiplo de B [Lema], y con mayor razon, la diferencia $A\,(10^m - 1)$ será tambien divisible por B; luego el residuo R se repetirá y la fraccion periódica será pura.

226. Escolios. 1.° Cuando se llega á un dividendo $A \,.\, 10^m$ que reproduce el residuo R, concluye el primer periodo; y como cada cero añadido al numerador A origina una cifra decimal, el periodo tendrá m cifras; pero R se repite cuando B es divisor de la diferencia $A\,(10^m - 1)$, ó sea de $10^m - 1$, puesto que B es primo con A, y no puede repetirse antes [78]; luego si observamos que $10^m - 1$ es un número escrito con m nueves, deduciremos que

El número de cifras del periodo es igual al menor número de nueves necesario para formar un múltiplo del denominador.

2.° Llamando C al cociente de $\frac{A}{B}$, ó sea, á la parte entera de la decimal periódica pura, y C' al cociente de $A \cdot 10^m$ por B, esto es, á la parte entera seguida del primer periodo, tendremos

$$\begin{aligned} A \times 10^m &= B \times C' + R, \\ A &= B \times C + R; \end{aligned}$$

restando estas igualdades ordenadamente resulta

$$A\,(10^m - 1) = B\,(C' - C). \quad [1]$$

Si A termina en cero, el primer miembro es divisible por 10, y el segundo tambien tendrá que serlo; pero 10 es primo con B, luego será divisor de $C' - C$. Ahora bien, para que esta diferencia sea divisible por 10, es necesario que termine en cero, ó lo que es lo mismo, que la última cifra de la parte entera sea igual á la última del periodo.

Luego *si el numerador termina en cero, la última cifra entera y la última del periodo son iguales.*

Por el contrario, si A no termina en cero, como $10^m - 1$ no contiene el factor 2 ni el 5, el primer miembro de la igualdad [1] no termina en cero; por consiguiente tampoco el segundo terminará en dicha cifra, y las últimas de C y C' serán desiguales.

Luego *si el numerador no termina en cero, la última cifra entera y la última del periodo serán desiguales.*

EJEMPLOS.

1.° Sea la fraccion $\frac{5}{11}$.

El denominador no contiene el factor 2 ni el 5; luego la fraccion decimal equivalente será periódica pura.

El menor múltiplo del denominador, formado sólo con nueves es 99; luego el periodo tendrá dos cifras.

Efectivamente $\frac{5}{11} = 0{,}4545....$

2.° Sea el quebrado $\frac{500}{37}$.

La fraccion decimal equivalente es periódica pura.

El menor múltiplo del denominador, formado sólo con nueves, es 999; luego el periodo tendrá tres cifras.

Además, terminando el numerador en cero, la última cifra entera y la última del periodo serán iguales.

Efectivamente $\frac{500}{37} = 13{,}513513....$

227. Teorema. *Si el denominador de una fraccion irreducible contiene el factor 2, el factor 5 ó ambos, y además un factor primo distinto de 2 y 5, la fraccion decimal equivalente es periódica mixta; y la parte no periódica tiene tantas cifras como unidades tenga el mayor de los exponentes de 2 y 5.*

Sea la fraccion irreducible $\frac{A}{B}$, y supongamos que

$$B = 2^2 \,.\, 5^3 \,.\, 3.$$

Queremos demostrar: 1.° que la fraccion decimal equivalente es periódica mixta; 2.° que la parte no periódica tiene tres cifras.

1.° La fraccion equivalente á $\frac{A}{B}$ es periódica [222]; si fuese periódica pura tendríamos la igualdad

$$A\,(10^m - 1) = B\,(C' - C). \qquad [226,\ \text{escolio } 2.°].$$

Ahora bien, siendo B factor del segundo miembro, lo es tambien del primero, pero B es primo con A, luego divide á $10^m - 1$; lo que es imposible, porque $10^m - 1$ es un número escrito con nueves, y por tanto no contiene los factores 2 y 5 de B.

Luego la fraccion decimal es periódica mixta.

2.° Supongamos que la parte no periódica tenga m cifras, y n el periodo.

Dividiendo $A \,.\, 10^m$ por B, el cociente C será la parte entera seguida de la no periódica; y dividiendo $A \,.\, 10^m \,.\, 10^n$ por B, el cociente C' será la parte entera seguida de la no periódica y del periodo. Los residuos de estas divisiones son iguales, porque son los que originan la primera cifra del periodo.

Tenemos, pues,

$$\begin{aligned} A \,.\, 10^m \,.\, 10^n &= B \,.\, C' + R. \\ A \,.\, 10^m \quad\quad &= B \,.\, C + R. \end{aligned}$$

Restando ordenadamente estas igualdades resulta

$$A \,.\, 10^m\,(10^n - 1) = B\,(C' - C).$$

Ahora bien: 5^3 es factor de B, luego divide al primer miembro, y siendo primo con A y con $10^n - 1$, divide á 10^m; por consiguiente m vale 3 por lo menos. Si m fuese mayor que 3, por ejemplo 4, el primer miembro sería divisible por

10^4, luego tambien lo sería el segundo; y como B á lo mas puede ser divisible por 10^3, $C' - C$ lo sería por 10 ó terminaria en cero, lo que es imposible, porque entonces la última cifra de C sería igual á la última de C'; luego m no es mayor que 3.

Por consiguiente, el número de cifras de la parte no periódica es 3.

Ejemplo. Sea el quebrado $\frac{77}{750}$.

El denominador es igual á $2 . 5^3 . 3$; luego la fraccion equivalente es periódica mixta, y la parte no periódica tendrá tres cifras.

Efectivamente $\frac{77}{750} = 0{,}102666...$

II.—Conversion de las fracciones decimales en ordinarias equivalentes.

228. En la resolucion de este problema, debemos considerar tres casos: 1.° que la fraccion decimal tenga un número limitado de cifras; 2.° que sea periódica pura; y 3.° que sea periódica mixta.

229. Primer caso. Si la fraccion decimal es 6,237, multiplicándola y partiéndola por 1000, tendremos

$$6{,}237 = \frac{6237}{1000};$$

luego *para convertir una fraccion decimal exacta en fraccion ordinaria, se pone por numerador la fraccion decimal, prescindiendo de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fraccion.*

230. Segundo caso. En el número 226, escolio 2.°, hemos visto que

$$A\,(10^m - 1) = B\,(C' - C);$$

dividiendo por B los dos miembros de esta igualdad resulta

$$\frac{A\,(10^m - 1)}{B} = C' - C;$$

y dividiendo nuevamente por $10^m - 1$ resulta

$$\frac{A}{B} = \frac{C' - C}{10^m - 1};$$

pero C' es la parte entera seguida del primer periodo, C la parte entera, y m el número de cifras del periodo; luego

Para hallar la fraccion generatriz de una decimal periódica pura, se corre la coma á la derecha del primer periodo; del número que queda á la izquierda, se resta la parte entera, si la hay; y se parte la diferencia por un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el periodo.

EJEMPLOS.

1.° Sea la fraccion 27,358358... La generatriz es $\frac{27358-27}{999}$.

2.° Sea la fraccion 0,4747........ La generatriz es $\frac{47}{99}$.

231. TERCER CASO. En el número 227 hemos obtenido la igualdad

$$A \cdot 10^m (10^n - 1) = B(C' - C).$$

Dividiendo sus dos miembros por B y despues por $10^m \cdot (10^n - 1)$, resulta

$$\frac{A}{B} = \frac{C' - C}{10^m (10^n - 1)}.$$

Pero es evidente que el denominador se compone de n nueves seguidos de m ceros, luego

Para hallar la generatriz de una fraccion decimal periódica mixta, se restan las partes enteras de los números que resultan corriendo la coma á la derecha del primer periodo y de la parte no periódica, y se divide la diferencia por un número formado con tantos nueves como cifras tiene el periodo, y tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

EJEMPLOS.

1.° Sea la fraccion 5,34267267... La generatriz es $\frac{534267-534}{99900}$

2.° Sea la fraccion 0,62828........ La generatriz es $\frac{628-6}{990}$.

$\frac{5}{8}+x=9$, $5+8x=72$, $8x=67$, $x=\frac{67}{8}$

EJERCICIOS.

I. Si de los términos de un quebrado se resta un mismo número entero, el quebrado disminuye ó aumenta, segun que es propio ó impropio. Demostracion.

II. Para restar de un entero un quebrado se multiplica el entero por el denominador del quebrado, del producto se resta el numerador, y se parte la diferencia por el denominador. Demostracion.

III. ¿Cuál es el número que sumado con $\frac{5}{8}$ es igual á 9?

IV. ¿Qué número debe añadirse á $\frac{3}{5}$ para hallar $\frac{13}{7}$?

V. Hallar los $\frac{7}{11}$ de 55.

VI. Hallar los $\frac{17}{19}$ de $\frac{8}{9}$.

VII. Hallar los $\frac{8}{5}$ de $3\ \frac{2}{7}$.

VIII. Hallar un número cuyos $\frac{7}{11}$ valgan 35.

IX. Hallar un número cuyos $\frac{5}{8}$ valgan $\frac{3}{7}$.

X. Hallar un número cuyos $\frac{6}{7}$ valgan $7\ \frac{5}{8}$.

XI. Siendo $\frac{63}{40}$ la suma de cuatro números, uno de estos $\frac{3}{8}$, y los demás iguales entre sí, hallar todos los sumandos.

XII. Hallar cuatro números, sabiendo que el primero es $\frac{1}{5}$ de la suma de todos, el segundo los $\frac{2}{5}$, el tercero $\frac{1}{8}$, y que el último es 34.

XIII. Hallar un número que aumentado en sus $\frac{5}{7}$ sea igual á 252.

XIV. Hallar un número que disminuido en sus $\frac{6}{11}$ sea igual á 85.

XV. Hallar un número que aumentado en sus $\frac{5}{6}$ y disminuido en sus $\frac{3}{8}$ sea igual á 140.

XVI. Hallar un número que aumentado en sus $\frac{2}{9}$ y disminuido en sus $\frac{5}{4}$, sea igual á 72.

XVII. Hallar un número tal que disminuidos sus $\frac{8}{9}$ en sus $\frac{2}{5}$ y sus $\frac{2}{7}$, sea igual á 762.

XVIII. Hallar el cociente de dos números con un error menor que media unidad de un órden dado.

XIX. Si dos fracciones irreducibles tienen denominadores primos con diez é iguales, el número de cifras de los periodos es el mismo. Demostracion.

XX. Si el denominador de una fraccion irreducible es primo con 10, la diferencia entre la parte entera seguida del primer periodo y la parte entera, es un múltiplo del numerador. Demostracion.

Obsérvese que si la fraccion propuesta es propia, la parte entera de la decimal equivalente es cero; luego

Si el denominador de una fraccion irreducible y menor que la unidad es primo con 10, el periodo será un múltiplo del numerador.

XXI. Si la fraccion irreducible menor que la unidad $\frac{A}{B}$ origina un periodo P, la fraccion $\frac{1}{B}$ originará un periodo $\frac{P}{A}$. Demostracion.

XXII. *Corolario.* Para hallar el periodo de una decimal periódica pura $\frac{A}{B}$, se puede hallar el periodo de $\frac{1}{B}$ y multiplicarle por A.

XXIII. Toda fraccion ordinaria irreducible de la forma $\frac{A}{2^m \cdot 5^n \cdot B}$, es igual al cociente de otra fraccion ordinaria irreducible de la forma $\frac{A'}{B}$ dividida por la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el mayor de los exponentes de 2 y 5. Demostracion.

XXIV. *Corolario.* La parte no periódica de la fraccion decimal equivalente á $\frac{A}{2^m \cdot 5^n \cdot B}$ tiene m cifras, suponiendo $m > n$; y el número de cifras del periodo es igual al menor número de nueves necesario para formar un múltiplo de B.

XXV. Este corolario y el escolio 1.° del número 266, pueden comprenderse en el siguiente enunciado:

En toda fraccion decimal periódica, el número de cifras del periodo es igual al menor número de nueves necesario para formar un múltiplo del cociente que resulta suprimiendo en el denominador de la fraccion generatriz los factores 2 y 5 que pueda contener.

XXVI. En toda fraccion periódica mixta, la diferencia entre la parte entera seguida de la no periódica y del periodo, y la parte entera seguida de la no periódica, es un múltiplo del numerador de la fraccion generatriz. Demostracion.

XXVII. Si dos fracciones ordinarias, *que tienen diferente denominador*, equivalen á otras decimales periódicas puras ó mixtas, la suma ó diferencia de ellas equivaldrá tambien á una decimal periódica pura ó mixta respectivamente. Demostracion.

LIBRO TERCERO.

NÚMEROS INCONMENSURABLES.

CAPÍTULO PRIMERO.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS INCONMENSURABLES.

232. Sabemos que si una cantidad A no tiene medida comun con la unidad B, es imposible expresar aquella por un número entero ó fraccionario; pero que dividiendo la unidad en un número creciente de partes, se obtienen números conmensurables que expresan aproximadamente la cantidad A, pudiendo ser el error tan pequeño como se quiera.

Sea p una de las partes; supongamos que esté contenida m veces en A quedando un residuo, y n veces exactamente en B: será

$$B = np.$$

A es mayor que m partes de B y menor que $m+1$ partes, esto es,

$$A > mp \qquad \text{y} \qquad A < (m+1)\,p.$$

Si tomamos en vez de A una de las cantidades mp ó $(m+1)\,p$, el error en menos ó en mas será menor que p, y puede hacerse tan pequeño como se quiera.

Siendo mp y $(m+1)\,p$ conmensurables con la unidad B, sus expresiones numéricas son

$$\frac{mp}{np} \text{ y } \frac{(m+1)\,p}{np},$$

ó simplificando

$$\frac{m}{n} \text{ y } \frac{m+1}{n}.$$

La relacion $\frac{A}{B}$ se halla comprendida entre estos quebrados, cuya diferencia es $\frac{1}{n}$; y como n puede hacerse tan grande como se quiera, $\frac{1}{n}$ podrá ser menor que cualquier cantidad asignable; luego

Todo número inconmensurable está comprendido entre dos conmensurables, cuya diferencia puede ser menor que cualquier cantidad asignable, por pequeña que sea ésta.

De aquí se desprende que A puede expresarse aproximadamente por un número conmensurable $\frac{m}{n}$ ó $\frac{m+1}{n}$, siendo el error tan pequeño como se quiera.

233. Si una cantidad experimenta trasformaciones, sujetas á una ley determinada, que cambian su valor, se llama *variable;* y si tiene un valor fijo se llama *constante.*

Cuando los valores sucesivos, crecientes ó decrecientes, de la variable se aproximan cada vez mas á una constante, de modo que la diferencia, sin llegar á anularse, pueda ser tan pequeña como se quiera, dicha constante se llama *límite* de la variable.

Si la variable tiene un límite, los valores sucesivos de aquella son expresiones, cada vez mas aproximadas del límite.

La fraccion $\frac{m}{n}$ del número anterior, es un ejemplo de cantidades variables.

Sabemos, en efecto, que dividiendo la unidad en un número creciente de partes, $\frac{m}{n}$ adquiere valores cada vez mayores, y mas próximos á $\frac{A}{B}$, pudiendo ser la diferencia tan pequeña como se quiera; luego el número inconmensurable $\frac{A}{B}$ es el límite superior de la cantidad variable $\frac{m}{n}$.

Otro ejemplo de cantidades variables, son las fracciones periódicas.

La fraccion 0,353535... recibe valores crecientes, á medida que aumenta el número de cifras decimales.

Un valor cualquiera de esta fraccion difiere de la generatriz en menos de una unidad decimal del último órden; luego aumentando suficientemente el número de cifras, la diferencia será tan pequeña como queramos; por consiguiente $\frac{35}{99}$ es el límite de 0,353535...

Obsérvese que los límites pueden ser conmensurables ó inconmensurables.

234. Lema. *Si una cantidad variable tiene dos límites, estos son iguales.*

Sea a una variable con dos límites A y B, que supondremos superiores.

Si estos límites son desiguales, la variable podrá aproximarse cuanto se quiera al menor de ellos, B por ejemplo, pero no al mayor A.

En efecto, dicha variable es siempre menor que B [233], por lo tanto le falta para valer A una cantidad mayor que la diferencia entre A y B, lo que es contrario á la definicion de límite; luego $A = B$.

Razonaríamos de un modo análogo, si los límites de la variable fuesen inferiores.

Además, es evidente que una variable no puede aproximarse á la vez á dos límites uno superior y otro inferior.

235. Teorema de los límites. *Si los valores sucesivos de dos cantidades variables son siempre respectivamente iguales, los límites tambien son iguales.*

Sean a y b dos variables constantemente iguales, y A, B sus respectivos límites.

Siendo a y b constantemente iguales, pueden considerarse como una sola variable con dos límites A y B; luego, segun el lema anterior, $A = B$.

236. Teorema. *El límite de una suma de cantidades variables, es la suma de los límites de dichas variables.*

Sean a, b, c tres cantidades variables, que tienen á A, B, C respectivamente por límites superiores.

Si estos límites son números inconmensurables, representemos por a', b', c' tres cantidades conmensurables mayores que A, B, C y que varían al mismo tiempo que a, b y c; por manera que A está siempre comprendida entre a y a', B entre b y b', C entre c y c', y las diferencias conmensurables $a' - a$, $b' - b$ y $c' - c$ pueden ser menores que cualquiera cantidad asignable, por pequeña que sea [232].

Es evidente que la suma $A + B + C$ estará comprendida entre $a + b + c$ y $a' + b' + c'$.

Llamemos d, d', d'' á las diferencias mencionadas, y tendremos

$$a' = a + d, \quad b' = b + d', \quad c' = c + d''.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, será

$$a' + b' + c' = a + b + c + d + d' + d'',$$

ó $$a' + b' + c' = (a + b + c) + (d + d' + d'');$$

de donde $(a' + b' + c') - (a + b + c) = d + d' + d''$.

Pudiendo ser d, d', d'' tan pequeñas como queremos, la suma $d + d' + d''$ estará en el mismo caso; luego las sumas $a' + b' + c'$ y $a + b + c$ se diferencian en una cantidad menor que cualquiera asignable, por consiguiente cada una de ellas se diferencia de $A + B + C$, con mayor razon, en tampoco como se quiera.

Si los límites de a, b y c fuesen conmensurables, llamando d, d' y d'' á lo que falta á cada una de las variables, considerada en un momento cualquiera de su crecimiento, para llegar al límite respectivo, tendremos

$$A = a + d, \quad B = b + d', \quad C = c + d''$$

de donde fácilmente se deduce

$$(A + B + C) - (a + b + c) = d + d' + d'',$$

y como la suma $d + d' + d''$ puede ser tan pequeña como queramos, resulta

$$\text{límite de } (a + b + c) = A + B + C.$$

237. Teorema. *El límite de la diferencia entre dos cantidades variables, es la diferencia entre los límites de dichas variables.*

Sean a y b dos variables; A y B sus límites.

Sean además

$$a - b = c \quad \text{y} \quad A - B = C.$$

De estas igualdades se deduce

$$a = b + c \quad \text{y} \quad A = B + C.$$

La primera $a = b + c$ se verifica siempre, esto es, las variables a y $b + c$ son constantemente iguales, luego sus límites lo son tambien [235]. El límite de a es A, el de $b + c$ es B + límite de c [236]; luego

$$A = B + \text{límite de } c,$$

pero $$A = B + C;$$

luego $$\text{lím. de } c = C.$$

Lo que debíamos demostrar.

Escolio. Si c fuese constante, se verificaria tambien la igualdad

$$a = b + c;$$

el límite de a es A, el de $b+c$ es evidentemente $B+c$; luego

$$A = B + c,$$

y como $A = B + C,$

resulta $c = C.$

Por consiguiente el teorema es cierto en este caso, puesto que el límite de c, cuando esta cantidad es constante, es la misma cantidad c. [1]

238. Teorema. *El límite de un producto de varias cantidades variables, es el producto de los límites de dichas variables.*

Consideremos, en primer lugar, dos variables a y b cuyos límites superiores sean los números inconmensurables A y B; y sean a' y b' dos variables que tengan á A y B por límites inferiores.

Tendremos

$$a' = a + d, \qquad b' = b + d',$$

siendo d y d' números conmensurables; multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$a'\, b' = (a + d)\,(b + d') = ab + ad' + db + dd',$$

de donde

$$a'\, b' - ab = ad' + db + dd'.$$

Pudiendo ser d y d' tan pequeñas como queramos, los términos ad', db y dd' lo serán tambien, y lo mismo sucederá á la suma; luego los productos ab y $a'b'$, que evidentemente comprenden al AB, pueden diferenciarse en una cantidad menor que cualquiera asignable: por consiguiente ab se aproximará con mayor razon á AB todo cuanto queramos.

Si los límites A y B fuesen números conmensurebles, representando por d y d' la cantidad conmensurable que falta á cada variable a y b, considerada en un momento cualquiera de su crecimiento, para llegar al límite respectivo, tendríamos

$$A = a + d, \qquad B = b + d',$$

---

1 Este resultado $c = C$ indica que *si la diferencia entre dos cantidades variables es una cantidad constante, la diferencia entre los límites de las variables es igual á dicha constante.*

Puede considerarse este teorema como una generalizacion del de los límites, pues cuando $c = 0$, será $C = 0$, esto es, cuando las variables sean iguales lo serán tambien sus límites.

de donde se deduce fácilmente

$$AB - ab = ad' + db + dd'.$$

Igualdad que demuestra el teorema cuando los factores son dos.

Si las variables son a, b, c y sus límites A, B, C, el límite de ab será AB; luego el de $ab \times c$ será $AB \times C$ ó ABC.

Haríamos el mismo razonamiento si las variables fuesen cuatro, cinco etc.

239. Teorema. *El límite del cociente de dos cantidades variables, es el cociente de los límites de dichas variables.*

Sean a, b las variables, y A, B sus límites.

Sean además

$$\frac{a}{b} = c, \quad \frac{A}{B} = C;$$

de estas igualdades se deduce

$$a = bc, \quad A = BC.$$

La primera $a = bc$ se verifica siempre, esto es, las variables a y bc son siempre iguales, luego tambien lo son sus límites.

El de a es A, el de bc es B $\times$ límite de c [238]; luego

$$A = B \times \text{límite de } c,$$

y como $A = BC$,

resulta lím. de $c = C$.

Lo cual debiamos demostrar.

Escolio. Si c fuese constante, la igualdad $a = bc$ se verificaria tambien; el límite de a es A, el de bc es evidentemente Bc; luego

$$A = Bc,$$

y como $A = BC$,

resulta $c = C$;

luego el teorema es cierto en este caso. [1]

240. En vista de los cuatro teoremas últimos llamaremos *suma, diferencia, producto* y *cociente* de números inconmensurables, al límite de la suma, diferencia, producto y

---

[1] Este resultado indica que si *el cociente de dos variables es constante, el cociente de los límites de las variables es igual á dicha constante.*

Puede considerarse este teorema como una generalizacion del de los límites, pues si $\frac{a}{b} = 1$, será $\frac{A}{B} = 1$ ó $A = B$.

cociente de los números conmensurables que tienen por límites los inconmensurables propuestos.

241. Teorema. *Siempre que tengamos una igualdad en cuyos miembros entren sumas, diferencias, productos ó cocientes de números conmensurables variables, y la igualdad sea cierta para todos los valores sucesivos de estos, podremos sustituir cada variable por su límite respectivo, sin que la igualdad se altere.*

En efecto: siendo constantemente iguales los dos miembros, sus límites lo son tambien. Al tomar estos, las sumas, diferencias, productos ó cocientes que encierre cada miembro, tendrán por límites otras sumas, diferencias, productos ó cocientes, y los términos de cada una de estas operaciones, serán sustituidos por sus límites respectivos, en virtud de los teoremas de los números 236, 237, 238 y 239.

Luego la única variacion que experimenta la igualdad, es el cambio de las variables por sus respectivos límites.

Ejemplos.

1.° Si a, b, c, m son cantidades variables y a', b', c', m' sus límites respectivos, tendremos siempre la igualdad

$$(a + b + c)\,m = am + bm + cm,$$

luego los límites de los dos miembros serán iguales [235]; pero el límite del primer miembro es [238 y 236]

$$(a' + b' + c')\,m',$$

y el del segundo

$$a'm' + b'm' + c'm';$$

luego $$(a' + b' + c')\,m' = a'm' + b'm' + c'm'.$$

2.° Sean a, b, c, d varias cantidades variables, y a', b', c', d', sus límites.

Tendremos siempre

$$abcd = bcad;$$

pero el límite de $abcd$ es $a'b'c'd'$, y el de $bcad$ es $b'c'a'd'$; luego $a'b'c'd' = b'c'a'd'$.

Siguiendo igual método, es fácil evidenciar que todos los teoremas demostrados en el artículo VI del primer capítulo del libro anterior para números conmensurables, son igualmente ciertos para los números inconmensurables.

CAPITULO SEGUNDO.

RAIZ CUADRADA.

I.—Raiz cuadrada de los números enteros.

242. Hemos dicho [70] que cuadrado de un número es el producto de multiplicar dicho número por sí mismo.

Así, el cuadrado de 8 es 8 . 8 ó 64.

Raiz cuadrada *de un número es otro número cuyo cuadrado es igual al primero.*

Así, la raiz cuadrada de 64 es 8, porque $8^2 = 64$.

Para expresar la raiz cuadrada de un número se emplea el *signo radical* $\sqrt{}$, que se lee *raiz cuadrada de.*

La raiz cuadrada de 36 se expresa por $\sqrt{36}$.

Los cuadrados de los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

son respectivamente

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Recíprocamente, las raices cuadradas de los números de la segunda línea, son los correspondientes en la primera.

243. Es evidente que cuanto mayor es un número, mayor es su cuadrado; por consiguiente *cuanto mayor sea un número, su raiz cuadrada será mayor.*

Siendo 10 la raiz cuadrada de 100, la de un número menor que 100 será menor que 10; por lo tanto, entre los números menores que 100, solo hay nueve cuya raiz sea un número entero, y se concibe que entre los mayores existen muchos cuya raiz no es un número entero.

Teorema. *Si la raiz cuadrada de un número entero no es otro entero, tampoco será un número fraccionario.*

Si la raiz fuese el número fraccionario $\frac{a}{b}$, que supondremos reducido á su mas simple expresion, el cuadrado $\frac{a^2}{b^2}$ sería igual al número dado; pero siendo $\frac{a}{b}$ una fraccion irreducible, a y b son primos entre sí; luego a^2 y b^2 tambien lo son [117], y $\frac{a^2}{b^2}$ será una fraccion irreducible [144]; por consiguiente no puede ser igual al número propuesto.

Siendo imposible expresar estas raices por un número entero ó fraccionario, *son inconmensurables* con la unidad á que se refiere el número, y no pueden hallarse exactamente.

244. Raiz cuadrada entera *de un número es la raiz del mayor cuadrado entero contenido en dicho número.*

El exceso del número dado sobre el mayor cuadrado entero contenido en él, se llama residuo.

La raiz entera de 87 es 9, porque el mayor cuadrado entero contenido en 87 es 81, cuya raiz es 9; el residuo es $87 - 81 = 6$.

Teorema. *La diferencia entre la raiz entera de un número y la exacta, es menor que una unidad.*

Si el número es 75, por ejemplo, estará comprendido entre dos cuadrados enteros consecutivos 64 y 81, luego su raiz estará comprendida entre las raices 8 y 9 de dichos cuadrados: estas raices se diferencian en una unidad; por consiguiente $\sqrt{75}$ difiere de cualquiera de ellas en menos de una unidad.

245. En la extraccion de la raiz cuadrada de un número entero, distinguiremos dos casos: 1.° que el número sea menor que 100; 2.° que sea mayor.

246. Si el número es menor que 100, se hallará fácilmente su raiz entera examinando los cuadrados de los diez primeros números.

Estos cuadrados deben saberse de memoria.

247. Teorema. *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, mas el duplo del producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo.*

Sea a el primer número y b el segundo; la suma de los dos será $a + b$, y su cuadrado $(a + b)^2$.

Tenemos

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + ab + ab + b^2$$

ó sea $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Lo que demuestra el teorema.

248. Corolario. Todo número mayor que 10 es igual á sus decenas mas sus unidades; luego

El cuadrado de un número mayor que 10, *consta de tres partes ó sumandos:* 1.ª *cuadrado de las decenas;* 2.ª *duplo del* *producto de las decenas por las unidades;* 3.ª *cuadrado de las unidades.*

Si el número es 67 se descompone en $60 + 7$, y su cuadrado será $60^2 + 2 \,.\, 60 \,.\, 7 + 7^2$.

249. Propongámonos ya extraer la raiz cuadrada de un número mayor que 100, y principiemos por uno que solo tenga tres ó cuatro cifras, 7849 por ejemplo.

Como este número es mayor que 100, su raiz es mayor que 10, y siendo todo número igual al cuadrado de su raiz entera mas el residuo, 7849 se compone del cuadrado de las decenas de dicha raiz, del duplo de las decenas por las unidades, del cuadrado de las unidades, y del residuo, si lo hay.

El cuadrado de las decenas es un número justo de centenas, que estarán comprendidas en las 78 centenas del número dado; luego la raiz entera de 78 no será menor que la cifra de las decenas de la raiz. Tampoco puede ser mayor, porque si son a las decenas de la raiz, ésta es cuando mas igual á a decenas mas nueve unidades; y si la raiz entera de 78 centenas fuese a decenas mas una decena, tendríamos que la raiz de 7800 sería mayor que la de 7849, lo que es imposible [243]; luego

Extrayendo la raiz cuadrada entera de las centenas de un número, se obtienen las decenas de su raiz.

La raiz entera de 78 es 8.

Restando de 7849 el cuadrado de 8 decenas, ó sea 64 centenas, la diferencia 1449 se compone del duplo de 8 decenas multiplicado por las unidades de la raiz, del cuadrado de éstas y del residuo.

El duplo de decenas por unidades es un número exacto de decenas, y debiendo estar contenido en 1449, lo estará en las 144 decenas del resto; luego dividiendo 144 por el duplo de las decenas, el cociente no será menor que la cifra de las unidades de la raiz; pero podrá ser mayor.

Nada se opone, en efecto, á que el cuadrado de las unidades mas el residuo, compongan un número de decenas igual ó mayor que el duplo de las decenas de la raiz; y cuando esto suceda, el cociente será mayor que la cifra de las unidades.

Dividiendo 144 por 16, duplo de las decenas de la raiz, el cociente es 9, y como esta cifra puede ser mayor que la de las unidades, es necesario comprobarla.

Para esto, elevaremos la raiz hallada 89 al cuadrado, y si obtenemos un número igual ó menor que 7849, la raiz hallada será la verdadera; y restando su cuadrado del número propuesto, obtendremos el residuo de la operacion.

Pero habiendo restado ya de 7849 el cuadrado de las decenas, se obtendrá mas fácilmente el residuo, restando de 1449 el duplo de decenas por unidades y el cuadrado de estas, esto es, $2 \,.\, 80 \,.\, 9 + 9^2 = 1521$.

Siendo este número mayor que 1449, el cuadrado de 89 es mayor que 7849; luego la cifra 9 es mayor que la verdadera.

Disminuyéndola en una unidad, y comprobando la cifra 8, será $2 \,.\, 80 \,.\, 8 + 8^2 = 1344$, número menor que 1449; luego 8 es la cifra de las unidades, y $1449 - 1344 = 105$ el residuo de la operacion.

Obsérvese que

$$2 \,.\, 80 \,.\, 8 + 8^2 = (2 \,.\, 80 + 8) \times 8,$$

y que terminando $2 \,.\, 80$ en un cero, la suma $2 \,.\, 80 + 8$ se formará escribiendo á la derecha del duplo de las decenas, las unidades; si multiplicamos el número 168, que resulta, por las unidades, tendremos el duplo de decenas por unidades mas el cuadrado de éstas.

La disposicion práctica de la operacion es como sigue.

78.49	88
6400	
144.9	16
1344	
105	

Supongamos, ahora, que el número tenga cinco ó seis cifras, y sea por ejemplo 326517.

32.65.17	571
2500	
76.5	107
749	
161.7	1141
1141	
476	

Segun hemos demostrado anteriormente, la raiz cuadrada entera de 3265 centenas es igual á las decenas de la raiz.

Como 3265 tiene cuatro cifras, sabemos extraer su raiz cuadrada entera, que es 57.

Restando del número dado el cuadrado de 57 decenas, la diferencia será el duplo de 57 decenas por las unidades de la raiz, mas el cuadrado de éstas, mas el residuo; por consiguiente, dividiendo las decenas de dicha diferencia por el duplo de 57, el cociente será la cifra de las unidades ó una cifra mayor.

Pero al extraer la raiz de 3265, hemos restado de este número el cuadrado de 57, obteniendo la diferencia 16; y como el cuadrado de 57 decenas se forma agregando dos ceros á la derecha del cuadrado de 57, resulta que para obtener la diferencia entre 326517 y el cuadrado de 57 decenas, basta colocar á la derecha del resto 16 las dos últimas cifras del número propuesto, esto es, el 1 y el 7.

Dividiendo las 161 decenas del resto por 114, duplo de las decenas de la raiz, obtenemos 1 para cifra de las unidades, y comprobándola por el método del ejemplo anterior, vemos que es la verdadera.

Haciendo extensivo este razonamiento á un número de 8 cifras, despues á uno de 10 etc., veríamos que el procedimiento de los ejemplos anteriores puede aplicarse á cualquier número.

Para hallar la primera cifra de la raiz, hemos dividido el número dado en grupos de dos cifras, empezando por la derecha, y extraido la raiz entera del primero de la izquierda; las cifras restantes se han obtenido por medio de divisiones. Se forma el primer dividendo, restando del primer grupo el cuadrado de la primera cifra de la raiz, considerada como unidades simples, colocando á la derecha del resto el grupo siguiente, y separando con un punto las decenas del número que se forma. Los dividendos restantes se han obtenido colocando á la derecha del resto anterior el grupo correspondiente, y separando una cifra.

Todas las consideraciones anteriores conducen á la siguiente regla.

Para extraer la raiz cuadrada entera de un entero mayor que 100, *se divide el número en grupos de dos cifras, empezando por la derecha. Extrayendo la raiz entera del primer grupo de la izquierda, que podrá tener una sola cifra, se obtiene la primera de la raiz. El cuadrado de esta cifra se resta del primer grupo, y á la derecha del resto se coloca el segundo. Separando las unidades del número que se forma, y dividiendo las decenas por el duplo de la primera cifra de la raiz, se obtiene otra, que deberá comprobarse. Para esto, se escribe á la derecha del duplo de la raiz halla-*

da, la cifra que se comprueba: el número que se forma se multiplica por esta última, y si el producto puede restarse del dividendo seguido de la cifra separada, la que se comprueba es la segunda de la raiz, y se coloca por tanto á la derecha de la primera. Si la sustraccion es imposible, se disminuye la cifra comprobada en una unidad, y la nueva cifra se somete á idéntica comprobacion, continuando así hasta que la sustraccion sea posible. Una vez efectuada, se coloca á la derecha del resto el tercer grupo, se dividen las decenas del número que se forma por el duplo de la raiz hallada, y se comprueba el cociente como el anterior.

Continuando del mismo modo hasta emplear el último grupo, se obtendrán las cifras restantes de la raiz.

El último resto es el residuo de la operacion.

Si algun dividendo es menor que el divisor respectivo, la cifra de la raiz es cero; se baja el grupo siguiente, y se continúa la operacion por el método ordinario.

Obsérvese que la raiz tiene tantas cifras como grupos resultan en el número.

250. Teorema. *La diferencia entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos, es igual al duplo del menor mas una unidad.*

Si a es el menor de los números, $a+1$ será su consecutivo.

El cuadrado de $a+1$ es

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

y el cuadrado de a es a; luego la diferencia entre estos cuadrados es $2a+1$, esto es, el duplo del menor mas uno.

251. Corolario. *El residuo de la raiz cuadrada de un número, es menor que el duplo de dicha raiz mas una unidad.*

Si a es la raiz entera de un número, será éste mayor que a^2, y menor que $(a+1)^2$; la diferencia entre estos cuadrados es $2a+1$; luego el exceso del número dado sobre a^2, esto es, el residuo, es menor que $2a+1$.

Lo cual debiamos demostrar.

Segun esto, cuando un residuo sea mayor que el duplo de la raiz hallada, ésta será menor que la verdadera, y deberá aumentarse.

En la práctica, al hallar una cifra de la raiz por medio de la division, se toma con frecuencia para dicha cifra un número menor que el cociente, á fin de disminuir el número de comprobaciones. Esta precaucion, conveniente en la mayor parte de los casos, es causa, algunas veces, de que la cifra elegida por tanteo sea menor que la verdadera, lo que se conoce fácilmente comparando el residuo con el duplo de la raiz.

252. Sabemos ya extraer la raiz cuadrada de un número entero, con un error menor que una unidad; pero esta aproximacion es insuficiente en la generalidad de los casos, por lo que vamos á ocuparnos de extraer la raiz de un número entero, con un error tan pequeño como se quiera.

Debemos, para esto, demostrar antes el siguiente

Teorema. *La raiz cuadrada de un producto de varios factores, es igual al producto de las raices cuadradas de los factores.*

Sea el producto abc.

Queremos demostrar que

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

En efecto: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$ será la raiz del producto abc, siempre que elevándola al cuadrado, resulte este producto; pero

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}) \times (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}) =$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = abc.$$

Luego el teorema enunciado es cierto.

253. Problema. *Extraer la raiz cuadrada del entero* N *con un error menor que* $\frac{1}{n}$.

Segun el teorema anterior, tenemos

$$\sqrt{N \cdot n^2} = \sqrt{N} \cdot \sqrt{n^2} = \sqrt{N} \cdot n;$$

partiendo por n los dos miembros de esta igualdad, será

$$\frac{\sqrt{N \cdot n^2}}{n} = \sqrt{N}.$$

La raiz cuadrada de $N \cdot n^2$ está comprendida entre dos enteros consecutivos m y $m + 1$, luego su cociente por n, lo estará entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$; y como la diferencia entre estas fracciones es $\frac{1}{n}$, la primera de ellas $\frac{m}{n}$, será la raiz cuadrada de N, con un error menor que $\frac{1}{n}$.

Este error será tan pequeño como queramos, puesto que siendo n suficientemente grande, la fraccion $\frac{1}{n}$ será menor que cualquiera cantidad asignable.

Observando que la fraccion $\frac{m}{n}$ se obtiene partiendo por n la raiz entera de $N \cdot n^2$, podremos enunciar la regla siguiente:

Para hallar la raiz cuadrada de un entero, con un error menor que una unidad fraccionaria dada, se multiplica el entero por el cuadrado del denominador de la unidad fraccionaria, y la raiz entera del producto se divide por dicho denominador.

Ejemplo. Extraer la raiz cuadrada de 236 con un error menor que $\frac{1}{13}$.

Multiplicando 236 por 13^2 resulta 39884.

La raiz entera de este número es 199; luego la raiz pedida es $\frac{199}{13}$.

254. Si la unidad fraccionaria dada es decimal, por ejemplo 0,001, se obtendrá el cuadrado del denominador 1000, con solo duplicar el número de ceros; el producto del número dado por este cuadrado, se obtiene añadiendo los ceros á la derecha del número, y finalmente là division por el denominador se efectúa colocando la coma en el lugar correspondiente; luego

Para hallar la raiz cuadrada de un número, con un error menor que una unidad decimal, se añade á la derecha del número dos veces tantos ceros como tiene el denominador de la unidad decimal, se extrae la raiz cuadrada entera del número que resulta, y de la derecha de dicha raiz, se separan tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador de la unidad dada.

Ejemplo. Extraer la raiz cuadrada del número 345 con un error menor que 0,01.

Colocaremos *cuatro* ceros á la derecha del número, y extrayendo la raiz entera de 3450000, obtendremos 1857; luego la raiz buscada es 18,57.

II.—Raiz cuadrada de los números fraccionarios.

255. TEOREMA. *La raiz cuadrada de un quebrado, es igual á la raiz del numerador partida por la raiz del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$, cuyos términos son enteros.

Vamos á demostrar que

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

En efecto: los términos de la fraccion $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ serán números conmensurables ó inconmensurables, segun que a y b sean cuadrados ó no lo sean; pero en todos los casos tenemos [241].

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\,.\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,.\sqrt{b}}=\frac{a}{b}.$$

Luego $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ es la raiz cuadrada de $\frac{a}{b}$.

256. TEOREMA. *Para que la raiz de un quebrado irreducible sea un número conmensurable, se necesita y basta que los dos términos del quebrado sean cuadrados.*

Si el quebrado es $\frac{25}{49}$, su raiz cuadrada es $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}=\frac{5}{7}$; luego la condicion enunciada es suficiente.

Demostremos que tambien es necesaria.

Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$.

Su raiz cuadrada no puede ser un número entero, porque el cuadrado de éste sería tambien un número entero igual á $\frac{a}{b}$, lo que es imposible.

Para que dicha raiz sea un quebrado $\frac{a}{b'}$, que siempre puede hacerse irreducible, es necesario que el cuadrado de

$\frac{a'}{b'}$ sea igual á $\frac{a}{b}$; y como el cuadrado $\frac{a'^2}{b'^2}$ es tambien irreducible, es necesario que se verifiquen las igualdades

$$a = a'^2, \qquad b = b'^2, \qquad [146]$$

esto es, que a y b sean cuadrados.

257. TEOREMA. *Si el numerador de un quebrado no es cuadrado perfecto, y el denominador lo es, partiendo la raiz entera del numerador por la exacta del denominador, se obtiene la raiz del quebrado con un error menor que la unidad dividida por la raiz del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{70}{49}$.

Su raiz cuadrada es $\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{70}}{7}$; la raiz del numerador está comprendida entre 8 y 9, luego la del quebrado lo estará entre $\frac{8}{7}$ y $\frac{9}{7}$; por tanto $\frac{8}{7}$ será la raiz del quebrado propuesto, con un error menor que $\frac{1}{7}$.

Siempre se puede conseguir que el denominador de una fraccion sea cuadrado, multiplicando los dos términos por dicho denominador. Extrayendo la raiz cuadrada del quebrado que resulta, se obtiene la del propuesto, con un error menor que la unidad partida por el denominador de éste.

Si tenemos, por ejemplo, el quebrado $\frac{7}{15}$, multiplicando por 15 sus dos términos, resulta el quebrado equivalente $\frac{7 \cdot 15}{15^2}$. La raiz entera 10 del numerador partida por la exacta 15 del denominador, da $\frac{10}{15}$ para raiz de $\frac{7}{15}$, con un error menor que $\frac{1}{15}$.

258. Propongámonos extraer la raiz cuadrada de una fraccion decimal.

Escribiendo estas fracciones en forma de quebrado ordinario, pueden aplicarse á ellas las reglas anteriores.

Si la fraccion tiene un número par de cifras decimales, su denominador es cuadrado; y si el número de cifras decimales es impar, se hará par añadiendo un cero á la derecha.

Sea el número decimal 3,7543.

Dándole forma de quebrado ordinario es $\frac{37543}{10000}$.

La raiz entera 193 del numerador partida por 100, da 1,93 para raiz del número dado, con un error menor que 0,01.

Si el número fuese 5,235, añadiendo un cero á su derecha será 5,2350; y la raiz se obtendrá como en el ejemplo anterior.

Así diremos: la raiz entera de 52350 es 228, luego la del número dado es 2,28.

De lo expuesto se deduce que

Para extraer la raiz cuadrada de un número decimal, se añade un cero á su derecha, si el número de cifras decimales es impar, y prescindiendo de la coma, se halla la raiz entera del número entero que resulta; separando despues en la raiz una cifra decimal por cada dos de las que tiene el número, se obtiene la raiz de éste con un error menor que una unidad del último órden decimal.

Agregando ceros á la parte decimal de un número dado, puede tener éste cuantas cifras se desee, y como cada dos de ellas originan una en la raiz, la aproximacion podrá ser tan grande como queramos.

En la práctica se añaden los ceros á los residuos, sin ponerlos antes á la derecha del número.

Ejemplo. Hallar la raiz cuadrada de 8,5 con un error menor que 0,001.

Para conseguir esta aproximacion, necesitamos llegar en la raiz á la cifra de las milésimas.

La operacion se dispone del modo siguiente.

8,5 0	2,915
4 5.0	4 9
90.0	5 81
31 90.0	5 825
2 77 5	

La raiz es 2,915.

259. La raiz de un quebrado ordinario puede obtenerse convirtiéndole préviamente en decimal, y hallando la raiz de éste.

Si la decimal equivalente fuese periódica, se tomarian dos cifras decimales por cada una de las que hubiese de tener la raiz.

Ejemplo. Hallar la raiz de $\frac{4}{3}$ con un error menor que 0,001.

Convirtiendo la fraccion dada en decimal, se obtiene

$$\frac{4}{3} = 1{,}333.....$$

Puesto que se pide aproximacion hasta milésimas, la raiz deberá tener tres cifras decimales, y el número el doble, ó sean seis.

1,3 3.3 3.3 3	1,154
3,3	2 1
1 2 3.3	2 25
1 0 8 3.3	2 304
1 6 1 7	

Por último, la raiz cuadrada de un número mixto, se obtiene reduciéndole á quebrado y extrayendo la raiz de éste.

260. *Hallar una media proporcional entre dos números* a *y* b.

Sabemos que la media factorial entre a y b es una cantidad x tal, que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b};$$

de esta igualdad fraccionaria se deduce

$$x^2 = ab,$$

y extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros, será

$$x = \sqrt{ab};$$

luego *para hallar una media factorial ó proporcional entre dos números, se extrae la raiz cuadrada del producto de dichos números.*

Ejemplo. Hallar la media factorial entre 120 y 30.

Segun la regla anterior

$$x = \sqrt{120 \,.\, 30} = \sqrt{3600}, \quad \text{ó} \quad x = 60.$$

CAPITULO TERCERO.

RAIZ CÚBICA.

I.—Raiz cúbica de los números enteros.

261. Sabemos [70] que cubo de un número es el producto de multiplicar dicho número por sí mismo dos veces.

Así, el cubo de 4 es 4 . 4 . 4 , ó 64.

Raiz cúbica *de un número es otro número cuyo cubo es igual al primero.*

Así, la raiz cúbica de 64 es 4; porque $4^3 = 64$.

Para expresar la raiz cúbica de un número, se emplea el signo $\sqrt[3]{\quad}$, que se lee *raiz cúbica de.*

La raiz cúbica de 27 se expresa por $\sqrt[3]{27}$.

El número 3 que acompaña al radical, se llama *índice.*

Los cubos de los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

son respectivamente

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Recíprocamente, las raices cúbicas de los números de la segunda línea, son los correspondientes en la primera.

262. Es evidente que cuanto mayor es un número, mayor es su cubo; por consiguiente, *cuanto mayor sea un número, mayor será su raiz cúbica.*

Siendo 10 la raiz cúbica de 1000, la de un número menor que 1000 será menor que 10; por consiguiente, entre los números menores que 1000, sólo hay nueve cuya raiz cúbica sea exactamente un número entero, y se concibe que entre los mayores existen muchos, cuya raiz no es un número entero.

Teorema. *Si la raiz cúbica de un número entero no es otro entero, tampoco será un número fraccionario.*

Si la raiz fuese el número fraccionario $\frac{a}{b}$, que supondremos reducido á su mas simple expresion, el cubo $\frac{a^3}{b^3}$ sería igual al número dado; pero siendo $\frac{a}{b}$ una fraccion irreducible, a y b son primos entre sí; luego a^3 y b^3 tambien lo son [117], y $\frac{a^3}{b^3}$ será una fraccion irreducible [144]; por consiguiente no puede ser igual al número propuesto.

Siendo imposible expresar estas raices por un número entero ó fraccionario, son inconmensurables con la unidad á que se refiere el número dado, y no pueden hallarse exactamente.

263. Raiz cúbica entera *de un número es la raiz del mayor cubo entero contenido en el número.*

El exceso del número dado sobre el mayor cubo contenido en él, se llama *residuo.*

La raiz cúbica entera de 284 es 6, porque el mayor cubo entero contenido en 284 es 216, cuya raiz es 6.

El residuo es $284 - 216 = 68$.

Teorema. *La diferencia entre la raiz entera de un número y la exacta, es menor que una unidad.*

Si el número es 80, por ejemplo, estará comprendido entre dos cubos enteros consecutivos 64 y 125; luego su raiz estará comprendida entre las raices 4 y 5 de dichos cubos: estas raices se diferencian en una unidad, por tanto $\sqrt[3]{80}$ difiere de cualquiera de ellas en menos de una unidad.

264. En la extraccion de la raiz cúbica de un número entero, distinguiremos dos casos: 1.° que el número sea menor que 1000; 2.° que sea mayor que 1000.

265. Si el número dado es menor que 1000, se hallará fácilmente su raiz entera, examinando los cubos de los diez primeros números.

Estos cubos deben saberse de memoria.

266. Teorema. *El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo.*

Sea a el primer número y b el segundo; la suma de los dos será $a + b$, y su cubo $(a + b)^3$.

Ahora bien, $(a+b)^3=(a+b)\ (a+b)\ (a+b)=(a+b)^2\ (a+b)$;

y como [247] $\qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

será $\qquad (a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)\ (a + b)$;

efectuando esta multiplicacion indicada, tendremos

$(a+b)^3=a^2 \,.\, a + a^2 \,.\, b + 2ab \,.\, a + 2ab \,.\, b+b^2 \,.\, a+ b^2 \,.\, b$, ó $$(a+b)^3 = a^3 + a^2 b + 2a^2 b + 2ab^2 + ab^2 + b^3,$$

y por último

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Lo que demuestra el teorema.

267. Todo número mayor que 10 es igual á sus decenas mas sus unidades; luego

El cubo de un número mayor que 10, consta de cuatro partes: 1.ª cubo de las decenas; 2.ª triplo del cuadrado de las decenas por las unidades; 3.ª triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades; 4.ª cubo de las unidades.

Si el número es 47, se descompone en $40 + 7$; y su cubo será

$$40^3 + 3 \,.\, 40^2 \,.\, 7 + 3 \,.\, 40 \,.\, 7^2 + 7^3.$$

268. Propongámonos ya extraer la raiz cúbica de un número mayor que 1000, y principiemos por uno que tenga cuatro, cinco ó seis cifras, por ejemplo 304215.

Como este número es mayor que 1000, su raiz es mayor que 10; y componiéndose todo número del cubo de su raiz entera y del residuo, el propuesto constará del cubo de las decenas de la raiz, del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, del cubo de las unidades, y del residuo, si lo hubiese.

El cubo de las decenas es un número justo de millares, que estarán comprendidos en los 304 millares del número dado; luego la raiz entera de 304 no será menor que la cifra de las decenas de la raiz.

Tampoco puede ser mayor, porque si son a las decenas de la raiz, ésta es cuando mas igual á a decenas mas nueve unidades; y si la raiz entera de 304 millares fuese a decenas mas una decena, tendríamos que la raiz de 304000 sería mayor que la de 304215, lo que es imposible [262]; luego

Extrayendo la raiz entera de los millares de un número, se obtienen las decenas de la raiz.

La raiz entera de 304 es 6.

Restando del número propuesto el cubo de 6 decenas, ó sea 216 millares, la diferencia 88215 se compone del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, del cubo de las unidades, y del residuo.

El cuadrado de las decenas de la raiz es un número exacto de centenas; luego el triplo de este cuadrado multiplicado por las unidades, es un número exacto de centenas, que debiendo estar contenidas en 88215, lo estarán en las 882 centenas de este resto; luego dividiendo 882 por el triplo del cuadrado de la cifra 6, el cociente no será menor que la cifra de las unidades de la raiz; pero podrá ser mayor.

Nada se opone, en efecto, á que el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, el cubo de éstas y el residuo, compongan un número de centenas igual ó mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raiz, y cuando esto suceda, el cociente será mayor que la cifra de las unidades.

Dividiendo 882 por $3 \,.\, 6^2 = 108$, el cociente es 8, y como esta cifra puede ser mayor que la de las unidades, es necesario comprobarla.

Para esto, elevaremos la raiz hallada 68 al cubo: si obtenemos un número igual ó menor que el propuesto, la raiz hallada será la verdadera; y restando su cubo del número propuesto, obtendremos el residuo de la operacion.

Pero habiendo restado ya de 304215 el cubo de las decenas, se obtendrá mas fácilmente el residuo restando de 88215 el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y el cubo de éstas, ó sea

$$3 \,.\, 60^2 \,.\, 8 + 3 \,.\, 60 \,.\, 8^2 + 8^3 = 98432.$$

Como este número es mayor que 88215, el cubo de 68 excede á 304215; luego la cifra 8 es mayor que la verdadera.

Comprobemos la cifra 7.

$$3 \,.\, 60^2 \,.\, 7 + 3 \,.\, 60 \,.\, 7^2 + 7^3 = 84763 < 88215;$$

luego 7 es la cifra de las unidades, y $88215 - 84763 = 3452$ el residuo.

La suma $3 \,.\, 60^2 \,.\, 7 + 3 \,.\, 60 \,.\, 7^2 + 7^3$, puede obtenerse por un procedimiento bastante breve.

En efecto: separando el factor 7, comun á todos los sumandos, dicha suma adquiere la forma

$$(3 \,.\, 60^2 + 3 \,.\, 60 \,.\, 7 + 7^2) \times 7; \qquad [1]$$

de los sumandos contenidos en el paréntesis, conocemos el primero $3 \,.\, 60^2$; en cuanto á la suma de los otros dos, puede escribirse de este modo:

$$(3 \,.\, 60 + 7) \times 7. \qquad [2]$$

Para hallar el valor de $3 \,.\, 60 + 7$, basta evidentemente multiplicar 3 por 6, y en vez del cero que debe añadirse, colocar á la derecha de 18 el 7, de modo que

$$3 \,.\, 60 + 7 = 187.$$

Multiplicando este número por 7, se halla el valor efectuado de la expresion [2], que es 1309; añadiendo á éste el valor conocido de $3 . 60^2 = 10800$, y multiplicando la suma 12109 por 7, resulta el valor efectuado de la expresion [1].

La disposicion práctica de la operacion es como sigue:

304.2 15	67
216 0 00	
88 2.15	108
84 7 63	
3 4 52	

Comprobacion de la cifra 8.

$$\begin{array}{r} 188 \\ 8 \\ \hline 1504 \\ 108 \\ \hline 12304 \\ 8 \\ \hline 98432 \end{array}$$

Comprobacion de la cifra 7.

$$\begin{array}{r} 187 \\ 7 \\ \hline 1309 \\ 108 \\ \hline 12109 \\ 7 \\ \hline 84763 \end{array}$$

Supongamos ahora que el número dado tenga 7, 8 ó 9 cifras, por ejemplo, 564237981.

564.2 37.981	826
512.0 00	
52 2.37	192
39 3 68	
12 8 69 9.81	20172
12 1 91 9 76	
6 78 0 05	

Comprobacion de la cifra 2.

$$\begin{array}{r} 242 \\ 2 \\ \hline 484 \\ 192 \\ \hline 19684 \\ 2 \\ \hline 39368 \end{array}$$

Comprobacion de la cifra 6.

$$\begin{array}{r} 2466 \\ 6 \\ \hline 14796 \\ 20172 \\ \hline 2031996 \\ 6 \\ \hline 12191976 \end{array}$$

Segun hemos demostrado anteriormente, la raiz cúbica entera de 564237 millares es igual á las decenas de la raiz.

Como 564237 tiene seis cifras, sabemos extraer su raiz entera, que es 82.

Restando del número dado el cubo de 82 decenas, la diferencia será el triplo del cuadrado de 82 decenas por las unidades de la raiz, mas el triplo de 82 decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de éstas, mas el residuo; por consiguiente dividiendo las centenas de dicha diferencia por el triplo del cuadrado de 82, el cociente será la cifra de las unidades ó una mayor.

Al extraer la raiz de 564237 millares, hemos restado de este número el cubo de 82, obteniendo la diferencia 12869; y como el cubo de 82 decenas se forma agregando tres ceros á la derecha del cubo de 82, resulta que para obtener la diferencia entre el número dado y el cubo de 82 decenas, basta colocar á la derecha del resto 12869 las tres últimas cifras del número propuesto, esto es 981.

Dividiendo las 128699 centenas del resto por 20172, triplo del cuadrado de 82, obtenemos 6 para cifra de las unidades; y comprobándola por el método expuesto en el ejemplo anterior, veremos que es la verdadera.

Haciendo extensivo este razonamiento á números de mas de nueve cifras, veríamos que el procedimiento de los ejemplos anteriores puede aplicarse á cualquier número.

Para hallar la primera cifra de la raiz, hemos dividido el número dado en grupos de tres cifras, empezando por la derecha, y extraido la raiz del primer grupo de la izquierda. Las cifras restantes se obtienen por medio de divisiones: el primer dividendo se forma restando del primer grupo el cubo de la primera cifra de la raiz, colocando á la derecha del resto el grupo siguiente, y separando con un punto las centenas del número que se forma; los dividendos siguientes, se obtienen tambien colocando, á la derecha del resto anterior, el grupo correspondiente, y separando las centenas del número que resulta.

Las consideraciones anteriores, justifican la siguiente regla.

Para extraer la raiz cúbica entera de un número mayor que 1000, se divide el número en grupos de tres cifras, empezando por la derecha. Extrayendo la raiz cúbica del primer grupo de la izquierda, que podrá tener una ó dos cifras, se obtiene la primera de la raiz. El cubo de esta cifra se *resta del primer grupo, y á la derecha del resto se coloca el segundo. Del número que se forma, se separan dos cifras de la derecha, y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raiz, se obtiene otra que debe comprobarse. Para esto, se escribe á la derecha del triplo de la raiz hallada la cifra que se comprueba, el número que se forma se multiplica por esta cifra, se añade al producto el triplo del cuadrado de la raiz hallada, considerado como centenas, y se multiplica la suma por la cifra que se comprueba. Si el resultado puede restarse del dividendo, seguido de las dos cifras separadas, la que se comprueba es la segunda de la raiz, y se colocará por tanto á la derecha de la primera; pero si la sustraccion es imposible, se disminuye la cifra comprobada en una unidad, y la nueva cifra se comprueba del mismo modo que la primera, continuando asi hasta que la sustraccion sea posible. Una vez efectuada, se coloca á la derecha del resto el tercer grupo, se separan dos cifras de la derecha, se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y se comprueba el cociente.*

Continuando del mismo modo hasta emplear el último grupo, se obtendrán las demás cifras de la raiz, y el último resto será el residuo de la operacion.

Si alguno de los dividendos es menor que el divisor respectivo, se pondrá en la raiz un cero, y bajando el grupo siguiente, se continuará la operacion de la manera ordinaria.

Obsérvese que la raiz tiene tantas cifras, como grupos hayan resultado al dividir el número.

269. Teorema. *La diferencia entre los cubos de dos enteros consecutivos, es igual al triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor, mas una unidad.*

Si a es el menor de los números, $a+1$ será el otro.

El cubo de $a+1$ es

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1,$$

y el cubo de a es a^3; luego la diferencia entre estos cubos es $3a^2 + 3a + 1$, lo cual debíamos demostrar.

270. Corolario. *El residuo de la raiz cúbica de un número, es menor que el triplo del cuadrado de su raiz entera, mas el triplo de esta raiz, mas una unidad.*

Si a es la raiz entera de un número, será éste mayor que a^3 y menor que $(a+1)^3$; la diferencia entre estos cubos es $3a^2 + 3a + 1$, luego el exceso del número dado sobre a^3, esto es, el residuo, es menor que $3a^2 + 3a + 1$.

Segun esto, cuando un residuo sea mayor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma, ésta será menor que la verdadera, y deberá aumentarse.

En la práctica, al hallar una cifra de la raiz por medio de la division, se toma con frecuencia un número menor que el cociente, á fin de disminuir el número de comprobaciones. Esta precaucion, conveniente en gran número de casos, origina algunas veces cifras menores que las verdaderas, lo que se conoce comparando el residuo con el triplo del cuadrado de la raiz mas el triplo de la misma.

271. Sabemos ya extraer la raiz cúbica de un número entero, con un error menor que una unidad; pero esta aproximacion es insuficiente en la generalidad de los casos, por lo que vamos á ocuparnos en extraer la raiz de un entero, con un error tan pequeño como se quiera.

A este fin, demostraremos el siguiente

Teorema. *La raiz cúbica de un producto de varios factores, es igual al producto de las raices cúbicas de los factores.*

Queremos demostrar que

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c}.$$

En efecto: el segundo miembro de esta igualdad será la raiz cúbica de *abc*, si elevándole al cubo, resulta esta cantidad. Pero el cubo del segundo miembro, contendrá las raices cúbicas de *a*, *b* y *c* repetida cada una tres veces por factor, ó sea elevada al cubo; y como el cubo de la raiz cúbica de una cantidad, es igual, segun la definicion, á dicha cantidad, resulta que el cubo del segundo miembro se compondrá de los factores *a, b, c,* ó será *abc*.

Lo que demuestra el teorema.

272. Problema. *Extraer la raiz cúbica del entero* N *con un error menor que* $\frac{1}{n}$.

Por el teorema anterior, tenemos

$$\sqrt[3]{N \cdot n^3} = \sqrt[3]{N} \cdot n;$$

partiendo los dos miembros de esta igualdad por n, será

$$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N \cdot n^3}}{n}.$$

La raiz cúbica de $N \cdot n^3$ está comprendida entre dos números enteros consecutivos m y $m+1$; luego su cociente por n, lo estará entre $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$; y como la diferencia entre estas fracciones es $\frac{1}{n}$, la primera $\frac{m}{n}$ será la raiz cúbica de N, con un error menor que $\frac{1}{n}$.

Este error será tan pequeño como queramos, puesto que dando á n un valor suficientemente grande, la fraccion $\frac{1}{n}$ será menor que cualquiera cantidad asignable.

Observando que la fraccion $\frac{m}{n}$ se obtiene partiendo por n la raiz entera de $N \cdot n^3$, podremos enunciar la siguiente regla.

Para hallar la raiz cúbica de un entero, con un error menor que una unidad fraccionaria dada, se multiplica el entero por el cubo del denominador de la unidad fraccionaria, y la raiz cúbica entera del producto se divide por dicho denominador.

Ejemplo. Extraer la raiz cúbica de 24 con un error menor que $\frac{1}{9}$.

Multiplicando 24 por el cubo de 9, resulta 17496; la raiz cúbica entera de este número es 25; luego $\frac{25}{9}$ es la raiz cúbica de 24 con un error menor que $\frac{1}{9}$.

273. Si la unidad fraccionaria dada es decimal, por ejemplo 0,001, se obtiene el cubo de su denominador con solo triplicar el número de ceros; el producto del número dado por este cubo, se halla añadiendo los ceros á la derecha, y finalmente, para efectuar la division por el denominador, bastará colocar la coma en el lugar correspondiente; luego

Para hallar la raiz cúbica de un número con un error menor que una unidad decimal dada, se añaden á la derecha del número tres veces tantos ceros, como tiene el denominador de la unidad decimal, y de la raiz cúbica entera del producto, se separan tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador de la unidad decimal.

Ejemplo. Hallar la raiz cúbica de 32 con un error menor que 0,01.

Colocaremos seis ceros á la derecha de 32; la raiz cúbica entera de 32000000 es 317; luego 3,17 es la raiz buscada.

II.—Raiz cúbica de los números fraccionarios.

274. TEOREMA. *La raiz cúbica de un quebrado es igual á la raiz cúbica del numerador partida por la del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$, cuyos términos son números enteros.

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

En efecto: los términos del segundo miembro serán números conmensurables ó inconmensurables, segun que a y b sean cubos ó no lo sean; pero en todos los casos tenemos [241]

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\times\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\times\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\frac{a}{b};$$

luego $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ es la raiz cúbica de $\frac{a}{b}$.

275. TEOREMA. *Para que la raiz cúbica de un quebrado irreducible sea un número conmensurable, se necesita y basta que los dos términos del quebrado sean cubos.*

Si el quebrado es $\frac{343}{729}$, su raiz cúbica es $\frac{7}{9}$, luego la condicion enunciada es suficiente.

Demostremos que tambien es necesaria.

Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$.

Su raiz cúbica no puede ser un número entero, porque el cubo de éste sería tambien un número entero igual á $\frac{a}{b}$, lo que es imposible.

Para que dicha raiz sea un quebrado $\frac{a'}{b'}$, que siempre puede suponerse irreducible, es necesario que el cubo $\frac{a'^3}{b'^3}$ sea igual á $\frac{a}{b}$; y como dicho cubo es tambien un quebrado irreducible, es necesario que se verifiquen las igualdades

$$a = a'^3, \qquad b = b'^3,$$

esto es, que a y b sean cubos.

276. Teorema. *Si el numerador de un quebrado no es cubo, y el denominador lo es, partiendo la raiz entera del numerador por la exacta del denominador, se obtiene la raiz del quebrado, con un error menor que la unidad dividida por la raiz cúbica del denominador.*

Sea el quebrado $\frac{80}{125}$.

Su raiz cúbica es $\frac{\sqrt[3]{80}}{5}$; pero la raiz cúbica de 80 está comprendida entre 4 y 5; luego la del quebrado lo estará entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{5}$; luego será $\frac{4}{5}$, con un error menor que $\frac{1}{5}$.

Siempre puede conseguirse que el denominador de una fraccion sea cubo, pues basta multiplicar los dos términos de la fraccion por el cuadrado del denominador. Extrayendo la raiz cúbica del quebrado que resulta, se obtiene la del propuesto con un error menor que la unidad dividida por su denominador.

Sea el quebrado $\frac{3}{7}$, cuyo denominador no es cubo.

Multiplicando sus dos términos por 7^2, resulta el quebrado equivalente $\frac{3 \cdot 7^2}{7^3}$. La raiz cúbica entera del numerador es 5, y 7 la exacta del denominador; luego $\frac{5}{7}$ es la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$.

277. Propongámonos extraer la raiz cúbica de un número decimal.

Escribiendo estos números en forma de quebrados ordinarios, podemos aplicar á ellos las reglas anteriores. Si la parte decimal tiene un número de cifras múltiplo de 3, el denominador es cubo; y si el número de cifras decimales no es múltiplo de 3, se añade uno ó dos ceros.

Sea el número decimal 0,354279.

Convertido en ordinario es $\frac{354279}{1000000}$. La raiz del denominador es 100 exactamente; luego por medio de la regla del número anterior, obtendremos la raiz con un error menor que una centésima.

La raiz entera del numerador es 70; luego la raiz buscada es 0,70.

Si el número decimal fuese 3,4562, añadiendo dos ceros á la parte decimal será 3,456200, y seguiremos como en el caso anterior.

La raiz entera de 3456200 es 153; luego la raiz cúbica del número propuesto es 1,53 con un error menor que 0,01.

De lo expuesto se deduce que

Para extraer la raiz cúbica de un número decimal, se añade uno ó dos ceros á su derecha, si el número de cifras decimales no es múltiplo de 3; se prescinde de la coma y se extrae la raiz entera del número que resulta; separando despues una cifra decimal por cada tres de las que tiene el número, se obtiene la raiz cúbica de éste, con un error menor que una unidad decimal del último órden hallado en la raiz.

Agregando ceros á la parte decimal de un número dado, se consigue que tenga cuantas cifras se quiera; y como cada tres de ellas dan una en la raiz, se podrá llevar la aproximacion al grado que se desee.

En la práctica no se agregan los ceros al número: basta añadir á los residuos tres ceros, por cada cifra decimal que deba tener la raiz.

Ejemplo. Hallar la raiz cúbica de 0,56 con un error menor que 0,001.

Necesitamos llegar en la raiz á la cifra de las milésimas. La operacion se dispone del modo siguiente:

0,560	0,824
512	
480.00	192
393 68	
86 320.00	20172
81 082 24	
5 237 76	

La raiz es 0,824.

278. La raiz de un quebrado ordinario puede obtenerse tambien convirtiéndole préviamente en decimal, y hallando la raiz de éste.

Si la decimal equivalente es periódica, se toman tres cifras decimales por cada una de las que deba tener la raiz.

Ejemplo. Hallar la raiz cúbica de $\frac{7}{11}$ con un error menor que 0,01.

Tenemos $\frac{7}{11} = 0,6363.....$ Tomaremos seis cifras decimales, y será

0,636.3 63	0,86
512	
124 3.63	192
124 0 56	
3 07	

Por último, la raiz cúbica de un número mixto se obtiene reduciendo el mixto á quebrado, y extrayendo la raiz de éste.

EJERCICIOS.

I. Si á los términos de una fraccion, propia ó impropia, se añaden cantidades iguales y enteras, cuyo valor aumenta, el límite de los valores sucesivos de la fraccion es la unidad. Demostracion.

II. La suma de una cantidad conmensurable con la unidad y otra inconmensurable, es inconmensurable con la misma unidad. Demostracion.

III. La diferencia entre una cantidad conmensurable con la unidad y otra inconmensurable, es tambien inconmensurable con la unidad. Demostracion.

IV. La suma de dos cantidades inconmensurables, puede ser conmensurable. Demostracion.

V. La diferencia entre dos cantidades inconmensurables, puede ser conmensurable. Demostracion.

VI. El producto de un número inconmensurable por otro conmensurable, es inconmensurable. Demostracion.

VII. El cociente de un número inconmensurable por otro conmensurable, es inconmensurable. Demostracion.

VIII. El cociente de un número conmensurable por otro inconmensurable, es inconmensurable. Demostracion.

IX. El producto de dos números inconmensurables, puede ser conmensurable. Demostracion.

X. El cociente de dos números inconmensurables, puede ser conmensurable. Demostracion.

XI. Averiguar cuántos cuadrados enteros contienen los diez mil primeros números.

XII. Hallar la diferencia entre los cuadrados de dos números que difieren en media unidad.

XIII. Regla para conocer, á la simple inspeccion del residuo, si el error cometido al tomar la raiz entera de un número en lugar de la exacta, es mayor ó menor que media unidad.

XIV. Un número entero que termina en 2, 3, 7 ú 8, no tiene raiz cuadrada exacta. Demostracion.

XV. Un número primo no tiene raiz cuadrada exacta. Demostracion.

XVI. Si un número compuesto tiene alguno de sus factores primos con exponente impar, no puede tener raiz cuadrada exacta. Demostracion.

XVII. Todo entero terminado en un número impar de ceros, tiene raiz cuadrada inconmensurable. Demostracion.

XVIII. Si un número termina en 5, y la cifra de sus decenas no es 2, la raiz cuadrada de dicho número no puede ser exacta. Demostracion.

XIX. El cuadrado de un número impar, es un múltiplo de 8, mas una unidad. Demostracion.

Corolario. Si un número impar disminuido en una unidad no es múltiplo de 8, su raiz es inconmensurable.

XX. El cuadrado de un número, que no es múltiplo de 5, es igual á un múltiplo de 5, mas ó menos una unidad. Demostracion.

Corolario. Para que un número no divisible por 5 sea cuadrado, se necesita que aumentado ó disminuido en una unidad, resulte un múltiplo de 5.

XXI. Para que un quebrado cualquiera tenga raiz cuadrada exacta, es necesario y suficiente que el producto de sus dos términos sea un cuadrado. Demostracion.

XXII. Averiguar cuántos cubos enteros contienen los números menores que 1000001.

XXIII. Hallar la diferencia entre los cubos de dos números que difieren en media unidad.

XXIV. Regla para conocer si el error cometido al tomar la raiz cúbica entera de un número en lugar de la exacta, es mayor ó menor que media unidad.

XXV. Si alguno de los exponentes de los factores primos de un número no es múltiplo de 3, la raiz cúbica de dicho número es inconmensurable. Demostracion.

XXVI. La raiz cúbica de un entero terminado en un número de ceros no múltiplo de 3, es inconmensurable. Demostracion.

XXVII. El cubo de un número impar es un múltiplo de 8, aumentado ó disminuido en una ó cinco unidades. Demostracion.

Corolario. Todo número impar que aumentado ó disminuido en una ó cinco unidades no sea múltiplo de 8, no tiene raiz cúbica exacta.

XXVIII. Para que un quebrado cualquiera tenga raiz cúbica exacta, es necesario y suficiente que el producto de sus dos términos sea un cubo. Demostracion.

APLICACIONES

DE LA

ARITMÉTICA.

CAPITULO PRIMERO.

SISTEMAS DE MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS.

I.—Consideraciones generales á todos los sistemas.

279. Hasta ahora hemos considerado el número como la relacion abstracta entre una cantidad y su unidad; pero en las aplicaciones deberemos ver en él además la expresion de una magnitud concreta y determinada, lo que obliga á tener en cuenta la especie de la cantidad y la magnitud de la unidad.

Esta se elige arbitrariamente; pero una vez adoptada es invariable, y si la experiencia y la razon aconsejan sustituirla por otra mayor ó menor, deberá determinarse con la posible exactitud la relacion entre la unidad antigua y la nueva.

La cantidad que trata de medirse y la unidad adoptada, son necesariamente de la misma especie; por consiguiente, debiendo representar por números longitudes, áreas, volúmenes, pesos, capacidades etc., necesitamos una unidad para cada especie mencionada. Por esto, todos los sistemas de pesas y medidas tienen unidades longitudinales, superficiales, cúbicas, de peso, de capacidad etc.

Dentro de cada especie, se consideran cantidades muy pequeñas, y otras excesivamente grandes; todas pueden medirse con una misma unidad; pero se comprende que la expresion de las primeras será una fraccion muy pequeña, y la de las segundas, un número de muchas cifras. Para operar, en lo posible, con números de expresion breve y fácil manejo, se consideran, en cada especie, múltiplos y submúltiplos de una unidad, llamada principal, formando así nuevas unidades, cuyas relaciones entre sí y con la principal son conocidas, de las cuales se elige, en cada caso concreto, la mas proporcionada á la magnitud de las cantidades que debemos expresar.

Al conjunto de las medidas, pesas y monedas usuales de un país ó region cualquiera, y relaciones de la unidad principal con sus múltiplos y divisores, se llama *sistema* de medidas, pesas y monedas de aquel país ó region.

280. Las totalidades de objetos iguales en un concepto cualquiera, se expresan tambien por números, tomando por unidad uno de los objetos ó un grupo cualquiera de ellos.

Así, un monton de libros, por ejemplo, se expresa numéricamente tomando por unidad un libro, ó una docena de ellos etc.; las casas de una poblacion, tomando por unidad una casa; los soldados de un batallon, tomando por unidad el soldado, la compañía etc.

II.—Sistema métrico decimal.

281. Las unidades principales de este sistema son las siguientes:

Unidad de longitud y fundamental del sistema. EL METRO, *diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre que pasa por París.*

Unidad de superficie. EL ÁREA, *cuadrado de diez metros de lado.*

Unidad cúbica ó de volúmen. EL METRO CÚBICO, *cubo cuya arista tiene de largo un metro.*

Unidad de capacidad para áridos y líquidos. EL LITRO, *capacidad de un cubo, cuya arista es la décima parte del metro.*

Unidad de peso. EL GRAMO, *peso en el vacío, á la temperatura de cuatro grados centígrados, de un volúmen de agua destilada igual al de un cubo, cuya arista sea la centésima parte del metro.*

El metro, área, metro cúbico, gramo y litro se expresarán abreviadamente por lsa iniciales m, a, m^3, g y l.

282. Los múltiplos de cada unidad principal siguen la ley decimal, y se enuncian anteponiendo al nombre de aquella una de las palabras, de orígen griego,

Deca, *Hecto,* *Kilo,* *Miria,*

que significan respectivamente

diez, ciento, mil, diez mil,

y expresaremos por las abreviaturas

D. *H.* *K.* *M.*

Los submúltiplos ó divisores siguen la misma ley, y se enuncian anteponiendo al nombre de la unidad principal una de las palabras, de orígen latino,

deci, *centi,* *mili,*

que significan respectivamente

décima parte, centésima parte, milésima parte,

y representaremos por

d, *c,* *m.*

EJEMPLOS.

Nombre.	Valor.	Expresion abreviada.
Miriámetro....	10000 metros............	*Mm.*
Kilógramo....	1000 gramos............	*Kg.*
Hectólitro.....	100 litros...............	*Hl.*
Decámetro....	10 metros...............	*Dm.*
Decílitro......	0,1 litro................	*dl.*
Centiárea.....	0,01 área...............	*ca.*
Milígramo....	0,001 gramo...........	*mg.*

283. UNIDADES DE LONGITUD.

Miriámetro	$= 10^{Km}$	$=$	10000^{m}
Kilómetro	$= 10^{Hm}$	$=$	1000
Hectómetro	$= 10^{Dm}$	$=$	100
Decámetro	$= 10^{m}$	$=$	10
Metro	$= 10^{dm}$	$=$	1
Decímetro	$= 10^{cm}$	$=$	0,1
Centímetro	$= 10^{mm}$	$=$	0,01
Milímetro	$=$		0,001

El miriámetro y kilómetro se emplean en la medicion de distancias itinerarias; el hectómetro y decámetro en los terrenos destinados á la agricultura; el metro y decímetro en el comercio, y usos comunes de la vida; el centímetro y milímetro en las artes, y en las investigaciones científicas.

284. UNIDADES DE SUPERFICIE Ó CUADRADAS.

Son cuadrados que tienen por lados las unidades lineales.

Miriámetro cuadrado $= 100^{Km^2} = 100000000^{m^2}$
Kilómetro cuadrado $= 100^{Hm^2} = 1000000$
Hectómetro cuadrado $= 100^{Dm^2} = 10000$
Decámetro cuadrado $= 100^{m^2} = 100$
Metro cuadrado $= 100^{dm^2} = 1$
Decímetro cuadrado $= 100^{cm^2} = 0{,}01$
Centímetro cuadrado $= 100^{mm^2} = 0{,}0001$
Milímetro cuadrado $= 0{,}000001$

El miriámetro y kilómetro cuadrados sirven para medir la extension superficial de las naciones y provincias; el hectómetro, decámetro y metro cuadrados se usan especialmente para medir la superficie de los campos destinados al cultivo, recibiendo en tal caso los nombres de *hectárea, área* y *centiárea.*

Tendremos, pues,

Hectárea $= 100^{a} = 10000^{m^2}$
Área $= 100^{ca} = 100$
Centiárea $= 1$

El decímetro, centímetro y milímetro cuadrados se emplean en las artes y ciencias.

285. Unidades de volúmen ó cúbicas.

Son cubos que tienen por aristas las unidades lineales.

Miriámetro cúbico $= 1000^{Km^3} = 1000000000000^{m^3}$
Kilómetro cúbico $= 1000^{Hm^3} = 1000000000$
Hectómetro cúbico $= 1000^{Dm^3} = 1000000$
Decámetro cúbico $= 1000^{m^3} = 1000$
Metro cúbico $= 1000^{dm^3} = 1$
Decímetro cúbico $= 1000^{cm^3} = 0{,}001$
Centímetro cúbico $= 1000^{mm^3} = 0{,}000001$
Milímetro cúbico $= 0{,}000000001$

Las unidades superiores al metro cúbico se usan pocas veces; el metro cúbico se emplea en la medicion de grandes volúmenes, y cuando sirve para el arqueo de los buques, se llama *tonelada de arqueo.*

286. UNIDADES DE CAPACIDAD, para áridos y líquidos.

Miriálitro	=	10^{Kl}	=	10000^{l}
Kilólitro	=	10^{Hl}	=	1000
Hectólitro	=	10^{Dl}	=	100
Decálitro	=	10^{l}	=	10
Litro	=	10^{dl}	=	1
Decílitro	=	10^{cl}	=	0,1
Centílitro	=	10^{ml}	=	0,01
Milílitro	=			0,001

El miriálitro y kilólitro son poco usados; el litro es la unidad mas usual en la vida ordinaria; las demás se emplean todas, eligiendo la mas proporcionada á las cantidades de áridos ó líquidos que deban medirse.

287. UNIDADES DE PESO.

Miriágramo	=	10^{Kg}	=	10000^{g}
Kilógramo	=	10^{Hg}	=	1000
Hectógramo	=	10^{Dg}	=	100
Decágramo	=	10^{g}	=	10
Gramo	=	10^{dg}	=	1
Decígramo	=	10^{cg}	=	0,1
Centígramo	=	10^{mg}	=	0,01
Milígramo	=			0,001

La unidad usual es el kilógramo; el miriágramo se usa poco: las demás se emplean todas.

Para la determinacion de pesos muy grandes, hay dos nuevos múltiplos, que son:

Tonelada = 10 quintales métricos = 1000^{Kg}
Quintal métrico = 100

288. SISTEMA MONETARIO.

La unidad monetaria en España es actualmente la *peseta*, que se divide en cien *céntimos*.

Se acuñan monedas de oro, plata y bronce: las de oro y plata contienen una parte de otro metal, generalmente el cobre, de modo que formen una aleacion ó liga homogénea en todas sus partes; y se llama *ley* la relacion entre el peso de metal fino que contiene una moneda y el peso total de la misma.

Para expresar, de una manera uniforme, la ley de las monedas, se considera dividido su peso total en mil partes iguales, llamadas *milésimas:* el número de milésimas de metal fino que contiene la moneda, es la expresion de su ley.

En las monedas de oro y en las piezas de plata de cinco pesetas, mandadas acuñar por Decreto de 19 de Octubre de 1868, la ley es de 900 milésimas; lo que significa que las 900 milésimas de su peso son de metal fino, y las 100 restantes de liga.

La fabricacion de la moneda no puede ser tan perfecta, que no haya que tolerar algun exceso ó falta en su peso y ley; esta tolerancia tiene un límite, que determinan las leyes, y se llama *permiso*.

El cuadro siguiente contiene las monedas mandadas acuñar por el citado Decreto, y sus principales circunstancias.

SISTEMA MONETARIO.

MONEDAS.	PESO. EXACTO. — GRAMOS.	PESO. PERMISO — Milésim.	LEY. EXACTA. — Milésimas.	LEY. PERMISO — Milésim.	DIAMETRO. — Milimets.
DE ORO.					
De 100 pesetas.	32,25806	1			35
De 50 »	16,12903	1			28
De 20 »	6,45161	2	900	2	21
De 10 »	3,22580	2			19
De 5 »	1,61290	3			17
DE PLATA.					
De 5 pesetas.	25	3	900	2	37
De 2 »	10	5			27
De 1 »	5		835	3	23
De 0,50 »	2,50	7			18
De 0,20 »	1	10			16
DE BRONCE.					
De 0,10 pesetas.	10	10	950 cobre	10	30
De 0,05 »	5		40 estaño	5	25
De 0,02 »	2	15	10 zinc		20
De 0,01 »	1				15

III.—Sistema de medidas y pesas de Castilla.

289. Unidades de longitud.

El modelo ó patron de estas unidades es la vara del archivo de la ciudad de Búrgos.

Sus múltiplos y divisores son:

Itineraria.	Legua	=	$6666\frac{2}{3}$ varas = 20000 piés.
Agraria.	Estadal	=	4 »
Para usos comunes.	Vara	=	3 piés.
	Pié	=	12 pulgadas.
	Pulgada	=	12 líneas.
	Línea	=	12 puntos.

En la marina las unidades de longitud son:

Legua marina	= 3 millas.	Braza	= 6 piés.
Milla	= 10 cables.	Codo de ribera	= 2 piés 9 líneas.
Cable	= 111 brazas.		

290. Unidades de superficie ó cuadradas.

Geográfica.	Legua cuadrada	=	400000000 piés cuadrados.
Para usos comunes.	Vara cuadrada	=	9 » »
	Pié cuadrado	=	144 pulg. cuadrad.
	Pulgada cuadrada	=	144 líneas cuadrad.
Agrarias. . .	Fanega de tierra	=	576 estadales cuadrados.
	Aranzada	=	400 » »
	Estadal cuadrado	=	16 varas cuadradas.

La fanega de tierra se divide en 12 celemines de tierra, y éste en 4 cuartillos.

291. Unidades de volúmen ó cúbicas.

Legua cúbica	=	8000000000000 piés cúbicos.
Vara cúbica	=	27 » »
Pié cúbico	=	1728 pulgadas cúbicas.
Pulgada cúbica	=	1728 líneas cúbicas.

Para el arqueo de los buques y grandes volúmenes.

Tonelada de arqueo	= 8 codos cúb. de rib.ª	= 70,189 piés cúb.
Tonelada comun	=	42,646 » »

292. Unidades de capacidad.

El modelo ó patron de estas unidades es la *media fanega* del archivo de la ciudad de Ávila, para los áridos; y la *cántara* de Toledo, para los líquidos.

Para áridos.		Para líquidos.	
Cahiz	= 12 fanegas.	Moyo	= 16 cántaras.
Fanega	= 12 celemines.	Cántara	= 8 azumbres.
Celemin	= 4 cuartillos.	Azumbre	= 4 cuartillos.
		Cuartillo	= 4 copas.

Las medidas para el aceite son: la arroba de aceite, que tiene 25 libras; y la libra, cuatro panillas ó cuarterones.

293. Unidades de peso.

El modelo ó patron es el *marco* del archivo del Consejo de Castilla.

Para usos comunes.		Para metales finos y piedras preciosas.	
Quintal	= 4 arrobas.		
Arroba	= 25 libras.	Marco	= 8 onzas.
Libra	= 16 onzas.	Onza	= 8 ochavas.
Onza	= 16 adarmes.	Ochava	= 6 tomines.
Adarme	= 3 tomines.	Tomin	= 3 quilates.
Tomin	= 12 granos.	Quilate	= 4 granos.

Para la farmacia.

Libra	= 12 onzas.	Dracma	= 3 escrúpulos.
Onza	= 8 dracmas.	Escrúpulo	= 24 granos.

294. Unidades de tiempo.

Siglo	= 100 años.	Dia	= 24 horas.
Año	= 12 meses.	Hora	= 60 minutos.
Mes	= 30 ó 31 dias.	Minuto	= 60 segundos.

295. Monedas.

De oro.		De plata.	
Onza	= 320 reales.	Peso fuerte ó duro	= 20 reales.
Media onza	= 160 »	Medio duro ó escudo	= 10 »
Centen	= 100 »	Peseta	= 4 »
Ochentin	= 80 »	Media peseta	= 2 »
Escudo de oro	= 40 »	Real de vellon	= 34 maravd.
Escudito	= 20 »	Peseta columnaria	= 5 reales.
Escudito de premio	= 21 ¼	Media peseta id.	= 2 ½ »
		Real columnario	= 1 ¼ »

De cobre.

Medio real	= 0,50 reales.	Cuarto	= 4 maravedises.
Cuartillo	= 0,25 »	Ochavo	= 2 »
Dos cuartos	= 8 maraveds	Maravedí, imaginaria.	

IV.—Equivalencias aproximadas entre las monedas y pesas antiguas y las métrico-decimales.

Unidades de longitud.

	Leguas á kilómetros.	Varas á metros.	Piés á decímetros.	Pulgadas á centímetros.	Líneas á mil metros.
1	5,5727	0,8359	2,7864	2,3220	1,9350
2	11,1454	1,6718	5,5727	4,6439	3,8699
3	16,7181	2,5077	8,3591	6,9659	5,8049
4	22,2908	3,3436	11,1454	9,2878	7,7399
5	27,8635	4,1795	13,9318	11,6098	9,6748
6	33,4362	5,0154	16,7181	13,9318	11,6098
7	39,0089	5,8513	19,5045	16,2537	13,5448
8	44,5816	6,6872	22,2909	18,5757	15,4797
9	50,1543	7,5231	25,0772	20,8977	17,4147
	Kilómetros a leguas.	**Metros a varas.**	**Decímetros a piés.**	**Centímetros á pulgadas.**	**Milímetros a líneas.**
1	0,1794	1,1963	0,3589	0,4307	0,5168
2	0,3589	2,3926	0,7178	0,8613	1,0336
3	0,5383	3,5889	1,0767	1,2920	1,5504
4	0,7178	4,7852	1,4356	1,7227	2,0672
5	0,8972	5,9815	1,7945	2,1534	2,5840
6	1,0767	7,1778	2,1534	2,5840	3,1008
7	1,2561	8,3742	2,5122	3,0147	3,6176
8	1,4356	9,5705	2,8711	3,4454	4,1344
9	1,6150	10,7668	3,2300	3,8760	4,6512

Unidades de superficie.

	Leguas cuadradas á kilómetrs. cuadrados.	Fanegas á hectáreas.	Varas cuadradas á metros cuadrados.	Piés cuadrados á decimetros cuadrados.	Pulgadas cuadradas á centimetros cuadrs.
1	31,0550	0,6440	0,6987	7,7637	5,3915
2	62,1100	1,2879	1,3975	15,5275	10,7830
3	93,1650	1,9319	2,0962	23,2912	16,1745
4	124,2199	2,5758	2,7949	31,0550	21,5660
5	155,2749	3,2198	3,4937	38,8187	26,9575
6	186,3299	3,8637	4,1924	46,5825	32,3489
7	217,3849	4,5077	4,8912	54,3462	37,7404
8	248,4399	5,1516	5,5899	62,1100	43,1319
9	279,4949	5,7956	6,2886	69,8737	48,5234
	Kilómetros cuadrados a leguas cuadradas	Hectáreas á fanegas.	Metros cuadrados á varas cuadradas	Decimetros cuadrados á piés cuadrados	Centimetros cuadrados a pulgadas cuad.
1	0,0322	1,5529	1,4312	0,1288	0,1855
2	0,0644	3,1058	2,8623	0,2576	0,3710
3	0,0966	4,6587	4,2935	0,3864	0,5564
4	0,1288	6,2116	5,7246	0,5152	0,7419
5	0,1610	7,7645	7,1558	0,6440	0,9274
6	0,1932	9,3174	8,5869	0,7728	1,1129
7	0,2254	10,8703	10,0181	0,9016	1,2983
8	0,2576	12,4232	11,4492	1,0304	1,4838
9	0,2898	13,9761	12,8804	1,1592	1,6693

Unidades de capacidad, para áridos, y de volúmen.

	Cahices á kilolitros.	Fanegas á hectólitros.	Celemines á decálitros	Varas cúbicas á metros cúbic.	Piés cúbicos á decimetr. cúb.
1	0,6660	0,5550	0,4625	0,5841	21,6325
2	1,3220	1,1100	0,9250	1,1682	43,2650
3	1,9980	1,6650	1,3875	1,7522	64,8975
4	2,6640	2,2200	1,8500	2,3363	86,5301
5	3,3301	2,7751	2,3125	2,9204	108,1626
6	3,9961	3,3301	2,7750	3,5045	129,7951
7	4,6621	3,8851	3,2376	4,0886	151,4276
8	5,3281	4,4401	3,7001	4,6727	173,0601
9	5,9941	4,9951	4,1626	5,2568	194,6926

	Kilólitros á cahices.	Hectólitros á fanegas.	Decálitros á celemines.	Metros cúbicos á varas cúbicas	Decímetr. cúb. á pies cúbicos
1	1,5015	1,8018	2,1621	1,7121	0,0462
2	3,0030	3,6035	4,3243	3,4242	0,0925
3	4,5044	5,4053	6,4864	5,1363	0,1387
4	6,0059	7,2071	8,6485	6,8484	0,1849
5	7,5074	9,0088	10,8106	8,5605	0,2311
6	9,0088	10,8106	12,9727	10,2726	0,2774
7	10,5103	12,6124	15,1349	11,9847	0,3236
8	12,0118	14,4142	17,2970	13,6968	0,3698
9	13,5133	16,2159	19,4591	15,4089	0,4160

Unidades de capacidad para líquidos.

	Cantaras á decálitros.	Cuartillos á litros.	Arrobas de aceite á decálitros.	Libras de aceite á litros
1	1,6133	0,5042	1,2563	0,5025
2	3,2266	1,0083	2,5126	1,0050
3	4,8399	1,5125	3,7689	1,5076
4	6,4532	2,0166	5,0252	2,0101
5	8,0665	2,5208	6,2815	2,5126
6	9,6798	3,0249	7,5378	3,0151
7	11,2931	3,5291	8,7941	3,5176
8	12,9064	4,0333	10,0504	4,0202
9	14,5197	4,5374	11,3067	4,5227

	Decálitros á cantaras.	Litros á cuartillos.	Decálitros á arrobas de aceite.	Litros á libras de aceite.
1	0,6198	1,9835	0,7960	1,9900
2	1,2397	3,9670	1,5920	3,9799
3	1,8595	5,9505	2,3880	5,9699
4	2,4794	7,9341	3,1840	7,9599
5	3,0992	9,9176	3,9799	9,9499
6	3,7191	11,9011	4,7759	11,9398
7	4,3389	13,8846	5,5719	13,9298
8	4,9588	15,8681	6,3679	15,9198
9	5,5786	17,8516	7,1639	17,9097

Unidades de peso.

	Quintales á quintales métricos	Arrobas á kilogramos	Libras á kilógramos.	Onzas á gramos.	Adarmes á gramos.
1	0,4601	11,5023	0,4601	28,7558	1,7972
2	0,9202	23,0046	0,9202	57,5116	3,5945
3	1,3803	34,5070	1,3803	86,2674	5,3917
4	1,8404	46,0093	1,8404	115,0232	7,1890
5	2,3005	57,5116	2,3005	143,7791	8,9862
6	2,7606	69,0139	2,7606	172,5349	10,7834
7	3,2207	80,5163	3,2207	201,2907	12.5807
8	3,6807	92,0186	3,6807	230,0465	14,3779
9	4,1408	103,5209	4,1408	258,8023	16,1752

	Quintales métricos á los antiguos.	Kilógramos á arrobas.	Kilogramos á libras.	Gramos á onzas.	Gramos á adarmes.
1	2,1735	0,0869	2,1735	0,0348	0,5564
2	4,3469	0,1739	4,3469	0,0696	1,1128
3	6,5204	0,2608	6,5204	0,1043	1,6692
4	8,6939	0,3478	8,6939	0,1391	2,2256
5	10,8674	0,4347	10,8674	0,1739	2,7820
6	13,0408	0,5216	13,0408	0,2087	3.3384
7	15,2143	0,6086	15,2143	0,2435	3,8948
8	17,3878	0,6955	17,3878	0,2782	4,4513
9	19,5613	0,7825	19,5613	0,3130	5,0077

Unidades monetarias.

	Reales á pesetas.	Pesetas á reales	Maravedises á centimos.	Centimos á maravedises.
1	0,25	4	0,7353	1,36
2	0,50	8	1,4706	2,72
3	0,75	12	2,2059	4,08
4	1	16	2,9412	5,44
5	1,25	20	3,6765	6,80
6	1,50	24	4,4118	8,16
7	1,75	28	5,1471	9,52
8	2	32	5,8824	10,88
9	2,25	36	6,6176	12.24

296. Las tablas anteriores se usan como se verá en los siguientes

EJEMPLOS.

1.° Reducir 53 varas á metros.

Varas.		Metros.
50	=	41,795
3	=	2,5077
53	=	44,3027

Segun las tablas, 5 varas = 4,1795 metros; luego 50 varas = 41,795 metros, además 3 varas = 2,5077 metros: sumando estas igualdades se obtiene

53 varas = 44,3027 metros.

2.° Reducir 475 hectólitros á fanegas.

Hectólitros.		Fanegas.
400	=	720,71
70	=	126,124
5	=	9,0088
475	=	855,8428

3.° Reducir 206 metros á varas.

Metros.		Varas.
200	=	239,26
6	=	7,1778
206	=	246,4378

4.° Reducir 27 maravedises á céntimos de peseta.

Maravedises.		Céntimos.
20	=	14,706
7	=	5,1471
27	=	19,8531

V.—Medidas, pesas y monedas mas usuales de algunas naciones extranjeras.

297. El sistema métrico decimal, que hemos expuesto, rige en Francia, Italia y Bélgica.

Por ley de 24 de Noviembre de 1871, se adoptó tambien en el Imperio de Alemania, conservando la mayor parte de los nombres antiguos, y modificando la milla, que es igual á 7,5 kilómetros.

298. MEDIDAS Y PESAS DE INGLATERRA.

UNIDADES DE LONGITUD.

Principal........ Yarda *(Yard)* = 3 piés *(Feet)*.
Itineraria........ Milla *(Mile)* = 1760 yardas.

UNIDAD DE SUPERFICIE.

Acre = 4840 yardas cuadradas.

UNIDADES DE CAPACIDAD.

Para líquidos..... Gallon imperial = 4 quarts = 8 pints.
Para áridos...... Bushel = 8 gallones.

UNIDADES DE PESO.

Para usos comunes.. { Libra *avoir du puis* = 16 onzas. / Quintal = 112 libras. }
Para el oro, plata etc. Libra *troy* = 12 onzas.

299. MEDIDAS Y PESAS ANTIGUAS DE PRUSIA.

UNIDADES DE LONGITUD.

Pié *(Fuss)* del Rhin = 12 pulgadas *(Zolle)*.
Ruthe = 12 piés.
Vara *(Elle)* = 25 ½ pulgadas.
Itineraria. Milla prusiana *(Preussische Meile)*=2000 Ruthen.

UNIDAD AGRARIA.

Morgen = 180 Ruthen cuadrados.

UNIDADES DE CAPACIDAD.

Para líquidos..... Anker = 30 Quart = 60 Oessel.
Para áridos...... Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen

DE PESO. (Antes de 1.° de Julio de 1858).

Libra *(Pfund)* = 32 Loth.
Quintal *(Centner)* = 110 libras.

DE PESO. (Desde 1.° de Julio de 1858).

Libra = 30 Loth = 500 gramos (sistema métrico).
Quintal = = 100 libras.
Libra antigua = 0,935422025 libra nueva.

300. MONEDAS PRINCIPALES.

Francia y Bélgica. Franco = 100 céntimos = 3,85 reales
Italia.......... Lira = 100 » = 3,85 »
Inglaterra....... Libra esterlina *(Sovereign)* =
20 chelines *(Shillingen)* = 96,92 reales.
Chelin *(Shilling)* = 12 peniques *(Pence)* = 4,47 »
Alemania. Thaler = 30 Silbergroschen = 14,28 »

VI.—Equivalencias aproximadas entre las medidas y pesas de algunas naciones.

ESPAÑA. *(Sistema de Castilla).*

	SISTEMA DE CASTILLA.	INGLATERRA.	PRUSIA.
De longitud.	Vara.	0,9142 yardas.	2,6654 piés.
	Pié.	0,5047 »	0,8878 »
	Legua (Itineraria)..	3,4628 millas.	0,7398 millas.
De superficie.	Vara cuadrada. . .	0,8357 yardas².	7,0935 piés².
	Pié cuadrado. . .	0,8357 piés².	0,7882 »
	Fanega (Agraria). .	1,5913 acres.	2.5221 morgen.
De volúm.	Vara cúbica.. . .	0,7641 yardas³.	18,8925 piés³.
	Pié cúbico. . . .	0,7641 piés³.	0,6997 »
Capacidad.	Cántara (Liquidos)..	3,5508 gallons.	14,0896 quart.
	Cuartillo.. . . .	0,8877 pints.	0,8806 oessel.
	Fanega (áridos). .	1,5269 bushel.	1,0096 scheffel.
Peso.	Libra..	1,0143 libras avoir.	0,9837 libras antigs.
	Quintal.	0,9056 quintales.	0,8942 quint. »

SISTEMA MÉTRICO.

	SISTEMA MÉTRICO.	INGLATERRA.	PRUSIA.
Longitud.	Metro.	1,0936 yardas.	3,1862 piés.
	Decímetro. . . .	0,3281 piés.	3,8234 pulgadas.
	Kilómetro. . . .	0,6214 millas.	0,1328 millas.
Superficie.	Metro cuadrado. .	1,1960 yardas².	10,1519 piés².
	Hectárea. . . .	2,4711 acres.	3,9162 morgen.
Volúmen.	Metro cúbico. . .	1,3080 yardas³.	32,3459 piés³.
	Decimetro cúbico. .	0,0353 piés³.	55,8957 pulgadas³.
Capacidad.	Decálitro (liquidos).	2,2010 gallons.	8,7334 quart.
	Litro » . . .	1,7608 pints.	1,7467 oessel.
	Hectólitro (áridos).	2,7520 bushels.	1,8195 scheffel.
Peso.	Kilógramo. . . .	2,2046 libras avoir.	2,1381 libras antigs.
	Quintal métrico. .	1,9684 quintales.	1,9437 quints. antig.

INGLATERRA.

	INGLATERRA.	SISTEMA MÉTRICO.	SISTEMA DE CASTILLA.
Longitud.	Yarda	0,9144 metros.	1,0939 varas.
	Pié.	3,0479 decímetros.	1,0939 piés.
	Milla (itineraria). .	1,6093 kilómetros.	0,2888 leguas.
Superficie.	Yarda cuadrada. .	0,8361 metros².	1,1966 varas².
	Pié cuadrado. . .	9,2900 decímetros².	1,1966 piés².
	Acre (agraria). . .	0,4047 hectáreas.	0,6284 fanegas.
Volúmen.	Yarda cúbica. . .	0,7645 metros³.	1,3089 varas³.
	Pié » . . .	28,3153 decímetros³	1,3089 piés³.
Capacidad.	Gallon (líquidos). .	4,5435 litros.	0,2816 cántaras.
	Pint. » . .	0,5679 »	1,1264 cuartillos.
	Bushel (áridos). .	36,3477 »	0,6549 fanegas.
Peso.	Libra avoir.. . .	0,4536 kilógramos.	0,9859 libras.
	Libra troy. . . .	0,3732 »	0,8113 »
	Quintal.	50,8029 »	1,1042 quintales.

PRUSIA. *(Sistema antiguo).*

	PRUSIA.	SISTEMA MÉTRICO.	SISTEMA DE CASTILLA.
Longitud.	Vara.	0,6669 metros.	0,7979 varas.
	Pié.	0,3139 »	1,1264 piés.
	Milla (itineraria). .	7,5325 kilómetros.	1,3517 leguas.
Superficie.	Pié cuadrado. . .	9,8504 decímetros².	1,2688 piés².
	Morgen.	0,2553 hectáreas.	0,3965 fanegas.
Volúmen.	Pié cúbico. . . .	30,9158 decímetros³.	1,4291 piés³.
Capacidad.	Anker (líquidos). .	34,3509 litros.	2,1292 cántaras.
	Quart » . .	1,1450 »	2,2712 cuartillos.
	Scheffel (áridos). .	54,9615 »	0,9905 fanegas.
Peso.	Libra antigua. . .	0,4677 kilógramos.	1,0166 libras.
	Quintal » . .	51,4482 »	1,1182 quintales.

CAPITULO SEGUNDO.

NÚMEROS COMPLEJOS.

I.—Reduccion de números complejos á incomplejos y vice-versa.

302. Una cantidad cualquiera se puede expresar por números diferentes, refiriéndola sucesivamente á unidades de su especie variables en magnitud; y se comprende que los números aumentarán si la unidad disminuye, y al contrario.

Es evidente que el número será dos, tres, cuatro veces mayor, cuando la unidad se reduzca á su mitad, tercera ó cuarta parte; y aquél quedará reducido á su mitad, tercera ó cuarta parte, cuando la unidad sea el duplo, triplo ó cuádruplo de la primitiva; luego

Regla 1.ª *Para convertir un número de especie dada en otro equivalente de especie menor, se multiplica el primero por el número de veces que su unidad contiene á la de la especie menor.*

Ejemplos.

1.° Convertir 12 pesetas en reales.

La peseta contiene 4 veces al real; luego mnltiplicando 12 por 4, el producto será el número de reales equivalente á 12 pesetas; así

$$12 \text{ pesetas} = 12 \,.\, 4 = 48 \text{ reales.}$$

2.° Convertir $\frac{5}{8}$ de libra en onzas.

Como una libra tiene 16 onzas, será

$$\frac{5}{8} \text{ de libra} = \frac{5}{8} \times 16 = \frac{80}{8} = 10 \text{ onzas.}$$

3.° Convertir 7 duros en maravedises.

Valiendo un duro 20 reales, y un real 34 maravedises, es claro que un duro tiene $20 \,.\, 34 = 680$ maravedises; luego

$$7 \text{ duros} = 7 \,.\, 680 = 4760 \text{ maravedises.}$$

Regla 2.ª *Para convertir un número de especie dada en otro equivalente de especie mayor, se divide el primero por el número de veces que su unidad está contenida en la especie mayor.*

EJEMPLOS.

1.° Convertir 27 piés en varas.

El pié está contenido 3 veces en la vara; luego dividiendo 27 por 3, el cociente será el número de varas equivalente á 27 piés; así

$$27 \text{ piés} = \frac{27}{3} = 9 \text{ varas.}$$

2.° Convertir 15 reales en duros.

Como el real está contenido en el duro 20 veces, será

$$15 \text{ reales} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ de duro.}$$

3.° Convertir 180 pulgadas en varas.

Como la pulgada está contenida 12 veces en el pié, y éste 3 veces en la vara, es claro que la pulgada está contenida en la vara 12 . 3 = 36 veces; luego

$$180 \text{ pulgadas} = \frac{180}{36} = 5 \text{ varas.}$$

303. NÚMERO INCOMPLEJO *es el que se refiere á una sola unidad,* por ejemplo 12 arrobas.

NÚMERO COMPLEJO *es la reunion de varios incomplejos referidos á unidades diferentes de la misma naturaleza;* por ejemplo 7 arrobas, 13 libras y 10 onzas.

Para convertir un número complejo en incomplejo de su menor especie, se convierte el número de mayor especie en otro de la inferior inmediata, y se añaden las unidades de ésta; el número que resulta se convierte en otro de la especie inferior siguiente, y se añaden las unidades de esta última; y así sucesivamente, hasta llegar á la última de las especies.

EJEMPLOS.

1.° Convertir el número complejo 24 duros y 12 reales en incomplejo de reales.

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{rl} 24 & \text{duros.} \\ \underline{20} & \\ 480 & \text{reales.} \\ \underline{12} & \\ 490 & \text{reales.} \end{array}$$

2.° Convertir el número complejo 12 arrobas, 7 libras y 6 onzas en incomplejo de onzas.

$$\begin{array}{rl} 12 & \text{arrobas.} \\ 25 & \\ \hline 60 & \\ 24 & \\ \hline 300 & \text{libras.} \\ 9 & \\ \hline 309 & \text{libras.} \\ 16 & \\ \hline 1854 & \\ 309 & \\ \hline 4944 & \text{onzas.} \\ 6 & \\ \hline 4950 & \text{onzas.} \end{array}$$

Para convertir un número complejo en incomplejo de cualquiera de sus especies, se convierte el número dado en incomplejo de su especie inferior, y el resultado se divide por el número de veces que la unidad inferior esté contenida en la de la especie á que debe referirse el número.

Ejemplo. Convertir el complejo 14 dias, 15 horas, 43 minutos y 50 segundos en incomplejo de horas.

Reducido el número dado á segundos da 1266230 segundos; para reducir éste á horas, debemos dividirle por 60 . 60 = 3600, y obtendremos

$$\frac{1266230}{3600} = \frac{126623}{360} \text{ horas.}$$

304. *Para convertir un incomplejo de especie inferior en complejo, se reduce el número dado á la especie superior inmediata; el cociente entero se reduce á la especie superior siguiente; y se continúa del mismo modo hasta obtener un cociente de la especie superior del complejo, ó un cociente cero. El último cociente y los residuos de las divisiones componen el número complejo equivalente al incomplejo dado, siendo cada residuo de la especie del dividendo respectivo.*

Ejemplo. Convertir el número incomplejo 4950 onzas en complejo.

Disposicion práctica.

4950	16		
150	309 libras	25	
6 onzas	59	12 arrobas	4
	9 libras	0 arrobas	3 quintales.

Luego, 4950 onzas $=$ 3 quintales, 0 arroba, 9 libras, 6 onzas.

Para convertir un quebrado incomplejo de especie superior en número complejo, se divide el numerador por el denominador, y el cociente entero será el número de especie superior del complejo que se busca. Se reduce el residuo á la especie menor inmediata, y el resultado se divide por el denominador del quebrado propuesto, continuando de este modo hasta llegar á la especie inferior.

EJEMPLOS.

1.° Convertir el incomplejo $\frac{11}{4}$ de arroba en complejo.

Disposicion práctica.

11 arrobas.	4
3	2 arrobas 18 libras 12 onzas.
25	
75 libras.	
35	
3	
16	
48 onzas.	
48	
0	

Luego, $\frac{11}{4}$ de arroba $=$ 2 arrobas, 18 libras, 12 onzas.

2.° Convertir en complejo el incomplejo $\frac{18}{7}$ de cahiz.

18 cahices.	7
4	2 cahices, 6 fanegas, 10 celems., $1\frac{1}{7}$ cllos.
12	
48 fanegas.	
6	
12	
72 celemines.	
2	
4	
8 cuartillos.	
1	

305. En el sistema métrico se ha visto que una unidad cualquiera contiene 10 veces á la inmediata inferior, exceptuándose las superficiales, que decrecen de 100 en 100, y las cúbicas, que decrecen de 1000 en 1000; luego la reduccion de un número métrico incomplejo á especie menor ó mayor, se efectuará siempre multiplicando ó dividiendo dicho número por la unidad seguida de ceros, para lo que basta correr la coma á derecha ó izquierda cierto número de lugares.

EJEMPLOS.

1.° Convertir 345 , 28 metros en centímetros.

Es claro que basta multiplicar por 100 el número dado; luego

$$345^{m}, 28 = 34528^{cm}$$

2.° Convertir 34,52658 metros cuadrados en centímetros cuadrados.

Como las unidades de superficie decrecen de 100 en 100, debemos multiplicar por 100.100 = 10000, y será

$$34^{m^2}, 52658 = 345265^{cm^2}, 8.$$

3.° Convertir 0,345792 kilómetros cúbicos en hectómetros cúbicos.

$$0^{Km^3}, 345792 = 345^{Hm^3}, 792.$$

4.° Convertir 35 hectógramos en gramos.

$$35^{Hg} = 3500^{g}.$$

5.° Convertir 38357,2 litros en kilólitros.

Como se quiere reducir á unidades superiores, debemos *dividir* el número dado por 1000, y será

$$38357^{l}, 2 = 38^{Kl}, 3572.$$

6.° Convertir 357,52 metros cuadrados en hectáreas.

$$357^{\overset{2}{m}}, 52 = 0^{Ha}, 035752.$$

7.° Convertir 748956 decímetros cúbicos en decámetros cúbicos.

$$748956^{\overset{3}{dm}} = 0,^{\overset{3}{Dm}} 748956.$$

306. Propongámonos convertir el número métrico complejo $8^{Hl}\,6^{Dl}\,3^{l}\,5^{cl}$ en incomplejo de su especie inferior.

Segun la regla del número 303, debemos multiplicar 8 hectólitros por 10, y añadir 6 decálitros, lo que da 86 decálitros; pero es evidente que siendo los hectólitros del órden de las decenas, con respecto á los decálitros, se obtiene el mismo resultado colocando el 6 á la derecha del 8. De igual manera se convierten los decálitros en litros, etc.; luego

$$8^{Hl}\,6^{Dl}\,3^{l}\,5^{cl} = 86305^{cl}.$$

Si las unidades son superficiales, cada órden de las mismas debe ocupar dos lugares, y si son cúbicas, tres; así

$$59^{\overset{2}{m}}\,48^{\overset{2}{dm}}\,6^{\overset{2}{cm}} = 594806^{\overset{2}{cm}}.$$

$$81^{\overset{3}{m}}\;7^{\overset{3}{cm}} = 81000007^{\overset{3}{cm}}.$$

Por el contrario, un número métrico incomplejo quedará convertido en complejo separando sus cifras una á una, si expresa una longitud, capacidad ó peso, dos á dos, si es la expresion de una superficie, tres á tres, si es la de un volúmen; así

$$34589^{g} = 3^{Mg}\;4^{Kg}\;5^{Hg}\,8^{Dg}\;9^{g}.$$

$$457629^{\overset{2}{m}} = 45^{\overset{2}{Hm}}\,76^{\overset{2}{Dm}}\;29^{\overset{2}{m}}.$$

$$47008290^{\overset{3}{m}} = 47^{\overset{3}{Hm}}\,8^{\overset{3}{Dm}}\,290^{\overset{3}{m}}.$$

II.—Adicion.

307. Para que varios números puedan reunirse en uno solo, es necesario que sean de igual naturaleza, ó que se consideren bajo un concepto comun á todos ellos. En tal caso, la suma es de la misma naturaleza que los sumandos, ó se considera bajo el mismo concepto que éstos.

La suma de números incomplejos se efectúa como la de números abstractos.

Para sumar varios números complejos, se suman las unidades de la misma especie de los sumandos, empezando por las inferiores. Las sumas que no componen una unidad de la especie superior inmediata á la suya, se escriben tal como se obtienen; y de las que componen una ó mas unidades superiores. sólo se escribe el residuo, reservando aquellas para añadirlas á la suma parcial siguiente.

EJEMPLOS.

1.°

8	horas	54	minutos	13	segundos
6	»	48	»	10	»
12	»	39	»	20	»
28	»	21	»	43	»

2.°

15	libras	13	onzas	9	adarmes	2	tomines
19	»	12	»	2	»	1	»
24	»	15	»	1	»		
60	»	8	»	13	»	0	»

III.—Sustraccion.

308. El minuendo y el sustraendo deben ser de igual naturaleza, ó considerarse bajo un concepto comun; y la diferencia es de la misma naturaleza que los números dados.

Si éstos son incomplejos, la sustraccion se efectúa como la de números abstractos.

Para restar dos números complejos se restan las unidades de la misma especie, empezando por las inferiores; si algun sustraendo parcial es mayor que el minuendo de su especie, se añade á éste una unidad de la especie superior inmediata, y á fin de que el resto no se altere, se añade tambien una unidad al sustraendo parcial siguiente.

EJEMPLOS.

1.°

10	varas	2	piés	8	pulgadas
3	»	1	»	5	»
7	»	1	»	3	»

2.°

9	dias	13	horas	15	minutos	13	segundos
4	»	7	»	34	»	15	»
5	»	5	»	40	»	58	»

En este ejemplo, el primer sustraendo parcial 15 es mayor que el minuendo respectivo 13; para efectuar la resta se añade al minuendo 1 minuto, que vale 60 segundos, y se obtiene el nuevo minuendo 73; restando 15 de 73, hallamos 58 segundos. Aumentando el sustraendo siguiente en 1 unidad se convierte en 35, que tampoco se puede restar de 15; pero añadiendo á este número una hora, que vale 60 minutos, se convierte en 75 minutos, y restando 35, se hallan 40 para resto. Por último, añadiendo una unidad al sustraendo siguiente, se convierte en 8 horas, que restadas de 13 dan 5.

3.°	8 duros		
	4 »	13 reales	20 maravedises
	3 »	6 »	14 »

Como no hay maravedises en el minuendo, se toma un real, que vale 34 maravedises, y restando 20, se halla 14 para la diferencia. Añadiendo una unidad al sustraendo parcial siguiente, se convierte en 14, que no tiene minuendo de que restarse; pero se toma un duro, que vale 20 reales, y restando 14 se halla 6. Por último, se añade una unidad al sustraendo siguiente, y restando 5 de 8, se obtiene 3 duros para la diferencia.

IV.—Multiplicacion.

309. La operacion de multiplicar tiene por objeto, dados dos números hallar un tercero, que sea respecto de uno de los dados, lo que el otro es respecto de la unidad; por consiguiente en la multiplicacion se consideran cuatro cantidades, que se comparan dos á dos: el producto con el multiplicando, y el multiplicador con la unidad; y la definicion exige que los resultados de estas comparaciones sean iguales.

Para que dos cantidades sean comparables entre sí, es necesario que sean de igual naturaleza; luego *el producto es de igual naturaleza que el multiplicando, y el multiplicador de igual naturaleza que la unidad.*

Para efectuar la comparacion del multiplicador con la unidad, es necesario reducirle á la especie de ésta, y como aquel expresa la relacion cuantitativa, y por tanto abstracta, del producto y multiplicando, resulta que *el multiplicador debe reducirse á la especie de la unidad, y considerarse despues como un número abstracto.*

El objeto práctico de la multiplicacion de magnitudes concretas, es generalmente hallar el valor de varias unidades, ó de una fraccion de unidad, cuando se conoce el valor de ésta.

El valor conocido de la unidad, se tomará siempre para multiplicando, el número de unidades ó la fraccion de unidad, cuyo valor se busca, será el multiplicador.

Si los factores son incomplejos, y el multiplicador es de la especie de la unidad, cuyo valor es el multiplicando, la operacion se efectúa como la de números abstractos. Si el multiplicador es de otra especie, se reduce ante todo á la especie de la unidad.

EJEMPLOS.

1.° *Un metro de tela cuesta* 54 *reales, ¿cuánto costarán* 23 *metros?*

54 reales, valor de la unidad, es el multiplicando, y 23 el multiplicador; luego el valor de 23 metros es

$$54 . 23 = 1242 \text{ reales.}$$

2.° *En una hora recorre un móvil* $3427\frac{2}{3}$ *varas, ¿qué distancia recorrerá en* $\frac{3}{5}$ *de hora?*

El multiplicando es $3427\frac{2}{3}$ varas; luego el camino recorrido es

$$3427\ \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 2056\ \frac{3}{5} \text{ varas.}$$

3.° *Una máquina eleva un cuerpo á* 3,7 *metros de altura en* 1 *minuto, ¿á qué altura elevará el mismo cuerpo en* 0,13 *de horas?*

El multiplicador 0,13 de hora, reducido á minutos, da $0{,}13 \times 60 = 7{,}8$ minutos; luego la altura buscada será

$$3{,}7 \times 7{,}8 = 28{,}86 \text{ metros.}$$

4.° *Un pié cúbico de agua á* 4 *grados pesa* 47,018 *libras, ¿cuánto pesarán* 400 *pulgadas cúbicas de agua en iguales condiciones?*

El multiplicador 400 pulgadas cúbicas, reducido á piés cúbicos, da $\frac{400}{1728}=\frac{25}{108}$ piés cúbicos; luego el peso buscado será

$$47,018 \times \frac{25}{108} = 10,884 \text{ libras.}$$

Si alguno de los factores ó ambos son complejos, se reduce el multiplicando á incomplejo de una especie cualquiera, y el multiplicador á la especie de la unidad cuyo valor es el multiplicando.

EJEMPLOS.

1.° *Una fanega de trigo cuesta* 42 *reales y* 25 *maravedises, ¿cuánto costarán* 28 $\frac{3}{8}$ *cahices?*

El multiplicando reducido á reales se convierte en $\frac{1453}{34}$ reales, y el multiplicador convertido en fanegas vale $\frac{681}{2}$ fanegas; luego el valor buscado es

$$\frac{1453}{34}\times\frac{681}{2}=\frac{989493}{68} \text{ reales} = 14551 \text{ reales } 12\frac{1}{2} \text{ marav.}$$

2.° *Valiendo una libra* 3 *duros,* 14 *reales y* 18 *maravedises, ¿cuánto valdrán* 11 *libras y* 12 *onzas?*

El multiplicando, convertido en reales, es igual á $\frac{2534}{34}$ reales; y el multiplicador, reducido á libras, equivale á $\frac{188}{16}=\frac{47}{4}$ libras; luego el valor buscado es

$$\frac{1267}{17}\times\frac{47}{4}=\frac{59549}{68} \text{ reales} = 875 \text{ reales } 24\frac{1}{2} \text{ maravedises.}$$

3.° *Un decímetro cúbico de agua pesa un kilógramo, ¿cuánto pesarán* 3 *metros cúbicos y* 28 *decímetros cúbicos?*

Reducido el multiplicador á decímetros cúbicos, se convierte en 3028^{dm^3}; luego el producto será

$$1 \times 3028 = 3028^{Kg}.$$

Si el multiplicando es complejo y el multiplicador, des-

pues de reducido á la especie de la unidad, es un número entero, se efectúa la operacion multiplicando cada incomplejo del primer factor por el segundo, y extrayendo de cada producto parcial las unidades superiores que contenga, para añadirlas al siguiente.

EJEMPLOS.

1.° *El caño de una fuente arroja en un minuto* 5 *azumbres,* 3 *cuartillos y* 2 *copas de agua, ¿cuánta arrojará en* $\frac{1}{12}$ *de hora?*

Reducido el multiplicador á minutos, resulta $\frac{60}{12} = 5$ minutos.

	5 azumbres		3 cuartillos		2 copas	
					5	
	25	»	15	»	10	»
ó	29	»	1	»	2	»

2.° *Costando una libra* 2 *duros,* 15 *reales y* 20 *maravedises, ¿cuánto costarán* $\frac{3}{5}$ *de arroba?*

$$\frac{3}{5} \text{ de arroba} = \frac{3 \cdot 25}{5} = 15 \text{ libras.}$$

	2 duros		15 reales		20 maravedises	
					15	
ó sea	41	»	13	»	28	»

310. MÉTODO DE LAS PARTES ALÍCUOTAS.

Propongámonos resolver la cuestion siguiente:

Una libra cuesta 8 *duros,* 16 *reales y* 24 *maravedises, ¿cuánto costarán* 15 *libras,* 13 *onzas y* 6 *adarmes?*

El multiplicador se compone, en primer lugar, de 15 libras, cuyo valor se obtiene multiplicando por 15 el precio de una libra. Además contiene 13 onzas, que se descomponen en 8 onzas ó $\frac{1}{2}$ libra, 4 onzas ó $\frac{1}{4}$ libra y 1 onza ó $\frac{1}{16}$ de libra; los valores de estas partes alícuotas de libra se calcularán fácilmente dividiendo el valor de una por 2, el de 8 onzas por 2, y el de cuatro onzas por 4. Por último, los 6 adarmes del multiplicador, se descomponen en 4 y 2 adarmes, ó sea $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ de onza, que se calcularán por medio de divisiones muy sencillas.

Sumando los valores parciales, es evidente que se obtendrá el de 15 libras, 13 onzas y 6 adarmes.

Disposicion práctica.

Valor de una libra....	8 duros	16 reales	24 maravedises.
	15 libras	13 onzas	6 adarmes.
Valor de 15 libras.....	120 duros	240 reales	360 maravedises.
Valor de 8 onzas.....	4 »	8 »	12 »
Valor de 4 onzas.....	2 »	4 »	6 »
Valor de 1 onza......	» »	11 »	1,5 »
Valor de 4 adarmes.	» »	2 »	25,875 »
Valor de 2 adarmes.	» »	1 »	12,9375 »
	139 »	18 »	10,3125 »

V.—Division.

311. La division tiene por objeto, segun sabemos, descomponer un producto en dos factores, siendo uno de estos conocido.

El producto es de igual naturaleza que el multiplicando, y el multiplicador se considera como abstracto, despues de reducido á la especie de la unidad; y como cualquiera de estos factores puede ser divisor, es claro que debemos considerar dos casos: 1.° que el dividendo y divisor sean de la misma naturaleza; 2.° que sean de distinta naturaleza.

312. Primer caso. Si el dividendo y divisor son de la misma naturaleza, el cociente se debe considerar como abstracto, y la cuestion propuesta indicará su naturaleza.

Ejemplos.

1.° *En un minuto arroja el caño de una fuente 8 litros de agua, ¿cuántos minutos empleará en arrojar 70 litros?*

Es claro que la cantidad que se busca será igual al número de veces que 70 contiene á 8, esto es

$$\frac{70}{8} \text{ minutos} = 8 \text{ minutos } 45 \text{ segundos.}$$

2.° *Una vara de tela cuesta* 25 *reales, ¿cuántas varas podrán comprarse con* 60 *duros?*

Necesitamos dividir 60 duros por 25 reales, para lo que es necesario que el dividendo y divisor sean de la misma especie.

60 duros, reducidos á reales, dan 1200 reales; luego el cociente que buscamos será

$$\frac{1200}{25} = 48 \text{ varas.}$$

3.° *Una familia consume en un mes* 4 *libras y* 4 *onzas de café, ¿cuánto tiempo tardará en consumir* 1 *arroba,* 8 *libras y* 6 *onzas?*

Debemos dividir 1 arroba, 8 libras, 6 onzas por 4 libras, 4 onzas, reduciendo antes los números á incomplejos. El dividendo reducido á onzas vale 534 onzas, y el divisor 68; luego el número buscado es

$$\frac{534}{68} \text{ meses} = 7 \text{ meses } 29 \text{ dias.}$$

313. Segundo caso. Si el dividendo y divisor son de distinta naturaleza, el cociente es de igual naturaleza que el dividendo y el divisor debe considerarse como número abstracto.

El objeto práctico de este caso es generalmente hallar el valor de la unidad, conociendo el de un número entero ó fraccionario de igual naturaleza.

Ejemplos.

1.° 76 *kilógramos han costado* 627 *reales, ¿cuánto vale el kilógramo?*

El precio del kilógramo es el cociente de 627 reales por 76, esto es, $\frac{627}{76} = 8{,}25$ reales.

2.° 23 *arrobas han costado* 920 *reales, ¿cuánto vale una libra?*

El dividendo es 920 reales, y el divisor debe reducirse á la especie de la unidad cuyo valor se pide, en este caso á libras, lo que da $23 \,.\, 25 = 575$; luego el valor de una libra es

$$\frac{920}{575} = 1{,}60 \text{ reales.}$$

3.° *Con* 20 *libras y* 12 *onzas de hilo se tejen* 175 *varas,* 2 *piés y 10 pulgadas de tela, ¿cuánta de la misma clase se obtendrá con una arroba de hilo?*

El dividendo 175 varas, 2 piés y 10 pulgadas, reducido á una cualquiera de sus especies, la vara por ejemplo, se convierte en $\frac{6634}{36}$ varas, y el divisor, reducido precisamente á arrobas, da $\frac{332}{400}$ de arroba; luego el número buscado será

$$\frac{6134}{36} : \frac{332}{400} = 232 \text{ varas próximamente.}$$

Si reducido el divisor á la especie cuyo valor se busca, resulta un número entero, se dividen sucesivamente por el divisor los números incomplejos que constituyen el dividendo, empezando por las unidades superiores, y agregando cada residuo, reducido á la especie inferior inmediata, al dividendo parcial siguiente.

EJEMPLO.

12 *arrobas y* 13 *libras cuestan* 180 *duros,* 14 *reales y* 30 *maravedises, ¿cuánto cuesta una libra?*

El divisor, reducido á libras, da 313. Dejaremos, pues, el dividendo en su forma compleja, y dispondremos la operacion del modo siguiente.

180 duros 14 rs. 30 marav.	313
20	0 duros 11 rs. 18 $\frac{210}{313}$ maraved.
3600	
14	
3614 reales.	
484	
171	
34	
684	
513	
5814	
30	
5844 maravedises.	
2714	
210	

CAPITULO TERCERO.

PROBLEMAS USUALES DE ARITMÉTICA.

I.—Cantidades proporcionales.

314. El cociente ó razon de dos magnitudes concretas de igual naturaleza es un número abstracto [312], que se obtiene reduciendo las magnitudes á la misma especie y dividiendo los números que resultan, como si fuesen abstractos.

Diremos, pues,

RAZON Ó RELACION *de dos magnitudes concretas, de igual naturaleza, es la relacion abstracta de los números que se obtienen reduciendo dichas magnitudes á la misma unidad.*

Así, para hallar la relacion de 23 varas 1 pié y 4 varas 2 piés, reduciremos los dos números á la misma especie, el pié por ejemplo, y dividiendo los números 70 piés y 14 piés que resultan, el cociente abstracto 5 es la razon buscada, esto es,

$$\frac{23 \text{ varas } 1 \text{ pié}}{4 \text{ varas } 2 \text{ piés}}=\frac{70 \text{ piés}}{14 \text{ piés}}=\frac{70}{14}=5.$$

Si redujéramos á varas, sería

$$\frac{23 \text{ varas } 1 \text{ pié}}{4 \text{ varas } 2 \text{ piés}}=\frac{\frac{70}{3} \text{ varas}}{\frac{14}{3} \text{ varas}}=\frac{70 \, . \, 3}{14 \, . \, 3}=5.$$

315. Cuando dos cantidades de igual naturaleza están ligadas, por las condiciones de una cuestion, á otras dos entre sí de igual naturaleza, de tal modo que la relacion de las primeras sea igual á la de las últimas, se dice que aquellas son *proporcionales* á éstas y recíprocamente.

En algunas cuestiones la proporcionalidad se admite como evidente; otras veces corresponde su demostracion á ciencias distintas de la Aritmética; y tambien ocurren casos en que, no siendo las cantidades rigurosamente proporcionales, se tratan por convenio como si lo fueran.

Si los numeradores de las razones son números correspondientes, segun el enunciado de la cuestion, y los denominadores tambien, las cantidades son *directamente proporciona-*

les; pero si al numerador de la primera razon corresponde el denominador de la segunda, y al denominador de aquella el numerador de ésta, las cantidades son *inversamente proporcionales.*

316. En todos los casos deberá ordenarse la proporcion de modo que si la primera razon es mayor que la unidad, lo sea tambien la segunda, y al contrario; lo que se consigue observando la regla siguiente:

Si el numerador de la primera razon es mayor que su denominador, el numerador de la segunda fraccion debe ser mayor que el denominador de la misma, de modo que la proporcion dirá: la cantidad mayor ó menor de una especie partida por su homogénea, es igual á la cantidad mayor ó menor de la otra especie partida por su homogénea.

317. Puesto que la razon de dos magnitudes concretas es igual á la de los números abstractos que se obtienen reduciéndolas á la misma unidad, *podemos convertir toda igualdad fraccionaria, cuyos términos sean magnitudes concretas, en otra de números abstractos, y hacer, por tanto, aplicacion de las propiedades demostradas en la teoría de igualdades fraccionarias.*

II.—Regla de tres.

318. Todo problema en que entran uno ó mas pares de cantidades conocidas, homogéneas y proporcionales á las de otro par de cantidades homogéneas, una de ellas desconocida, se llama *regla de tres.*

Si en el problema entra solo un par de cantidades conocidas y proporcionales á las de otro par de cantidades, una de ellas desconocida, la regla de tres se llama *simple.*

Si entran dos ó mas pares de cantidades conocidas, la regla de tres se llama *compuesta.*

Regla de tres simple.

319. Problema 1.° a *metros de tela han costado* b *reales. ¿Cuánto costarán* a' *metros de la misma clase de tela?*

Llamemos x al valor de los a' metros, y dispongamos las cantidades en la forma siguiente:

Metros.		Reales.
a	. . . .	b
a'	. . . .	x

La naturaleza de la cuestion manifiesta que el valor de la tela es proporcional al número de metros.

La primera razon es $\frac{a}{a'}$, y la dificultad del problema consiste en averiguar si la segunda razon debe ser $\frac{b}{x}$, ó al contrario $\frac{x}{b}$; pero es evidente que cuanto mayor sea el número de metros, costarán mas; luego si $a > a'$, será $b > x$; y si $a < a'$, será $b < x$. En cualquiera de estos casos, la condicion del número 316 quedará satisfecha escribiendo la proporcion en la forma

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{x}, \text{ de donde } x = b \times \frac{a'}{a}.$$

Luego, *siempre que suponiendo aumentada una de las cantidades, deba aumentar su correspondiente, la proporcionalidad es directa; y para hallar la incógnita se multiplica el número de su especie por una fraccion, que tiene por numerador la cantidad correspondiente á la incógnita y por denominador la correspondiente á su homogénea.*

PROBLEMA 2.° a *obreros hacen una obra en* b *dias. ¿En cuántos dias harán* a' *obreros otra igual?*

Llamemos x al número de dias que emplearán los a' obreros, y dispongamos las cantidades en la forma siguiente:

Obreros.	Dias.
a.	b
a'	x

La naturaleza de la cuestion manifiesta que el número de dias es proporcional al de obreros. La primera razon es $\frac{a}{a'}$, y sólo falta averiguar si la segunda debe ser $\frac{b}{x}$ ó $\frac{x}{b}$; pero es evidente que cuanto mayor sea el número de obreros, emplearán menos tiempo en hacer la obra; luego si $a > a'$, será $b < x$; y si $a < a'$, será $b > x$. En ambos casos, la condicion del número 316 quedará satisfecha escribiendo la proporcion en la forma

$$\frac{a}{a'} = \frac{x}{b}, \text{ de donde } x = b \times \frac{a}{a'}.$$

Luego, *siempre que suponiendo aumentada una de las cantidades deba disminuir su correspondiente, la proporcionalidad es inversa; y para hallar la incógnita se multiplica el número de su especie por una fraccion, que tiene por numerador la cantidad correspondiente á la homogénea de la incógnita y por denominador la correspondiente á ésta.*

EJEMPLOS.

1.° 15 *litros de mercurio á cero grados, pesan* 204 *kilógramos. ¿Cuánto pesan* 34,25 *litros de mercurio en iguales condiciones?*

Dispuesta la operacion como sigue

Litros.	Kilógramos.
15.	204
34,25.	x

diremos: si aumenta el número de litros, aumenta el de kilógramos; luego

$$x = 204 \times \frac{34,25}{15} = 465,8 \text{ kilógramos.}$$

2.° 2500 *hombres tienen víveres para* 60 *dias. ¿Cuántos dias durarán los mismos víveres á* 3000 *hombres?*

Dispuesta la operacion como sigue

Hombres.	Dias.
2500.	60
3000.	x

diremos: si el número de hombres aumenta, la duracion de los víveres disminuye; luego

$$x = 60 \times \frac{2500}{3000} = 50 \text{ dias.}$$

REGLA DE TRES COMPUESTA.

320. PROBLEMA. a *obreros, trabajando* b *horas al dia, concluyen en* c *dias una obra, cuya dificultad está representada por* d. *¿En cuántos dias concluirán* a′ *obreros, trabajando* b′ *horas al dia, una obra cuya dificultad sea* d′?

Llamemos x á los dias que emplearán en hacer la segunda obra los a' obreros, y dispongamos las cantidades en la forma siguiente:

Obreros.	Horas.	Dias.	Dificultad.
a.	b.	c.	d.
a'	b'	x.	d'

Suponiendo iguales las horas de trabajo y la dificultad, la cuestion se reduce á esta otra:

a *obreros hacen una obra en* c *dias;* a' *obreros, ¿en cuántos dias la harán?*

Esta regla de tres es simple, y dá para valor de la incógnita $c \times \frac{a}{a'}$.

Suponiendo ahora igual la dificultad solamente, se presenta esta otra cuestion:

si a' *obreros, trabajando* b *horas, hacen una obra en* $c \times \frac{a}{a'}$ *dias; trabajando* b' *horas, ¿en cuántos dias la concluirán?*

Tambien esta regla de tres es simple, y la incógnita es $c \times \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}$.

Por último, suponiendo desigual la dificultad diremos: *si* a' *obreros, trabajando* b' *horas, emplean* $c \times \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}$ *dias en hacer una obra cuya dificultad es* d, *¿cuánto tiempo invertirán si la dificultad es* d'?

Esta regla de tres simple resuelve el problema propuesto, y el valor de la incógnita es

$$x = c \times \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{d'}{d}.$$

Luego, *en una regla de tres compuesta, la cantidad incógnita se obtiene multiplicando su homogénea por las razones que se forman dividiendo las cantidades de cada par. Cuando un par es directamente proporcional al de la incógnita, se pone por numerador la cantidad correspondiente á ésta, y la otra por denominador; y al contrario si los mencionados pares son inversamente proporcionales.*

Ejemplos.

1.° 1500 *obreros han abierto un canal, de* 70 *kilómetros de largo,* 18 *metros de ancho y* 4 *metros de hondo, en* 520 *dias.*

¿Cuánto tiempo emplearán 580 obreros en abrir otro canal de 50 kilómetros de largo, 20 metros de ancho y 3,80 de profundidad?

Obreros	Largo.	Ancho.	Hondo.	Dias.
1500	70	18	4	520
580	50	20	3,80	x

El primer par es inversamente proporcional al de la incógnita, y los tres restantes lo son directamente; luego

$$x = 520 \times \frac{1500}{580} \times \frac{50}{70} \times \frac{20}{18} \times \frac{3.80}{4} = 247 \text{ dias.}$$

2.° *Un caño, que arroja en 6 minutos 90 litros de agua, ha llenado un estanque, de 14 metros de largo, 4 de ancho y 1,50 de hondo, en 93 $\frac{1}{3}$ horas. Otro caño, que arroja en 5 minutos 120 litros de agua, ¿en cuánto tiempo llenará un estanque, de 12 metros de largo, 5 de ancho y 0,80 de hondo?*

Minutos.	Litros.	Largo.	Ancho.	Hondo.	Horas.
6. . .	90. . .	14. . .	4. . .	1,50. .	93 ⅓
5. . .	120. . .	12. . .	5. . .	0,80. .	x

Los litros son inversamente proporcionales á las horas; los demás pares están en razon directa, luego

$$x = 93\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{90}{120} \times \frac{12}{14} \times \frac{5}{4} \times \frac{0,80}{1,50} = 33\frac{1}{3} \text{ horas.}$$

Método de reduccion á la unidad.

321. Para resolver por este método una regla de tres simple, *se halla la cantidad correspondiente á una unidad de la especie del par conocido, y despues la correspondiente á un número de unidades de la misma especie indicado por la pregunta del problema. El resultado será la incógnita del mismo.*

Cuando la regla de tres es compuesta, se descompone en varias reglas de tres simples, segun se ha visto en el número 320, resolviendo cada una por la anterior regla.

Ejemplos.

1.° 13 *libras equivalen á* 6 *kilógramos. ¿A cuántos kilógramos equivalen* 52 *libras?*

Libras.	Kilógramos.
13.	6
52.	x

Si 13 libras equivalen á 6 kilógramos, 1 libra equivaldrá á $\frac{6}{13}$ kilógramos, y 52 libras á

$$\frac{6}{13} \times 52 = 24 \text{ kilógramos.}$$

2.° *Con una velocidad de 40 kilómetros por hora, recorre un tren su trayecto en 18 horas. ¿En cuánto tiempo recorrerá igual trayecto si la velocidad es de 24 kilómetros?*

Kilómetros.	Horas.
40.	18
24.	x

Si con la velocidad 40 recorre el tren su trayecto en 18 horas, con la velocidad 1 lo recorrerá en 18×40 horas, y con la velocidad 24 en

$$\frac{18 \times 40}{24} = 30 \text{ horas.}$$

3.° *Cada página de un manuscrito tiene 26 líneas de 44 letras cada una, y ocupa 240 páginas. ¿Cuántas páginas de impresion ocupará, teniendo cada página 33 líneas de 47 letras?*

Líneas.	Letras.	Páginas.
26. . . .	44. . . .	240
33. . . .	47. . . .	x

Suponiendo igual el número de letras de cada línea, diremos: si teniendo cada página 26 líneas ocupa el manuscrito 240 páginas, teniendo una línea ocuparia el manuscrito 240×26, y teniendo 33 ocuparia $\frac{240 \times 26}{33}$ páginas.

Tomando ahora en cuenta el número de letras de cada línea, diremos: si siendo las letras 44, se ocupan $\frac{240 \times 26}{33}$ páginas, teniendo una letra cada línea se ocuparian $\frac{240 \times 26 \times 44}{33}$ páginas, y teniendo 47, será

$$x = \frac{240 \times 26 \times 44}{33 \times 47} = 177 \text{ páginas.}$$

Escolio. Las operaciones necesarias para calcular la incógnita por este método, son las mismas que exige el anterior.

III.—Interés.

322. *Se llama* interés *de un capital, la ganancia obtenida por el préstamo ó empleo del mismo, durante un tiempo determinado.*

Para calcular los intereses de un modo uniforme, se conviene en que 100 unidades de dinero produzcan al dueño del capital una cierta cantidad al cabo de un año; y el número abstracto que expresa esta cantidad, se llama *tanto por ciento.*

Si cada 100 pesetas producen en un año 7 pesetas de ganancia, se dice que el capital produce el 7 por ciento, que se expresa por la abreviatura 7 p°/o.

El interés puede ser *simple* y *compuesto.*

Es *simple* cuando se perciben los intereses cada seis meses, cada año, en general, por periodos iguales de tiempo, sin que el capital varíe.

El interés es *compuesto* cuando los intereses que produce un capital en un periodo de tiempo, se acumulan al capital, formando así uno nuevo, que aumenta al fin de cada periodo.

Vamos á ocuparnos tan sólo del interes simple.

Es evidente que *los intereses de dos capitales en el mismo tiempo, son directamente proporcionales á los capitales.*

Se admite como cierto que *los intereses de un capital en tiempos diferentes, son directamente proporcionales á los tiempos.*

Problema. *Hallar el interés de un capital* C, *durante un tiempo* t, *al tanto por ciento* r.

Este problema puede enunciarse diciendo:

El capital 100 *produce en* 1 *año* r *unidades. ¿Cuánto producirá el capital* C *en* t *años?*

La cuestion, enunciada así, es una regla de tres compuesta.

Llamemos i al interés del capital C, y dispongamos las cantidades como sigue:

Capital.	Tiempo.	Interés.
100. . . .	1.	r
C. . . .	t.	i

Segun se ha dicho, el interés está en razon directa del capital y del tiempo, luego

$$i = r \times \frac{C}{100} \times \frac{t}{1}, \text{ ó } i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}.$$

Los términos de la razon $\frac{t}{1}$ deben ser de la misma especie; por consiguiente si el tiempo se expresa en meses, dicha razon se convierte en $\frac{t}{12}$, y si en dias en $\frac{t}{360}$[1]. Los respectivos valores de i serán

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}, \quad i = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000};$$

donde vemos que el número 100 deberá sustituirse por 1200, si el tiempo se expresa en meses; y por 36000, si se expresa en dias.

De la expresion $i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ se deduce fácilmente:

$$r = \frac{100 \cdot i}{C \cdot t}, \quad t = \frac{100 \cdot i}{C \cdot r}, \quad C = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t}.$$

Por consiguiente, siempre que tres de las cantidades C, r, t, i, sean conocidas, podrá hallarse la cuarta.

EJEMPLOS.

1.° *Hallar el interés de* 120000 *pesetas en un año al* 8 p°/o.

C vale 120000, r vale 8, t vale 1, luego

$$i = \frac{120000 \cdot 8}{100} = 9600 \text{ pesetas.}$$

2.° *Hallar el interés de* 4500 *duros en* 4 *meses al* 7 p°/o.

C vale 4500, r vale 7, t vale 4, y 100 se debe sustituir por 1200, luego

$$i = \frac{4500 \cdot 7 \cdot 4}{1200} = 105 \text{ duros.}$$

3.° 80000 *reales han producido en* 270 *dias un interés de* 3000 *reales. ¿Cuál ha sido el tanto por ciento?*

C vale 80000, i vale 3000, t vale 270, y 100 debe sustituirse por 36000, luego

---

1 En el comercio se considera generalmente el año de 360 dias.

$$r = \frac{36000 \,.\, 3000}{80000 \,.\, 270} = 5.$$

4.° *¿Cuánto tiempo ha estado impuesto un capital de 100000 reales, que al 8 p°/₀ ha producido 2400 reales?*

i vale 2400, C vale 100000, r vale 8, luego

$$t = \frac{100 \times 2400}{100000 \,.\, 8} = \frac{3}{10} \text{ año} = 108 \text{ dias.}$$

5.° *¿Qué capital deberá imponerse al 7 p°/₀ para recibir cada 6 meses 12000 reales?*

i vale 12000, r vale 7, t vale 6, y 100 debe sustituirse por 1200, luego

$$C = \frac{1200 \,.\, 12000}{7 \,.\, 6} = 342857 \text{ reales.}$$

IV.—Descuento.

323. *Se llama* LETRA DE CAMBIO *un documento mercantil, por el que una persona manda á otra pagar cierta cantidad á la órden de una tercera persona.*

En la letra se expresa si el pago debe hacerse *á la vista* ó *á plazo,* esto es, en el acto de presentarla ó pasado un tiempo, indicado en la misma letra, que se cuenta desde el dia siguiente á la presentacion de ésta ó á su fecha.

PAGARÉ *es tambien un documento mercantil, por el que una persona se obliga á pagar á la órden de otra una cantidad, en determinada fecha.*

Las letras á plazo y los pagarés tienen dos valores: el que expresa el documento, llamado *valor nominal;* y el que tiene antes de su vencimiento, llamado *valor actual.*

El valor actual de una letra ó pagaré aumenta á medida que se aproxima su vencimiento, y es igual al nominal cuando espira el plazo.

Si el tenedor de una letra ó pagaré la hace efectiva antes de su vencimiento, recibe por ella el valor actual, y la diferencia entre éste y el nominal, se llama *descuento.*

Hay dos clases de descuento, llamados *comercial* y *racional.*

El primero es proporcional al valor nominal de la letra y al tiempo que falta para su vencimiento. Es, pues, el interés del valor nominal en dicho tiempo.

El segundo es proporcional al valor actual de la letra y al tiempo. Es, pues, el interés de la cantidad que realmente anticipa el que toma la letra.

Estos intereses se calculan por un tanto por 100, llamado *tanto por ciento de descuento.*

324. PROBLEMA. *Descontar comercialmente una letra de* N *reales, que vence al fin del tiempo* t, *siendo* r *el tanto por* 100 *de descuento.*

El interés de N reales en el fiempo t, al tanto por ciento r, es $\frac{N \cdot r \cdot t}{100}$, y este interés es el descuento.

El valor actual de la letra será

$$N - \frac{N \cdot r \cdot t}{100} = N\left(1 - \frac{r \cdot t}{100}\right).$$

En la práctica, 100 se sustituye por 1200, si el tiempo se expresa en meses; y por 36000, si el tiempo se expresa en dias.

EJEMPLO.

Descontar comercialmente una letra de 40000 *pesetas, que vence á los* 70 *dias, al* 5 *p°/o de descuento.*

N vale 40000, r vale 5, t vale 70, y 100 se reemplaza por 36000; luego el descuento será

$$\frac{40000 \cdot 5 \cdot 70}{36000} = 388{,}88 \text{ pesetas.}$$

El valor actual es

$$40000 - 388{,}88 = 39611{,}12 \text{ pesetas.}$$

325. PROBLEMA. *Descontar racionalmente una letra de* N *reales, que vence al fin del tiempo* t, *siendo* r *el tanto por* 100 *de descuento.*

100 reales, al cabo del tiempo t, valen $100 + r \cdot t$; y el valor actual de la letra, que representaremos por A, al cabo del mismo tiempo, se convierte en el nominal N. Tenemos, pues, las cantidades siguientes, que son directamente proporcionales.

Valor actual.	Valor al vencimiento.
100.	$100 + rt$
A.	N

Luego, la incógnita

$$A = 100 \times \frac{N}{100 + rt}.$$

Si el tiempo se expresa en meses, el interés de 100 unidades en t meses será $\frac{rt}{12}$, y la cantidad $100+rt$ deberá sustituirse en el valor de A por $100+\frac{rt}{12}$, lo que dará

$$A=100\times\frac{N}{100+\frac{rt}{12}}=1200\times\frac{N}{1200+rt}.$$

Del mismo modo, es fácil ver que si el tiempo se expresa en dias, será

$$A=36000\times\frac{N}{36000+rt}.$$

Luego, si el tiempo se expresa en dias ó en meses, se sustituye en el valor de A cada número 100 por 36000 ó 1200.

EJEMPLO.

Descontar racionalmente una letra de 40000 *pesetas, que vence á los* 70 *dias, al* 5 *p°/o de descuento.*

N vale 40000, r vale 5, t vale 70, y en lugar de 100 pondremos 36000, luego

$$A=36000\times\frac{40000}{36000+5\cdot 70}=39614{,}86 \text{ pesetas.}$$

V.—Regla de compañía.

326. *La* REGLA DE COMPAÑÍA *tiene por objeto repartir entre varios socios la ganancia ó pérdida que ha tenido la sociedad.*

Tres casos pueden ocurrir en la resolucion de este problema.

1.° Que los capitales de los socios sean diferentes y estén el mismo tiempo en la sociedad.

2.° Que los capitales sean iguales y los tiempos diferentes.

3.° Que los capitales y los tiempos sean diferentes.

La resolucion de estos casos se funda en los principios siguientes:

1.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales en un mismo tiempo, son proporcionales á los capitales.*

2.° *Las ganancias ó pérdidas de un capital en tiempos diferentes, son proporcionales á los tiempos.*

3.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales en tiempos diferentes, son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos respectivos.*

El primer principio es evidente; el segundo se admite convencionalmente como cierto; el tercero es consecuencia de los otros dos.

En efecto, llamemos C y C' á los capitales, t y t' á los tiempos, x y x' á las ganancias ó pérdidas; y dispongamos estas cantidades en la forma siguiente:

Capitales.	Tiempos.	Ganancias ó pérdidas.
C.	t.	x
C'	t'	x'

Siendo las ganancias ó pérdidas directamente proporcionales á los capitales y á los tiempos, tendremos

$$x = x' \times \frac{C}{C'} \times \frac{t}{t'},\ \text{de donde}\ \frac{x}{x'} = \frac{C\,.\,t}{C'\,.\,t'}.$$

327. Los principios anteriores manifiestan que todos los casos de la regla de compañía están comprendidos en la cuestion general siguiente.

Problema. *Dividir un número dado* N *en partes proporcionales á varios números dados* a, b, c.

Sean x, y, z las partes en que se quiere dividir el número N.

Segun el enunciado del problema, los números x, y, z deben satisfacer á las dos condiciones:

$$x + y + z = N,\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

De la segunda se deduce [200]

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a},\ \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{y}{b},\ \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{z}{c},$$

pero, en virtud de la primera condicion, es $x + y + z = N$; luego

$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{x}{a},\ \frac{N}{a+b+c} = \frac{y}{b},\ \frac{N}{a+b+c} = \frac{z}{c}.$$

De estas igualdades se deduce [191]

$$x = \frac{N}{a+b+c} \times a,\ y = \frac{N}{a+b+c} \times b,\ z = \frac{N}{a+b+c} \times c.$$

Luego, *para dividir un número en partes proporcionales á otros dados, se divide el número por la suma de éstos, y el cociente se multiplica sucesivamente por cada uno de ellos.*

Ejemplos.

1.° *Los capitales de tres socios son, durante el mismo* *tiempo,* 70000 *reales,* 40000 *reales y* 50000 *reales respectivamente; la ganancia es de* 24000 *reales. ¿Cuál es la parte de cada uno?*

Dividiendo 24000 en partes proporcionales á los capitales, resulta

Ganancia del 1.er *socio*... $\dfrac{24000}{70000+40000+50000}\times 70000=10500$ reales.

Idem del 2.º.. $\dfrac{24000}{70000+40000+50000}\times 40000=\ 6000$ »

Idem del 3.º.. $\dfrac{24000}{70000+40000+50000}\times 50000=\ 7500$ »

2.º *Tres socios ponen capitales iguales, el primero por* 11 *meses, el segundo por* 10 *y el tercero por* 9; *sufren una pérdida de* 15000 *reales. ¿Cuánto pierde cada uno?*

Dividiendo 15000 en partes proporcionales á los tiempos, se obtiene

Pérdida del 1.er *socio.* $\dfrac{15000}{11+10+9}\times 11=5500$ reales.

Pérdida del 2.º.......... $\dfrac{15000}{11+10+9}\times 10=5000$ »

Pérdida del 3.º.......... $\dfrac{15000}{11+10+9}\times 9=4500$ »

3.º *Tres socios forman compañía: el primero pone* 8000 *reales por* 7 *meses, el segundo* 50000 *reales por* 4 *meses, y el tercero* 100000 *reales por* 9 *meses; la ganancia es de* 28900 *reales. ¿Cuánto corresponde á cada uno?*

Hay que dividir el número 28900 en partes proporcionales á los productos 8000 . 7, 50000 . 4, 100000 . 9 de los capitales por los tiempos.

Así se obtiene

Parte del 1.er *socio* $\dfrac{28900}{8000.7+50000.4+100000.9}\times 8000.7=1400$ rs.

Idem del 2.º $\dfrac{28900}{8000.7+50000.4+100000.9}\times 50000.4=5000$ »

Idem del 3.º $\dfrac{28900}{8000.7+50000.4+100000.9}\times 100000.9=22500$ »

VI.—Regla de aligacion.

328. *La* REGLA DE ALIGACION *tiene dos objetos principales:*
1.° *Hallar el precio de una mezcla, conociendo las cantidades mezcladas y sus respectivos precios;*
2.° *Hallar las cantidades que deben mezclarse, conociendo sus precios respectivos y el precio de la mezcla.*

El primer problema se llama regla de aligacion *directa*, y el segundo, regla de aligacion *inversa*.

329. Las reglas de aligacion directa se resuelven hallando los valores de las cantidades mezcladas y sumándolos, con lo que se obtiene el valor de la mezcla. Para hallar el precio de la misma, ó sea el valor de la unidad, se divide el valor de la mezcla por la suma de las cantidades mezcladas.

EJEMPLOS.

1.° *Se mezcla 27 kilógramos de café de 18 reales el kilógramo, con 10 kilógramos de 23 reales y 15 de 20, ¿cuál es el precio de la mezcla?*

27 kilógramos	á 18 reales	valen	486 reales
10 »	23 »	»	230 »
17 »	20 »	»	340 »
54 kilógramos de mezcla		valen	1056 reales;

luego el precio de la mezcla es

$$\frac{1056}{54} = 19\frac{5}{9} \text{ reales.}$$

2.° *Se ligan 36 kilógramos de plata cuya ley es de 950 milésimas, con 20 cuya ley es de 835 milésimas, con 10 cuya ley es 720 milésimas y con 13 de plata pura. ¿Cuál es la ley de la aleacion?*

36 kilógramos	de 950 milésimas	contienen	34200 milésimas
20 »	835 »	»	16700 »
10 »	720 »	»	7200 »
13 »	de plata pura	»	13000 »
79 kilógramos de liga contienen. . . .			71100 milésimas;

luego la ley de la aleacion es

$$\frac{71100}{79} = 900 \text{ milésimas.}$$

330. Las reglas de aligacion inversa se resuelven por medio del teorema siguiente:

Si se mezclan cantidades de dos especies, dichas cantidades están en razon inversa de las diferencias de sus precios al precio de la mezcla.

Sean x é y las cantidades que deben mezclarse, p y p' sus precios respectivos, y m el precio de la mezcla. Supongamos que $p > p'$.

Es evidente que el precio de la mezcla debe estar comprendido entre los precios de las especies mezcladas, de modo que $p > m$ y $m > p'$.

Cada unidad de clase superior, cuyo valor es p, vendida al precio de la mezcla m, produce una pérdida $p-m$, por csnsiguiente x unidades de dicha clase, producirán una pérdida de $x\,(p-m)$.

Cada unidad de clase inferior, cuyo valor es p', vendida al precio m de la mezcla, produce una ganancia $m-p'$, luego y unidades de dicha clase, producirán una ganancia de $y\,(m-p')$.

Pero al hacer la mezcla de las especies, no se quiere perder ni ganar; luego la pérdida que producen las x unidades de clase superior debe ser igual á la ganancia que producen las y unidades de clase inferior, esto es,

$$x\,(p-m) = y\,(m-p'),$$

de donde se deduce

$$\frac{x}{y} = \frac{m-p'}{p-m},$$

igualdad que demuestra el teorema.

Para verificarse esta igualdad es necesario solamente que la razon de los valores asignados á x é y, sea igual á la razon $\frac{m-p'}{p-m}$, lo que tendrá lugar haciendo $x = m-p'$, $y = p-m$, y como los términos de un quebrado $\frac{x}{y}$ se pueden multiplicar ó dividir por un número cualquiera, sin que se altere su relacion, se deduce que multiplicando ó dividiendo los números $m-p'$ y $p-m$ por un mismo número, se obtendrán tantas soluciones como se quiera.

Ejemplo.

Se quiere mezclar vino de 50 reales el decálitro con vino de 68 reales, para vender la mezcla á 62 reales. ¿Cuántos decálitros de cada especie se mezclarán?

Precio de la mezcla.	Precio de las especies.	Cantidades.
62	50.	6
	68.	12

Restando 50 del precio de la mezcla se obtienen los decálitros de la clase superior, que son 12; y restando 62 de 68, los de la clase inferior, que son 6.

Multiplicando los números 6 y 12 por un mismo número, obtendremos otras soluciones. Así, pueden mezclarse 12 decálitros de la clase superior y 6 de la inferior, ó 24 de la primera y 12 de la segunda etc.

Si las especies que deben mezclarse son mas de dos, se reduce el problema al que acabamos de resolver considerando las especies dos á dos, en un órden cualquiera, si bien cuidando de que sus precios comprendan al de la mezcla, hasta haberlas considerado todas.

EJEMPLOS.

1.° *Se mezclan varias clases de trigo de* 23,50 *pesetas,* 28,75 *pesetas,* 20 *pesetas y* 26,25 *pesetas el hectólitro. ¿Cuántos hectólitros de cada clase se tomarán para vender la mezcla á* 25,50 *pesetas el hectólitro?*

Precio de la mezcla.	Precios de las especies.	Cantidades.
	23,50.	3,25
25,50	28,75.	2
	20.	0,75
	26,25.	5,50

2.° *Se liga plata de* 720 *milésimas, de* 850, *de* 950, *de* 600 *y plata pura. ¿Cuánta deberá tomarse de cada especie para obtener plata de* 900 *milésimas?*

Ley de la liga.	Leyes de las especies.	Cantidades.
	720.	50
	850.	100
900	950.	180... 300
	600.	50
	1000.	50

Considerando las leyes 950 y 720, que comprenden la ley de la liga, resultan los números 50 y 180; considerando otras dos 1000 y 850, por ejemplo, se obtienen 100 y 50; por último, considerando otras dos 950 y 600, hemos hallado 50 y 300.

331. Si en la igualdad fraccionaria

$$\frac{x}{y} = \frac{m - p'}{p - m},$$

que dá para x é y infinidad de valores, damos á x ó y un valor determinado, la otra incógnita tendrá tambien un sólo valor.

Lo mismo sucederá cuando el valor de $x + y$ ó de $x - y$ sea determinado.

En efecto:

1.° *¿Cuántas libras de café de* 12 *reales deberá mezclarse con* 24 *libras de* 7 *reales para vender la mezcla á* 9 *reales?*

Sabemos que en este caso $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$; pero y vale 24, luego

$$\frac{x}{24} = \frac{2}{3}, \quad x = \frac{2 \times 24}{3} = 16 \text{ libras.}$$

2.° *¿Cuánto trigo de* 38 *reales fanega se mezclará con trigo de* 47 *reales, para obtener* 270 *fanegas y venderlas á* 43 *reales?*

Tenemos $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$, de donde $\frac{x + y}{x} = \frac{4 + 5}{4}$,

pero $x + y = 270$, luego $\frac{270}{x} = \frac{9}{4}$,

$$x = \frac{270 \, . \, 4}{9} = 120 \text{ fanegas.}$$

Del mismo modo, $\frac{x + y}{y} = \frac{4 + 5}{5}$,

pero $x + y = 270$, luego $\frac{270}{y} = \frac{9}{5}$,

de donde $y = \frac{270 \times 5}{9} = 150$ fanegas.

3.° *Se quiere mezclar vino de* 76 *reales decálitro con otra clase de vino de* 60 *reales, debiendo exceder la cantidad de la clase primera á la otra en* 20 *decálitros. ¿Cuántos decálitros de cada clase debemos mezclar para vender la mezcla á* 72 *reales?*

Tenemos $\frac{x}{y} = \frac{12}{4}$, luego $\frac{x - y}{x} = \frac{12 - 4}{12}$;

pero $x - y = 20$, luego $\frac{20}{x} = \frac{8}{12}$,

$$x = 30 \text{ decálitros.}$$

Del mismo modo, $\frac{x-y}{y}=\frac{12-4}{4}$;

pero $x-y=20$, luego $\frac{20}{y}=\frac{8}{4}$,

$$y = 10 \text{ decálitros.}$$

VII.—Regla conjunta.

332. Se llaman *cantidades equivalentes,* las cantidades que reducidas á la misma unidad son iguales.

Tales son, 20 varas y 60 piés; una libra esterlina y 96,92 reales etc.

La propiedad de ser equivalentes dos cantidades se expresa por medio del signo *igual á* colocado entre ellas; por ejemplo 5 metros = 6 varas, y la expresion recibe el nombre de *equivalencia.*

Teorema. *Los productos ordenados de varias equivalencias, tales que el primer miembro de cada una sea de la especie del segundo miembro de la anterior, son equivalentes, siendo el primer producto de la primera de todas las especies y el segundo de la última.*

Sean las equivalencias

a varas $= b$ metros,
c metros $= d$ yardas,
e yardas $= f$ piés del Rhin.

Queremos demostrar que

$a \times c \times e$ varas $= b \times d \times f$ piés del Rhin.

Multiplicando la primera equivalencia por c y la segunda por b, considerados como números abstractos, resulta

$a \times c$ varas $= b \times c$ metros,
$c \times b$ metros $= b \times d$ yardas.

De estas dos se deduce evidentemente esta otra

$a \times c$ varas $= b \times d$ yardas.

Multiplicando esta por e y la tercera de las propuestas por el producto $b \times d$, resultan

$a \times c \times e$ varas $= b \times d \times e$ yardas,
$b \times d \times e$ yardas $= b \times d \times f$ piés del Rhin.

De donde

$a \times c \times e$ varas $= b \times d \times f$ piés del Rhin.

333. La *regla conjunta* tiene por objeto reducir una magnitud concreta á otra equivalente de diferente especie,

por medio de equivalencias que ligan la primera con la segunda.

Para resolver los problemas de regla conjunta, se escriben varias equivalencias de modo que el primer miembro de cada una sea de la especie del segundo de la anterior, y el segundo miembro de la última de la misma especie que el primero de la primera. Multiplicando despues ordenadamente las equivalencias, se deducirá fácilmente el valor de la incógnita.

EJEMPLOS.

1.° *Reducir* 180 *varas á yardas, sabiendo que* 61 *varas equivalen á* 51 *metros,* 43 *metros á* 137 *piés del Rhin,* 34 *piés del Rhin á* 35 *piés ingleses, y que la yarda tiene tres piés ingleses.*

Llamemos x al número de yardas equivalente á 180 varas, y escribamos las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} x \text{ yardas} &= 180 \text{ varas} \\ 61 \text{ varas} &= 51 \text{ metros} \\ 43 \text{ metros} &= 137 \text{ piés del Rhin} \\ 34 \text{ piés del Rhin} &= 35 \text{ piés ingleses} \\ 3 \text{ piés ingleses} &= 1 \text{ yarda} \end{aligned}$$

Multiplicándolas ordenadamente resulta

$$x \,.\, 61 \,.\, 43 \,.\, 34 \,.\, 3 \text{ yardas} = 180 \,.\, 51 \,.\, 137 \,.\, 35 \,.\, 1 \text{ yardas}$$

luego $x = \dfrac{180 \,.\, 51 \,.\, 137 \,.\, 35 \,.\, 1}{61 \,.\, 43 \,.\, 34 \,.\, 3} = 164{,}38$ yardas.

2.° *Reducir* 520 *libras esterlinas á reales, suponiendo que* 3 *libras esterlinas se cambian por* 20 *thalers,* 4 *thalers por* 15 *francos y* 5 *francos por* 19 *reales.*

Llamemos x al número de reales equivalente á 520 libras esterlinas, y escribamos las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} x \text{ reales} &= 520 \text{ libras esterlinas,} \\ 3 \text{ libras} &= 20 \text{ thalers,} \\ 4 \text{ thalers} &= 15 \text{ francos,} \\ 5 \text{ francos} &= 19 \text{ reales.} \end{aligned}$$

Multiplicándolas ordenadamente resulta

$$x \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \text{ reales} = 520 \,.\, 20 \,.\, 15 \,.\, 19 \text{ reales,}$$

de donde

$$x = \frac{520 \,.\, 20 \,.\, 15 \,.\, 19}{3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 520 \,.\, 5 \,.\, 19 = 49400 \text{ reales.}$$

EJERCICIOS.

I. Convertir 7 duros, 12 reales, 15 maravedises en incomplejo de la especie inferior.

II. Convertir 30 hectáreas, 28 áreas, 35 metros cuadrados en incomplejo de la especie inferior.

III. Convertir 12 arrobas, 22 libras, 10 onzas en incomplejo de libras y de arrobas.

IV. Convertir 28 kilógramos, 3 decágramos, 7 decígramos en incomplejo de kilógramos, hectógramos, decágramos y gramos.

V. Convertir 5723 maravedises en complejo.

VI. Convertir 4579008 milímetros en complejo.

VII. Convertir $\frac{19}{7}$ de cántara en complejo.

VIII. Convertir $\frac{27}{16}$ de kilómetro en complejo.

IX. Reducir 15 arrobas, 20 libras á kilógramos.

X. Reducir 45 decálitros, 6 litros á cántaras.

XI. Reducir 25 fanegas y 100 varas cuadradas á hectáreas.

XII. Reducir 50,4528 hectáreas á fanegas.

XIII. Convertir 34 piés cúbicos en decímetros cúbicos.

XIV. Convertir 78 metros cúbicos en varas cúbicas.

XV. Un obrero teje en un dia 20 varas, 2 piés, 9 pulgadas de tela, y otro teje en el mismo tiempo 29 varas, 1 pié, 6 pulgadas. ¿Cuánta tela tejen los dos juntos? ¿En cuánto excede el trabajo del segundo obrero al del primero?

XVI. En un dia vende un fabricante cuatro partidas de género: la primera de 28 arrobas, 15 libras, 12 onzas; la segunda de 14 arrobas, 10 libras y 10 onzas; la tercera de 20 arrobas, 8 onzas; y la cuarta de 40 arrobas, 23 libras; pero su fábrica produce en el mismo dia 60 arrobas, 19 libras, 6 onzas. ¿En cuánto habrá aumentado ó disminuido la existencia en sus almacenes?

XVII. Una persona presta á otra 637 duros, y convienen en que la primera recibirá anualmente en recompensa 1 real y 20 maravedises por duro ¿Cuánto debe recibir al fin del año?

XVIII. Una libra cuesta 8 reales ¿cuánto costarán 7 arrobas, 20 libras y 12 onzas?

XIX. Un comerciante compra 257 arrobas á 3 duros 15 reales la arroba, y las vende á 4 duros 9 reales, ¿qué ganancia ha obtenido?

XX. Un comerciante compra tres partidas de género á 4 duros, 8 reales, 17 maravedises la arroba. La primera partida es de 15 arrobas, 20 libras, 10 onzas; la segunda de 19 arrobas, 16 libras, 15 onzas; y la tercera de 13 arrobas, 12 libras, 7 onzas, ¿cuánto cuestan las tres partidas?

XXI. Un comerciante compra 37 arrobas, 15 libras, 8 onzas á 12 duros, 15 reales y 17 maravedises la arroba; y las vende á 15 duros, 10 reales. ¿Qué ganancia obtiene?

XXII. 2 varas, 1 pié y 5 pulgadas de una barra de hierro pesan una arroba. ¿Cuánto pesarán 24 varas, 8 pulgadas de la misma barra?

XXIII. Un móvil recorre en un minuto 76 varas, 9 pulgadas. ¿Qué tiempo empleará en recorrer 500 varas?

XXIV. 20 arrobas 17 libras de género han costado 986 reales, 25 maravedises. ¿Cuál es el precio de la arroba?

XXV. Una máquina de vapor extrae de una mina en 3 horas y 35 minutos, 728 quintales de carbon de piedra. ¿Qué cantidad extrae por hora?

XXVI. Un comerciante vende 79 arrobas y 20 libras por 300 duros, 15 reales y 27 maravedises, y obtiene una ganancia de 89 duros, 18 reales y 25 maravedises. ¿A qué precio compró la arroba?

XXVII. Un comerciante compra tres fardos de género: el primero pesa 200 libras, el segundo $1\frac{3}{5}$ veces menos que el primero, y el tercero los $\frac{6}{5}$ de la diferencia entre los primeros; vende todo el género en 4150 reales, y obtiene una ganancia de 830 reales. ¿Cuánto le costó cada libra y á qué precio la vendió?

XXVIII. En un molino hay una piedra de cuarzo, que pesa 70 arrobas. ¿Cuánto pesará otra igual de basalto, suponiendo que los pesos de dos trozos iguales de basalto y de cuarzo estén representados por los números 13 y 15?

XXIX. Un salon permanece iluminado cada noche durante 6 horas por 17 luces que cuestan al mes 272 reales. ¿Cuánto costará cada mes iluminar con 12 luces iguales otro salon que estará abierto 7 horas?

XXX. 40 obreros, trabajando 9 horas al dia, hacen una obra de 270 metros en 70 dias; 35 obreros, trabajando 8 horas los 14 primeros dias, y 12 los dias restantes ¿cuánto tardarán en hacer 492 metros?

XXXI. Una máquina eleva 560 kilógramos de peso en 35 minutos á una altura de 20 metros. ¿A qué altura elevará en 59 minutos un peso de 320 kilógramos, suponiendo que á la altura de 9 metros se aumenta el peso hasta 490 kilógramos?

XXXII. ¿Qué capital produce en 270 dias 12000 reales de interés al 10 p%?

XXXIII. Una persona presta 80000 al 6 p%, y recibe entre capital é intereses 82000 reales. ¿Cuánto tiempo estuvo prestado el capital?

XXXIV. Una persona presta á otra cierta cantidad al 7 p% de interés anual, y recibe al cabo de 10 meses, 127000 reales por el capital y los intereses. ¿Qué capital prestó?

XXXV. Una persona presta dos capitales al mismo tanto por ciento:

el primer capital es de 130000 reales y lo presta por 220 dias, y el segundo de 50000 por 170 dias. ¿Cuál debe ser el tanto por ciento para que los intereses reunidos de los dos capitales importen 9275 reales?

XXXVI. Un comerciante emplea 50000 reales en un negocio, y gana el 25 p°/₀ del capital. ¿Cuál es la ganancia?

XXXVII. Una partida de géneros adeuda por derechos de introduccion 2575 reales al 25 p°/₀ de su valor. ¿Cuál es este valor?

XXXVIII. Un comisionista que ha vendido géneros por valor de 55000 reales, recibe 3150 reales por su comision. ¿Cuál es el tanto por ciento de comision?

XXXIX. Descontar comercialmente un pagaré de 70000 reales que vence á los 160 dias, al 7 p°/₀.

XL. Por una letra de 50000 reales, que vence á los 90 dias, se reciben 49000 reales. ¿Cuál es el tanto por ciento de descuento?

XLI. Dividir el número 4580 en partes proporcionales á los números 68, 79, 54 y 78.

XLII. Dividir el número 2960 en partes proporcionales á los números $\frac{4}{5}$, 1 y $\frac{2}{5}$.

XLIII. Dividir 76114 reales entre tres personas, de modo que la segunda reciba el 6 p°/₀ mas que la primera, y la tercera el 8 p°/₀ mas que la segunda.

XLIV. Dividir el número 74000 en tres partes tales que la razon de la primera y segunda sea $\frac{4}{5}$, y la de la segunda y tercera $\frac{5}{2}$.

XLV. ¿Cuánto trigo de 36 reales fanega debe mezclarse con otra especie de 46 reales, para obtener 200 fanegas y venderlas á 42 reales?

XLVI. Una mezcla de trigo contiene 100 hectólitros, y vale 9522 reales; las especies mezcladas han sido dos de 85 reales y 99 reales el hectólitro. ¿Cuántos hectólitros de cada especie contiene la mezcla?

XLVII. Una aleacion de plata pesa 40 kilógramos, y su ley es de 900 milésimas; para obtenerla se ha ligado plata de 800 y de 960 milésimas. ¿Cuántos kilógramos de cada especie han entrado en la aleacion?

XLVIII. Un objeto de oro ligado con plata, tiene 240 centímetros cúbicos de volúmen, y pesa 10 kilógramos. Cada centímetro cúbico de oro puro pesa 19,26 gramos, y cada centímetro cúbico de plata 10,47 gramos. ¿Cuántos kilógramos de oro y cuántos de plata contiene el objeto?

XLIX. Reducir 420 varas prusianas á varas de Castilla, suponiendo que 48 varas prusianas equivalen á 52 metros, y que 5 metros equivalen á 6 varas castellanas.

L. Reducir 380 piés cúbicos ingleses á varas cúbicas de Castilla, suponiendo que 59 piés cúbicos ingleses equivalen á 54 piés cúbicos prusianos, que 841 piés cúbicos prusianos equivalen á 26 metros cúbicos, y que 7 metros cúbicos equivalen á 12 varas cúbicas de Castilla.

ÁLGEBRA.

ÁLGEBRA.

Introduccion.

1. Álgebra *es la ciencia de las leyes generales de la cantidad.*

2. La aritmética considera las determinaciones particulares de la cantidad ó sea la cantidad representada por números; pero este medio de representacion es impropio para descubrir leyes generales.

Tanto es así, que en los teoremas de aritmética, si bien representábamos con frecuencia las cantidades por números, prescindíamos de los valores particulares de estos y solamente atendíamos á los caractéres generales; por manera que en realidad se consideraba el número como un símbolo general representativo de todos los números de su especie.

Aun procediendo así, no tenian las leyes descubiertas el grado de generalidad de que eran susceptibles: si las cantidades estaban representadas por números enteros, sólo á estos eran aplicables los razonamientos, y por tanto la ley quedaba demostrada tan sólo para los mismos, siendo necesario dar nuevas demostraciones, si habia de hacerse extensiva á toda clase de números.

En la resolucion de problemas, la representacion de la cantidad por medio del número, presenta otro inconveniente: si las operaciones se efectúan á medida que se van presentando, el resultado final, ó sea la solucion, es un número que conviene al problema particular propuesto, pero que no expresa la ley de su construccion, esto es, la serie de operaciones que deben efectuarse con los datos, en todos los problemas de igual naturaleza, para determinar la incógnita; y si dichas operaciones se dejan indicadas, será imposible distinguir aquellos datos que tengan igual valor y los números que originen las reducciones.

3. Como medio de generalizacion se representan en Álgebra las cantidades por las letras del alfabeto. Por consiguiente, una letra cualquiera designará en lo sucesivo una cantidad en general, y sólo cuando alguna cantidad deba tener circunstancias particulares, se limitará la significacion de su signo atribuyéndole estas circunstancias.

Así, por ejemplo, a, b, c representan tres cantidades ó números, que podrán ser enteros, fraccionarios ó inconmensurables; pero si la cuestion propuesta lo exige, a podrá representar exclusivamente un número entero, un número par, un número comprendido entre ciertos límites etc., con sólo suponer que existen tales circunstancias, y tener en cuenta esta hipótesis en el curso del razonamiento.

4. Para aclarar estas consideraciones, presentaremos dos ejemplos.

1.° Teorema. *La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, es igual á la diferencia entre los cuadrados de dichas cantidades.*

Sean 10 y 6 estas cantidades.

Tenemos $(10+6)(10-6) = 16 \,.\, 4 = 64$

$10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64;$

luego $(10+6)(10-6) = 10^2 - 6^2.$

Este razonamiento se apoya solamente en los valores de los números propuestos; luego hemos comprobado un hecho particular, pero no se ha demostrado la ley general enunciada.

Si, prescindiendo ahora de los valores numéricos de 10 y 6, atendemos sólo á las propiedades comunes á todos los números enteros, diremos: multiplicar $10+6$ por $10-6$ equivale á repetir el multiplicando por sumando $10-6$ veces; pero si se repite 10 veces y despues 6 veces, restando los resultados, la diferencia contendrá al multiplicando $10-6$ veces, y será el producto buscado; así pues

$$(10+6)(10-6) = (10+6)\,10 - (10+6)\,6.$$

Debemos efectuar ahora dos multiplicaciones: la primera $(10+6)\,10$ se reduce evidentemente á repetir cada sumando 10 veces; y la segunda $(10+6)\,6$ á repetirlos 6 veces; luego

$$(10+6)(10-6) = 10 \,.\, 10 + 6 \,.\, 10 - 10 \,.\, 6 - 6 \,.\, 6,$$

ó $(10+6)(10-6)=10^2+6.10-10.6-6^2$;

pero $6.10-10.6=0$;

luego $(10+6)(10-6)=10^2-6^2$.

Este razonamiento se apoya en una propiedad comun á todos los números enteros, que es la siguiente: el producto de un número por otro entero es una suma de tantos números iguales al multiplicando, como unidades tiene el multiplicador; por consiguiente es aplicable á todos los números enteros; pero no á los fraccionarios ni á los inconmensurables.

Si queremos extender la ley á toda clase de números y que tenga el grado de generalidad de que es susceptible, representaremos las cantidades por letras, y apoyaremos el razonamiento en propiedades comunes á toda clase de números.

Vamos, pues, á demostrar que

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Considerando á $a-b$ como un número, será

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b),$$

ó

$$(a+b)(a-b)=(a-b)a+(a-b)b;$$

efectuando las multiplicaciones indicadas en el segundo miembro, resulta

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$$

ó

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Ahora queda demostrada la ley con toda la generalidad posible, segun al principio la habíamos enunciado.

2.° Problema. *Hallar dos cantidades, conociendo la suma y la diferencia de las mismas.*

Sea 64 la suma y 12 la diferencia.

Si representamos por x la menor de las cantidades, la mayor será $x+12$, y la suma de las dos $x+x+12$ ó $2x+12$; pero esta suma es igual, segun el enunciado, á 64; luego

$$2x+12=64.$$

Restando 12 de los dos miembros resulta

$$2x=52,$$

de donde

$$x=26.$$

Siendo 26 la menor de las cantidades, la mayor será $26+12$, ó sea 38.

Los números pedidos son, pues, 26 y 38; pero estos números no expresan la ley, con arreglo á la cual están construidos, por lo que tendremos necesidad de repetir los razonamientos anteriores, cuando se trate de resolver una cuestion de igual naturaleza que la propuesta.

Representemos, ahora, por s la suma dada y por d la diferencia, y sea x la cantidad menor.

La mayor será $x+d$, y la suma de ambas $x+x+d$ ó $2x+d$; como esta suma debe ser igual á s, tendremos:

$$2x+d=s.$$

Restando d de los dos miembros será

$$2x=s-d,$$

de donde
$$x=\frac{s-d}{2}.$$

Añadiendo á este valor la diferencia d tendremos la cantidad mayor, que será

$$\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}=\frac{s+d}{2}.$$

Las cantidades menor y mayor, que hemos hallado, pueden escribirse en la forma

$$\frac{s}{2}-\frac{d}{2} \quad \text{y} \quad \frac{s}{2}+\frac{d}{2}.$$

Estas expresiones, llamadas *fórmulas*, son las leyes de construccion de dichas cantidades, ó sea la representacion de las operaciones que debemos efectuar con los datos del problema, para determinar las incógnitas.

Siendo las fórmulas reglas, escritas en lenguaje algebráico, para resolver los problemas generales, pueden traducirse al lenguaje vulgar. Las que acabamos de obtener se traducen del modo siguiente:

Dadas la suma y la diferencia de dos cantidades, la mayor es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y la menor á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.

Por medio de la fórmula se resuelven todos los problemas que sólo difieren del propuesto en los valores particulares de los datos.

Para esto, se sustituye cada letra por el valor particular del dato que representa, y se efectúan las operaciones indicadas.

Por ejemplo, si la suma de las cantidades es 64 y la diferencia 12, sustituiremos en las fórmulas s por 64 y d por 12, y obtendremos

$$\frac{64-12}{2}=26, \quad \frac{64+12}{2}=38.$$

5. Los signos de la adicion y de la sustraccion son en Álgebra los mismos que en Aritmética.

La multiplicacion se expresa tambien por el signo $\times$ ó por un punto. Sin embargo, si los factores son letras, se escriben unas á continuacion de otras sin interponer ningun signo.

Así, el producto de las cantidades a, b, c se expresará por $a \times b \times c$ ó $a \,.\, b \,.\, c$, y mas comunmente por abc.

Las sumas y diferencias indicadas, que entren como factores, se escribirán dentro de un paréntesis; por ejemplo, si los factores son $a + b + c$, $d - e + f$ y m, el producto se escribe

$$(a + b + c)(d - e + f)\, m.$$

La division se expresa por el signo : que empleábamos en Aritmética. Si el dividendo, el divisor ó ambos son sumas ó diferencias indicadas, se escribirán tambien dentro de un paréntesis; así el cociente de $a - b + c$ por m se escribe

$$(a - b + c) : m;$$

el de $a + b$ por $m - n$ se escribe

$$(a + b) : (m - n).$$

Por último, las potencias y raices se expresan como en Aritmética.

Cuando una cantidad se repite varias veces por sumando, se simplifica la escritura anteponiendo á la cantidad un número que exprese las veces que está repetida por sumando. Este número se llama *coeficiente;* así

$$a + a \text{ se representa por } 2a.$$

$$a^9 b + a^9 b + a^9 b \text{ por } 3a^9 b.$$

El coeficiente de $2a$ es 2; el de $3a^9 b$ es 3.

No debe confundirse el coeficiente con el exponente: aquel expresa las veces que una cantidad se repite por sumando; éste las veces que una cantidad se repite por factor. La expresion $3a$ equivale á $a + a + a$, mientras que a^3 es igual á $a \,.\, a \,.\, a$; si a vale 5, será

$$3a = 5 + 5 + 5 = 15,$$

$$a^3 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125.$$

Una cantidad sin coeficiente expreso, tiene siempre implícitamente el coeficiente *uno*.

En efecto: $a^3 b = 1 \times a^3 b = 1a^3 b$.

Una cantidad sin exponente, puede considerarse con el exponente *uno;* así $a = a^1$.

6. EXPRESION ALGEBRÁICA Ó CANTIDAD LITERAL *es el conjunto de varias letras separadas por los signos de las operaciones.*

Se llama así por ser la expresion, en lenguaje algebráico, de una cantidad cualquiera.

$2a^2 b$, $2a + 3b^2$, son expresiones algebráicas, que significan respectivamente

$$a . a . b + a . a . b, \qquad a + a + b . b + b . b + b . b.$$

Por estos ejemplos se comprenderá que los signos algebráicos abrevian considerablemente la representacion de las cantidades.

7. CANTIDAD RACIONAL *es toda expresion algebráica que no contiene ningun signo radical.*

Tales son $a - b$, $\quad a^2 b + \dfrac{c^2}{d}$.

CANTIDAD IRRACIONAL Ó RADICAL *es toda expresion algebráica que contiene algun signo radical.*

Por ejemplo, $\quad a + 3\sqrt{b}$.

CANTIDAD ENTERA *es toda expresion que no contiene ningun radical ni denominador.*

8. Una expresion algebráica no ligada á ninguna otra por el signo de la adicion ni por el de la sustraccion, se llama *monomio*, ó expresion de un término; así $3ab^4$ es un monomio.

La cantidad literal compuesta de varios monomios ligados entre sí por los signos de la suma ó de la resta, se llama *polinomio*.

$5a^2 - \sqrt{3ab} + \dfrac{3a - 2b}{7}$ es un polinomio, compuesto de los términos $5a^2$, $-\sqrt{3ab}$, $+\dfrac{3a - 2b}{7}$.

Si el polinomio consta de dos términos, se llama *binomio*, si de tres *trinomio* etc.

9. VALOR NUMÉRICO *de una expresion algebráica es el número que se obtiene sustituyendo las letras por valores particulares, y efectuando las operaciones indicadas.*

Sea la expresion $5a^2b^3c$.

Si suponemos $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, el valor numérico será $\quad 5 . 4^2 . 2^3 . 1 = 640$.

Sea el polinomio $2a^3b - ab^3 - b^3$.

Si suponemos $a = 2$, $b = 1$, los términos valen respectivamente 16, 2, 1; luego el valor del polinomio es

$$16 - 2 - 1 = 13.$$

Si suponemos $a = 4$, $b = 2$, el polinomio vale

$$256 - 32 - 32 = 192.$$

El valor numérico de un polinomio no varía alterando el órden de sus términos, siempre que conserven estos sus signos.

Es claro que

$$a + b - c - d = b - c + a - d,$$

puesto que, sea cualquiera el órden en que se efectúen las operaciones, siempre a y b, que son sumandos, producirán en el resultado un aumento igual á sus respectivos valores, y c y d, que son sustraendos, una disminucion.

10. *Se llama* GRADO *de un monomio entero el número de factores literales que lo componen.*

El monomio $7a^4 b^3 c = 7aaaabbbc$ es de *octavo* grado.

Es evidente que *el grado de un monomio se obtiene sumando los exponentes de sus letras.*

Se llama GRADO *de un polinomio, con respecto á una de sus letras, al mayor de los exponentes de ésta en el polinomio.*

El polinomio

$$a^2 x^4 - 5a^3 x^3 - a^6$$

es de *cuarto* grado, con respecto á la letra x, y de *sexto*, con respecto á la letra a.

Un polinomio se llama HOMOGÉNEO *cuando todos sus términos son del mismo grado.*

El polinomio anterior es homogéneo.

GRADO *de un polinomio homogéneo es el grado de cualquiera de sus términos.*

El último polinomio es de *sexto* grado.

11. Al descomponer un polinomio

$$a + b - c + d - e$$

en sus diferentes términos, cada uno de estos va precedido del signo que le ligaba al anterior; los términos del polinomio propuesto son, pues, a, $+ b$, $- c$, $+ d$, $- e$.

Los que están precedidos del signo *mas* se llaman términos *aditivos* ó *positivos*, y los precedidos del signo *menos* se llaman *sustractivos* ó *negativos*.

Los primeros tienden á producir en el valor numérico del polinomio un aumento igual á su valor, y los segundos una disminucion.

Si el primer término no está precedido de ningun signo, se entiende que es aditivo ó que lleva el signo mas.

LIBRO PRIMERO.

CÁLCULO ALGEBRÁICO.

CAPÍTULO PRIMERO.

OPERACIONES CON LAS CANTIDADES LITERALES ENTERAS.

I.—Preliminares y reduccion de términos semejantes.

12. Las definiciones de adicion, sustraccion, multiplicacion y division dadas en Aritmética, son completamente generales; por lo que las adoptamos en Álgebra sin modificarlas.

Como en esta ciencia se representan las cantidades por medio de expresiones literales, en cuya formacion es frecuente que no haya analogía, ocurre muchas veces que las operaciones no pueden efectuarse, y nos limitamos á indicarlas por medio de los signos respectivos; pero otras veces se efectúan realmente, obteniendo resultados, que no permiten descubrir cuáles hayan sido los datos.

13. *Se llaman* TÉRMINOS SEMEJANTES *los monomios compuestos de las mismas letras con iguales exponentes.*

Los términos $5a^3x$ y $-3a^3x$ son semejantes.

Tambien lo son $4a^5x^6$, $7a^5x^6$ y $-6a^5x^6$.

Propongámonos reducir á uno solo, los términos semejantes de un polinomio.

Si $4a^3x^2$ y $5a^3x^2$ son términos de un polinomio, es evidente que pueden reducirse á $9a^3x^2$.

Los términos $-6a^4x^5$ y $-2a^4x^5$, tambien es claro que equivalen á $-8a^4x^5$.

Luego, *para reducir dos términos semejantes de signos iguales, se suman los coeficientes, y al resultado se antepone el signo de los términos.*

Sean ahora los términos $9a^3b^7$ y $-7a^3b^7$; es evidente que

$$9a^3b^7 - 7a^3b^7 = 2a^3b^7.$$

Sean $8ab^5$ y $-12ab^5$ otros dos términos; es claro que

$$8ab^5 - 12ab^5 = 8ab^5 - 8ab^5 - 4ab^5,$$

y como $\quad 8ab^5 - 8ab^5 = 0,$

los términos propuestos se reducen á $-4ab^5$; pero el coeficiente 4 se hubiera obtenido restando 8 de 12; luego

Para reducir dos términos semejantes de signos contrarios, se restan los coeficientes, y al resultado se antepone el signo del mayor.

Vamos á reducir los términos semejantes del polinomio

$$2a^5b^4 - 5ab^6 + 7ab^6 + a^5b^4 + 6a^5b^4.$$

Como el órden de los términos no influye en el valor del polinomio, podemos reunir los términos semejantes, y será

$$2a^5b^4 + a^5b^4 + 6a^5b^4 - 5ab^6 + 7ab^6;$$

reduciendo ahora el primer término con el segundo, y el resultado con el tercero, se obtiene para valor de los tres primeros términos $9a^5b^4$; reduciendo igualmente los otros dos, resulta $+2ab^6$; luego el polinomio queda reducido á

$$9a^5b^4 + 2ab^6.$$

En la práctica, no se altera el órden de los términos del polinomio: lo mas breve es recorrer con la vista todos los términos y reducir los semejantes, á medida que se van presentando, sin escribir mas que el resultado final.

Así, en el polinomio

$$9ax^7 - 6ax^6 + 5ax^7 \mp 6ax^7 - 4ax^6,$$

diremos: $9ax^7 + 5ax^7 = 14ax^7, 14ax^7 - 6ax^7 = 8ax^7;$

$$-6ax^6 - 4ax^6 = -10ax^6;$$

luego el polinomio reducido es

$$8ax^7 - 10ax^6.$$

Del mismo modo se encuentra

$$4a^8b - 5a^8b + 6a^8b = 5a^8b$$

$$ax^5 - 3a^4x^6 - 6a^4x^6 + 5ax^5 = 6ax^5 - 9a^4x^6.$$

II.—Adicion.

14. Supongamos que se quieren sumar las cantidades $2a$, b y c^5; es evidente que la suma es

$$2a + b + c^5.$$

Sean las cantidades $3x^3$ y $5x^3$; la suma será

$$3x^3 + 5x^3 = 8x^3.$$

Si los sumandos son los polinomios

$$a - b,\quad 2a + c - d,\quad \text{y}\quad 4a - 5c,$$

observaremos que sumar los dos primeros es añadir á $a - b$ el resultado de efectuar las operaciones indicadas en $2a + c - d$; si llamamos R á este resultado, la suma de los dos primeros polinomios será

$$a - b + R \quad \text{ó} \quad R + a - b \quad [9];$$

poniendo en vez de R el polinomio $2a + c - d$, dicha suma se convierte en

$$2a + c - d + a - b,$$

y alterando el órden, en

$$a - b + 2a + c - d.$$

Por el mismo razonamiento se demostraria que la suma de $a - b + 2a + c - d$ y del tercer sumando $4a - 5c$ es

$$a - b + 2a + c - d + 4a - 5c,$$

que es la suma de los tres polinomios propuestos.

Observando la composicion de esta suma, se deduce la regla siguiente:

Para sumar varios polinomios se escriben los sumandos unos á continuacion de otros, conservando á cada término el signo respectivo.

En la práctica se efectúa la reduccion de términos semejantes, si los hay, la que se facilita colocando los sumandos unos debajo de otros.

Ejemplo. Sean los sumandos $13a^5b^4 + 6a^4b + 7ab^6$, $9a^5b^4 - 13a^4b - ab^6 - 4a^2b^7$ y $-4a^5b^4 + 2ab^6$.

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{rrrr}
13a^5b^4 & + \; 6a^4b & + \; 7ab^6 & \\
9a^5b^4 & - \; 13a^4b & - \; ab^6 & - \; 4a^2b^7 \\
-\; 4a^5b^4 & & + \; 2ab^6 & \\
\hline
18a^5b^4 & - \; 7a^4b & + \; 8ab^6 & - \; 4a^2b^7.
\end{array}$$

III.—Sustraccion.

15. Es evidente que la diferencia de las cantidades $3a$ y $2b$ es $3a - 2b$.

Si las cantidades son $7abc$ y $3abc$, la diferencia será

$$7abc - 3abc = 4abc.$$

Supongamos que se trate de restar los polinomios

$$5x - 2y + 3z \quad \text{y} \quad 2x^8 - 7y.$$

La diferencia será un polinomio que sumado con el sustraendo produzca el minuendo; este polinomio es

$$5x - 2y + 3z - 2x^8 + 7y.$$

En efecto: añadiendo el sustraendo $2x^8 - 7y$, se obtiene

$$5x - 2y + 3z - 2x^8 + 7y + 2x^8 - 7y,$$

que reduciendo se convierte en el minuendo; luego

Para restar dos polinomios se escribe el minuendo y á continuacion el sustraendo, cambiando el signo de cada uno de sus términos.

En la práctica se efectúa la reduccion de términos semejantes, si los hay, lo que se facilita colocando el sustraendo debajo del minuendo.

Ejemplo. Restar los polinomios $8ab^9 - 7a^5b - 6a^8b^6$ y $3ab^9 - 5a^5b$.

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{r} 8ab^9 - 7a^5b - 6a^8b^6 \\ 3ab^9 - 5a^5b \qquad\quad \\ \hline 5ab^9 - 2a^5b - 6a^8b^6 \end{array}$$

16. Conviene en muchos casos considerar un polinomio como la diferencia de otros dos.

Para conseguir este objeto, se forma el sustraendo con varios términos del polinomio, teniendo cuidado de cambiar el signo de cada uno. Así

$$5a^3 - 2b + 3c^2 - 2a - 7b + 5c = 5a^3 - 2b + 3c^2 - (2a + 7b - 5c)$$

$$a + b - c + d = a - (-b + c - d).$$

En efecto: si efectuamos las sustracciones indicadas en los segundos miembros, obtendremos los primeros.

IV.—Multiplicacion.

17. Tratemos de hallar el producto de dos potencias de una misma cantidad.

Sea $a^3 \times a^5$. El factor a^3 es un producto de *tres* factores iguales á a, esto es, aaa; y el factor a^5 es tambien un producto de *cinco* factores iguales á a, ó sea $aaaaa$; luego el producto $a^3 \times a^5$ contiene al factor a *tres* veces mas *cinco* veces, ó sean *ocho* veces; por consiguiente $a^3 \times a^5 = a^8$.

Podemos, pues, enunciar la siguiente regla abreviada.

Para multiplicar dos potencias de una misma cantidad, se suman los exponentes.

18. MULTIPLICACION DE DOS MONOMIOS.

Sean los monomios $8a^5b^4c$ y $5a^3bd$.

El producto $8a^5 b^4c \times 5a^3 bd$ de dos productos indicados $8 \,.\, a^5 \,.\, b^4 \,.\, c$ y $5 \,.\, a^3 \,.\, b \,.\, d$, es igual á $8 \,.\, a^5 \,.\, b^4 \,.\, c \,.\, 5 \,.\, a^3 \,.\, b \,.\, d$ [Aritm. 65, 179, 241]; como podemos alterar el órden de los factores sin que el producto varie [Aritm. 67, 181, 241], será $8a^5b^4c \times 5a^3b\, d = 8 \,.\, 5 \,.\, a^5 \,.\, a^3 \,.\, b^4 \,.\, b \,.\, c \,.\, d$,

ó
$$8a^5b^4c \times 5a^3b\, d = 40a^8b^5c\, d.$$

Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficiintes y se escriben á la derecha del producto todas las letras comunes al multiplicando y multiplicador. poniendo á cada letra un exponente igual á la suma de los exponentes que afectan á la misma en los dos factores. En cuanto á las letras que entran en un solo factor, se escriben en el producto con el exponente que cada una tiene.

Aplicando esta regla tendremos:

$$4a^3b^7x^8 \times 12ab^2c^3x = 48a^4b^9c^3x^9$$
$$9a^2b^2cd \times a^4b^3x = 9a^6b^5cdx$$

ESCOLIO. Es evidente que el producto de dos monomios es otro monomio que contiene por sí solo tantos factores literales como el multiplicando y multiplicador.

19. MULTIPLICACION DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO.

Supongamos en primer lugar que todos los términos del multiplicando sean aditivos, y hallemos el producto de $a + b + c$ por el monomio m.

Hemos demostrado en Aritmética [41, 173, 241] que
$$(a + b + c)m = am + bm + cm.$$

Consideremos ahora un polinomio que contenga términos aditivos y sustractivos, por ejemplo $a - b + c$.

Este polinomio puede escribirse en la forma $(a + c) - b$, y por consiguiente ser considerado como una diferencia indicada, siendo $a + c$ el minuendo y b el sustraendo. El producto de esta diferencia indicada por un monomio m será

$$(a + c)\,m - bm,$$

ó $$am + cm - bm = am - bm + cm.$$

luego $$(a - b + c)\,m = am - bm + cm.$$

Observando los resultados obtenidos en los dos casos que hemos estudiado, se descubre la siguiente regla:

Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplican sucesivamente los términos del polinomio por el monomio, poniendo á cada producto parcial el mismo signo que tiene el término respectivo del multiplicando.

Escolio. Es evidente que los términos del producto no pueden reducirse; y que el producto de un polinomio por un monomio, es otro polinomio de igual número de términos que el multiplicando.

20. MULTIPLICACION DE DOS POLINOMIOS.

Supongamos que los términos del multiplicando y del multiplicador sean todos aditivos, ó unos aditivos y otros sustractivos; y tratemos de hallar el producto de

$$(a - b + c)\,(m + n - p).$$

Si suponemos efectuadas las operaciones del multiplicando, y representamos por R el resultado, el producto propuesto será

$$R\,(m + n - p) = (m + n - p)\,R;$$

pero, segun el caso anterior,

$$(m + n - p)\,R = mR + nR - pR$$

ó $$R\,(m + n - p) = Rm + Rn - Rp.$$

Poniendo ahora en lugar de R el polinomio $a - b + c$, se obtiene

$$(a-b+c)\,(m+n-p) = (a-b+c)m + (a-b+c)n - (a-b+c)p.$$

Este resultado indica que para multiplicar dos polinomios, deben hallarse sucesivamente los productos del multiplicando por cada término del multiplicador, y poner á cada uno de estos productos parciales el signo que afecta al término respectivo del multiplicador; por manera que los productos parciales del multiplicando por los términos aditivos m y n; entrarán en el producto total como sumandos, y los productos por los términos sustractivos, tales como p, entrarán como sustraendos. Pero segun la regla de la sustraccion de polinomios, para restar el producto parcial $(a - b + c)p$, se deben cambiar los signos de todos sus términos; luego

Para multiplicar dos polinomios, se efectúan sucesivamente las multiplicaciones del multiplicando por cada término del multiplicador, teniendo cuidado de cambiar los signos á todos los términos de los productos parciales, que procedan de multiplicar por un término negativo del multiplicador. Sumando despues los polinomios obtenidos, se halla el producto total.

Ejemplo. Multiplicar el polinomio $3a^2b - 7ab^2 + 5b^3$ por $6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$.

En la práctica se dispone la operacion del modo siguiente.

$$\begin{array}{rrrrr}
3a^2b & -\ 7ab^2 & +\ 5b^3 & & \\
6a^2b^2 & +\ 4ab^3 & -\ b^4 & & \\
\hline
18a^4b^3 & -\ 42a^3b^4 & +\ 30a^2b^5 & & \\
 & 12a^3b^4 & -\ 28a^2b^5 & +\ 20ab^6 & \\
 & & -\ 3a^2b^5 & +\ 7ab^6 & -\ 5b^7 \\
\hline
18a^4b^3 & -\ 30a^3b^4 & -\ a^2b^5 & +\ 27ab^6 & -\ 5b^7
\end{array}$$

21. Se desprende, de las reglas dadas para multiplicar un polinomio por un monomio ó por otro polinomio, que el producto de un término del mutiplicando por otro del multiplicador tiene el signo del primero de estos términos, cuando el segundo es positivo, y el signo contrario, cuando éste es negativo.

Así, en el ejemplo anterior, el producto del término positivo $3a^2b$ por el positivo $6a^2b^2$ es positivo; el producto del término negativo $-7ab^2$ por el positivo $6a^2b^2$ es negativo; el producto del término positivo $3a^2b$ por el negativo $-b^4$ es negativo; y finalmente, el producto del término negativo $-7ab^2$ por el negativo $-b^4$ es positivo.

Este resultado suele expresarse abreviadamente diciendo:

$+$ *multiplicado por* $+$ *da* $+$
$-$ *multiplicado por* $+$ *da* $-$
$+$ *multiplicado por* $-$ *da* $-$
$-$ *multiplicado por* $-$ *da* $+$

Y observando que *mas* por *mas* da *mas*, y *menos* por *menos* da mas, se dice:

signos iguales dan producto positivo:

y como *menos* por *mas* da *menos*, y *mas* por *menos* da *menos*, se dice tambien:

signos contrarios dan producto negativo.

En la práctica nos serviremos de esta regla para hallar los signos de los términos de un producto.

22. A fin de facilitar la reduccion de términos semejantes, el muy útil *ordenar* los términos del multiplicando y del multiplicador por las potencias crecientes ó decrecientes de una letra, que en tal concepto se llama letra *ordenatriz* ó *principal*.

El polinomio $7ab^6 - 2a^3b^4 - b^7 + 5a^4b^3 - a^2b^5$, ordenado por las potencias crecientes de b, será

$$5a^4b^3 - 2a^3b^4 - a^2b^5 + 7ab^6 - b^7.$$

Obsérvese que tambien resulta ordenado por las potencias decrecientes de a.

Si la letra ordenatriz entra con el mismo exponente en varios términos, se escriben estos unos debajo de otros, prescindiendo de dicha letra, la que se coloca despues á la derecha del primer término interponiendo una raya vertical.

Si queremos ordenar el polinomio $6a^3b^2 + b - c - 5a^2b^2 + 2a^3b + a^2b + a^3b^3$, por las potencias decrecientes de a, se escribirá en la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|l|l} b^3 & a^3 - 5b^2 & a^2 + b \\ +6b^2 & + \ b & - c \\ +2b & & \end{array}$$

Las cantidades colocadas á la izquierda de la raya vertical, se consideran como coeficientes de la letra ordenatriz: el coeficiente de a^3 es $b^3 + 6b^2 + 2b$.

Vamos á multiqlicar los polinomios

$$2a^4x + a^5 - 3a^3bx - b^3x^2 + a^3x^2 \text{ y } a^3x - a^2bx + a^2x^2 - 2abx^2.$$

Ordenaremos los factores con relacion á las potencias decrecientes de x, y será

Multiplicando.		a^3 $-b^3$	$x^2 + 2a^4$ $-3a^3b$	$x + a^5$	
Multiplicador.		a^2 $-2ab$	$x^2 + a^3$ $-a^2b$	x	
Producto por $a^2 \mid x^2$ $-2ab$	a^5 $-a^2b^3$ $-2a^4b$ $+2ab^4$	$x^4 + 2a^6$ $-3a^5b$ $-4a^5b$ $+6a^4b^2$	$x^3 + a^7$ $-2a^6b$	x^2	
Producto por $a^3 \mid x$ $-a^2b$		$+a^6$ $-a^3b^3$ $-a^5b$ $+a^2b^4$	$x^3 + 2a^7$ $-3a^6b$ $-2a^6b$ $+3a^5b^2$	$x^2 + a^8$ $-a^7b$	x
Producto total.	a^5 $-2a^4b$ $-a^2b^3$ $+2ab^4$	$x^4 + 3a^6$ $-8a^5b$ $+6a^4b^2$ $-a^3b^3$ $+a^2b^4$	$x^3 + 3a^7$ $-7a^6b$ $+3a^5b^2$	$x^2 + a^8$ $-a^7b$	x

23. Teorema. *Si dos polinomios y su producto están ordenados por las potencias de una misma letra, el primer término del producto reducido es el resultado de multiplicar el primer término del multiplicando por el primero del multiplicador, y el último término del producto es el resultado de multiplicar los últimos términos de los factores.*

En efecto: la proposicion es evidente antes de reducir los términos semejantes; ahora bien, suponiendo ordenados los polinomios por las potencias decrecientes de una letra, los primeros términos de los factores contendrán la letra ordenatriz con mayor exponente que los demás, luego antes de reducir los términos semejantes, el primer término del producto contiene la letra ordenatriz con un exponente mayor que los demás términos, por consiguiente ninguno de éstos puede reducirse con el primero ni anteponérsele. De una manera análoga podríamos razonar sobre el último término; luego el primer término y el último no esperimentan ninguna alteracion al reducir los términos semejantes, lo que demuestra que la proposicion enunciada es tambien cierta despues de efectuar dicha reduccion.

Escolio. De aquí se desprende que el producto de dos polinomios consta por lo menos de dos términos, luego *el producto de dos polinomios es otro polinomio.*

24. Teorema. *El producto de dos polinomios homogéneos es tambien homogéneo, y su grado es igual á la suma de los grados de los factores.*

En efecto: antes de efectuar la reduccion de términos semejantes, un término cualquiera del producto es el producto de un término del multiplicando por otro del multiplicador, y contiene por sí solo tantos factores literales como los dos términos mencionados; pero el número de factores de los términos es el mismo en cada polinomio, luego tambien lo será en el polinomio producto. Además, la reduccion de términos semejantes sólo altera los coeficientes, por manera que el producto, despues de reducido, seguirá siendo homogéneo y del mismo grado que antes de la reduccion.

25. Las siguientes expresiones, de frecuente uso en las Matemáticas, son consecuencias de la regla dada para multiplicar dos polinomios.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Su traduccion al lenguaje vulgar es la siguiente:

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual à la suma de los cuadrados de dichas cantidades, mas el duplo del producto de las mismas.

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de dichas cantidades, menos el duplo del producto de las mismas.

La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual á la diferencia entre los cuadrados de dichas cantidades.

V.—Division.

26. Se llama cociente *exacto* de dos cantidades literales, la expresion algebráica entera que multiplicada por el divisor produce el dividendo.

En este caso la division se llama tambien *exacta* ó *completa*, y se dice que el dividendo es *divisible* por el divisor.

Pero si no existe ninguna cantidad algebráica entera que multiplicada por el divisor reproduzca el dividendo, la division se llama inexacta ó incompleta.

27. Tratemos de hallar el cociente de dos potencias de una misma cantidad.

Sea $a^8 : a^3$.

El dividendo a^8 es un producto de *ocho* factores iguales á a; pero á la vez es el producto del divisor a^3, que contiene *tres* veces al factor a, por el cociente, que evidentemente será un producto de *cinco* factores; pero ningun factor del cociente puede ser distinto de a, pues si el cociente tuviese un factor b, entraria este factor en el producto del cociente por el divisor, esto es, en el dividendo; luego el cociente consta de cinco factores iguales á a, y es por consiguiente a^5.

Podemos, pues, enunciar la siguiente regla abreviada.

Para dividir dos potencias de una misma cantidad, se restan los exponentes.

28. DIVISION DE DOS MONOMIOS.

Sean los monomios $40a^8b^7c^4d$ y $8a^5b^6c$.

El cociente es tambien monomio, puesto que un polinomio multiplicado por el divisor, daria para dividendo otro polinomio [19, Escolio]. Recordando la regla dada para multiplicar dos monomios, observamos que el coeficiente del cociente es un número que multiplicado por 8 da 40, luego es $40 : 8 = 5$; el exponente de a debe ser tal que sumado con 5 dé 8, luego es $8 - 5 = 3$; del mismo modo el exponente de b en el cociente es $7 - 6 = 1$, el de c, $4 - 1 = 3$; y el factor d que no entra en el divisor debe entrar en el cociente, luego este es $5a^3bc^3d$.

Para dividir dos monomios, se dividen los coeficientes, y se escriben á la derecha del cociente las letras comunes al dividendo y divisor con exponentes iguales á la diferencia de los exponentes que tienen las mismas en los monomios propuestos. En cuanto á las letras que solo entran en el dividendo, se escriben en el cociente con sus mismos exponentes.

Aplicando esta regla se obtiene

$$30a^5b^6c^4d : 6ab^5c^4 = 5a^4bd,$$
$$42a^8b^4c^5d : 14ab^4c = 3a^7b^0c^4d.$$

En el segundo ejemplo se presenta el factor b^0 como expresion del cociente de $b^4 : b^4$, y debiendo ser el exponente un número entero, la expresion b^0 carece de sentido.

Sin embargo, observando que $b^4 : b^4 = 1$, podremos admitir en el cálculo la expresion b^0 como representando la *unidad*, y obtendremos de este modo mayor generalidad en las reglas, y la ventaja de conservar, si así conviene, en las expresiones algebráicas aquellas letras que la division hace desaparecer.

La regla del número 27 supone que el exponente de una letra en el dividendo es mayor que el de la misma en el divisor; pero convendremos en hacer dicha regla extensiva al caso en que estos exponentes son iguales, y admitiremos que

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0,$$

y como $a^m : a^m = 1$, resulta $a^0 = 1$.

Admitiremos, pues, convencionalmente que *toda cantidad con exponente cero es un símbolo que representa la unidad.*

29. Segun la regla anterior, para que el cociente de dos monomios sea exacto, se necesita y basta: 1.° que el coeficiente del dividendo sea divisible por el del divisor; 2.° que todas las letras del divisor entren en el dividendo con exponentes iguales ó mayores.

Si no se verifican estas dos condiciones, el cociente no puede ser entero, y se expresa en forma de fraccion, la que se simplifica suprimiendo los factores comunes al dividendo y divisor.

EJEMPLOS.

1.° $\quad 7a^8b^5c^3 : 4ab^4d^6x^4 = \dfrac{7a^8b^5c^3}{4ab^4d^6x^4} = \dfrac{7a^7bc^3}{4d^6x^4}.$

2.° $\quad 20ab^3c : 32a^4b^9c = \dfrac{20ab^3c}{32a^4b^9c} = \dfrac{5}{8a^3b^2}.$

30. DIVISION DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO.

Para dividir un polinomio por un monomio, se dividen sucesivamente todos los términos del polinomio por el monomio, poniendo á cada cociente parcial el mismo signo que tiene el término respectivo del dividendo.

Sea $a - b + c$ el polinomio y m el monomio.

Decimos que

$$(a - b + c) : m = a : m - b : m + c : m.$$

En efecto: si multiplicamos el polinomio

$$a : m - b : m + c : m$$

por el divisor m, para lo cual basta multiplicar cada término del polinomio por m [19], y observamos que $(a : m)\, m = a$, $(b : m)\, m = b$ etc., el producto será el dividendo $a - b + c$; luego

$$a : m - b : m + c : m$$

es el cociente buscado.

Se deduce de la regla anterior que la division de un polinomio por un monomio será exacta, si todos los términos del polinomio son divisibles por el monomio. En el caso contrario, se escribirán en forma fraccionaria las divisiones inexactas.

EJEMPLOS.

1.° $(21a^5b^5 - 6a^8b^4 + 3a^6b) : 3a = 7a^4b^5 - 2a^7b^4 + a^5b$

2.° $(25a^4x - 21a^9 + 10a^6x^5) : 5a^3x = 5a - \dfrac{21a^6}{5x} + 2a^3x^4.$

31. DIVISION DE DOS POLINOMIOS.

Es conveniente recordar que el dividendo es el producto de multiplicar el divisor por el cociente. Si suponemos ordenados el dividendo y el divisor por las potencias decrecientes de una letra, y que el cociente se halla ordenado del mismo modo, el primer término del dividendo es el resultado de multiplicar el primer término del divisor por el primer término del cociente [23]; luego

Dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor, se obtendrá el primer término del cociente.

Pero el dividendo es la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar el divisor por cada uno de los términos del cociente; si de esta suma restamos el primer producto parcial, esto es, el producto del divisor por el primer término del cociente, el resto será la suma de los demás productos parciales, esto es, la suma de los productos del divisor por el segundo, tercero, cuarto etc. términos del cociente; por consiguiente el primer término del resto reducido, será el producto de multiplicar el primer término del divisor por el segundo término del cociente [23]; luego

Dividiendo el primer término del resto por el primer término del divisor, se obtendrá el segundo término del cociente.

Si del dividendo, disminuido en el primer producto parcial, restamos el segundo de estos productos, que se obtendrá multiplicando el divisor por el segundo término del cociente, el nuevo resto contendrá los demás productos parciales, esto es, será el producto del divisor por el polinomio que forman el tercero, cuarto etc. términos del cociente; luego

Dividiendo el primer término del segundo resto por el primer término del divisor, se obtendrá el tercer término del cociente.

Continuando de este modo, llegaremos á un residuo cero, en cuyo caso la division será exacta y habrá terminado, puesto que del dividendo se habrán restado los productos del divisor por cada uno de los términos del cociente, y habiendo obtenido el resto cero, el dividendo es igual al producto del divisor por la suma de dichos términos, que constituirán el cociente exacto; ó bien obtendremos un residuo cuyo primer término contenga la letra ordenatriz con un exponente menor que el que afecta á dicha letra en el primer término del divisor, en cuyo caso daremos por terminada la operacion; porque el término siguiente del cociente no podrá ser entero, y por consiguiente la division será inexacta.

En la division inexacta el último resto se llama residuo, y el cociente es *incompleto* ó *entero;* para que sea exacto es necesario añadirle la expresion del cociente de dividir el residuo por el divisor.

Nos falta averiguar los signos que deben tener los diferentes términos del cociente.

Sabemos [21] que el producto de dos monomios es positivo, cuando los monomios tienen el mismo signo; y negativo, si tienen éstos signos contrarios; luego recíprocamente, si el producto de dos monomios es positivo, tendrán el mismo signo, y si dicho producto es negativo, tendrán signos contrarios; por consiguiente

si el dividendo es positivo y el divisor positivo, el cociente es positivo,
si el dividendo es positivo y el divisor negativo, el cociente es negativo,
si el dividendo es negativo y el divisor positivo, el cociente es negativo,
si el dividendo es negativo y el divisor negativo, el cociente es positivo.

Este resultado suele expresarse abreviadamente diciendo

+ *dividido por* + *da* +
+ *dividido por* — *da* —
— *dividido por* + *da* —
— *dividido por* — *da* +

Y observando que *mas* dividido por *mas* da *mas*, y *menos* dividido por *menos* da *mas*, se dice:

signos iguales dan cociente positivo;

y como *menos* dividido por *mas* da *menos*, y *mas* dividido por *menos* da *menos*, se dice tambien:

signos contrarios dan cociente negativo.

En la práctica, para hallar el signo de cada término del cociente, nos serviremos de esta regla, que como puede observarse, es la misma dada en la multiplicacion.

Los razonamientos hechos en este número, conducen á la regla siguiente:

Para dividir dos polinomios, se ordenan por las potencias de una misma letra, y dividiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor se obtiene el primero del cociente. Se multiplica el término hallado por el divisor, y el producto se resta del dividendo: dividiendo despues el primer término del resto por el primero del divisor, se obtiene el segundo término del cociente. Se multiplica este término por el divisor, y el producto se resta del primer resto: dividiendo despues el primer término del resto por el primero del divisor, se obtiene el tercer término del cociente. Se continúa del mismo modo hasta obtener un residuo cero, en cuyo caso la operacion está concluida, ó uno cuyo primer término no sea divisible por el primero del divisor: en este caso se añade al cociente entero una fraccion, que exprese el cociente del residuo por el divisor.

32. Es muy útil, para la completa inteligencia del razonamiento hecho en el número anterior, comparar las siguientes operaciones.

MULTIPLICACION.

Multiplicando.........	$3a^6 - a^5b + 2a^4b^2$
Multiplicador..........	$2a^5b^4 + a^4b^5 - a^3b^6$
1.er producto parcial.	$6a^{11}b^4 - 2a^{10}b^5 + 4a^9b^6$
2.° id. id....	$3a^{10}b^5 - a^9b^6 + 2a^8b^7$
3.° id. id....	$-3a^9b^6 + a^8b^7 - 2a^7b^8$
Producto total.........	$6a^{11}b^4 + a^{10}b^5 + 3a^8b^7 - 2a^7b^8$

DIVISION.

Dividendo.....	$6a^{11}b^4 + a^{10}b^5 + 3a^8b^7 - 2a^7b^8$	$3a^6 - a^5b + 2a^4b^2$ Divr.
1.er prod. parc.	$6a^{11}b^4 - 2a^{10}b^5 + 4a^9b^6$	$2a^5b^4 + a^4b^5 - a^3b^6$ C.
1.er resto....	$3a^{10}b^5 - 4a^9b^6 + 3a^8b^7 - 2a^7b^8$	
2.° prod. parcial	$3a^{10}b^5 - a^9b^6 + 2a^8b^7$	
2.° resto.....	$-3a^9b^6 + a^8b^7 - 2a^7b^8$	
3.er prod. parc.	$-3a^9b^6 + a^8b^7 - 2a^7b^8$	
3.er resto....	0	

Vemos que el dividendo es el producto total, y el divisor y cociente son los factores; los productos del divisor por los términos 1.°, 2.° y 3.° del cociente, son respectivamente los productos parciales 1.°, 2.° y 3.°; el dividendo es la suma de los tres productos parciales, el primer resto es la suma de dos, y el segundo resto es igual al tercer producto parcial; por último, obsérvese que habiendo restado del dividendo sucesivamente los tres productos parciales del divisor por el cociente, el resto es cero; luego el polinomio

$$2a^5b^4 + a^4b^5 - a^3b^6$$

es el cociente exacto.

33. Para restar del dividendo ó de un resto el producto del divisor por un término del cociente, se cambian los signos del producto á medida que se va obteniendo, y se hace despues la reduccion de términos semejantes.

El primer término del mencionado producto es siempre igual al primer término del dividendo ó resto respectivo, y lo anula al efectuarse la reduccion; por lo que se suprime ó tacha desde luego, y se multiplica el término del cociente por los del divisor á partir del segundo de éstos.

La operacion se dispone como en los ejemplos siguientes:

1.° $$\begin{array}{lllll|l} a^5b^3 - 4a^4b^4 & -19a^3b^5 & +22a^2b^6 & +48ab^7 & & a^3b^2 + a^2b^3 - 6ab^4 \\ \quad - a^4b^4 & + 6a^3b^5 & & & & \overline{a^2b - 5ab^2 - 8b^3} \\ \hline \quad -5a^4b^4 & -13a^3b^5 & & & & \\ & +5a^3b^5 & -30a^2b^6 & & & \\ \hline & -8a^3b^5 & -8a^2b^6 & & & \\ & & +8a^2b^6 & -48ab^7 & & \\ \hline & & & 0 & & \end{array}$$

2.° Dividir el polinomio $4a^7x^3 - 18a^6x^4 + 22a^5x^5 - 3a^4x^6 + x^7$ por $2a^5 - 5a^4x$.

Ordenados los polinomios por las potencias decrecientes de a, tendremos

$$\begin{array}{lllll|l} 4a^7x^3 & -18a^6x^4 & +22a^5x^5 & -3a^4x^6 & +x^7 & 2a^5 - 5a^4x \\ & 10a^6x^4 & & & & \overline{2a^2x^3 - 4ax^4 + x^5} \\ \hline & -8a^6x^4 & & & & \\ & & -20a^5x^5 & & & \\ \hline & & 2a^5x^5 & & & \\ & & & 5a^4x^6 & & \\ \hline & & & 2a^4x^6 & +x^7 & \end{array}$$

Conteniendo $2a^4x^6$ la letra ordenatriz con menor exponente que el de la misma letra en $2a^5$, el cociente de estos monomios no puede ser entero, y suspendemos por tanto la operacion.

La parte entera del cociente es $2a^2x^3 - 4ax^4 + x^5$, y para obtener el exacto, falta añadir el resultado de dividir el residuo $2a^4x^6 + x^7$ por el divisor; por consiguiente el cociente completo será $2a^2x^3 - 4ax^4 + x^5 + \dfrac{2a^4x^6 + x^7}{2a^5 - 5a^4x}$.

34. Si la letra ordenatriz entra en varios términos con el mismo exponente, se ordena el polinomio en la forma explicada en el número 22, y se considera el conjunto de los términos que contienen una misma potencia de una letra, como un sólo término, cuyo coeficiente es el polinomio situado á la izquierda de la raya vertical. Para efectuar la division del primer término del dividendo ó de un resto por el primero del divisor, se dividen separadamente los coeficientes, y despues las potencias de la letra principal.

EJEMPLO.

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{r|l|l|l|l}
a^6 & x^5+2a^5 & x^4+2a^4 & x^3+a^3 & x^2 \\
-4b^2 & \quad -3a^3b^3 & \quad -3a^2b^3 & \quad -2ab^3 & \\
 & \quad +2b^4 & \quad +2ab & & \\
 & & \quad +2b^6 & &
\end{array}
&
\begin{array}{r|l|l}
a^3 & x^3+a^2 & x^2+ax \\
-2b & \quad -b^3 & \\
\hline
a^3 & x^2+a^2 & x \\
+2b & \quad -2b^3 &
\end{array}
\\
\begin{array}{r|l|l}
-a^5 & x^4-a^4 & x^3 \\
+a^3b^3 & \quad -2ab & \\
-2a^2b & & \\
+2b^4 & & \\
\hline
+a^5 & x^4+a^4 & x^3 \\
-2a^3b^3 & \quad -3a^2b^3 & \\
-2a^2b & \quad +2b^6 & \\
+4b^4 & &
\end{array}
&
\\
\begin{array}{r|l|l}
-a^4 & x^3-a^3 & x^2 \\
+a^2b^3 & \quad +2ab^3 & \\
+2a^2b^3 & & \\
-2b^6 & & \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{0}
\end{array}
&
\end{array}
$$

Divisiones parciales.

1.ª
$$\begin{array}{r|l} a^6 \qquad\qquad -4b^2 & a^3-2b \\ \cline{2-2} +2a^3b \qquad\qquad & a^3+2b \\ +4b^2 & \\ \cline{1-1} 0 \quad & \end{array}$$

2.ª
$$\begin{array}{r|l} a^5-2a^3b^3-2a^2b+4b^4 & a^3-2b \\ \cline{2-2} +2a^2b \qquad & a^2-2b^3 \\ \cline{1-1} -2a^3b^3 \qquad\qquad\qquad & \\ -4b^4 & \\ \cline{1-1} 0 \quad & \end{array}$$

35. De la regla dada para dividir dos polinomios y del principio demostrado en el número 23, se deduce lo siguiente:

La division de dos polinomios no es exacta, si el primer término del dividendo no es divisible por el primero del divisor, y el último término de aquel por el primero de éste; ó si se presenta algun resto, cuyo primer término no sea divisible por el primero del divisor.

36. Teorema. *Si se divide el polinomio*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + Kx + L,$$

ordenado por las potencias decrecientes de x, *por el binomio* x — a, *el residuo de la division será el polinomio que resulta sustituyendo* x *por* a *en el dividendo,* esto es,

$$Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + ... + Ka + L.$$

En efecto: supongamos que se efectúa la division del polinomio propuesto por $x - a$; el primer término del cociente es $Ax^m : x = Ax^{m-1}$; multiplicando este término por el divisor, resulta $Ax^m - aAx^{m-1}$, y restando este producto del dividendo, el término Ax^m se anula, y resulta para primer término del resto

$$Bx^{m-1} + aAx^{m-1} = (B + aA)\, x^{m-1},$$

donde vemos que el exponente de x ha disminuido en una unidad.

Continuando la division, el exponente de x disminuirá en una unidad, por lo menos, á cada resto; luego llegaremos á obtener un resto independiente de x, que será el residuo de la operacion.

El cociente entero, que representaremos por Q, será un polinomio en x, y el residuo R podrá ser *cero*, si la division es exacta: pero en cualquier caso tendremos:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+....+Kx+L=(x-a)Q+R,$$

siendo el primer miembro de esta igualdad el resultado de las operaciones indicadas en el segundo.

Si damos á x un valor particular cualquiera, es evidente que los dos miembros de esta igualdad adquieren valores iguales; supongamos, pues, $x=a$. El primer miembro se convierte en

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+...+Ka+L;$$

el factor $x-a$ del segundo miembro, se reduce á $a-a=0$, el factor Q adquiere un valor particular cualquiera, que multiplicado por *cero* dá *cero*, y R no se altera, porque no contiene la letra x; tendremos, pues,

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+....+Ka+L=R.$$

Igualdad que demuestra la proposicion enunciada.

37. Corolarios. 1.° *Si el polinomio* $\mathrm{A}x^m+\mathrm{B}x^{m-1}+\mathrm{C}x^{m-2}+....+\mathrm{K}x+\mathrm{L}$ *se reduce á cero poniendo* a *en lugar de* x, *dicho polinomio es divisible por* x—a.

En efecto; el residuo de dividir $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+...+Kx+L$ por $x-a$ es $Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+.....+Ka+L$; si este residuo es cero como suponemos, el polinomio es divisible por $x-a$.

2.° Recíproco del anterior. *Si el polinomio* $\mathrm{A}x^m+\mathrm{B}x^{m-1}+\mathrm{C}x^{m-2}+...+\mathrm{K}x+\mathrm{L}$ *es divisible por* x—a, *dicho polinomio se reduce á cero poniendo* a *en lugar de* x.

En efecto: el residuo es $Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+....+Ka+L$, y este residuo es cero por hipótesis.

3.° *La diferencia entre las potencias de igual grado de dos cantidades, es divisible por la diferencia de estas cantidades.*

Vamos á demostrar que x^m-a^m es divisible por $x-a$.

Si en x^m-a^m hacemos $x=a$, se convierte en $a^m-a^m=0$; luego x^m-a^m es divisible por $x-a$.

Dividamos ahora estas cantidades.

$$
\begin{array}{l|l}
x^m \qquad\qquad\qquad -a^m & x-a \\ \hline
ax^{m-1} & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots\ldots+a^{m-1} \\
\quad a^2x^{m-2} & \\
\qquad . & \\
\qquad\quad . & \\
\qquad\qquad . & \\
\qquad\qquad\quad . \quad +a^m & \\ \hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

El primer término del cociente es $x^m : x$, y se obtiene disminuyendo el exponente de x en una unidad. Como el dividendo no tiene mas término en x que el primero y éste desaparece en la primera sustraccion, el primer término de cada resto será el producto, cambiado el signo, del segundo término del divisor por el último hallado en el cociente; al dividir el primer término del resto por x, disminuye el exponente de esta letra en una unidad; luego *dado un término del cociente se obtiene el siguiente multiplicando aquel por* a *y dividiendo por* x, ó lo que es lo mismo, *aumentando el exponente de* a *y disminuyendo el de* x *en una unidad.*

EJEMPLO.

$$\frac{x^9-a^9}{x-a}=x^8+ax^7+a^2x^6+a^3x^5+a^4x^4+a^5x^3+a^6x^2+a^7x+a^8.$$

CAPITULO SEGUNDO.

CANTIDADES NEGATIVAS.

38. En los polinomios que hemos considerado hasta ahora, el coeficiente y las letras de cada monomio tienen un valor absoluto, independiente de los signos mas y menos; solamente el término, considerado en su conjunto, va precedido de uno de estos signos, los que indican, no un modo de ser del mismo, sino el concepto bajo el cual entra en la composicion del polinomio, esto es, el signo *mas*, puesto delante de un término, indica, como en Aritmética, que dicho término debe sumarse, y el signo *menos*, que debe ser restado.

Así, las expresiones.

$$a+b \text{ y } a-b$$

expresan la primera que el valor numérico de a debe sumarse con el de b, y la segunda, que del valor de a debe restarse el de b; por manera que cada una de estas operaciones tiene su modo particular y propio de ser indicada. Sin embargo, se comprende que sería muy ventajoso reducir las expresiones que nos ocupan á una sola, lo que puede conseguirse mediante ciertos convenios.

Estos son:

1.° *Cada letra puede ir precedida del signo mas ó del signo menos*, esto es, *en las cantidades podemos considerar el valor absoluto*, como se ha hecho en Aritmética, *y además el signo*, lo que es propio del Álgebra.

2.° *Las operaciones con cantidades aisladas precedidas del signo mas ó del menos, se efectuarán como si dichas cantidades fuesen términos de un polinomio.*

En virtud de estos convenios, la expresion

$$a+b$$

representa igualmente la suma y la diferencia de los valores absolutos de a y b; puesto que si b es una cantidad positiva, la expresion será

$$a+(+b)=a+b,$$

y si b es negativa, poniendo el signo de manifiesto, la expresion se convierte en

$$a+(-b)=a-b.$$

Supongamos, ahora, que $a+b$ se eleva al cuadrado, y tendremos

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad [1]$$

Esta fórmula encierra tambien, en virtud de los convenios anteriores, la siguiente

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

En efecto: suponiendo en [1] que b es negativa, será

$$(a+(-b))^2=a^2+2a\,.-b+(-b)^2, \qquad \text{[1.}^{\text{er}}\text{ convenio]}$$

ó $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \qquad \text{[2.° convenio]}$$

39. Los mencionados convenios no deben ser admitidos, sin asegurarnos ántes de que *los resultados á que pueden conducirnos son siempre exactos.*

A este fin, demostraremos algunas proposiciones.

1.ª *Si en un polinomio entero se sustituye una letra* a *por* — a, *y las operaciones indicadas que resultan se efectúan del modo dicho en el 2.° convenio, el nuevo polinomio sólo se diferencia del propuesto en los signos de los términos que contienen potencia impar de dicha letra.*

Considerando las expresiones

$$a^m = a\,.\,a\,.\,a.... \quad \text{y} \quad (-a)^m = -a\,.-a\,.-a...,$$

se vé fácilmente que cada dos factores dan producto positivo, tanto en una como en otra potencia [21], luego si el número de aquellos es par, serán ambas positivas; pero si dicho número es impar, multiplicando todos los factores menos el último los productos serán positivos, y como dicho último factor es positivo en una de las potencias y negativo en la otra, la primera será positiva y la segunda negativa.

Segun esto, los términos que contengan una potencia par de a, no varían por el cambio de signo de esta letra; y los que contengan una potencia impar, cambian de signo; puesto que un término positivo $2a^3b$ se convierte en $2\,.-a^3\,.b = -2a^3b$, y uno negativo $-2a^3b$ se convierte en $-2\,.-a\,.^3b = 2a^3b$.

Además, es evidente que los términos independientes de a no sufren alteracion; luego el teorema enunciado es cierto.

2.ª *Si se suman ó restan varios polinomios, y se repite despues la misma operacion con los que se obtengan sustituyendo una letra* a *por* —a *en los propuestos, el segundo resultado puede deducirse del primero haciendo en éste la misma sustitucion.*

En efecto: sustituyendo una letra a por $-a$ en los polinomios propuestos, y efectuando las operaciones indicadas que se presenten, del modo dicho en el 2.° convenio, resultarán otros polinomios que se diferenciarán de los dados en los signos de los términos que contengan potencia impar de a [Proposicion 1.ª]. Sumando ó restando los polinomios propuestos, y despues los segundos, los resultados se compondrán, ántes de la reduccion, de los mismos términos; en cuanto á los signos, sabemos que en la suma son los mismos que tienen los sumandos, y que en la diferencia, cambian los signos del sustraendo; pero como esto suceda en las dos sustracciones que comparamos, los términos iguales que tuvieran el mismo signo ó signos contrarios, ántes de efectuar las sustracciones, tendrán tambien en los restos signos iguales ó contrarios; luego los resultados de las dos adiciones ó sustracciones, sólo se diferencian en los signos de los términos que contienen potencia impar de a.

Al hacer la reduccion de términos semejantes, los que contienen una misma potencia impar de a se pueden reducir sumando los positivos separadamente de los negativos: si m es el coeficiente de la primera suma y n el de la segunda, $m-n$ será el coeficiente de los términos reducidos, suponiendo $m > n$; pero los términos positivos que en uno de los resultados han dado m, son negativos en el otro; y los negativos del primero, que han dado n, son positivos en el segundo; por consiguiente $-(m-n)$ es en éste el coeficiente de los términos reducidos, que evidentemente se diferencia de $m-n$ tan sólo en el signo. En cuanto á los términos que no contienen potencia impar de a, es evidente que despues de la reduccion serán iguales en ambas sumas ó diferencias, tanto en valor como en signo.

Vemos, pues, que el resultado de sumar ó restar los polinomios trasformados, solamente se diferencia del de sumar ó restar los propuestos en los signos de los términos con potencia impar de a; luego aquel puede obtenerse sustituyendo en éste la letra a por $-a$. [Proposicion 1.ª]

3.ª *Si se multiplican dos polinomios, y se repite despues la misma operacion con los que se obtengan sustituyendo una letra* a *por* — a *en los propuestos, el segundo producto puede deducirse del primero haciendo en éste la misma sustitucion.*

En efecto: en la multiplicacion de dos polinomios, cada término del producto, considerado ántes de la reduccion, se forma multiplicando dos monomios, uno del multiplicando y otro del multiplicador; por consiguiente los dos productos que nos proponemos comparar constarán de los mismos términos.

Examinemos los signos de estos productos parciales en los tres casos que pueden presentarse: 1.º que ninguno de los monomios contenga potencia impar de a; 2.º que uno la contenga y el otro no; 3.º que los dos la contengan.

En el primer caso, los monomios del producto propuesto y los iguales á estos en el otro producto, tienen respectivamente los mismos signos; luego despues de multiplicados entre sí, darán valores iguales en valor y en signo, y la potencia de a, si la hay, será par.

En el segundo caso, el monomio sin potencia impar de a entra en el multiplicando ó en el multiplicador de las dos operaciones con el mismo signo, y el monomio con potencia impar de dicha letra, entra en el otro factor, pero con el signo mas en una de las operaciones y el menos en la otra; luego los resultados de multiplicar estos monomios tendrán signos contrarios, y la potencia de *a* es impar.

En el tercer caso, los monomios de la segunda operacion tienen signos contrarios á los de los monomios iguales de la primera: si en ésta son los dos positivos, en la segunda serán los dos negativos, y los productos tendrán ambos el mismo signo, que será el más; si en la primera es positivo uno de los monomios y el otro negativo, en la segunda serán respectivamente negativo y positivo, y por tanto los productos tendrán tambien el mismo signo, que será el ménos. En cuanto á la potencia de *a* es par en los dos productos.

Vemos, pues, que los términos iguales de los productos tendrán el mismo signo, si son independientes de la letra *a* ó la contienen con exponente par, y signos contrarios, si dicho exponente es impar; además sabemos que despues de la reduccion sucederá lo mismo [Proposicion 2.ª]; luego el resultado de multiplicar los polinomios trasformados, solamente se diferencia del de multiplicar los propuestos en los signos de los términos con potencia impar de *a*; por lo tanto, aquel podrá obtenerse sustituyendo en éste la letra *a* por $-a$ [Proposicion 1.ª].

4.ª *Si se dividen dos polinomios, y se repite despues la misma operacion con los que se obtengan sustituyendo* a *por* $-a$ *en los propuestos, el nuevo cociente puede deducirse del primero haciendo en éste la misma sustitucion.*

La division de un monomio por otro da lugar á los mismos casos que la multiplicacion, y las consecuencias son las mismas. Por otra parte, la division de dos polinomios se reduce á tres clases de operaciones, que son: dividir un monomio por otro, multiplicar un término del cociente por el divisor, restar el producto del dividendo ó de un resto anterior; y como los resultados de estas operaciones parciales sólo se diferenciarán en los signos de los términos con potencia impar de una letra, es evidente que lo mismo tendrá lugar en los cocientes y en los residuos, si los hay, de las divisiones que consideramos; por consiguiente el cociente de los polinomios trasformados puede deducirse poniendo $-a$ en lugar de *a* en el de los propuestos.

40. De las proposiciones que acabamos de demostrar, se deduce la siguiente importante consecuencia:

Se puede cambiar el signo de una letra en los datos y en el resultado de una operacion fundamental ó de una serie *cualquiera de ellas, siempre que convengamos en efectuar las operaciones indicadas con monomios aislados, precedidos del signo mas ó del menos, como si dichos monomios fuesen términos de un polinomio.*

41. Es evidente que despues de cambiar en los datos y en el resultado el signo de una letra a, puede cambiarse el de otra letra b, despues el de c, y así sucesivamente. Las expresiones finales que originen estos cambios sucesivos de signo, serán las mismas que obtendríamos haciéndolos todos simultáneamente; luego la consecuencia enunciada en el número anterior, es igualmente cierta cuando se cambian los signos de dos ó mas letras.

42. Acabamos de demostrar que los convenios del número 38, dan lugar siempre á resultados exactos; por tanto podemos admitirlos desde ahora. El Álgebra alcanzará así un alto grado de generalidad, puesto que *cuando se haya efectuado una operacion fundamental ó una serie cualquiera de ellas con varias expresiones algebráicas, si se presentan las mismas operaciones con otras expresiones que sólo se diferencien de las primeras en los signos de una ó mas letras,* NO SERÁ NECESARIO REPETIR LOS CÁLCULOS, PARA OBTENER EL NUEVO RESULTADO, *bastando cambiar en el primero los signos de dichas letras.*

43. Damos el nombre de *cantidad positiva* á toda expresion precedida del signo *mas,* y el de *cantidad negativa* á toda expresion precedida del signo *menos.*

Estas expresiones precedidas del signo mas ó del menos, carecen completamente de sentido cuando están aisladas: las introducimos en el cálculo como medio único y necesario de dar al Álgebra una gran generalidad; pero sólo despues de haber demostrado que tanto su admision como las reglas á que ha de sujetarse el cálculo de las mismas, nunca darán lugar á resultados erróneos.

44. Obsérvese que, en virtud de los convenios que acabamos de admitir, las palabras sumar y restar no envuelven en Álgebra las ideas de aumento y disminucion, pudiendo por el contrario ser la suma menor que un sumando, y la diferencia mayor que el minuendo; puesto que la suma $a+(-b)$ es en realidad la diferencia $a-b$, y la diferencia $a-(-b)$ equivale á la suma $a+b$.

Por esto se llama suma ó diferencia *algebráica* á la suma ó diferencia en que entran cantidades negativas, y suma ó diferencia *aritmética* á aquellas en que sólo se consideran los valores absolutos de las cantidades.

CAPÍTULO TERCERO.

FRACCIONES ALGEBRÁICAS.

45. FRACCION ALGEBRÁICA Ó LITERAL *es el cociente indicado de dos expresiones algebráicas.*

$\frac{a}{b}$, $\frac{3a+5b}{2+\sqrt{a}}$ son fracciones algebráicas.

El dividendo y divisor reciben como en Aritmética los nombres de *numerador* y *denominador;* sin embargo, no debe atribuirse á estos nombres la misma significacion.

Los términos de la fraccion algebráica no representan mas que el dividendo y divisor de una division indicada, y segun los valores numéricos de las letras que entran en ellos, podrán ser números enteros, fraccionarios ó inconmensurables, mientras que la significacion dada en Aritmética al numerador y denominador supone esencialmente que estos términos son números enteros.

46. De los teoremas demostrados en el número 142 de la Aritmética y generalizados despues, se duduce:

1.° *Multiplicando ó dividiendo el numerador por una cantidad cualquiera, la fraccion queda multiplicada ó dividida por dicha cantidad.*

2.° *Multiplicando ó dividiendo el denominador por una cantidad cualquiera, la fraccion queda dividida ó multiplicada por dicha cantidad.*

3.° *Multiplicando ó dividiendo el numerador y el denominador por una cantidad cualquiera, la fraccion no varia.*

47. *Si los términos de una fraccion algebráica tienen factores comunes, se obtendrá otra fraccion equivalente á la propuesta y de términos mas sencillos, dividiendo los dos términos por el producto de sus factores comunes.*

Así la fraccion $\frac{36a^4b^2c^5x^6}{24a^2b^5c}$ se convierte en $\frac{3a^2c^4x^6}{2b^3}$, con sólo dividir los dos términos por $12a^2b^2c$.

La fraccion $\frac{x^3-a^3}{(x-a)^2}$, cuyos términos son divisibles por $x-a$, se reduce á

$$\frac{x^2+ax+a^2}{x-a}.$$

48. *Para reducir varias fracciones algebráicas á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada fraccion por el producto de los denominadores de las demás.*

Es evidente, en efecto, que las fracciones que se obtengan por esta regla son iguales á las propuestas, y tienen denominadores iguales.

Así, $$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}$$

se convierten respectivamente en

$$\frac{adn}{bdn}, \frac{cbn}{dbn}, \frac{mbd}{nbd}.$$

49. El empleo del mínimo comun múltiplo, cuando los denominadores tienen factores comunes, ofrece en Algebra ventajas análogas á las expuestas en Aritmética; pero el problema de hallar el mínimo comun múltiplo de varios polinomios es bastante complicado para ser expuesto en un curso elemental.

Por consiguiente, haremos uso del mínimo comun múltiplo tan sólo cuando los denominadores de las fracciones dadas sean monomios.

Llamaremos *mínimo comun múltiplo* de varios monomios á otro monomio divisible por los primeros y compuesto del menor número posible de factores.

Es evidente, segun esta definicion, que *para hallar el mínimo comun múltiplo de varios monomios, se escriben á la derecha del mínimo comun múltiplo de sus coeficientes todas las letras de los monomios, sin repetir ninguna, afectadas de los mayores exponentes que tengan en dichos monomios.*

En cuanto á la regla para efectuar la reduccion de varias fracciones á un comun denominador, por medio del mínimo comun múltiplo, es la misma dada en Aritmética.

Ejemplo. Sean las fracciones

$$\frac{5a}{3b^2c^4x}, \frac{b}{8a^5c^2}, \frac{7c}{12a^3b^3}.$$

El mínimo múltiplo comun es $24a^5b^3c^4x$, que dividido por los denominadores dá respectivamente

$$8a^5b,\ 3b^3c^2x,\ 2a^2c^4x.$$

Multiplicando estos cocientes por los numeradores, y partiendo los productos por el mínimo comun múltiplo, se obtiene

$$\frac{40a^6b}{24a^5b^5c^4x},\quad \frac{3b^4c^2x}{24a^5b^5c^4x},\quad \frac{14a^2c^5x}{24a^5b^5c^4x}.$$

50. *Para sumar ó restar fracciones algebráicas de igual denominador, se suman ó restan los numeradores, y el resultado se parte por el denominador comun.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}$$

En efecto; llamando p, q, r á los valores de las fracciones dadas, tendremos

$$\frac{a}{m}=p,\quad \frac{b}{m}=q,\quad \frac{c}{m}=r,$$

de donde

$$a=mp,\quad b=mq,\quad c=mr;$$

sumando las dos primeras igualdades y restando la tercera resulta

$$a+b-c=m(p+q-r);$$

de donde

$$p+q-r=\frac{a+b-c}{m}$$

ó

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Si las fracciones tienen denominadores diferentes, se reducen á un comun denominador, y se aplica la regla anterior.

51. *Para multiplicar entre sí dos ó mas fracciones algebráicas, se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{m}{n}=\frac{acm}{bdn}.$$

En efecto, llamando p, q, r á los valores de las fracciones dadas, tendremos

$$\frac{a}{b}=p,\quad \frac{c}{d}=q,\quad \frac{m}{n}=r,$$

de donde

$$a=bp,\quad c=dq,\quad m=nr;$$

multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$acm = bpdqnr \quad \text{ó} \quad acm = bdn \times pqr,$$

de donde

$$pqr = \frac{acm}{bdn}$$

ó

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{m}{n} = \frac{acm}{bdn}.$$

52. *Para dividir una fraccion algebráica por otra, se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda, y el numerador de ésta por el denominador de aquella, y se divide el primer producto por el segundo.*

Vamos á demostrar que

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

En efecto: $\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$;

luego $\frac{ad}{bc}$ es el cociente.

Para dividir una cantidad entera por otra fraccionaria, se multiplica la primera por el denominador de la segunda, y se parte el producto por el numerador.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

En efecto, $\frac{ac}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{abc}{bc} = a.$

Lo que demuestra la regla.

53. *Para reducir una expresion mixta á fraccion algebráica, se multiplica la parte entera por el denominador de la fraccion, y se añade ó resta el numerador de la misma, poniendo al resultado por denominador el de la fraccion.*

En efecto: $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}.$

Lo mismo, $a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}.$

Las operaciones con expresiones mixtas se efectúan convirtiendo dichas expresiones en fracciones equivalentes, y operando despues con éstas.

54. Las propiedades de las fracciones iguales se han demostrado en Aritmética [128 y siguientes] en el supuesto de ser conmensurables los términos de las fracciones; pero si se observa que todos los razonamientos hechos con aquel objeto se apoyan en las propiedades generales de los quebrados, y en transformaciones iguales efectuadas con cantidades iguales, y que las propiedades demostradas en Aritmética para fracciones de términos conmensurables acaban de hacerse extensivas á toda clase de fracciones, podremos decir: *las propiedades de las fracciones iguales demostradas en Aritmética para números conmensurables, son igualmente ciertas cuando los números son inconmensurables ó unos conmensurables y otros inconmensurables.*

EJERCICIOS.

I. Dadas dos cantidades a y b, expresar algebráicamente una tercera cantidad igual á *cinco* veces la *cuarta* potencia de a, menos *nueve* veces el *cuadrado* de b.

II. Dadas dos cantidades x é y, expresar una tercera cantidad que exceda en *veinte* unidades el *triplo* del *cubo* de x, disminuido en la *quinta parte* del *cuadrado* de y.

III. Hallar el valor numérico de

$$4a^3b + 3ab^2 - b^4,$$

siendo $a = 2$, $b = 3$.

IV. Multiplicar los polinomios $a^3x^3 - a^4x^2 - 2a^5x + a^6$, $a^2x^2 + a^3x - 3a^4$.

V. ¿Cuántos términos contiene el producto de dos polinomios, antes de efectuar la reduccion?

VI. Dividir los polinomios $a^5x^5 - 6a^7x^3 + 2a^8x^2 + 4a^9x - 3a^{10}$, $a^2x^2 + a^3x - 3a^4$.

VII. Averiguar si el polinomio $ax^4 - 4a^2x^3 + 7a^3x^2 - 4a^4x$ es divisible por $x - a$, sin efectuar la division.

VIII. Simplificar la fraccion $\dfrac{a^2b^3x^5 - ab^2x^4}{5abx^3 + 3a^2b^2x^6}$.

IX. Simplificar la fraccion $\dfrac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{2x^3 - 7ax^2 + 8a^2x - 3a^3}$.

X. Efectuar la siguiente operacion indicada

$$\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b},$$

obteniendo el resultado mas sencillo.

XI. Efectuar la trasformacion siguiente:

$$\frac{\left(\dfrac{1}{a-x} - \dfrac{1}{a+x}\right)\left(\dfrac{a}{x} - \dfrac{x}{a}\right)}{\left(\dfrac{a-x}{x} - \dfrac{a-x}{a}\right)\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{a}\right)} = \frac{ax^2}{(a-x)^3}.$$

LIBRO SEGUNDO.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES PRELIMINARES.

I.—Definiciones.

55. Representando los datos de un problema por sus valores particulares ó por letras, y las incógnitas por otras letras, que comunmente son las últimas del alfabeto, y empleando además los signos de la Aritmética, se obtienen expresiones que son la traduccion fiel al lenguaje algebráico de las condiciones de la cuestion.

Si, por ejemplo, se nos pide hallar dos cantidades cuya suma sea 82 y su diferencia 44, representándolas por x é y, expresaremos las condiciones de la cuestion por

$$x + y = 82$$
$$x - y = 44.$$

Estas expresiones, compuestas de dos miembros separados por el signo $=$, se llaman *ecuaciones*.

ECUACION *es una igualdad en que entran una ó mas cantidades incógnitas*.

No se confunda la ecuacion con la igualdad: la ecuacion relaciona las cantidades conocidas con las incógnitas, mientras que la igualdad relaciona generalmente cantidades conocidas. Algunas veces, sin embargo, la igualdad encierra tambien incógnitas, y se distinguirá de la ecuacion en que uno de sus miembros es el resultado de operaciones indicadas en el otro, ó bien los dos miembros son operaciones indicadas, que dan el mismo resultado.

Así, $(x-a)\,m = mx - am$, $(a+x)^2 = (a+x)\,(a+x)$ son igualdades, aun cuando x sea incógnita.

La primera parte de la resolucion de un problema algebráico consiste, pues, en expresar por medio de una ecuacion ó de varias las mismas relaciones que, entre los datos y las incógnitas, encierra el enunciado del problema.

A esto se llama *poner el problema en ecuacion.*

56. Para completar la resolucion de un problema, es necesario hallar valores de la incógnita ó incógnitas capaces de satisfacer todas las condiciones del enunciado; y como las ecuaciones son el mismo enunciado escrito en la lengua del Álgebra, *estará resuelto un problema cuando obtengamos valores de las incógnitas que satisfagan las ecuaciones, esto es, que hagan idénticos sus dos miembros.*

Por ejemplo, el problema del número anterior estará resuelto, cuando obtengamos dos números que sumados den 82 y restados 44, ó que verifiquen las ecuaciones

$$x + y = 82$$
$$x - y = 44.$$

Si estos números son 63 y 19, es necesario que

$$63 + 19 = 82 \quad ó \quad 82 = 82,$$
$$63 - 19 = 44 \quad ó \quad 44 = 44.$$

57. Identidad *es una igualdad evidente por si misma,* por ejemplo

$$a = a, \quad a + \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}, \quad 4 + 5 = 4 + 5.$$

Resolver una ecuacion con una incógnita *es hallar todas las cantidades que sustituidas en lugar de la incógnita, convierten la ecuacion en identidad.*

Cada una de dichas cantidades recibe el nombre de *solucion* de la ecuacion.

Resolver una ecuacion con dos ó mas incógnitas *es hallar todos los sistemas de valores que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuacion en una identidad.*

Cada sistema de valores es una *solucion* de la ecuacion.

58. Si es imposible asignar á la incógnita un valor que haga idénticos los dos miembros de la ecuacion, se dice que ésta es *absurda* ó *imposible;* si por el contrario, existe un número ilimitado de valores que conviertan en identidad la ecuacion, se dice que es *indeterminada.*

Las mismas denominaciones se aplican respectivamente á una ecuacion con varias incógnitas, cuando no existe ningun sistema de valores que la convierta en identidad, y cuando, por el contrario, existe un número ilimitado de sistemas.

59. GRADO *de una ecuacion con una incógnita es el mayor de los exponentes de la incógnita*, con tal que ésta no entre en ningun denominador ni bajo signo radical.

GRADO *de una ecuacion con dos ó mas incógnitas es la mayor suma de los exponentes de éstas en cada término.*

La ecuacion $ax^3 - bx^2 = cx + d$, es de *tercer grado.*

La ecuacion $x^2y^2 - 3xy + x^3 = 0$, es de *cuarto grado.*

60. Una ecuacion es *numérica* cuando las cantidades conocidas son números, y *literal* cuando dichas cantidades son letras.

La ecuacion $3x + 2y = 14$, es numérica.

La ecuacion $ax + by = c$, es literal.

II.—Cambios que pueden sufrir las ecuaciones.

61. *Dos ecuaciones son* EQUIVALENTES *cuando tienen las mismas soluciones.*

Se demuestra la equivalencia de dos ecuaciones patentizando que toda solucion de la primera es solucion de la segunda, y recíprocamente.

62. TEOREMA. *Si se aumentan ó disminuyen los dos miembros de una ecuacion en una misma cantidad, la ecuacion que resulta es equivalente á la propuesta.*

Representando por A y B los dos miembros de la ecuacion propuesta, la ecuacion es

$$A = B;$$

si aumentamos los dos miembros en la cantidad C, tendremos una nueva ecuacion

$$A + C = B + C.$$

Toda solucion de $A = B$, sustituida en lugar de las incógnitas de esta ecuacion, da para A y B valores idénticos; y es evidente que si A y B son idénticos, lo serán tambien $A + C$ y $B + C$.

Luego toda solucion de la ecuacion primera, es solucion de la segunda.

Recíprocamente, toda solucion de $A + C = B + C$, sustituida en vez de las incógnitas de esta ecuacion, da para

$A+C$ y $B+C$ valores idénticos, y como los valores de C en los dos miembros son idénticos, los de A y B lo son tambien.

Luego toda solucion de la ecuacion segunda, lo es tambien de la primera.

Del mismo modo demostraríamos que las ecuaciones $A = B$ y $A - C = B - C$, son equivalentes.

63. Corolario 1.° *Un término de una ecuacion puede pasar del miembro en que se encuentra al otro, con sólo cambiar el signo de dicho término.*

Sea la ecuacion

$$ax - d = cx + b.$$

Si queremos pasar el término $-d$ al segundo miembro, aumentaremos los dos términos de la ecuacion en la cantidad d, y será

$$ax - d + d = cx + b + d$$

ó

$$ax = cx + b + d.$$

Si ahora el término cx quiere pasarse al primer miembro, restaremos cx de los dos miembros de la ecuacion, y será

$$ax - cx = cx + b + d - cx$$

ó

$$ax - cx = b + d.$$

Trasposicion *es una operacion que tiene por objeto reunir en un miembro todos los términos que contienen alguna incógnita, y en el otro los términos conocidos.*

Para efectuar la trasposicion se reunen en un miembro los términos que contienen alguna incógnita y en el otro los conocidos, cambiando el signo á cada término que pasa de un miembro á otro.

64. Corolario 2.° *Se puede cambiar los signos á todos los términos de una ecuacion.*

Basta, en efecto, pasar cada término del miembro en que se encuentra al otro.

Así la ecuacion

$$ax - d = cx + b$$

se convierte en

$$-cx - b = -ax + d \quad \text{ó} \quad -ax + d = -cx - b.$$

65. Teorema. *Si se multiplican ó dividen los dos miembros de una ecuacion por una misma cantidad conocida, la ecuacion que resulta es equivalente á la propuesta.*

Representando por A y B los dos miembros de la ecuacion propuesta, la ecuacion es

$$A = B;$$

si multiplicamos los dos miembros por la cantidad conocida m, tendremos una nueva ecuacion

$$Am = Bm.$$

Toda solucion de $A = B$, sustituida en vez de las incógnitas de esta ecuacion, dá para A y B valores idénticos; y es evidente que si A y B son idénticos, Am y Bm lo serán tambien.

Luego toda solucion de la ecuacion primera es solucion de la segunda.

Recíprocamente, toda solucion de $Am = Bm$, sustituida en vez de las incógnitas, dá para Am y Bm valores idénticos, y como el factor m es independiente de las incógnitas, la sustitucion indicada no altera esta cantidad; luego para que Am y Bm sean idénticos, es necesario que A y B lo sean tambien.

Por consiguiente, toda solucion de la ecuacion segunda, lo es tambien de la primera.

Del mismo modo demostraríamos que las ecuaciones $A = B$ y $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$ son equivalentes.

66. Si la cantidad m es cero ó contiene alguna incógnita, la proposicion demostrada no es cierta.

En efecto: si multiplicamos por cero los miembros de la ecuacion $A = B$, resulta

$$A \times 0 = B \times 0.$$

Es evidente que cualquier valor ó sistema de valores que asignemos á las incógnitas, darán para A y B valores cualesquiera, que multiplicados por cero, harán idénticos los miembros de $A \times 0 = B \times 0$; luego esta ecuacion tiene las soluciones de $A = B$, y además otras en número infinito.

Si multiplicamos por una cantidad que contenga alguna incógnita, por ejemplo $x - a$, la ecuacion se trasforma en

$$A\,(x - a) = B\,(x - a),$$

que tiene todas las soluciones de $A = B$, y además la solucion $x = a$, que convirtiendo en cero el factor $x - a$, hace idénticos los dos miembros.

Por el contrario, la division por una cantidad que contenga alguna incógnita, hace desaparecer alguna ó algunas soluciones de la ecuacion propuesta.

67. QUITAR DENOMINADORES *es una operacion que tiene por objeto convertir la ecuacion propuesta en otra equivalente de términos enteros.*

Para quitar los denominadores de una ecuacion, se multiplica cada término por el producto de todos los denominadores; lo que se consigue multiplicando el numerador de cada fraccion por el producto de los denominadores de las demás, y los términos enteros por el producto de todos los denominadores.

Si estos son monomios y tienen factores comunes, *se multiplica cada término de la ecuacion por el mínimo comun múltiplo de los denominadores.*

EJEMPLOS.

1.° Sea la ecuacion

$$\frac{5x}{7}-\frac{2x}{3}+2=3-\frac{x}{2}.$$

Para quitar sus denominadores debemos multiplicar por 42 cada término; pero una fraccion $\frac{5x}{7}$, por ejemplo, se multiplica por 42, multiplicando el numerador por 6, producto de los denominadores de las demás, y prescindiendo del denominador; lo mismo puede decirse de las demás fracciones. Operando así se obtiene

$$30x-28x+84=126-21x.$$

2.° Sea la ecuacion

$$\frac{ax}{12b^2}-\frac{bx}{6a}+c=\frac{x}{9a}+\frac{b}{18a^2}.$$

El mínimo comun múltiplo de los denominadores es $36a^2b^2$; multiplicando todos los términos por esta cantidad, resulta

$$3a^3x-6ab^3x+36a^2b^2c=4ab^2x+2b^3.$$

CAPITULO SEGUNDO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

68. *Para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita, se quitan denominadores, se efectúan las operaciones indicadas, se hace la trasposicion, reuniendo en el primer miembro los términos desconocidos, se reducen los términos semejantes, se saca la incógnita por factor comun, si entra en dos ó mas términos, y se despeja la incógnita, para lo cual se divide el segundo miembro de la ecuacion, por todo lo que multiplica á la incógnita en el primero.*

Advertiremos que, con frecuencia, algunas de estas operaciones no son necesarias.

EJEMPLOS.

1.° Sea la ecuacion

$$\frac{5x}{12} - 3 + \frac{x}{30} = \frac{7x}{24} + \frac{4}{5}.$$

Quitando denominadores, resulta

$$50x - 360 + 4x = 35x + 96.$$

Haciendo la trasposicion, tendremos

$$50x + 4x - 35x = 96 + 360.$$

De donde, reduciendo,

$$19x = 456,$$

y despejando

$$x = \frac{456}{19} \quad ó \quad x = 24.$$

Comprobacion.

$$\frac{5 \, . \, 24}{12} - 3 + \frac{24}{30} = \frac{7 \, . \, 24}{24} + \frac{4}{5}, \; 10 - 3 + \frac{4}{5} = 7 + \frac{4}{5}$$

ó

$$7 + \frac{4}{5} = 7 + \frac{4}{5}.$$

2.° Resolver la ecuacion

$$\frac{6x}{5} - x + 2 = \frac{4x}{15} - \frac{x}{25}.$$

Siguiendo la regla dada, obtendremos sucesivamente:

$$90x - 75x + 150 = 20x - 3x,$$
$$90x - 75x - 20x + 3x = -150,$$
$$-2x = -150.$$

Este resultado proviene de haber pasado al primer miembro los términos que contienen la incógnita y al segundo los conocidos. Podria evitarse, trasponiendo al segundo miembro los términos en x, y los conocidos al primero; pero es mas breve cambiar los signos [64], con lo que se obtiene

$$2x = 150,\ x = \frac{150}{2} = 75.$$

Comprobacion.

$$\frac{6\,.\,75}{5} - 75 + 2 = \frac{4\,.\,75}{15} - \frac{75}{25},\ 90 - 75 + 2 = 20 - 3,\ 17 = 17.$$

3.° Resolver la ecuacion

$$\frac{bx}{2\,(a-b)} - \frac{a}{3b} = \frac{3x}{a\,(a^2 - b^2)} - \frac{2}{b^2(a+b)}.$$

El mínimo comun múltiplo de los denominadores es $6ab^2\,(a^2 - b^2)$; haciéndolos desaparecer, resulta

$$3ab^3\,(a+b)\,x - 2a^2b\,(a^2 - b^2) = 18b^2x - 12a\,(a-b);$$

trasponiendo será

$$3ab^3\,(a+b)\,x - 18b^2x = 2a^2b\,(a^2 - b^2) - 12a\,(a-b);$$

de donde

$$(3a^2b^3 + 3ab^4 - 18b^2)\ x = (a-b)\,(2a^3b + 2a^2b^2 - 12a);$$

$$x = \frac{(a-b)\,(2a^3b + 2a^2b^2 - 12a)}{3a^2b^3 + 3ab^4 - 18b^2},$$

$$x = \frac{2a\,(a-b)\,(a^2b + ab^2 - 6)}{3b^2\,(a^2b + ab^2 - 6)};$$

y por último $\quad x = \dfrac{2a\,(a-b)}{3b^2}.$

CAPÍTULO TERCERO.

PROBLEMAS QUE PUEDEN SER RESUELTOS POR MEDIO DE UNA ECUACION DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

69. Segun hemos dicho anteriormente [55], la primera parte de la resolucion de un problema consiste en hallar ecuaciones, que expresen la serie de relaciones que, en el enunciado, ligan los datos con las incógnitas.

Esta primera parte no está sujeta á reglas fijas, pero se facilita teniendo en cuenta las observaciones que vamos á exponer, primero para los problemas que tienen una sola incógnita, y despues para aquellos que teniendo varias pueden resolverse por una sola ecuacion con una incógnita.

I.—Problemas con una incógnita.

70. Para poner en ecuacion estos problemas, son necesarias las siguientes operaciones:

1.ª *Representar la incógnita por una letra,* generalmente de las últimas del alfabeto.

2.ª *Investigar las relaciones que ligan los datos con la incógnita.*

El enunciado del problema contiene una relacion de igualdad entre dos expresiones, monomios ó polinomios, que resultan de la combinacion de datos é incógnita, por medio de las operaciones aritméticas, y que son los miembros de la ecuacion.

Dicha relacion de igualdad, se encuentra siempre explícita ó implícitamente en el enunciado. La serie de operaciones indicadas que han de constituir los miembros de la ecuacion, se hallará tambien en el enunciado, será una consecuencia de él, ó dependerá de algun principio demostrado en otra ciencia.

3.ª *Escribir la ecuacion.*

Representada ya la incógnita por una letra del alfabeto, y analizada la condicion á que debe satisfacer el valor buscado, se indican las dos series de operaciones que efectuadas con los datos y la incógnita, si esta fuese conocida, darian resultados idénticos, lo que origina la ecuacion del problema.

Problemas.

1.° *Hallar un número tal que la suma de su tercio y su cuarta parte exceda á su mitad en 3 unidades.*

Sea x el número buscado: la suma de su tercio y su cuarta parte será $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$, y el exceso de esta suma sobre su mitad $\frac{x}{2}$ debe ser 3, luego

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{2}=3.$$

Resolviendo esta ecuacion, resulta $x=36$.

Comprobacion.

$$\frac{36}{3}+\frac{36}{4}-\frac{36}{2}=3, \text{ ó } 3=3.$$

2.° *Un padre tiene 54 años y su hijo 10. ¿Cuántos años han de trascurrir hasta que la edad del padre sea triple de la del hijo?*

Sea x el número desconocido de años. Dentro de x años, el padre tendrá $54+x$ años, y el hijo $10+x$; debiendo ser la edad del primero tres veces mayor que la del segundo, tendremos.

$$54+x=3\,(10+x).$$

Resolviendo esta ecuacion, se encuentra $x=12$.

Comprobacion.

$$54+12=3\,(10+12) \text{ ó } 66=66.$$

3.° *Un padre tiene 54 años y su hijo 10. ¿Cuántos años han trascurrido desde que la edad del padre fué 12 veces la del hijo?*

Sea x la incógnita. Hace x años el padre tenia $54-x$ años, y el hijo $10-x$; debiendo ser la edad del primero 12 veces mayor que la del segundo, tendremos

$$54-x=12\,(10-x).$$

Resolviendo la ecuacion, hallamos $x=6$.

Comprobacion.

$$54-6=12\,(10-6) \text{ ó } 48=48.$$

4.° *Tres caños pueden llenar un estanque, el primero en 35 horas, el segundo en 45, y el tercero en 63; si los tres caños se abren al mismo tiempo, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

Sea x este número de horas. La relacion de igualdad en este problema es que la parte que llena el primer caño en x horas, más las que llenan el segundo y tercero en el mismo tiempo, es igual á la capacidad total del estanque, que representaremos por 1.

Ahora bien, si el primer caño llena por sí solo el estanque en 35 horas, en x horas llenará una parte representada por $\frac{x}{35}$.

Igualmente, las partes que llenan los otros dos caños estarán representadas por $\frac{x}{45}$, $\frac{x}{63}$; luego

$$\frac{x}{35}+\frac{x}{45}+\frac{x}{63}=1.$$

Resolviendo esta ecuacion, resulta $x=15$.

Comprobacion.

$$\frac{15}{35}+\frac{15}{45}+\frac{15}{63}=1, \text{ ó } 1=1.$$

5.° *Un caño puede llenar un estanque en 4 horas, y dos orificios pueden vaciarlo, el primero en 24 horas y el segundo en 8; si los orificios se abren al mismo tiempo que el caño, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

Sea x el número pedido. Es claro que, representando por 1 la capacidad del estanque, el caño arroja en x horas un volúmen de agua representado por $\frac{x}{4}$, y los orificios vacian partes representadas por $\frac{x}{24}$ y $\frac{x}{8}$; luego la ecuacion del problema es

$$\frac{x}{4}-\frac{x}{24}-\frac{x}{8}=1.$$

Resolviéndola resulta $x=12$.

Comprobacion.

$$\frac{12}{4}-\frac{12}{24}-\frac{12}{8}=1, \text{ ó } 1=1.$$

II—.Problemas con varias incógnitas.

71. Cuando son varias las incógnitas de un problema, existen diferentes relaciones de igualdad, que dan lugar á otras tantas ecuaciones. Sin embargo, con frecuencia sucede que una de las incógnitas se halla enlazada con las demás, mediante relaciones tan sencillas, que conocida aquella se deducen inmediatamente éstas. En tal caso el problema puede resolverse con ventaja, empleando una sóla ecuacion.

Para obtenerla se observarán las siguientes reglas:

1.ª *Distinguir los datos de las incógnitas.*

En muchos casos el enunciado indica claramente esta distincion, pero otras veces existen condiciones que, examinadas atentamente, disminuyen el número aparente de incógnitas.

2.ª *Investigar las relaciones que ligan los datos con las incógnitas.*

Un exámen atento del enunciado hará distinguir, en general, tantas relaciones de igualdad como incógnitas. Una de estas relaciones servirá para obtener la ecuacion con una incógnita del problema, y las demás para determinar las incógnitas restantes. Se elegirá para incógnita de la ecuacion la que, suponiéndola conocida, conduciria mas fácilmente al conocimiento de las demás, y se representará por una letra.

3.ª *Escribir la ecuacion.*

Representada la incógnita *principal* por una letra, se expresará cada una de las incógnitas que deban entrar en uno ú otro miembro de la ecuacion, por la serie de operaciones indicadas que determinaria su valor, si la incógnita principal fuese conocida.

Por último, se obtendrá la ecuacion del problema indicando con los datos y las incógnitas, representadas en la forma expuesta, las dos series de operaciones que en virtud de la relacion elegida al efecto, darian resultados idénticos, si los valores de las incógnitas fuesen conocidos.

Problemas.

6.° *Distribuir 5324 pesetas entre dos personas, de modo que la parte de la segunda sea el triplo de la parte de la primera.*

Las incógnitas de este problema están ligadas entre sí y con los datos por dos relaciones: 1.ª la suma de las dos partes es igual á 5324; 2.ª la parte segunda es triple de la parte primera.

Sea x esta parte; la segunda estará representada por $3x$, y en virtud de la primera relacion, será

$$x + 3x = 5324,$$

de donde $$x = 1331.$$

La segunda parte es $3 \times 1331 = 3993$.

Comprobacion.

$$1331 + 3993 = 5324.$$

7.° *Dividir el número* 420 *en tres partes, tales que la primera esté con la segunda en la relacion* 9 : 5, *y que la tercera sea mitad de la suma de las otras dos.*

Tres relaciones ligan en este problema las incógnitas con los datos: 1.ª la suma de las tres partes es 420; 2.ª las partes primera y segunda son entre sí como 9 : 5; 3.ª la última parte es mitad de la suma de las otras dos.

Esta relacion manifiesta que la parte tercera es $\frac{1}{3}$ de 420, ó sea 140, lo que reduce á dos las incógnitas.

Si representamos por x la primera parte, la segunda lo estará por $420 - 140 - x$, ó sea $280 - x$, y en virtud de la segunda relacion, tendremos

$$\frac{x}{9} = \frac{280 - x}{5},$$

de donde $x = 180$.

La segunda parte será $280 - 180 = 100$.

8.° *Un padre dispuso en su testamento que, del capital que dejaba, recibiese el hijo mayor* 1000 *duros, y la sexta parte del resto; el segundo* 2000 *duros, y la sexta parte del resto; el tercero* 3000 *duros y la sexta parte del resto, y así sucesivamente. Hechas las partes, se vió que todas eran iguales. ¿Cuánto importaba la herencia total, cuánto la parte de cada hijo, y cuántos eran estos?*

Es claro que si conociésemos la herencia total, se obtendria fácilmente la parte del primer hijo, y por consiguiente las demás; dividiendo despues dicha herencia por una de las partes, el cociente sería el número de hijos.

Tomaremos, pues, por incógnita la herencia total, y la representaremos por x.

Separando 1000 duros para el primer hijo, el resto es $x - 1000$, y la parte que corresponde á aquel será

$$1000 + \frac{x - 1000}{6}, \text{ ó sea } \frac{5000 + x}{6}.$$

Deducida la parte del primer hijo, y además 2000 duros para el segundo, el resto es

$$x - \frac{5000 + x}{6} - 2000, \text{ ó sea } \frac{5x - 17000}{6};$$

luego la parte del segundo hijo es

$$2000 + \frac{5x - 17000}{36}, \text{ ó bien } \frac{55000 + 5x}{36}.$$

Pero, segun el enunciado del problema, las partes del primer hijo y del segundo son iguales, luego tenemos la ecuacion

$$\frac{5000 + x}{6} = \frac{55000 + 5x}{36}.$$

Resolviéndola se encuentra $x = 25000$ duros.

La parte del primer hijo será $\frac{5000 + 25000}{6} = 5000$ duros, y el número de hijos $\frac{25000}{5000} = 5$.

Comprobacion.

$$\frac{5000 + 25000}{6} = \frac{55000 + 125000}{36} \text{ ó } 5000 = 5000.$$

Para comprobar las partes de los hijos, diremos:

al primero corresponden. . . . . . . 5000 duros

al segundo $2000 + \frac{25000 - 7000}{6} = 5000$ »

al tercero.. $3000 + \frac{25000 - 13000}{6} = 5000$ »

al cuarto... $4000 + \frac{25000 - 19000}{6} = 5000$ »

al quinto.. $5000 + \frac{25000 - 25000}{6} = 5000$ »

III.—Problemas generales.

72. 1.° *La edad de un padre es* a *años y la de su hijo* b. *¿Cuántos años han de trascurrir para que la edad del padre sea* m *veces mayor que la del hijo?*

Si llamamos x á este número de años, la ecuacion será

$$a+x=m(b+x).$$

Resolviéndola, tendremos

$$x=\frac{a-bm}{m-1}.$$

Caso particular. Si hacemos $a=54$, $b=10$, $m=3$, la fórmula anterior resuelve el problema 2.° del número 70.

En efecto, $$x=\frac{54-10 \,.\, 3}{3-1}=12.$$

2.° *La edad de un padre es* a *años y la de su hijo* b. *¿Cuántos años han trascurrido desde que la edad del padre fué* m *veces mayor que la del hijo?*

Si llamamos x á este número de años, la ecuacion será

$$a-x=m(b-x).$$

Resolviéndola, tendremos

$$x=\frac{bm-a}{m-1}.$$

Caso particular. Si hacemos $a=54$, $b=10$, $m=12$, la fórmula anterior resuelve el problema 3.° del número 70.

En efecto, $$x=\frac{10 \,.\, 12-54}{12-1}=6.$$

3.° *Tres caños pueden llenar un estanque, el primero en* a *horas, el segundo en* b *horas, y el tercero en* c *horas; si los tres caños se abren al mismo tiempo, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

Sea x este número de horas. La ecuacion del problema será

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1.$$

Resolviéndola, tendremos

$$x=\frac{abc}{ab+ac+bc}.$$

Caso particular. Si hacemos $a = 35$, $b = 45$, $c = 63$, la fórmula anterior resuelve el problema 4.° del número 70.

En efecto, $$x = \frac{35 \,.\, 45 \,.\, 63}{35 \,.\, 45 + 35 \,.\, 63 + 45 \,.\, 63} = 15.$$

4.° *Un caño puede llenar un estanque en* a *horas, y dos orificios pueden vaciarlo, el primero en* b *horas, y el segundo en* c *horas; si los orificios se abren al mismo tiempo que el caño, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

Sea x este número de horas.

La ecuacion del problema será

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = 1.$$

Resolviéndola, tendremos

$$x = \frac{abc}{bc - ac - ab}.$$

Caso particular. Si hacemos $a = 4$, $b = 24$, $c = 8$, la fórmula anterior resuelve el problema 5.° del número 70.

En efecto, $$x = \frac{4 \,.\, 24 \,.\, 8}{24 \,.\, 8 - 4 \,.\, 8 - 4 \,.\, 24} = 12.$$

5.° *Un padre dispuso en su testamento que, del capital que dejaba, recibiese el hijo mayor* a *duros y la* n^ésima^ *parte del resto; el segundo* 2a *duros y la* n *ésima parte del resto; el tercero* 3a *duros y la* n^ésima^ *parte del resto, y asi sucesivamente. Hechas las partes se vió que todas eran iguales. ¿Cuánto importaba la herencia total, cuánto la parte de cada hijo, y cuántos eran estos?*

Sea x la herencia total. La parte del primer hijo será

$$a + \frac{x - a}{n}.$$

Deduciendo de la herencia total la parte del primer hijo, y además la cantidad $2a$ para el segundo, el resto es

$$x - a - \frac{x - a}{n} - 2a, \text{ ó bien } \frac{nx - x + a - 3an}{n};$$

luego la parte del segundo hijo es

$$2a + \frac{nx - x + a - 3an}{n^2}.$$

Pero, segun el enunciado del problema, las partes del primer hijo y del segundo son iguales, luego tenemos la ecuacion

$$a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{nx-x+a-3an}{n^2}.$$

Restando a de los dos miembros se convierte en

$$\frac{x-a}{n}=a+\frac{nx-x+a-3an}{n^2}.$$

Quitando denominadores resulta

$$nx-an=an^2+nx-x+a-3an,$$

trasponiendo

$$nx-nx+x=an+an+a-3an,$$

reduciendo

$$x=an^2-2an+a,\ \text{ó}\ x=a\,(n^2-2n+1);$$

pero $$n^2-2n+1=(n-1)^2;$$

luego $$x=a\,(n-1)^2.$$

La parte del hijo mayor se obtendrá sustituyendo, en $a+\dfrac{x-a}{n}$, la incógnita x por $a\,(n-1)^2$; de este modo obtendremos

$$a+\frac{an^2-2an+a-a}{n}=\frac{an^2-an}{n}=a\,(n-1).$$

Las demás partes son tambien iguales á $a\,(n-1)$, segun el enunciado del problema.

Por último, el número de hijos es

$$\frac{a\,(n-1)^2}{a\,(n-1)}=n-1.$$

Caso particular. Si hacemos $a=1000$, $n=6$, las fórmulas obtenidas resuelven el problema 8.° del número 71.

En efecto, $x=1000\,(6-1)^2=25000$ duros.

La parte de cada hijo es $1000\,(6-1)=5000$ duros.

El número de hijos $6-1=5$.

CAPÍTULO CUARTO.

DISCUSION DE LAS ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.—INTERPRETACION DE LAS SOLUCIONES NEGATIVAS.—GENERALIZACION DE LAS FORMULAS POR MÉDIO DE LAS CANTIDADES NEGATIVAS.

I.—Discusion de las ecuaciones y problemas de primer grado con una incógnita.

73. Toda ecuacion de primer grado, despues de quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, hacer la trasposicion y la reduccion, adquiere la forma general

$$Ax = B,$$

donde A es el resultado de reducir los coeficientes de x á un solo número, y B el de reducir los términos conocidos,

Si despues de efectuar la trasposicion, los términos en x y los conocidos son todos aditivos, la reduccion de todos ellos no ofrece ninguna dificultad; pero comunmente unos son aditivos y otros sustractivos, ya en ambos miembros, ya en uno sólo de ellos; representando por a la suma de los coeficientes positivos y por b la de los negativos, el coeficiente de x será

$$a - b;$$

pero al asignar valores particulares á a y b, pueden ocurrir tres casos: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Si $a > b$, la diferencia $a - b$ es positiva.

Si $a < b$, la sustraccion $a - b$ no puede efectuarse.

Si $a = b$, la diferencia $a - b$ es cero.

En el segundo caso, suponiendo que a vale 8, y b 13, la diferencia es

$$8 - 13 = 8 - 8 - 5,$$

y reduciendo

$$8 - 13 = -5, \text{ cantidad negativa.}$$

Luego A puede ser una cantidad positiva, negativa ó nula, é igualmente B; por consiguiente la ecuacion $Ax = B$ puede adquirir una de estas formas

$$Ax = B, \quad Ax = -B, \quad -A . x = B, \quad -A . x = -B,$$

$$Ax = 0,\ 0 \times x = B,\ 0 \times x = 0,$$

donde A y B son números absolutos.

Los respectivos valores de x son

$$x = \frac{B}{A},\ x = \frac{-B}{A},\ x = \frac{B}{-A},\ x = \frac{-B}{-A},$$

$$x = \frac{0}{A},\ x = \frac{B}{0},\ x = \frac{0}{0}.$$

Los valores $\frac{B}{A}$ y $\frac{-B}{-A}$ se reducen al primero, pues cambiando los signos en la ecuacion $-A \,.\, x = -B$, se convierte en $Ax = B$.

Si efectuamos la division de cantidades monomias negativas, por la regla de los signos demostrada exclusivamente para la division de polinomios, las expresiones $x = \frac{-B}{A}$, $x = \frac{B}{-A}$, se reducen á una sóla: $x = -\frac{B}{A}$.

Por consiguiente, los valores que debemos examinar son

$$x = \frac{B}{A},\ x = -\frac{B}{A},\ x = \frac{0}{B},\ x = \frac{B}{0},\ x = \frac{0}{0}$$

74. Solucion positiva, $x = \frac{B}{A}$.

Esta solucion verifica siempre la ecuacion del problema, pues si en $Ax = B$ damos á x su valor, resulta

$$A\,\frac{B}{A} = B,\ \text{ó}\ B = B;$$

y sabemos que la ecuacion $Ax = B$ y la propuesta tienen iguales soluciones.

Puede ocurrir, sin embargo, que siendo $\frac{B}{A}$ solucion de la ecuacion, no lo sea del problema. Esto sólo sucederá cuando la solucion del problema deba estar sujeta á condiciones no expresables algebráicamente.

Sea, por ejemplo, el siguiente problema.

Preguntado un padre sobre el número de sus hijos, respondió: el número de hembras es triple del de varones, y *si á éste se añade la mitad de aquel, la suma es igual á* 8. *¿Cuántos hijos tenia?*

Llamando x al número de hijos varones, el de hembras es $3x$, y la ecuacion del problema será

$$x + \frac{3x}{2} = 8,$$

de donde $x = 3\frac{1}{5}$, valor que verifica la ecuacion, pero no es solucion del problema, puesto que la naturaleza de éste exige que x sea un número entero.

75. Solucion cero, $x = \frac{0}{A}$.

Si en la ecuacion $Ax = B$, se reduce á cero el segundo miembro, y el primero adquiere un valor diferente de cero, la ecuacion se convierte en $Ax = 0$, y es evidente que el único valor de x que la convierte en identidad es $x = 0$.

76. Solucion infinito, $x = \frac{B}{0}$.

Si A es cero y B adquiere un valor cualquiera, la ecuacion $Ax = B$ se convierte en $0 \times x = B$, y el valor de x debe ser tal, que multiplicado por cero dé B; pero como todo número multiplicado por cero dá cero, la ecuacion es absurda y el problema imposible.

Propongámonos interpretar la significacion de un quebrado, cuyo denominador es cero, sin que lo sea el numerador.

Si en el quebrado $\frac{a}{b}$ permanece el mismo numerador y disminuye el denominador, la fraccion aumenta: si el denominador se hace 10, 100, 1000 veces menor, la fraccion será 10, 100, 1000 veces mayor que $\frac{a}{b}$; se concibe, pues, que haciendo el denominador b suficientemente pequeño, llegará la fraccion á tener un valor tan grande como queramos, y que si el denominador disminuye hasta cero, la fraccion adquiere un valor mayor que cualquiera cantidad asignable, ó *infinito*.

La fraccion $\frac{a}{0}$ *es, pues, un símbolo que representa el infinito.*

Este valor infinito se expresa por el signo ∞; asi escribiremos

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

77. Solucion indeterminada, $x = \frac{0}{0}$.

Si en la ecuacion $Ax = B$, A y B se convierten en cero, será $0 \times x = 0$, y es evidente que cualquier valor de x multiplicado por cero, dá cero por producto; luego la incógnita tiene infinidad de valores, y la fraccion $\frac{0}{0}$ es *símbolo de indeterminacion.*

Sin embargo, una fraccion puede adquirir la forma $\frac{0}{0}$, y tener un valor determinado.

Sea la fraccion

$$\frac{a^2 - b^2}{a\,(a - b)}.$$

Si los valores numéricos de a y b son iguales, se convierte en $\frac{0}{0}$; pero si antes de hacer dicha sustitucion, observamos que los dos términos son divisibles por $a - b$, y suprimimos este factor comun, la fraccion se convierte en

$$\frac{a + b}{a},$$

y suponiendo $a = b$, adquiere el valor determinado

$$\frac{2a}{a} = 2.$$

El valor $\frac{0}{0}$ es debido, en este caso, al factor comun $a - b$ que, convirtiéndose en cero por la hipótesis $a = b$, anula los dos términos del quebrado.

Luego, *para hallar el verdadero valor de una fraccion que, en virtud de cierta hipótesis, se presenta bajo la forma*

$\frac{0}{0}$, *es necesario examinar si existe en los dos términos algun factor comun, que se convierta en cero por dicha hipótesis, y suprimirlo; si hecha la hipótesis en la fraccion que resulte, se obtiene tambien* $\frac{0}{0}$, *volveremos á examinar si existe algun otro factor comun, que se suprimirá igualmente. Continuando de este modo, se llegará á obtener un valor determinado, ó una fraccion irreducible, en cuyo caso, si todavía toma la forma* $\frac{0}{0}$, *será indeterminado su valor.*

Ejemplo. Sea la fraccion

$$\frac{a^3 - 2a^2b + ab^2}{a^2b - 2ab^2 + b^3}$$

Haciendo $a = b$ se convierte en $\frac{0}{0}$, pero suprimiendo el factor $a - b$, comun á sus dos términos [37], se reduce á

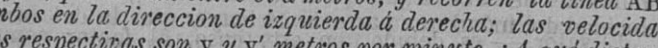
$$\frac{a^2 - ab}{ab - b^2}.$$

Haciendo en ésta $a = b$, se convierte tambien en $\frac{0}{0}$, pero suprimiendo el factor comun $a - b$, resulta $\frac{a}{b}$.

Por último, haciendo en ésta $a = b$, se convierte en $\frac{b}{b} = 1$, que es el verdadero valor de la fraccion dada, en la hipótesis $a = b$.

78. El problema siguiente presenta ejemplos de las diversas soluciones que hemos examinado.

Dos móviles parten en el mismo instante de los puntos A *y* B, *que distan entre sí* a *metros, y recorren la línea* AB, *ambos en la direccion de izquierda á derecha; las velocidades respectivas son* v *y* v' *metros por minuto. ¿A qué distancia del punto* A *se encontrarán?*



Es claro que los móviles se encuentran en un punto E situado á la derecha de B. Llamando x á la distancia AE del punto A al de encuentro E, el primer móvil recorrerá esta distancia mientras el segundo recorre BE, que puede representarse por $x-a$.

Puesto que el primer móvil recorre en un minuto v metros, para recorrer x metros empleará $\frac{x}{v}$ minutos; y el segundo móvil, que recorre v' metros por minuto, empleará en recorrer la distancia $x-a$ un número de minutos representado por $\frac{x-a}{v'}$. Pero los móviles parten en el mismo instante de A y B respectivamente, luego los tiempos que emplean en llegar al punto de encuentro E, son iguales.

La ecuacion del problema es por consiguiente

$$\frac{x}{v}=\frac{x-a}{v'}.$$

De la que se deduce

$$x=\frac{va}{v-v'}.$$

Discutamos ahora esta fórmula, esto es, examinemos los valores que adquiere la incógnita, en virtud de ciertas hipótesis hechas sobre los valores de los datos, y si aquellos valores están de acuerdo con las circunstancias de la cuestion.

1.° Supongamos $v>v'$.

En esta hipótesis, el valor de x es positivo; el denominador $v-v'$ es menor que v, $\frac{v}{v-v'}$ es mayor que la unidad, y el valor de x

$$\frac{va}{v-v'}=a\times\frac{v}{v-v'}$$

será mayor que a.

Lo que nos dice que los móviles se encuentran á la derecha del punto B. Este resultado está de acuerdo con las condiciones de la cuestion, pues es evidente que siendo la velocidad del móvil que parte de A mayor que la del otro, la distancia que los separa disminuirá á cada momento, y se encontrarán mas allá del punto B.

Por otra parte, si v disminuye, los términos de la fraccion $\frac{va}{v-v'}$ disminuyen al mismo tiempo; para saber en qué sentido varía la fraccion, dividiremos por v sus dos términos y obtendremos

$$x = \frac{a}{1 - \frac{v'}{v}}.$$

Ahora se vé que si disminuye v, la fraccion $\frac{v'}{v}$ aumenta, la diferencia $1 - \frac{v'}{v}$ disminuye, y por tanto el valor de x aumenta. La fórmula manifiesta, segun esto, que el punto de encuentro se aleja de A á medida que disminuye la velocidad del primer móvil, lo que es evidente.

Si suponemos $a = 0$, el valor de x será

$$x = \frac{v \times 0}{v - v'} = 0,$$

lo que nos dice que el encuentro de los móviles se verifica en el mismo punto de partida, como sucede efectivamente; por consiguiente el valor *cero*, que en este caso adquiere la incógnita, es solucion del problema.

2.° Supongamos $v = v'$.

El valor de x se presenta en este caso bajo la forma $\frac{av}{0}$. Este valor manifiesta que la ecuacion es absurda, por consiguiente el problema lo es tambien.

Y en efecto: la ecuacion, en la hipótesis $v = v'$, se convierte en

$$\frac{x}{v} = \frac{x - a}{v},$$

y es claro que dos fracciones de igual denominador y numeradores diferentes, no pueden ser iguales. En cuanto al problema, encierra una condicion imposible de satisfacer, pues si entre A y B media una distancia a, y los móviles caminan con igual velocidad, nunca se encontrarán.

La expresion $\frac{av}{v}$ ha sido admitida anteriormente [76] como símbolo del infinito; por consiguiente diremos que el valor de x es infinito, esto es, que los móviles se encuentran á una distancia infinita del punto A, ó que no se encuentran.

Si además de ser $v = v'$, suponemos $a = 0$, el valor de x es $\frac{0}{0}$, y como la fraccion $\frac{av}{v - v'}$ no tiene ningun factor comun á sus dos términos, deduciremos que el valor de x es indeterminado; lo que está conforme con las condiciones de la cuestion, pues si $a = 0$, los móviles parten del mismo punto con igual velocidad, luego el encuentro se verifica á todas las distancias del punto A.

La ecuacion del problema se convierte en

$$\frac{x}{v} = \frac{x}{v},$$

y queda satisfecha por todos los valores que se asigne á x.

II.—Interpretacion de las expresiones negativas, cuando se presentan como soluciones.

79. *La edad de un padre es* a *años, y la de su hijo* b. *¿Cuántos años han de trascurrir para que la edad del padre sea* m *veces mayor que la del hijo?*

Este problema, resuelto ya [72], nos ha dado la ecuacion

$$a + x = m(b + x),$$

y la fórmula

$$x = \frac{a - bm}{m - 1}.$$

Si la edad del padre es 40 años, la del hijo 8, y m vale 3, será

$$x = \frac{40 - 8 \cdot 3}{3 - 1} = 8 \text{ años.}$$

Supongamos ahora $a = 40$, $b = 16$, $m = 3$. Aplicando la fórmula á este caso particular, será

$$x = \frac{40 - 16 \cdot 3}{3 - 1} = \frac{40 - 48}{3 - 1} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Este resultado carece de sentido, puesto que el problema exige que la solucion sea un número absoluto; como, por otra parte, la ecuacion traduce exactamente todas las condiciones del problema, debemos deducir que éste no tiene solucion, ó que es imposible en el caso particular propuesto.

Esta imposibilidad se hace evidente por medio de la ecuacion, que en el caso que consideramos es

$$40 + x = 3\,(16 + x),$$

ó

$$40 + x = 48 + 3x.$$

Ecuacion absurda, puesto que cualquiera que sea el valor de x, siempre el segundo miembro será mayor que el primero.

Si suponemos que x pueda ir precedida del signo mas ó del menos, la ecuacion

$$40 + x = 3\,(16 + x),$$

se trasforma, cambiando el signo de x, en

$$40 - x = 3\,(16 - x);$$

sustituyendo x por 4, se obtiene la identidad

$$36 = 36,$$

lo que manifiesta que el valor negativo -4 es solucion, prescindiendo del signo, de la ecuacion que se obtiene cambiando en la propuesta el signo de x.

Ahora bien, si aquella ecuacion corresponde á algun problema análogo al propuesto, 4 será la solucion del mismo.

Para averiguarlo, observemos que el primer miembro $40 - x$ representa la edad del padre *hace* x años, y el segundo $3\,(16 - x)$ es el triplo de la del hijo *hace* tambien x años; luego para que el problema sea posible, es necesario modificar su enunciado en el sentido de que *la época en que se verificaron las condiciones del mismo, es* PASADA *y no* FUTURA *como se habia supuesto.*

Por manera que el problema será:

La edad del padre es 40 *años, y la de su hijo* 16. *¿Cuántos años han trascurrido desde que la edad del padre fué tres veces mayor que la del hijo?*

Ocupémonos otra vez del problema de los móviles [78].

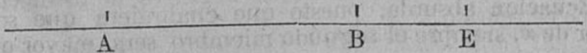
Segun hemos visto, la ecuacion de este problema es

$$\frac{x}{v} = \frac{x - a}{v'},$$

y la fórmula

$$x = \frac{va}{v - v'}.$$

Si suponemos $v < v'$, el denominador de la fórmula es negativo, y como el numerador es positivo, el valor de x será negativo. Como la ecuacion es la traduccion exacta del enunciado, concluiremos que el problema es imposible, en el caso que consideramos.



Se ve, en efecto, que si la velocidad del móvil A es menor que la del B, no es posible el encuentro marchando en la direccion AB, como expresamente exige el enunciado.

Para saber á qué problema análogo corresponde la solucion obtenida, prescindiendo del signo, pondremos en la ecuacion $-x$ en lugar de x, y se convertirá en

$$\frac{-x}{v} = \frac{-x-a}{v'};$$

cambiando los signos será

$$\frac{x}{v} = \frac{x+a}{v'}.$$

El numerador $x+a$ es la distancia que recorre el móvil B, luego el encuentro se verifica á la izquierda de A, y el problema modificado es el siguiente:

Dos móviles parten en el mismo instante de A *y* B, *que distan entre sí* a *metros, y recorren la línea* BA, *ambos en la direccion* DE DERECHA Á IZQUIERDA; *las velocidades respectivas etc.*

El valor de x se obtiene cambiando el signo de $\frac{va}{v-v'}$; será pues

$$\frac{va}{v'-v}.$$

Este mismo resultado se obtiene resolviendo directamente el problema modificado.

80. En general

1.° *El valor negativo de la incógnita, en una ecuacion de primer grado, indica que no existe ningun número absoluto capaz de convertir ésta en identidad; y que si la ecuacion traduce exactamente las condiciones del enunciado, el problema es imposible.*

En efecto: la ecuacion final $Ax = B$ procede de efectuar con la propuesta diversas trasformaciones, que originan siempre ecuaciones equivalentes á la primera [62,65]; si pues

$Ax = B$ no puede quedar satisfecha por ningun valor absoluto de x, esto es, por ningun valor independiente de los signos *mas* y *menos,* tampoco la propuesta podrá quedar satisfecha por ningun valor absoluto de x; y el problema será imposible, puesto que el valor negativo de la incógnita carece de sentido.

2.° *El valor negativo de la incógnita, en una ecuacion de primer grado, es solucion, si se prescinde del signo, de la ecuacion que resulta poniendo* — x *en lugar de* x *en la propuesta;* por consiguiente *dicho valor, tomado en absoluto, podrá considerarse como solucion de un problema análogo al propuesto, cuyo enunciado se obtiene traduciendo fielmente al lenguaje vulgar la ecuacion trasformada.*

En efecto: la ecuacion propuesta, despues de quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, trasponer y reducir, habrá tomado una de estas formas

$$-Ax = B, \qquad Ax = -B.$$

Si en dicha ecuacion ponemos $-x$ en lugar de x, y repetimos las mencionadas operaciones, que se reducen á las fundamentales, obtendremos [42]

$$Ax = B, \qquad -Ax = -B,$$

que se reducen, cambiando los signos en la segunda, á

$$Ax = B.$$

El valor de x en la ecuacion propuesta es $-\frac{B}{A}$, y este valor, prescindiendo del signo, esto es $\frac{B}{A}$, es la solucion de la ecuacion trasformada $Ax = B$, luego la proposicion enunciada es cierta.

81. Pongamos $-x$ en lugar de x en la ecuacion $-Ax=B$, y se convertirá en $-A \times -x = B$; sustituyamos ahora x por $\frac{B}{A}$, y la expresion que resulta

$$-A \times -\frac{B}{A} = B$$

será una identidad, segun acabamos de demostrar.

Pero, poner $-x$ en lugar de x en una ecuacion y sustituir despues x por $\frac{B}{A}$, da el mismo resultado que poner desde luego $-\dfrac{B}{A}$ en vez de x; y como el primer procedimiento convierte la ecuacion en una identidad, la sustitucion de x por $-\dfrac{B}{A}$ hará idénticos los dos miembros de la ecuacion.

Así, la ecuacion

$$40 + x = 3\,(16 + x),$$

se convierte, sustituyendo x por -4, en la identidad

$$40 - 4 = 3\,(16 - 4) \text{ ó } 36 = 36.$$

Si convenimos, pues, en llamar solucion de una ecuacion á toda cantidad literal ó numérica, carezca ó no de sentido, que puesta en vez de la incógnita, y con arreglo al 2.° convenio del número 38, convierta la ecuacion en identidad, *el valor negativo de una incógnita podrá considerarse como solucion de la ecuacion.*

82. *Si en una ecuacion literal de primer grado con una incógnita se cambian los signos de una ó mas letras, la fórmula que resuelve la primera ecuacion resuelve tambien la segunda, con sólo cambiar los signos de las mismas letras en dicha fórmula.*

Siendo la fórmula el resultado de efectuar una serie de operaciones fundamentales con los dos miembros de la ecuacion, esta proposicion es consecuencia cierta de la enunciada en el número 40.

83. Hasta ahora hemos supuesto que el enunciado del problema no presenta circunstancias dudosas, y que la ecuacion es, por consiguiente, la traduccion exacta de aquel: en tal caso, hemos visto que la solucion negativa indica la imposibilidad de resolver el problema tal como se ha enunciado; pero ocurre con frecuencia que las condiciones dejan alguna circunstancia indeterminada, y al escribir la ecuacion nos vemos obligados á hacer una hipótesis arbitraria. Si entónces obtenemos una solucion negativa, *no deduciremos inmediatamente la imposibilidad del problema,* sino que ensayaremos si haciendo otra hipótesis, será positivo el valor de la incógnita.

Para presentar un ejemplo, que aclare estas consideraciones, supongamos que en el problema de los móviles, no partan éstos al mismo tiempo de A y B, sino que moviéndose desde un tiempo indefinido en la direccion AB, pasen uno por A y otro por B en el mismo instante, y tratemos de averiguar á qué distancia del punto A se verifica el encuentro.

A B E

Enunciado así el problema, no podemos determinar desde luego si el punto de encuentro está á la izquierda de A ó á la derecha de B, y para escribir la ecuacion tenemos que hacer una hipótesis arbitraria sobre la situacion de dicho punto.

Suponiendo que el encuentro se verifique á la derecha de B, la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{x - a}{v'},$$

y la fórmula

$$x = \frac{va}{v - v'}.$$

Si $v < v'$, el valor de x es negativo; ántes de afirmar que el problema es imposible, supondremos que el encuentro se verifique á la izquierda del punto A.

En esta hipótesis la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{x + a}{v'},$$

que se diferencia de la anterior en el signo de a; para obtener la fórmula no es necesario repetir los cálculos, pues basta [82] cambiar el signo de a en la obtenida anteriormente; así resulta

$$x = \frac{-va}{v - v'}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{va}{v' - v}.$$

Si $v < v'$, el valor de x es ahora positivo; luego el problema es posible, el encuentro se verifica á la izquierda de A, y la solucion negativa fué debida á una hipótesis falsa, hecha al poner el problema en ecuacion.

Vemos, pues, que *si el enunciado de un problema presenta circunstancias dudosas, la solucion negativa puede provenir de una hipótesis falsa, hecha al escribir la ecuacion, sobre el sentido en que deben ser contadas ciertas cantidades, que se han supuesto aditivas debiendo ser sustractivas, ó al contrario. Cuando esto suceda debemos examinar si haciendo* *otra hipótesis, adquiere la incógnita un valor positivo, ó si todas las hipótesis posibles dan valores negativos: en el primer caso, el valor positivo hallado es la solucion del problema; en el segundo, podremos afirmar que el problema no tiene solucion.*

III.—Generalizacion de las fórmulas por medio de las cantidades negativas.

84. Las fórmulas que se obtienen resolviendo un problema general, no sólo se aplican á todos los casos particulares del mismo, sino que además convienen á otros problemas generales, cuyos enunciados se diferencian del problema propuesto en el sentido de algunas cantidades, que en éste son aditivas y en aquel sustractivas, y recíprocamente.

Para cerciorarnos de ello, volvamos á considerar el problema siguiente:

Tres caños pueden llenar un estanque, el primero en a *horas, el segundo en* b *horas y el tercero en* c *horas; si los tres caños se abren al mismo tiempo, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

La ecuacion sabemos que es [72]

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1,$$

y la fórmula

$$x=\frac{abc}{ab+ac+bc}.$$

Supongamos ahora que se quiere resolver este otro problema:

Un caño puede llenar un estanque en a *horas, y dos orificios pueden vaciarlo, el primero en* b *horas y el segundo en* c *horas; si los orificios se abren al mismo tiempo que el caño, ¿en cuántas horas se llenará el estanque?*

La única diferencia entre la ecuacion de este problema y la del anterior, consiste evidentemente en que $\frac{x}{b}$ y $\frac{x}{c}$ representan cantidades que deben restarse de $\frac{x}{a}$, por consiguiente, cambiando el signo de las mismas se obtendrá la ecuacion del problema; y haciendo el mismo cambio en la fórmula del anterior, tendremos la fórmula del actual.

Para que $\frac{x}{b}$ y $\frac{x}{c}$ cambien de signo, sin alterar los demás términos de la ecuacion, cambiaremos los signos de b y c, obteniendo así

$$\text{Ecuacion} \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{-b} + \frac{x}{-c} = 1,$$

$$\text{Fórmula} \quad x = \frac{a \,.\, -b \,.\, -c}{a \,.\, -b + a \,.\, -c + -b \,.\, -c};$$

efectuando ahora las operaciones por las reglas que, para monomios negativos aislados, hemos convenido en admitir, resulta

$$\text{Ecuacion} \quad \frac{x}{a} - \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = 1$$

$$\text{Fórmula} \quad x = \frac{abc}{bc - ac - ab}.$$

Resolviendo directamente el problema, obtuvimos [72,4.°] los mismos resultados.

Los problemas generales 1.° y 2.° del número 72, se resuelven tambien por medio de una sola ecuacion y una fórmula.

En efecto: el primero dió la ecuacion

$$a + x = m\,(b + x),$$

y la fórmula

$$x = \frac{a - bm}{m - 1}.$$

Si suponemos que x es cantidad positiva, la ecuacion y la fórmula corresponden al primer problema; pero suponiendo que x es cantidad negativa, dichas expresiones convendrán al segundo.

Así, sustituyendo x por $-x$, será

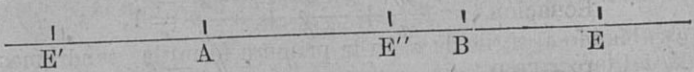
$$a - x = m\,(b - x),$$

$$-x = \frac{a - bm}{m - 1}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{bm - a}{m - 1}.$$

El mismo resultado obtuvimos resolviendo directamente el problema.

Consideremos, como último ejemplo, el problema siguiente.

Dos móviles recorren la línea AB, *y pasan en el mismo instante uno por* A *y el otro por* B. *La distancia entre* A *y* B *es* a *metros, la velocidad del primer móvil es* v *metros por minuto, y la del segundo* v′ *metros. ¿A qué distancia del punto* A *se encontrarán?*



Tres casos debemos considerar:

1.° Que los móviles sigan la misma direccion AB.
2.° Que sigan la misma direccion BA.
3.° Que sigan direcciones opuestas.

En el primer caso, suponiendo que el punto de encuentro se halle en E, la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{x-a}{v'}, \text{ y la fórmula } \quad x = \frac{av}{v-v'}.$$

En el segundo caso, suponiendo que el punto de encuentro se halle en E′, la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{x+a}{v'}, \text{ y la fórmula } \quad x = \frac{av}{v'-v}.$$

En el tercer caso, el encuentro se verifica entre A y B: la ecuacion es

$$\frac{x}{v} = \frac{a-x}{v'}, \text{ y la fórmula } \quad x = \frac{av}{v+v'}.$$

Vemos, pues, que para comprender todos los casos, necesitamos tres ecuaciones y tres fórmulas; sin embargo, la primera ecuacion y su fórmula respectiva son aplicables á todos los casos, si cambiamos convenientemente algunos signos.

En el segundo caso, la distancia de B al punto de encuentro E′ está representada por $x+a$; luego la primera ecuacion se aplicará á este caso cambiando el signo de a. Pero sabemos [82] que si en la ecuacion se cambia el signo de a, la fórmula sufre igual alteracion; luego en el segundo caso tendremos

$$x = \frac{-av}{v-v'}, \text{ ó } x = \frac{av}{v'-v}.$$

En el tercer caso, la distancia de B al punto de encuentro E'', está representada por $a - x$; luego la primera ecuacion se aplicará á este caso cambiando el signo del numerador $x - a$; pero igual resultado obtendremos cambiando el signo del denominador v', por consiguiente la ecuacion del tercer caso será

$$\frac{x}{v} = \frac{x-a}{-v'}, \text{ ó } \frac{x}{v} = \frac{a-x}{v'};$$

cambiando el signo de v' en la primera fórmula, tendremos la del tercer caso

$$x = \frac{av}{v+v'}.$$

85. El grado de generalidad que adquieren las fórmulas por el cambio de signos, se obtiene tambien por otro medio.

Observemos, ante todo, que existen cantidades susceptibles de contarse en dos sentidos directamente opuestos: las distancias sobre una recta AB pueden ser recorridas en la direccion AB y en la opuesta BA, los tiempos pueden ser anteriores ó posteriores á un momento dado, los capitales pueden contarse como ganancias ó como pérdidas etc.

Si un número m representa una distancia, un tiempo ó un capital, se ha convenido en anteponerle uno de los signos *mas* y *menos*, para que además exprese el modo de ser de dichas cantidades.

Por ejemplo, si $+m$ representa una distancia recorrida en la direccion AB, otra distancia igual, pero contada en el sentido BA, se representa por $-m$; si un tiempo posterior á una época dada se expresa por $+20$ años, otro anterior en la misma cantidad, se expresará por -20 años; si una ganancia de 4000 reales se expresa por $+4000$, una pérdida igual será -4000.

Concretándonos al problema de los móviles, convendremos en que x representa indistintamente, en la ecuacion y en la fórmula del primer caso, $+$ la distancia del punto A al punto de encuentro, si éste se verifica á la derecha de A, y $-$ la distancia mencionada, si el encuentro tiene lugar á la izquierda de A. Igualmente, v y v' representan $+$ el espacio recorrido en un minuto por cada móvil, si el movimiento se verifica en el sentido AB, y $-$ dicho espacio, si el movimiento se verifica en la direccion BA.

En virtud de este convenio, la ecuacion del primer caso comprende las otras dos, y la fórmula

$$x = \frac{av}{v - v'},$$

se aplicará á todos los casos que puedan presentarse, sustituyendo x, v, v' respectivamente por $-x$, $-v$, $-v'$, cuando las distancias que representan estas cantidades sean recorridas por los móviles en la direccion BA.

Así, en el segundo caso, se cambiarán los signos de x, v, y v', y tendremos

$$-x = \frac{-av}{-v + v'}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{av}{v' - v}.$$

En el tercero, cambiando el signo de v' resulta

$$x = \frac{av}{v + v'}.$$

Escolios.

1.° Este procedimiento da siempre resultados exactos; pero no todas las cantidades concretas tienen dos modos de existencia directamente contrarios; y además no se ha demostrado, de una manera general, la correspondencia entre dichos modos de existencia y los signos *mas* y *menos*.

2.° La generalizacion de las fórmulas no podria lograrse sin admitir los convenios del número 38.

CAPÍTULO QUINTO.

RESOLUCION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TANTAS ECUACIONES COMO INCÓGNITAS.

I.—Definiciones.

86. Sistema de ecuaciones *es la reunion de dos ó mas ecuaciones que deben ser satisfechas por los mismos valores de las incógnitas.*

Solucion *de un sistema de ecuaciones es la reunion de valores de las incógnitas que verifican todas las ecuaciones del sistema.*

87. Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes,* cuando tienen las mismas soluciones.

Para demostrar la equivalencia de dos sistemas, es necesario patentizar que toda solucion del primero es solucion del segundo, y reciprocamente.

Diremos que un sistema no se altera, cuando se sustituya por otro equivalente.

88. Eliminar *una incógnita entre dos ecuaciones es deducir una nueva ecuacion que no contenga dicha incógnita, y que pueda sustituirse por cualquiera de las ecuaciones dadas sin alterar el sistema.*

Métodos de eliminacion son los diversos procedimientos que pueden emplearse para eliminar una incógnita.

II.—Resolucion de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

89. Toda ecuacion con dos incógnitas puede reducirse á la forma general

$$ax + by = c.$$

Para conseguirlo, basta quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, pasar al primer miembro los términos en x y los en y, así como al segundo los conocidos, y hacer la reduccion.

Propongámonos resolver el sistema de ecuaciones

$$ax + by = c \qquad [1]$$
$$a'x + b'y = c' \qquad [2].$$

90. Método de eliminacion por sustitucion. Despejando x en la primera ecuacion, como si la incógnita y fuese conocida, se obtiene

$$x = \frac{c - by}{a} \qquad [3];$$

sustituyendo este valor de x en la segunda ecuacion, resulta

$$a' \times \frac{c - by}{a} + b'y = c' \qquad [4].$$

Demostremos ahora que el sistema propuesto es equivalente al formado con una de las ecuaciones dadas y la ecuacion [4], esto es, á

$$ax + by = c \qquad [1]$$

$$a' \times \frac{c - by}{a} + b'y = c' \qquad [4].$$

En efecto: todo par de valores de x é y que convierta en identidades las ecuaciones propuestas, verifica tambien la ecuacion [3], que es la primera de aquellas en otra forma; por consiguiente sustituyendo y por su valor en la fraccion $\frac{c - by}{a}$ se obtiene el valor de x; pero la ecuacion [2] difiere de la [4] solamente en que x está sustituida por $\frac{c - by}{a}$, luego dando á x é y sus valores en la ecuacion [2] y poniendo el de y en la [4], se obtendrá el mismo resultado; y como la ecuacion [2] se convierte por hipótesis en una identidad, la [4] se convierte tambien en identidad.

Luego toda solucion del primer sistema, es solucion del segundo.

Recíprocamente, todo par de valores de x é y que verifique las ecuaciones [1] y [4], verifica la ecuacion [3], que es la [1] en otra forma; por consiguiente sustituyendo y por su valor en la fraccion $\frac{c - by}{a}$, se obtiene el valor de x; pero la ecuacion [4] difiere solamente de la [2] en que $\frac{c - by}{a}$ sustituye á x, luego dando á y su valor en la ecuacion [4] y poniendo los de x é y en la [2], se obtendrá el mismo resultado; y como la ecuacion [4] se convierte por hipótesis en una identidad, la [2] se convertirá tambien en identidad.

Luego toda solucion del segundo sistema, es solucion del primero.

Ahora bien, la ecuacion [4] no contiene otra incógnita que la y, por manera que la x ha sido eliminada.

En vista del procedimiento empleado, podremos decir:

Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, por el método de sustitucion, se despeja la incógnita que se quiere eliminar en una de las ecuaciones, y se sustituye su valor en la otra.

Resolviendo ahora la ecuacion [4], encontramos sucesivamente

$$a'c - a'by + ab'y = ac',$$
$$(ab' - ba')\,y = ac' - ca',$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuacion [1], ó lo que es igual, en su trasformada [3], será

$$x = \frac{c - \dfrac{abc' - bca'}{ab' - ba'}}{a} = \frac{acb' - bca' - abc' + bca'}{a\,(ab' - ba')} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones

$$7x - 2y = 11$$
$$4x + 3y = 27.$$

Despejando x en la primera ecuacion, resulta

$$x = \frac{11 + 2y}{7};$$

sustituyendo este valor de x en la segunda, se obtiene

$$4 \times \frac{11 + 2y}{7} + 3y = 27.$$

Esta ecuacion dá sucesivamente

$$44 + 8y + 21y = 189,$$
$$8y + 21y = 189 - 44,$$
$$29y = 145,$$
$$y = \frac{145}{29},\ y = 5.$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuacion

$$x = \frac{11 + 2y}{7},$$

resulta $$x = \frac{11 + 10}{7},\ x = 3.$$

Comprobacion.

$$7 . 3 - 2 . 5 = 11, \quad \text{ó} \quad 11 = 11.$$
$$4 . 3 + 3 . 5 = 27, \quad \text{ó} \quad 27 = 27.$$

91. Método de eliminacion por igualacion. Sean las ecuaciones

$$ax + by = c \qquad [1]$$
$$a'x + b'y = c' \qquad [2].$$

Si queremos eliminar la x, despejaremos esta incógnita en las dos ecuaciones, como si la y fuese conocida, y tendremos

$$x = \frac{c - by}{a}, \quad x = \frac{c' - b'y}{a'}.$$

Igualando, ahora, estos valores de x, resulta la ecuacion

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'} \qquad [3],$$

que no contiene la x.

Este método, en el fondo, es igual al de sustitucion, por lo que no nos detendremos á demostrar que la ecuacion [3] y una de las propuestas forman un sistema equivalente al de las ecuaciones [1] y [2].

El procedimiento seguido para eliminar la x, es el que expresa esta regla:

Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, por el método de igualacion, se despeja en las dos ecuaciones la incógnita que se trata de eliminar, y se igualan los valores obtenidos.

Resolviendo la ecuacion [3], se obtiene

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

sustituyendo este valor en cualquiera de las expresiones de x, se hallará, como en el método anterior,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

92. Método de eliminacion por reduccion. Sean las ecuaciones

$$ax + by = c \qquad [1]$$
$$a'x + b'y = c' \qquad [2].$$

Si los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar, la x por ejemplo, fuesen iguales, restando ordenadamente las ecuaciones, cuando los términos ax y $a'x$ tuviesen el mismo signo, y sumándolas, cuando dichos términos tuviesen signos contrarios, los términos en x desaparecerian por la reduccion, quedando eliminada esta incógnita.

Pero si multiplicamos la primera ecuacion por a' y la segunda por a, se convierten en

$$aa'x + ba'y = ca'$$
$$aa'x + ab'y = ac',$$

en las que los coeficientes de x son iguales.

Restándolas ordenadamente, se obtiene

$$aa'x - aa'x + ab'y - ba'y = ac' - ca',$$

y *reduciendo* será

$$ab'y - ba'y = ac' - ca' \quad [3].$$

Demostremos, ahora, que el sistema de las ecuaciones [1] y [2], puede sustituirse por las ecuaciones [1] y [3].

Suponiendo que en las ecuaciones propuestas pasan al primer miembro todos los términos, podrán representarse por

$$A = 0$$
$$A' = 0,$$

y el sistema de ecuaciones [1] y [3] será

$$A = 0$$
$$A'a - Aa' = 0.$$

Es evidente que los valores de x é y capaces de verificar el primer sistema, verifican el segundo; pues siendo $A = 0$ y $A' = 0$, $A'a - Aa'$ tambien se reduce á cero.

Recíprocamente, todo par de valores de x é y que verifique el segundo sistema, verifica tambien el primero; pues siendo $A'a - Aa' = 0$ y $A = 0$, $A'a$ debe ser cero, y como a no lo es, será $A' = 0$.

En vista del procedimiento empleado, podremos enunciar la regla siguiente:

Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, por el método de reduccion, se multiplica la primera ecuacion por el coeficiente que tiene dicha incógnita en la segunda; y la segunda ecuacion por el coeficiente de la misma incógnita en la primera, y se suman ó restan las ecuaciones, segun que los términos que contienen la incógnita lleven signos contrarios ó iguales.

La ecuacion

$$ab'y - ba'y = ac' - ca'$$

da

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

sustituyendo este valor en la ecuacion [1], y resolviéndola, se halla

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones

$$11x - 15y = 7$$
$$4x + 7y = 15.$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por 11, resulta

$$44x - 60y = 28$$
$$44x + 77y = 165;$$

restando éstas ordenadamente, obtendremos

$$137\,y = 137,$$
$$y = 1.$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuacion, será

$$11x - 15 = 7,$$
$$11x = 22,$$
$$x = 2.$$

Si los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar no son primos entre sí, se halla su mínimo comun múltiplo, y se multiplica cada ecuacion por el resultado de dividir el mínimo comun múltiplo por el coeficiente de la incógnita en dicha ecuacion.

Ejemplo. Sean las ecuaciones

$$48x - 26y = 35$$
$$-36x + 74y = 1.$$

El mínimo comun múltiplo de los coeficientes de x es 144; multiplicando la primera ecuacion por 3, y la segunda por 4, resulta

$$144x - 78y = 105,$$
$$-144x + 296y = 4.$$

Sumándolas tendremos

$$218y = 109$$
$$y = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene fácilmente

$$x = 1.$$

93. Las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned} \quad [1]$$

resueltas por los tres métodos de eliminacion que hemos expuesto, han dado siempre las fórmulas

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Supongamos, ahora, que las ecuaciones fuesen

$$\begin{aligned} ax - by &= c \\ a'x - b'y &= c', \end{aligned} \quad [2]$$

que se obtienen cambiando en las primeras los signos de b y b', y veamos cuales son las fórmulas que las resuelven.

Observemos, para esto, que todas las trasformaciones necesarias para hallar los valores de x é y, se reducen á sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Si suponemos que se resuelven simultáneamente los sistemas [1] y [2], efectuaremos en ambos la misma serie de operaciones con cantidades que sólo se diferencian en los signos de b y b'; luego las fórmulas resultantes de ambos sistemas, se diferenciarán tambien en dichos signos [40].

Segun esto, las fórmulas que resuelven el segundo sistema son

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ba' - ab'}.$$

Luego, *cuando se ha resuelto un sistema de dos ecuaciones literales con dos incógnitas, si se presenta otro sistema que se diferencia del primero en los signos de algunos términos;* NO SERÁ NECESARIO REPETIR LOS CÁLCULOS PARA HALLAR LAS NUEVAS FÓRMULAS, *bastando cambiar en las primeras los signos de los coeficientes de dichos términos.*

Propongámonos resolver, por medio de las fórmulas generales, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 48x - 26y &= 35 \\ -36x + 74y &= \ 1. \end{aligned}$$

Tenemos que cambiar en las fórmulas los signos de b y a' y hacer $a = 48$, $b = 26$, $c = 35$, $a' = 36$, $b' = 74$, $c' = 1$; pero, poner en las fórmulas $-b$ en lugar de b y hacer despues $b = 26$, es lo mismo que poner de una vez -26 en lugar de b; por la misma razon pondremos tambien desde luego -36 en vez de a'. Los valores de x é y, haciendo las mencionadas sustituciones, serán

$$x=\frac{35.74--26.1}{48.74--26.-36},\ y=\frac{48.1-35.-36}{48.74--26.-36},$$

ó
$$x=\frac{35.74+26.1}{48.74-26.36},\quad y=\frac{48.\ 1+35.36}{48.74-26.36};$$

de donde
$$x=1,\qquad y=\frac{1}{2}.$$

III.—Resolucion de un sistema de tres ó mas ecuaciones de primer grado, con tantas incógnitas como ecuaciones.

94. Toda ecuacion de primer grado con varias incógnitas, puede escribirse en la forma

$$ax+by+cz+\ldots\ldots=k.$$

Basta, para conseguirlo, quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, hacer la trasposicion y la reduccion.

Propongámonos resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned}2x-3y+5z&=20\\3x+\ y-2z&=\ 3\\6x+4y-3z&=14.\end{aligned}$$

Eliminando sucesivamente la x entre la primera ecuacion y cada una de las otras, por el método de reduccion, se obtienen dos ecuaciones con las incógnitas y, z:

$$\begin{aligned}-11y+19z&=54\\-13y+18z&=46.\end{aligned}$$

Si eliminamos ahora la incógnita y entre estas dos ecuaciones, se obtiene una ecuacion con la incógnita z:

$$49z=196.$$

El sistema de ecuaciones propuesto es equivalente á este otro

$$\begin{aligned}2x-\ 3y+\ 5z&=\ 20\\-11y+19z&=\ 54\\49z&=196,\end{aligned}$$

compuesto de una ecuacion de las dadas, otra de las ecuaciones con dos incógnitas, y de la ecuacion con la única incógnita z.

En efecto, si pasamos al primer miembro todos los términos de las ecuaciones, los segundos se reducen á cero, y aquellas adquieren la forma

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0 \qquad [1].$$

Llamando a, a', a'' á los coeficientes de x en las tres ecuaciones, y eliminando x entre la primera y cada una de las demás, obtendremos

$$Aa' - A'a = 0, \qquad Aa'' - A''a = 0.$$

Ahora es fácil demostrar que el sistema de ecuaciones [1], es equivalente á este otro

$$A = 0, \quad Aa' - A'a = 0, \quad Aa'' - A''a = 0 \quad [2].$$

En efecto: los valores de x, y, z, capaces de verificar las ecuaciones [1], convierten en cero las expresiones A, A' y A''; luego tambien convierten en cero los primeros miembros de las ecuaciones [2].

Recíprocamente, todo sistema de valores de las incógnitas, capaz de verificar las ecuaciones [2], verifica las ecuaciones [1], porque para que sea $A = 0$ y $Aa' - A'a = 0$, es necesario que A' sea cero; y para que sea $A = 0$ y $Aa'' - A''a = 0$, es tambien necesario que A'' sea cero.

Si ahora eliminamos la incógnita y entre las ecuaciones

$$Aa' - A'a = 0, \qquad Aa'' - A''a = 0,$$

estas dos ecuaciones podrán sustituirse por el sistema compuesto de una de ellas y de la que resulte de la eliminacion, que tendrá la forma $Bz = C$; por consiguiente el sistema [2], y por tanto el [1], es equivalente á este otro

$$A = 0, \quad Aa' - A'a = 0, \quad Bz = C \qquad [3].$$

En virtud de lo expuesto, debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 20 \\ -11y + 19z &= 54 \\ 49z &= 196. \end{aligned}$$

De la tercera se deduce $z = 4$; sustituyendo este valor en la segunda, resulta

$$\begin{aligned} -11y + 76 &= 54 \\ -11y &= -22 \\ y &= 2; \end{aligned}$$

poniendo en la primera los valores de z é y, resulta

$$2x - 6 + 20 = 20 \quad \text{ó} \quad 2x = 6, \text{ de donde } x = 3.$$

En general, *para resolver un sistema de* m *ecuaciones con* m *incógnitas, se elimina una de éstas sucesivamente entre una de las ecuaciones dadas y cada una de las demás; de este modo se obtienen* m — 1 *ecuaciones con* m — 1 *incógnitas; se elimina una de éstas entre una ecuacion y cada una de las demás, lo que da* m — 2 *ecuaciones con* m — 2 *incógnitas. Continuando de este modo se llegará á obtener dos ecuaciones con dos incógnitas, y por último una ecuacion con una sola incógnita. Se halla el valor de esta incógnita y se sustituye en una de las dos ecuaciones con dos incógnitas, lo que da el valor de una segunda incógnita; se sustituyen los dos valores hallados en una de las tres ecuaciones con tres incógnitas, y se continúa de este modo hasta hallar los valores de las* m *incógnitas.*

Ejemplo. Resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z - 2u &= 5 \\ x + 3y - z + 3u &= 8 \\ 4x - 2y + 3z - u &= 15 \\ 2x + y - 4z + 3u &= 3. \end{aligned} \qquad [1]$$

Eliminando la incógnita y entre la primera ecuacion y cada una de las demás, por el método de reduccion, se obtendrán las ecuaciones

$$\begin{aligned} 10x + 5z - 3u &= 23 \\ 2x + z - 3u &= -5 \\ 5x - 2z + u &= 8. \end{aligned} \qquad [2]$$

Eliminando ahora la incógnita u entre la primera ecuacion y cada una de las demás, resulta

$$\begin{aligned} 8x + 4z &= 28 \\ 25x - z &= 47, \end{aligned}$$

simplificando la primera ecuacion se obtiene

$$\begin{aligned} 2x + z &= 7 \\ 25x - z &= 47, \end{aligned} \qquad [3]$$

y sumando éstas resulta

$$27x = 54, \text{ de donde } x = 2.$$

Sustituyendo x por su valor en la primera de las ecuaciones [3], se halla $z = 3$.

Poniendo por x y z sus valores en la segunda de las ecuaciones [2], se obtendrá $u = 4$.

Por último, reemplazando las incógnitas x, z, u por sus respectivos valores en la primera de las ecuaciones dadas, se encuentra

$$y = -1.$$

CAPÍTULO SEXTO.

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

95. Cuando las incógnitas de un problema están ligadas entre sí y con los datos por medio de relaciones complicadas, se representa cada incógnita por una letra, y se escriben separadamente todas las relaciones de igualdad que se descubran en el enunciado.

Si resulta un sistema con tantas incógnitas como ecuaciones, su resolucion no presenta generalmente ninguna dificultad.

Mas adelante examinaremos el caso en que el número de incógnitas sea mayor ó menor que el de ecuaciones.

PROBLEMAS.

1.° *Distribuir* 5324 *pesetas entre dos personas, de modo que la parte de la segunda sea el triplo de la parte de la primera.*

Sea x la parte de la primera persona é y la de la segunda; las ecuaciones del problema son

$$x + y = 5324$$
$$y = 3x.$$

Eliminando la y, por el método de sustitucion, se obtiene

$$x + 3x = 5324,$$

de donde

$$x = 1331.$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuacion, resulta

$$y = 3 \times 1331, \quad \text{ó} \quad y = 3993.$$

Obsérvese que al resolver este problema empleando una sola incógnita [71], se hicieron las mismas trasformaciones que hemos hecho ahora, sólo que entónces la sencillez de las relaciones permitió efectuar desde luego mentalmente la sustitucion de la parte segunda y por el triplo de la primera $3x$.

2.° *Dividir el número* 420 *en tres partes, tales que la primera esté con la segunda en la relacion* 9 : 5, *y que la tercera sea mitad de la suma de las otras dos.*

Sean x, y, z las tres partes.

Las ecuaciones del problema son

$$x+y+z=420$$

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5}$$

$$z=\frac{x+y}{2}.$$

Sustituyendo el valor de z en la primera ecuacion, se obtiene el sistema de dos ecuaciones

$$x+y+\frac{x+y}{2}=420.$$

$$\frac{x}{9}=\frac{y}{5},$$

que quitando denominadores, trasponiendo y simplificando, se reducen á

$$\begin{aligned} x+\ y&=280\\ 5x-9y&=\ \ 0. \end{aligned}$$

Eliminando la x se obtiene $y=100$,
luego $x=280-100$, ó $x=180$,
y $z=420-100-180$ ó $z=140$.

3.° *Un objeto de oro ligado con plata tiene* 640 *centímetros cúbicos de volúmen y pesa* 10000 *gramos. Cada centímetro cúbico de oro puro pesa* 19,26 *gramos y cada centímetro cúbico de plata* 10,47 *gramos. ¿Cuántos gramos de oro y cuántos de plata contiene el objeto?*

Llamando x al peso del oro é y al de la plata, es evidente que el volúmen del oro contenido en el objeto es $\frac{x}{19,26}$, y el de la plata $\frac{y}{10,47}$ centímetros cúbicos; luego las ecuaciones son

$$x+y=10000$$

$$\frac{x}{19,26}+\frac{y}{10,47}=640.$$

Resolviéndolas se encontrará

$x=7229$ gramos, ó sea 7,229 kilógramos,
$y=2771$ gramos, ó sea 2,771 kilógramos.

4.° *Un banquero quiere emplear* 40000 *duros en un negocio, que debe producirle cierto tanto por ciento de ganancia, y para reunir dicha suma le faltan* 8500 *duros, que toma prestados á un interés menor: la operacion le produce* 3005 *duros. Otra operacion de iguales condiciones, en la que presta* 54600 *duros, de los cuales* 12800 *toma á préstamo, le produce un beneficio de* 4018 *duros. ¿Qué tanto por ciento ha producido el negocio, y á qué tanto por ciento le fueron prestadas las cantidades que le faltaban?*

Representando por x é y las incógnitas del problema, tendremos

$$\frac{40000x}{100} - \frac{8500y}{100} = 3005.$$
$$\frac{54600x}{100} - \frac{12800y}{100} = 4018.$$

Simplificándolas se convierten en

$$\begin{aligned} 80x - 17y &= 601 \\ 273x - 64y &= 2009. \end{aligned}$$

Resolviéndolas por cualquier método se obtendrá

$$x = 9, \quad y = 7.$$

5.° *Una persona se encarga de trasportar objetos de tres tamaños diferentes, á condicion de abonar por cada objeto que se rompa una cantidad igual á la que recibiria por la conduccion, si lo entregase intacto. En el primer viaje recibe* 4 *objetos pequeños,* 5 *medianos y* 8 *grandes; rompe los medianos, y recibe* 32 *reales. En el segundo viaje conduce* 6 *objetos pequeños,* 3 *medianos y* 5 *grandes; rompe los grandes y sólo recibe* 5 *reales. En el tercer viaje conduce* 7 *objetos pequeños,* 2 *medianos y* 6 *grandes; rompe los medianos y recibe* 43 *reales. ¿Cuál es el precio de trasporte de un objeto de cada tamaño?*

Sean x el precio de trasporte de un objeto pequeño, y el de uno mediano y z el de uno grande.

Las ecuaciones son

$$\begin{aligned} 4x - 5y + 8z &= 32 \\ 6x + 3y - 5z &= 5 \\ 7x - 2y + 6z &= 43. \end{aligned}$$

Resolviéndolas se hallará

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5.$$

CAPÍTULO SÉTIMO.

DISCUSION DE LAS FORMULAS QUE RESUELVEN DOS ECUACIONES GENERALES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

96. Vamos á examinar si los valores que adquieren las fórmulas generales

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

en ciertos casos particulares, convienen á las ecuaciones correspondientes á dichos casos.

Primer caso. Supongamos que el denominador $ab' - ba'$ sea cero, sin que lo sean los numeradores, y tendremos

$$x = \frac{cb' - bc'}{0}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{0},$$

valores infinitos.

Veamos, ahora, en qué se convierten las ecuaciones

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

por la hipótesis $ab' - ba' = 0$. De esta igualdad se deduce $a = \frac{ba'}{b'}$; sustituyendo este valor de a en la primera ecuacion, se convierte en

$$\frac{ba'x}{b'} + by = c,$$

ó quitando el denominador b'; y partiendo ambos miembros por b,

$$a'x + b'y = \frac{cb'}{b},$$

Si comparamos esta ecuacion con la segunda de las propuestas, vemos que serán *compatibles*, esto es, podrán verificarse por los mismos valores de x é y, siempre que se verifique la igualdad

$$\frac{cb'}{b} = c',$$

que se convierte fácilmente en esta otra

$$cb' - bc' = 0;$$

pero como hemos supuesto que ninguno de los numeradores es cero, se deduce que las ecuaciones propuestas son contradictorias ó incompatibles.

Esto mismo nos dicen las fórmulas, que al dar para x é y valores infinitos, manifiestan la imposibilidad de hallar dos cantidades que verifiquen el sistema.

Segundo caso. Supongamos que el denominador comun y uno de los numeradores sean iguales á cero, esto es,

$$ab' - ba' = 0, \qquad cb' - bc' = 0.$$

De estas igualdades se deduce

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'};$$

luego $$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}, \quad \text{ó} \quad ac' - ca' = 0.$$

Por consiguiente, si el numerador de x es cero, el de y tambien lo es. Del mismo modo demostraríamos la recíproca.

Tenemos, pues,

$$x = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{0}{0}.$$

Si representamos por m el valor de cada una de las fracciones iguales $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, tendremos

$$a = ma', \ b = mb', \ c = mc',$$

y sustituyendo en la primera ecuacion del sistema, resulta

$$ma'x + mb'y = mc',$$

que dividida por m se convierte en la segunda

$$a'x + b'y = c'.$$

Luego el sistema de dos ecuaciones se reduce á una sóla con dos incógnitas; pero de esta ecuacion se deduce

$$x = \frac{c' - b'y}{a'},$$

y dando á y valores cualesquiera, se hallarán otros correspondientes para x; por consiguiente los valores de x é y son indeterminados, segun manifiestan las fórmulas.

CAPÍTULO OCTAVO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON MAS INCÓGNITAS QUE ECUACIONES.

97. Consideremos, en primer lugar, la ecuacion con dos incógnitas

$$2x - 5y = 3.$$

Despejando la x se obtiene

$$x = \frac{3 + 5y}{2}.$$

Si ahora damos á y valores cualesquiera, y á x los que se obtengan efectuando las operaciones indicadas en $\frac{3+5y}{2}$, la ecuacion $x = \frac{3+5y}{2}$ se convertirá en identidad por cada par de valores correspondientes de x é y; por consiguiente sucederá lo mismo con la propuesta.

Haciendo sucesivamente $y = \ 0\ , 1, \ \ 2\ , 3, \ldots\ldots$

se obtendrá $\quad x = \frac{3}{2}, 4, \frac{13}{2}, 9, \ldots\ldots$

Una ecuacion de primer grado con dos ó mas incógnitas, tiene infinitas soluciones, por lo que se llama ecuacion *indeterminada*.

Se resolverá siempre despejando una de las incógnitas, y dando valores arbitrarios á las demás. Las incógnitas que reciben valores arbitrarios, se llaman *variables independientes;* y la que se ha despejado varía segun los valores que reciben aquellas: por esto se llama *funcion* de dichas variables.

En la resolucion anterior, la variable independiente es y, mientras que x es una funcion de y.

En general, se llama *funcion* de una ó mas cantidades variables, toda cantidad cuyo valor depende de los de dichas variables.

98. *Para resolver un sistema de dos ó mas ecuaciones con mayor número de incógnitas, se despejan tantas incógnitas como ecuaciones tenga el sistema, considerando las restantes como cantidades conocidas; se da á éstas valores cualesquiera; y estos valores, juntos con los correspondien-*

tes de las incógnitas despejadas, formarán las soluciones del sistema.

Sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y + 5z + 3u &= 13 \\ x + 4y - 8z - 3u &= 5. \end{aligned}$$

Considerando z y u como cantidades conocidas, y pasándolas por consiguiente al segundo miembro, las ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} 2x - y &= 13 - 5z - 3u \\ x + 4y &= 5 + 8z + 3u. \end{aligned}$$

Resolviéndolas se encuentra

$$x = \frac{19 - 4z - 3u}{3}, \quad y = \frac{-1 + 7z + 3u}{3}.$$

Si hacemos $z = 1,\ u = 2$, se obtiene $x = 3,\ y = 4$;
suponiendo $z = 1,\ u = 3$, resulta $x = 2,\ y = 5$.

De este modo pueden hallarse cuantas soluciones se quieran.

CAPÍTULO NOVENO.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON MENOS INCÓGNITAS QUE ECUACIONES.

99. *Para resolver un sistema de ecuaciones con menor número de incógnitas, se resuelven tantas ecuaciones como incógnitas tenga el sistema. Si los valores hallados verifican las ecuaciones restantes, todas las propuestas serán compatibles; pero si dichos valores no verifican las ecuaciones restantes, el sistema no tiene solucion, ó lo que es lo mismo, las ecuaciones que lo forman son incompatibles.*

Sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 5 \\ 6x - 2y &= 1 \\ 2x + 4y &= 5 \\ 10x - 2y &= 3. \end{aligned}$$

Resolviendo las dos primeras se hallará

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 1;$$

sustituyendo estos valores en las demás, veremos que se convierten en identidades; luego las ecuaciones propuestas tienen la solucion $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$.

Sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x - \ \ y &= 4 \\ 5x - 2y &= 5 \\ 2x - 3y &= 8. \end{aligned}$$

Las dos primeras dan $x = 3$, $y = 5$; sustituyendo estos valores en la tercera resulta

$$6 - 15 = 8,$$

igualdad absurda, luego las ecuaciones propuestas son incompatibles.

100. Si las ecuaciones propuestas contienen *coeficientes indeterminados*, podrá hallarse la condicion ó condiciones á que deben satisfacer dichos coeficientes para que el sistema sea compatible.

Sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax - \ \ y &= 4 \\ bx + 2y &= 2 \\ x + \ \ y &= 2. \end{aligned}$$

Para determinar los valores particulares de a y b, que las hacen compatibles, deduciremos de la 1.ª y 3.ª los valores de x é y, que son

$$x = \frac{6}{a+1}, \quad y = \frac{2a-4}{a+1};$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion segunda, se halla

$$\frac{6b}{a+1} + \frac{4a-8}{a+1} = 2,$$

de donde

$$a = 5 - 3b.$$

Como esta *ecuacion de condicion* es indeterminada, podremos asignar á los coeficientes a y b infinitos valores.

Si hacemos $b = \frac{1}{3}$, será $a = 4$, y las ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} 4x - \ \ y &= 4 \\ \frac{x}{3} + 2y &= 2 \\ x + \ \ y &= 2, \end{aligned}$$

que son compatibles.

EJERCICIOS.

I. Resolver las ecuaciones siguientes

$$\frac{7x}{30}+\frac{x}{45}-\frac{1}{9}=\frac{4x}{5}-\frac{11x}{20}.\quad \frac{6x}{11}-\frac{x}{3}+\frac{12x}{9}=\frac{x}{22}+1.$$

$$\frac{ab}{x}-c=\frac{a}{2x}+b.\quad \frac{a^2-x^2}{ax}=b-\frac{x}{a}.$$

II. Dos personas prestan capitales iguales, la primera al 7 por ciento y la segunda al 4; la ganancia de la primera excede á la de la segunda en 1500 pesetas. ¿Qué capital prestaron?

III. Una persona que posee 250000 reales, presta una parte de su capital al 8 por ciento de interés, y la parte restante al 5 por ciento; recibe por los intereses de todo el capital la cantidad de 17900 reales. ¿Cuáles son las partes?

IV. Una aleacion de plata pesa 40 kilógramos, y su ley es de 900 milésimas; para obtenerla se ha ligado plata de 800 y de 960 milésimas. ¿Cuántos kilógramos de cada especie han entrado en la aleacion?

V. En un reloj son las cuatro en punto. ¿A qué hora el minutero, que señala las doce, alcanzará al horario?

VI. Resolver el sistema de ecuaciones

$$5x-y=21$$
$$x+2y=42.$$

VII. Resolver el sistema de ecuaciones

$$bcx+2b-cy=0$$
$$b\,y+\frac{a\,(c^3-b^3)}{bc}=\frac{2b^3}{c}+c^3x.$$

VIII. Resolver el sistema de ecuaciones

$$5x-2y-\ z=25$$
$$2x-\ y-2z=\ 3$$
$$x+7y-6z=\ 4.$$

IX. Resolver el sistema de ecuaciones

$$x+y-z=16$$
$$x-y+z=\ 6$$
$$x+y+z=20$$

X. Una persona dice á otra: si me das 60 reales, tendré tanto dinero como tú; y si te doy la misma cantidad, tendrás tres veces mas dinero que yo. ¿Cuánto tenia cada persona?

XI. Por 6 libras de azúcar y 5 de café he pagado 85 reales, y otra vez pagué 109 reales por 2 libras de azúcar y 9 de café. ¿A qué precio he pagado estos géneros?

XII. Tres hermanos han contraido una deuda de 4000 reales: al primero le falta para poder satisfacerla las dos quintas partes del capital del tercero; al segundo la mitad del capital del primero; y al tercero los cinco treceavos del capital del segundo. ¿Cuál es el capital de cada uno?

XIII. Hallar un número compuesto de cuatro cifras: la suma de todas ha de ser 21; la segunda y la cuarta, contando de izquierda á derecha, valen doble que la primera; la primera, segunda y cuarta equivalen al séxtuplo de la tercera; y restando la primera de la segunda, la diferencia es doble que restando la tercera de la cuarta.

XIV. Resolver el sistema *indeterminado* siguiente

$$\frac{5(x-3)}{3}-\frac{5(y-2)}{2}+y=\frac{5y}{4}+\frac{2(x-7)}{4}+5$$

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+5=2x-3y,$$

XV. Averiguar si son compatibles las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x-\ \ y&=2\\ 2x-3y&=1\\ 3x-5y&=0. \end{aligned}$$

LIBRO TERCERO.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

CAPÍTULO PRIMERO.

CUADRADO Y RAIZ CUADRADA DE LOS MONOMIOS.

101. *Para elevar al cuadrado un producto de varios factores, se eleva cada factor al cuadrado.*

Si el producto es abc, tendremos

$$(abc)^2 = abc \times abc = abcabc = aabbcc = a^2\,b^2\,c^2.$$

102. *Para elevar al cuadrado una potencia cualquiera, se multiplica su exponente por 2.*

Si la potencia es a^m, tendremos

$$(a^m)^2 = a^m \times a^m = a^{m+m} = a^{2m}.$$

103. *Para elevar al cuadrado un monomio entero, se eleva el coeficiente á dicha potencia, y se multiplican los exponentes de las letras por 2.*

Esta regla es una consecuencia de las anteriores.

Así,
$$(5a^2b^3c^5d)^2 = 25a^4b^6c^{10}d^2$$
$$(-2abc^6)^2 = 4a^2b^2c^{12}.$$

104. *Para elevar una fraccion al cuadrado, se elevan á dicha potencia sus dos términos.*

En efecto: $$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a\,.\,a}{b\,.\,b} = \frac{a^2}{b^2}.$$

105. *Para extraer la raiz cuadrada de un producto de varios factores, se extrae la raiz de cada factor.*

Así, $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c}$;

porque $(\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2\,(\sqrt{b})^2\,(\sqrt{c})^2 = abc.$

106. *Para extraer la raiz cuadrada de una potencia de grado par, se divide su exponente por 2.*

Así $\sqrt{a^{2m}} = a^m$, puesto que $(a^m)^2 = a^{2m}$.

107. *Para extraer la raiz cuadrada de un monomio entero, se extrae la raiz cuadrada del coeficiente y se dividen por 2 los exponentes de las letras.*

Esta regla es consecuencia de las dos anteriores.

Así, $\sqrt{49a^6b^8c^{10}} = 7a^3b^4c^5$.

Se ve que un monomio no tiene raiz cuadrada exacta: 1.° cuando el coeficiente no es cuadrado; 2.° cuando alguno de los exponentes no es par.

Sea, por ejemplo, $\sqrt{27a^5b^4c^2}$.

No siendo posible extraer exactamente la raiz cuadrada de 27 ni la de a^5, el monomio no tiene raiz cuadrada exacta.

En este caso, las expresiones irracionales pueden con frecuencia simplificarse *extrayendo la raiz de los factores que la tienen exacta.*

El monomio $27a^5b^4c^2$ se descompone en

$$9a^2b^4c^2 \times 3a.$$

Extrayendo la raiz cuadrada exacta del primer factor, y multiplicándola por $\sqrt{3a}$, que no puede efectuarse, tendremos

$$\sqrt{27a^5b^4c^2} = 3ab^2c\sqrt{3a}.$$

Por el contrario, *se introduce un factor bajo el signo radical, elevándole al cuadrado.*

De este modo se obtiene

$$2a^2b\sqrt{5a} = \sqrt{4a^4b^2 \times 5a} = \sqrt{20a^5b^2}.$$

108. *Para extraer la raiz cuadrada de una fraccion, se divide la raiz cuadrada del numerador por la del denominador.*

Queremos demostrar que

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

En efecto: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt{\dfrac{25a^2b^4}{16m^6n^8}} = \dfrac{5ab^2}{4m^3n^4}$.

2.° $\sqrt{\dfrac{48a^3b^4c^5}{98m^2n^5}} = \dfrac{4ab^2c^2\sqrt{3ac}}{7mn^2\sqrt{2n}}$.

109. Sabemos que las potencias de grado par de una cantidad no varian, aunque se cambie el signo de dicha cantidad, así

$$(+a)^2 = a^2,\ (-a)^2 = a^2;$$

por consiguiente *la raiz de grado par de toda cantidad positiva, tiene dos valores iguales y de signo contrario.*

Por ejemplo, la raiz cuadrada de 16 es 4 y -4, lo que se expresa diciendo

$$\sqrt{16} = \pm 4.$$

Se llaman *expresiones imaginarias* las raices de grado par de las cantidades negativas.

Si tenemos $\sqrt{-16}$, esta raiz no puede ser positiva, porque una cantidad positiva elevada al cuadrado da resultado positivo; pero tampoco puede ser dicha raiz negativa, porque toda cantidad negativa elevada al cuadrado da resultado tambien positivo. No hay, pues, cantidad ninguna que represente la expresion $\sqrt{-16}$: por esto se llama *expresion imaginaria.*

Lo mismo podríamos decir de una raiz de otro grado par cualquiera.

Por oposicion, se llaman cantidades *reales* las que no son imaginarias.

CAPÍTULO SEGUNDO.

RESOLUCION DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

110. Una ecuacion de segundo grado con una incógnita puede tener tres clases de términos: unos que contengan la segunda potencia de la incógnita, otros que contengan la primera potencia, y términos conocidos.

Si la ecuacion tiene estas tres clases de términos, puede reducirse á la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

para lo cual se quitarán denominadores, se pasarán todos los términos al primer miembro, lo que reduce á cero el segundo, y se efectuarán las reducciones posibles.

La ecuacion que contiene las tres clases de términos mencionadas, se llama *completa*.

Puede suceder que falten los términos conocidos, los que contienen la potencia primera de la incógnita, ó unos y otros; las ecuaciones entónces son respectivamente:

$$ax^2 + bx = 0,$$
$$ax^2 + c = 0,$$
$$ax^2 = 0,$$

y se llaman *incompletas*.

I.—Ecuacion completa.

111. Vamos á resolver la ecuacion general completa

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad [1],$$

en la que a se supone siempre positiva, pudiendo ser b y c positivas ó negativas, ó una positiva y otra negativa. Si a fuese negativa se cambiarian los signos á todos los términos de la ecuacion.

Dividiendo la ecuacion por el primer coeficiente a, resulta

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

haciendo, para abreviar, $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, se convierte la ecuacion anterior en

$$x^2 + px + q = 0 \qquad [2];$$

pasando q al segundo miembro, resulta

$$x^2 + px = -q.$$

El primer miembro es ahora la suma de los dos primeros términos del cuadrado de $x + \frac{p}{2}$, puesto que

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4};$$

si añadimos $\frac{p^2}{4}$ á los dos miembros, tendremos

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q.$$

Ahora el primer miembro de esta ecuacion tiene raiz cuadrada exacta; escribiéndole en forma de cuadrado será

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q;$$

extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros, resulta

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

de donde $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad [3].$$

Llamamos *raiz* de una ecuacion á toda expresion numérica ó literal, carezca ó no de sentido, que puesta en lugar de la incógnita hace idénticos los dos miembros.

La ecuacion [2] tiene, pues, dos raices, que son

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \quad -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Traduciendo la fórmula [3] al lenguaje vulgar, tendremos:

En toda ecuacion de la forma $x^2+px+q=0$, *la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario, mas ó menos la raiz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de dicha mitad y el término conocido.*

112. Sustituyendo p y q por $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ en la fórmula [3], se obtiene la que resuelve la ecuacion [1].

Así tendremos

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}},$$

ó $$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}};$$

extrayendo ahora la raiz cuadrada del denominador $4a^2$, y sumando ó restando las fracciones de igual denominador que resultan, obtendremos por último

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad [4],$$

fórmula que traducida al lenguaje vulgar, dice:

En toda ecuacion de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, *la incógnita es igual al coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario, mas ó menos la raiz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de dicho coeficiente y el cuádruplo del producto de los coeficientes primero y tercero, dividido todo por el duplo del coeficiente del primer término.*

EJEMPLOS.

1.° Resolver la ecuacion

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Aplicando la fórmula [3], resulta

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 15}, \qquad \text{ó} \qquad x = 1 \pm 4;$$

luego los valores que verifican la ecuacion propuesta son

$$x = 1 + 4, \quad x = 1 - 4; \quad \text{ó} \quad x = 5, \quad x = -3.$$

2.° Resolver la ecuacion

$$6x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Aplicando la fórmula [4], se obtiene

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12}, \quad \text{ó} \quad x = \frac{5 \pm 13}{12},$$

de donde $x = \frac{18}{12}$, $x = -\frac{8}{12}$; ó $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{2}{3}$.

II.—Ecuaciones incompletas.

113. Sea la ecuacion

$$ax^2 + bx = 0.$$

Siendo x factor comun á los términos del primer miembro, podemos escribir

$$x\,(ax + b) = 0.$$

El producto $x\,(ax + b)$ se convierte en cero si uno de los factores es cero; luego $x = 0$ es una raiz de la ecuacion propuesta, y obtendremos otra raiz dando á x un valor tal que el factor $ax+b$ se convierta en cero; pero de

$$ax+b=0,$$

se deduce

$$x=-\frac{b}{a};$$

luego $x=0$, $x=-\frac{b}{a}$ son las raices de la ecuaciòn propuesta.

La fórmula [4] puede aplicarse á este caso.

En efecto: haciendo $c=0$ en la ecuacion [1], se convierte en $ax^2+bx=0$, que es la ecuacion propuesta.

Si damos á c el valor cero en la fórmula, obtendremos

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{2a},\quad \text{ó}\quad x=\frac{-b\pm b}{2a};$$

de donde

$$x=\frac{0}{2a}=0,\qquad x=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

114. Sea la ecuacion incompleta

$$ax^2+c=0.$$

Pasando c al segundo miembro, será

$$ax^2=-c,$$

de donde

$$x^2=-\frac{c}{a},\qquad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Si a y c tienen el mismo signo, las raices $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ y $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ serán imaginarias; pero si dichas letras tienen signos contrarios, las raices serán reales.

Haciendo $b=0$ en la fórmula [4], podrá aplicarse al caso actual. En efecto:

$$x=\frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a}=\pm\sqrt{\frac{-4ac}{4a^2}}=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

115. Si la ecuacion incompleta es

$$ax^2=0,$$

es evidente que será satisfecha por $x=0$.

Aplicando la fórmula [4] se hallaria lo mismo.

III.—Descomposicion del trinomio $x^2 + px + q$ en factores de primer grado, y propiedades de las raices de la ecuacion $x^2 + px + q = 0$.

116. Añadiendo y restando la cantidad $\frac{p^2}{4}$ al primer miembro de la ecuacion

$$x^2 + px + q = 0,$$

se convierte en

$$x^2 + px + q + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} = 0,$$

ó sea en

$$\left(x^2 + px + \frac{p^2}{4}\right) - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0.$$

La cantidad del primer paréntesis es el cuadrado del binomio $x + \frac{p}{2}$, y la del segundo se puede considerar como el cuadrado de su raiz cuadrada; así tendremos

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = 0;$$

pero ahora se presenta la diferencia entre los cuadrados de dos cantidades, que sabemos es igual á la suma de dichas cantidades multiplicadas por su diferencia; luego la ecuacion se convierte en

$$\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = 0.$$

Si hacemos $\quad -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = x'$

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = x'',$$

la ecuacion adquiere la forma

$$(x - x')(x - x'') = 0.$$

Luego *el trinomio* $x^2 + px + q$ *es igual al producto de dos binomios, que se forman restando de* x *las dos raices de la ecuacion* $x^2 + px + q = 0$.

Ejemplo. Descomponer el trinomio $x^2 - 2x - 15$ en factores de primer. grado.

Resolviendo la ecuacion $x^2 - 2x - 15 = 0$, se obtiene

$$x' = -3, \quad x'' = 5; \text{ luego}$$

$$x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5).$$

117. Hemos visto que llamando x', x'' á las raices de la ecuacion $x^2 + px + q = 0$, el primer miembro de la misma es igual á $(x - x')(x - x'')$. Efectuando esta multiplicacion obtendremos

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Ahora bien, para que este trinomio sea igual á

$$x^2 + px + q,$$

es necesario que se verifiquen las relaciones siguientes:

$$x' + x'' = -p$$
$$x'x'' = q.$$

Luego, *en una ecuacion de segundo grado de la forma* $x^2 + px + q = 0$, *la suma de las raices es igual al coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario; y el producto de las mismas es igual al término conocido.*

En virtud de este principio, puede escribirse una ecuacion de segundo grado cuyas raices sean conocidas.

Sean éstas, por ejemplo, 4 y -7; el coeficiente del segundo término será

$$-(4 - 7) = 3,$$

y el término conocido

$$4 \times -7 = -28;$$

luego la ecuacion es

$$x^2 + 3x - 28 = 0.$$

Resolviéndola se hallará efectivamente

$$x' = 4, \quad x'' = -7.$$

CAPÍTULO TERCERO.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

118. PROBLEMAS.

1.° *Hallar un número tal que el quíntuplo de su cuadrado, disminuido en su producto por* 63, *sea igual á* 180.

Llamando x al número que buscamos, la ecuacion es

$$5x^2 - 63x = 180,$$

ó

$$5x^2 - 63x - 180 = 0;$$

de donde

$$x = \frac{63 \pm \sqrt{7569}}{10},$$

ó

$$x = \frac{63 \pm 87}{10}.$$

Tomando el signo *mas*, será $x' = 15$.

Comprobacion: $5 \cdot 15^2 - 63 \cdot 15 = 1125 - 945 = 180$.

La raiz $x' = 15$ es, pues, una solucion del problema.

Tomando el signo *menos* en el valor de x, será $x'' = -\frac{12}{5}$.

Para interpretar este valor negativo observemos que poniendo $-x$ en lugar de x, la ecuacion se convierte en

$$5x^2 + 63x = 180;$$

resolviendo ésta, los valores de x sólo se diferencian de los obtenidos anteriormente en el signo del coeficiente del segundo término; luego

$$x = \frac{-63 \pm \sqrt{7569}}{10},$$

de donde

$$x' = \frac{12}{5}, \quad x'' = -15.$$

Por consiguiente la raiz negativa $-\frac{12}{5}$ es solucion, prescindiendo del signo, del siguiente problema:

Hallar un número tal que el quíntuplo de su cuadrado, aumentado en su producto por 63, *sea igual á* 180.

2.° *Por* 144 *reales compra una persona cierta cantidad de* *café; si con el mismo dinero comprase* 6 *libras menos, cada libra le costaria* 4 *reales mas. ¿Cuántas libras ha comprado?*

Sea x la incógnita: el primer precio será $\frac{144}{x}$, y el segundo $\frac{144}{x-6}$; como éste excede al primero en 4 reales, la ecuacion es

$$\frac{144}{x-6}-\frac{144}{x}=4.$$

Quitando denominadores, reduciendo y simplificando, se convierte en

$$x^2-6x-216=0;$$

resolviéndola será $\qquad x=3\pm 15.$

Tomando el signo *mas*, tendremos $x'=18$, valor que verifica la ecuacion, y es solucion del problema.

Tomando el signo *menos*, se obtiene $x'=-12$, valor que prescindiendo del signo es solucion del siguiente problema:

Por 144 *reales compra una persona cierta cantidad de café; si con el mismo dinero comprase* 6 *libras mas, cada libra le costaria* 4 *reales menos. ¿Cuántas libras ha comprado?*

3.° *Hallar dos números cuya suma sea* 15 *y su producto* 56.

Si llamamos x á uno de ellos, el otro será $15-x$; y la ecuacion

$$x(15-x)=56,$$

ó

$$x^2-15x+56=0.$$

Resolviéndola resulta $x=\frac{15}{2}\pm\frac{1}{2}$.

Las raices son, pues, $x'=8$, $x''=7$; pero

$$x'+x''=15,\quad x'x''=56;$$

luego los valores de x son los dos números buscados.

Obtendríamos el mismo resultado observando que las incógnitas del problema son las raices de una ecuacion, que tiene por coeficiente del segundo término la suma dada, tomada con signo contrario, y por tercer término el producto dado; llamando u á la incógnita de dicha ecuacion, se tiene

$$u^2-15u+56=0,$$

cuyas raices $u'=8$, $u''=7$ deben ser los números buscados.

CAPÍTULO CUARTO.

DISCUSION DE LAS ECUACIONES Y PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

119. La ecuacion

$$x^2 + px + q = 0,$$

ha dado la fórmula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Para discutirla distinguiremos tres casos, segun que el término q sea negativo, cero ó positivo.

PRIMER CASO. Siendo el término q negativo, si ponemos su signo de manifiesto, la diferencia $\frac{p^2}{4} - q$ se convierte en la suma $\frac{p^2}{4} + q$ de dos números positivos; luego la cantidad subradical es positiva y mayor que $\frac{p^2}{4}$, por consiguiente el valor del radical es real y mayor que $\frac{p}{2}$.

Los dos valores de x son reales en este caso, y podrán hallarse exactamente si $\frac{p^2}{4} - q$ tiene raiz cuadrada exacta, y con cuanta aproximacion se desee, en el caso contrario.

El coeficiente p será positivo ó negativo: si es positivo, las raices son

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

siendo p y q números absolutos, y como el radical es mayor que $\frac{p}{2}$, la primera será positiva; en cuanto á la segunda evidentemente es negativa.

Si p es negativo, las raices son

$$\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

positiva la primera y negativa la segunda.

La raiz positiva es en general solucion del problema propuesto, y la negativa de otro análogo, que se obtiene poniendo $-x$ en lugar de x en la ecuacion, y modificando el enunciado primitivo de modo que la ecuacion nueva sea su traduccion exacta al lenguaje algebráico. Este cambio de signo no altera los valores absolutos de las raices, pero cambia sus signos.

En efecto: si p es positivo, poniendo á cada coeficiente su signo, resulta la ecuacion

$$x^2 + px - q = 0,$$

que da
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

y la ecuacion

$$x^2 - px - q = 0,$$

que resulta poniendo $-x$ en lugar de x en la primera, da

$$x = +\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Separando las raices de la primera ecuacion, serán

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

separando igualmente las de la segunda, se obtiene

$$\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Donde se ve que estas dos raices se diferencian de las anteriores en el signo.

El mismo resultado obtendríamos si p fuese negativa.

En resúmen: si q es cantidad negativa, las raices de la ecuacion que nos ocupa son reales, una positiva y otra negativa.

Segundo caso. Si q es igual á cero, el radical $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ se convierte en $\frac{p}{2}$.

Si p es positivo, las raices son $-\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}$, de las cuales, la primera $-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}$ equivalente á cero; y la segunda $-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}$ se reduce á $-p$.

Si p es negativo, las raices serán $\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$: la primera $\frac{p}{2}+\frac{p}{2}$ se reduce á p, y la segunda $\frac{p}{2}-\frac{p}{2}$ equivale á cero.

Se ve que estas últimas se diferencian de las anteriores en el signo.

Ya hemos visto que en este caso la ecuacion se convierte en

$$x^2+px=0, \quad \text{ó} \quad x(x+p)=0;$$

el primer miembro será cero si $x=0$, lo que da una raiz, ó si $x+p=0$, de donde $x=-p$, lo que da la otra raiz.

Tercer caso. Si q es cantidad positiva, podrá ser menor, igual ó mayor que $\frac{p^2}{4}$.

Si $q<\frac{p^2}{4}$, la cantidad subradical es positiva y menor que $\frac{p^2}{4}$, luego el radical es real y menor que $\frac{p}{2}$; por consiguiente en esta hipótesis las raices son reales.

Si p es positivo, las raices son

$$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

evidentemente negativas; y si p es negativo serán

$$\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

ambas positivas.

Si q es igual á $\frac{p^2}{4}$, los dos valores de x se reducen á uno solo, que será $-\frac{p}{2}$ ó $\frac{p}{2}$, segun sea el signo de p.

Poniendo en la ecuacion $\frac{p^2}{4}$ en lugar de q, se convierte en

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = 0,$$

ó

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

ó bien

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Esta ecuacion se convierte en identidad por todos los valores de x que anulen uno ú otro de los factores del primer miembro; pero el primer factor da

$$x + \frac{p}{2} = 0, \quad \text{de donde } x = -\frac{p}{2},$$

y el segundo da exactamente lo mismo; luego la ecuacion tiene *dos raices iguales* á $-\frac{p}{2}$.

Si $q > \frac{p^2}{4}$, la cantidad subradical $\frac{p^2}{4} - q$ es negativa, y los dos valores de x son imaginarios.

Llamemos d á la diferencia $q - \frac{p^2}{4}$, y tendremos

$$q = \frac{p^2}{4} + d,$$

siendo d una cantidad positiva. Sustituyendo q por su valor, la ecuacion será

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + d = 0$$

ó bien

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + d = 0;$$

pero $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ es siempre una cantidad positiva, y como d tambien lo es, resulta que la ecuacion encierra un absurdo, puesto que la suma de dos cantidades positivas no puede ser igual á cero.

De aquí se deduce que las raices imaginarias indican un absurdo en la ecuacion.

120. Algunos de los resultados obtenidos en la discusion anterior, pueden deducirse brevemente del principio demostrado en el número 117.

Sea la ecuacion

$$x^2 \pm px - q = 0.$$

Sabemos que siendo q cantidad negativa, las raices son reales.

Ahora bien, el producto de ellas debe ser igual á $-q$, luego una es positiva y otra negativa.

Si p es positivo, la suma de las raices es $-p$, luego la negativa tiene mayor valor absoluto; y si p es negativo, la suma de las raices es $+p$, luego será mayor la positiva.

Sea la ecuacion

$$x^2 \pm px + q = 0.$$

Supongamos reales las raices.

Debiendo ser el producto de ellas igual á $+q$, serán las dos positivas ó las dos negativas. Si p es positivo, la suma de las raices es $-p$, luego las dos son negativas; si por el contrario, p es negativo, la suma de las raices es $+p$, y serán ambas positivas.

EJEMPLOS.

$x^2-2x-8=0$, raices reales, de signo contrario; mayor la positiva.
$x^2+2x-3=0$, id. id., mayor la negativa.
$x^2-7x+12=0$, id., las dos positivas.
$x^2+7x+10=0$, id., las dos negativas.
$x^2-5x+8=0$, raices imaginarias.
$x^2-6x+9=0$, raices iguales positivas.
$x^2+8x+16=0$, raices iguales negativas.

121. La ecuacion

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ha dado la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si suponemos $a = 0$, los valores de x son

$$\frac{-b \pm b}{0};$$

el primero se reduce á $\frac{0}{0}$ y el segundo á $-\frac{2b}{0}$.

Sin embargo, haciendo en la ecuacion la misma hipótesis se convierte en $bx + c = 0$, de donde $x = -\frac{c}{b}$.

Examinemos si efectivamente es indeterminado el primer valor de x, ó si existe algun factor comun á los dos miembros de la fraccion

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Multiplicando los dos términos por $\sqrt{b^2-4ac}+b$, el numerador será

$$\left(\sqrt{b^2-4ac}-b\right)\left(\sqrt{b^2-4ac}+b\right)$$

esto es, el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia; luego la fraccion se convierte en

$$\frac{b^2-4ac-b^2}{2a\left(\sqrt{b^2-4ac}+b\right)}.$$

Reduciendo en el numerador, notaremos un factor $2a$ comun á los dos términos, que siendo $a=0$ los convierte en cero; pero suprimiendo dicho factor, la fraccion es

$$\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}},$$

y haciendo ahora $a=0$, la fraccion adquiere el valor $-\frac{c}{b}$, deducido de la ecuacion directamente.

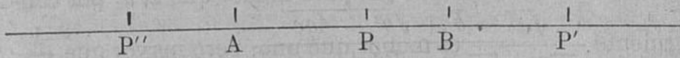
La segunda raiz $-\frac{2b}{0}$ es el límite de

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

cuando a disminuye indefinidamente; puesto que en tal caso $\sqrt{b^2-4ac}$ crece y tiene por límite $\sqrt{b^2}$ ó b, por consiguiente el numerador tiende al valor $-2b$; á medida que a disminuye, la fraccion aumenta en valor absoluto, y cuando a tenga un valor suficientemente pequeño, el valor absoluto de la fraccion será mayor que cualquiera cantidad asignable; luego dicho valor es infinito, cuando $a=0$.

Problema.

122. *Hallar en la recta AB que une dos luces, un punto igualmente iluminado por cada una de ellas.*



Sean a y b las intensidades respectivas de las luces A y B, ó sea, las cantidades de luz que arroja cada una de ellas á la unidad de distancia; y representemos por d la distancia entre los puntos A y B.

Suponemos conocido un principio de Física que dice: *las intensidades de una luz á distancias diferentes, son inversamente proporcionales á los cuadrados de las distancias.*

Si el punto buscado está situado entre A y B, por ejemplo en P, y llamamos x á la distancia AP, la PB será $d - x$; ahora bien, siendo a la intensidad de la primera luz á la unidad de distancia, á una distancia como 2 será $\frac{a}{4}$, á una distancia como 3 será $\frac{a}{9}$, y en fin á la distancia x será $\frac{a}{x^2}$; igualmente, la intensidad de la segunda luz á la distancia $d - x$ será

$$\frac{b}{(d-x)^2};$$

debiendo ser iguales las intensidades de las dos luces en el punto P, tendremos la ecuacion

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Pudiéramos resolverla por el método general, esto es, reduciéndola á la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y aplicando la fórmula correspondiente; pero es mas sencillo convertirla en otra de primer grado.

Para esto, se extrae la raiz cuadrada de ámbos miembros, y resulta

$$\frac{\sqrt{a}}{x^2} = \pm\frac{\sqrt{b}}{d-x}.$$

Resolviendo esta ecuacion se obtiene fácilmente

$$x = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}.$$

DISCUSION. Examinaremos sucesivamente tres casos principales, que serán $a > b$, $a = b$, $a < b$.

PRIMER CASO. Siendo $a > b$, tendremos $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, luego $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ será mayor que $\sqrt{a}$, pero menor que $2\sqrt{a}$; por consiguiente $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ es menor que uno, pero mayor que $\frac{1}{2}$; luego el primer valor de x, $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, será menor que d y mayor que $\frac{d}{2}$. Esto significa que el punto P está situado entre A y B, mas cerca de B que de A. Se comprende que así debe suceder, puesto que siendo diferentes las intensidades de las dos luces, el punto igualmente iluminado debe estar mas próximo á la luz mas débil.

El segundo valor de x es $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; el denominador es positivo y menor que $\sqrt{a}$, luego $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ es positivo y mayor que uno; por consiguiente el valor de x es positivo y mayor que d.

Este resultado significa que existe á la derecha de B otro punto, tal como P′, igualmente iluminado por las dos luces.

Vemos que en este caso tiene el problema dos soluciones.

SEGUNDO CASO. Si $a = b$, el primer valor de x es $\frac{d\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$ ó $\frac{d}{2}$.

Esto significa que el punto P está en medio del intérvalo AB que separa las dos luces, lo que es evidente.

El segundo valor de x es $\frac{d\sqrt{a}}{0} = \infty$. Si suponemos que en la fórmula $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ es $a > b$, pero que b aumenta gradualmente, el denominador irá disminuyendo, y la fraccion aumentará; si la diferencia entre a y b es suficientemente pequeña, la fraccion podrá adquirir un valor tan grande como se quiera, de modo que el punto P′ se alejará cuanto queramos, y cuando b llegue á ser igual á a, dicho punto se colocará á una distancia infinita, esto es, desaparecerá.

En este caso tiene, pues, el problema una sóla solucion.

Tercer caso. Si $a < b$, la suma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es mayor $2\sqrt{a}$, luego el primer valor de x es menor que $\frac{d}{2}$, por tanto, el punto P estará más próximo á la luz A que á la B, como efectivamente debe suceder.

El segundo valor de x es negativo; poniendo $-x$ en lugar de x en la ecuacion se convierte en

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d+x)^2}$$

y debiendo representar $d+x$ la distancia del punto B al que se busca, es claro que dicho punto está á la izquierda de A.

Tambien en este caso tiene el problema dos soluciones.

CAPÍTULO QUINTO.

ECUACIONES BICUADRADAS.

123. Se llama ecuacion *bicuadrada* toda ecuacion de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Dividiendo por a todos sus términos, y representando por p y q las fracciones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$, se trasforma en

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

Para resolver esta ecuacion, hagamos $x^2 = y$, en cuyo supuesto será $x^4 = y^2$, y la ecuacion se convierte en la de segundo grado

$$y^2 + py + q = 0.$$

Sabemos que

$$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

y como de $x^2 = y$ se deduce $x = \pm\sqrt{y}$, será

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

La incógnita x tiene, segun vemos, los cuatro valores siguientes:

$$\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}, \qquad -\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

$$\sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}, \qquad -\sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Si q es cantidad negativa, las dos primeras raices son reales, iguales en valor absoluto, pero una positiva y otra negativa. Las raices tercera y cuarta son imaginarias.

Si $q = 0$, y p es positiva, las dos primeras raices son iguales á cero; pero si $q = 0$, y p es negativa, dichas raices son iguales á $\sqrt{p}$, aunque de signo contrario. La tercera y cuarta son imaginarias en el primer caso y cero en el segundo.

Si q y p son positivas, las cuatro raices son imaginarias; pero si q es positiva y p negativa, serán todas reales, iguales y de signo contrario dos á dos, cuando sea $q < \frac{p^2}{4}$; todas reales, iguales en valor absoluto á $\sqrt{\frac{p}{2}}$, pero dos positivas y dos negativas, cuando sea $q = \frac{p^2}{4}$; y todas imaginarias, cuando sea $q > \frac{p^2}{4}$.

124. En algunos casos, los radicales dobles que se obtienen resolviendo una ecuacion bicuadrada, pueden convertirse en la suma ó diferencia de dos radicales simples.

Propongámonos convertir el radical doble $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ en otra expresion de la forma $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$, siendo A y B cantidades racionales.

Sabemos [25] que

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = a+\sqrt{b} + 2\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}} + a - \sqrt{b},$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=a+\sqrt{b}-2\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}}+a-\sqrt{b};$$

pero es evidente [105] que

$$2\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{(a+\sqrt{b})\,(a-\sqrt{b})}=2\sqrt{a^2-b};$$

luego

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a+2\sqrt{a^2-b},$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2=2a-2\sqrt{a^2-b}.$$

Extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros de las igualdades anteriores, será

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}};$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}$$

siendo conocida la suma y la diferencia de dos cantidades, tendremos [4, 2.°].

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}+\frac{1}{2}\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}-\frac{1}{2}\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

ó sea $$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad [1]$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \quad [2]$$

Las expresiones equivalentes á $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ y $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, que acabamos de obtener, serán la suma de dos radicales simples, siempre que a^2-b tenga raiz cuadrada exacta; pero si a^2-b no tiene raiz cuadrada exacta, no deberá emplearse la trasformacion explicada, puesto que en lugar de un radical doble que teniamos, obtendremos la suma de dos radicales dobles tambien.

Ejemplo. Sea la expresion

$$\sqrt{15-2\sqrt{14}}.$$

Introduciendo el factor 2 bajo el segundo radical, se convierte en $\sqrt{15-\sqrt{56}}$.

Ahora, $a^2 - b = 15^2 - 56 = 13^2$ es un cuadrado perfecto, luego podrá trasformarse el radical doble en la diferencia de dos radicales simples.

Aplicando la fórmula [2] se obtiene

$$\sqrt{15-\sqrt{56}} = \sqrt{\frac{15+13}{2}} - \sqrt{\frac{15-13}{2}},$$

ó

$$\sqrt{15-\sqrt{56}} = \sqrt{14} - \sqrt{1} = \sqrt{14} - 1.$$

CAPÍTULO SEXTO.

EXPRESIONES IMAGINARIAS.

125. Hemos llamado expresiones imaginarias á las raices de grado par de las cantidades negativas. Vamos á ocuparnos de las imaginarias de segundo grado, esto es, de aquellas en las que el índice de la raiz es 2.

Monomio imaginario es el producto de una cantidad real por la raiz cuadrada de una cantidad negativa; por ejemplo

$$(a+b)\sqrt{-5}.$$

126. Las expresiones imaginarias se admiten en el cálculo algebráico, *conviniendo* en aplicarles las reglas dadas para el cálculo de las cantidades reales.

En virtud de este convenio tendremos

$$\sqrt{-A} = \sqrt{A\,.\,-1} = \sqrt{A}\ \sqrt{-1};$$

luego *todo monomio imaginario puede reducirse á la forma* $a\sqrt{-1}$, en la que a representa una cantidad real positiva ó negativa, de uno ó muchos términos.

127. *Binomio imaginario* es toda expresion algebráica compuesta de una cantidad real cualquiera, y de un monomio imaginario; por ejemplo

$$a + b\sqrt{-1}.$$

Los binomios imaginarios se consideran siempre reducidos á la forma $a + b\sqrt{-1}$, en la que a y b son cantidades realescualesquiera. Esto es posible, porque, segun hemos visto, todo monomio imaginario puede adquirir la forma $b\sqrt{-1}$.

128. TEOREMA. *La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos binomios imaginarios, es en general un binomio imaginario.*

Suma. $(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}.$

Casos particulares. Si $a+c=0$, la suma de los binomios es un monomio imaginario; y si $b+d=0$, dicha suma es la cantidad real $a+c$.

Diferencia. $(a+b\sqrt{-1})-(c+d\sqrt{-1})=(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}.$

Casos particulares. Si $a-c=0$, la diferencia es un monomio imaginario; y si $b-d=0$, será la cantidad real $a-c$.

Producto. $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1}.$

Casos particulares. Si $ac-bd=0$, el producto es un monomio imaginario; y si $bc+ad=0$, una cantidad real.

Cociente. $$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}{(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})}=$$
$$\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

Casos particulares. Si el término real es cero, el cociente será un monomio imaginario; y si el coeficiente de $\sqrt{-1}$ es cero, dicho cociente es una cantidad real.

129. En virtud de la definicion de potencia, tenemos

$$\begin{aligned}(\sqrt{-1})^1&=\sqrt{-1}\\(\sqrt{-1})^2&=\quad -1\\(\sqrt{-1})^3&=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}\;=-\sqrt{-1}\\(\sqrt{-1})^4&=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2=-1\,.\,-1=1.\end{aligned}$$

Toda potencia de $\sqrt{-1}$ superior á la cuarta, tendrá su exponente representado por $4n$, $4n+1$, $4n+2$ ó $4n+3$, siendo n un número entero; pero

$$(\sqrt{-1})^4=1;$$

luego $$(\sqrt{-1})^{4n}=1^n=1;$$

por consiguiente

$$(\sqrt{-1})^{4n}=1,\ (\sqrt{-1})^{4n+1}=\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2}=-1,\ (\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}.$$

Vemos que cualquiera que sea el exponente de $\sqrt{-1}$, se obtendrá siempre una de las cuatro primeras potencias.

130. Se llama *módulo* de una expresion imaginaria $a+b\sqrt{-1}$, la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de a y b, esto es, $\sqrt{a^2+b^2}$.

Dos expresiones imaginarias se llaman *conjugadas*, cuando sólo se diferencian en el signo del coeficiente de $\sqrt{-1}$.

Tales son $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$.

Es evidente que dos imaginarias conjugadas tienen el mismo módulo $\sqrt{a^2+b^2}$.

131. Teorema. *Si el módulo de una expresion imaginaria es cero, la expresion es igual á cero.*

Sea la expresion imaginaria $a+b\sqrt{-1}$; su módulo será $\sqrt{a^2+b^2}$.

Para que $\sqrt{a^2+b^2}$ sea cero, es necesario que la cantidad subradical sea cero; pero a^2+b^2 es la suma de dos cantidades positivas, puesto que a y b tienen un valor real, luego debe ser $a=0$, $b=0$; por consiguiente $a+b\sqrt{-1}=0$.

132. Teorema recíproco. *Si una expresion imaginaria* $a+b\sqrt{-1}$ *es cero, su módulo es tambien cero.*

Para que $a+b\sqrt{-1}$ sea cero, es necesario que sea $a=0$, $b=0$; luego $\sqrt{a^2+b^2}=0$.

133. Teorema. *El módulo del producto de dos factores imaginarios, es igual al producto de los módulos de dichos factores.*

Hemos visto [128] que

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1}.$$

El módulo de este producto es

$$\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$$

Poniendo á a^2 y b^2 por factor comun, el módulo del producto será

$$\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)};$$

pero $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{c^2+d^2}$,

y como $\sqrt{a^2+b^2}$ y $\sqrt{c^2+d^2}$ son los módulos de los factores, el teorema es cierto.

134. TEOREMA. *El módulo del cociente de dos expresiones imaginarias, es igual al cociente de los módulos de dichas expresiones.*

Llamando $a''+b''\sqrt{-1}$ á la expresion imaginaria que resulta de dividir $a+b\sqrt{-1}$ por $a'+b'\sqrt{-1}$, tendremos

$$a+b\sqrt{-1} = (a'+b'\sqrt{-1})(a''+b''\sqrt{-1}).$$

Pero, segun el teorema anterior, es

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a'^2+b'^2}\ \sqrt{a''^2+b''^2};$$

luego $$\sqrt{a''^2+b''^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

igualdad que demuestra el teorema.

135. TEOREMA. *Un producto de varios factores imaginarios es igual á cero, si uno cualquiera de los factores es igual á cero.*

En efecto: es evidente que el teorema demostrado en el número 133 para un producto de dos factores imaginarios, es igualmente cierto si los factores son mas de dos. Ahora bien, si uno de estos factores es cero, su módulo tambien será cero, luego el producto de los módulos se reducirá á cero; pero el producto de los módulos es el módulo del producto, y siendo este módulo cero, dicho producto tambien es cero.

EJERCICIOS.

I. Extraer las siguientes raices:

$$\sqrt{144a^8b^6},\qquad \sqrt{\frac{4a^6b^4}{9m^2n^{10}}},\qquad \sqrt{a^2 - ab + \frac{b^2}{4}}.$$

II. Separar de la cantidad subradical los factores que tengan raiz cuadrada exacta en las expresiones siguientes:

$$\sqrt{\frac{a}{4}},\quad \sqrt{147a^3b^4c^5d},\quad \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 1},\quad \sqrt{\frac{20a^4b^6c^9d}{9m^8n^4}}.$$

III. Introducir bajo el signo radical los factores que están fuera del mismo en las siguientes expresiones.

$$\frac{1}{5}\sqrt{a},\qquad 3b^2c\sqrt{7abc},\qquad (a-1)\sqrt{a-1},\qquad \frac{\sqrt{3abc}}{5a^2b^3}$$

IV. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 8x = -15,\qquad x^2 - 4x - 43 = 0,$$

$$x^2 - 5x + 9 = 0,\qquad \frac{5}{x} + 1 = \frac{x}{5}.$$

V. Resolver las ecuaciones

$$3x^2 = 17x - 10,\qquad 2 = 15x^2 + x,$$

$$\frac{x}{2+5x} = \frac{7}{6x-5}.\qquad \frac{36}{2x+3} + 3 = \frac{111}{5x-8}.$$

VI. Descomponer en factores de primer grado los trinomios siguientes:

$$x^2 + x = 2,\qquad x^2 + (a - 2b)\,x - 2ab.$$

VII. Escribir una ecuacion de segundo grado cuyas raices sean 5 y $2a$.

VIII. Una persona quiere repartir 180 reales entre varios pobres; si los pobres fuesen 6 menos, cada uno recibiria un real mas. ¿Cuántos son los pobres?

IX. Los capitales de dos socios importan 6000 duros: el primero de éstos se retira de la sociedad á los 15 meses, y recibe 4050 duros entre capital é intereses, el segundo se retira á los 7 meses, recibiendo 2540 duros tambien entre capital é intereses. ¿Cual es el capital de cada sócio?

LIBRO CUARTO.

POTENCIAS Y RAICES DE LAS CANTIDADES ALGEBRÁICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

POTENCIAS Y RAICES DE LOS MONOMIOS.

I.—Potencias de los monomios.

136. *Para elevar un producto de varios factores á una potencia cualquiera, se eleva cada factor á dicha potencia.*

En efecto:

$$(abc)^m = abc \,.\, abc....... \text{ repetido } m \text{ veces};$$

pero $$abc \,.\, abc .... = aa ... bb ... cc ....,$$

entrando cada letra a, b y c por factor m veces; luego

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

137. *Para elevar una potencia de una cantidad á otra potencia cualquiera, se multiplican los exponentes.*

En efecto:

$$(a^m)^n = a^m \,.\, a^m ...... = a^{m+m+.....}$$

entrando m en el exponente por sumando n veces; luego

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

138. *Para elevar un monomio entero á una potencia cualquiera, se eleva el coeficiente á dicha potencia, y se multiplican los exponentes de las letras por el de la potencia. El resultado será positivo si el exponente de la potencia es par, y llevará el signo del monomio si dicho exponente es impar* [39].

Esta regla es consecuencia inmediata de las anteriores. Así

$$(3ab^2c^5)^3 = 27a^3b^6c^{15}, \qquad (-2a^4b^3c^2)^4 = 16a^{16}b^{12}c^8,$$

$$(-5m^2n^4p)^3 = -125m^6n^{12}p^3.$$

139. *Para elevar una fraccion á una potencia cualquiera, se elevan á dicha potencia sus dos términos.*

En efecto: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots = \frac{a \cdot a \dots}{b \cdot b \dots}$,

entrando cada letra a y b por factor m veces, luego

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Así, $$\left(\frac{3a^2b}{5cd^3}\right)^3 = \frac{27a^6b^3}{125c^3d^9}.$$

II.—Raices de los monomios.

140. *Para extraer la raiz de un grado cualquiera de un producto de varios factores, se extrae la raiz del mismo grado de cada factor.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c}.$$

En efecto:

$$\left(\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \left(\sqrt[m]{b}\right)^m \left(\sqrt[m]{c}\right)^m = abc.$$

141. *Para extraer la raiz de un grado cualquiera de una potencia, cuando el exponente de ésta es divisible por el índice de la raiz, se efectúa dicha division.*

Decimos que

$$\sqrt[m]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{m}} = a^n.$$

En efecto:

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

142. *Para extraer la raiz de cualquier grado de un monomio entero, se extrae la raiz del mismo grado del coeficiente, y se divide el exponente de cada letra por el índice de la raiz. El signo del resultado será $\pm$ si la cantidad subradical es positiva y el índice de la raiz es par, y llevará el signo de la cantidad subradical si dicho índice es impar.*

Esta regla es consecuencia de las anteriores.

Así

$$\sqrt[4]{81a^4b^8c^{12}} = \pm 3ab^2c^3,\ \sqrt[3]{216a^9c^6d^3} = 6a^3c^2d,$$

$$\sqrt[5]{-32a^{10}b^{15}} = -2a^2b^3.$$

143. Para que la raiz de un monomio sea exacta, esto es, para que esta raiz sea una cantidad racional, se necesita: 1.° que el coeficiente tenga raiz exacta; 2.° que los exponentes de las letras sean divisibles por el índice de la raiz. Si falta alguna de estas condiciones, se descompone, si es posible, la cantidad subradical en dos factores, tales que uno de ellos tenga raiz exacta, y se extrae la raiz de dicho factor, dejando indicada la del otro.

Así

$$\sqrt[3]{54a^5b^7c^2} = \sqrt[3]{27a^3b^6} \times \sqrt[3]{2a^2bc^2} = 3ab^2\sqrt[3]{2a^2bc^2}.$$

Por el contrario, se introduce un factor bajo el signo radical, elevándole á la potencia indicada por el índice del radical.

Así

$$4ab^2c\sqrt[4]{3a^3b^2} = \sqrt[4]{256a^4b^8c^4} \times \sqrt[4]{3a^3b^2} = \sqrt[4]{768a^7b^{10}c^4}.$$

144. *Para extraer la raiz de cualquier grado de una fraccion, se divide la raiz del numerador por la del denominador.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

En efecto:

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b}.$$

Así

$$\sqrt[3]{\frac{8a^6b^3}{27m^9n^3}} = \frac{2a^2b}{3m^3n};\quad \sqrt{\frac{32a^4bc}{9mn^6}} = \frac{4a^2\sqrt{2bc}}{3n^3\sqrt{m}}.$$

CAPÍTULO SEGUNDO.

POTENCIAS Y RAICES DE LOS POLINOMIOS.

I.—Permutaciones y combinaciones.

145. *Se llaman* PERMUTACIONES *los grupos que se pueden formar con varias letras ú objetos, tomándolos uno á uno, dos á dos, tres á tres, etc., de modo que ningun objeto se repita en el mismo grupo, y que dos grupos de igual número de objetos se diferencien en uno de éstos ó en el órden de colocacion.*

Vamos á formar las permutaciones binarias de las letras $a, b, c, d, \ldots\ldots$

Para esto, se escribe á la derecha de cada letra todas las demás, una á una.

Así tendremos,

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & \ldots\ldots \\ ba, & bc, & bd, & \ldots\ldots \\ ca, & cb, & cd, & \ldots\ldots \\ da, & db, & dc, & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Para formar ahora las permutaciones ternarias, se escribe á la derecha de cada binaria las letras que no entran en ella, una á una.

Así resulta

$$\begin{array}{llllll} abc, & abd,\ldots. & acb, & acd\ldots. & adb, & adc\ldots. \\ bac, & bad\ldots. & bca, & bcd\ldots. & bda, & bdc\ldots. \\ cab, & cad\ldots. & cba, & cbd\ldots. & cda, & cdb\ldots. \\ dab, & dac\ldots. & dba, & dbc\;, & dca, & dcb\ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Las permutaciones cuaternarias se formarian escribiendo á la derecha de cada ternaria las letras que no entran en ella, una á una.

146. PROBLEMA: *Hallar el número de permutaciones que pueden formarse con* m *letras tomadas* n *á* n.

Es evidente que con m letras tomadas una á una se forman m permutaciones.

Si á la derecha de la primera letra se colocan una á una las demás, se formarán $m-1$ permutaciones de dos letras; igualmente la segunda letra origina otras $m-1$ permutaciones, y así todas las demás; luego las m letras dadas originan

$$m\,(m-1)$$

permutaciones binarias.

Si á la derecha de la primera permutacion binaria se escriben una á una las $m-2$ letras que no entran en ella, se formarán $m-2$ permutaciones ternarias; del mismo modo, la segunda permutacion binaria origina otras $m-2$ ternarias, y así todas las demás; luego las $m\,(m-1)$ permutaciones binarias originan

$$m\,(m-1)\,(m-2)$$

permutaciones ternarias.

En general, si á la derecha de la primera permutacion de x letras se colocan una á una las $m-x$ letras que no entran en ella, se formarán $m-x$ permutaciones de $x+1$ letras; igualmente la segunda permutacion de x letras origina otras $m-x$ permutaciones de $x+1$ letras, y así todas las demás; luego representando por P_x el número de permutaciones de m letras tomadas x á x, cuando se tome en cada permutacion una letra mas, resultarán $P_x\,(m-x)$ permutaciones de $x+1$ letras, esto es,

$$P_{x+1}=P_x(m-x).$$

Haciendo en esta fórmula sucesivamente $x=1,=2,=3,....=n-1$, y recordando que $P_1=m$, tendremos

$$\begin{aligned}P_2&=m\,(m-1)\\P_3&=P_2(m-2)\\P_4&=P_3(m-3)\\&\dots\dots\dots\\P_n&=P_{n-1}(m-n+1).\end{aligned}$$

Si ahora multiplicamos ordenadamente estas igualdades, y suprimimos despues los factores comunes á los dos miembros del resultado, tendremos

$$P_n=m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)....\,(m-n+1). \qquad [1]$$

Ejemplo. Hallar el número de permutaciones que pueden formarse con 12 letras tomadas 6 á 6.

El primer factor m vale 12, y cada uno de los demás se halla disminuyendo el anterior en una unidad, y el último $m-n+1$ vale $12-6+1=7$; luego

$$P_6=12\,.\,11\,.\,10\,.\,9\,.\,8\,.\,7=665280.$$

147. Si en la fórmula [1] suponemos $m = n$, el último factor $m - n + 1$ se reduce á 1, y será

$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 1,$$

ó

$$P_m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots m \qquad [2].$$

Esta fórmula dá el número de permutaciones que se pueden formar con m letras entrando todas ellas en cada permutacion.

Así, el número de permutaciones de 5 letras, tomando todas en cada grupo, es

$$P_5 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120.$$

148. *Se llaman* COMBINACIONES *los grupos que se pueden formar con varias letras ú objetos, tomándolos uno á uno, dos á dos, tres á tres, etc., de modo que ningun objeto se repita en el mismo grupo, y que dos grupos de igual número de objetos se diferencien por lo menos en uno de éstos.*

Para formar las combinaciones binarias de las letras *a, b, c, d, e*....., se escriben á la derecha de cada letra todas las siguientes, una á una.

Así tendremos,

ab, ac, ad, ae......
bc, bd, be......
cd, ce......
de......
. . . .

Para formar las combinaciones ternarias, se escriben á la derecha de cada combinacion binaria las letras que siguen á la última.

Así se obtienen

abc, abd, abe...., *acd, ace*.... *ade*....
bcd, bce.... *bde*....
cde....
. . . .

Las combinaciones cuaternarias se formarian escribiendo á la derecha de cada combinacion ternaria las letras que siguen á la última.

149. PROBLEMA. *Hallar el número de combinaciones que pueden formarse con* m *letras tomadas* n *á* n.

Si suponemos formadas las combinaciones de m letras tomadas dos á dos, cada combinacion, alterando el órden de las letras, dará dos permutaciones; por ejemplo, la combinacion *ab* dará las permutaciones *ab* y *ba*, luego el número de combinaciones binarias es la mitad del número de permutaciones; llamando C_2 al número de aquellas, será

$$C_2 = \frac{m\,(m-1)}{2}.$$

Si se han formado las combinaciones ternarias de m letras, alterando el órden de éstas en cada combinacion de todas las maneras posibles, resultarán, segun la fórmula [2], $1 \,.\, 2 \,.\, 3$ permutaciones; por ejemplo, la combinacion *abc* origina las permutaciones

abc, acb, bac, bca, cab, cba;

luego el número de combinaciones ternarias es igual al de permutaciones dividido por $1 \,.\, 2 \,.\, 3$; así

$$C_3 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

En general, si suponemos formadas las combinaciones de m letras tomadas n á n, y alteramos de todas las maneras posibles el órden de las n letras que forman una combinacion, se originan

$$1 \;\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n$$

permutaciones; luego para hallar el número de combinaciones de m letras n á n, se divide el número de permutaciones de las mismas letras por el producto

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n.$$

Así

$$C_n = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n}.$$

Ejemplo. Hallar el número de combinaciones que se pueden formar con 10 letras tomadas 4 á 4.

Haciendo $m = 10$, $n = 4$ en la fórmula [3], se obtiene

$$C_4 = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 210.$$

150. Teorema. *El número de combinaciones de* m *letras tomadas* n *á* n *es igual al número de combinaciones de las mismas letras tomadas* m — n *á* m — n.

Si de las m letras dadas separamos n, formarán éstas una combinacion de n letras; y las $m - n$ no separadas, formarán igualmente otra combinacion de $m - n$ letras.

Supongamos que vuelven á reunirse las m letras: si separamos un grupo que contenga n de ellas, pero distinto del separado la primera vez, tendremos una segunda combinacion de n letras, y las no separadas formarán igualmente otra combinacion de $m-n$ letras, distinta de la primera.

Luego á cada combinacion de n letras corresponde otra de $m-n$ letras; por consiguiente el número de las primeras, es igual al de las segundas.

Así, el número de combinaciones de 12 letras tomadas 3 á 3, es igual al número de combinaciones de 12 letras tomadas 9 á 9.

II.—Fórmula del binomio de Newton.

151. Efectuando sucesivamente las multiplicaciones de dos, tres, cuatro etc. factores binomios, cuyos primeros términos son iguales y los segundos diferentes, se obtiene

$$(x+a)\,(x+b)=x^2\begin{array}{l|l} +a & x+ab. \\ +b & \end{array}$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)=x^3\begin{array}{l|l|l} +a & x^2+ab & x+abc. \\ +b & \quad+ac & \\ +c & \quad+bc & \end{array}$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)=x^4\begin{array}{l|l|l|l} +a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd. \\ +b & \quad+ac & \quad+abd & \\ +c & \quad+ad & \quad+acd & \\ +d & \quad+bc & \quad+bcd & \\ & \quad+bd & & \\ & \quad+cd & & \end{array}$$

En la formacion de estos productos se observa la ley siguiente:

El exponente de x *en el primer término es igual al número de factores binomios, y disminuye sucesivamente en una unidad. El coeficiente del primer término es la unidad, el del segundo, la suma de los segundos términos de los factores; el del tercero, la suma de sus combinaciones binarias; el del cuarto, la suma de las combinaciones ternarias, etc. El último término es el producto de los segundos términos de los binomios.*

Demostremos, ahora, que si la ley enunciada se verifica para m factores binomios, se verificará igualmente para $m+1$.

Representemos el producto de m factores por la expresion

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + U,$$

en la que, con objeto de abreviar, se representan por A, B, C,..... U los coeficientes de x, esto es,

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + \dots\dots\dots \\ B &= ab + ac + bc + \dots\dots \\ C &= abc + abd + acd + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U &= abcd\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Multiplicando dicho producto por un factor nuevo $x + p$, se encuentra

$$\begin{array}{l} x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + U \\ x \; + p \\ \hline x^{m+1} \begin{array}{l|l|l|l} + A & x^m + B & x^{m-1} + C & x^{m-2} + \dots\dots \\ + p & \quad + Ap & \quad + Bp & \quad + \dots\ Up. \end{array} \end{array}$$

Examinando este producto se reconoce que el exponente de x en el primer término es igual al número de binomios, y que disminuye sucesivamente en una unidad.

El coeficiente del primer término es la unidad, el del segundo es $A + p$, y como A es la suma de los segundos términos de los m binomios y p el segundo término del binomio nuevo, $A + p$ es la suma de los segundos términos de los $m + 1$ binomios.

El coeficiente del tercer término es $B + Ap$, siendo B la suma de las combinaciones binarias de m letras. Pero es evidente que dadas las combinaciones binarias de m letras, se hallarán las combinaciones posibles del mismo órden con una letra más, agregando á las ya formadas los grupos que resulten poniendo la letra nueva á la derecha de cada una de las primeras; luego

$$B + Ap \text{ ó sea } B + (a + b + c + \dots) p$$

es la suma de las combinaciones binarias de los segundos términos de los $p + 1$ binomios.

El coeficiente del cuarto término es $C + Bp$, siendo C la suma de las combinaciones ternarias de m letras; si añadimos una letra más, originará otras combinaciones ternarias, que podrán formarse colocando la nueva letra p á la derecha de cada combinacion binaria de m letras; luego

$$C + Bp \text{ ó sea } C + (ab + ac + bc + \dots) p$$

cuarta, y sustituyéndolas por s, s^2, s^3 y s^4 en la expresion anterior, se obtendrá la potencia cuarta de $a+b+c$.

Así tendremos

$$\begin{aligned} s &= b + c \\ s^2 &= b^2 + 2bc + c^2 \\ s^3 &= b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \\ s^4 &= b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4; \end{aligned}$$

luego

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3(b+c) + 6a^2(b^2+2bc+c^2) + 4a(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3) + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4.$$

ó $(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+4a^3b+4a^3c+4b^3a+4b^3c+4c^3a+4c^3b+6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2+12a^2bc+12b^2ac+12c^2ab.$

En general,

$$(a+b+c+\ldots.)^m=(a+s)^m=a^m+ma^{m-1}s+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}s^2+\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}s^3+\ldots..+s^m.$$

Donde vemos que la potencia m de un polinomio depende de varias potencias de otro polinomio s, que tiene un término menos que el propuesto.

Representando s ó $b+c+d+\ldots.$ por otro binomio $b+s'$, las potencias de s dependerán de varias potencias de s', polinomio que tiene dos términos menos que el propuesto.

Continuando del mismo modo, la potencia $(a+b+c+\ldots)^m$ llegará á depender solamente de varias potencias de un binomio, que se desarrollarán fácilmente.

158. Representando por a las decenas de un número entero y por b las unidades, el número será $a+b$; elevando este binomio á la potencia m, se hallará la composicion de una potencia cualquiera de un número mayor que 10.

Por ejemplo, de la expresion

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

se deduce que la potencia cuarta de un número mayor que 10, es igual á la cuarta potencia de las decenas, más el cuádruplo del cubo de las decenas multiplicado por las unidades, más el séxtuplo del cuadrado de las decenas por el de las unidades, más el cuádruplo de las decenas multiplicadas por el cubo de las unidades, más la cuarta potencia de las unidades.

IV.—Raices de los números y de los polinomios.

Raices de los números.

159. Los razonamientos que nos condujeron en Aritmética á las reglas de la raiz cuadrada y de la cúbica, se apoyan en la composicion del cuadrado y cubo de un número mayor que 10.

Segun hemos visto en el número anterior, podemos ahora estudiar la composicion de una potencia cualquiera m de un número compuesto de decenas y unidades; por consiguiente nada más fácil que deducir la regla para extraer la raiz m de un número, mediante razonamientos análogos á los expuestos en las raices cuadrada y cúbica.

Sin embargo, la teoría de logaritmos, que expondremos en el libro siguiente, da un procedimiento general y breve para hallar la raiz de cualquier grado de un número, por tanto nos limitaremos aquí á indicar la posibilidad de hallar reglas especiales para la extraccion de raices de índice mayor que 3.

160. Raices de los polinomios.

Sea un polinomio $A+B+C+D+......$, y su raiz del grado m, $a+b+c+d+......$

Supongamos que el polinomio propuesto y su raiz se hallen ordenados por las potencias decrecientes de una misma letra.

Es evidente que

$$A+B+C+D+....=(a+b+c+d+....)^m;$$

ó sea [157]

$$A+B+C+D+....=a^m+ma^{m-1}(b+c+d+.....)+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+c+d+....)^2+..... \quad [1]$$

El primer término del desarrollo de esta potencia es a^m [23], puesto que dicha potencia es un producto de m factores ordenados por las potencias de una misma letra; luego

$$A=a^m, \text{ de donde } a=\sqrt[m]{A}.$$

Por consiguiente, para hallar el primer término a de la raiz, se extrae la raiz del grado m del primer término del polinomio propuesto.

Por ejemplo, para hallar el 5.° término, haremos $n = 4$, y será

$$T_5 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 . 2 . 3 . 4} a^4 x^{m-4}.$$

Para hallar el último término, observaremos que el desarrollo tiene $m + 1$ términos, y se hará $n = m$; así el último término será

$$\frac{m(m-1)(m-2) .... 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 ...... m} a^m x^0;$$

pero el numerador y el denominador de la fraccion son ambos el producto de todos los números enteros desde 1 hasta m, y por tanto iguales, y $x^0 = 1$; luego el último término es a^m, segun sabíamos.

154. Si damos á n el valor $n + 1$, el término general se convierte en

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)(m-2) .... (m-n+1)(m-n)}{1 . 2 . 3 .... n . (n+1)} a^{n+1} x^{m-n-1}.$$

Comparando las expresiones de T_{n+2} y T_{n+1} se observará esta ley.

Un término del desarrollo de $(a + x)^m$, *se forma multiplicando el anterior por el exponente de* x, *dividiendo el producto por el número que expresa el lugar de este término, aumentando el exponente de* a *en una unidad, y disminuyendo, tambien en una unidad, el de* x.

De este modo se obtiene

$$(x + a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

155. En la práctica, sólo es necesario calcular la mitad de los coeficientes de una potencia ó la mitad mas uno, porque *los términos equidistantes de los extremos tienen coeficientes iguales.*

En efecto: supongamos dos términos equidistantes en n lugares del primero y último respectivamente.

El término que dista n lugares del primero ocupa el lugar $n + 1$ y tiene por coeficiente el número de combinaciones de m letras tomadas n á n; y el término que dista n lugares del último, dista del primero $m - n$ lugares, luego su coeficiente es el número de combinaciones de m letras tomadas $m - n$ á $m - n$; pero el número de combinaciones de m letras tomadas n á n es igual al número de combinaciones de m letras tomadas $m-n$ á $m-n$; luego los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

Supongamos que se quiere desarrollar la potencia

$$(x+a)^9.$$

Debiendo tener 10 términos este desarrollo, se calculan solamente los coeficientes de los cinco primeros, por la regla del número 154, y se repiten dichos coeficientes en los cinco términos restantes, en órden inverso.

Así

$$(x+a)^9=x^9+9ax^8+36a^2x^7+84a^3x^6+126a^4x^5+126a^5x^4+84a^6x^3+36a^7x^2+9a^8x+a^9.$$

156. Tratemos de hallar el desarrollo de $(x-a)^m$.

Si en la fórmula de Newton cambiamos el signo de a, cambiarán de signo los términos en que esta letra tenga exponente impar, y aquellos en que el exponente sea par no se alterarán; luego

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}+\ldots\ldots\pm a^m.$$

Obsérvese que los términos son alternativamente positivos y negativos, á partir del primero, que es positivo.

Ejemplo. $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$.

III.—Potencias de los polinomios.

157. Todo polinomio $a+b+c+d+\ldots\ldots$ puede considerarse como un binomio, cuyo primer término es a y el segundo la suma $b+c+d\ldots\ldots$

Por consiguiente, la fórmula del binomio de Newton sirve para hallar una potencia cualquiera de un polinomio.

Sea la potencia $(a+b+c)^4$.

Considerando á a como primer término de un binomio y á $b+c$ como segundo, y representando la suma $b+c$ por s, será

$$(a+b+c)^4=(a+s)^4;$$

pero $$(a+s)^4=a^4+4a^3s+6a^2s^2+4as^3+s^4;$$

luego hallando las potencias de s, desde la primera hasta la es la suma de las combinaciones ternarias de los segundos términos de los $p+1$ binomios.

Este razonamiento puede aplicarse á los demás coeficientes, y se verá que todos obedecen en su formacion á la ley enunciada.

El último término Up se compone de U, producto de los segundos términos de los m binomios, y de p, segundo término del factor nuevo; luego Up es el producto de los segundos términos de los $m+1$ binomios.

Vemos, pues, que si la ley es cierta para m factores binomios, lo es tambien si se toma un factor más.

Pero, sabemos que es cierta para dos, tres y cuatro factotores, luego lo será tambien para cinco, y siéndolo para cinco, lo será tambien para seis, y así sucesivamente; luego la ley es cierta para un número cualquiera de factores binomios.

152. Si en un producto de m factores binomios suponemos iguales entre sí los segundos términos, esto es, si hacemos $a=b=c=d$......, el producto indicado

$$(x+a)(x+b)(x+c).....$$

se convierte en

$$(x+a)(x+a)(x+a).....=(x+a)^m.$$

En el producto efectuado, el coeficiente del segundo término

$$a+b+c+......$$

se convierte en

$$a+a+a+......=ma;$$

el del tercer término

$$ab+ac+bc+......$$

se convierte en

$$a^2+a^2+a^2+......,$$

donde a^2 se repite por sumando tantas veces como combinaciones binarias pueden formarse con m letras, esto es, $\frac{m(m-1)}{1.2}$ veces; luego dicho coeficiente será

$$\frac{m(m-1)}{1.2}a^2.$$

Del mismo modo se verá que el coeficiente del cuarto término es

$$a^3+a^3+a^3+......,$$

estando a^3 repetido por sumando $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ veces; luego dicho coeficiente es

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3.$$

Los demás coeficientes se hallarán del mismo modo.

El último término $abc.....$

se convierte en $aaa...... = a^m$.

Luego el desarrollo de la potencia $(x+a)^m$ será

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + ... + a^m.$$

Tal es la fórmula del binomio de Newton.

153. Puede obtenerse una expresion general que represente todos los términos del desarrollo de $(x+a)^m$, á partir del segundo.

En efecto: obsérvese que el exponente de a en un término dado es el número de términos que preceden á éste, y el de x es igual á m disminuido en el mismo número; por manera que la suma de ambos exponentes es siempre m.

Los factores

$$m, \frac{m(m-1)}{1.2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

que preceden á las letras a y x, representan, en un término cualquiera, el número de combinaciones que se pueden formar con m letras, tomando tantas en cada grupo como términos preceden al que se considera.

Llamando $n+1$ al lugar que ocupa un término, contando desde el primero, dicho término estará precedido por otros n, y será

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)......(m-n+1)}{1.2.3......n}a^nx^{m-n}.$$

Esta expresion, llamada *término general*, da los términos 2.°, 3.°, 4.° etc. del desarrollo de $(x+a)^m$, con sólo hacer en ella respectivamente $n=1, =2, =3$ etc.

Restando A del primer miembro de la igualdad [1] y a^m del segundo, resulta

$$B+C+D+\ldots\ldots = ma^{m-1}(b+c+d+\ldots\ldots)+ \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+c+d+\ldots\ldots)^2+\ldots\ldots \quad [2].$$

Puesto que b contiene la letra ordenatriz con mayor exponente que $c, d,\ldots\ldots$ etc., $ma^{m-1}b$ será término anterior á $ma^{m-1}c$, $ma^{m-1}d\ldots\ldots$ etc.

Por igual razon, el primer término en cada potencia $(b+c+d+\ldots)^2$, $(b+c+d+\ldots)^3\ldots$ etc., será b^2, $b^3\ldots$ etc.

Pero el producto $a^{m-1}b$ contiene la letra ordenatriz con mayor exponente que $a^{m-2}b^2$, puesto que $a^{m-1}b = a^{m-2}ab$; y de los factores distintos ab y b^2, el primero contiene la letra ordenatriz con mayor exponente que el segundo. Del mismo modo es fácil ver que $a^{m-1}b$ contiene mas veces como factor á la letra ordenatriz que $a^{m-3}b^3\ldots\ldots$ etc.

Luego el primer término del segundo miembro de la igualdad [2] es $ma^{m-1}b$, por tanto

$$B = ma^{m-1}b, \text{ de donde } b = \frac{B}{ma^{m-1}}.$$

Luego, para hallar el segundo término b de la raiz, se divide el segundo término del polinomio propuesto por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raiz.

Consideremos el polinomio $a+b+c+d+\ldots\ldots$ como un binomio, cuyo primer término es $a+b$ y el segundo $c+d+\ldots$; y será

$$A+B+C+D+\ldots\ldots = (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots\ldots)+ \frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}(c+d+\ldots\ldots)^2\ldots\ldots$$

Restando la cantidad $(a+b)^m$ de los dos miembros y representando la diferencia $A+B+C+D+\ldots-(a+b)^m$ por $A'+B'+C'+\ldots\ldots$, será

$$A'+B'+C'+\ldots\ldots = m(a+b)^{m-1}(c+d+\ldots\ldots)+ \frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}(c+d+\ldots\ldots)^2+\ldots\ldots$$

Ahora se podria demostrar que el primer término del segundo miembro es $ma^{m-1}c$; luego

$$A' = ma^{m-1}c, \text{ de donde } c = \frac{A'}{ma^{m-1}}.$$

Por consiguiente, para hallar el tercer término c de la raiz, se resta del polinomio propuesto la potencia $(a+b)^m$, y se divide el primer término del resto por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raiz.

Considerando, ahora, la raiz como un binomio, cuyo primer término fuese $a+b+c$ y el segundo $d+\ldots$, y repitiendo los razonamientos, se veria que el cuarto término se obtiene dividiendo el primero del resto por ma^{m-1}.

Podemos, por tanto, enunciar la siguiente regla.

Para extraer la raiz del grado m *de un polinomio, se ordena por las potencias de una letra, y extrayendo la raiz del grado* m *del primer término, se obtiene el primer término de la raiz. Se divide el segundo término del polinomio por* m *veces la potencia* m — 1 *del término primero de la raiz, y el cociente será el segundo término de ésta. Se resta del polinomio propuesto la potencia del grado* m *de la raiz hallada, y se divide el primer término del resto por* m *veces la potencia* m — 1 *del primer término de la raiz, lo que dá el tercer término de ésta. Se continúa del mismo modo, y cuando se obtenga residuo cero, el polinomio hallado será la raiz del propuesto.*

EJEMPLOS.

1.° Extraer la raiz cuadrada del polinomio

$$9a^2x^6 - 6a^3x^5 + 13a^4x^4 - 4a^5x^3 + 4a^6x^2.$$

Disposicion práctica.

$$\begin{array}{r|l}
9a^2x^6 - 6a^3x^5 + 13a^4x^4 - 4a^5x^3 + 4a^6x^2 & 3ax^3 - a^2x^2 + 2a^3x \\
\cline{2-2}
-9a^2x^6 + 6a^3x^5 - a^4x^4 & 6ax^3 \\
\cline{1-1}
12a^4x^4 - 4a^5x^3 + 4a^6x^2 & \\
-12a^4x^4 + 4a^5x^3 - 4a^6x^2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

2.° Extraer la raiz cúbica del polinomio

$$a^6x^3 + 6a^5x^4 + 9a^4x^5 - 4a^3x^6 - 9a^2x^7 + 6ax^8 - x^9.$$

EJEMPLOS.

1.° $\dfrac{\sqrt[4]{3a^2b^2}}{\sqrt[4]{5a^4b}} = \sqrt[4]{\dfrac{3a^2b^2}{5a^4b}} = \sqrt[4]{\dfrac{3b}{5a^2}}.$

2.° $\dfrac{\sqrt[3]{7a^2b^2}}{\sqrt{2a}} = \dfrac{\sqrt[6]{49a^4b^4}}{\sqrt[6]{8a^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{49a^4b^4}{8a^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{49ab^4}{8}}.$

171. *Para elevar una cantidad radical á una potencia, se eleva á dicha potencia la cantidad subradical.*

Vamos á demostrar que

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

En efecto:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \ldots\ldots = \sqrt[m]{a\,.\,a\,.\,a\ldots.} = \sqrt[m]{a^n}.$$

EJEMPLOS.

1.° $\left(\sqrt[5]{6ab^2c}\right)^2 = \sqrt[5]{36a^2b^4c^2}.$

2.° $\left(\sqrt[8]{3a^2b}\right)^4 = \sqrt[8]{3^4a^8b^4} = \sqrt{3a^2b}.$

Si el índice de la raiz es divisible por el exponente de la potencia, *se obtendrá un resultado más sencillo dividiendo el índice por el exponente, sin alterar la cantidad subradical.*

En efecto: $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n = \sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}.$

Aplicando esta regla al segundo de los ejemplos anteriores, se obtiene inmediatamente

$$\left(\sqrt[8]{3a^2b}\right)^4 = \sqrt{3a^2b}.$$

172. *Para extraer la raiz de un grado cualquiera de una cantidad radical, se multiplican los índices de las dos raices.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

En efecto: $\left(\sqrt[nm]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a}$ [171];

luego $\sqrt[nm]{a}$ es la raiz del grado n de $\sqrt[m]{a}$.

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt{\sqrt[3]{5a^2b}} = \sqrt[6]{5a^2b}$.

2.° $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^6b^3}} = \sqrt[15]{8a^6b^3} = \sqrt[5]{2a^2b}$ [167].

Si la cantidad subradical es una potencia exacta del mismo grado que la raiz pedida, *se obtendrá un resultado mas sencillo extrayendo esta raiz de la cantidad subradical, sin alterar el índice.*

En efecto: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}$.

Aplicando esta regla al segundo de los ejemplos anteriores, se obtiene inmediatamente

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^6b^3}} = \sqrt[5]{2a^2b}.$$

173. Acabamos de ver que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$

luego $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$, $\sqrt[8]{a} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$, etc.

Por consiguiente, *para extraer de una cantidad una raiz cuyo índice es un número compuesto, se extraen sucesivamente las raices que indican los factores simples de dicho índice.*

Si estos factores son el 2 y el 3, sólo habrá que extraer raices cuadradas y cúbicas.

Ejemplo. $\sqrt[6]{191102976} = \sqrt[3]{\sqrt{191102976}} = \sqrt[3]{13824} = 24$.

II.—Exponentes fraccionarios y negativos.

174. Supongamos que se trata de extraer la raiz del grado n de una potencia a^m. Ya hemos visto [141] que en el caso de ser m divisible por n, la raiz pedida es $a^{\frac{m}{n}}$, expresion que nada tiene de singular, puesto que $\frac{m}{n}$ es un número entero.

166. *Si los índices no tienen factores primos comunes, para reducir los radicales á un índice comun se multiplica cada índice por el producto de todos los demás, y se eleva la cantidad subradical á la potencia indicada por dicho producto.*

Ejemplo. Sean los radicales

$$\sqrt[5]{a} \qquad \sqrt{b} \qquad \sqrt[5]{a^2b^3}.$$

Aplicando la regla anterior, se obtendrá

$$\sqrt[30]{a^{10}}, \qquad \sqrt[30]{b^{15}}, \qquad \sqrt[30]{a^{12}b^{18}}.$$

167. TEOREMA. *Una cantidad radical no se altera dividiendo el índice por uno de sus factores, con tal que se extraiga de la cantidad subradical una raiz del grado que indique dicho factor.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt[mn]{a^{pn}} = \sqrt[m]{a^p}.$$

En efecto:

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^m = a^p;$$

elevando ambos miembros de esta igualdad á la potencia n será

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^{mn} = a^{pn};$$

esta igualdad manifiesta que $\sqrt[m]{a^p}$ es la raiz del grado mn de a^{pn}, esto es, que

$$\sqrt[mn]{a^{pn}} = \sqrt[m]{a^p},$$

lo cual debiamos demostrar.

En virtud de este teorema, siempre que el índice de un radical sea divisible por un número entero, y se pueda extraer de la cantidad subradical la raiz del grado que indica este número, se simplificará el radical, efectuando la division del índice y extrayendo la raiz de la cantidad subradical.

De este modo los radicales

$$\sqrt[6]{16a^8b^4}, \qquad \sqrt[12]{a^8b^4},$$

se convierten en

$$\sqrt[3]{4a^4b^2}, \qquad \sqrt[3]{a^2b}.$$

168. OPERACIONES CON LAS CANTIDADES RADICALES.

Las cantidades radicales se suman y restan como las racionales. Si el resultado presenta términos semejantes, se efectúa la reduccion de ellos.

EJEMPLOS.

$$1.^{\circ}\quad \left(3a^2\sqrt[3]{ab}\right)+\left(-5a_2\sqrt[3]{ab}\right)=3a^2\sqrt[3]{ab}-5a^2\sqrt[3]{ab}=-2a^2\sqrt[3]{ab}\,.$$

$$2.^{\circ}\quad \left(7\sqrt[4]{a^3b}\right)-\left(5\sqrt[4]{a^3b}\right)=7\sqrt[4]{a^3b}-5\sqrt[4]{a^3b}=2\sqrt[4]{a^3b}\,.$$

169. *Para multiplicar cantidades radicales que tienen igual índice, se multiplican las cantidades subradicales, y el producto se escribe bajo un radical del mismo índice.*

Si los radicales tienen índices diferentes, se reducen á un índice comun, y se efectúa despues la multiplicacion del modo dicho.

En efecto: hemos demostrado [140] la igualdad

$$\sqrt[m]{abc}=\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\,,$$

ó sea
$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}\,.$$

EJEMPLOS.

$$1.^{\circ}\quad \sqrt[5]{2ab}\times 3\sqrt[5]{6a^2}\times 6\sqrt[5]{ab^2}=18\sqrt[5]{12a^4b^3}\,.$$

$$2.^{\circ}\quad \sqrt{ab}\times 3\sqrt[3]{a^2b}\times 2\sqrt[4]{2ab^3}=\sqrt[12]{a^6b^6}\times 3\sqrt[12]{a^8b^4}\times 2\sqrt[12]{8a^3b^9}=6\sqrt[12]{8a^{17}b^{19}}$$

170. *Para dividir dos cantidades radicales que tienen igual índice, se dividen las cantidades subradicales, y el cociente se escribe bajo un radical del mismo índice.*

Si los radicales tienen índices diferentes, se reducen á un índice comun, y se efectúa despues la division del modo dicho.

En efecto: hemos demostrado [144] la igualdad

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}},\ \text{ó sea}\ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Disposicion práctica.

$$
\begin{array}{l|l}
a^6x^3+6a^5x^4+9a^4x^5-4a^3x^6-9a^2x^7+6ax^8-x^9 & a^2x+2ax^2-x^3 \\
\cline{2-2}
-a^6x^3-6a^5x^4-12a^4x^5-8a^3x^6 & 3a^4x^2 \\
\cline{1-1}
\quad -3a^4x^5-12a^3x^6-9a^2x^7+6ax^8-x^9 & \\
\quad 3a^4x^5+12a^3x^6+9a^2x^7-6ax^8+x^9 & \\
\cline{1-1}
\qquad 0 &
\end{array}
$$

161. Escolio. Un polinomio ordenado no tiene raiz exacta del grado m: 1.° si el primer término ó el último no tiene raiz exacta de dicho grado; 2.° si el segundo término no es divisible por m veces la potencia $m-1$ del primer término de la raiz; 3.° si el primer término de un resto no es divisible por dicha cantidad.

CAPÍTULO TERCERO.

CÁLCULO DE LOS VALORES ARITMÉTICOS DE LAS CANTIDADES RADICALES.—EXPONENTES FRACCIONARIOS Y NEGATIVOS.

I.—Cálculo de los valores aritméticos de las cantidades radicales.

162. Si convenimos en llamar raiz del grado m de una cantidad á toda expresion, positiva ó negativa, que elevada á la potencia m reproduzca la cantidad propuesta, las raices de grado par de una cantidad positiva tienen, segun sabemos, dos valores iguales y de signo contrario; pero si además consideramos como raices las expresiones imaginarias que elevadas á la potencia m reproducen una cantidad dada, se demuestra en Álgebra superior que un número a admite tantas raices del grado m como unidades tiene el índice.

Se llama VALOR ARITMÉTICO *de un radical al valor real absoluto de la raiz de una cantidad positiva.*

Vamos á ocuparnos solamente del cálculo de los valores aritméticos de los radicales.

163. *Se llaman* RADICALES SEMEJANTES, *los que tienen el mismo índice é igual cantidad subradical.*

Así $\quad 3ab\sqrt[3]{2a^2b}\,,\quad 2b^3\sqrt[3]{2a^2b}\,,\ -a\sqrt[3]{2a^2b}$

son radicales semejantes.

Tambien lo son

$$a\sqrt{4ab}\,,\quad 3\sqrt{a^5b}\,,\quad \sqrt{ab^3}\,,$$

porque extrayendo la raiz cuadrada de los factores que la tienen exacta, se convierten los radicales propuestos en estos otros

$$2a\sqrt{ab}\,,\quad 3a^2\sqrt{ab}\,,\quad b\sqrt{ab}\,.$$

164. TEOREMA. *Una cantidad radical no se altera multiplicando el índice por un número entero, con tal que se eleve la cantidad subradical á la potencia indicada por dicho número entero.*

En efecto: es evidente que

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a;$$

elevando los dos miembros de esta igualdad á la potencia n, será [137]

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = a^n;$$

extrayendo la raiz del grado mn, es claro que el primer miembro, que es la potencia mn de $\sqrt[m]{a}$, se convierte en $\sqrt[m]{a}$; luego

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n},$$

igualdad que demuestra el teorema.

165. Una aplicacion importante de este teorema, es la reduccion de radicales que tienen diferente índice á otros equivalentes de índice comun.

Para reducir radicales á un índice comun, se halla el mínimo comun múltiplo de los índices, y este será el índice comun. Despues se eleva cada cantidad subradical á la potencia indicada por el factor que falta á su índice respectivo para valer el índice comun.

Ejemplo. Sean los radicales

$$\sqrt[6]{3ab}\,,\quad \sqrt[3]{2a^2b}\,,\quad \sqrt[4]{a^3}\,.$$

El índice comun es 12, y los factores que faltan á cada uno de los índices para valer 12 son respectivamente 2, 4, 3; por lo tanto las cantidades subradicales se elevarán á las potencias 2.ª, 4.ª y 3.ª

Así tendremos

$$\sqrt[12]{9a^2b^2}\,,\quad \sqrt[12]{16a^8b^4}\,,\quad \sqrt[12]{a^9}\,.$$

Pero si aplicamos la regla citada al caso en que m no sea múltiplo de n, la expresion $a^{\frac{m}{n}}$ carecerá de sentido, porque la definicion de potencias exige que todo exponente sea entero y positivo.

Sin embargo, los exponentes fraccionarios se emplean ventajosamente en Álgebra, mediante el siguiente convenio:

Toda cantidad con exponente fraccionario representa la raiz, cuyo índice es el denominador de la fraccion, de una potencia de la misma cantidad, cuyo exponente es el numerador.

Así, las expresiones $\sqrt[n]{a^m}$ y $a^{\frac{m}{n}}$ representan una misma cantidad, á saber: la que se obtendria elevando a á la potencia del grado m, y extrayendo despues la raiz del grado n de dicha potencia; por consiguiente una cualquiera de estas expresiones puede sustituirse por la otra, siempre que convenga; y la regla dada para extraer la raiz de una potencia, puede hacerse extensiva al caso en que el exponente de la potencia no sea divisible por el índice de la raiz.

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$, 2.° $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, 3.° $a^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{a}$, 4.° $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

175. Supongamos que se trata de efectuar la division de a^m por a^n.

El cociente es a^{m-n} [27].

Pero si n es mayor que m, por ejemplo

$$n = m + p,$$

la sustraccion de los exponentes dá origen á esta expresion

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-m-p} = a^{-p}.$$

Observemos además que siendo $n = m + p$, será

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m \times a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

Estos dos resultados de una misma division, conducen á admitir convencionalmente la igualdad

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p},$$

que en lenguaje vulgar significa:

Toda cantidad con exponente negativo representa una fraccion, que tiene por numerador la unidad y por denominador la misma cantidad con el exponente hecho positivo.

Por lo tanto, las expresiones a^{-p} y $\frac{1}{a^p}$ serán consideradas como equivalentes; pudiéndose sustituir cualquiera de ellas por la otra; y la regla dada para dividir dos potencias de una misma cantidad se hace extensiva al caso en que el exponente del dividendo sea menor que el del divisor.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{a^3}{a^5}=a^{-2}$, 2.° $\frac{1}{a}=a^{-1}$,

3.° $a^{-5}=\frac{1}{a^5}$.

176. Por medio de los exponentes fraccionarios y negativos, puede darse forma entera á las expresiones irracionales y á las fraccionarias.

EJEMPLOS.

1.° $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{a^2}\ \sqrt[3]{b}=a^{\frac{2}{3}}\ b^{\frac{1}{3}}$

2.° $\sqrt{abc}=\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c}=a^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{2}}$

3.° $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}=ab^{-1}$,

4.° $\frac{3a^2b}{c^2d^5}=3a^2b\times\frac{1}{c^2}\times\frac{1}{d^5}=3a^2bc^{-2}d^{-5}$.

Las raices inexactas de las fracciones pueden igualmente recibir forma entera, si admitimos los exponentes fraccionarios negativos.

Así, $$\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{3a^2}{5b^3}} = \sqrt[5]{3a^2 \,.\, 5^{-1} b^{-3}} = 3^{\frac{1}{5}} \,.\, 5^{-\frac{1}{5}} a^{\frac{2}{5}} b^{-\frac{3}{5}}.$$

177. *Para multiplicar potencias cualesquiera de una misma cantidad, se suman los exponentes.*

Vamos á demostrar que

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq - np}{nq}}.$$

En efecto:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{\frac{1}{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}} =$$

$$\sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}}.$$

178. *Para dividir potencias cualesquiera de una misma cantidad, se restan los exponentes.*

Demostremos que

$$a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

En efecto: multiplicando el segundo miembro de esta igualdad por el divisor $a^{\frac{p}{q}}$, tendremos

$$a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}},$$

que es el dividendo; luego $a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$ es el cociente.

179. *Para elevar una potencia de una cantidad á otra potencia cualquiera, se multiplican los exponentes.*

En efecto:

$$(a^p)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a^p)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{pm}}} = \frac{1}{a^{\frac{pm}{n}}} = a^{-\frac{pm}{n}}.$$

180. *Para extraer una raiz de una potencia cualquiera, se divide el exponente de la potencia por el índice de la raiz.*

En efecto:

$$\sqrt[p]{a^{-\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \sqrt[pn]{\frac{1}{a^m}} = \frac{\sqrt[pn]{1}}{\sqrt[pn]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{pn}}} = a^{-\frac{m}{pn}}.$$

181. Trasformando las cantidades radicales y fraccionarias en otras de forma entera, podemos ahora efectuar el cálculo de toda clase de cantidades por las reglas dadas para las enteras.

Ejemplos.

1.° $\sqrt[6]{a^5} \times \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{5}{6}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{19}{12}} = \sqrt[12]{a^{19}}.$

2.° $\frac{3a^2}{b} : \sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3}} = 3a^2b^{-1} : a^{\frac{2}{5}} b^{-\frac{3}{5}} = 3a^{\frac{8}{5}} b^{-\frac{2}{5}} = 3\sqrt[5]{\frac{a^8}{b^2}}.$

EJERCICIOS.

I. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir con las cinco primeras significativas, sin que ninguna de ellas se repita en el mismo número?

II. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 12 personas al rededor de una mesa?

III. ¿Cuántos productos diferentes de tres factores pueden formarse con las cantidades a, b, c, d?

IV. ¿De cuántos modos pueden distribuirse 30 bolas diferentes en grupos de 7 y de 23 bolas?

V. Hallar la diferencia siguiente

$$(a+b)^m-(a-b)^m.$$

VI. Hallar el término octavo del desarrollo de

$$(a+x)^{12}$$

VII. Hallar el término medio del desarrollo de

$$(a+b)^8.$$

VIII. Extraer la raiz cuadrada del polinomio

$$a^2+b^2+4c^2-2ab+4a-4bc.$$

IX. Extraer la raiz cúbica del polinomio

$$a^9-6a^8b+12a^7b^2-3a^6b^3-12a^5b^4+12a^4b^5+3a^3b^6-6a^2b^7+b^9.$$

X. Efectuar las siguientes multiplicaciones

$$(3+\sqrt{2}+7\sqrt[3]{9})(\sqrt[4]{6}+\sqrt{3})$$

$$(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{b^3})(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{b^3}).$$

XI. Efectuar las divisiones siguientes

$$3\sqrt{3ab}:2\sqrt{4ab^2}, \qquad \sqrt[4]{a^3b^2}:\sqrt[12]{2ab^3},$$

$$\frac{a\sqrt[6]{a}+2a\sqrt[3]{b}-3a\sqrt[12]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt{a}+2\sqrt[3]{ab}-3\sqrt[4]{a^3},$$

XII. Trasformar la expresion

$$\left(\frac{a^2b}{(c+d)^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

en otra cuyos exponentes sean enteros y positivos.

LIBRO QUINTO.

PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

PROGRESIONES.

I —Progresiones por diferencia.

182. Progresion por diferencia ó aritmética *es una serie de números tales que restando de cada uno de ellos el anterior, se obtiene siempre la misma diferencia.*

A esta diferencia constante se llama *razon* de la progresion.

Si los números ó términos van aumentando, la progresion se llama *creciente;* en este caso la razon es una cantidad positiva. Si los términos van disminuyendo, la progresion se llama *decreciente*, y la razon es una cantidad negativa.

Las progresiones aritméticas se escriben del modo siguiente:

$$\div 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.....$$

El punto que separa dos términos consecutivos se lee *es á*.

La anterior progresion es creciente, y su razon es 2; por el contrario

$$\div 25 \,.\, 22 \,.\, 19 \,.\, 16 \,.\, 13 \,.....$$

es decreciente, y la razon es -3.

183. Sea la progresion

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,......$$

Si llamamos r á la razon, pudiendo ser r positiva ó negativa, deduciremos fácilmente de la definicion las igualdades

$$b = a + r, \qquad c = b + r.$$

Sustituyendo, en la segunda, la cantidad b por su igual $a + r$, tendremos

$$c = a + r + r = a + 2r.$$

Del mismo modo se halla

$$d = c + r = a + 2r + r = a + 3r \quad \text{etc.}$$

De las igualdades

$$b = a + r, \qquad c = a + 2r, \qquad d = a + 3r,$$

se deduce que *un término de una progresion aritmética es igual al primero, mas tantas veces la razon como términos preceden al que se considera.*

Si llamamos t_n al término que ocupa en la progresion el lugar n, es claro que estará precedido por $n - 1$ términos, y será

$$t_n = a + (n - 1)\,r \qquad [1].$$

Considerando la razon r como incógnita y las demás cantidades, que entran en la fórmula anterior, como datos, se obtiene

$$r = \frac{t_n - a}{n - 1}. \qquad [2]$$

Luego *la razon de una progresion aritmética se obtiene restando el primer término de un término dado, y dividiendo la diferencia por el número de términos que preceden á éste.*

La fórmula [1] da tambien el valor del primer término, pues despejando a se obtiene

$$a = t_n - (n - 1)\,r.$$

Igualmente, despejando n, resulta

$$n = 1 + \frac{t_n - a}{r}.$$

Ejemplos.

1.° *Hallar el octavo término de una progresion, siendo el primer término* 5 *y la razon* 3.

$$t_8 = 5 + (8 - 1)\,3 = 26.$$

2.° *Hallar la razon de una progresion, que empieza por* 5, *siendo* 26 *el octavo término.*

$$r = \frac{26 - 5}{8 - 1} = 3.$$

3.° *Determinar el primer término de una progresion cuya razon es 3, siendo 26 el término octavo.*

$$a = 26 - (8 - 1)\,3 = 5.$$

4.° *¿Cuántos términos tiene la progresion*

$$\div\, 5 \,.\, 8 \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, 26?$$

$$n = 1 + \frac{26 - 5}{3} = 8.$$

184. Interpolar medios diferenciales *entre dos números dados, es formar una progresion aritmética cuyos extremos sean dichos números.*

Tratemos de interpolar m medios diferenciales entre los números p y q.

Si conociésemos la razon, que llamaremos r, de la progresion que deseamos formar, el problema estaria resuelto; pues añadiendo al primer término p la razon, obtendríamos el segundo, añadiendo á éste la razon, resultaria el tercero y así sucesivamente, hasta que llegásemos al término q.

Haciendo en la fórmula [2] del número anterior $a = p$, $t_n = q$, $n = m + 2$, resulta

$$r = \frac{q - p}{m + 1}. \qquad [3]$$

Luego cuando se quiera interpolar un número dado de medios diferenciales entre dos números, *se hallará la razon dividiendo la diferencia de los números dados por el número de medios que se han de interpolar mas uno.*

Ejemplo.

Interpolar 6 *medios diferenciales entre* 2 *y* 30.

$$r = \frac{30 - 2}{6 + 1} = 4;$$

luego la progresion es

$$\div\, 2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, 14 \,.\, 18 \,.\, 22 \,.\, 26 \,.\, 30.$$

185. Teorema. *Si entre cada dos términos consecutivos de una progresion por diferencia se interpola igual número de medios diferenciales, resulta otra progresion por diferencia.*

En efecto: la interpolacion mencionada origina una serie de progresiones parciales cuya razon es la misma; puesto que al determinar los valores de r por medio de la fórmula

[3], hallaremos siempre para numerador la razon de la progresion dada, y para denominador el número constante de medios que se interpolan aumentado en una unidad. Además el último término de una progresion parcial es el primero de la siguiente; luego todas las progresiones parciales forman una sóla progresion.

186. TEOREMA. *En toda progresion por diferencia, la suma de dos términos equidistantes de los extremos, es igual á la suma de dichos extremos.*

Sea la progresion

$$\div\, a \ldots\ldots p \ldots\ldots q \ldots\ldots u.$$

Suponemos que entre a y p hay n términos y otros n entre q y u, y queremos demostrar que

$$p + q = a + u.$$

En efecto: sabemos [183] que

$$p = a + r\,(n + 1)$$
$$u = q + r\,(n + 1);$$

restando estas igualdades resulta

$$p - u = a - q;$$

trasponiendo los términos u y q, tendremos por último

$$p + q = a + u.$$

ESCOLIO. Si el número de términos de una progresion es impar, el término medio equidista de los extremos, y la demostracion anterior patentiza que la suma de los extremos es igual al duplo del término medio.

187. PROBLEMA. *Hallar la suma de los términos de una progresion por diferencia.*

Sea la progresion

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \ldots\ldots m \,.\, p \,.\, u.$$

Designando por S la suma de todos sus términos, tendremos

$$S = a + b + c + \ldots\ldots + m + p + u$$
$$S = u + p + m + \ldots\ldots + c + b + a.$$

Sumando estas igualdades, se obtiene

$$2S = (a+u) + (b+p) + (c+m) + \ldots + (m+c) + (p+b) + (u+a);$$

pero las sumas $a + u$, $b + p$, $c + m$ etc. son iguales todas á $a + u$ [186], y hay tantas como términos tiene la progresion dada; por consiguiente, si designamos por n el número de términos, será

$$2S = (a + u)\,n,$$

de donde
$$S = \frac{(a + u)\,n}{2}.$$

Esta fórmula manifiesta que

La suma de los términos de una progresion por diferencia es igual á la mitad del producto que se obtiene multiplicando la suma de los extremos por el número de términos.

EJEMPLOS.

1.° *Calcular la suma de los* 15 *primeros términos de la progresion*

$$\div\, 3\,.\,6\,.\,9\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

El último término será $3 + 14\,.\,3 = 45$; luego

$$S = \frac{(3 + 45)\,15}{2} = 360.$$

2.° *Calcular la suma de los términos de la progresion*

$$\div\, 4\,.\,11\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,60.$$

El número de términos será $1 + \dfrac{60 - 4}{7} = 9$; luego

$$S = \frac{(4 + 60)\,9}{2} = 288.$$

3.° *Calcular la suma de los* n *primeros números impares.*

El último término de la progresion

$$\div\, 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

es
$$1 + 2\,(n - 1) = 2n - 1;$$

luego
$$S = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Este resultado manifiesta que *la suma de los* n *primeros números impares es igual al cuadrado del número de estos términos.*

II.—Progresiones por cociente.

188. PROGRESION POR COCIENTE Ó GEOMÉTRICA *es una serie de números tales que dividiendo cada uno de ellos por el anterior, se obtiene siempre el mismo cociente.*

Á este cociente constante se llama *razon* de la progresion.

Si los términos van aumentando, la progresion se llama *creciente;* en este caso la razon es mayor que la unidad. Si los términos van disminuyendo, la progresion se llama *decreciente*, y la razon es menor que uno.

Las progresiones geométricas se escriben del modo siguiente:

$$\div\, 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : \ldots\ldots.$$

El signo (:) que separa dos términos consecutivos se lee *es á*.

La anterior progresion es creciente, y su razon es 2; por el contrario

$$\div\, 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2 : \frac{2}{3} : \ldots..$$

es una progresion decreciente, cuya razon es $\frac{1}{3}$.

189. Sea la progresion

$$\div\, a : b : c : d : \ldots\ldots.$$

Si llamamos q á la razon, tendremos

$$b = aq, \qquad c = bq.$$

Sustituyendo, en la segunda igualdad, el término b por su igual aq, será

$$c = aq \times q = aq^2.$$

Del mismo modo se halla

$$d = cq = aq^2 \times q = aq \quad \text{etc.}$$

De las igualdades

$$b = aq, \quad c = aq^2, \quad d = aq^3,$$

se deduce que *un término de una progresion geométrica es igual al primero multiplicado por una potencia de la razon, cuyo exponente es el número de términos que preceden al que se considera.*

Si llamamos t_n al término que ocupa en la progresion el lugar n, es claro que estará precedido por $n - 1$ términos, y será

$$t_n = aq^{n-1}. \qquad [1]$$

Si en esta fórmula consideramos la razon como incógnita, y las demás cantidades como conocidas, obtendremos despejando q

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{a}} \qquad [2]$$

Luego, *la razon de una progresion geométrica se obtiene dividiendo un término dado por el primero, y extrayendo del cociente una raiz cuyo índice es el número de términos que preceden al dado.*

La fórmula [1] da tambien el valor del primer término, pues despejando a se obtiene

$$a = \frac{t_n}{q^{n-1}}.$$

EJEMPLOS.

1.° *Hallar el octavo término de una progresion, siendo el primer término* 5 *y la razon* 3.

$$t_8 = 5 \times 3^7 = 10935.$$

2.° *Hallar la razon de una progresion geométrica que empieza por* 3, *siendo* 768 *el término noveno.*

$$q = \sqrt[8]{\frac{768}{3}} \quad \text{ó} \quad q = \sqrt[8]{256}\,.$$

Extrayendo tres raices cuadradas sucesivas del número 256, se obtiene $q = 2$.

3.° *Determinar el primer término de una progresion geométrica cuya razon es* $\frac{1}{3}$, *siendo* $\frac{2}{9}$ *el término octavo.*

$$a = \frac{\frac{2}{9}}{\left(\frac{1}{3}\right)^7} = 486.$$

190. INTERPOLAR MEDIOS PROPORCIONALES *entre dos números dados, es formar una progresion geométrica cuyos extremos sean dichos números.*

Tratemos de interpolar m medios proporcionales entre los números p y q.

Si conociésemos la razon x de la progresion, el problema no ofreceria dificultad, pues siendo p el primer término, el segundo seria px, el tercero px^2 etc.

Haciendo en la fórmula [2] del número anterior $a = p$, $t_n = q$, $n = m + 2$, resulta

$$x = \sqrt[m+1]{\frac{q}{p}}. \qquad [3]$$

Luego cuando se quiera interpolar un número dado de medios proporcionales entre dos números, *se hallará la razon extrayendo del cociente de los números dados una raiz cuyo índice sea el número de medios proporcionales aumentado en una unidad.*

EJEMPLO.

Interpolar 5 medios proporcionales entre 4 y 256.

$$x = \sqrt[6]{\frac{256}{4}}, \quad ó \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = 2;$$

luego la progresion es

$$\div\ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256.$$

191. TEOREMA. *Si entre cada dos términos consecutivos de una progresion por cociente se interpola igual número de medios proporcionales, resulta otra progresion por cociente.*

En efecto: la interpolacion mencionada origina una serie de progresiones parciales, que tienen todas la misma razon, puesto que al determinar los valores de x por medio de la fórmula [3], hallaremos siempre para cantidad subradical la razon de la progresion dada, y para índice el número constante de medios que se interpolan aumentado en una unidad. Además el último término de una progresion parcial es el primero de la siguiente; luego todas las progresiones parciales forman una sóla progresion.

192. PROBLEMA. *Hallar la suma de los términos de una progresion por cociente.*

Sea la progresion

$$\div\ a : b : c : d : \ldots\ldots\ldots : u.$$

Designando por S la suma de sus términos, tendremos

$$S = a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots + u. \qquad [4]$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la razon q de la progresion, y teniendo presente que el producto de un término por la razon es el término siguiente, será

$$Sq = b + c + d + \ldots\ldots\ldots + u + uq. \qquad [5]$$

Restando de esta igualdad la anterior, tendremos

$$Sq - S = uq - a, \quad ó \quad S(q-1) = uq - a,$$

de donde

$$S = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

Esta fórmula manifiesta que

La suma de los términos de una progresion por cociente es igual á la diferencia entre el último término multiplicado por la razon, y el primer término, partida por el exceso de la razon sobre la unidad.

Si la progresion es decreciente, los dos términos del valor de S serán negativos; por consiguiente el cociente es positivo.

Si queremos que dichos términos sean siempre positivos deberemos restar la igualdad [5] de la [4], cuando la progresion sea decreciente, y la suma será

$$S = \frac{a - uq}{1 - q}.$$

EJEMPLOS.

1.° *Calcular la suma de los 6 primeros términos de la progresion*

$$\div\ 1 : 4 : 16 \ldots\ldots$$

El último término será $4^5 = 1024$; luego

$$S = \frac{1024 \,.\, 4 - 1}{4 - 1} = 1365.$$

2.° *Calcular la suma de los 5 primeros términos de la progresion*

$$\div\ 128 : 64 : 32 \ldots\ldots$$

El último término será $128 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8$;

luego $$S = \frac{128 - 8 \,.\, \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 248.$$

193. TEOREMA. *Las potencias, enteras y positivas, de un número mayor que la unidad, crecen, si crece el exponente, y pueden adquirir un valor tan grande como se quiera.*

Sea n un número mayor que 1.

Si consideramos dos potencias sucesivas n^p, n^{p+1}, sabemos que la segunda es igual á $n^p \times n$; pero siendo el multiplicador n mayor que 1, el producto n^{p+1} es mayor que el multiplicando n^p, lo que demuestra la primera parte del teorema.

Si representamos n por $1 + a$, tendremos

$$(1 + a)^p = 1 + pa + \frac{p(p-1)}{1 \,.\, 2} a^2 + \ldots + a^p;$$

es evidente que el segundo miembro es mayor que $1+pa$, y como dando á p un valor suficientemente grande, el producto pa podrá ser mayor que cualquiera cantidad dada, resulta que $1+pa$, y con mayor razon $(1+a)^p$, podrá adquirir un valor tan grande como se quiera.

194. TEOREMA. *Las raices de un número mayor que la unidad disminuyen, si aumenta el índice, y tienen la unidad por límite.*

En efecto: las raices de los números mayores que la unidad, son mayores que la unidad, puesto que la raiz de un grado cualquiera de 1 es 1, y es evidente que si un número aumenta su raiz aumenta igualmente.

Sean ahora dos raices de la misma cantidad

$$\sqrt[m]{a}, \qquad \sqrt[m+n]{a};$$

decimos que si $a>1$, será $\sqrt[m+n]{a} < \sqrt[m]{a}$.

Para demostrarlo, supongamos que

$$\sqrt[m]{a}=r, \qquad \sqrt[m+n]{a}=r',$$

de donde se deduce

$$a=r^m, \qquad a=r'^{\,m+n}.$$

La raiz del grado $m+n$ de a no puede ser r, porque

$$r^{m+n}>r^m \quad \text{ó} \quad r^{m+n}>a;$$

tampoco puede ser mayor que r, pues si fuese $r'>r$, tendriamos

$$r'^{\,m}>r^m,$$

y con mayor razon

$$r'^{\,m+n}>r^m \quad \text{ó} \quad a>a,$$

lo que es absurdo; luego

$$\sqrt[m+n]{a}<\sqrt[m]{a}.$$

Demostremos ahora que $\sqrt[m]{a}$ tiene por límite inferior la unidad, si el índice aumenta indefinidamente, esto es, que

$$\sqrt[m]{a}-1<d,$$

siendo d una cantidad tan pequeña como se quiera.

En efecto: para que la desigualdad anterior se verifique, basta que se verifiquen estas otras, que no son mas que trasformaciones de la primera,

$$\sqrt[m]{a} < 1 + d,$$

$$a < (1 + d)^m \quad \text{ó} \quad (1 + d)^m > a;$$

pero siendo $1 + d$ mayor que la unidad, la potencia $(1+d)^m$ puede adquirir un valor mayor que a, por grande que sea este número [193]; luego

$$lim. \sqrt[m]{a} = 1.$$

195. Teorema. *Las potencias, enteras y positivas, de un número menor que la unidad, disminuyen, si aumenta el exponente, y pueden adquirir un valor tan pequeño como se quiera.*

En efecto: si consideramos las potencias n^p y n^{p+1}, tendremos

$$n^{p+1} = n^p \times n,$$

y es claro que siendo n menor que 1, el producto n^{p+1} es menor que el multiplicando n^p.

Además, todo número menor que 1 puede escribirse en la forma $\frac{1}{a}$, donde a será entero, fraccionario ó inconmensurable, pero mayor que 1.

Si elevamos $\frac{1}{a}$ á potencias cuyos exponentes crezcan indefinidamente, el denominador llegará á ser tan grande como se quiera, y como el numerador es siempre 1, la fraccion llegará á ser menor que cualquiera cantidad asignable.

196. Teorema. *Las raices de un número menor que la unidad, crecen, si aumenta el índice, y tienen la unidad por límite.*

Observemos ante todo que las raices de los números menores que la unidad, son menores que 1, puesto que las raices del mismo grado de un número son tanto menores cuanto menor es el número, y la raiz de 1 es 1.

Sean $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m+n]{a}$ dos raices de la misma cantidad; representemos la primera por r y la segunda por r', y demostremos que si $a < 1$, será $r' > r$.

En efecto: $\sqrt[m+n]{a}$ no puede ser r, porque siendo $r^m = a$, será

$$r^{m+n} < a \quad [195].$$

Tampoco puede ser

$$\sqrt[m+n]{a} < r,$$

pues si fuese $r' < r$, tendriamos

$$r'^{m} < r^{m},$$

y con mayor razon

$$r'^{m+n} < r^{m} \text{ ó } a < a,$$

lo que es absurdo; luego

$$\sqrt[m+n]{a} > \sqrt[m]{a}.$$

Demostremos ahora que $\sqrt[m]{a}$ tiene por límite superior la unidad, si m aumenta indefinidamente, esto es, que

$$1 - \sqrt[m]{a} < d,$$

siendo d una cantidad tan pequeña como se quiera.

En efecto: la desigualdad anterior se verificará siempre que se verifique la siguiente:

$$1 - d < \sqrt[m]{a}$$

ó

$$(1 - d)^m < a;$$

pero siendo $1 - d$ menor que la unidad, la potencia $(1 - d)^m$ puede adquirir un valor menor que a, por pequeño que sea este número [195]; luego

$$lím. \sqrt[m]{a} = 1.$$

197. Si en la fórmula

$$S = \frac{a - uq}{1 - q},$$

que da la suma de los términos de una progresion geométrica decreciente, se sustituye u por su valor aq^{n-1}, se convierte en

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Siendo $q < 1$, el valor de q^n, y por consiguiente el de aq^n, disminuye á medida que aumenta el número de términos de la progresion, pudiendo llegar á ser menor que cualquiera cantidad asignable; luego si n es infinito será $aq^n = 0$, y

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

Vemos, pues, que *la suma de los términos de una progresion geométrica decreciente, continuada al infinito, es igual al primero dividido por el exceso de la unidad sobre la razon*

EJEMPLOS.

1.° Sea la progresion

$$\div 1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3} : \ldots\ldots$$

La razon es $\frac{1}{a}$, luego

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1}.$$

2.° Convertir en ordinaria la fraccion periódica

0,4343 ....

Esta fraccion puede considerarse como la suma de los términos de la progresion

$$\div\ 0{,}43 : 0{,}0043 : 0{,}000043\ldots\ldots,$$

cuya razon es 0,01; luego

$$S = \frac{0{,}43}{1 - 0;01} = \frac{43}{99}.$$

CAPÍTULO SEGUNDO.

LOGARITMOS.

I.—Idea general de los logaritmos.

198. Si consideramos dos progresiones

$$\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6\ldots\ldots$$
$$\div 0 . r . 2r . 3r . 4r . 5r . 6r\ldots..$$

la primera geométrica y principiando por la unidad, y la segunda aritmética y empezando por cero, se observarán en ellas las siguientes propiedades:

1.ª El producto de dos términos de la progresion geométrica es un término de la misma, puesto que ésta contiene todas las potencias de la razon; y la suma de dos términos de la progresion aritmética es un término de la misma, puesto que ésta contiene todos los múltiplos de la razon.

2.ª Si se suman dos términos de la progresion aritmética y se multiplican los correspondientes de la geométrica, la suma y el producto son términos correspondientes de las respectivas progresiones.

En efecto: si q^m y $q^{m'}$ son los términos de la primera progresion, mr y $m'r$ serán los correspondientes de la segunda; el producto de los primeros es $q^{m+m'}$, que ocupa en la progresion geométrica el lugar $m+m'+1$, y la suma de los segundos es $(m+m')r$, que tambien ocupa en la aritmética el lugar $m+m'+1$.

De estas dos propiedades se deduce que *para multiplicar dos términos de la progresion geométrica, basta sumar los correspondientes de la aritmética, y el término de la primera correspondiente á la suma, leida en la segunda, será el producto pedido.*

Si las progresiones son

$$\div\!\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 : 19683 \ldots\ldots$$
$$\div\, 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18 \ldots\ldots$$

y queremos hallar el producto 27×729, sumaremos los términos correspondientes 6 y 12 de la progresion aritmética, y el número 19683, que corresponde á la suma 18, es el producto de 27 por 729.

199. Para que las propiedades enunciadas en el número anterior se verifiquen, ES NECESARIO: 1.° *que la progresion geométrica contenga un término igual á 1 y la aritmética uno igual á 0; 2.° que estos términos 1 y 0 se correspondan.*

En efecto: si a es el primer término de una progresion por cociente y q la razon, dos términos cualesquiera estarán representados por aq^m y $aq^{m'}$; para que el producto

$$a^2q^{m+m'}$$

de estos términos pertenezca á la progresion, es necesario que tenga la forma general aq^n; esto es, que se verifique la igualdad

$$a^2q^{m+m'} = aq^n,$$

siendo n un número entero cualquiera.

De esta igualdad se deduce

$$aq^{m+m'} = q^n.$$

Ahora bien, $aq^{m+m'}$ es un término de la progresion que empieza por a; luego su igual q^n debe estar entre los términos de la misma; por consiguiente, para que el producto de dos términos de una progresion geométrica pertenezca á la progresion, es *necesario* que haya entre los términos de ésta uno de la forma q^n; pero los términos anteriores á q^n son q^{n-1}, q^{n-2}..... etc., luego llegaremos necesariamente á uno de la forma $q^{n-n} = q^0 = 1$.

Del mismo modo se vé que si $a + mr$ y $a + m'r$ son dos términos de una progresion aritmética que empieza por a, la suma

$$2a + (m + m')r$$

pertenecerá á la progresion siempre que se verifique la igualdad

$$a + (m + m')r = nr,$$

esto es, siempre que la progresion contenga un término de la forma nr; pero los términos anteriores á nr son

$$(n - 1)r, \; (n - 2)r\text{..... etc.,}$$

luego llegaremos á uno de la forma $(n - n)r = 0$.

Para demostrar la segunda parte del teorema, supongamos las progresiones, que empiezan por 1 y 0 respectivamente,

$$\div\div \;\ldots\ldots : q^m : \ldots\ldots : q^{m'} : \ldots\ldots$$
$$\div \;\ldots\ldots . \; nr \;. \ldots\ldots . \; n'r \;. \ldots\ldots$$

Observando que el exponente de q y el coeficiente de r aumentan una unidad á cada término, se comprende que el producto

$$q^m \times q^{m'} = q^{m+m'}$$

dista m lugares de $q^{m'}$, y la suma

$$nr + n'r = (n + n')r,$$

dista de $n'r$, n lugares; para que el producto y la suma se correspondan es, pues, *necesario* que $m = n$; pero en tal caso, el término q^m dista m lugares de 1, y su correspondiente nr dista de 0 otros m lugares; por consiguiente, los términos 1 y 0 se corresponden necesariamente.

200. Cuando dos progresiones tienen las propiedades del número 198, los términos de la aritmética se llaman *logaritmos* de los correspondientes en la geométrica. Diremos, pues,

Se llaman LOGARITMOS, *los términos de una progresion aritmética, que empieza por cero, correspondientes á los de otra geométrica, que empieza por la unidad.*

Así en las progresiones

$$\div\!\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots q^n \ldots\ldots$$
$$\div\ 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots\ldots nr \ldots\ldots,$$

tenemos

$$\log 1 = 0,\quad \log q = r,\quad \log q^2 = 2r \ldots\ \log q^n = nr.$$

201. Interpolando el mismo número de medios proporcionales entre cada dos términos consecutivos de la progresion geométrica, la razon de la nueva progresion que resulta será $\sqrt[m+1]{q}$, llamando m al número de medios que se interpolan [190]; por consiguiente si a es un término de ésta, el siguiente será $a\sqrt[m+1]{q}$, y la diferencia entre ambos

$$a\left(\sqrt[m+1]{q}-1\right).$$

La expresion $\sqrt[m+1]{q}-1$ tendrá un valor tan pequeño como se quiera, si hacemos á m suficientemente grande, esto es, si interpolamos suficiente número de medios proporcionales; luego la diferencia

$$a\left(\sqrt[m+1]{q}-1\right)$$

entre dos términos consecutivos podrá ser tan pequeña, que permita considerar la progresion geométrica como una serie de términos que crecen de una manera contínua ó por grados insensibles, y entre los cuales se encuentran todos los números mayores que 1.

Interpolando entre cada dos términos consecutivos de la progresion aritmética, tantos medios diferenciales como medios proporcionales se hayan interpolado entre cada dos términos de la geométrica, se hallarán los logaritmos de los números que ha originado la primera interpolacion.

Si queremos obtener los logaritmos de los números menores que 1, conseguiremos que estos números formen parte de la progresion geométrica prolongando ésta hácia la izquierda, para lo que basta dividir cada término por la razon; y obtendremos los logaritmos respectivos prolongando igualmente la progresion aritmética en el mismo sentido, lo que se logra restando la razon de cada término.

Por este medio se obtienen las progresiones

$$\div\!\div\ \ldots\ldots : \frac{1}{q^n} : \ldots : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots$$
$$\div\ \ldots\ldots -nr \,.\, \ldots -3r \,.\, -2r \,.\, -r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots \,.\, nr \,.\, \ldots,$$

donde se ve que *los números menores que* 1 *tienen logaritmos negativos.*

Las anteriores consideraciones manifiestan que *todo número tiene un logaritmo.* Sin embargo, la continuidad perfecta de la progresion geométrica, si bien se concibe, no puede alcanzarse prácticamente, por lo que, en la mayoría de los casos, el número cuyo logaritmo se quiere hallar no forma parte de dicha progresion; pero cualquiera que sea aquél, estará á lo menos comprendido entre dos términos consecutivos de la misma, y podrá tomarse para logaritmo el de uno de estos, cometiendo en error menor que la razon de la progresion aritmética, que puede hacerse tan pequeña como se quiera.

202. Las progresiones del número anterior pueden escribirse [175] en la forma

$$\begin{array}{l} \div\!\div \ldots : q^{-n} : \ldots : q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots \\ \div \ldots -nr \,.\, \ldots -3r \,.\, -2r \,.\, -r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots \,.\, nr \ldots \end{array}$$

Haciendo ahora $q = a^r$, lo que siempre es posible, puesto que esta igualdad se trasforma en $q^{\frac{1}{r}} = a$, y podemos representar por a el valor de $q^{\frac{1}{r}}$, las progresiones serán

$$\begin{array}{l} \div\!\div \ldots : a^{-nr} : \ldots : a^{-3r} : a^{-2r} : a^{-r} : 1 : a^r : a^{2r} : a^{3r} : \ldots : a^{nr} \ldots \\ \div \ldots -nr \,.\, \ldots -3r \,.\, -2r \,.\, -r \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, \ldots \,.\, nr \ldots , \end{array}$$

donde vemos que

$$\log a^{-2r} = -2r, \quad \log a^{3r} = 3r, \quad \log a^{nr} = nr,$$

esto es, que el logaritmo de un término de la progresion por cociente es el exponente de a en dicho término.

Esta observacion permite dar una nueva definicion de logaritmos independiente de toda idea de progresion, diciendo

Logaritmos de los números son los exponentes de las potencias á que debe elevarse un número constante para obtener los propuestos.

203. Sea la ecuacion

$$a^x = y.$$

Si a es un número constante, cada valor particular de x dará para y otro valor, y á cada valor de y corresponderá otro de x; por manera que x é y son dos cantidades variables dependientes una de la otra, y los valores de x correspondientes á los valores de y son los logaritmos de éstos.

Pero es evidente que si a cambia de valor, á un mismo número y corresponderán diferentes valores de x, esto es, *un número puede tener diferentes logaritmos.*

Llamamos SISTEMA DE LOGARITMOS á los valores de x que corresponden á otros de y, cuando a recibe un valor particular invariable.

Este valor de a, constante para cada sistema, se llama BASE del mismo, y sirve para distinguir un sistema de otro.

204. TEOREMA. *Si el exponente* x *de una cantidad* a *positiva y diferente de la unidad, crece de una manera continua, la funcion* a^x *varía tambien de una manera continua.*

Distinguiremos dos casos, segun que a sea mayor ó menor que la unidad.

PRIMER CASO. $a > 1$. Sean m y $m + \frac{1}{n}$ dos valores sucesivos del exponente x; decimos que si la diferencia entre estos valores es suficientemente pequeña, esto es, si n crece lo bastante, la diferencia entre los valores correspondientes de la funcion, que son a^m y $a^{m+\frac{1}{n}}$, será menor que cualquiera cantidad asignable, por pequeña que sea.

En efecto: la diferencia entre los valores de la funcion es

$$a^m\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = a^m\left(\sqrt[n]{a} - 1\right),$$

y siendo $a > 1$ esta diferencia es positiva, luego si el exponente x crece, la funcion a^x crece tambien.

Pero si n es suficientemente grande, la cantidad $\sqrt[n]{a} - 1$ será tan pequeña como queramos [194], y su producto por a^m lo será tambien.

Además, si $x = 0$, tendremos $a^x = 1$;

y si $x = \infty$, será $a^\infty = \infty$ [193];

luego cuando $a > 1$, *si* x *crece de una manera continua desde* CERO *hasta* INFINITO, a^x *crece de una manera continua desde* UNO *hasta* INFINITO.

Supongamos ahora que se den á x valores que crezcan negativamente, y sean $-m$ y $-\left(m + \frac{1}{n}\right)$ dos valores sucesivos de x; los correspondientes de la funcion serán

$$a^{-m} \text{ y } a^{-\left(m+\frac{1}{n}\right)} \text{ ó sea } \frac{1}{a^m} \text{ y } \frac{1}{a^{m+\frac{1}{n}}};$$

pero si n es suficientemente grande la diferencia $a^{m+\frac{1}{n}}-a^m$ de los denominadores será tan pequeña como se quiera, y con mayor razon lo será tambien la diferencia

$$\frac{a^{m+\frac{1}{n}}-p}{a^{2m+\frac{1}{n}}}$$

de las fracciones.

Además, si el valor absoluto de x es infinito, la funcion $a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\frac{1}{\infty}$ adquiere el valor *cero;* luego cuando $a>1$, *si* x *crece negativamente desde* CERO *hasta el* INFINITO NEGATIVO, *la funcion* aˣ *disminuye desde* UNO *hasta* CERO.

SEGUNDO CASO. $a<1$. Razonamientos análogos á los anteriores fundados en los teoremas de los números [196], [195], demuestran que *si* x *crece de una manera contínua desde* CERO *hasta el* INFINITO POSITIVO, *la funcion* aˣ *disminuye desde* UNO *hasta* CERO; *y que si* x *crece negativamente desde* CERO *hasta el* INFINITO NEGATIVO, *la funcion aumenta desde* UNO *hasta el* INFINITO POSITIVO.

ESCOLIOS.

205. 1.° Acabamos de ver que todos los números positivos pueden considerarse como potencias, positivas ó negativas, de un número constante; luego podemos decir: *todos los números positivos tienen logaritmos.*

2.° *La base de todo sistema de logaritmos debe ser positiva y diferente de la unidad.*

Puesto que las potencias sucesivas de un número negativo serian unas positivas, otras negativas y otras imaginarias; y por consiguiente la funcion no variaria de una manera contínua. Además es evidente que la unidad no puede ser base de ningun sistema, porque todas sus potencias son iguales á 1.

3.° *En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la unidad es cero y el de la base es uno.*

En efecto: si en la ecuacion $a^x=y$, se hace $x=0$, será $a^0=1$,

luego $\log 1 = 0;$

y si hacemos $x=1$, será $a^1=a$,

luego $\log a = 1.$

II.—Propiedades generales de los logaritmos.

206. Teorema. *El logaritmo de un producto de varios factores, es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Sean y, y', y''... varios números, x, x', x''... sus logaritmos respectivos en el sistema cuya base es a.

Tendremos [202]

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y', \quad a^{x''} = y'', \ldots;$$

multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$a^{x+x'+x''+\ldots} = yy'y'' \ldots;$$

donde vemos que $x+x'+x''$.... es el exponente de la potencia á que debe elevarse la base a para obtener el producto $yy'y''$.....; luego

$$\log\,(yy'y''\ldots) = x + x' + x'' + \ldots;$$

pero siendo x, x', x''..... los logaritmos de y, y', y''....., la igualdad anterior se convierte en

$$\log\,(yy'y''\ldots) = \log y + \log y' + \log y'' + \ldots$$

207. Teorema. *El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Sean y el dividendo é y' el divisor, x y x' los logaritmos de estos números, y a la base del sistema.

Tenemos las igualdades

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y',$$

dividiéndolas ordenadamente, resulta

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'};$$

luego

$$\log \frac{y}{y'} = x - x' \quad \text{ó} \quad \log \frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

208. Teorema. *El logaritmo de una potencia cualquiera de un número, es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.*

Sea y el número, x su logaritmo.

Tenemos la igualdad

$$a^x = y;$$

elevando ambos miembros á una potencia cualquiera m, será

$$a^{mx} = y^m;$$

luego $\log y^m = mx \quad \text{ó} \quad \log y^m = m \log y.$

209. Teorema. *El logaritmo de la raiz de un número, es igual al logaritmo del número dividido por el indice de la raiz.*

Sea y el número, x su logaritmo.

Tenemos la igualdad

$$a^x = y;$$

extrayendo la raiz m de ambos miembros, será

$$a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{y},$$

de donde $\log \sqrt[m]{y} = \frac{x}{m}$ ó $\log \sqrt[m]{y} = \frac{\log y}{m}$.

210. En virtud de las propiedades anteriores, las operaciones aritméticas se simplifican considerablemente, por el empleo de los logaritmos.

Se ve, en efecto, que para hallar el producto de varios números bastará *sumar* los logaritmos de los factores, y buscar el número correspondiente á esta suma; y que un cociente se hallará *restando* los logaritmos del dividendo y divisor. Todavía son mayores las ventajas cuando se aplican los logaritmos á la elevacion á potencias y extraccion de raices de todos los grados, puesto que estas operaciones tan laboriosas, se reducen respectivamente á multiplicaciones y divisiones muy sencillas.

III.—Construccion de las tablas de logaritmos, y propiedades particulares de los logaritmos de Briggs.

211. Unas tablas de logaritmos es la reunion de los números enteros desde uno hasta 10000, 100000 etc., y de sus correspondientes logaritmos en un sistema dado.

El sistema que ha merecido la preferencia es aquel cuya base es 10. Los logaritmos en este sistema se llaman logaritmos *ordinarios, tabulares* ó de Briggs. [1]

212. Teorema. *Para que el logaritmo ordinario de un número conmensurable sea conmensurable, se necesita y basta que el número sea una potencia de la base* 10, *cuyo exponente sea entero, positivo ó negativo.*

---

1 La invencion de los logaritmos se debe á Juan Neper, baron escocés, que publicó su teoría á principios del siglo XVII.

Henri Briggs, profesor de Oxford, fué el primero que á instancia de Neper, construyó unas tablas con la base 10. La base de los logaritmos *neperianos* es 2,718281828.....

En efecto: sea n un número conmensurable.

Para que su logaritmo sea entero es necesario que la ecuacion $10^x = n$ se verifique por un valor entero de x; pero si x es entero, n será potencia entera de 10.

Supongamos que el logaritmo de n sea fraccionario, y distingamos dos casos, segun que n sea mayor ó menor que la unidad.

En el primer caso el logaritmo de n es positivo y podrá representarse por la fraccion $\frac{p}{q}$, debiendo verificarse la igualdad

$$10^{\frac{p}{q}} = n \quad ó \quad 10 = n^q.$$

Esta igualdad exige que n sea un número entero y además que sus factores primos sean 2 y 5, únicos que componen el primer miembro; sea

$$n = 2^r \times 5^s,$$

tendremos

$$10^p = 2^{rq} \times 5^{sq} \quad ó \quad 2^p \times 5^p = 2^{rq} \times 5^{sq};$$

de esta igualdad se deduce

$$p = rq, \quad p = sq, \quad ó \quad r = s;$$

luego

$$n = 2^r \times 5^r = 10^r,$$

potencia positiva de 10.

Si n es menor que la unidad, podrá representarse por la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$, y su logaritmo será negativo. Representándole por $-\frac{p}{q}$, se tendrá

$$10^{-\frac{p}{q}} = \frac{a}{b}, \quad ó \quad 10^{-p} = \frac{a^q}{b^q}, \quad ó \quad \frac{1}{10^p} = \frac{a^q}{b^q};$$

de donde [Aritm. 146.]

$$1 = a^q, \quad 10^p = b^q.$$

De la primera de estas igualdades se deduce $a = 1$, y la segunda exige, segun se ha visto en el primer caso, que b sea potencia de 10, por ejemplo, 10^r; luego

$$n = \frac{1}{10^r} = 10^{-r},$$

potencia negativa de 10.

Para demostrar que la condicion del enunciado es suficiente, supongamos que el número n sea potencia entera de 10, y llamemos p al exponente de dicha potencia; segun esto tendremos

$$n = 10^p,$$

donde vemos que el logaritmo de n es p, número conmensurable; que será positivo si n es mayor que 1 y negativo en el caso contrario.

$$\text{Así, } \log 10^0 = 0,\ \log 10^1 = 1,\ \log 10^2 = 2,\ \log 10^3 = 3\ldots$$
$$\log 10^{-1} = -1,\ \log 10^{-2} = -2,\ \log 10^{-3} = -3\ldots$$
$$\text{ó sea } \log 1 = 0,\ \log 10 = 1,\ \log 100 = 2,\ \log 1000 = 3\ldots$$
$$\log \frac{1}{10} = -1,\ \log \frac{1}{100} = -2,\ \log \frac{1}{1000} = -3\ldots$$

213. Acabamos de ver que las potencias enteras de la base 10 son los únicos números conmensurables que tienen logaritmo conmensurable, y que éste es igual al exponente de la potencia. Veamos, ahora, de qué modo podrán calcularse los logaritmos de los demás números.

Supongamos que se trate de hallar el logaritmo del número 2.

En el sistema de logaritmos de Briggs, las progresiones son

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000\ldots..$$
$$\div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\ \ldots..$$

Hallándose el número 2 comprendido entre 1 y 10, su logaritmo lo estará entre 0 y 1; si hallamos un medio proporcional entre 1 y 10, y un medio diferencial entre 0 y 1, tendremos las progresiones

$$\div\!\div\ 1 : 3{,}162 : 10\ldots..$$
$$\div\ 0 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1\ldots..$$

Como el número dado está comprendido entre 1 y 3, 162 su logaritmo lo estará entre 0 y 0,5; hallando un medio proporcional entre 1 y 3, 162 y otro diferencial entre 0 y 0,5, resultan las progresiones

$$\div\!\div\ 1 : 1{,}778 : 3{,}162\ldots..$$
$$\div\ 0 \,.\, 0{,}25 \,.\, 0{,}5\ \ldots..$$

Ahora el número 2 se encuentra entre 1, 778 y 3, 162, y su logaritmo entre 0,25 y 0,5.

Si se continúa interpolando un medio proporcional entre cada dos números que contienen al dado, y á la vez uno diferencial entre los logaritmos de aquellos, se llegará á encontrar dos números, uno menor y otro mayor que 2, cuyos logaritmos se diferencien en menos de una décima, centésima, milésima etc., y tomando uno de estos para logaritmo de 2, el error será menor que una de las mencionadas diferencias.

Así, despues de once interpolaciones, se encuentra el número 2 comprendido entre los medios proporcionales 1,999 y 2,001, y su logaritmo entre los diferenciales 0,3008 y 0,3013, que se diferencian en menos de una milésima; luego

$$\log 2 = 0{,}301$$

con un error menor que una milésima.

Del mismo modo podrian determinarse los logaritmos de los demás números primos menores que el límite de las tablas; y despues sumando los logaritmos de los números primos se hallarian los de los compuestos, quedando así formada una tabla de logaritmos.

Debemos advertir que este procedimiento sólo sirve para demostrar la posibilidad de construir unas tablas de logaritmos: en las Matemáticas superiores se estudian otros mucho mas breves.

214. Una vez determinados los logaritmos de los números en un sistema cuya base es a, se puede hallar los logaritmos de los mismos números en otro sistema de base A, sin repetir los cálculos.

En efecto: sea n un número, x su logaritmo en el sistema de base a, x' su logaritmo en el nuevo sistema de base A; tendremos evidentemente

$$a^x = n, \qquad A^{x'} = n,$$

de donde

$$a^x = A^{x'}.$$

Siengo iguales estas cantidades, tambien lo serán sus logaritmos, esto es,

$$x \log a = x' \log A;$$

pero

$$\log a = 1;$$

luego

$$x = x' \log A \quad \text{ó} \quad x' = x \times \frac{1}{\log A}.$$

Segun esto, *dado el logaritmo de un número en un sistema, se obtendrá el logaritmo del mismo número en otro sistema, multiplicando el logaritmo dado por una fraccion que* *tenga por numerador la unidad y por denominador el logaritmo de la nueva base tomado en el primer sistema.*

Esta fraccion recibe el nombre de *módulo.*

215. Los logaritmos ordinarios de los números que no son potencia de 10, se expresan aproximadamente por medio de fracciones decimales.

La parte entera de un logaritmo se llama *característica,* y la parte decimal *mantisa.*

Teorema. *La característica del logaritmo de un número mayor que 1, consta de tantas unidades menos una, como cifras enteras tenga el número.*

En efecto: todo número de n cifras enteras que no es potencia de 10, es mayor que 10^{n-1} y menor que 10^n, y su logaritmo estará comprendido entre los logaritmos de estos números, que son $n - 1$ y n; luego la parte entera de dicho logaritmo será $n - 1$.

Así, la característica del logaritmo de 4527, 8 es 3; puesto que siendo 4527,8 mayor que 10^3 y menor que 10^4, su logaritmo será mayor que 3 y menor que 4.

De aquí se deduce evidentemente que *un número tiene tantas cifras enteras mas una, como unidades tiene la característica de su logaritmo.*

Así, cuando la característica es 0, 1, 2, 3, el número tiene 1, 2, 3, 4 cifras enteras.

216. Teorema. *Si un número* a *se multiplica ó se divide por una potencia de la base* 10, *la característica de su logaritmo aumenta ó disminuye en tantas unidades como tenga el exponente de dicha potencia, y la mantisa no varía.*

Tenemos, en efecto:

$$\log (a \,.\, 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n$$

y
$$\log (a : 10^n) = \log a - \log 10^n = \log a - n,$$

donde vemos que multiplicando ó dividiendo a por 10^n, su logaritmo aumenta ó disminuye en n unidades enteras, que se agregarán á la característica ó se restarán de ella, sin que varíe la mantisa.

217. Corolario 1.° *Cuando dos números escritos con las mismas cifras, colocadas en el mismo órden, se diferencian en el lugar de la coma, sus logaritmos tienen igual mantisa.*

Puesto que uno de aquellos es igual al otro multiplicado ó dividido por una potencia de 10.

Así, los logaritmos de los números

827,5, 82,75, 8,275

tiene igual mantisa, siendo las características 2, 1 y 0 respectivamente.

218. Corolario 2.° *Si la característica del logaritmo de un número aumenta ó disminuye en* n *unidades, el número se multiplica ó divide por* 10^n.

IV.—Disposicion y uso de las tablas de logaritmos.

219. Problema 1.° *Dado un número entero, hallar su logaritmo.*

Suponemos que se tiene á la vista las tablas de logaritmos de Vazquez Queipo, última edicion, [1] que contiene los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 20000 con *seis* cifras decimales.

Al hallar, por medio de ellas, el logaritmo de un número entero, pueden ocurrir tres casos: 1.° que el número sea menor que 2000; 2.° que esté comprendido entre 2000 y 20000; 3.° que sea mayor que 20000.

220. Primer caso. *El número cuyo logaritmo se busca es menor que* 2000.

La primera plana de las tablas contiene, en columnas verticales, estrechas y señaladas arriba y abajo con la letra N., los números enteros desde 0 hasta 399, y á la derecha de los números, en columnas mas anchas, señaladas con la abreviatura Log., sus logaritmos respectivos.

En la segunda plana se observa ya que sólo hay dos columnas de números señaladas con la letra N., la primera de la izquierda en cada llana, y que estos son los mismos en ambas columnas. Todas las demás planas, hasta el fin de la tabla, presentan dichas dos columnas de números, y éstas contienen repetidos los enteros desde 100 hasta 1999.

Comprendida esta disposicion, es fácil encontrar en las tablas un número menor que 2000.

---

1 Estas tablas son de las llamadas de *doble entrada*. Los alumnos que aprendan á manejarlas, no se verán embarazados para emplear otras mas extensas y voluminosas, como las tan generalizadas de *Callet*, puesto que la disposicion es la misma, salvo ligeras variaciones que se descubren á primera vista.

En el caso presente *debe leerse el número dado en la llana primera ó de la izquierda,* y á su derecha, en la columna señalada con la abreviatura log. 0, se encuentra la parte decimal de su logaritmo. [1] En cuanto á la característica, se determina por el principio del número 215.

Propongámonos, por ejemplo, hallar el logaritmo de 563. Ante todo escribiremos la característica, que es 2; buscaremos despues el número en la columna N., llana izquierda, y á su derecha se encontrarán las cifras 750508 que constituyen la mantisa.

Por consiguiente,

$$\log 563 = 2{,}750508.$$

Sea el número 1417.

La característica es 3; las dos primeras cifras de la mantisa no están escritas, pero se toman las del logaritmo completo anterior, que son 15; las cuatro últimas son 1370; luego

$$\log 1417 = 3{,}151370.$$

221. Segundo caso. *El número dado es mayor que* 2000 *y menor que* 20000.

Prescindiendo por el momento de una cifra de la derecha, el número que resulta se encuentra en las tablas. Se buscará este número en la llana de la izquierda, si la cifra de que prescindimos es menor que 5, y en la llana de la derecha si dicha cifra es 5 ó mayor que 5, y á la derecha del número, en la primera columna, se tomarán las dos primeras cifras de la mantisa, como en el primer caso. Para hallar las cuatro restantes es necesario fijarse en las columnas que tienen á su cabeza y pié las cifras 0, 1, 2, etc. hasta 9, impresas en caractéres gruesos, y buscar el resto de la mantisa enfrente del número, pero en la columna que tiene á su cabeza y pié la cifra de que se ha prescindido.

Sea, por ejemplo, el número 12363.

Prescindiendo de la cifra 3, buscaremos en la llana de la izquierda el número 1236, y á la derecha de éste encontramos dos cifras 09 de la mantisa; despues, en la línea hori-

---

1 La mantisa tiene siempre *seis* cifras: las dos primeras se repiten varias veces, por lo que se han omitido en la mayor parte de l s logaritmos, y se encuentra su lugar en blanco. Cuando suceda esto, se tomarán para dos primeras cifras las del logaritmo anterior mas inmediato que esté completo; las cuatro últimas siempre se encuentran enfrente del número.

zontal del número 1236 y columna de la cifra 3, de que hemos prescindido, se encuentran las cifras 2124 que completan la mantisa; por consiguiente

$$\log 12363 = 4,092124.$$

Sea el número 9487.

Buscaremos en la llana de la derecha el número 948, y hallaremos 97 para primeras cifras de la mantisa; en la línea horizontal del número 948 y columna del 7, se encuentran las cifras restantes 7129; luego

$$\log 9487 = 3,977129.$$

Debe tenerse muy presente que si las cuatro últimas cifras de la mantisa de un logaritmo, van en las tablas precedidas de un asterisco *, las dos primeras no serán las que se encuentran del modo ordinario, sino las del logaritmo completo mas inmediato posterior, esto es, las que se encuentran descendiendo por la columna correspondiente.

Por ejemplo, si queremos hallar el logaritmo de 6458, observaremos que las cuatro últimas cifras de la mantisa 0098 están señaladas con un asterisco; por consiguiente no tomaremos 80 para dos primeras, sino 81.

Así $$\log 6458 = 3,810098.$$

222. Tercer caso. *El número dado es mayor que* 20000.

Sea, por ejemplo, 648735.

Separemos con una coma tantas cifras de la derecha como sean necesarias para que la parte entera del número que resulte sea menor que 20000, y tendremos el número

$$6487,35.$$

El logaritmo de este número tiene igual mantisa que el del propuesto [217], por consiguiente la cuestion se reduce á determinar la mantisa del logaritmo de 6487, 35.

Este número es mayor que 6487 y menor que 6488, luego su logaritmo estará comprendido entre los logaritmos de estos números, y es necesario averiguar qué aumento experimenta el logaritmo de 6487 cuando el número aumenta en 35 centésimas.

Para esto puede admitirse, sin error sensible, que *las diferencias entre los logaritmos son proporcionales á las diferencias entre los números, con tal que éstos sean mayores que* 1000 *y que su mayor diferencia no exceda de la unidad;* por manera que siendo

$$\log 6488 = 3{,}812111$$
$$\log 6487 = \underline{3{,}812044}$$
$$0{,}000067$$

la diferencia entre estos logaritmos es 67 unidades del último órden decimal; y el principio anterior establece que si 6487 aumenta en

$$0{,}01, \qquad 0{,}02, \qquad 0{,}03 \text{ etc.},$$

su logaritmo 3,812044 aumenta en

$$0{,}01 \times 67, \qquad 0{,}02 \times 67, \qquad 0{,}03 \times 67 \text{ etc.}$$

unidades del último órden; por consiguiente si el número aumenta en 0,35, el aumento correspondiente á su logaritmo será

$$0{,}35 \times 67$$

unidades del último órden.

Tenemos, pues,

$$\log 6487{,}35 = 3{,}812067,$$

despreciando las cifras que siguen á la sexta.

Ahora bien, el logaritmo del número propuesto 648735, se diferencia solamente del que acabamos de obtener en la característica, luego, por último,

$$\log 648735 = 5{,}812067.$$

Las diferencias entre los logaritmos de dos números consecutivos se encuentran en las tablas en columnas, señaladas con la abreviatura *dif.*, á la derecha del logaritmo del número menor, y reciben el nombre de *diferencias tabulares*.

Segun acabamos de ver, *para hallar el logaritmo de un número mayor que* 20000 *se separan de la derecha con una coma las cifras decimales necesarias para que la parte entera sea menor que* 20000; *se halla la mantisa del logaritmo de esta parte entera; se multiplica la diferencia tabular por la parte decimal separada, y añadiendo el producto á la mantisa hallada en las tablas, se tendrá la mantisa que se busca. La característica se obtiene por medio del teorema del número* 215.

EJEMPLOS.

1.° Hallar el logaritmo de 325845.

Separando dos cifras decimales, resulta. . . .	3258,45
La mantisa del logaritmo de 3258 es.	512951

La diferencia tabular 133 multiplicada por 0,45 da, prescindiendo de las cifras decimales. . 60

Luego, log 325845 = 5,513011

2.° Sea el número 18726493.

Separando tres cifras decimales, resulta. . 18726,493

La mantisa de log 18726 es. 272445

La diferencia tabular 23 multiplicada por 0,493 dá. 11

Luego, log 18726493 = 7,272456

223. Para multiplicar la diferencia tabular por la parte decimal separada con la coma, pueden emplearse las tablas de *partes proporcionales*, que impresas en papel de color, se encuentran á continuacion de las tablas de logaritmos.

Las mencionadas tablas contienen los productos de las diferencias tabulares por cada una de las cifras 1, 2, 3,........ hasta 9; de modo que se encuentran en ellas los productos parciales de la diferencia tabular por cada cifra de la parte decimal separada, lo que evita el trabajo de formarlos.

Para hallar estos productos parciales, obsérvese que las tablas que nos ocupan están dispuestas como la de Pitágoras, explicada en Aritmética; por manera que el multiplicando se buscará en la primera columna vertical, llamada de las diferencias, y el multiplicador en la primera línea horizontal; recorriendo despues de izquierda á derecha la línea del multiplicando, se llegará á la columna del multiplicador, y se tendrá allí el producto buscado.

Así, para hallar el logaritmo de 325845, empleando las partes proporcionales, escribiremos la mantisa correspondiente al logaritmo de 3258, y buscaremos los productos de la diferencia tabular 133 por las cifras separadas 4 y 5, que son respectivamente 532 y 665, los que se escribirán debajo de dicha mantisa, pero teniendo cuidado de correr el primero un lugar á la derecha, porque representa *décimas*, y el segundo un lugar mas, porque representa *centésimas*. Sumando y despreciando las cifras decimales que siguen á la sexta, se obtiene el logaritmo pedido.

La operacion se dispone asi:

Mantisa de log 3258. . . .	512951
Dif. tab. por 0,4	532
Id. id. por 0,05.	665
Suma.	51301085

Luego, $\log 325845 = 5{;}513011$.

Sea el número 18726493.

Mantisa de log	18726. . . .	272445
Dif. tab. por 0,4	. . . .	92
Id. id. por 0,09	. . . .	207
Id. id. por 0,003	. . . .	69
Suma	. . . .	272456,339

Luego, $\log 18726493 = 7{,}272456$.

224. Problema 2.° *Dado un logaritmo hallar el número correspondiente.*

En la resolucion de este problema distinguiremos dos casos: 1.° que la mantisa del logaritmo dado se encuentre en las tablas; 2.° que dicha mantisa no se encuentre en las tablas.

225. Primer caso. *La mantisa del logaritmo dado se encuentra en las tablas.*

Se buscarán las dos primeras cifras de la mantisa en la columna log 0; descendiendo despues por la misma columna, se busca una línea que empiece por las dos cifras siguientes de la mantisa, ó por dos cifras que compongan un número menor y lo más próximo posible al compuesto por aquellas. Recorriendo dicha línea de izquierda á derecha, en toda la extension de las dos llanas, se encontrarán las cuatro cifras últimas de la mantisa.

Hecho esto, se escribe el número de la columna N., que está enfrente de las cuatro últimas cifras de la mantisa, á su derecha se pone la cifra de la columna en que se han encontrado éstas, y del número que resulta se toma para parte entera, tantas cifras como unidades mas una tiene la característica [215], añadiendo para ello uno ó más ceros si fuesen necesarios.

Propongámonos hallar el número cuyo logaritmo es 3, 685473.

Buscaremos las dos primeras cifras 68 en la columna lóg. 0; y descendiendo por la misma, hallaremos una línea que empieza por 48; como la siguiente empieza por 57, número mayor que 54, se recorre la primera de izquierda á derecha, y en la columna del 7 se hallan las cifras 5473 El número de la columna N. seguido de un 7, da 4847, que es el número buscado, pues debe tener cuatro cifras enteras.

Sea el logaritmo 5,180069.

El número 18 y todos los comprendidos entre 00 y 30 se encuentran en las tablas en dos puntos bastante separados, uno antes y otro despues del número 1000: conviene en todos los casos leer las dos primeras cifras de la mantisa, cuando no pasan de 30, despues del número 1000. Una vez hallado el número 18, observaremos que va seguido en las tablas de las cifras 01, que ya son mayores que las 00 del logaritmo dado: en este caso y en todos los análogos, se buscan las cifras restantes de la mantisa en la línea *superior* inmediata, y se encontrarán precididas de un asterisco. En el ejemplo actual las hallamos en la columna 8 frente al número 1513, que con la cifra 8 da 15138; como la característica es 5, añadiremos un cero, y 151380 será el número correspondiente al logaritmo dado.

226. Segundo caso. *La mantisa del logaritmo dado no se encuentra en las tablas.*

Sea el logaritmo dado 3, 893912.

Buscando esta mantisa, por la regla del caso anterior, se encontrarán dos consecutivas 893873 y 893928, una menor y otra mayor que la propuesta, de donde se infiere que ésta no se encuentra en las tablas. Los números correspondientes á las mantisas halladas son 7832 y 7833, entre los que debe hallarse el número que buscamos; para calcular qué aumento experimenta el número 7832 cuando su logaritmo aumenta en 39 unidades del último órden decimal, que es la diferencia entre el logaritmo dado y el inmediato inferior de las tablas, debemos resolver la cuestion siguiente: si por el aumento de 0,000055 en el logaritmo, aumenta 1 unidad el número, cuando el logaritmo aumenta en 0,000039 ¿cuánto aumentará el número?

Segun el principio enunciado en el número 222, el aumento que buscamos será

$$0{,}000039 : 0{,}000055 \text{ ó } 39 : 55 = 0{,}709;$$

luego el número correspondiente al logaritmo dado será 7832,709.

De lo expuesto se deduce la regla siguiente:

Para hallar el número correspondiente á un logaritmo dado, cuando la mantisa no se encuentra en las tablas, se busca la mantisa inmediata menor, y se divide la diferencia entre ambas por la diferencia tabular correspondiente á la menor; la parte decimal del cociente se escribe á la derecha del número correspondiente á la mantisa hallada en las tablas, y se toman tantas cifras enteras como unidades mas una tiene la característica.

EJEMPLOS.

1.° Hallar el número correspondiente al logaritmo 4, 168130.

Mantisa del log. dado.	168130
Id. del inmediato menor. . .	168114
Diferencia.	16
Diferencia tabular..	30

Cociente de $16 : 30 = 0,533$.

Escribiendo este cociente á la derecha del número 14727, correspondiente á la mantisa hallada en las tablas, y separando 5 cifras enteras, resulta el número 14727,533.

2.° Sea el logaritmo.	5.732580
Mantisa del inmediato menor.	732555
Diferencia.	25
Diferencia tabular.	80
Cociente de $25 : 80 = 0,3125$.	
Número correspondiente á la mantisa hallada en las tablas.	5402.

Luego $5,732580 = \log 540231,25$.

227. Las tablas de partes proporcionales dan fácilmente el cociente de dividir la diferencia entre las mantisas por la diferencia tabular.

Para dividir 25 por 80, ejemplo 2.°, se busca la diferencia tabular 80, y se recorre la línea de ésta, de izquierda á derecha, hasta encontrar el número inmediato inferior á 25, que es 24,0; la cifra 3 de la columna, es la primera del cociente.

La diferencia 1 entre 24 y 25 se multiplica por 10, y se busca, en la linea horizontal del 80, el número más próximo á 10, que es 8.0; la cifra 1 de la columna es la segunda del cociente. La diferencia 2 entre 8 y 10 se multiplica por 10, y se busca el número más próximo al producto 20, que es 16.0, y 2 será la tercera cifra del cociente. Del mismo modo se obtiene la última, que es 5.

228. PROBLEMA 3.° *Hallar el logaritmo de una fraccion.*

Sea la fraccion $\frac{7}{13}$.

Sabemos [207] que

$$\log \frac{7}{13} = \log 7 - \log 13;$$

siendo el logaritmo de 7 menor que el de 13, la diferencia, ó sea el logaritmo de $\frac{7}{13}$, será negativa, lo que sabiamos ya [201].

Así, $\log \frac{7}{13} = 0{,}845098 - 1{,}113943 = -0{,}268845.$

229. Tratemos ahora de hallar el logaritmo de una fraccion decimal menor que la unidad.

Sea la fraccion 0,00456.

Tenemos $0{,}00456 = 4{,}56 : 1000;$

luego $\log 0{,}00456 = \log 4{,}56 - \log 1000,$

ó $\log 0{,}00456 = \log 4{,}56 - 3.$

El logaritmo de 4,56 tiene igual mantisa que el de 456, y la característica es *cero;* luego

$$\log 0{,}00456 = 0{,}658965 - 3.$$

Ahora podriamos restar 0,658965 de 3, y poner á la diferencia el signo menos; pero es preferible dejar indicada la sustraccion, si bien bajo otra forma.

Esta es: $\bar{3}{,}658965$.

De suerte que el signo *menos* colocado sobre el 3, indica que la característica es negativa y la mantisa positiva.

Así, $\bar{3}{,}658965 = -3 + 0{,}658965.$

Obsérvese que la cifra 3 de la característica indica el lugar que ocupa, en el número propuesto, la primera cifra decimal significativa.

Demostremos ahora que siempre sucede lo mismo.

En efecto: si n es el lugar de dicha cifra decimal, multiplicando el número dado por 10^n, se obtendrá otro cuya parte entera constará de una cifra, siendo por lo tanto *cero* la característica de su logaritmo; pero habiendo multiplicado el número propuesto por 10^n, su logaritmo ha aumentado en n unidades, las que deben restarse de la característica *cero* para obtener la verdadera. Por consiguiente ésta será

$$0 - n = \bar{n}.$$

Ahora podemos enunciar la regla siguiente:

La característica del logaritmo de una fraccion decimal menor que 1, tiene tantas unidades negativas como indica el *lugar de la primera cifra significativa; en cuanto á la mantisa se obtiene como si el número dado fuese entero.*

Así, $\log\ 0{,}7852 = \overline{1}{,}894980.$

$\log\ 0{,}00027 = \overline{4}{,}431364.$

230. Problema 4.° *Hallar la fraccion correspondiente á un logaritmo de característica negativa.*

Sea el logaritmo $\overline{2}{,}653213$.

La característica $\overline{2}$ indica que la primera cifra decimal significativa es la segunda, y como á la mantisa dada corresponde el número 45, tendremos:

$$\overline{2}{,}653213 = \log\ 0{,}045.$$

Luego, *para hallar la fraccion correspondiente á un logaritmo dado de característica negativa, se opera como si ésta fuese positiva, y se escriben despues de la coma los ceros necesarios para que la primera cifra significativa ocupe el lugar indicado por la característica.*

Así, $\overline{1}{,}845098 = \log\ 0{,}7$

$\overline{5}{,}255273 = \log\ 0{,}000018.$

231. Examinemos ahora cómo deben efectuarse las operaciones aritméticas, cuando algunos datos ó todos son fracciones decimales de característica negativa y mantisa positiva.

Adicion.

$$\begin{array}{r} \overline{4}{,}853469 \\ \overline{1}{,}934508 \\ 3{,}695430 \\ \hline 0{,}483407 \end{array}$$

Sumando las partes decimales, por la regla general, resulta la parte decimal de la suma y además 2 unidades enteras, que sumadas algebráicamente con — 4, — 1 y 3, dan la característica 0.

232. Sustraccion.

$$\begin{array}{r} \overline{4}{,}457893 \\ \overline{2}{,}583942 \\ \hline \overline{3}{,}873951 \end{array}$$

Restando las partes decimales, por la regla general, resulta la parte decimal de la diferencia; pero habiendo aumentado el minuendo en una unidad simple, debe aumentarse en la misma la parte entera del sustraendo, que así se convierte en -1; restando algebráicamente las características resulta

$$-4-(-1)=-4+1=-3.$$

La sustraccion puede convertirse en suma, por medio del complemento logarítmico.

Llamamos *complemento aritmético de un logaritmo* ó *complemento logarítmico*, á otro logaritmo que sumado con el propuesto dé la suma *cero*.

Se desprende de esta definicion que el complemento de un logaritmo es igual á éste y de signo contrario.

Así, el complemento de 5 es $\overline{5}$, y recíprocamente, puesto que

$$5+\overline{5}=0.$$

Igualmente, el complemento de 3,141724 es $-3,141724$, puesto que

$$3,141724+(-3,141724)=0.$$

Sin embargo, como al efectuar operaciones con logaritmos, nunca emplearemos los negativos, sino que serán reemplazados por los de característica negativa y mantisa positiva, para hallar el complemento de un logaritmo, en vez de cambiar el signo, observaremos si aquel tiene mantisa, las reglas siguientes:

1.ª *Se cambiará el signo de la característica, despues de añadir á ésta una unidad positiva.*

2.ª *Se restará de* 10 *la primera cifra decimal significativa de la derecha, y de* 9 *las demás.*

Demostremos estas reglas.

Sea el logaritmo positivo 4,274356; su complemento será $-4,274356$; añadiendo y restando á este número 5 unidades, esto es, tantas mas una como tiene la característica, resulta

$$-4,274356=-5+(5-4,274356)$$

ó

$$-4,274356=-5+0,725644=\overline{5},725644.$$

Donde vemos que la característica $\overline{5}$ se obtiene por la primera regla, y que la sustraccion indicada contenida en el paréntesis, puede efectuarse restando de 10 la primera cifra decimal significativa y las demás de 9.

Sea ahora el logaritmo de característica negativa $\overline{2},472358$.
Su complemento será

$$2 - 0,472358,$$

donde vemos que la característica cambia de signo y que al efectuar la sustraccion disminuirá en una unidad, lo que equivale á aumentar $\overline{2}$ en esta unidad y cambiar despues el signo; por consiguiente el complemento buscado es

$$1,527642.$$

Veamos ya cómo la sustraccion puede convertirse en adicion.

Sea $$4,472935 - 6,895023.$$

Esta diferencia equivale á la suma

$$4,472935 + (- 6,895023);$$

pero la cantidad contenida en el paréntesis es el complemento logarítmico del sustraendo 6,895023; luego

Para restar dos logaritmos, se añade al minuendo el complemento del sustraendo.

EJEMPLOS.

1.° Efectuar la sustraccion siguiente:

$$\overline{4},457893 - \overline{2},583942.$$

Disposicion práctica.

Minuendo.	$\overline{4},457893$
C.to del sustraendo. .	$1,416058$
Diferencia.	$\overline{3},873951$

2.° Hallar el logaritmo de la fraccion $\frac{43}{79}$.

Disposicion práctica.

Log 43.	$1,633468$
C.to log 79.	$\overline{2},102373$
Log $\frac{43}{79}$	$\overline{1},735841$

233. **Multiplicacion.**

Sólo vamos á considerar el caso en que el multiplicando es un logaritmo de característica negativa, y el multiplicador un número entero y positivo, por ejemplo

$$\begin{array}{r} \overline{3},257608 \\ 5 \\ \hline \overline{14},288040 \end{array}$$

Multiplicando 5 por la parte decimal del logaritmo, se obtiene la del producto y además una unidad positiva, que sumada algebráicamente con $\overline{15}$, producto de 5 por la característica, da $\overline{14}$.

234. **Division.**

Supongamos que el dividendo es un logaritmo de característica negativa, y el divisor un número entero y positivo, y distinguiremos dos casos: 1.° que la característica sea múltiplo del divisor; 2.° que no lo sea.

1.° $\overline{42},214572 : 6 = \overline{7},035762.$

Como se vé este caso no ofrece dificultad.

2.° $\overline{3},460935 : 5 = (-3 + 0,460935) : 5.$

Aumentando y disminuyendo el dividendo en las unidades necesarias para que la característica sea divisible por 5, que son 2 en nuestro ejemplo, tendremos

$$\overline{3},460935 : 5 = (\overline{5}+2,460935) : 5 = -1+0,492187 = \overline{1},492187.$$

235. Para ejercitarse en el uso de los logaritmos, es muy conveniente efectuar los cálculos siguientes:

1.° Hallar el valor de x dado por la igualdad

$$x = \frac{429 \, . \, 217}{835}.$$

Tomando logaritmos en los dos miembros, será

$$\log x = \log 429 + \log 217 - \log 835,$$

ó

$$\log x = \log 429 + \log 217 + \mathrm{C.^{to}} \log 835.$$

$$\begin{array}{rr} & 2.632457 \\ & 2,336460 \\ & \overline{3},078314 \\ \hline \log x = & 2,047231 \end{array}, \quad x = 111,4887.$$

2.° Hallar el valor de x dado por la igualdad

$$x = \frac{3{,}27 \times 5{,}428}{7{,}2 \times 95 \times 0{,}36}.$$

$$\operatorname{Log} x = \log 3{,}27 + \log 5{,}428 + \mathrm{C.^{to}} \log 7{,}2 + \mathrm{C.^{to}} \log 95 + \mathrm{C.^{to}} \log 0{,}36.$$

$$\begin{array}{r} 0{,}514548 \\ 0{,}734640 \\ \overline{1}{,}142668 \\ \overline{2}{,}022276 \\ 0{,}443697 \\ \hline \end{array}$$

$$\operatorname{Log} x = \overline{2}{,}857829\ , \qquad x = 0{,}072082.$$

3.° $$x = \left(\frac{427}{584}\right)^4$$

$$\log x = (\log 427 + \mathrm{C.^{to}} \log 584)\ 4.$$

$$\begin{array}{r} 2{,}630428 \\ \overline{3}{,}233587 \\ \hline \overline{1}{,}864015 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\log x = \overline{1}{,}456060\ , \qquad x = 0{,}285798.$$

4.° $$x = \sqrt[5]{\frac{49\ .\ 8}{75}}$$

$$\log x = \frac{\log 49 + \log 8 + \mathrm{C.^{to}} \log 75}{5}.$$

$$\begin{array}{r} 1{,}690196 \\ 0{,}903090 \\ \overline{2}{,}124939 \\ \hline 0{,}718225 \end{array}$$

$$\log x = 0{,}143645, \qquad x = 1{,}392019.$$

5.° $$x = \sqrt[3]{\left(\frac{24}{17\ .\ 5}\right)^5}$$

$$\log x = \frac{(\log 24 + \mathrm{C.^{to}} \log 17 + \mathrm{C.^{to}} \log 5)\ 5}{3}.$$

$$\begin{array}{r} 1,380211 \\ \overline{2},769551 \\ \overline{1},301030 \\ \hline \overline{1},450792 \\ 5 \\ \hline \overline{3},253960 \end{array}$$

$$\log x = \overline{1},084653, \qquad x = 0,121521.$$

6.° $$x = -\frac{24 \,.\, 35}{87}.$$

Prescindiendo del signo menos, será

$$\log \frac{24 \,.\, 35}{87} = \log 24 + \log 35 + \mathrm{C.^{to}} \log 87.$$

$$\begin{array}{r} 1,380211 \\ 1,544068 \\ \overline{2},060481 \\ \hline 0,984760 \end{array}$$

$$\frac{24 \,.\, 35}{87} = 9,655178, \qquad x = -\,9,655178.$$

V.—Aplicacion de los logaritmos á la resolucion de las ecuaciones exponenciales.

236. *Se llama* ECUACION EXPONENCIAL *la ecuacion en que la incógnita entra como exponente.*

$$a^x = b,$$

es una ecuacion exponencial.

Tambien lo es

$$a^{b^x} = c.$$

La primera es una exponencial de *primer órden*, y la segunda de *segundo órden*, por ser el exponente b^x una exponencial de primer órden. Del mismo modo

$$a^{b^{c^x}} = d,$$

es una exponencial de *tercer órden* etc.

Vamos á resolver la ecuacion

$$a^x = b.$$

Tomando logaritmos, resulta

$$x \log a = \log b,$$

de donde
$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Sea la ecuacion

$$a^{b^x} = c.$$

Tomando logaritmos será

$$b^x \log a = \log c,$$

de donde
$$b^x = \frac{\log c}{\log a};$$

si tomámos logaritmos otra vez, tendremos

$$x \log b = \log \log c - \log \log a,$$

de donde
$$x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$$

Por un procedimiento análogo se resolverian las ecuaciones exponenciales de otros órdenes.

EJEMPLOS.

1.° $$8^x = 7524.$$

$$x = \frac{\log 7524}{\log 8} = \frac{3,876449}{0,903090} = 4,292418.$$

2.° $$4^{2^x} = 65536$$

$$2^x = \frac{\log 65536}{\log 4} = \frac{4,816479}{0,602060}.$$

$$x = \frac{\log 4,816479 - \log 0,602060}{\log 2} = \frac{0,903090}{0,301030} = 3.$$

VI.—Interés compuesto.—Anualidades.

237. Sabemos [Aritm. 322] que el interés se llama *compuesto* cuando los intereses que produce un capital en un periodo de tiempo, se acumulan al capital, formando así uno nuevo, que aumenta al fin de cada periodo.

Por ejemplo, si una persona presta 20000 pesetas al 5 por ciento anual, y trascurrido el primer año no percibe los intereses, el capital durante el segundo año será igual al primitivo aumentado en dichos intereses, que importan 1000 pesetas, esto es, á 21000 pesetas; de suerte que el interés al cabo del segundo año se compondrá del interés del capital 20000 más el interés del interés 1000, importando, por consiguiente

$$1000 + 50 = 1050 \text{ pesetas.}$$

Si tampoco se perciben estos intereses, el capital será durante el tercer año

22050 pesetas,

y se aumentará en el 5 por ciento para formar el capital correspondiente al cuarto año, y así sucesivamente.

En las cuestiones de interés compuesto, en vez del tanto por ciento se emplea, como mas cómodo, el *tanto por uno:* en lugar de decir, por ejemplo, que 100 pesetas producen 5, diremos que 1 peseta produce $\frac{5}{100}$ ó 0,05, lo que es enteramente igual.

Propongámonos resolver el siguiente

PROBLEMA 1.° *Un capital* c *se coloca durante* t *años á interés compuesto, siendo* r *el tanto por uno anual. ¿Cuánto valdrá la suma del capital é intereses al cabo de dicho tiempo?*

Cada unidad de dinero produce en un año la cantidad r, por consiguiente vale al cabo de este tiempo $1 + r$; si una unidad se convierte en $1 + r$, c unidades se convertirán en

$$c\,(1 + r);$$

luego *para hallar el valor de un capital al cabo de un año, se multiplica por* $1 + r$.

Esta regla tan sencilla, puede aplicarse á un capital cualquiera, por lo tanto el capital $c\,(1 + r)$, al cabo del segundo año, será

$$c\,(1 + r)\,(1 + r) = c\,(1 + r)^2.$$

Aplicando de nuevo la regla á este capital, resulta al fin del tercer año

$$c\,(1 + r)^2\,(1 + r) = c\,(1 + r)^3.$$

Finalmente, el capital al cabo de t años será

$$c\,(1 + r)^t.$$

Si lo representamos por C tendremos la fórmula

$$C = c\,(1 + r)^t. \qquad [1]$$

Esta fórmula se ha obtenido en la hipótesis de que t es un número entero de años.

Supongamos, ahora, que el tiempo sea el número fraccionario de años $\frac{m}{n}$.

Representemos por x el interés que debe producir la unidad de dinero en el tiempo $\frac{1}{n}$, para que en un año produzca r.

Si cada unidad de dinero produce x en el tiempo $\frac{1}{n}$, se convierte al cabo de este tiempo en $1 + x$; luego c unidades de dinero se convertirán en

$$c\,(1 + x);$$

vemos, pues, que para hallar el valor de un capital al cabo de la fraccion de año $\frac{1}{n}$, se multiplica el capital por $1 + x$.

Como esta regla puede aplicarse á un capital cualquiera, es claro que $c\,(1 + x)$ al cabo de otra fraccion $\frac{1}{n}$ de año, ó sea el capital c al cabo del tiempo $\frac{2}{n}$, será

$$c\,(1 + x)^2;$$

igualmente, al cabo del tiempo $\frac{3}{n}$, el capital c será

$$c\,(1 + x)^3,$$

y por último, el capital c al cabo del tiempo $\frac{m}{n}$, será

$$c\,(1 + x)^m.$$

Tendremos, pues,

$$C = c\,(1 + x)^m, \qquad [2]$$

llamando C á la suma del capital é intereses al cabo del tiempo $\frac{m}{n}$.

El razonamiento anterior demuestra que el capital c al cabo del tiempo $\frac{n}{n}$, esto es, al cabo de un año es

$$c\,(1+x)^n,$$

y como sabemos por otra parte que este capital es tambien

$$c\,(1+r),$$

tendremos

$$c\,(1+x)^n = c\,(1+r);$$

de donde

$$1+x = (1+r)^{\frac{1}{n}}.$$

Sustituyendo este valor de $1+x$ en la fórmula [2], resulta

$$C = c\left((1+r)^{\frac{1}{n}}\right)^m = c\,(1+r)^{\frac{m}{n}},$$

y como $\frac{m}{n}$ es el tiempo, se puede sustituir por t, obteniendo

$$C = c\,(1+r)^t. \qquad [1]$$

Luego la fórmula [1], obtenida en el supuesto de ser t un número entero de años, es igualmente cierta cuando t sea un número fraccionario.

La ecuacion [1] establece una relacion entre las cantidades C, c, r, t, y nos dará una cualquiera de éstas, cuando se conozcan las otras tres.

Si conocemos el capital primitivo, el tanto por uno y el tiempo, tomando logaritmos, será

$$\log C = \log c + t \log (1+r).$$

Si conociendo la suma C del capital é intereses, el tanto por uno y el tiempo, queremos hallar el capital primitivo c, tendremos

$$c = \frac{C}{(1+r)^t};$$

de donde

$$\log c = \log C - t \log (1+r).$$

Si la incógnita es el tiempo t, será

$$t = \frac{\log C - \log c}{\log (1+r)}.$$

Por último, si deseamos conocer el tanto por uno r, tendremos

$$1+r=\sqrt[t]{\frac{C}{c}},$$

$$\log(1+r)=\frac{\log C-\log c}{t}.$$

EJEMPLOS.

1.° *Hallar el valor del capital* 6500 *duros al cabo de* 8 *años, al* 6 *por ciento.*

$$\begin{aligned} &\log 6500 \ldots\ldots\ldots = 3{,}812913 \\ &\log 1{,}06 = 0{,}025306 \\ &8 \log 1{,}06 \ldots\ldots\ldots = 0{,}202448 \\ &\qquad \operatorname{Log} C = 4{,}015361 \end{aligned}$$

$C = 10360$ duros.

2.° *¿Cuál es el capital que vale al cabo de* 9 *años* 43800 *pesetas, siendo* 5 *el tanto por ciento?*

$$\begin{aligned} &\log 43800 \ldots\ldots\ldots = 4{,}641474 \\ &\log 1{,}05 = 0{,}021189 \\ &9 \log 1{,}05 \ldots\ldots\ldots = 0{,}190701 \\ &\qquad \log c = 4{,}450773 \end{aligned}$$

$c = 28234{,}02.$

3.° *¿Cuánto tiempo deberá estar colocado un capital de* 8000 *pesetas, al* 5 *por ciento, para que adquiera el valor* 14000 *pesetas?*

$$\begin{aligned} &\log 14000 \ldots\ldots\ldots = 4{,}146128 \\ &\log 8000 \ldots\ldots\ldots = 3{,}903090 \\ &\qquad\qquad 0{,}243038 \\ &\log 1{,}05 \ldots\ldots\ldots = 0{,}021189 \\ &\log 0{,}243038 \ldots = \overline{1}{,}385674 \\ &\log 0{,}021189 \ldots = \overline{2}{,}326110 \\ &\qquad \log t = 1{,}059564 \end{aligned}$$

$t = 11$ años 5 meses 19 dias.

4.ª *¿A qué tanto por ciento deberá colocarse un capital de 25780 pesetas para que, al cabo de 4 años, ascienda á 33792,40 pesetas?*

$$\begin{array}{ll} \log 33792{,}40 & = 4{,}528819 \\ \log 25780 & = \underline{4{,}411283} \\ & \ 0{,}117536 \end{array}$$

$$\log(1+r) = 0{,}117536 : 4 = 0{,}029384$$

$$1 + r = 1{,}07,\ r = 0{,}07;$$

luego el tanto por ciento es 7.

238. PROBLEMA 2.º *Un capital* c *se coloca por* t *años al tanto por uno* r, *á interés compuesto; y cada año se agrega al capital primitivo una suma igual con las mismas condiciones. ¿Cuál será, al cabo de dicho tiempo, el valor de los capitales acumulados con sus intereses compuestos?*

El capital primitivo c, al cabo de t años, vale

$$c(1+r)^t;$$

la suma c que se agrega al fin del primer año, permanece colocada $t-1$ años, luego se convierte en

$$c(1+r)^{t-1};$$

igualmente, las sumas iguales á c agregadas al fin del segundo, tercero, cuarto etc. año, valen

$$c(1+r)^{t-2}, \quad c(1+r)^{t-3}, \quad c(1+r)^{t-4} \text{ etc.};$$

y la última suma c, como sólo produce interés durante el último año, se convierte en

$$c(1+r).$$

Si llamamos C á la suma total de capitales é intereses compuestos, será

$$C = c(1+r)^t + c(1+r)^{t-1} + c(1+r)^{t-2} + \ldots + c(1+r);$$

poniendo c por factor comun, resulta

$$C = c\,[(1+r)^t + (1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \ldots + (1+r)].$$

El segundo miembro es el producto de c por la suma de los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término es $1+r$, el último $(1+r)^t$, y la razon $1+r$; luego

$$C = \frac{c\,[(1+r)^{t+1} - (1+r)]}{r} = \frac{c(1+r)\,[(1+r)^t - 1]}{r}.$$

EJEMPLO.

Una suma de 1000 pesetas se coloca á interés compuesto, siendo 5 el tanto por 100, y cada año se agrega al capital primitivo otras 1000 pesetas con las mismas condiciones. ¿Cuál será al cabo de 12 años el valor de los capitales acumulados con sus intereses?

Tenemos

$$c = 1000, \qquad r = 0{,}05, \qquad t = 12.$$

$$C = \frac{1000 \times 1{,}05\,(1{,}05^{12} - 1)}{0{,}05}.$$

$$\begin{aligned} &\log 1000 \ldots\ldots\ldots = 3 \\ &\log 1{,}05 \ldots\ldots\ldots = 0{,}021189 \\ &1{,}05^{12} - 1 = 0{,}795841 \\ &\log 0{,}795841 \ldots\ldots = \overline{1}{,}900827 \\ &\text{C.}^{\text{to}} \log 0{,}05 \ldots\ldots = 1{,}301030 \\ &\qquad\qquad \text{Log } C = 4{,}223046 \end{aligned}$$

$$C = 16712{,}69 \text{ pesetas.}$$

239. PROBLEMA 3.° *Un capital* c, *tomado á préstamo, debe pagarse por medio de* t *cuotas iguales, que serán satisfechas al fin de cada año, á contar de la época del empréstito. ¿Cuál será la cuota anual siendo* r *el tanto por uno?*

La cuota anual recibe el nombre de *anualidad;* de suerte que ANUALIDAD *es la suma que debe pagarse anualmente para extinguir una deuda y sus intereses compuestos en cierto número de años.*

El capital c al cabo de t años, se convierte en

$$c\,(1 + r)^t,$$

y esta es la suma que deberia abonarse al prestador si todos los pagos se hiciesen al fin del tiempo t.

Pero la anualidad a satisfecha despues del primer año, representa á los t años de la época del empréstito, una suma mayor, que será

$$a\,(1 + r)^{t-1};$$

igualmente, las cuotas iguales á a satisfechas despues del segundo, tercero, cuarto etc. años, representan al fin del tiempo t, otras cantidades mayores, expresadas por

$$a\,(1 + r)^{t-2}, \qquad a\,(1 + r)^{t-3}, \qquad a\,(1 + r)^{t-4};$$

y la suma de los valores que adquieren las cuotas al fin del tiempo t más el valor a de la última, debe ser igual á l cantidad

$$c\,(1+r)^t.$$

Tenemos, pues,

$$a\,(1+r)^{t-1} + a\,(1+r)^{t-2} + a\,(1+r)^{t-3} + \ldots\ldots + a = c\,(1+r)^t,$$

ó $$a\,[(1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + (1+r)^{t-3} + \ldots\ldots + 1] = c\,(1+r)^t;$$

$$\frac{a\,[(1+r)^t - 1]}{r} = c\,(1+r)^t.$$

240. En esta ecuacion entran cuatro cantidades a, c, t, r: una cualquiera de las dos primeras puede calcularse fácilmente, siempre que las otras tres sean conocidas.

Para hallar el valor de t puede hacerse

$$(1+r)^t - 1 = x,$$

trasformando así la ecuacion en

$$\frac{ax}{r} = c\,(1+x), \text{ que da } x = \frac{cr}{a - cr};$$

una vez conocida x, hallaremos t del modo siguiente:

$$(1+r)^t = 1 + x,$$

$$t \log (1+r) = \log (1+x),$$

$$t = \frac{\log (1+x)}{\log (1+r)}.$$

Por último, si tratásemos de hallar r, encontrariamos, haciendo $1 + r = x$, la ecuacion del grado $t + 1$

$$cx^{t+1} - (c+a)\,x^t + a = 0,$$

que no sabemos resolver.

EJERCICIOS.

I. Un obrero, que debe abrir un pozo de 15 metros de profundidad, recibe 3 pesetas por el primer metro, 4 por el segundo, 5 por el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuánto recibe por abrir el pozo?

II. Un cuerpo, al caer en el vacío, recorre durante el primer segundo 4,8997 metros, durante el segundo recorre tres veces esta distancia, durante el tercero, recorre cinco veces la misma, y así sucesivamente. ¿Cuántos metros descenderá en 12 segundos?

III. Hallar la suma de los términos de una progresion aritmética, conociendo el último, la razon y el número de términos.

IV. Hallar los términos extremos de una progresion aritmética, conociendo la razon, el número de términos y la suma de éstos.

V. Conociendo el primer término de una progresion por diferencia, la suma de todos y la razon, hallar el último término y el número de éstos.

VI. Una persona accede á vender su caballo á condicion de recibir un céntimo de real por el primero de los 32 clavos que tienen las herraduras, 2 céntimos por el segundo, 4 céntimos por el tercero, y así sucesivamente, duplicando siempre el número de céntimos. ¿Cuánto pide por el caballo?

VII. Resolver los problemas III, IV y V cuando la progresion es geométrica,

VIII. Calcular por medio de logaritmos las siguientes expresiones:

$$x=\sqrt[5]{\frac{15}{15}\cdot\left(\frac{12}{29}\right)} \qquad\qquad x=\sqrt[m]{\frac{a^2-b^2}{c}}.$$

IX. Averiguar de qué expresiones provienen los siguientes valores:

$$\log x=\frac{1}{3}\log a-\frac{1}{5}\log b;\quad \log x=5\log a+7\log b-5-\frac{2}{5}\log a.$$

X. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$2^{3x}.\ 5^{x-2}=5^{x-1}.\ 4^{x}$$
$$2^{x^2}.\ 5^{x}=9.$$

XI. En cuántos años se duplica un capital cualquiera, prestado á interés compuesto, siendo 5 el tanto por ciento?

XII. Averiguar qué capital será necesario colocar á interés compuesto, para que retirando al fin de cada año una suma de 5000 pesetas, se reembolse el capital y los intereses al 6 por ciento en 20 años.

ERRATAS.

Página.	Líneas.	Dice.	Debe decir.
59	3	..... P	..... $P+1$
63	— 9	ab^3c	a^2b^3c
130	—17	16	168
132	—18	es a	es a^2
135	— 2	$\frac{a}{b'}$	$\frac{a'}{b'}$
172	1	7 libras	9 libras
183	5	$\frac{6634}{36}$ varas	$\frac{6334}{36}$ varas
183	7	$\frac{6134}{36}$	$\frac{6334}{36}$
183	7	232 varas	212 varas
189	9	247 dias	1014 dias
198	16	15	17
203	—14	164,38	164,52
205	— 6	80000	80000 reales
206	—11	240	640
217	—12	$+6ax^7$	$-6ax^7$
227	—16	$\frac{20ab^3c}{32a^4b^9c}$	$\frac{20ab^3c}{32a^4b^5c}$
233	—19	*primero de éste*	*último de éste*
265	—14	$\frac{0}{B}$	$\frac{0}{A}$
270	— 5	$\frac{av}{v}$	$\frac{av}{0}$
309	—13	$\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$
309	—10	multiplicadas	multiplicada
319	— 3	$\frac{\sqrt{a}}{x^2}$	$\frac{\sqrt{a}}{x}$
349	—12	$\sqrt{a}$	$\sqrt[m]{a}$
351	— 6	$\sqrt{191102976}$	$\sqrt[6]{191102976}$
394	5	3,257608	$\bar{3}$,257608

ÍNDICE.

Páginas.

Páginas.

Páginas.

CAPÍTULO SEGUNDO.

CAPÍTULO TERCERO.—PROBLEMAS QUE PUEDEN SER RESUELTOS POR MEDIO DE UNA ECUACION DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

CAPÍTULO CUARTO.—DISCUSION DE LAS ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.—INTERPRETACION DE LAS SOLUCIONES NEGATIVAS.—GENERALIZACION DE LAS FÓRMULAS POR MEDIO DE LAS CANTIDADES NEGATIVAS.

CAPÍTULO QUINTO.—RESOLUCION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TANTAS ECUACIONES COMO INCÓGNITAS.

CAPÍTULO SEXTO.

Páginas.

CAPÍTULO SÉTIMO.

CAPÍTULO OCTAVO.

CAPÍTULO NOVENO.

LIBRO TERCERO —ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

CAPÍTULO PRIMERO.

CAPÍTULO SEGUNDO.

CAPÍTULO TERCERO.