



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# SISTEMAS DINÁMICOS

Martín Piñeiro Quintana

Curso 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRADO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grado**

# SISTEMAS DINÁMICOS

Martín Piñeiro Quintana

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Conocimiento: Análisis Matemático</b>
<b>Título: Sistemas Dinámicos</b>
<b>Breve descripción del contenido</b>
Este trabajo se centrará en el estudio de los sistemas dinámicos, los cuales constituyen una generalización de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en diferencias. Estos sistemas sirven para modelar matemáticamente procesos que evolucionan en el tiempo, tanto de forma continua como discreta. En el trabajo se analizarán las propiedades básicas de los sistemas dinámicos y se introducirán los conceptos de equilibrio, estabilidad y caos.



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Sistemas Dinámicos</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones Generales . . . . .	1
<b>2. Sistemas Dinámicos Continuos</b>	<b>7</b>
2.1. Relación entre EDOs y Sistemas Dinámicos . . . . .	7
2.2. Conjuntos Límites y Atractores . . . . .	15
<b>3. Sistemas Dinámicos Discretos</b>	<b>23</b>
3.1. Análisis Gráfico . . . . .	24
3.2. Puntos Periódicos . . . . .	26
3.3. Hiperbolicidad . . . . .	30
3.4. Familia Cuadrática . . . . .	35
3.5. Dinámica Simbólica . . . . .	45
3.6. Relación entre $\sigma$ y $F_\mu$ . . . . .	48
3.7. Caos . . . . .	51
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>



## Resumen

Un sistema dinámico no es más que un sistema de ecuaciones que varían con el tiempo: si este recorre los números reales, hablaremos de sistemas dinámicos continuos; cuando toma valores enteros, se llamarán sistemas dinámicos discretos. El objetivo de este trabajo es hacer una introducción teórica a los sistemas dinámicos para más tarde estudiar los dos casos particulares existentes. Veremos como los sistemas dinámicos continuos se pueden considerar equivalentes a las ecuaciones diferenciales ordinarias gracias al Teorema de Existencia Global. Además, estudiaremos los diferentes tipos de conjuntos atractores o repulsores que definen sus retratos de fases. Por otra parte, abordaremos los sistemas dinámicos discretos de una manera más gráfica, hablando sobre puntos periódicos e hiperbólicos. Luego, nos centraremos en un ejemplo concreto (la familia cuadrática) y, para finalizar, introduciremos el concepto de caos.

## Abstract

A dynamical system is just a system of equations that varies over time: if it goes through real numbers, we will talk about continuous dynamical systems; when it takes integer values, they will be called discrete dynamical systems. The objective of this work is to make a theoretical introduction to dynamical systems in order to study the two existing particular cases later on. We will see how continuous dynamical systems can be considered equivalent to ordinary differential equations thanks to the Global Existence Theorem. Moreover, we will study the different types of attracting or repelling sets that define their phase portraits. On the other hand, we will approach discrete dynamical systems in a more graphic way, talking about periodic and hyperbolic points. Then, we will focus on a specific example (the quadratic family) and, to finish, we will introduce the concept of chaos.



# Introducción

Informalmente, podemos decir que un sistema dinámico es un sistema de ecuaciones que evolucionan con el tiempo. Con esta definición está claro que los sistemas dinámicos se pueden aplicar a infinidad de casos: desde la evolución en las generaciones de una especie animal hasta los movimientos de los astros. A pesar de que su definición formal no fue enunciada hasta más adelante, el estudio de los sistemas dinámicos se remonta hasta finales del siglo XIX, cuando muchos investigadores consideran que nació a raíz del trabajo del matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) sobre la mecánica celeste, en particular en su estudio de las órbitas periódicas para problemas de tres cuerpos en publicaciones como [17] o [18]. Una vez formuladas las ecuaciones, Poincaré se centró más en el entendimiento global de todas las soluciones del sistema, en lugar del comportamiento local de una solución particular analíticamente precisa. Gracias a ello, desarrolló diversas técnicas y herramientas que se fueron perfeccionando a lo largo del siglo XX. En la primera mitad de este siglo destaca la obra de George David Birkhoff (1884-1944), como por ejemplo [3], el cual recalcó la importancia de la dinámica discreta como una forma de entender las dinámicas más complejas que surgían del estudio de las ecuaciones diferenciales. A mediados del siglo XX, el estudio de los sistemas dinámicos se vio eclipsado por los recientes avances en topología diferencial y algebraica, y no fue hasta los años 60 cuando técnicas de dichos ámbitos (en particular de topología diferencial) permitieron a diversos matemáticos de todo el mundo entender el comportamiento caótico de una gran clase de sistemas dinámicos, conocidos como hiperbólicos. Recientemente, el estudio de los sistemas dinámicos se ha enriquecido gracias al interés por parte de otros ámbitos científicos, como puede ser la física, la biología, la economía, etc.

En el estudio de los sistemas dinámicos, resolverlos analíticamente u obtener una expresión explícita para su evolución no suele ser el objetivo. De hecho, una gran cantidad de sistemas no lineales de EDOs, que veremos que están relacionados con los sistemas dinámicos continuos, son muy difíciles, si no imposibles, de resolver. Por lo tanto, el análisis de un sistema dinámico tiene como objetivo principal el entendimiento o la descripción general del movimiento a medida que avanza el tiempo, y no el cálculo del valor exacto. Por ejemplo, en una entrevista para la revista *+Plus* ([9]), la matemática italiana Corinna Ulcigrai explica una aplicación de sistemas

dinámicos discretos al billar: si consideramos una bola sin masa ni fricción (de modo que la bola nunca se para una vez golpeada), y una mesa sin los agujeros típicos del billar, se puede ver que, salvo unas pocas órbitas periódicas, el resto no solo no vuelve a su posición inicial, sino que eventualmente recorre toda la mesa. Esto es lo que se conoce como sistema dinámico caótico, y profundizaremos sobre ello en este trabajo. Bajo el yugo del comportamiento caótico también se encuentra uno de los sistemas dinámicos más conocidos del mundo: el atractor de Lorenz. Este fue introducido por primera vez en [15], y lo que describe es mundialmente conocido como el “efecto mariposa”, es decir, que un cambio de las condiciones iniciales, aunque sea mínimo, desembocará en una dinámica completamente diferente a la anterior. Originalmente, la motivación de Lorenz para estudiar este sistema era la sensibilidad de la atmósfera a las condiciones iniciales, lo que limitaba las predicciones meteorológicas a largo plazo. Además, el sistema de Lorenz ha sido empleado en diversos campos como las fluctuaciones en el mercado de valores, sistemas biológicos como el depredador-presa, turbulencias en dinámica de fluidos, etc.

En este trabajo haremos una introducción teórica a los sistemas dinámicos, que se dividirá en dos partes bien diferenciadas. A continuación recorreremos brevemente los contenidos que se ampliarán en cada capítulo.

En el Capítulo 1 se introducirán los conceptos básicos sobre sistemas dinámicos, empezando por su definición y pasando por elementos importantes como sus órbitas o los distintos tipos de puntos. En este capítulo todas las definiciones están redactadas para un sistema dinámico en un grupo topológico  $G$  general. Como veremos, dependiendo de si  $G = \mathbb{R}$  o  $G = \mathbb{Z}$ , se dirá que el sistema dinámico es continuo o discreto, respectivamente, y se particularizarán algunos conceptos para esta división.

El Capítulo 2 es en el que se tratan los sistemas dinámicos continuos, aquellos donde el tiempo del sistema recorre todos los números reales. En este capítulo nos centraremos en probar la relación entre este tipo de sistemas dinámicos y las ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular los problemas de valor inicial. Esta relación será la de equivalencia total, y se podrá ver mediante varios teoremas y ejemplos en la primera sección del capítulo, en especial con el Teorema de Existencia Global. Después de establecer esto, se trabajará con los conjuntos límite ya introducidos en el Capítulo 1, y veremos varios ejemplos de sistemas dinámicos con conjuntos atractores, un caso particular.

Por último, en el Capítulo 3 se estudian los sistemas dinámicos discretos, aquellos donde el tiempo del sistema únicamente toma valores enteros. En este capítulo se utiliza un enfoque más gráfico, el cual nos ayudará a entender mejor las dinámicas de este tipo de sistemas. Estudiaremos un tipo de puntos particular que se llamarán hiperbólicos, y cómo su existencia condiciona el comportamiento del sistema a su alrededor. También comentaremos un par de resultados muy interesantes acerca de los puntos periódicos de este tipo de sistemas, especialmente el Teorema

---

de Sarkovskii y su recíproco. Luego, nos centraremos en un ejemplo en concreto de un conjunto de aplicaciones llamado la familia cuadrática, la cual exhibe muchos fenómenos de interés dependiendo de su parámetro. A partir de aquí introduciremos un espacio que nos ayudará a caracterizar de una manera sencilla la familia cuadrática y, ya para finalizar, poder llegar a la definición de caos. Nosotros trabajaremos con la definición de caos que dio Devaney en 1989 en [6], uno de los conceptos más importantes de la dinámica de sistemas discretos, si no el que más.



# Capítulo 1

## Sistemas Dinámicos

A lo largo de este trabajo estudiaremos los dos tipos de sistemas dinámicos existentes: continuos y discretos. Para ello, introduciremos unas definiciones generales, que después concretaremos para cada caso particular. A lo largo de todo el trabajo se emplearán como referencia principal los libros de Lawrence Perko ([16]) y Robert L. Devaney ([6]), pero también se trata este tema en otras obras como [4], [5] o [21].

### 1.1. Definiciones Generales

**Definición 1.1.** Un sistema dinámico es una terna  $(X, G, \phi)$  donde  $X$  es un espacio topológico,  $G$  es un grupo topológico y

$$\phi : X \times G \longrightarrow X$$

una aplicación continua tal que:

- I.  $\phi(x, 0) = x$  para todo  $x \in X$ ,
- II.  $\phi(x, t + s) = \phi(\phi(x, t), s)$  para todo  $x \in X$ ,  $t, s \in G$ .

Si  $G = \mathbb{R}$  se denomina sistema dinámico continuo, y si  $G = \mathbb{Z}$ , sistema dinámico discreto.

Veamos un breve ejemplo de cada uno de los dos tipos de sistemas dinámicos, los cuales estudiaremos particularmente en los siguientes capítulos.

**Ejemplo 1.2.** Dada una ecuación diferencial ordinaria autónoma

$$\dot{x} = f(x),$$

con  $f \in C^1(X)$ , siendo  $X$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , definimos  $\phi(x_0, t)$  como la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

con  $x_0 \in X$ . Entonces, dicha solución definirá un sistema dinámico continuo si y sólo si, para todo  $x_0 \in X$ ,  $\phi(x_0, t)$  está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o lo que es lo mismo, si el intervalo maximal de existencia de  $\phi(x_0, t)$  es  $I(x_0) = (-\infty, \infty)$ . En este caso, diremos que  $\phi(x_0, t)$  es el sistema dinámico en  $X$  definido por el PVI.

**Ejemplo 1.3.** Sea  $f$  un homeomorfismo en  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Se define el sistema dinámico discreto  $\phi$  como

$$\phi : X \times \mathbb{Z} \longrightarrow X$$

$$(x, n) \longmapsto \phi(x, n) = \begin{cases} f^n(x) = (f \circ \dots \circ f)(x), & \text{si } n > 0, \\ x, & \text{si } n = 0, \\ f^n(x) = (f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1})(x), & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que se cumplen las condiciones establecidas en la Definición 1.1. Primero, por la definición de  $\phi$  está claro que

$$\phi(x, 0) = x \quad \forall x \in X.$$

Por otro lado, supongamos que  $t, s > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi(x, t+s) &= f^{t+s}(x) = (f \circ \dots \circ f)(x) = ((f \circ \dots \circ f) \circ (f \circ \dots \circ f))(x) \\ &= (f \circ \dots \circ f)((f \circ \dots \circ f)(x)) = f^s(f^t(x)) = f^s(\phi(x, t)) = \phi(\phi(x, t), s). \end{aligned}$$

Ahora bien, si  $t+s > 0$  pero con  $t > 0$  y  $s < 0$ ,

$$\begin{aligned} \phi(x, t+s) &= f^{t+s}(x) = (f \circ \dots \circ f)(x) = ((f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}) \circ (f \circ \dots \circ f))(x) \\ &= (f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1})((f \circ \dots \circ f)(x)) = f^s(f^t(x)) = f^s(\phi(x, t)) = \phi(\phi(x, t), s). \end{aligned}$$

Análogamente se prueba para  $t+s < 0$ , tanto si  $t$  y  $s$  son ambos negativos como si solo lo es uno de ellos. Por último, si  $t+s = 0$ , suponiendo que  $t > 0$  y  $s = -t$  (si  $t = s = 0$  es trivial),

$$\phi(\phi(x, t), s) = \phi(\phi(x, t), -t) = f^{-t}(\phi(x, t)) = f^{-t}(f^t(x)) = id(x) = x = \phi(x, 0) = \phi(x, t+s).$$

Por lo tanto, queda demostrado que se cumple también la propiedad II para todo  $x \in X$  y  $t, s \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 1.4.** Dado un sistema dinámico  $(X, G, \phi)$ , definimos sus secciones como:

- Para cada  $x \in X$  fijado,

$$\begin{aligned} \phi_x : G &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \phi_x(t) = \phi(x, t). \end{aligned}$$

- Para cada  $t \in G$  fijado,

$$\begin{aligned}\phi^t : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \phi^t(x) = \phi(x, t),\end{aligned}$$

que se llamará aplicación “tiempo  $t$ ”.

Al trabajar con sistemas dinámicos continuos ( $G = \mathbb{R}$ ), la función “tiempo  $t$ ” será denominada flujo del sistema dinámico.

La siguiente proposición enuncia algunas de las características más importantes de la aplicación “tiempo  $t$ ”.

**Proposición 1.5.** *La aplicación “tiempo  $t$ ”  $\phi^t$  de un sistema dinámico (y por tanto el flujo de un sistema dinámico continuo) cumple las siguientes propiedades:*

- I.  $\phi^0(x) = x$  para todo  $x \in X$ ,
- II.  $\phi^s(\phi^t(x)) = \phi^{s+t}(x)$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in X$
- III.  $\phi^{-t}(\phi^t(x)) = \phi^t(\phi^{-t}(x))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in X$ .

En particular,  $\phi^t$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Las dos primeras propiedades son consecuencia directa de la Definición 1.1 de sistema dinámico. Comprobar su tercera propiedad es sencillo:

$$\begin{aligned}\phi^t(\phi^{-t}(x)) &= \phi^t(\phi(x, -t)) = \phi(\phi(x, -t), t) = \phi(x, t - t) = \phi(\phi(x, t), -t) \\ &= \phi^{-t}(\phi(x, t)) = \phi^{-t}(\phi^t(x)) \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

A partir de esto, podemos ver que  $\phi^t$  tiene inversa, ya que

$$\phi^t(\phi^{-t}(x)) = \phi^t(\phi(x, -t)) = \phi(\phi(x, -t), t) = \phi(x, t - t) = \phi(x, 0) = x \quad \forall x \in X,$$

es decir,  $\phi^t \circ \phi^{-t} = id_X$ , y viceversa. Por lo tanto, como  $\phi^t$  es claramente una aplicación continua (lo es  $\phi$  globalmente) y tiene inversa (la cual, al ser  $\phi^{-t}$ , también es continua), será un homeomorfismo.  $\square$

**Definición 1.6.** Sean  $(X, G, \phi)$  un sistema dinámico y  $x \in X$ . Definimos la órbita, semiórbita positiva y semiórbita negativa de  $x$ , respectivamente, como los conjuntos

$$\gamma(x) = \phi_x(G), \quad \gamma^+(x) = \phi_x(G^+ \cup \{0\}), \quad \gamma^-(x) = \phi_x(G^- \cup \{0\}).$$

**Ejemplo 1.7.** En el caso de trabajar con un sistema dinámico discreto como el del Ejemplo 1.3, la semiórbita positiva no es más que el conjunto  $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ . Si  $f$  es un homeomorfismo, se puede definir a partir del conjunto  $\{f^n(x)\}$  la órbita de  $x$  para  $n \in \mathbb{Z}$ , la semiórbita positiva para  $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y la semiórbita negativa para  $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ .

Dado el concepto de órbita, definimos a continuación los conjuntos tales que las órbitas de todos sus puntos se mantienen dentro de sí mismos.

**Definición 1.8.** Sean  $(X, G, \phi)$  un sistema dinámico y  $M \subset X$ . Diremos que:

- $M$  es invariante si  $\gamma(x) \subset M$  para todo  $x \in M$ .
- $M$  es positivamente invariante si  $\gamma^+(x) \subset M$  para todo  $x \in M$ .
- $M$  es negativamente invariante si  $\gamma^-(x) \subset M$  para todo  $x \in M$ .

Por otra parte, si  $G = \mathbb{R}$  (el sistema dinámico es continuo), diremos que:

- $M$  es invariante respecto al flujo  $\phi^t$  si  $\phi^t(M) \subset M$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- $M$  es positivamente invariante respecto al flujo  $\phi^t$  si  $\phi^t(M) \subset M$  para todo  $t \geq 0$ .
- $M$  es negativamente invariante respecto al flujo  $\phi^t$  si  $\phi^t(M) \subset M$  para todo  $t \leq 0$ .

Ahora definamos los distintos tipos de puntos especiales que puede tener un sistema dinámico: tanto fijos o periódicos, como  $\omega$  o  $\alpha$ -límite.

**Definición 1.9.** Sean  $(X, G, \phi)$  un sistema dinámico y  $x \in X$ . Diremos que  $x$  es:

- Un punto crítico o fijo del sistema dinámico si  $\phi(x, t) = x$  para todo  $t \in G$ .
- Un punto periódico del sistema dinámico con periodo  $T > 0$  si  $\phi(x, t) = \phi(x, t + T)$  para todo  $t \in G$ . Además, en ese caso diremos que su órbita  $\gamma(x)$  es una órbita periódica.

**Definición 1.10.** Sean  $(X, G, \phi)$  un sistema dinámico y  $x \in X$ . Diremos que  $p \in X$  es un punto  $\omega$ -límite de la órbita  $\gamma(x)$  si existe una sucesión  $t_n \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x, t_n) = p.$$

Similarmente, diremos que  $q \in X$  es un punto  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma(x)$  si existe una sucesión  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x, t_n) = q.$$

Además, los conjuntos de todos los puntos  $\omega$ -límite o  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma(x)$  se llamarán conjuntos  $\omega$ -límite o  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma(x)$ , y se denotarán como

$$\omega(x) = \bigcap_{p \in \gamma^+(x)} \overline{\gamma^+(p)} \quad \text{y} \quad \alpha(x) = \bigcap_{p \in \gamma^-(x)} \overline{\gamma^-(p)}.$$

Para finalizar este capítulo, introduciremos las nociones de equivalencia y conjugación topológica.

**Definición 1.11.** Dos sistemas dinámicos  $\phi : X \times G \rightarrow G$  y  $\psi : Y \times G \rightarrow G$  son topológicamente equivalentes si existen dos homeomorfismos  $h : X \rightarrow Y$  y  $\tau : G \rightarrow G$ , este último creciente, tales que

$$h(\phi(x, t)) = \psi(h(x), \tau(t)) \quad \forall x \in X, \forall t \in G.$$

**Definición 1.12.** Dos sistemas dinámicos  $\phi : X \times G \rightarrow G$  y  $\psi : Y \times G \rightarrow G$  son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que

$$h(\phi(x, t)) = \psi(h(x), t) \quad \forall x \in X, \forall t \in G.$$

*Observación 1.13.* Es obvio que si dos sistemas dinámicos son topológicamente conjugados, entonces también serán topológicamente equivalentes, ya que simplemente se considera la aplicación  $\tau$  de la Definición 1.11 como la identidad en  $G$ , es decir,  $\tau(t) = t$  para todo  $t \in G$ .



## Capítulo 2

# Sistemas Dinámicos Continuos

Como ya hemos visto anteriormente, los sistemas dinámicos continuos son aquellos en los que  $G = \mathbb{R}$ . En este capítulo nos centraremos en la relación entre estos mismos y las ecuaciones diferenciales ordinarias, así como en los conjuntos  $\omega$  y  $\alpha$ -límite y los distintos tipos de atractores. A lo largo de este capítulo se recogerán contenidos principalmente de [16], pero también de otras fuentes como [1], [11], [10] o [13].

### 2.1. Relación entre EDOs y Sistemas Dinámicos

En esta sección nos centraremos en estudiar la relación entre las ecuaciones diferenciales ordinarias (en particular problemas de valor inicial) y los sistemas dinámicos continuos. En concreto, probaremos que trabajar con sistemas dinámicos continuos y EDOs es esencialmente lo mismo, incluso cuando el intervalo maximal de existencia no sea  $(-\infty, \infty)$ , condición que vimos en el Ejemplo 1.2.

Empezaremos con un ejemplo para ver que a partir de un sistema dinámico se puede definir un PVI:

**Ejemplo 2.1.** Sea  $\phi(x, t)$  un sistema dinámico continuo en  $E \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\phi \in C^1(E)$ . Entonces, la función

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi(x, t) \right|_{t=0}$$

define un campo de vectores continuo en  $X$ , y para cada  $x_0 \in X$ ,  $\phi(x_0, t)$  es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Veamos entonces que  $\phi(x_0, t)$  es solución de (1). Primero, por la propiedad I de la Definición 1.1, está claro que

$$\phi(x_0, 0) = x_0,$$

y por lo tanto se cumple la condición inicial del PVI. Por otra parte, queremos ver que cumple la EDO para todo  $t \in \mathbb{R}$ , es decir, que

$$\frac{d}{dt}\phi(x_0, t) = f(\phi(x_0, t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para  $t = 0$  es inmediato porque

$$\left. \frac{d}{dt}\phi(x_0, t) \right|_{t=0} = f(x_0) = f(\phi(x_0, 0)),$$

usando en la primera igualdad la definición de  $f$  y en la segunda la propiedad I de la Definición 1.1.

Para  $t_0 \neq 0$ , tendremos que

$$\left. \frac{d}{dt}\phi(x_0, t) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt}\phi(x_0, t + t_0) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\phi(\phi(x_0, t_0), t) \right|_{t=0} = f(\phi(x_0, t_0)),$$

en este caso aplicando la propiedad II de la Definición 1.1 en el segundo paso y nuevamente la definición de  $f$  para acabar.

Vista la motivación para esta sección, introduciremos un primer resultado previo que nos ayudará a probar el Teorema de Existencia Global.

**Teorema 2.2.** *Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $x_0 \in E$ ,  $f \in C^1(E)$  y  $[0, \beta)$  es el intervalo maximal de existencia no negativo del problema de valor inicial (1). Asumiendo que  $\beta < \infty$ , entonces dado cualquier subconjunto compacto  $K$  de  $E$ , existe algún  $t \in (0, \beta)$  tal que  $x(t) \notin K$ .*

A partir de este teorema se deduce el siguiente corolario, que será de utilidad a la hora de demostrar el Teorema 2.9.

**Corolario 2.3.** *Bajo las hipótesis del teorema anterior, si  $\beta < \infty$  y existe  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) \in \partial E$ .*

Por último y antes de llegar al resultado principal de esta sección, probamos un sencillo lema.

**Lema 2.4.** *Para  $x \in C^1(a, b)$  se cumple que*

$$\frac{\partial |x|}{\partial t} \leq \left| \frac{\partial x}{\partial t} \right|.$$

*Demostración.* Si  $x(t) \neq 0$  para todo  $t \in (a, b)$ , entonces

$$\frac{\partial |x|}{\partial t} = \frac{x \cdot \dot{x}}{|x|} \leq \frac{|x| |\dot{x}|}{|x|} = |\dot{x}| = \left| \frac{\partial x}{\partial t} \right|.$$

Por otro lado, si  $x(t_0) = 0$  en algún  $t_0 \in (a, b)$ , entonces el conjunto  $\{t \in (a, b) \mid |x(t)| = 0\}$  está compuesto por la unión numerable de intervalos  $I_j$  y puntos  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Si  $t_0 \in I_j$ , es trivial que  $|x|'(t_0) = |x'(t_0)| = 0$ ; si  $t_0 \in \{t_j\}$ , como  $x \in C^1(a, b)$ , sabemos que tanto  $x'$  como  $|x|'$  son continuas, y remitiéndonos al primer caso en un intervalo  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  obtenemos el resultado por continuidad.  $\square$

**Definición 2.5.** Sean dos sistemas de ecuaciones diferenciales (problemas de valor inicial con  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  fijado) tales que ambos definen un sistema dinámico continuo, tal y como vimos en el Ejemplo 1.2. Entonces, diremos que son topológicamente equivalentes si lo son los respectivos sistemas dinámicos asociados.

A continuación enunciamos y demostramos un teorema crucial para el estudio de los sistemas dinámicos continuos. Este nos permite trabajar con sistemas de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos de forma equivalente.

**Teorema 2.6** (Teorema de Existencia Global). *Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

*tiene una única solución  $x(t)$  definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , i.e., (2) define un sistema dinámico continuo en  $\mathbb{R}^n$ . Además, (2) es topológicamente equivalente a (1) en  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Empezaremos probando la equivalencia topológica de los sistemas. Consideramos los homeomorfismos  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $h$  es la identidad y

$$\tau(t) = \int_0^t 1 + \|f(x(s))\| ds.$$

Como  $\tau'(t) = 1 + \|f(x(t))\| > 0$ ,  $\tau$  es una función estrictamente creciente y por lo tanto se cumplen las condiciones de la Definición 1.11. Además, si consideramos la solución  $x(t)$  de (1) respecto al nuevo tiempo  $\tau$ , esta satisface que

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|},$$

es decir, el tiempo  $t$  de la solución  $x(t)$  de (1) simplemente ha sido reescalado a través de  $\tau$  para obtener la solución de (2).

Por otra parte, dada  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , veamos que

$$F = \frac{f}{1 + \|f\|} \in C^1(\mathbb{R}^n).$$

Si  $f(x) \neq 0$ , aplicando que  $(\|f(x)\|)' = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} f'(x)$  y que  $f(x)f(x) = (\|f(x)\|)^2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f'(x)(1 + \|f(x)\|) - f(x)(1 + \|f(x)\|)'}{(1 + \|f(x)\|)^2} = \frac{f'(x) + f'(x)\|f(x)\| - f(x)\frac{f(x)}{\|f(x)\|}f'(x)}{(1 + \|f(x)\|)^2} \\ &= \frac{f'(x) + f'(x)\|f(x)\| - \|f(x)\|f'(x)}{(1 + \|f(x)\|)^2} = \frac{f'(x)}{(1 + \|f(x)\|)^2}, \end{aligned}$$

que es claramente continua. Para los  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tales que  $f(x_0) = 0$ , se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{(1 + \|f(x)\|)^2} = f'(x_0)$$

y como  $F$  es continua en  $x_0$ , entonces existe  $F'(x_0) = f'(x_0)$ , por lo que podemos concluir que  $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora denotemos el intervalo maximal de existencia de la solución de (2) como  $(\alpha, \beta)$  y veamos que es igual a  $(-\infty, \infty)$ , es decir,  $\mathbb{R}$ . Para  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , sea  $x(t)$  la solución del problema de valor inicial (2) en su intervalo maximal de existencia  $(\alpha, \beta)$ . Por el lema anterior,

$$\frac{\partial}{\partial t} \|x(t)\| \leq \|\dot{x}(t)\| = \frac{\|f(x(t))\|}{1 + \|f(x(t))\|} \leq 1$$

para todo  $t \in (\alpha, \beta)$ . Entonces,

$$\|x(t)\| = \|x_0\| + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \|x(s)\| ds \leq \|x_0\| + |t|$$

para todo  $t \in (\alpha, \beta)$ . Supongamos ahora que  $\beta < \infty$ , entonces

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \beta$$

para todo  $t \in [0, \beta)$ ; es decir, para todo  $t \in [0, \beta)$ , la solución de (2) está contenida en el conjunto compacto

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \|x_0\| + \beta\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Entonces, como dicha afirmación contradice el Teorema 2.2, concluimos que  $\beta = \infty$ . Análogamente se prueba que  $\alpha = -\infty$ . En conclusión, para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , el intervalo maximal de existencia de la solución  $x(t)$  del problema de valor inicial (2) es  $(-\infty, \infty)$ .  $\square$

Veremos ahora dos ejemplos relacionados con el Teorema de Existencia Global en el caso de que  $n = 1$ , es decir, en  $\mathbb{R}$ . En el primero consideraremos un sistema donde las soluciones no están definidas en  $\mathbb{R}$  y veremos que, efectivamente, al aplicar la transformación del teorema conseguimos uno que sí define un sistema dinámico.

**Ejemplo 2.7.** Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq 0$ , el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

se puede resolver mediante variable separadas, de tal forma que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} dx &= \int dt, \\ -\frac{1}{x} &= t + C, \\ x(t) &= -\frac{1}{t + C}. \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial de  $x(0) = x_0$ , tendremos que

$$\begin{aligned} x(0) &= -\frac{1}{0 + C} = x_0, \\ C &= -\frac{1}{x_0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (3) tiene como solución única

$$x(t) = \frac{1}{t - \frac{1}{x_0}},$$

cuyo intervalo maximal de existencia es  $I(x_0) = (-\infty, \frac{1}{x_0})$  si  $x_0 > 0$  o  $I(x_0) = (\frac{1}{x_0}, \infty)$  si  $x_0 < 0$ , que como podemos ver no es todo  $\mathbb{R}$  en ningún caso. Por otra parte, el problema asociado mediante el teorema que acabamos de enunciar es

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2}{1 + x^2}, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4)$$

Lo resolvemos también mediante variables separadas:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + x^2}{x^2} dx &= \int dt, \\ -\frac{1}{x} + x &= t + C, \\ x(t) &= \frac{t + C \pm \sqrt{(t + C)^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Calculamos el valor de la constante de integración usando que  $x(0) = x_0$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 4}}{2} = x_0, \\ |C^2 + 4| &= (2x_0 - C)^2 = 4x_0^2 - 4Cx_0 + C^2, \\ C &= \frac{x_0^2 - 1}{x_0}. \end{aligned}$$

Luego, la solución de (4) será

$$x(t) = \frac{t + \frac{x_0^2 - 1}{x_0} \pm \sqrt{\left(t + \frac{x_0^2 - 1}{x_0}\right)^2 + 4}}{2},$$

con el signo del  $\pm$  dependiendo de si  $x_0 < 0$  o  $x_0 > 0$ . Está claro que, al no haber  $t$  en el denominador y no poder ser el argumento de la raíz negativo, el intervalo maximal de existencia de la solución es  $I(x_0) = \mathbb{R}$ , como bien nos indicaba el Teorema de Existencia Global.

Veamos ahora un ejemplo de por qué es importante que, en el teorema anterior, el conjunto donde la función  $f$  es clase 1 sea  $\mathbb{R}^n$ . Veremos que, si  $f \in C^1(E)$  siendo  $E$  un subconjunto propio de  $\mathbb{R}^n$ , no siempre se obtiene un sistema dinámico como resultado de dicha normalización.

**Ejemplo 2.8.** Dado  $x_0 > 0$ , el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2x}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (5)$$

se puede resolver mediante variable separadas, de tal forma que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x} dx &= \int dt, \\ \int 2x dx &= t + C, \\ x^2 &= t + C. \end{aligned}$$

Despejando  $x$  obtenemos que

$$x(t) = \pm\sqrt{t + C}.$$

Como la condición inicial es  $x(0) = x_0 > 0$ , nos quedamos con los valores positivos, y entonces

$$\begin{aligned} x(0) &= \sqrt{0 + C} = x_0, \\ C &= x_0^2. \end{aligned}$$

Luego, (5) tiene como solución única  $x(t) = \sqrt{t + x_0^2}$ , definida en su intervalo maximal de existencia  $I(x_0) = (-x_0^2, \infty)$ . En este caso,  $f(x) = \frac{1}{2x} \in C^1(E)$ , siendo  $E = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ . El problema de valor inicial asociado según el resultado anterior es

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{2x}} = \frac{1}{2x + 1}, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (6)$$

Al igual que anteriormente, resolvemos por variables separadas:

$$\begin{aligned} \int (2x + 1) dx &= \int dt, \\ x^2 + x &= t + C, \\ x(t) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(t + C)}}{2}. \end{aligned}$$

Como la condición inicial es  $x(0) = x_0 > 0$ , nos quedamos con el signo “+”, y entonces

$$x(0) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(0 + C)}}{2} = x_0,$$

$$C = \frac{(2x_0 + 1)^2 - 1}{4}.$$

Por lo tanto, el sistema (6) tendrá solución única

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \sqrt{t + \left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Como podemos ver, el intervalo maximal de existencia donde esta solución está definida es  $I(x_0) = (-\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2, \infty)$ , el cual es claramente distinto de  $\mathbb{R}$ , y por ende no define un sistema dinámico.

Veamos ahora un teorema sobre la existencia de un sistema dinámico topológicamente equivalente al problema de valor inicial dado por (1).

**Teorema 2.9.** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(E)$  y  $x_0 \in E$ . Entonces existe una función  $F \in C^1(E)$  tal que*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (7)$$

*defina un sistema dinámico en  $E$  que es topológicamente equivalente a (1) en  $E$ .*

*Demostración.* Primero de todo, por el Teorema 2.6, la función

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|}$$

cumple que  $g \in C^1(E)$  y  $\|g(x)\| \leq 1$ , además de que los sistemas (1) y (2) son topológicamente equivalentes en  $E$ . Además, para cualquier  $x_0 \in E$ , la solución  $x(t)$  de (2) satisface que

$$\int_0^t \|\dot{x}(z)\| dz = \int_0^t \|g(x(z))\| dz \leq |t|;$$

es decir, para un tiempo finito  $t$ , la órbita definida por  $x(t)$  tiene longitud de arco finita. Sea  $(\alpha, \beta)$  el intervalo maximal de existencia de  $x(t)$  y supongamos que  $\beta < \infty$ . Entonces, como la longitud de arco de la semiórbita definida por  $x(t)$  para  $t \in (0, \beta)$  es finita, la definida para  $t \in [0, \beta)$  debe tener límite tal que

$$x_1 = \lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) \in \partial E,$$

debido al Corolario 2.3. Ahora definimos el conjunto cerrado  $K = \mathbb{R}^n \setminus E$  y la función

$$G(x) = \frac{d(x, K)}{1 + d(x, K)},$$

donde  $d(x, y)$  denota la distancia entre  $x$  e  $y$  en  $\mathbb{R}^n$  y

$$d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y);$$

es decir, para  $x \in E$ ,  $d(x, K)$  es la distancia a  $x$  desde la frontera  $\partial E$  de  $E$ . Luego, la función  $G$  cumple que:  $G \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 \leq G(x) \leq 1$  y para  $x \in K$ ,  $G(x) = 0$ .

Sea  $F(x) = g(x)G(x)$ , entonces  $F \in C^1(E)$  por ser producto de funciones de  $C^1$  y el sistema (7) es topológicamente equivalente a (2) en  $E$ , ya que simplemente hemos reescalado el tiempo a lo largo de las órbitas de (2), tomando el homeomorfismo  $h$  de la Definición 1.11 como la identidad.

Para probar que (7) define un sistema dinámico en  $E$ , basta ver que todas las semiórbitas de (7) que empiecen en  $E$ , tengan longitud de arco finita  $s_0$  y acaben en un punto límite  $x_1 \in \partial E$ , están definidas para todo  $t \in [0, \infty)$ . Sea  $s(t)$  la función que calcula la longitud de arco de una solución  $x(t)$ , definida por

$$s(t) = \int_0^t \|F(x(z))\| dz$$

para  $t > 0$ . Por ser  $\dot{x} = F(x)$ , su derivada respecto a  $t$  es  $\frac{\partial s}{\partial t} = \|\dot{x}(t)\|$ . Por lo tanto, sabemos que su inversa  $t(s)$  estará definida por

$$t(s) = \int_0^s \frac{dz}{\|F(x(t(z)))\|}$$

para  $s > 0$ . Para cada punto  $x = x(t(s))$  de la semiórbita tenemos que

$$G(x) = \frac{d(x, K)}{1 + d(x, K)} < d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y) \leq d(x, x_1) \leq s_0 - s.$$

Por lo tanto, como  $0 < \|g(x)\| \leq 1$ , tenemos que  $\|F(x)\| = \|g(x)\| \cdot |G(x)| \leq |G(x)| \leq s_0 - s$  para cada  $x = x(t(s))$  y, consecuentemente,

$$t \geq \int_0^s \frac{dz}{s_0 - z} = -\log(s_0 - z) \Big|_0^s = \log \frac{s_0}{s_0 - s}$$

y entonces  $t \rightarrow \infty$  cuando  $s \rightarrow s_0^-$ ; es decir, la semiórbita definida por  $x(t)$  está definida para todo  $t \in [0, \infty)$ , o lo que es lo mismo,  $\beta = \infty$ . Análogamente se ve que  $\alpha = -\infty$ , y por lo tanto (7) define un sistema dinámico topológicamente equivalente a (1) en  $E$ .  $\square$

*Observación 2.10.* El Teorema 2.9 implica que, para una  $f \in C^1(E)$ , con  $E$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , no hay pérdida de generalidad al asumir que el sistema (1) define un sistema dinámico  $\phi(x_0, t)$  en  $E$ . Por lo tanto, a partir de este momento, asumimos que para todo  $x_0 \in E$ , el intervalo maximal de existencia de la solución es  $I(x_0) = (-\infty, \infty)$ .

## 2.2. Conjuntos Límites y Atractores

Para esta sección retomamos los conceptos de  $\omega$  y  $\alpha$ -límite introducidos en la Definición 1.10, y utilizaremos la notación  $\omega(\gamma)$ ,  $\alpha(\gamma)$  siendo  $\gamma \equiv \gamma(x)$  una órbita general para un  $x \in E$  arbitrario, con  $E$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.11.** *Los conjuntos  $\omega$  y  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma$  de (1),  $\omega(\gamma)$  y  $\alpha(\gamma)$ , son subconjuntos cerrados de  $E$  y, si  $\gamma$  está contenida en un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\omega(\gamma)$  y  $\alpha(\gamma)$  son subconjuntos no vacíos, conexos y compactos de  $E$ .*

*Demostración.* Veamos la demostración para  $\omega(\gamma)$  y será análoga para  $\alpha(\gamma)$ .

De la Definición 1.10 es obvio que  $\omega(\gamma) \subset E$ . Para ver que  $\omega(\gamma)$  es un subconjunto cerrado de  $E$ , consideramos  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos de  $\omega(\gamma)$  tal que  $p_n \rightarrow p \in \mathbb{R}^n$  y veremos que  $p \in \omega(\gamma)$ . Sea  $x_0 \in \gamma$ , como  $p_n \in \omega(\gamma)$ , para cada  $n = 1, 2, \dots$  existe una sucesión  $t_k^{(n)} \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_0, t_k^{(n)}) = p_n.$$

Además, podemos asumir que  $t_k^{(n+1)} > t_k^{(n)}$ , ya que de otra forma podríamos escoger una sub-sucesión de  $t_k^{(n)}$  que cumpla dicha propiedad. El límite anterior implica que, para todo  $n \geq 2$ , existe una sucesión de enteros  $K(n) > K(n-1)$  tal que para  $k \geq K(n)$ ,

$$\left\| \phi(x_0, t_k^{(n)}) - p_n \right\| < \frac{1}{n}.$$

Sea  $t_n = t_{K(n)}^{(n)}$ , entonces por la desigualdad triangular tenemos que

$$\|\phi(x_0, t_n) - p\| \leq \|\phi(x_0, t_n) - p_n\| + \|p_n - p\| \leq \frac{1}{n} + \|p_n - p\| \rightarrow 0$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces,  $p \in \omega(\gamma)$ .

Por otra parte, si  $\gamma \subset K$ , subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $\phi(x_0, t_n) \rightarrow p \in \omega(\gamma)$ , entonces  $p \in K$  ya que  $\phi(x_0, t_n) \in \gamma \subset K$  y  $K$  es compacto. Entonces,  $\omega(\gamma) \subset K$  y por lo tanto  $\omega(\gamma)$  es un compacto, ya que cualquier subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto. Además,  $\omega(\gamma) \neq \emptyset$  debido a que la sucesión de puntos  $\phi(x_0, n) \in K$  contiene una subsucesión convergente que converge a un punto de  $\omega(\gamma) \subset K$ .

Para acabar, supongamos que  $\omega(\gamma)$  no es conexo. Entonces, existen dos conjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos  $A$  y  $B$  tales que  $\omega(\gamma) = A \cup B$ . Como  $A$  y  $B$  son ambos acotados, se encuentran a una distancia finita  $\delta$  el uno del otro, donde dicha distancia se define como

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\| = \delta.$$

Ahora, como los puntos de  $A$  y  $B$  son puntos  $\omega$ -límites de  $\gamma$ , existe un tiempo  $t$  arbitrariamente grande tal que la distancia entre  $\phi(x_0, t)$  y  $A$  es menor que  $\delta/2$  y otro tiempo  $t$  arbitrariamente grande tal que la distancia entre  $\phi(x_0, t)$  y  $A$  es mayor que  $\delta/2$ . Dado que la distancia  $d(\phi(x_0, t), A)$  es una función continua en  $t$ , tiene que existir una sucesión  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $d(\phi(x_0, t_n), A) \rightarrow \delta/2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego, como  $\{\phi(x_0, t_n)\} \subset K$  compacto, existe una sub-sucesión que converge a un punto  $p \in \omega(\gamma)$  con  $d(p, A) = \delta/2$ . Pero, por definición, tenemos que  $d(A, B) \leq d(p, A) + d(p, B)$ , y entonces  $d(p, B) \geq d(A, B) - d(p, A) = \delta - \delta/2 = \delta/2$ , lo que implica que  $p \notin A$  y  $p \notin B$ , es decir,  $p \notin \omega(\gamma)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\omega(\gamma)$  es conexo.  $\square$

**Teorema 2.12.** *Si  $p \in E$  es un punto  $\omega$  o  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma$  de (1), entonces todos los demás puntos de la órbita  $\phi(p, \cdot)$  de (1) a través del punto  $p$  son también puntos  $\omega$  o  $\alpha$ -límite de la órbita  $\gamma$ . Es decir, si  $p \in \omega(\gamma)$ , entonces  $\gamma_p \subset \omega(\gamma)$ , al igual que si  $p \in \alpha(\gamma)$ , entonces  $\gamma_p \subset \alpha(\gamma)$ .*

*Demostración.* Veamos la demostración para  $\omega(\gamma)$  y será análoga para  $\alpha(\gamma)$ .

Sea  $p \in \omega(\gamma)$  donde  $\gamma \equiv \phi(x_0, \cdot)$  es la órbita de (1) a través del punto  $x_0 \in E$ . Sea  $q$  un punto en la órbita  $\gamma_p \equiv \phi(p, \cdot)$  de (1) a través del punto  $p$ , es decir,  $q = \phi(p, \tilde{t})$  para algún  $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ . Como  $p$  es un punto  $\omega$ -límite de la órbita  $\phi(x_0, \cdot)$ , existe una sucesión  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\phi(x_0, t_n) \rightarrow p$ . Entonces, por la continuidad de la solución respecto a las condiciones iniciales y la propiedad II de la Definición 1.1, se tiene que

$$\phi(x_0, t_n + \tilde{t}) = \phi(\phi(x_0, t_n), \tilde{t}) \rightarrow \phi(p, \tilde{t}) = q.$$

Y como  $t_n + \tilde{t} \rightarrow \infty$ , concluimos que  $q$  es un punto  $\omega$ -límite de  $\phi(x_0, \cdot)$ , es decir, para todo  $q \in \gamma_p$  se cumple que  $q \in \omega(\gamma)$ .  $\square$

A partir de este teorema sabemos que para todos los puntos  $p \in \omega(\gamma)$ ,  $\phi^t(p) \in \omega(\gamma)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , es decir, que  $\phi^t(\omega(\gamma)) \subset \omega(\gamma)$ . Por lo tanto, según la Definición 1.8, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.13.** *Los conjuntos  $\omega(\gamma)$  y  $\alpha(\gamma)$  son invariantes respecto al flujo  $\phi^t$  de (1). Como consecuencia, también son conjuntos cerrados invariantes en  $E$ .*

En la siguiente definición consideramos un entorno de un conjunto  $A$  como cualquier conjunto abierto  $U$  que contiene a  $A$ , y diremos que  $x(t) \rightarrow A$  cuando  $t \rightarrow \infty$  si  $d(x(t), A) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definición 2.14.** Un conjunto invariante  $A \subset E$  se llama conjunto atractor de (1) si existe algún entorno  $U$  de  $A$  tal que, para todo  $x \in U$ ,  $\phi^t(x) \in U$  para todo  $t \geq 0$  y  $\phi^t(x) \rightarrow A$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un atractor de (1) es un conjunto atractor que contiene una órbita densa.

Cabe notar que cualquier punto de equilibrio  $x_0$  de (1) es su propio conjunto  $\omega$  y  $\alpha$ -límite, ya que  $\phi(t, x_0) = x_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Y que, si la órbita  $\gamma$  de (1) tiene un único punto  $\omega$  o  $\alpha$ -límite  $x_0$ , entonces por el corolario anterior  $x_0$  es un punto de equilibrio de (1). Si  $q$  es un punto regular en  $\omega(\gamma)$  o  $\alpha(\gamma)$ , decimos que la órbita a través de  $q$  es una órbita límite de  $\gamma$ , y entonces por el Teorema 2.12 sabemos que  $\omega(\gamma)$  y  $\alpha(\gamma)$  están formados por puntos de equilibrio y órbitas límites de (1).

**Definición 2.15.** Un ciclo u órbita periódica de (1) es cualquier curva solución cerrada de (1) que no sea un punto de equilibrio. Diremos que una órbita periódica  $\gamma$  es:

- estable si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un entorno  $U$  de  $\gamma$  tal que para todo  $x \in U$ ,  $d(\gamma_x^+, \gamma) < \varepsilon$ , es decir, si para todo  $x \in U$  y  $t \geq 0$ ,  $d(\phi(x, t), \gamma) < \varepsilon$ .
- inestable si no es estable.
- asintóticamente estable si es estable y para todo  $x$  de algún entorno  $U$  de  $\gamma$  se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(x, t), \gamma) = 0$ .

Los ciclos del sistema (1) se corresponden con sus soluciones periódicas, ya que  $\phi(x_0, \cdot)$  define una curva solución periódica de (1) si y sólo si  $\phi(x_0, t) = \phi(x_0, t + T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y algún  $T > 0$ . El  $T$  mínimo tal que se cumple esta igualdad se denomina periodo de la órbita periódica  $\phi(x_0, \cdot)$ .

Consideremos para la siguiente definición órbitas periódicas de un sistema plano en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.16.** Un ciclo límite  $\gamma$  de un sistema plano es un ciclo de (1) que es el conjunto  $\omega$  o  $\alpha$ -límite de alguna órbita de (1) a parte de ella misma. Si el ciclo  $\gamma$  es el conjunto  $\omega$ -límite de toda órbita en un entorno de  $\gamma$ , entonces se llamará ciclo  $\omega$ -límite o ciclo límite estable; si en cambio es el conjunto  $\alpha$ -límite de toda órbita en un entorno de  $\gamma$ , entonces se llamará ciclo  $\alpha$ -límite o ciclo límite inestable; y si es el  $\omega$ -límite de una órbita y el  $\alpha$ -límite de otra (distintas de si misma), entonces se llamará ciclo límite semi-estable.

Veamos ahora algunos ejemplos sobre los distintos tipos de atractores. Para los dos primeros emplearemos el sistema que se utiliza en [1], el cual es una simplificación del usado en [11]:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu - x^2 - y^2) - y, \\ \dot{y} = y(\mu - x^2 - y^2) + x, \end{cases}$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$ , el cual simplificaremos mediante un cambio de variables a polares. Aplicando que  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ , tendremos que

$$\begin{cases} \dot{r} \cos(\theta) - r\dot{\theta} \sin(\theta) = r \cos(\theta)(\mu - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) - r \sin(\theta), \\ \dot{r} \sin(\theta) + r\dot{\theta} \cos(\theta) = r \sin(\theta)(\mu - r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta)) + r \cos(\theta), \end{cases}$$

y simplificando llegamos a

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) + r \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}(\dot{\theta}^2 - 1), \\ \dot{r} = r(\mu - r^2) + r \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}(1 - \dot{\theta}^2), \end{cases}$$

lo cual claramente implica que  $\dot{\theta} = 1$ , y por lo tanto tenemos el sistema final

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Cabe apuntar que, en el caso de que  $\cos(\theta) = 0$  o  $\sin(\theta) = 0$ , no se puede pasar dividiendo pero sabemos que las soluciones serán  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = 0$ . Esto se debe a que si  $\cos(\theta) = 0$ , entonces  $x = 0$  e  $y = \pm r$ , pero por las ecuaciones iniciales tendremos que  $\dot{x} = -y$ , y por lo tanto  $y = 0$ . El razonamiento es análogo para  $\sin(\theta) = 0$ .

**Ejemplo 2.17.** 1. **Puntos fijos:** introducidos anteriormente en la Definición 1.9, este tipo de atractores consisten en un único punto al cual tienden todas las órbitas iniciadas en un entorno de este. Si en el sistema (8) consideramos  $\mu < 0$ , entonces el  $(0,0)$  será un punto atractor. Resolvamos dicho sistema de ecuaciones diferenciales para  $\mu = -1$ :

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(1 + r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Primero de todo, si  $r = 0$ , es trivial que la solución será  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = 0$ , que será el punto fijo atractor de este sistema. Dicho esto, podemos aplicar el método de variables separadas, obteniendo

$$\int \frac{-1}{r(1+r^2)} dr = \int dt.$$

Por una parte, es trivial que

$$\int dt = t + C,$$

y por la otra, resolvemos la integral

$$\int \frac{-1}{r(1+r^2)} dr = - \int \frac{1}{r^3+r} dr = - \int \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{r^2+1} \right) dr = - \ln|r| + \frac{1}{2} \ln|r^2+1| = \ln \frac{\sqrt{r^2+1}}{|r|}.$$

Juntando las dos partes y considerando potencias sobre  $e$  para eliminar los logaritmos,

$$\frac{\sqrt{r^2+1}}{|r|} = e^{t+C} \Rightarrow \frac{r^2+1}{r^2} = e^{2t+C} \Rightarrow 1 + \frac{1}{r^2} = e^{2t+C} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = e^{2t+C} - 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{e^{2t+C} - 1},$$

y por lo tanto nos queda como solución del sistema en polares

$$\begin{cases} r(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{e^{2t+C_1} - 1}}, \\ \theta(t) = t + C_2. \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable, la solución final será

$$\begin{cases} x(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{e^{2t+C_1} - 1}} \cos(t + C_2), \\ y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{e^{2t+C_1} - 1}} \sin(t + C_2), \end{cases}$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Como se puede ver en la Figura 2.1, al representar gráficamente las soluciones para distintos valores de  $C_1$  y  $C_2$  (es decir, distintas condiciones iniciales) es fácil apreciar la atracción de estas por el punto fijo  $(0, 0)$ .

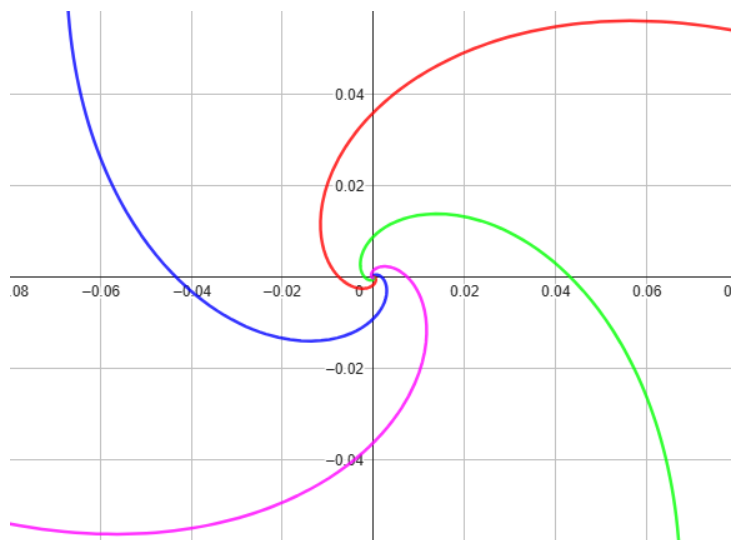


Figura 2.1: Retrato de fases del sistema (8) con  $\mu = -1$ , que posee un atractor de tipo punto fijo en el  $(0, 0)$ .

2. **Ciclos límite estables:** como hemos visto recientemente en la Definición 2.16, cuando todas las órbitas de un entorno de una órbita periódica tienden a esta misma, se la denomina ciclo límite estable y es un conjunto atractor. Al contrario que en el ejemplo anterior, este caso se dará cuando en el sistema (8) consideremos  $\mu > 0$ . Por ejemplo, para  $\mu = 1$  tendremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

De forma análoga a lo hecho previamente, antes de proceder con el método de variables separadas, analizamos los casos donde se anula el denominador: si  $r = 0$ , es obvio que la solución será  $x(t) = 0, y(t) = 0$ ; si  $r = 1$ , entonces la solución será  $x(t) = \cos(t + C), y(t) = \sin(t + C)$ , es decir, la circunferencia unidad, que será el ciclo límite estable atractor de este sistema. Ahora sí, aplicamos la separación de variables y obtenemos

$$\ln \frac{|r|}{\sqrt{|1 - r^2|}} = t + C,$$

y despejando  $r$ , teniendo en cuenta dos casos, llegamos a que las soluciones en polares son

$$\begin{cases} r(t) = \pm \sqrt{\frac{e^{2t+C_1}}{e^{2t+C_1} + 1}}, & \text{si } |r| < 1, \\ r(t) = \pm \sqrt{\frac{e^{2t+C_1}}{e^{2t+C_1} - 1}}, & \text{si } |r| > 1, \\ \theta(t) = t + C_2. \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable, las soluciones finales serán

$$\begin{cases} x(t) = \pm \sqrt{\frac{e^{2t+C_1}}{e^{2t+C_1} + 1}} \cos(t + C_2), \\ y(t) = \pm \sqrt{\frac{e^{2t+C_1}}{e^{2t+C_1} + 1}} \sin(t + C_2), \end{cases}$$

si  $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$ , y

$$\begin{cases} x(t) = \pm \sqrt{\frac{e^{2t+C_1}}{e^{2t+C_1} - 1}} \cos(t + C_2), \\ y(t) = \pm \sqrt{\frac{e^{2t+C_1}}{e^{2t+C_1} - 1}} \sin(t + C_2), \end{cases}$$

si  $\sqrt{x^2 + y^2} > 1$ , con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Representándolas gráficamente, como se puede ver en la Figura 2.2, las órbitas del sistema tienden claramente hacia la curva  $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ , que es el ciclo límite estable de nuestro sistema.

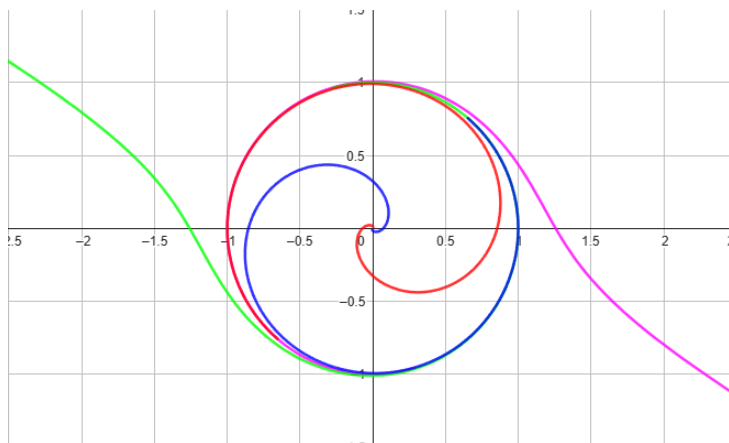


Figura 2.2: Retrato de fases del sistema (8) con  $\mu = 1$ , que posee un atractor de tipo ciclo límite en la circunferencia unidad.

**3. Atractores cuasi-periódicos o toros:** para encontrar otro tipo de atractor tenemos que aumentar una dimensión en nuestro sistema, como bien se muestra en [10]. Si tenemos dos

órbitas periódicas que se enroscan en un toro con diferentes periodicidades  $T_1$  y  $T_2$ , se pueden dar dos casos: que el ratio  $T_1/T_2$  sea un número racional, y por lo tanto se acabe cerrando sobre si misma tras un número entero de rotaciones; o que sea irracional, lo que provoca que la órbita siga dando vueltas al toro indefinidamente generando un movimiento cuasi-periódico. En este caso, el cual podemos ver representado gráficamente en la Figura 2.3, se forma un atractor con forma toroidal cuasi-periódico, estando cada órbita arbitrariamente cerca de cualquier punto del toro (así como arbitrariamente cerca de cerrarse, pero nunca ocurre, como se puede ver en [13]), o lo que es lo mismo, cada órbita es densa en el toro.

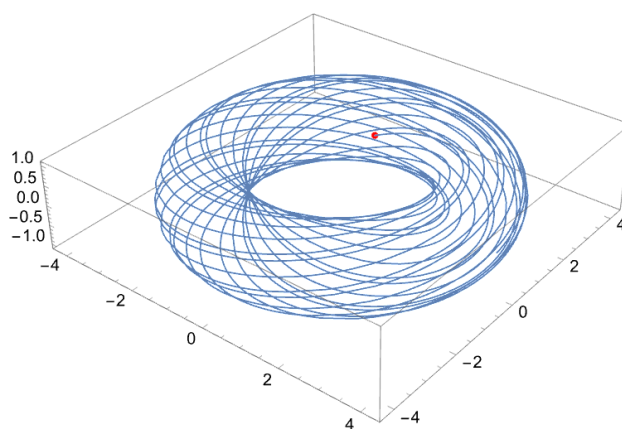


Figura 2.3: Órbita densa en la superficie de un toro con frecuencias  $T_1$  y  $T_2$  tal que  $T_1/T_2$  es irracional, formando un atractor cuasi-periódico toroidal. Imagen obtenida de [10].

4. **Atractores extraños:** dado un conjunto invariante cerrado, se dice que es un atractor extraño si contiene un conjunto numerable de órbitas periódicas con periodo arbitrariamente grande, un conjunto no numerable de movimientos no periódicos, y una órbita densa. Este tipo de atractores son los más complejos, siendo uno de los más conocidos e importantes el atractor de Lorenz, dado por el sistema homónimo

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = -\beta z + xy, \end{cases}$$

con parámetros  $\sigma$ ,  $\rho$ , y  $\beta$  no negativos. Tanto el trabajo original de Lorenz en 1963 ([15]), como otros más modernos, como el de Sparrow en 1982 ([20]), estudian a fondo este sistema, usualmente con los parámetros  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ , para los cuales el sistema tiene un conjunto atractor extraño, el cual se puede apreciar en la Figura 2.4.

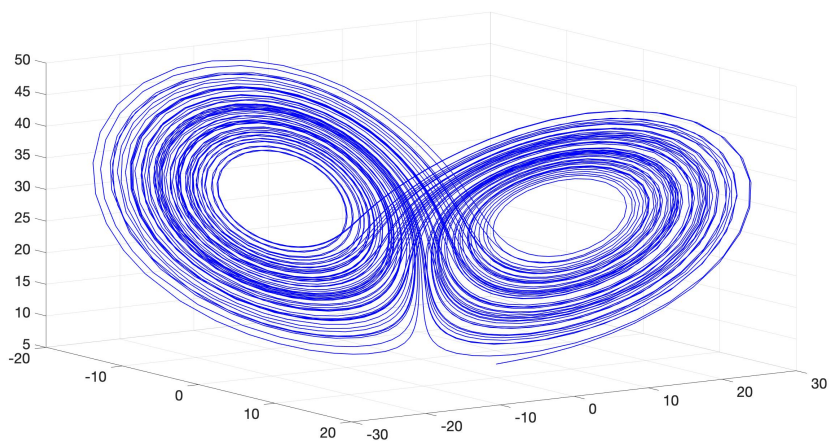


Figura 2.4: Representación gráfica del atractor de Lorenz del sistema homónimo con los parámetros  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  y  $\beta = 8/3$ .

## Capítulo 3

# Sistemas Dinámicos Discretos

En la segunda parte de este trabajo nos centraremos en los sistemas dinámicos discretos, que como hemos visto son aquellos en los que  $G = \mathbb{Z}$ . Introduciremos un método gráfico para analizar este tipo de sistemas, con el que trabajaremos a lo largo de todo este capítulo, y estudiaremos los puntos hiperbólicos, los cuales condicionan el comportamiento del sistema a su alrededor. Además, también veremos algún resultado muy interesante sobre puntos periódicos y sus periodos. Luego nos centraremos en un ejemplo concreto y veremos sus propiedades, para a partir de él introducir el concepto de sistema dinámico caótico. Los contenidos de este capítulo se basan principalmente en [6], pero también incluirán referencias a [14], [7], [8], [12], [19] o [2].

Antes de empezar propiamente con este capítulo, veamos una proposición importante a la hora de tratar con sistemas dinámicos discretos.

**Proposición 3.1.** *Todo sistema dinámico discreto está unívocamente determinado por su aplicación “tiempo 1”.*

*Demostración.* Sea  $\phi : X \times \mathbb{Z} \rightarrow X$  un sistema dinámico discreto y  $\phi^1 : X \rightarrow X$  su aplicación “tiempo 1”. Ayudándonos constantemente de la propiedad II de la Definición 1.1, veamos que conociendo  $\phi^1$  también conocemos  $\phi(x, n)$  para todo  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . Para  $n > 0$ , se puede ver que

$$\begin{aligned}(\phi^1 \circ \dots \circ \phi^1)(x) &= (\phi^1 \circ \overset{(n-1)}{\dots} \circ \phi^1)(\phi(x, 1)) = (\phi^1 \circ \overset{(n-2)}{\dots} \circ \phi^1)(\phi(\phi(x, 1), 1)) \\ &= (\phi^1 \circ \overset{(n-2)}{\dots} \circ \phi^1)(\phi(x, 2)) = \dots = \phi^1(\phi(x, n-1)) = \phi(x, n),\end{aligned}$$

para todo  $x \in X$ . Para el caso en el que  $n < 0$  nos ayudaremos de la Proposición 1.5, que nos indica que la aplicación “tiempo  $t$ ” tiene inversa y es  $(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t}$ . Aplicando esto a nuestro caso

particular, tenemos que la inversa de la aplicación “tiempo 1” es  $(\phi^1)^{-1} = \phi^{-1}$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} (\phi^{-1} \circ \overset{(-n)}{\dots} \circ \phi^{-1})(x) &= (\phi^{-1} \circ \overset{(-n-1)}{\dots} \circ \phi^{-1})(\phi(x, -1)) = (\phi^{-1} \circ \overset{(-n-2)}{\dots} \circ \phi^{-1})(\phi(\phi(x, -1), -1)) \\ &= (\phi^{-1} \circ \overset{(-n-2)}{\dots} \circ \phi^{-1})(\phi(x, -2)) = \dots = \phi^{-1}(\phi(x, n+1)) = \phi(x, n), \end{aligned}$$

para todo  $x \in X$ . Para terminar, si  $n = 0$  entonces

$$(\phi^1 \circ \phi^{-1})(x) = \phi^1(\phi(x, -1)) = \phi(\phi(x, -1), 1) = \phi(x, 0),$$

para todo  $x \in X$ . □

Como consecuencia de esta proposición, el estudio de los sistemas dinámicos discretos se puede reducir al estudio de problemas del estilo del Ejemplo 1.3, es decir, los definidos a partir de un homeomorfismo  $f$  en  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, cuando a lo largo de este capítulo nos refiramos a un sistema dinámico discreto, a pesar de estar definido estrictamente por la aplicación  $\phi : X \times \mathbb{Z} \rightarrow X$ , nosotros trabajaremos sobre la  $f : X \rightarrow X$ , cometiendo un ligero abuso de notación. En general, consideraremos  $f$  un homeomorfismo de  $C^\infty$  en  $X \subset \mathbb{R}$ , o incluso en  $X = \mathbb{R}$  directamente.

### 3.1. Análisis Gráfico

Dado un sistema dinámico  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , representaremos su retrato de fases mediante una técnica llamada análisis gráfico. Esta consiste en visualizar sus órbitas sobre la diagonal en vez de sobre uno de los ejes. Sea la diagonal  $\Delta = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$ , entonces, trazando una línea vertical desde el punto  $(p, p)$  de  $\Delta$  hasta la gráfica de  $f$ , hallaremos el punto  $(p, f(p))$ . Ahora, una línea horizontal desde dicho punto cortará a  $\Delta$  en  $(f(p), f(p))$ . Así, una línea vertical seguida de otra horizontal nos dan la imagen de un punto  $p$  bajo  $f$  en la diagonal. De esta forma, haciendo este proceso recursivamente, obtenemos el itinerario de un punto  $p$  bajo  $f$ ,  $\{p, f(p), f^2(p), \dots\}$ , o lo que es lo mismo, su semiórbita positiva  $\gamma^+(p)$ . Además de esto, el análisis gráfico nos permite calcular los puntos fijos con facilidad, ya que son aquellos donde la gráfica de la función y la diagonal se cortan. Lo mismo pasa cuando hacemos el análisis gráfico de  $f^n$ : los puntos de corte entre la gráfica de dicha función y  $\Delta$  son los puntos periódicos con periodo  $n$  del sistema dinámico.

Veamos un ejemplo de estudio de un sistema dinámico discreto apoyándonos en su análisis gráfico.

**Ejemplo 3.2.** En la Figura 3.1 vemos el análisis gráfico de la función  $f(x) = x^3$ . Marcados en rojo están los puntos fijos, en azul la gráfica de  $f$  y en negro las flechas que nos van dando los puntos de las órbitas. Empezamos con los casos más sencillos: cuando  $x > 1$ , está claro que  $f(x) = x^3 > x$  y por lo tanto  $f^n(x) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ; análogamente, si  $x < -1$  entonces

$f^n(x) \rightarrow -\infty$ . Por otra parte, en el caso de que  $x \in (-1, 0)$ , tenemos que  $f$  es estrictamente creciente ( $f'(x) = 2x^2 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) y su gráfica está por encima de la diagonal. Además, cumple que  $f([-1, 0]) \subset [-1, 0]$ , es decir, la proyección de la gráfica de  $f$  para los puntos  $x \in [-1, 0]$  sobre la diagonal está contenida en dicho intervalo. Todo esto implica que dado un punto  $x \in (-1, 0)$ , su imagen cumplirá que  $f(x) \in (-1, 0)$  y  $f(x) > x$ . Por lo tanto, iterando de forma sucesiva se obtiene una sucesión creciente de puntos que convergen al punto fijo  $x = 0$ . El caso de  $x \in (0, 1)$  es análogo pero con la gráfica de  $f$  por debajo de la diagonal, por lo que la sucesión resultante será decreciente y también convergerá al punto fijo  $x = 0$ . En la Figura 3.1 podemos ver como, partiendo de cuatro puntos iniciales (uno en cada intervalo de interés), obtenemos sucesiones que o bien tienden a  $\pm\infty$  o bien a 0.

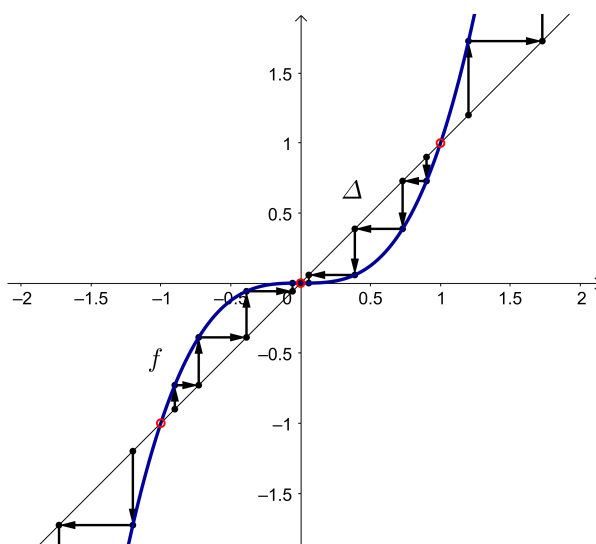


Figura 3.1: Análisis gráfico de  $f(x) = x^3$ .

Para ilustrar lo comentado anteriormente sobre los puntos fijos y periódicos, tenemos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.** Dada la aplicación  $f(x) = x^3 - 2x$ , en la Figura 3.2 podemos ver su representación gráfica (en azul) junto a la de  $f^2(x) = f(f(x))$  (en naranja). Los puntos rojos de la figura nos indican los puntos fijos de  $f$ , que son los puntos de corte entre  $f$  y  $\Delta$ . Efectivamente, es fácil comprobar que

$$f(x) = x^3 - 2x = x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{3}.$$

Por otra parte, como es lógico, las intersecciones entre  $f^2$  y  $\Delta$  nos darán los puntos fijos de dicha función, o lo que es lo mismo, los puntos periódicos de periodo 2 de  $f$ . Estos están representados

de color verde, y se puede ver que coinciden con los calculados analíticamente ya que

$$\begin{aligned} f^2(x) = f(f(x)) &= (x^3 - 2x)^3 - 2(x^3 - 2x) = x \Leftrightarrow x^9 - 6x^7 + 12x^5 - 10x^3 + 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x^8 - 6x^6 + 12x^4 - 10x^2 + 3 = 0 \stackrel{u=x^2}{\Leftrightarrow} u^4 - 6u^3 + 12u^2 - 10u + 3 = 0 \\ &\stackrel{\text{Ruffini}}{\Leftrightarrow} (u-1)^3(u-3) = 0 \Leftrightarrow u = 1 \text{ o } u = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ o } x = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Obviamente, los puntos fijos de  $f$  también lo serán de  $f^2$ , por lo que los puntos periódicos de periodo 2 de  $f$  en este caso son 1 y  $-1$ , como se puede ver en la Figura 3.2.

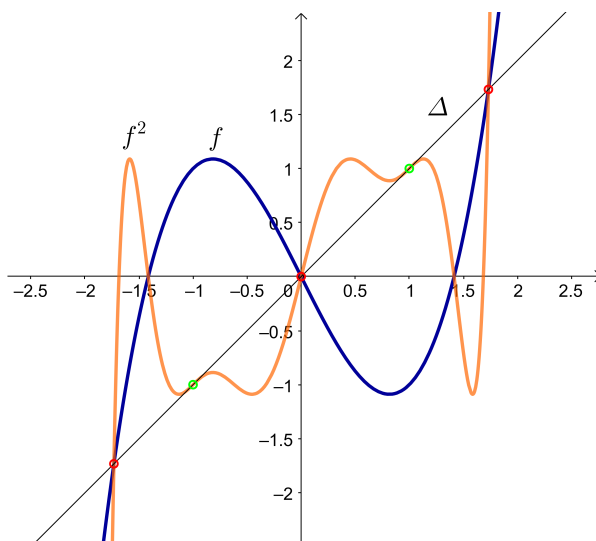


Figura 3.2: Representación gráfica de  $f(x) = x^3 - 2x$  (azul) y  $f^2(x)$  (naranja), además de los puntos fijos de cada una (rojos y verdes respectivamente).

### 3.2. Puntos Periódicos

En esta sección enunciaremos varios resultados acerca de los puntos periódicos de un sistema dinámico discreto. Aun así, antes haremos una aclaración sobre ellos que nos facilitará su estudio.

*Observación 3.4.* Cuando nos encontramos con un sistema dinámico discreto como el del Ejemplo 1.3 (que hemos visto que su estudio se puede ampliar a cualquier otro sistema dinámico discreto), podemos ver una definición de punto periódico equivalente a la general enunciada en la Definición 1.9 (que además es más intuitiva). Debido a que  $f$  es un homeomorfismo, se tiene que

$$\phi(x, n) = \phi(x, n + N) \quad \forall n \in G = \mathbb{Z} \Leftrightarrow f^n(x) = f^{n+N}(x) \Leftrightarrow x = f^N(x).$$

Por lo tanto, podemos decir que un punto  $x \in X$  es un punto periódico de un sistema dinámico discreto con periodo  $N$  si  $f^N(x) = x$ . Además, el  $N$  positivo más pequeño tal que  $f^N(x) = x$  se

llamará periodo principal de  $x$ .

Dicho esto, a continuación estudiaremos principalmente dos resultados. En el primero, veremos la importancia de los puntos periódicos de periodo tres, y en el segundo, el reconocido como Teorema de Sarkovskii, la relación entre puntos periódicos de distintos periodos. Para ambos teoremas nos olvidaremos de las hipótesis de regularidad de  $f$  que supusimos al inicio de este capítulo, ya que a pesar de la gran importancia de estos resultados, sus hipótesis son muy poco estrictas.

El primer teorema del que hablaremos fue enunciado y probado inicialmente por Li y Yorke en 1975 ([14]). Este nos mostrará la importancia de los puntos periódicos de periodo tres y nos servirá de antesala al Teorema de Sarkovskii, más general.

**Teorema 3.5.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación continua. Supongamos que  $f$  tiene un punto periódico de periodo tres. Entonces,  $f$  tiene puntos periódicos de todos los demás periodos.*

*Demostración.* Empecemos la prueba comentando un par de observaciones necesarias para luego demostrar el teorema propiamente dicho.

Primero, una simple consecuencia del Teorema de Valor Intermedio: sean  $I = [a, b]$  y  $J = [c, d]$  intervalos cerrados tales que  $I \subset J$  y  $f(I) \supset J$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $I$ . El Teorema de Valor Intermedio dice que, si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces para cualquier  $p \in (f(a), f(b))$  existirá un  $q \in I$  tal que  $f(q) = p$ . Luego, con nuestras hipótesis podemos diferenciar cuatro casos, dependiendo de los valores de  $f(a)$  y  $f(b)$ . Si  $f(a) > a$  y  $f(b) < b$ , o viceversa, entonces está claro que la gráfica de  $f$  cruzará la diagonal y por tanto tendrá un punto fijo. Cuando  $f(a) < a$  y  $f(b) < b$ , como  $f(I) \supset J$ , tendrá que existir un punto  $u \in (a, b)$  tal que  $f(u) \geq d$ , y como  $d \geq b$  ( $I \subset J$  implica que  $c \leq a < b \leq d$ ), se sigue que  $f(u) > u$ , por lo que la gráfica de  $f$  cruzará la diagonal de nuevo. El caso donde  $f(a) < a$  y  $f(b) > b$  es completamente análogo.

Por otra parte, supongamos que  $A_0, A_1, A_2, \dots$  son intervalos cerrados y que  $f(A_i) \supset A_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, n-1$ . Entonces existe por lo menos un subintervalo  $J_0$  de  $A_0$  cuya imagen es  $A_1$ . Existe también un subintervalo de  $A_1$  cuya imagen es  $A_2$ , y por lo tanto existe un subintervalo  $J_1 \subset J_0$  que cumple que  $f(J_1) \subset A_1$  y  $f^2(J_1) = A_2$ . Recursivamente podemos construir una sucesión de intervalos encajados con imágenes los varios  $A_i$ , y por lo tanto existirá un  $x \in A_0$  tal que  $f^i(x) \in A_i$  para cada  $i$ . Diremos entonces que  $f(A_i)$  cubre  $f(A_{i+1})$ .

Para probar el teorema, sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  y suponemos que  $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$  y  $f(c) = a$ . Podemos asumir que  $a < b < c$ . Sean ahora  $I_0 = [a, b]$  e  $I_1 = [b, c]$ , por las suposiciones anteriores tenemos que  $f(I_0) \supset I_1$  y  $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$ . Luego,  $f$  tendrá un punto fijo entre  $b$  y  $c$ , así como  $f^2$  tiene puntos fijos entre  $a$  y  $b$ , y es fácil ver que al menos uno de estos puntos es de periodo dos. Por lo tanto, ya visto el resultado para  $n = 2$ , veamos que existe un punto periódico de periodo

$n > 3$ .

Construyamos a continuación de forma inductiva una sucesión de intervalos encajados tal que  $A_0, A_1, \dots, A_{n-2} \subset I_1$ . Definimos  $A_0 = I_1$ . Como  $f(I_1) \supset I_1$ , existirá un subintervalo  $A_1 \subset A_0$  tal que  $f(A_1) = A_0 = I_0$ . Similarmente, existirá un subintervalo  $A_2 \subset A_1$  tal que  $f(A_2) = A_1$ , es decir,  $f^2(A_2) = A_0 = I_0$ . Recursivamente, encontramos un subintervalo  $A_{n-2} \subset A_{n-3}$  tal que  $f(A_{n-2}) = A_{n-3}$ . Por la segunda observación al comienzo de esta demostración, si  $x \in A_{n-2}$  entonces  $f(x), f^2(x), \dots, f^{n-2}(x) \subset A_0$  y, por supuesto,  $f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0 = I_1$ .

Ahora, como  $f(I_1) \supset I_0$ , existirá un subintervalo  $A_{n-1} \subset A_{n-2}$  tal que  $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$ . Finalmente, como  $f(I_0) \supset I_1$ , tenemos que  $f^n(A_{n-1}) \supset I_1$ , por lo que  $f^n(A_{n-1})$  cubre  $A_{n-1}$ . Se sigue de nuestra primera observación que  $f^n$  tiene un punto fijo  $p$  en  $A_{n-1}$ . Las primeras  $n-2$  iteraciones de  $p$  caen en  $I_1$ , la  $(n-1)$ -ésima cae en  $I_0$  y la  $n$ -ésima es  $p$  de nuevo. Si  $f^{n-1}(p)$  está en el interior de  $I_0$  entonces dicho punto será periódico de periodo principal  $n$ ; en el caso de que esté en su frontera, entonces  $n = 2$  o  $3$ , y de nuevo terminamos.  $\square$

A continuación veremos el llamado Teorema de Sarkovskii, que nos dará una idea sobre qué periodos implican otros en una aplicación continua de  $\mathbb{R}$ . Antes de esto, veamos un orden de los números naturales que nos servirá a la hora de enunciar este teorema:

$$\begin{aligned} 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1, \end{aligned}$$

donde " $a \triangleright b$ " significa que  $a$  es mayor que  $b$  en este orden, al que llamamos orden de Sarkovskii. Esta lista está compuesta por varios bloques (realmente infinitos), siendo el primero los números impares excepto el uno. A este le sigue el compuesto por los dobles de los impares, luego el cuádruple, etc., es decir, el bloque  $n$  con  $n \geq 0$  será el de los números impares (excepto el uno) multiplicado por  $2^n$ . Así habremos recorrido todos los números naturales salvo las potencias de dos, que son las que se incluyen en el último bloque de forma decreciente para todo  $n \geq 0$ . Dicho todo esto, enunciemos el resultado, que generaliza el Teorema 3.5.

**Teorema 3.6** (Teorema de Sarkovskii). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación continua. Supongamos que  $f$  tiene un punto periódico de periodo principal  $k$ . Si  $k \triangleright l$  en el orden de Sarkovskii, entonces  $f$  también tiene un punto periódico de periodo  $l$ .*

Debido a su complejidad, la prueba de este teorema no se incluirá en este trabajo, pero se puede consultar en [7]. A continuación enunciamos alguna consecuencia de este resultado.

*Observaciones 3.7.*

1. Si  $f$  tiene un punto periódico cuyo periodo no es una potencia de dos, entonces  $f$  tiene necesariamente infinitos puntos periódicos. Recíprocamente, si  $f$  solo tiene un número finito de puntos periódicos, entonces todos ellos tendrán periodos que son potencias de dos.

2. El periodo tres es el periodo más grande del orden de Sarkovskii y por consiguiente implica la existencia de todos los demás periodos, reiterando la veracidad del Teorema 3.5.
3. El recíproco del Teorema de Sarkovskii también es cierto: existen aplicaciones con puntos periódicos de periodo  $n$  y ninguno de periodos más grandes que  $n$ . A continuación enunciaremos este resultado, cuya demostración no haremos pero se puede ver en [8], y veremos un ejemplo.

**Teorema 3.8.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe una aplicación continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con puntos periódicos de periodo  $n$  tal que para cualquier  $k \triangleright n$ ,  $f$  no tiene puntos periódicos de periodo  $k$ .*

**Ejemplo 3.9.** Construyamos una aplicación continua con puntos periódicos de periodo 5 pero no de periodo 3, es decir, que cumpla el recíproco del Teorema de Sarkovskii para  $n = 5$ . Consideramos entonces  $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$  la aplicación tal que

$$f(1) = 3, f(3) = 4, f(4) = 2, f(2) = 5, f(5) = 1,$$

que claramente tiene en  $x = 1$  un punto periódico de periodo 5 (y por el Teorema de Sarkovskii, también los tendrá de todos los demás periodos excepto el 3, del cual este teorema no dice nada). Suponemos además que  $f$  es lineal entre dichos puntos, por lo que la gráfica de  $f$  será como se muestra en rojo en la Figura 3.3.

Tanto analítica como gráficamente (en azul en la Figura 3.3) es fácil ver que

$$f^3[1, 2] = [2, 5], f^3[2, 3] = [3, 5], f^3[4, 5] = [1, 4],$$

y por lo tanto  $f^3$  no tendrá puntos fijos en dichos intervalos. Ahora bien,  $f^3[3, 4] = [1, 5]$ , por lo que habrá por lo menos un punto fijo de  $f^3$  en  $[3, 4]$ : veamos que este punto es único y por lo tanto será el punto fijo de  $f$  y no un punto periódico de periodo 3. Como  $f : [3, 4] \rightarrow [2, 4]$  es estrictamente decreciente y  $f : [2, 4] \rightarrow [2, 5]$  también, tenemos que  $f^2 : [3, 4] \rightarrow [2, 5]$  lo es. De nuevo, como  $f : [2, 5] \rightarrow [1, 5]$  también lo es, concluimos que  $f^3 : [3, 4] \rightarrow [1, 5]$  es estrictamente decreciente y por lo tanto cruza a la diagonal una única vez. En definitiva, hemos probado que  $f$  no tiene puntos periódicos de periodo 3.

Por último, es preciso enfatizar que todos los resultados de esta sección son ciertos exclusivamente para sistemas dinámicos discretos en una dimensión. Cuando trabajamos en  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 1$ , no existe ningún resultado análogo al Teorema de Sarkovskii. Por ejemplo, la aplicación en  $\mathbb{S}^1$  que rota todos los puntos del círculo  $120^\circ$  hace que todos sus puntos sean periódicos de periodo 3, pero no tiene ningún punto de cualquier otro periodo.

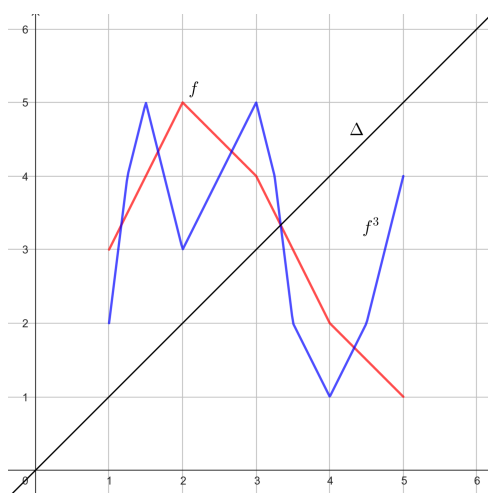


Figura 3.3: En rojo, gráfica de la aplicación continua a trozos  $f$  tal y como se describe en el Ejemplo 3.9. En azul, gráfica de  $f^3$ .

### 3.3. Hiperbolicidad

Los puntos periódicos de un sistema dinámico discreto se pueden clasificar en dos grandes grupos: hiperbólicos y no hiperbólicos. Las aplicaciones con puntos periódicos hiperbólicos son de las más comunes en sistemas dinámicos, además de propiciar un análisis sencillo de los mismos. En esta sección estudiaremos este tipo de puntos y cómo afectan al sistema a su alrededor.

**Definición 3.10.** Sea  $p$  un punto periódico de periodo principal  $n$ . Entonces, diremos que el punto  $p$  es hiperbólico si  $|(f^n)'(p)| \neq 1$ . El número  $(f^n)'(p)$  se llama multiplicador del punto periódico.

*Observación 3.11.* En la definición anterior, en el caso de que  $n = 1$  el punto  $p$  será realmente un punto fijo, ya que un punto periódico de periodo 1 cumple que  $f^1(x) = x$ , que obviamente es la definición de punto fijo. Por lo tanto, los puntos hiperbólicos pueden ser tanto fijos como periódicos de periodo  $n$ .

**Definición 3.12.** Sea  $p$  un punto periódico de periodo  $n$ . Diremos que un punto  $x$  es asintótico a  $p$  hacia delante si  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{in}(x) = p$ . De igual manera, diremos que un punto  $x$  es asintótico a  $p$  hacia atrás si  $\lim_{i \rightarrow -\infty} f^{in}(x) = p$ . El conjunto de todos los puntos asintóticos hacia delante a  $p$  se llamará conjunto estable de  $p$ , y el de los puntos asintóticos hacia atrás a  $p$ , conjunto inestable de  $p$ , denotados por  $W^s(p)$  y  $W^u(p)$ , respectivamente.

*Observación 3.13.* Aunque  $p$  no sea periódico, se pueden llegar a definir puntos asintóticos a  $p$  hacia delante requiriendo que  $|f^i(x) - f^i(p)| \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ . De la misma manera se consideran los puntos asintóticos hacia atrás, simplemente cambiando que  $i \rightarrow -\infty$ .

Veamos ahora un ejemplo de dos aplicaciones con puntos fijos hiperbólicos y comportamientos diferentes.

**Ejemplo 3.14.** Consideremos el difeomorfismo  $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$ . Sus puntos fijos son  $0, 1$  y  $-1$ , que además son hiperbólicos ya que  $f'(0) = 1/2$  y  $f'(1) = f'(-1) = 2$ .

Por otro lado, sea  $g(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + x)$ . El  $0$  es un punto fijo hiperbólico, con  $g'(0) = -1/2$ , y ahora los puntos  $\pm 1$  caen en una órbita periódica de periodo  $2$  (en naranja en la Figura 3.4), ya que  $g(1) = -1$  y  $g(-1) = 1$ . Por la regla de la cadena es fácil sacar que

$$(g^2)'(\pm 1) = g'(g(\pm 1))g'(\pm 1) = g'(1)g'(-1) = (-2)(-2) = 4,$$

por lo tanto estos puntos también serán hiperbólicos.

Como veremos más adelante, dependiendo del valor de la derivada en cada punto hiperbólico el comportamiento del sistema es distinto. Por un lado, tenemos que  $|f'(\pm 1)| > 1$  y  $|g'(\pm 1)| > 1$ , y se puede ver claramente en la Figura 3.4 que los puntos que se encuentran en los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(1, \infty)$  tienden a  $-\infty$  y  $\infty$  respectivamente para los dos ejemplos, es decir, se alejan de  $\pm 1$  siendo puntos asintóticos a  $\pm 1$  hacia atrás.

Por otra parte, tenemos que tanto  $|f'(0)| < 1$  como  $|g'(0)| < 1$ , y como podemos observar en la Figura 3.4, todo punto cercano a  $0$  es asintótico a él hacia delante, o lo que es lo mismo, su conjunto estable es  $W^s(0) = (-1, 1)$  en ambos casos. Además de acercarse a  $0$ , estos puntos también se están alejando de  $\pm 1$ , por lo que podemos calcular sus conjuntos inestables: en el caso de  $f$ , se tiene que  $W^u(-1) = (-\infty, 0)$  y  $W^u(1) = (0, \infty)$ , y en el caso de  $g$  serán ambos  $W^u(\pm 1) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .

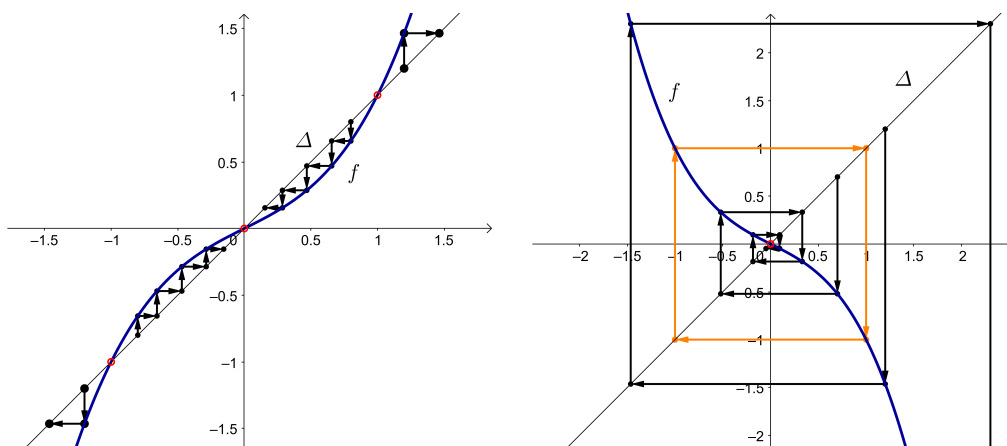


Figura 3.4: Análisis gráfico de  $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$  (izquierda) y  $g(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + x)$  (derecha).

El fenómeno descrito alrededor del punto fijo  $x = 0$  en este último ejemplo se da muy a menudo, como se puede ver en la siguiente proposición.

**Proposición 3.15.** *Sea  $p$  un punto fijo hiperbólico tal que  $|f'(p)| < 1$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  tal que si  $x \in U$ , entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

*Demostración.* Como  $f \in C^1$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|f'(x)| < A < 1$  para  $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ , siendo  $A$  una constante. Teniendo en cuenta que  $p$  es un punto fijo, por el Teorema de Valor Medio

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \varepsilon$$

para todo  $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ . Por lo tanto,  $f(x)$  pertenece al intervalo  $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$  y está más cerca de  $p$  que  $x$ . Mediante el mismo razonamiento,

$$|f^n(x) - p| \leq A^n |x - p|,$$

y entonces  $f^n(x) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . □

*Observación 3.16.* De esta demostración se sigue que el intervalo  $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$  está contenido en el conjunto estable de  $p$ ,  $W^s(p)$ .

Como consecuencia de la proposición anterior, podemos definir un tipo de puntos hiperbólicos específico: los atractores.

**Definición 3.17.** Sea  $p$  un punto periódico hiperbólico de periodo  $n$  con  $|(f^n)'(p)| < 1$ . El punto  $p$  se llamará punto periódico atractor (o simplemente un atractor).

Los puntos periódicos atractores de periodo  $n$  tienen entonces un entorno tal que su imagen por  $f^n$  está dentro de sí mismo. Dicho entorno se llamará conjunto estable local, y se denotará por  $W_{loc}^s$ .

**Ejemplo 3.18.** En cuanto a puntos periódicos atractores, se pueden dar tres casos dependiendo del valor de la derivada:  $-1 < f'(p) < 0$ ,  $f'(p) = 0$  y  $0 < f'(p) < 1$ . Cada uno de estos tipos tienen unas características diferentes, con comportamientos asintóticos hacia el punto  $p$  variados. Los casos donde la derivada es distinta de 0 ya los vimos en el Ejemplo 3.14, ambos en  $p = 0$ , y su análisis gráfico se puede ver en la Figura 3.4 (izquierda derivada positiva y derecha negativa). Por otra parte, el caso donde  $f'(p) = 0$  se da, por ejemplo, en el punto  $p = 0$  de la función  $f(x) = -x^2$ , representada en la Figura 3.5. Además, podemos ver en los análisis gráficos de estos ejemplos que el conjunto estable local de 0 será  $W_{loc}^s(0) = (-1, 1)$  para los tres sistemas.

Veamos ahora un resultado contrario a la Proposición 3.15, que nos dará paso a definir en este caso los puntos hiperbólicos repulsivos.

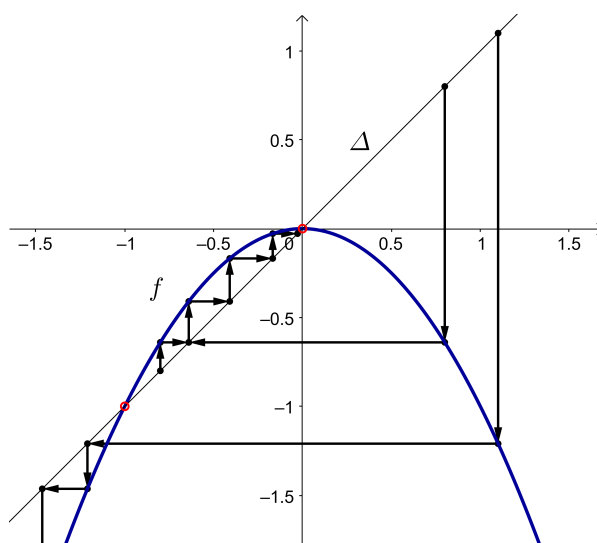


Figura 3.5: Análisis gráfico de  $f(x) = -x^2$ .

**Proposición 3.19.** *Sea  $p$  un punto fijo hiperbólico tal que  $|f'(p)| > 1$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  tal que si  $x \in U$ ,  $x \neq p$ , entonces existe un  $k > 0$  tal que  $f^k(x) \notin U$ .*

*Demostración.* Como  $|f'(p)| > 1$ , existe un valor  $A \in \mathbb{R}$  tal que  $|f'(p)| > A > 1$ . Por definición de derivada, tenemos que

$$|f'(p)| = \lim_{x \rightarrow p} \left| \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right| = \lim_{x \rightarrow p} \left| \frac{f(x) - p}{x - p} \right| > A.$$

Por lo tanto, como  $f \in C^1$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\left| \frac{f(x) - p}{x - p} \right| > A$$

para  $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon] \setminus \{p\}$ . Luego,

$$|f(x) - p| > A |x - p|,$$

para  $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon] \setminus \{p\}$ . Supongamos ahora que  $f^k(x) \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$  para todo  $k > 0$ , entonces podemos aplicar lo anterior de forma recursiva hasta tener que

$$|f^n(x) - p| > A |f^{n-1}(x) - p| > \cdots > A^n |x - p|$$

para cualquier  $n > 0$ . Luego, como  $A > 1$ , si tomamos el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  tendremos que  $|f^n(x) - p| \rightarrow \infty$ , lo cual contradice nuestra suposición anterior. Por lo tanto, concluimos que tiene que existir un  $k > 0$  tal que  $f^k(x) \notin [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ .  $\square$

**Definición 3.20.** Sea  $p$  un punto periódico hiperbólico de periodo  $n$  con  $|(f^n)'(p)| > 1$ . El punto  $p$  se llamará punto periódico repulsor (o simplemente un repulsor). El entorno  $U$  definido en la proposición anterior se llamará conjunto inestable local, y se denotará por  $W_{loc}^u$ .

**Ejemplo 3.21.** Sea  $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 3x)$ , tiene un punto fijo en el 0 y su derivada en dicho punto es  $f'(0) = 3/2 > 1$ , es decir, el 0 es un punto fijo hiperbólico repulsor. Como vemos en la Figura 3.6, cualquier punto cercano a 0 se aleja de él infinitamente hasta estar arbitrariamente lejos, lo cual es una representación de lo establecido por la última proposición. En este caso, el conjunto inestable local de 0 sería  $W_{loc}^u(0) = (-\delta, \delta)$  con  $\delta > 0$  arbitrariamente grande.

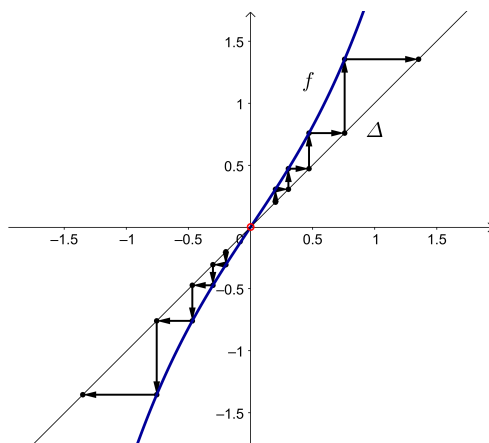


Figura 3.6: Análisis gráfico alrededor del punto fijo repulsor 0 para  $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 3x)$ .

Está claro entonces que los puntos periódicos hiperbólicos tienen un comportamiento definido por el valor de su derivada en dicho punto. Por otra parte, esto no sucede cuando el punto es no hiperbólico, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.22.** Sean  $f_1(x) = x + x^3$ ,  $f_2(x) = x - x^3$  y  $f_3(x) = x + x^2$  tres aplicaciones con un punto fijo no hiperbólico en el punto  $x = 0$ , es decir, que  $f_i(0) = 0$  y  $f'_i(0) = 1$  para  $i = 1, 2, 3$ . A pesar de esto, como podemos apreciar en la Figura 3.7, cada una tiene un retrato de fases totalmente distinto:  $f_1$  tiene en 0 un punto fijo repulsor débil,  $f_2$  atractor débil y  $f_3$  es atractor débil por la izquierda y repulsor débil por la derecha (decimos que son atractores o repulsores débiles ya que realmente no cumplen las definiciones anteriormente redactadas al no ser puntos hiperbólicos).

En la próxima sección nos centraremos en lo que llamamos una familia de aplicaciones: un conjunto de aplicaciones que se diferencian entre sí por el valor de un parámetro. En nuestro caso, trabajaremos con la familia cuadrática, que está compuesta por aplicaciones no muy complicadas de analizar pero que presentan muchas propiedades interesantes.

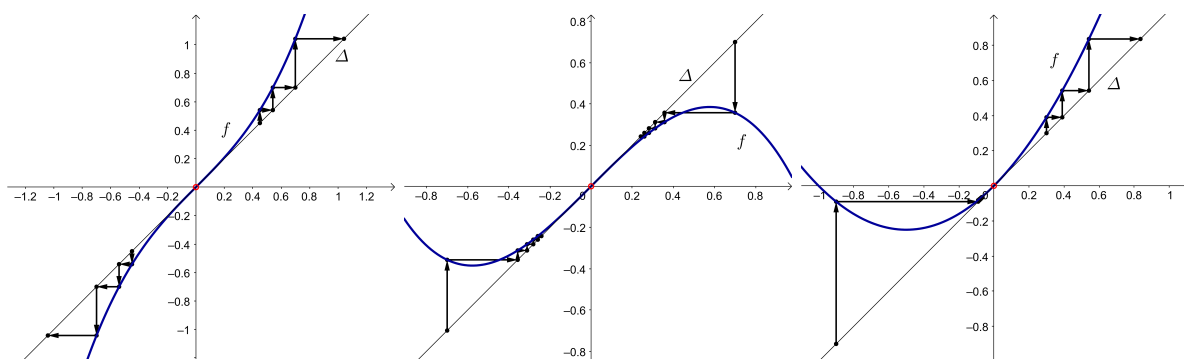


Figura 3.7: Análisis gráfico de  $f_1(x) = x + x^3$  (izquierda),  $f_2(x) = x - x^3$  (centro) y  $f_3(x) = x + x^2$  (derecha).

### 3.4. Familia Cuadrática

En esta sección estudiaremos a fondo la familia cuadrática, dada por  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  con  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , que presenta muchos de los fenómenos importantes en el estudio de sistemas dinámicos discretos en una dimensión.

**Proposición 3.23.** *Sea  $F_\mu$  la familia cuadrática con  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tenemos que:*

1.  $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$  y  $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$ , donde  $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ .
2. 0 y  $p_\mu$  son los únicos puntos fijos de  $F_\mu$ .
3.  $0 < p_\mu < 1$  si y solo si  $\mu > 1$ .

*Demostración.* Probar los puntos 1. y 3. es trivial por la definición de  $F_\mu$ , así que veamos que 0 y  $p_\mu$  son los únicos puntos fijos de dicha función:

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x) = x \Leftrightarrow x(\mu-1) - \mu x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } \mu-1 - \mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = \frac{\mu-1}{\mu} = p_\mu. \quad \square$$

En esta sección nos centraremos en el estudio de la familia cuadrática en el caso de que  $\mu > 1$ , ya que es donde aparecen las dinámicas más interesantes, pero analicemos primero brevemente el comportamiento de esta familia cuando  $\mu \leq 1$ .

Antes de nada, estudiaremos la existencia de puntos periódicos de periodo 2 para  $F_\mu$ . Buscamos los puntos fijos de  $F_\mu^2$ , sin tener en cuenta  $x = 0$  y  $x = p_\mu$ , ya que son puntos fijos de  $F_\mu$ :

$$\begin{aligned} F_\mu^2(x) &= \mu^2 x(1-x)(1-\mu x + \mu x^2) = x \Leftrightarrow \mu^2 x(1-x)(1-\mu x + \mu x^2) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu x(x - p_\mu)(-\mu^2 x^2 + \mu(\mu+1)x - (\mu+1)) = 0. \end{aligned}$$

Buscamos las raíces del último elemento y tenemos que

$$x = \frac{-(\mu + 1) \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{-2\mu},$$

que es un número real si y solo si  $\mu \leq -1$  o  $\mu \geq 3$ . Como para  $\mu = -1$  ambas raíces dan 0 y para  $\mu = 3$  dan  $p_\mu$ , podemos afirmar que  $F_\mu$  solo tiene puntos periódicos de periodo 2 cuando  $\mu < -1$  y  $\mu > 3$ .

*Observación 3.24.* Acabamos de ver que la familia cuadrática  $F_\mu$  no tiene puntos periódicos de periodo 2 para los valores del parámetro  $\mu \in [-1, 3]$ . Entonces, gracias al Teorema de Sarkovskii visto en la Sección 3.2, podemos asegurar que dicha aplicación no tendrá ningún punto periódico para esos valores de  $\mu$ , ya que el periodo 2 es el más bajo en el orden de Sarkovskii.

Sea ahora  $\mu \in (0, 1]$ . Entonces, como se puede ver en la Figura 3.8 (arriba izquierda), su punto fijo  $p_\mu \leq 0$  (cuanto menor sea  $\mu$ , mayor será  $p_\mu$  en valor absoluto). En este caso, es fácil ver que todos los puntos del intervalo  $(p_\mu, 1 - p_\mu)$  tienden al punto fijo 0, mientras que los puntos tales que  $x < p_\mu$  y  $x > 1 - p_\mu$  tienden a  $-\infty$ . Por lo tanto, podemos decir que 0 es un punto fijo atractor y  $p_\mu$  un punto fijo repulsor (esto se puede verificar fácilmente ya que  $F'_\mu(x) = \mu(1 - 2x)$  y entonces  $F'_\mu(0) = \mu < 1$  y  $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu > 1$ ).

El caso donde  $\mu \in [-1, 0)$  es muy similar, ya que las gráficas son simétricas respecto al eje  $x$ , como se puede ver en la Figura 3.8 (arriba derecha). Aquí el punto fijo  $p_\mu \geq 2$  (cuanto más cercano a 0 esté  $\mu$ , más grande será  $p_\mu$ ), y entonces el intervalo de puntos que no tienden a  $\infty$  será  $(1 - p_\mu, p_\mu)$ , ya que se acercan a 0.

Por último, si  $\mu < -1$  el análisis de  $F_\mu$  se vuelve más extraño, ya que, como hemos visto antes, existen puntos periódicos de periodo 2. Luego, si analizamos el valor de la derivada de  $F_\mu^2$  en sus puntos periódicos obtenemos los siguientes resultados: si  $\mu \in (1 - \sqrt{6}, -1)$ , entonces  $F_\mu$  tendrá dos puntos periódicos atractores de periodo 2 (o, lo que es lo mismo, una órbita periódica atractor de periodo 2); si  $\mu \leq 1 - \sqrt{6}$ ,  $F_\mu$  tendrá dos puntos periódicos repulsos de periodo 2 (o, lo que es lo mismo, una órbita periódica repulsora de periodo 2). Además, siempre que  $\mu < -1$ ,  $p_\mu \in (1, 2)$  y los dos puntos fijos 0 y  $p_\mu$  serán repulsos. Debido a esto, el análisis gráfico de  $F_\mu$  es más engorroso que en los casos anteriores. En la Figura 3.8 (abajo izquierda y derecha) podemos ver en naranja la órbita periódica de la que hablábamos, y se ve bien que en la figura de la izquierda esta es repulsora, y en la de la derecha, atractor. En resumen, los puntos del intervalo  $(1 - p_\mu, p_\mu)$  se mantienen en él y aquellos tales que  $x < 1 - p_\mu$  y  $x > p_\mu$  tenderán a  $\infty$  cuando iteramos sobre  $F_\mu$ .

De ahora en adelante, supondremos siempre que  $\mu > 1$ . En la siguiente proposición veremos como, bajo iteraciones de  $F_\mu$ , todos los puntos que no pertenecen al intervalo  $[0, 1]$  tienden a  $-\infty$ .

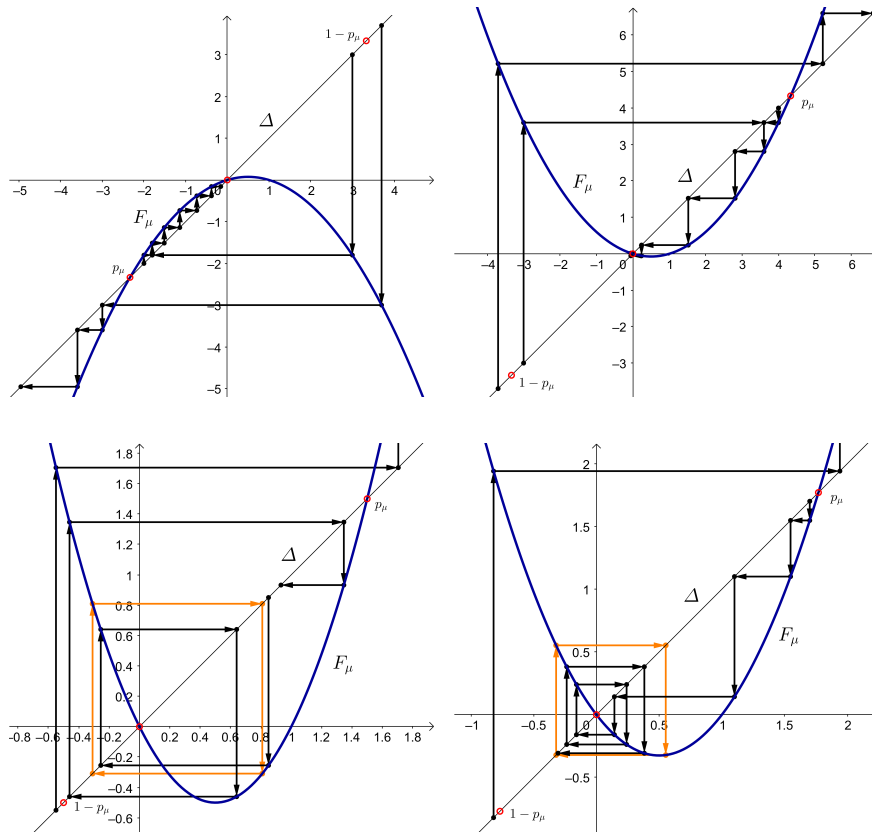


Figura 3.8: Análisis gráfico de  $F_\mu$  cuando  $\mu \in (0, 1]$  (arriba izquierda),  $\mu \in [-1, 0)$  (arriba derecha),  $\mu \in (1 - \sqrt{6}, -1)$  (abajo izquierda) y  $\mu \leq 1 - \sqrt{6}$  (abajo derecha).

**Proposición 3.25.** *Supongamos que  $\mu > 1$ . Si  $x < 0$ , entonces  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Análogamente, si  $x > 1$ ,  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* Si  $x < 0$ , entonces  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x) < x$  y, por consiguiente,  $F_\mu^n(x)$  es una sucesión decreciente de puntos. Esta sucesión no puede converger a un  $p \in \mathbb{R}$  (en particular,  $p < 0$ ), ya que si  $F_\mu^n(x) \rightarrow p$  entonces  $F_\mu^{n+1}(x) \rightarrow F_\mu(p) < p$ , lo cual es imposible. Por lo tanto,  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ .

En caso de que  $x > 1$ , tendremos que  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x) < 0$  y, siguiendo el mismo razonamiento anterior, concluimos que  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ . □

Como podemos observar en la Figura 3.9, el análisis gráfico de  $F_\mu$  ilustra esta última proposición. Además, como consecuencia de dicho resultado, todas las propiedades interesantes de la familia cuadrática se dan en el intervalo unidad  $I = [0, 1]$ .

Veamos a continuación la dinámica de los puntos de  $I$  bajo iteración de  $F_\mu$  en función de los

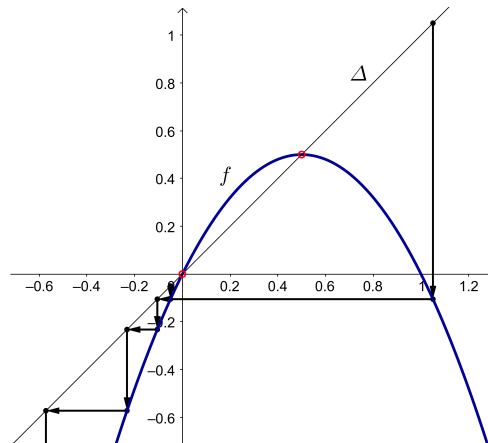


Figura 3.9: Análisis gráfico de  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  para  $\mu > 1$  en los puntos fuera del intervalo  $[0, 1]$ .

valores del parámetro  $\mu$ . Veremos que, si  $\mu$  se encuentra en el intervalo  $(1, 3)$ , el comportamiento del sistema es el mismo, y que cuando sobrepasa el 3, este comienza a comportarse de forma diferente. Esto se debe principalmente a que, como vimos en la Observación 3.24,  $F_\mu$  no tiene puntos periódicos para  $\mu \in (1, 3)$ .

**Proposición 3.26.** *Sea  $1 < \mu < 3$ . Tenemos que:*

1.  $F_\mu$  tiene un punto fijo atractor en  $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$  y un punto fijo repulsor en 0.
2. Si  $0 < x < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$ .

*Demostración.* La primera parte de la proposición es muy sencilla de demostrar: que 0 y  $p_\mu$  son puntos fijos se vio en la Proposición 3.23, y como  $F'_\mu(x) = \mu(1-2x)$ , entonces  $F'_\mu(0) = \mu$  y  $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$ . Luego, como  $1 < \mu < 3$ , por las Definiciones 3.17 y 3.20 se tiene que 0 es un punto fijo repulsor y  $p_\mu$  es un punto fijo atractor.

Para demostrar la segunda parte, veamos el comportamiento de  $p_\mu$  y  $F_\mu$  para distintos valores de  $\mu$ . Como  $F'_\mu(x) = \mu(1-2x)$  tenemos que  $F_\mu$  es estrictamente creciente en  $(0, 1/2)$  y estrictamente decreciente en  $(1/2, 1)$  para  $\mu > 0$ . Además,  $F''_\mu(x) = -2\mu < 0$  para todo  $x \in [0, 1]$  cuando  $\mu > 0$  y  $F'_\mu(1/2) = 0$ , por lo que tendremos un máximo en  $x = 1/2$  para cualquier valor de  $\mu > 0$ . Este análisis nos invita a estudiar el comportamiento de  $F_\mu$  dependiendo de si  $p_\mu$  está en el intervalo donde la función es creciente,  $(0, 1/2)$ , o decreciente,  $(1/2, 1)$ . Para estudiar esto, definimos una aplicación que nos permita analizar como varía el punto  $p_\mu$  respecto al parámetro  $\mu$ . En particular,

$$g(\mu) = \frac{\mu-1}{\mu} \Rightarrow g'(\mu) = \frac{\mu - (\mu-1)}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} > 0 \quad \forall \mu \neq 0.$$

Vemos que  $p_\mu$  aumenta a medida que aumenta  $\mu$  y por lo tanto sabemos que si  $\mu \in (1, 2]$  entonces  $p_\mu \in (0, 1/2]$ , y si  $\mu \in (2, 3)$  entonces  $p_\mu \in (1/2, 2/3)$ . En conclusión, dividiremos la demostración en los casos donde  $\mu \in (1, 2]$  y  $\mu \in (2, 3)$ .

Primero, sea  $\mu \in (1, 2]$  y, como vimos,  $p_\mu \in (0, 1/2]$ . Supongamos que  $x \in (0, p_\mu)$ , entonces como  $F_\mu$  es creciente y los puntos  $x = 0$  y  $x = p_\mu$  son puntos fijos, tendremos que la gráfica estará por encima de la diagonal, como bien se puede ver en la Figura 3.10 (izquierda). Por lo tanto, está claro que cada iteración estará más cerca de  $p_\mu$  y entonces  $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por otra parte, si  $x \in (p_\mu, 1/2]$  la gráfica estará por debajo de la diagonal y, como  $F_\mu$  es creciente, entonces  $F_\mu(x) \in (p_\mu, 1/2)$  y  $F_\mu(x) < x$ , es decir,

$$|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|.$$

Por lo tanto, de forma recursiva llegamos a que  $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Supongamos ahora que  $x \in (1/2, \hat{p}_\mu)$ , donde  $\hat{p}_\mu = 1 - p_\mu$  es el punto simétrico de  $p_\mu$  respecto a la recta  $x = 1/2$ , es decir, el punto tal que  $F_\mu(\hat{p}_\mu) = F_\mu(p_\mu) = p_\mu$ . Entonces,  $F_\mu(x) \in (p_\mu, 1/2)$  y aplicamos el argumento inmediatamente anterior. Por último, si  $x \in (\hat{p}_\mu, 1)$ , su imagen  $F_\mu(x) \in (0, p_\mu)$  y por tanto podemos volver al primer caso. Los casos donde  $x = p_\mu$  o  $x = \hat{p}_\mu$  son triviales al ser o bien un punto fijo o bien la preimagen de dicho punto fijo. También es obvio que, si  $\mu = 2$ , entonces  $p_\mu = 1/2$  y con los casos donde  $x \in (0, p_\mu)$  y  $x \in (\hat{p}_\mu, 1)$  ya estudiamos todo el intervalo unidad.

Sea ahora  $\mu \in (2, 3)$ , entonces tendremos que  $1/2 < p_\mu < 1$ . Denotemos nuevamente por  $\hat{p}_\mu = 1 - p_\mu$  el único punto del intervalo  $(0, 1/2)$  tal que  $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$ . Es obvio, como se puede ver en la Figura 3.10, que la imagen de los puntos en  $(\hat{p}_\mu, p_\mu)$  será mayor que  $p_\mu$ , en particular estará en  $(p_\mu, F_\mu(1/2))$ , ya que  $F_\mu$  tiene un máximo en  $x = 1/2$ . Además, para  $x > 1/2$  se tiene que  $F'_\mu(x) = \mu(1 - 2x) < 0$ , es decir,  $F_\mu$  es decreciente, por lo que la imagen de los puntos mayores que  $p_\mu$  será menor que este mismo. Teniendo todo esto en cuenta, llegamos a la conclusión de que la imagen de los puntos del intervalo  $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$  mediante  $F_\mu^2$  estará contenida en  $[1/2, p_\mu]$ . Igual que antes, de forma recursiva se llega a que  $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En el caso de que  $x < p_\mu$ , por ser  $F_\mu$  creciente y estar su gráfica por encima de la diagonal, sabemos que existirá un  $k > 0$  tal que  $F_\mu^k(x) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$ , y por lo tanto  $F_\mu^{k+n}(x) \rightarrow p_\mu$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para terminar, igual que en el primer caso, si  $x$  pertenece a  $(p_\mu, 1)$  entonces  $F_\mu(x)$  estará en  $(0, p_\mu)$ , por lo que se sigue el mismo razonamiento que anteriormente.

□

Dado todo esto, entendemos por completo el comportamiento de  $F_\mu$  cuando  $1 < \mu < 3$ . Cuando el valor de  $\mu$  sobrepasa el 3, las dinámicas de la familia cuadrática se complican progresivamente al ir apareciendo nuevos puntos periódicos de periodos superiores a 1. Cuando  $3 \leq \mu \leq 4$ , a pesar de ser su estudio más complejo, se sigue cumpliendo que  $F_\mu(I) \subset I$  ya que

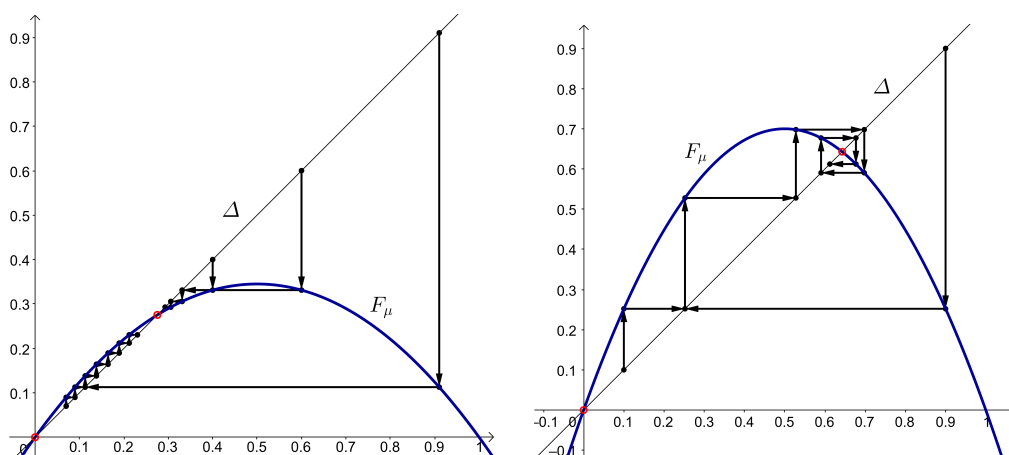


Figura 3.10: Análisis gráfico de  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  para  $1 < \mu \leq 2$  (izquierda) y  $2 < \mu < 3$  (derecha) en los puntos del intervalo  $(0, 1)$ .

en el máximo  $F_\mu(1/2) = \mu/4 \leq 1$ . No profundizaremos en este caso ya que a continuación nos centraremos en el que  $\mu > 4$ , donde la dinámica del sistema no se mantiene dentro de  $I$  para todos los puntos de dicho intervalo.

Ya hemos visto que, como consecuencia de la Proposición 3.25, todas las propiedades interesantes de  $F_\mu$  para  $\mu > 1$  se encuentran en el intervalo unidad  $I$ , por lo que sucede lo mismo cuando  $\mu > 4$ . Aun así, al contrario de lo que sucedía para  $\mu \in (1, 4]$ , no todos los puntos de  $I$  permanecen indefinidamente en  $I$  al iterar  $F_\mu$ : al evaluar la función en el máximo  $x = 1/2$ , tenemos que  $F_\mu(1/2) = \mu/4 > 1$ , lo que quiere decir que existe un intervalo de puntos alrededor de  $1/2$  que abandonan el intervalo  $I$  después de una iteración. A dicho intervalo le llamaremos  $A_0$ , y está claro que si  $x \in A_0$ , entonces  $F_\mu(x) > 1$  y  $F_\mu^2(x) < 0$ , por lo que  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Sea ahora  $A_1 = \{x \in I \mid F_\mu(x) \in A_0\}$  el conjunto de puntos que abandonan  $I$  en dos iteraciones. Similar a lo anterior, si  $x \in A_1$ , entonces  $F_\mu^2(x) > 1$  y  $F_\mu^3(x) < 0$ , por lo que  $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . De forma inductiva, llegamos a definir  $A_n = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in A_0\}$ . Escrito de otra forma,

$$A_n = \{x \in I \mid F_\mu^i(x) \in I \text{ para } i \leq n \text{ pero } F_\mu^{n+1}(x) \notin I\},$$

es decir,  $A_n$  consiste en los puntos de  $I$  que escapan de éste luego de  $n + 1$  iteraciones. Al igual que antes, si  $x \in A_n$ , entonces su órbita también tenderá a  $-\infty$ . En definitiva, nosotros queremos estudiar el comportamiento de los puntos que nunca abandonan  $I$ , esto es el conjunto que denotamos por  $\Lambda$  y definimos como

$$\Lambda = I \setminus \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right).$$

Analicemos ahora con más detalle la construcción de este conjunto  $\Lambda$  para ver de qué se trata realmente. Como se puede ver en la Figura 3.11 (izquierda), al ser  $A_0$  un intervalo abierto centrado en  $1/2$ ,  $I \setminus A_0$  estará formado por dos intervalos cerrados que llamaremos  $I_0$  (izquierda) e  $I_1$  (derecha), marcados en rojo. Se puede ver en dicha figura que  $F_\mu$  lleva ambos intervalos de forma monótona a  $I$ , siendo creciente en  $I_0$  y decreciente en  $I_1$ , es decir, que  $F_\mu(I_0) = F_\mu(I_1) = I$ . En consecuencia, existirá un par de intervalos abiertos, uno en  $I_0$  y otro en  $I_1$ , cuya imagen será  $A_0$ . Estos dos intervalos son precisamente los que componen  $A_1$ . En la Figura 3.11 (derecha) podemos ver como, efectivamente, los puntos de estos intervalos, denotados como  $A_{1_1}$  y  $A_{1_2}$  y marcados en verde, abandonan  $I$  al aplicarle  $F_\mu^2$ .

Consideremos ahora  $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ . Este conjunto está formado por cuatro intervalos cerrados marcados en rojo en la Figura 3.11 (derecha), donde cada uno de ellos tiene como imagen por  $F_\mu$  o bien  $I_0$  o bien  $I_1$ . Consecuentemente, y como se puede apreciar en dicha figura, su imagen por  $F_\mu^2$  será el intervalo  $I$  por completo. En esta gráfica vemos que, al igual que pasaba anteriormente, cada uno de los intervalos de  $I \setminus (A_0 \cup A_1)$  tiene a su vez un subintervalo que es llevado a  $A_0$  por medio de  $F_\mu^2$ . Estos cuatro intervalos se escapan de  $I$  con la tercera iteración de  $F_\mu$  y son los que conforman el conjunto  $A_2$ . Al igual que  $F_\mu$  es creciente en  $I_0$  y decreciente en  $I_1$ , se ve fácilmente en la Figura 3.11 (derecha) que  $F_\mu^2$  es alternativamente creciente y decreciente en los cuatro intervalos de  $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ .

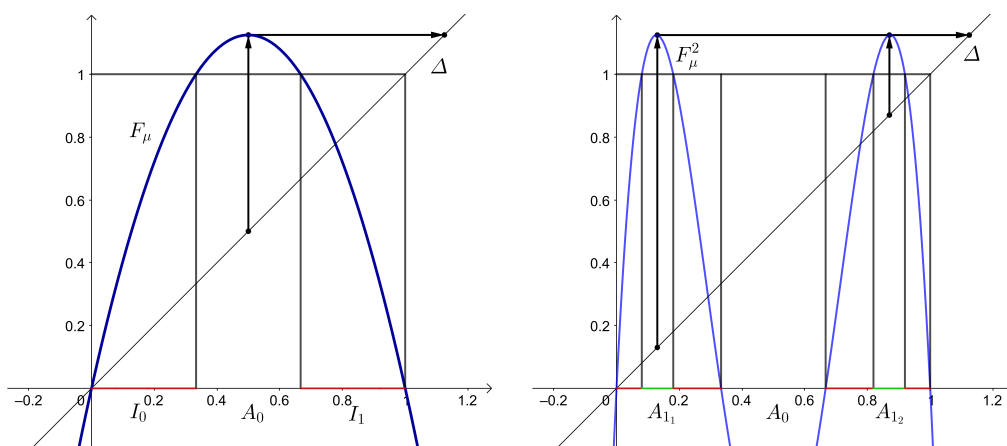


Figura 3.11: A la izquierda, gráfica de  $F_\mu$  representando el conjunto  $A_0$ . A la derecha, gráfica de  $F_\mu^2$  representando los conjuntos  $A_0$  y  $A_1$ . Ambos casos con  $\mu > 4$ .

Continuando con esta argumentación, podemos construir  $A_n$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Ya vimos que  $A_0$  constaba de un intervalo,  $A_1$  de dos y  $A_2$  de cuatro, por lo que recursivamente se llega a que  $A_n$  estará formado por  $2^n$  intervalos abiertos, que además serán disjuntos. Por lo tanto,

$I \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$  tendrá  $2^{n+1}$  intervalos cerrados disjuntos ya que

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Esto es fácilmente comprobable mediante inducción: sabemos que se cumple para  $k = 0$ , ya que  $2^0 = 1 = 2^1 - 1$ . Supongamos ahora, como hipótesis de inducción, que se cumple para un cierto  $k \in \mathbb{N}$ , es decir,  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ . Entonces,

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k + 2^{k+1} \stackrel{\text{H.I.}}{=} (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1,$$

por lo que queda probado. Por otra parte, también sabemos que  $F_\mu^{n+1}$  lleva cada uno de estos  $2^{n+1}$  intervalos en  $I$  de forma monótona, además de ser su gráfica alternativamente creciente y decreciente en dichos intervalos. Así, la gráfica de  $F_\mu^{n+1}$  tiene exactamente  $2^n$  “jorobas” en  $I$  (en el caso de  $F_\mu^2$ , como se ve en la Figura 3.11 (derecha), tiene dos “jorobas”), lo que implica que la gráfica de  $F_\mu^n$  cruza la línea  $y = x$  (la diagonal  $\Delta$ ) por lo menos  $2^n$  veces. Esto quiere decir que  $F_\mu^n$  tiene al menos  $2^n$  puntos fijos, o lo que es lo mismo, el conjunto de puntos periódicos de periodo  $n$  de  $F_\mu$  consiste en  $2^n$  puntos de  $I$ . En particular,  $F_\mu$  tiene puntos periódicos de cualquier periodo.

Cabe destacar que  $\Lambda$  es un conjunto no vacío. Esto se probará en la demostración del Teorema 3.29, al ver que los extremos de los intervalos  $A_k$  están en  $\Lambda$ .

La construcción de  $\Lambda$  nos puede recordar a la del conjunto ternario de Cantor, ya que ambos se construyen eliminando intervalos abiertos del interior de los ya existentes de forma sucesiva. Veamos la definición formal de conjunto de Cantor y una hipótesis añadida sobre  $\mu$  que es necesaria para que  $\Lambda$  lo sea.

**Definición 3.27.** Diremos que un conjunto es totalmente desconexo si no contiene intervalos, y que es perfecto si todo punto en él es punto de acumulación o punto límite de otro punto en el conjunto. Se dice que un conjunto es de Cantor si es cerrado, totalmente desconexo y un subconjunto perfecto de  $I$ .

**Ejemplo 3.28.** El ejemplo clásico de conjunto de Cantor es el conjunto ternario de Cantor, que como ya hemos dicho, se construye de forma análoga a nuestro conjunto  $\Lambda$ . Iniciamos con el intervalo  $I$  y eliminamos el segundo tercio, es decir, el intervalo abierto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (en inglés es habitual referirse a este conjunto como “*Cantor Middle-Thirds set*”, ya que realmente lo que estamos eliminando es el “*middle third*”, o tercio del medio). A continuación, eliminamos los centros de los dos intervalos resultantes, que son los intervalos  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  y  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ . Continuando con este proceso, llegaremos a haber eliminado  $2^n$  intervalos en el paso  $n$ -ésimo. Así, obtendremos un conjunto perfecto y totalmente desconexo, que además es compacto en  $\mathbb{R}$  y tiene medida nula. En la Figura 3.12 podemos ver seis iteraciones de este proceso, aunque obviamente el conjunto ternario de Cantor es imposible de representar gráficamente ya que su construcción no tiene fin.

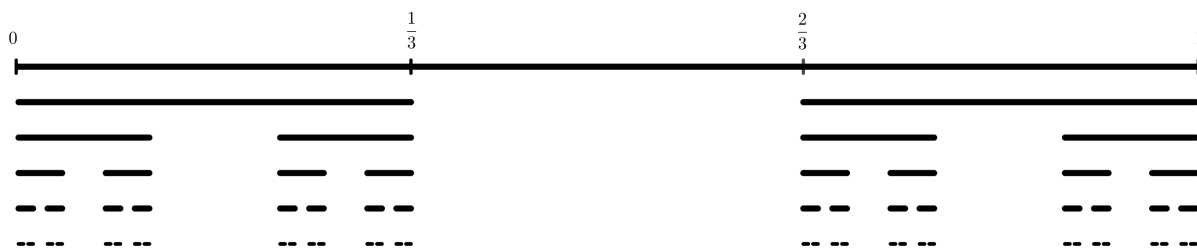


Figura 3.12: Conjunto ternario de Cantor en seis iteraciones.

Volvamos ahora a nuestro conjunto  $\Lambda$ : para asegurar que es un conjunto de Cantor, necesitaremos exigirle a  $\mu$  algo más que simplemente que sea mayor que 4. Necesitaremos que  $\mu$  sea suficientemente grande para que  $|F'_\mu(x)| > 1$  para todo  $x \in I_0 \cup I_1$ . Veamos entonces cuál es la condición que tiene que cumplir  $\mu$  para verificar lo establecido: primero de todo, notar que  $I_0 = [0, x_0]$  e  $I_1 = [x_1, 1]$ , siendo  $x_0, x_1 \in I$  tales que  $F_\mu(x_0) = F_\mu(x_1) = 1$ . Estos se obtienen resolviendo la ecuación

$$\mu x(1-x) = 1 \Leftrightarrow \mu x^2 - \mu x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu},$$

siendo el más pequeño  $x_0$  y el más grande  $x_1$ . Aplicamos entonces la condición de  $\mu$ : sea  $x \in I_0 \cup I_1$ ,

$$|F'_\mu(x)| > 1 \Leftrightarrow |\mu(1-2x)| > 1 \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{|1-2x|}.$$

Supongamos que  $x \in I_0$ , como  $x_0 < 1/2$  podemos deshacer el valor absoluto y continuar tal que

$$\begin{aligned} \mu > \frac{1}{1-2x} &\Leftrightarrow \mu > \frac{1}{1 - \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{\mu}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}} \Leftrightarrow \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1 \\ &\Leftrightarrow |\mu^2 - 4\mu| > 1 \stackrel{\mu > 4}{\Leftrightarrow} \mu^2 - 4\mu - 1 > 0 \Leftrightarrow \mu > \frac{4 + \sqrt{16 - 4(-1)}}{2} = 2 + \sqrt{5}, \end{aligned}$$

donde al resolver la ecuación de segundo grado nos quedamos con el signo “+” del “±” ya que  $\mu > 4$ . El caso en el que  $x \in I_1$  es análogo ya que, como  $x_1 > 1/2$ , tendremos que

$$\mu > \frac{1}{2x-1} \Leftrightarrow \mu > \frac{1}{\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{\mu} - 1} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}},$$

es decir, llegamos a algo idéntico a lo hecho anteriormente. En conclusión, para los valores de  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , existe  $\lambda > 1$  tal que  $|F'_\mu(x)| > \lambda$  para todo  $x \in \Lambda$ . Por la regla de la cadena, se puede ver que

$$|(F_\mu^n)'(x)| = |F'_\mu(F_\mu^{n-1}(x))(F_\mu^{n-1})'(x)| = \dots = |F'_\mu(F_\mu^{n-1}(x))F'_\mu(F_\mu^{n-2}(x)) \dots F'_\mu(x)| > \lambda^n,$$

ya que la imagen de un punto de  $\Lambda$  se mantendrá en dicho conjunto para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Establecida la condición de  $\mu$ , enunciemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.29.** *Si  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , entonces  $\Lambda$  es un conjunto de Cantor.*

*Demostración.* Primero de todo, veamos que  $\Lambda$  no contiene intervalos. Supongamos lo contrario, entonces podemos escoger  $x, y \in \Lambda$ ,  $x \neq y$ , tal que el intervalo cerrado  $[x, y] \subset \Lambda$ . Por lo visto anteriormente,  $|(F_\mu^n)'(\alpha)| > \lambda^n$  para todo  $\alpha \in [x, y]$ . Escogemos  $n$  tal que  $\lambda^n |x - y| > 1$ , y por el Teorema de Valor Medio se sigue que  $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| \geq \lambda^n |x - y| > 1$ , lo que implica que por lo menos uno de  $F_\mu^n(x)$  o  $F_\mu^n(y)$  está fuera de  $I$ . Esto es una contradicción, así que concluimos que  $\Lambda$  no contiene intervalos, o lo que es lo mismo, que es totalmente disconexo.

Por ser  $\Lambda$  la intersección de intervalos cerrados encajados,  $\Lambda$  es cerrado. Probemos ahora que es perfecto. Para empezar, cabe notar que los extremos de cualquier  $A_k$  están en  $\Lambda$ : efectivamente, estos puntos eventualmente acaban en el punto fijo 0, ya que un punto es extremo de  $A_k$  si cumple que  $F_\mu^{k+1}(x) = 1$ , y para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_\mu^n(1) = 0$ . Obviamente,  $F_\mu^n(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y por lo tanto nunca se abandona el intervalo  $I$ . Ahora, si existiese un punto  $p \in \Lambda$  que fuese aislado, todo punto cercano a  $p$  debería abandonar  $I$  en alguna iteración de  $F_\mu$ , es decir, pertenecerían a algún  $A_k$ . Entonces, o bien existe una sucesión de extremos de  $A_k$  convergente a  $p$ , o bien todo punto en un entorno perforado de  $p$  tiene imagen fuera de  $I$  mediante alguna potencia de  $F_\mu$ . En el primer caso ya acabaríamos, porque como hemos visto estos puntos están en  $\Lambda$  y por lo tanto  $p$  sería un punto de acumulación de  $\Lambda$ . En el segundo, podemos asumir que  $F_\mu^n$  lleva  $p$  a 0 y el resto de puntos de su entorno en el eje real negativo (se considera el  $n$  más pequeño tal que la imagen de todo punto del entorno perforado de  $p$  ya no esté en  $I$ ). Entonces,  $F_\mu^n$  tiene un máximo en  $p$ , es decir,  $(F_\mu^n)'(p) = 0$ . Por la regla de la cadena, deberíamos tener que  $F_\mu'(F_\mu^i(p)) = 0$  para algún  $i < n$ , y por lo tanto  $F_\mu^i(p) = 1/2$ . Pero si esto es cierto,  $F_\mu^{i+1}(p) \notin I$  y entonces  $F_\mu^n(p) \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , lo cual es una contradicción con que  $F_\mu^n(p) = 0$ . Como la imagen del resto de puntos de su entorno es negativa, por continuidad  $F_\mu^n(p) < 0$  y luego  $p \notin \Lambda$ . En definitiva,  $\Lambda$  no tiene puntos aislados, o equivalentemente, es un conjunto perfecto.  $\square$

*Observación 3.30.* El teorema anterior también es cierto para  $\mu > 4$ . La demostración en este caso es bastante más compleja, por lo que no entraremos en ella, pero se puede ver en [12].

Llegados a este punto, hemos entendido el comportamiento de las órbitas de  $F_\mu$  cuando  $\mu > 4$ : un punto o bien tiende a  $-\infty$ , o bien su órbita al completo se encuentra en  $\Lambda$ . En el caso concreto de que  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , hemos visto que  $|F_\mu'(x)| > 1$  para todo  $x \in I_0 \cup I_1$ , lo cual se cumple también para todo  $x \in \Lambda$  (ya que  $\Lambda \subset I_0 \cup I_1$ ). Esta condición recuerda a la de la Definición 3.10, donde introdujimos los puntos hiperbólicos, excepto que se exige en todo un conjunto y no solo en un punto periódico. Esto motiva la definición de conjunto hiperbólico:

**Definición 3.31.** Diremos que un conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  es un conjunto hiperbólico repulsor (respectivamente atractor) para  $f$  si  $\Gamma$  es cerrado, acotado e invariante bajo  $f$  y existe un  $N > 0$  tal que  $|(f^n)'(x)| > 1$  (respectivamente  $< 1$ ) para todo  $n \geq N$  y todo  $x \in \Gamma$ .

Por supuesto, el conjunto de Cantor  $\Lambda$  para la aplicación cuadrática  $F_\mu$  cuando  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  es un conjunto hiperbólico repulsor con  $N = 1$ .

### 3.5. Dinámica Simbólica

El objetivo de esta sección será introducir un espacio cuyos puntos sean sucesiones infinitas de 0's y 1's. Luego, definiremos una métrica en este espacio y una aplicación que nos será útil más tarde a la hora de introducir el concepto de caos.

**Definición 3.32.** El conjunto  $\Sigma_2 = \{s = (s_0s_1s_2\dots) | s_j = 0 \text{ o } 1\}$  es llamado el espacio secuencial en los símbolos 0 y 1.

En general, se puede considerar el espacio  $\Sigma_n$  consistiendo en sucesiones infinitas de enteros entre 0 y  $n - 1$ , aunque nosotros trabajaremos principalmente con  $n = 2$ . Los elementos de  $\Sigma_2$  son cadenas infinitas de enteros, en particular 0's y 1's, como por ejemplo  $(000\dots)$  o  $(0101\dots)$ . Convirtamos ahora  $\Sigma_2$  en un espacio métrico: dadas dos sucesiones  $s = (s_0s_1s_2\dots)$  y  $t = (t_0t_1t_2\dots)$ , definimos la distancia entre ellas como

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Debido a que  $|s_i - t_i|$  es o bien 0 o bien 1, se tiene que

$$0 \leq \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \frac{1}{2^i} \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

y como la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

converge (serie geométrica con razón  $1/2$ ), entonces por el criterio de comparación se sigue que nuestra serie inicial es convergente. Por ejemplo, si  $s = (000\dots)$  y  $t = (111\dots)$ , entonces la distancia será igual que la serie "mayorante", es decir,  $d(s, t) = 2$ . Si  $r = (1010\dots)$ , entonces la serie será geométrica y

$$d(s, r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Probemos entonces que, efectivamente,  $d$  convierte a  $\Sigma_2$  en un espacio métrico.

**Proposición 3.33.**  $d$  es una métrica en  $\Sigma_2$ .

*Demostración.* Claramente,  $d(s, t) \geq 0$  para todo  $s, t \in \Sigma_2$  por ser cada elemento de la serie no negativo. También es obvio que  $d(s, t) = 0$  si y solo si  $s_i = t_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , es decir, todos los elementos son 0. Por último, dados  $s, t, r \in \Sigma_2$ , por la desigualdad triangular tenemos que

$$|r_i - t_i| \leq |r_i - s_i| + |s_i - t_i| \Rightarrow d(r, t) \leq d(r, s) + d(s, t).$$

□

El siguiente resultado nos dará una condición para considerar que dos sucesiones están cerca la una de la otra.

**Proposición 3.34.** Sean  $s, t \in \Sigma_2$  y  $n \in \mathbb{N}$  fijo.

- Si  $s_i = t_i$  para todo  $i \leq n$ , entonces  $d(s, t) \leq 1/2^n$ .
- Si  $d(s, t) < 1/2^n$ , entonces  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$ .

*Demostración.* Si  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$ , entonces

$$\begin{aligned} d(s, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2 - \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \\ &= 2 - \left( \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 - \left( 2 - \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $s_j \neq t_j$  para algún  $j \leq n$ , entonces

$$d(s, t) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

y por lo tanto, si  $d(s, t) < 1/2^n$ , entonces  $s_i = t_i$  para todo  $i \leq n$ . □

La importancia de esta proposición es que podemos decidir rápidamente si dos sucesiones están cerca, simplemente comprobando que sus primeros elementos coinciden. A continuación definiremos la aplicación *shift*, que se podría decir que es el elemento que más nos interesa de la dinámica simbólica.

**Definición 3.35.** Definimos la aplicación *shift*  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  como  $\sigma(s_0s_1s_2\dots) = (s_1s_2s_3\dots)$ .

Coloquialmente, esta aplicación lo que hace es eliminar el primer elemento de la sucesión y mover el resto un espacio hacia la izquierda. Veamos ahora que, en la métrica definida anteriormente,  $\sigma$  es continua.

**Proposición 3.36.**  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  es una aplicación continua.

*Demostración.* Sean  $\varepsilon > 0$  y  $s = (s_0s_1s_2\dots)$ , escogemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^n < \varepsilon$ . Sea  $\delta = 1/2^{n+1}$ . Si  $t = (t_0t_1t_2\dots)$  satisface que  $d(s, t) < \delta$ , entonces por la Proposición 3.34 tenemos que  $s_i = t_i$  para  $i \leq n + 1$ . Por lo tanto, los elementos  $i$ -ésimos de  $\sigma(s)$  y  $\sigma(t)$  coinciden para  $i \leq n$ . Luego, también por la Proposición 3.34, se tiene que  $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq 1/2^n < \varepsilon$ . □

Veamos ahora algunas propiedades interesantes de la aplicación *shift*, empezando con dos relacionadas con los puntos periódicos de dicha aplicación.

**Proposición 3.37.** *La aplicación  $\sigma$  tiene  $2^n$  puntos periódicos de periodo  $n$ .*

*Demostración.* Primero de todo, los puntos periódicos de periodo  $n$  de  $\sigma$  son aquellos que están compuestos por sucesiones finitas que se repiten infinitamente, de la forma

$$\tau_n = (s_0 \dots s_{n-1} s_0 \dots s_{n-1} s_0 \dots s_{n-1} \dots).$$

Así, al aplicarle  $\sigma$   $n$  veces a  $\tau_n$ , el resultado será el propio  $\tau_n$ . Dicho esto, al solo haber dos posibilidades para los valores de  $s_i$ , resulta trivial que para cada  $n$  habrá  $2^n$  puntos de la forma descrita anteriormente, ya que son las posibles sucesiones de dimensión  $n$  resultado de combinar 0's y 1's.  $\square$

*Observación 3.38.* De la proposición anterior también se sigue que  $\sigma$  tiene únicamente dos puntos fijos (puntos periódicos de periodo 1): (000...) y (111...). Asimismo, los puntos periódicos de periodo 2 serán dichos puntos y además (101010...) y (010101...). También existen infinidad de puntos que serán fijos o periódicos a partir de cierta iteración, como por ejemplo  $(s_0 \dots s_n 1111 \dots)$  o cualquiera que, a partir de un elemento, consista en una sucesión que se repite, como puede ser  $(1111 s_0 \dots s_n s_0 \dots s_n \dots)$ , respectivamente.

**Proposición 3.39.** *El conjunto de puntos periódicos de  $\sigma$  es denso en  $\Sigma_2$ .*

*Demostración.* Veamos que, dado un punto arbitrario  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ , podemos construir una sucesión de puntos periódicos  $\tau_n$  que converja a  $s$ . Definimos la sucesión  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que cada elemento  $\tau_n = (s_0 \dots s_n s_0 \dots s_n \dots)$  está compuesto por la repetición de los primeros  $n$  términos de  $s$ . Está claro que cada  $\tau_n$  es un punto periódico de periodo  $n$  y, por la Proposición 3.34,  $d(\tau_n, s) \leq 1/2^n$ . Por lo tanto,  $\tau_n \rightarrow s$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo que hemos probado el resultado.  $\square$

A continuación probamos una propiedad relacionada con puntos no periódicos: que la aplicación *shift* tiene una órbita densa, o lo que es lo mismo, que es una aplicación topológicamente transitiva.

**Proposición 3.40.** *Existe una órbita de  $\sigma$  densa en  $\Sigma_2$ .*

*Demostración.* Otra forma de enunciar esta proposición es decir que existen puntos en  $\Sigma_2$  cuya órbita está arbitrariamente cerca de cualquier sucesión en  $\Sigma_2$ . Para ver esto, consideramos

$$s^* = ( \underbrace{0 \ 1}_{\text{bloque 1}} \mid \underbrace{00 \ 01 \ 10 \ 11}_{\text{bloque 2}} \mid \underbrace{000 \ 001 \ \dots}_{\text{bloque 3}} \mid \dots ).$$

Este punto (no periódico) de  $\Sigma_2$  se construye añadiendo infinitamente sucesiones que llamaremos bloques, donde el bloque  $n$  consistirá en todas las combinaciones posibles de  $n$  elementos de 0's y 1's. Luego, alguna iteración de  $\sigma$  aplicada a  $s^*$  nos dará una sucesión que coincidirá con cualquier punto dado de  $\Sigma_2$  en un número posiciones arbitrariamente grande.  $\square$

Vistas algunas propiedades de la aplicación *shift* con el objetivo de entender mejor su dinámica, en la próxima sección veremos la relación entre esta aplicación y la familia cuadrática  $F_\mu$  cuando  $\mu > 4$ .

### 3.6. Relación entre $\sigma$ y $F_\mu$

El objetivo de esta sección será entender la relación entre la aplicación *shift*  $\sigma$  y la familia cuadrática  $F_\mu$  cuando  $\mu$  es suficientemente grande. Empecemos recordando que todo punto de  $\mathbb{R}$  tiende a  $-\infty$  bajo iteraciones de  $F_\mu$ , excepto aquellos que pertenecen al conjunto de Cantor  $\Lambda$ . Hemos visto en la Sección 3.4 que  $\Lambda \subset I_0 \cup I_1$  (intervalos representados en la Figura 3.11 (izquierda)), por lo que si  $x \in \Lambda$  entonces cada uno de los puntos de su órbita estarán o bien en un intervalo o en el otro. Para tener una idea de cómo son las órbitas de un punto bajo  $F_\mu$ , definimos lo siguiente para indicarnos si un punto está en  $I_0$  o  $I_1$ .

**Definición 3.41.** Definimos el itinerario de  $x$  como la sucesión  $S(x) = s_0s_1s_2\dots$  donde  $s_j = 0$  si  $F_\mu^j(x) \in I_0$  y  $s_j = 1$  si  $F_\mu^j(x) \in I_1$ .

Es decir, el itinerario de un punto  $x$  es una sucesión infinita de 0's y 1's, o lo que es lo mismo, un punto del espacio secuencial  $\Sigma_2$ . Si pensamos en  $S$  como una aplicación que lleva  $\Lambda$  en  $\Sigma_2$ , podemos ver que tiene algunas propiedades interesantes.

**Teorema 3.42.** Si  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , entonces  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Empecemos viendo que  $S$  es una aplicación inyectiva: supongamos que existen  $x, y \in \Lambda$  tales que  $S(x) = S(y)$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_\mu^n(x)$  y  $F_\mu^n(y)$  caen en la misma mitad de  $I$ . Esto implica que  $F_\mu$  es monótona en el intervalo entre  $F_\mu^n(x)$  y  $F_\mu^n(y)$ , y consecuentemente todos los puntos de este intervalo se mantienen en  $I_0 \cup I_1$ . Esto es una contradicción con el hecho de que  $\Lambda$  es totalmente desconexo, o dicho de otra forma, que es un conjunto de Cantor.

Para ver que  $S$  es sobreyectiva, introducimos la siguiente notación: dado  $J \subset I$  un intervalo cerrado, denotamos la preimagen  $n$ -ésima de  $J$  como

$$F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in J\}.$$

En particular,  $F_\mu^{-1}(J)$  denota la preimagen clásica de  $J$ . Podemos ver en la Figura 3.13 que, al ser  $J \subset I$  un intervalo cerrado (marcado en rojo), entonces  $F_\mu^{-1}(J)$  consiste en dos subintervalos, uno contenido en  $I_0$  y otro en  $I_1$  (marcados en verde).

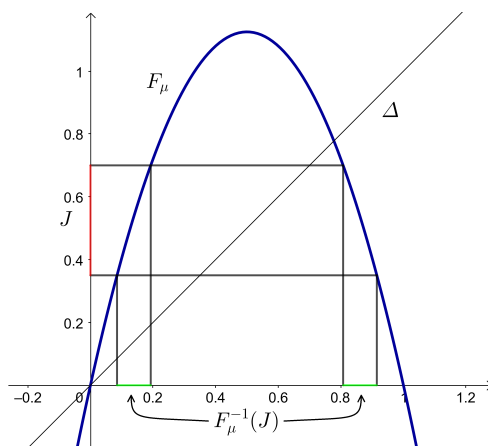


Figura 3.13: Gráfica de  $F_\mu$  con  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  representando la preimagen  $F_\mu^{-1}(J)$  del intervalo cerrado  $J$ .

Sea ahora  $s = s_0 s_1 s_2 \dots$ . Tenemos que buscar un  $x \in \Lambda$  tal que  $S(x) = s$ . Para ello definimos

$$I_{s_0 \dots s_n} = \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\}.$$

Nótese que este conjunto también se puede definir como

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}) = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}).$$

Veamos que  $I_{s_0 \dots s_n}$  forma una sucesión de intervalos cerrados encajados no vacíos cuando  $n \rightarrow \infty$ . Primero de todo, por inducción se puede ver que  $I_{s_0 \dots s_n}$  es cerrado no vacío: para  $n = 0$  está claro que, como  $s_0 \in \{0, 1\}$ , además de ser cerrados  $I_0 \neq \emptyset \neq I_1$ . Utilizando la segunda definición, podemos tomar como hipótesis de inducción que  $I_{s_1 \dots s_n}$  es un intervalo cerrado no vacío. Luego, por lo que comentamos anteriormente y se puede ver en la Figura 3.13,  $F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$  constará de dos intervalos cerrados, uno en  $I_0$  y otro en  $I_1$ . Por lo tanto,  $I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$  es un intervalo cerrado no vacío. Ver que estos intervalos son encajados es fácil pues, al ser no vacíos, no queda otra opción que

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}.$$

Luego, concluimos que

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$$

es una intersección no vacía de intervalos cerrados encajados. Si  $x$  pertenece a dicha intersección, entonces se tendrá que  $x \in I_{s_0}$ ,  $F_\mu(x) \in I_{s_1}$ , etc., es decir, que  $S(x) = s_0s_1s_2\dots = s$ , por lo que hemos probado que  $S$  es sobreyectiva.

Del hecho de que  $S$  sea inyectiva se sigue que  $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0\dots s_n}$  consiste en un único punto. En particular, se tiene que  $\text{diam}(I_{s_0\dots s_n}) = \sup\{d(x, y) | x, y \in I_{s_0\dots s_n}\} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Para finalizar, veamos que  $S$  es continua. Sea  $x \in \Lambda$ , suponemos que  $S(x) = s_0s_1s_2\dots$ , y sea  $\varepsilon > 0$ , escogemos un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^n < \varepsilon$ . Consideremos los subintervalos cerrados  $I_{t_0\dots t_n}$  para todas las posibles combinaciones  $t_0\dots t_n$ . Estos subintervalos son todos disjuntos y  $\Lambda$  está contenido en su unión. En total, hay  $2^{n+1}$  subintervalos y  $I_{s_0\dots s_n}$  es uno de ellos. Por lo tanto, podemos elegir  $\delta > 0$  tal que  $y \in \Lambda$  y  $|x - y| < \delta$ , lo que implica que  $y \in I_{s_0\dots s_n}$ . Luego,  $S(x)$  coincide con  $S(y)$  en los primeros  $n + 1$  términos y, por la Proposición 3.34, se tiene que

$$d(S(x), S(y)) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

lo que prueba la continuidad de  $S$ . Análogamente se puede ver que  $S^{-1}$  es continua.

Por lo tanto, como  $S$  es una aplicación biyectiva, continua y con inversa continua entonces es un homeomorfismo.  $\square$

Esta proposición es de suma importancia porque acabamos de probar que, como conjuntos,  $\Lambda$  y  $\Sigma_2$  son iguales. A continuación probaremos lo más relevante de esta sección: que la aplicación  $S$  nos da una equivalencia entre las dinámicas de  $F_\mu$  en  $\Lambda$  y  $\sigma$  en  $\Sigma_2$ .

**Teorema 3.43.** *Se cumple que  $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$ .*

*Demostración.* Hemos visto que un punto  $x \in \Lambda$  está definido únicamente por la intersección de intervalos encajados

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0\dots s_n}$$

determinada por el itinerario  $S(x)$ . También sabemos que

$$I_{s_0\dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}),$$

por lo que su imagen se podrá escribir como

$$F_\mu(I_{s_0\dots s_n}) = I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap F_\mu^{-(n-1)}(I_{s_n}) = I_{s_1\dots s_n},$$

ya que  $F_\mu(I_{s_0}) = I$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (S \circ F_\mu)(x) &= S(F_\mu(x)) = S(F_\mu(\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0\dots s_n})) = S(\bigcap_{n \geq 1} I_{s_1\dots s_n}) \\ &= s_1s_2s_3\dots = \sigma(s_0s_1s_2s_3) = \sigma(S(x)) = (\sigma \circ S)(x). \end{aligned}$$

$\square$

*Observación 3.44.* Remontándonos a la Definición 1.12, es trivial adaptarla para el caso en el que estamos trabajando: sean  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$  dos aplicaciones que definen dos sistemas dinámicos discretos. Entonces, diremos que son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ . El homeomorfismo  $h$  se llamará conjugación topológica.

**Corolario 3.45.** *La aplicación shift  $\sigma$  y la familia cuadrática  $F_\mu$  (para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ ) son topológicamente conjugadas. Su conjugación topológica será la aplicación itinerario  $S$ .*

Las aplicaciones que son topológicamente conjugadas tienen dinámicas completamente equivalentes. Por ejemplo, si  $f$  es topológicamente conjugada a  $g$  mediante  $h$ , se tiene que si  $p$  es un punto fijo de  $f$ ,  $h(p)$  lo será de  $g$ . Efectivamente, es obvio que  $h(p) = h(f(p)) = g(h(p))$ . De manera similar se ve que  $h$  forma una correspondencia inyectiva entre los puntos periódicos de periodo  $n$  de  $f$  y de  $g$ . En particular, como  $F_\mu$  es topológicamente conjugada a  $\sigma$ , se tiene que la familia cuadrática cumple las mismas propiedades que ya vimos para la aplicación *shift* en la sección anterior.

**Teorema 3.46.** *Sea  $F_\mu = \mu x(1 - x)$  con  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ . Entonces:*

1.  $F_\mu$  tiene  $2^n$  puntos periódicos de periodo  $n$ .
2. El conjunto de puntos periódicos de  $F_\mu$  es denso en  $\Lambda$ .
3. Existe una órbita de  $F_\mu$  densa en  $\Lambda$ .

A pesar de que calcular los  $2^n$  puntos periódicos de periodo  $n$  de  $F_\mu$  o las órbitas de los puntos de  $\Lambda$  puede ser un trabajo extremadamente complicado, la conjugación topológica nos permite asegurar que existen y la dinámica simbólica nos da una idea de su complejidad. Dichas cuestiones justifican el esfuerzo realizado para probar que la aplicación *shift* es un modelo preciso de la familia cuadrática.

## 3.7. Caos

Para finalizar, el objetivo de esta sección será definir el concepto de caos y dar algún ejemplo de sistemas dinámicos discretos caóticos. En particular, veremos que la familia cuadrática con la que hemos estado trabajando es caótica cuando el valor del parámetro  $\mu$  es suficientemente grande. Existen muchas definiciones diferentes de caos, pero nosotros nos centraremos en la que propuso Devaney en 1989 en [6]. Para ello, primero introduciremos algunos conceptos que nos ayudarán más tarde en nuestro cometido.

**Definición 3.47.** Una aplicación  $f : J \rightarrow J$  es topológicamente transitiva si para cualquier par de conjuntos abiertos  $U, V \subset J$  existe  $k > 0$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Intuitivamente, una aplicación topológicamente transitiva es aquella que, al iterar sus puntos, estos eventualmente se mueven de un entorno arbitrariamente pequeño a cualquier otro. Consecuentemente, el sistema dinámico no se puede dividir en dos conjuntos abiertos disjuntos e invariantes bajo la aplicación. Nótese que si una aplicación posee una órbita densa en el espacio donde está definida, entonces claramente es topológicamente transitiva. Para que el recíproco sea cierto se requieren hipótesis sobre el conjunto de definición en las que no profundizaremos, pero cuya demostración se puede ver en [19] (este resultado fue obtenido por primera vez en 1920 por Birkhoff en [2]).

**Definición 3.48.** Una aplicación  $f : J \rightarrow J$  tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales si existe  $\delta > 0$  tal que, para cada  $x \in J$  y cualquier entorno  $U$  de  $x$ , entonces existe  $y \in U$  y  $n \geq 0$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ .

Intuitivamente, una aplicación tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales si para cualquier punto  $x$  existe otro arbitrariamente cerca de él que, bajo iteración, eventualmente se aleja a una distancia de por lo menos  $\delta$ . Conviene aclarar que no todos los puntos cercanos a  $x$  necesitan alejarse de él bajo iteración, simplemente debe existir uno que lo haga por cada entorno de  $x$ . Las aplicaciones con dependencia sensible de las condiciones iniciales imposibilitan la computación numérica de sus órbitas, ya que cualquier error por redondeo, aunque sea mínimo, se irá magnificando a medida que se itera hasta obtener una órbita que no se asemejará en nada con la real.

**Ejemplo 3.49.** La aplicación cuadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  con  $\mu > 2 + \sqrt{5}$  es topológicamente transitiva y posee dependencia sensible de las condiciones iniciales en  $\Lambda$ . El hecho de que  $F_\mu$  es transitiva es obvio ya que, por el Teorema 3.46,  $F_\mu$  tiene una órbita densa en  $\Lambda$ . Para ver lo segundo, escogemos  $\delta$  menor que el diámetro de  $A_0$ , es decir, el espacio entre los intervalos  $I_0$  e  $I_1$ , como se podía ver en la Figura 3.11 (izquierda, aquello que no está indicado de rojo). Sean  $x, y \in \Lambda$ , si  $x \neq y$  entonces  $S(x) \neq S(y)$ , por lo que los itinerarios de ambos deben diferenciarse en por lo menos un término, digamos que el  $n$ -ésimo. Esto significa que  $F_\mu^n(x)$  y  $F_\mu^n(y)$  caen en lados opuestos de  $A_0$ , y por lo tanto

$$|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta.$$

Dadas estas dos nociones previas, ya podemos definir el concepto de sistema caótico.

**Definición 3.50.** Sea  $V$  un conjunto. La aplicación  $f : V \rightarrow V$  es caótica en  $V$  si:

1.  $f$  tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

2.  $f$  es topológicamente transitiva.
3.  $f$  tiene un conjunto de puntos periódicos denso en  $V$ .

Informalmente, se podría decir que una aplicación es caótica si posee estas tres propiedades: es impredecible debido a la dependencia sensible de las condiciones iniciales; no se puede dividir en dos conjuntos abiertos e invariantes que no interactuen entre ellos bajo iteraciones de  $f$  debido a la transitividad topológica; y existe un elemento de regularidad en medio de la aleatoriedad, que se da gracias a que los puntos periódicos son densos.

**Ejemplo 3.51.** La aplicación  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $f(\theta) = 2\theta$  es caótica. Está claro que, como la distancia entre dos puntos se dobla en cada iteración de  $f$ , cualquier punto cercano a otro acabará arbitrariamente lejos de él, es decir,  $f$  tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. De forma similar se justifica la transitividad topológica, ya que cualquier arco de  $\mathbb{S}^1$  (es decir, cualquier entorno de un punto de  $\mathbb{S}^1$ ) acaba cubriendo todo  $\mathbb{S}^1$  bajo alguna iteración de  $f$ , y en particular cualquier otro arco. Por otra parte, es fácil ver que los puntos periódicos de periodo  $n$  de  $f$  son de la forma  $\theta_{n,k} = e^{\frac{2\pi ki}{2^n - 1}}$  con  $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ , es decir, las raíces  $(2^n - 1)$ -ésimas de la unidad, por lo que para cualquier arco de  $\mathbb{S}^1$  va a existir por lo menos un punto periódico se encuentre en él.

La aplicación del ejemplo anterior posee una forma de dependencia sensible de las condiciones iniciales muy fuerte, cumpliendo más requisitos que los que pedíamos. Este fenómeno se llamará expansividad, y difiere de la dependencia sensible en que, al iterar bajo  $f$ , todos los puntos cercanos a otro eventualmente se alejan lo suficiente de él.

**Definición 3.52.** Una aplicación  $f : J \rightarrow J$  es expansiva si existe  $\nu > 0$  tal que, para cualquier  $x, y \in J$ ,  $x \neq y$ , existe  $n \geq 0$  tal que  $|f^n(x) - f^n(y)| > \nu$ .

**Ejemplo 3.53.** Las aplicaciones de la familia cuadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  son caóticas en  $\Lambda$  cuando  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ . En el Ejemplo 3.49 hemos visto que  $F_\mu$  es topológicamente transitiva y depende sensiblemente de las condiciones iniciales, y en el Teorema 3.46, que sus puntos periódicos son densos en  $\Lambda$ .

En este ejemplo hemos visto como el caos está confinado a un subconjunto pequeño de  $I$ , el conjunto de Cantor  $\Lambda$ . A continuación veremos una región mucho más grande donde la aplicación cuadrática es caótica para ciertos valores de  $\mu$ .

**Ejemplo 3.54.** La aplicación cuadrática  $F_4(x) = 4x(1 - x)$  es caótica en el intervalo  $I = [0, 1]$ . Para verlo, utilizaremos una técnica muy útil que se puede aplicar a más de una aplicación caótica.

Sea  $g(\theta) = 2\theta$  la aplicación en  $\mathbb{S}^1$  del Ejemplo 3.51. Definimos las aplicaciones  $h_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow [-1, 1]$  como  $h_1(\theta) = \cos(\theta)$ , es decir, la proyección de  $\mathbb{S}^1$  en el eje  $X$ , y  $q : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  como  $q(x) = 2x^2 - 1$ . Entonces,

$$(h_1 \circ g)(\theta) = h_1(2\theta) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = q(\cos(\theta)) = (q \circ h_1)(\theta),$$

por lo que  $h_1$  conjuga  $g$  con  $q$  (como  $h_1$  no es inyectiva no será un homeomorfismo, por lo que la conjugación no es topológica). Por otra parte, si definimos  $h_2 : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  como  $h_2(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$ , entonces por un lado

$$\begin{aligned} (F_4 \circ h_2)(x) &= F_4\left(\frac{1}{2}(1 - x)\right) = 4\left(\frac{1}{2}(1 - x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}(1 - x)\right) \\ &= 2(1 - x)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) = (1 - x)(1 + x) = 1 - x^2, \end{aligned}$$

y por otro

$$(h_2 \circ q)(x) = h_2(2x^2 - 1) = \frac{1}{2}(1 - (2x^2 - 1)) = \frac{1}{2}(2 - 2x^2) = 1 - x^2.$$

Por lo tanto, como  $h_2$  sí es un homeomorfismo,  $F_4$  y  $q$  son topológicamente conjugadas. Como resultado de todo esto, tenemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^1 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_1 \\ [-1, 1] & \xrightarrow{q} & [-1, 1] \\ h_2 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ [0, 1] & \xrightarrow{F_4} & [0, 1]. \end{array}$$

De nuevo, no estamos probando que  $g$  y  $F_4$  sean topológicamente conjugadas, ya que  $h_1$  no es un homeomorfismo: en este caso diremos que son semiconjugadas. Veamos ahora que se cumplen las hipótesis de la Definición 3.50.

Para ver que  $F_4$  es topológicamente transitiva, dados dos intervalos abiertos  $U, V \subset I$ , podemos escoger  $\hat{U}, \hat{V} \subset \mathbb{S}^1$  tal que sus proyecciones en  $I$  mediante  $h_2 \circ h_1$  sean  $U$  y  $V$ , respectivamente. Como  $g$  es topológicamente transitiva, existe un  $k > 0$  tal que  $g^k(\hat{U}) \cap \hat{V} \neq \emptyset$ . Ahora bien, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} (h_1 \circ g^k)(x) &= h_1(g^k(x)) = h_1(g(g^{k-1}(x))) = (h_1 \circ g)(g^{k-1}(x)) = (q \circ h_1)(g^{k-1}(x)) \\ &= q(h_1(g^{k-1}(x))) = q((q \circ h_1)(g^{k-2}(x))) = q^2(h_1(g^{k-2}(x))) = \dots = (q^k \circ h_1)(x), \end{aligned}$$

y análogamente se ve que

$$(h_2 \circ q^k)(x) = (F_4^k \circ h_2)(x).$$

Por lo tanto, tendremos que

$$\begin{aligned} g^k(\hat{U}) \cap \hat{V} \neq \emptyset &\Rightarrow (h_2 \circ h_1)(g^k(\hat{U})) \cap (h_2 \circ h_1)(\hat{V}) = ((h_2 \circ h_1) \circ g^k)(\hat{U}) \cap V \\ &= (h_2 \circ (h_1 \circ g^k))(\hat{U}) \cap V = (h_2 \circ (q^k \circ h_1))(\hat{U}) \cap V = ((h_2 \circ q^k) \circ h_1)(\hat{U}) \cap V \\ &= ((F_4^k \circ h_2) \circ h_1)(\hat{U}) \cap V = F_4^k((h_2 \circ h_1)(\hat{U})) \cap V = F_4^k(U) \cap V \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Para probar que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, observamos que cualquier entorno  $U$  de  $x \in I$  se puede “subir” hasta  $\hat{U}$  en  $\mathbb{S}^1$  mediante  $(h_2 \circ h_1)^{-1}$ . Hemos visto que existe un  $n \geq 0$  tal que  $g^n(\hat{U})$  abarca todo  $\mathbb{S}^1$ , por lo que está claro que  $F_4^n(U)$  también cubrirá todo  $I$ . Luego, habrá puntos en  $U$  que se alejen por lo menos  $\delta = 1/2$  de  $x$  (pero no sucede con todos los puntos de  $U$ , por lo que, al contrario de  $g$ ,  $F_4$  no será expansiva).

Por último, la densidad de los puntos periódicos de  $g$  en  $\mathbb{S}^1$  implica que cualquier  $\hat{U} \subset \mathbb{S}^1$  contiene por lo menos un punto periódico. La proyección de dicho punto será claramente un punto periódico de  $F_4$ , por lo que se tiene también la densidad de los puntos periódicos de  $F_4$  en  $I$ .

En la Figura 3.14 (izquierda) podemos ver el análisis gráfico de  $F_4$  con condición inicial  $x_0 = 0,7$ , donde se aprecia perfectamente el comportamiento caótico del sistema. En particular, se ve como para la gran mayoría de puntos, su órbita en alguna iteración se aleja lo suficientemente de él como para poder considerar que  $F_4$  tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. Asimismo, si consideramos un entorno de un punto cualquiera, su iteración bajo  $F_4$  acabará recorriendo todo el intervalo  $I$ , lo que implica la transitividad topológica. Obviamente, hay puntos para los cuales su órbita “se para”, como puede ser el caso de los puntos fijos y periódicos, tal y como se puede ver en la Figura 3.14 (derecha), donde hemos escogido como condición inicial el punto periódico de periodo 4  $x_0 \approx 0,16543$ .

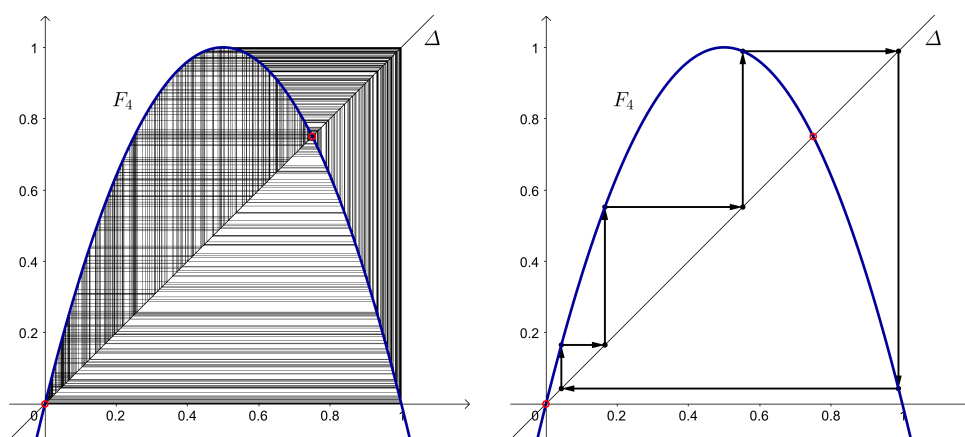


Figura 3.14: Análisis gráfico de  $F_4(x) = 4x(1-x)$ . A la izquierda, la órbita con  $n = 400$  iteraciones para la condición inicial  $x_0 = 0,7$ . A la derecha, la órbita periódica de periodo  $n = 4$  para la condición inicial  $x_0 \approx 0,16543$ .



# Bibliografía

- [1] Arroyo, J.L. (2007). *Externalidades de red en la economía digital*, Fundación Rafael del Pino y Marcial Pons, Madrid, p.67-75.
- [2] Birkhoff, G.D. (1920). *Recent Advances in Dynamics*, Science, 51, p.51-55.
- [3] Birkhoff, G.D. (1927). *Dynamical Systems*, Amer. Math. Society, Providence.
- [4] Brin, M. y Stuck, G. (2002). *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press.
- [5] Brown, R. J. (2018). *A Modern Introduction to Dynamical Systems*, Oxford University Press.
- [6] Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., AddisonWesley, California.
- [7] Du, B.-S. (2004). *A simple proof of Sharkovsky's theorem*, Amer. Math. Monthly 111, p.595-599.
- [8] Elaydi, S. (1996). *On a Converse of Sharkovsky's Theorem*, Amer. Math. Monthly 103, p.386-392.
- [9] Freiburger, M. (2014). *Chaos on the billiard table*, +Plus Magazine.
- [10] Kartofelev, D. (2023). *Lecture 8: Quasi-periodicity, 3-D and higher order systems, 3-D limit-cycle, introduction to chaos, chaotic water wheel, the Lorenz attractor, coursework requirements*, Tallinn University of Technology, Tallinn.
- [11] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, p. 74-75.
- [12] Kraft, R. L. (1999). *Chaos, Cantor Sets, and Hyperbolicity for the Logistic Maps*, Amer. Math. Monthly 106(5), p.400-408.
- [13] Kumar N. (1996). *Deterministic chaos*, Universities Press, Hyderabad.

- 
- [14] Li, T.-Y. y Yorke, J. A. (1975). *Period Three Implies Chaos*, Amer. Math. Monthly 82(10), p.985–992.
- [15] Lorenz, E. N. (1963). *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of Atmospheric Sciences, Vol. 20, Issue 2, p.130-148.
- [16] Perko, L. (1996). *Differential equations and dynamical systems*, 2nd ed., Springer-Verlag.
- [17] Poincaré, H.J. (1890). *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Mathematica, 13, p.1–270.
- [18] Poincaré, H.J. (1892,1893,1899). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vols 1-3*, Gauthiers-Villars, París.
- [19] Silverman, S. (1992). *On maps with dense orbits and the definition of chaos*, Rocky Mountain Jour. Math. 22, Portland, p.354-355.
- [20] Sparrow, C. (1982). *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York.
- [21] Strogatz, S.H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., CRC Press.