USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ideais de operadores

Alberto Suárez Fernández

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ideais de operadores

Alberto Suárez Fernández

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Ideais de operadores
Breve descrición do contido
O obxectivo principal deste traballo é que o estudante coñeza e se familiarice con certas ferramentas e resultados elementais da teoría de operadores en espazos de Hilbert e espazos de Banach. Para elo, empregaremos como fío condutor a teoría dos ideais de operadores. Estudaranse algúns ideais de operadores: operadores nucleares, operadores integrais, operadores sumantes e operadores asociados a S-números.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumo

A partir do Teorema espectral para operadores compactos e autoadxuntos obteremos unha descomposición espectral para operadores compactos baseada na sucesión de números singulares.

A velocidade de converxencia desta sucesión a cero dará lugar á definición das clases de Schatten-von Neumann, ideais biláteros do espazo de operadores lineais e limitados cuxa orixe histórica é a extensión a dimensión infinita da traza dunha matriz. Tamén probaremos que coa norma axeitada constitúen unha escala de espazos de Banach e obteremos os espazos duais.

Abstract

From the spectral Theorem for compact and self-adjoint operators we will obtain a spectral decomposition for compact operators based on the sequence of singular values.

The speed of convergence to zero of this sequence will lead to the definition of Schatten-von Neumann classes, bilateral ideals contained in the bounded linear operators set whose historical origin is the extension to infinite dimension of the trace of a matrix. We will also prove that with the appropriate norm they constitute a scale of Banach spaces and we will obtain their dual spaces.

Introdución

O obxectivo principal deste Traballo Fin de Grao é adentrarse no estudo de certo tipo de ideais de operadores, as clases de Schatten-von Neumann.

Se ben estas nocións poden resultar abstractas a primeira vista, ou mesmo tras familiarizarse con elas, o certo é que na súa orixe responden a un problema básico: comprobar se a traza dun operador (matriz) é un valor finito.

Realicemos, pois, un breve percorrido histórico polos momentos máis relevantes da idea de traza. Deste xeito, os contidos deste traballo poderían resultar algo máis naturais.

A orixe do concepto remóntase ao ano 1829, que foi cando Cauchy [1] introduciu o polinomio característico asociado a unha matriz $S = (s_{ij})$ de dimensión $n \times n$:

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - S) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Foi Jacobi —véxase [3]— quen obtivo as expresións dos coeficientes a_i. En particular, tense que

$$-a_1 = \operatorname{tr} S = \sum_{k=1}^{n} s_{kk}.$$

Nótese, pois, que definimos a traza da matriz como a suma dos elementos da súa diagonal, e que este concepto deixa pegada no polinomio característico. O seguinte paso consiste en decatarse de que a traza é un invariante alxébrico. Polo tanto, se diagonalizamos a matriz, poderemos considerar a traza como suma dos autovalores da matriz —que non son máis que as raíces do polinomio característico—:

$$\operatorname{tr} S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

No caso finito a traza está perfectamente definida, pero o problema de estendela a unha matriz de dimensión infinita non é en absoluto trivial: a suma dos infinitos elementos da diagonal dunha "matriz infinita" é —en realidade— unha serie, e podería non ser converxente.

Un dos primeiros intentos de estender a idea de traza a dimensión infinita débese ao matemático rumano T. Lalesco, quen publicou un libro sobre ecuacións integrais en 1912 –véxase [4]— no que define a traza dun operador integral K asociado á función núcleo $k \in \mathsf{L}_1([0,1] \times [0,1])$ como:

$$\operatorname{tr} K = \int_0^1 k(z,z)\, dz.$$

Observemos que, en efecto, defínese como unha suma —en realidade unha integral— sobre a "diagonal" da función núcleo.

En particular, pódese probar que para funcións k reais, simétricas e positivas recuperamos a relación coa suma dos autovalores. Máis exactamente, tense que

$$\int_0^1 k(z,z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(K).$$

En espazos de Hilbert, a definición moderna da traza dun operador positivo débese a John von Neumann, quen no seu libro *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* de 1932 [8] introduce como:

$$\operatorname{tr} T = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle.$$

Basta comprobar cun sinxelo cálculo que esta definición é a xeneralización natural da traza dunha matriz finita ao caso infinito dimensional. Tendo en conta que todo operador nun espazo de Hilbert ten asociada unha representación matricial, a definición anterior resulta coherente e mesmo intuitiva. Ademais, probaremos que así definida, a traza non depende da base escollida.

Nótese tamén que se T é un operador positivo, entón $\langle Te_n, e_n \rangle \geq 0$, polo que a traza ou ben é un número real positivo ou ben diverxe. O paso natural consistirá, por tanto, en identificar baixo que condicións ou con que familias de operadores temos garantida tal converxencia.

Serían o propio von Neumann e o seu colaborador R. Schatten —membro da Escola Matemática de Lwów, á que tamén pertenceu S. Banach— os que responderían a pregunta.

Para iso, definiron sobre o espazo dos operadores lineais e limitados en $\mathcal{H}$ —ao que denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$— a clase dos operadores Hilbert-Schmidt. Máis exactamente, trataríase da familia formada por aqueles operadores $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfán

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Se_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle Se_n, e_m\rangle|^2 < \infty$$

para algunha base ortonormal (e_n).

A partir disto, afirmaron que un operador T pertence á clase traza se se pode expresar como produto de dous operadores S e R que sexan de Hilbert-Schmidt. En tal caso, pode comprobarse que a serie

$$\operatorname{tr} SR = \sum_{n=1}^{\infty} \langle SR\, e_n, e_n\rangle$$

é converxente, proporcionando así unha solución ao problema da traza en dimensión infinita.

Coas ferramentas axeitadas, resulta relativamente sinxelo probar que os operadores de Hilbert-Schmidt e os da clase traza constitúen respectivamente sendos ideais biláteros contidos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Isto é, compoñer un operador dalgunha das familias anteriores por esquerda e dereita con operadores de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dá como resultado un operador pertencente á clase correspondente.

En realidade, e tal e como amosaremos neste Traballo Fin de Grao, o realmente interesante é construír e considerar unha escala de clases de Schatten-von Neumann.

Con ese obxectivo en mente, comezaremos o noso estudo a partir do Teorema espectral para operadores compactos e autoadxuntos e deseguido deduciremos un Teorema espectral prescindindo da hipótese alxébrica. Isto é, teremos á nosa disposición unha descomposición semellante á que empregaba autovalores, só que desta vez a chave serán os coñecidos como números singulares.

No segundo capítulo probaremos unha serie de propiedades e caracterizacións dos números singulares. Entre estas, destaca a que nos permitirá probar que as clases de Schatten-von Neumann forman ideais biláteros.

Chegaremos ás clases de Schatten-von Neumann no Capítulo 3 e amosaremos a partir deste punto un estudo que nos indicará como caracterizalas e comprobar que, coa norma axeitada, constitúen un espazo de Banach.

Coa completitude garantida, podemos facer análise, e no Capítulo 4 optaremos por unha das formas máis elementais para coñecer propiedades dun espazo de Banach: estudar o seu dual. Comprobaremos que o concepto de traza, e en particular os operadores clase traza, xogan un papel fundamental á hora de demostrar quen é o dual das clases de Schatten-von Neumann, e empregando a desigualdade de Hölder, remataremos probando que o dual non é outro que a clase de Schatten-von Neumann conxugada, en clara analoxía co que sucede noutras escalas de espazos de Banach.

Finalmente, destacamos que o presente Traballo de Fin de Grao ten como referencia bibliográfica fundamental a [7]. Boa parte dos seus contidos foron adaptados aos nosos propósitos, facendo sempre fincapé en deixar o máis claras posibles as demostracións e refinando o material ata quedarnos tan só cos resultados que xulgamos imprescindibles. Doutra banda, a obra do matemático alemán A. Pietsch [5] constitúe unha referencia obrigatoria para profundizar nesta área, pois recolle e amplía algúns dos resultados aquí presentados. A referencia [6], tamén do mesmo autor, foi empregada como guión para a elaboración desta introdución.

Capítulo 1

Teorema espectral e descomposición polar

Iniciamos o presente traballo co coñecido Teorema espectral para operadores compactos e autoadxuntos, resultado que pode verse como conclusión dun curso elemental de espazos de Hilbert, pois trátase da extensión natural a dimensión infinita da descomposición de Jordan xa ben coñecida das materias de Álxebra Lineal.

A idea esencial: probar que existe unha base do espazo na que un operador —representado mediante unha matriz— adopta forma diagonal, facilitando así o cálculo e comprensión da súa acción mediante os seus autovalores e autovectores.

Para iso, ao xeneralizar o problema a dimensión infinita, debemos esixirlle ao operador certa propiedade topolóxica —compacidade— e unha propiedade xeométrica-alxébrica —ser autoadxunto—. Isto dá boa conta do equilibrio entre topoloxía e álxebra lineal no que habita a Análise Funcional.

Agora ben, en Matemáticas sempre é interesante tentar rebaixar as hipóteses dos teoremas xa coñecidos e estendelos a outros supostos. Neste caso, farémolo eliminando a hipótese alxébrica e permitindo que o operador actúe entre dous espazos de Hilbert distintos, dando lugar así á coñecida como representación de Schmidt. O custo, que tornaremos máis adiante en vantaxe, será ter que falar da sucesión de números singulares do operador no canto da súa sucesión de autovalores.

Neste capítulo tamén falaremos da descomposición polar dun operador compacto, ferramenta que empregaremos en capítulos posteriores.

1.1. O Teorema espectral

Comecemos pois lembrando o enunciado do Teorema espectral para operadores compactos e autoadxuntos. A súa demostración é ben coñecida e pode ser consultada na maioría de manuais básicos sobre teoría de espazos de Hilbert ou análise funcional; véxase por exemplo [2, Theorem 159].

Teorema 1.1 (Teorema espectral para operadores compactos e autoadxuntos)**.**
Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é un operador compacto e autoadxunto, entón existe un sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ formado por autovectores de T con autovalores correspondentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ de xeito que

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Ademais, se a sucesión de autovalores é infinita, entón $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Nota 1.2 (Sobre o Teorema espectral para operadores compactos e autoadxuntos.)**.**
O sistema ortonormal formado polos vectores $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ é unha base de Hilbert de $\overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T)^\perp$. Polo tanto, en virtude do Teorema da Proxección Ortogonal, temos que

$$x = Px + \sum_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

onde $P\colon \mathcal{H} \longrightarrow \ker T$ é a proxección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\ker T$.

A continuación, prescindiremos da hipótese "autoadxunto" e centrarémonos no estudo dos operadores compactos entre espazos de Hilbert.

Para iso, comezaremos por enunciar e probar un resultado fundamental: o Teorema espectral para operadores compactos. A demostración deste resultado é breve e relativamente simple, pero convén observar que depende fortemente do Teorema 1.1 anterior. A idea chave da proba consistirá en pasar dun operador compacto a un operador compacto e autoadxunto e invocar logo o Teorema espectral para operadores compactos e autoadxuntos.

Teorema 1.3 (Teorema espectral para operadores compactos. Representación de Schmidt)**.**
Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é un operador compacto, entón existen sistemas ortonormais $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ en $\mathcal{H}_1$ e $\psi_1, \psi_2, \ldots$ en $\mathcal{H}_2$ e números reais non negativos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ de xeito que

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{H}_1. \tag{1.1}$$

Ademais, se a sucesión de escalares é infinita, entón $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Demostración.

Supoñamos $T \neq 0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, pois noutro caso o resultado enunciado é trivial e consideremos o operador $T^*T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, que é compacto —por ser T compacto— e autoadxunto ao ser un operador positivo:

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2 \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}_1.$$

Polo tanto, en virtude do Teorema 1.1 anterior, sabemos que existe un sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ en $\mathcal{H}_1$ de xeito que

$$T^*Tx = \sum_n \lambda'_n \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}_1,$$

onde os escalares λ'_n son todos non negativos por ser TT^* un operador positivo e $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \cdots \geq 0$. Ademais, en virtude da Nota 1.2 anterior, para cada $x \in \mathcal{H}_1$, existe un único $y \in \ker T^*T$ de xeito que

$$x = y + \sum_n \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n. \tag{1.2}$$

Sexa $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda'_n}} T\varphi_n$ para cada índice n. En tal caso, $\psi_1, \psi_2, \ldots$ é un sistema ortonormal en $\mathcal{H}_2$. En efecto, pois:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda'_n\lambda'_m}}\langle T\varphi_n, T\varphi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda'_n\lambda'_m}}\langle T^*T\varphi_n, \varphi_m\rangle \\ &= \frac{\lambda'_n}{\sqrt{\lambda'_n\lambda'_m}}\langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = \delta_{n,m} \quad \text{para todo } n,\, m. \end{aligned}$$

Así pois, tendo en conta que $\ker T^*T = \ker T$ e partindo de (1.2), concluímos finalmente que:

$$\begin{aligned} Tx &= Ty + \sum_n \langle x, \varphi_n\rangle T\varphi_n = 0 + \sum_n \sqrt{\lambda'_n}\langle x, \varphi_n\rangle \psi_n \\ &= \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \psi_n \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}_1, \end{aligned}$$

onde $\psi_1, \psi_2, \ldots$ é un sistema ortonormal de $\mathcal{H}_1$ e $\lambda_n = \sqrt{\lambda'_n}$ para cada n, formando así unha sucesión decrecente de números reais non negativos que converxe a 0 no caso de ser infinita. □

Nota 1.4 (Sobre a demostración do Teorema 1.3)**.**

(*a*) Probar que $\ker T = \ker T^*T$ é doado: se $Tx = 0$ entón $T^*Tx = 0$ e recíprocamente, se $T^*Tx = 0$ entón $0 = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2$ ou, equivalentemente, $Tx = 0$.

(*b*) Convén observar que os escalares $\lambda_n = \sqrt{\lambda'_n}$ que aparecen en (1.1) son os autovalores do operador raíz cadrada de T^*T, operador ao que denotaremos por $(T^*T)^{1/2}$ e que satisfai $(T^*T)^{1/2}(T^*T)^{1/2} = T^*T$. Por comodidade, é habitual denotar ao operador $(T^*T)^{1/2}$ por $|T|$ e chamarlle valor absoluto de T.

O Teorema 1.3 anterior permea a meirande parte das demostracións deste traballo e constitúe a orixe da discusión posterior ao dar lugar ao concepto de sucesión de números singulares que definiremos a continuación. Destacamos, ademais, que a descomposición espectral para operadores compactos obtida recibe habitualmente o nome de representación de Schmidt.

Nótese tamén que, en esencia, esta representación indícanos que podemos falar dos operadores compactos en espazos de Hilbert mediante sucesións de escalares converxentes a cero.

Definición 1.5 (Números singulares)**.**
Dado un operador compacto $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, chamaremos sucesión de *números singulares* de T á sucesión de números reais non negativos (λ_n) que nos proporciona a descomposición de Schmidt en (1.1).

Por comodidade, empregaremos a notación $s_n(T) = \lambda_n(|T|)$.

Tendo presente, pois, que a sucesión de números singulares dun operador compacto converxe a cero, o seguinte paso consistirá en clasificar os operadores compactos segundo a velocidade de converxencia a cero da súa sucesión de números singulares. Presentaremos esta idea en detalle no terceiro capítulo.

1.2. A descomposición polar

Neste epígrafe presentaremos a descomposición polar dun operador compacto. Para iso, é preciso introducir primeiro o concepto de isometría parcial, pois xogará un papel fundamental en dita descomposición. Sexan $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dous espazos de Hilbert, $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $M \subset \mathcal{H}_1$ un subespazo pechado.

Definición 1.6 (Isometría parcial).
Dise que U é unha *isometría parcial de* M *sobre* $U(M)$ se $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in M$ e $Ux = 0$ para todo $x \in M^{\perp}$.

Teorema 1.7 (Teorema de descomposición polar).
Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *é un operador compacto, entón existe unha isometría parcial* $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *de* $(\ker T)^{\perp}$ *sobre* $\overline{\operatorname{Im} T}$ *de modo que* $T = U|T|$ *e* $|T| = U^*T$.

Demostración.

Tendo en conta a demostración do Teorema 1.3 anterior (Teorema espectral para operadores compactos), sabemos que existe un sistema ortonormal φ_1, $\varphi_2, \ldots$ en $\mathcal{H}_1$ de modo que para $x \in \mathcal{H}_1$:

$$T^*Tx = \sum_n \lambda_n^2 \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$

$$|T|x = \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n, \tag{1.3}$$

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, \tag{1.4}$$

onde λ_1, $\lambda_2, \ldots$ é a sucesión de números singulares do operador T e $\psi_n = 1/\lambda_n T\varphi_n$ para cada n. Ademais, dado que φ_1, $\varphi_2, \ldots$ é unha base de Hilbert de $(\ker T)^{\perp}$ —véxase a Nota 1.2 anterior—,

$$x = \sum_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad \text{para todo } x \in (\ker T)^{\perp}. \tag{1.5}$$

Consideremos logo o operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ definido como:

$$Ux = \sum_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, \quad \text{para cada } x \in \mathcal{H}_1. \tag{1.6}$$

Probaremos que U é unha isometría parcial satisfacendo as propiedades indicadas no enunciado.

Tendo en conta (1.6) e (1.5), obtemos que

$$\|Ux\| = \Big(\sum_n |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 \Big)^{1/2} = \|x\|, \quad \text{para todo } x \in (\ker T)^{\perp}.$$

Ademais, posto que $\ker T$ é un subespazo pechado, $(\ker T)^{\perp\perp} = \ker T$ e daquela, se $x \in (\ker T)^{\perp\perp} = \ker T$, entón é claro que $\langle x, \varphi_n \rangle = 0$ para todo n, pois φ_1, $\varphi_2, \ldots$ unha base de Hilbert de $(\ker T)^{\perp}$. É dicir, acabamos de probar que $Ux = 0$ para todo $x \in \ker T$. Polo tanto, U é unha isometría parcial de $(\ker T)^{\perp}$ sobre $\overline{\operatorname{Im} T}$.

Tan só resta probar que $T = U|T|$ e $|T| = U^*T$. Para obter a primeira igualdade basta empregar (1.3) e (1.6). En efecto, pois

$$U|T|x = U\big(\sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n\big) = \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n = Tx, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}_1.$$

Para a segunda igualdade, comezamos observado que para $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle Ux, y \rangle = \big\langle \sum_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, y \big\rangle = \sum_n \langle x, \varphi_n \rangle \overline{\langle y, \psi_n \rangle} = \big\langle x, \sum_n \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n \big\rangle;$$

logo

$$U^*y = \sum_n \langle y, \psi_n \rangle \varphi_n, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}_1 \text{ e } y \in \mathcal{H}_2. \tag{1.7}$$

Polo tanto, empregando (1.4) e (1.7), concluimos finalmente que

$$U^*Tx = U^*\big(\sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n\big) = \sum_n \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n = |T|x, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}_1. \qquad \square$$

O Teorema de descomposición polar pode resumirse en que todo operador compacto entre dous espazos de Hilbert é factorizable como composición dunha isometría con propiedades específicas e a acción sobre o espazo de partida do valor absoluto do operador inicial, que é compacto e autoadxunto.

Capítulo 2

Propiedades dos números singulares

O obxectivo deste segundo capítulo é presentar as propiedades máis relevantes da sucesión de números singulares dun operador compacto.

Polo camiño, considerando aproximantes de rango finito, obteremos unha caracterización da sucesión de números singulares. Isto resulta moi interesante, pois no Capítulo 1 os números singulares foron introducidos como os autovalores do operador valor absoluto, pero agora seremos quen de entendelos e pensalos como a distancia entre certos espazos de operadores. Ademais, esta caracterización será imprescindible para probar os resultados máis relevantes deste traballo.

2.1. Os números de aproximación

Sexan X e Y espazos de Banach e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Definición 2.1 (Números de aproximación e de Gelfand)**.**
Definimos a sucesión de *números de aproximación* de T como:

$$a_n(T) = \text{ínf}\left\{\|T - T_n\| : T_n \in \mathcal{B}(X,Y),\ \operatorname{rang} T_n < n\right\}$$

e a sucesión de *números de Gelfand* de T como:

$$c_n(T) = \text{ínf}\left\{\|T|_{X_n}\| : X_n \subset X,\ \operatorname{codim} X_n < n\right\}.$$

Como consecuencia inmediata da definición:

$$a_1(T) = \|T\| \geq a_2(T) \geq \cdots \geq 0,$$

$$c_1(T) = \|T\| \geq c_2(T) \geq \cdots \geq 0.$$

Nota 2.2.
Nótese que se T é un operador compacto sobre o espazo de Hilbert $\mathcal{H}$, entón $a_n \to 0$. Isto é sinxelo de comprobar fixándonos na definición da sucesión dos números de aproximación, pois sabemos da teoría básica de espazos de Hilbert que os operadores compactos conforman a clausura dos de rango finito. Esta afirmación non é certa en xeral para os espazos de Banach.

Nota 2.3.
Dados os operadores A e B, con $\operatorname{rang} A < k$ e $\operatorname{rang} B < l$, verifícase que

$$\operatorname{rang}(A + B) < k + l - 1.$$

Isto é facilmente comprobable se nos decatamos de que $A(X)$ xerarase, ao sumo, por $k-1$ vectores básicos, mentres que $B(X)$ farao, ao sumo, mediante $l-1$.

Proposición 2.4 (Propiedades dos números de aproximación)**.**
Sexan X, Y, Z espazos de Banach e consideremos os operadores $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $R \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Entón, dados os índices $k, l \in \mathbb{N}$, os números de aproximación verifican as seguintes propiedades:

(*a*) $a_{k+l-1}(RS) \leq a_k(R)\, a_l(S)$.

(*b*) $a_{k+l-1}(S + T) \leq a_k(S) + a_l(T)$.

Demostración.

(*a*)

Tomemos $\varepsilon > 0$. En base á definición dos números de aproximación como un ínfimo é inmediato decatarse de que existen operadores $R_1 \in \mathcal{B}(Y, Z)$ e $S_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$, con $\operatorname{rang} R_1 < k$ e $\operatorname{rang} S_1 < l$, de xeito que:

$$\|R - R_1\| < a_k(R) + \varepsilon \quad \text{e} \quad \|S - S_1\| < a_l(S) + \varepsilon.$$

Por outra banda, tense que

$$\operatorname{rang}(R_1S - R_1S_1 + RS_1) = \operatorname{rang}(R_1(S - S_1) + RS_1) < k + l - 1,$$

e polo tanto:

$$\begin{aligned} a_{k+l-1}(RS) &\leq \|RS - R_1(S - S_1) - RS_1\| \\ &\leq \|R - R_1\| \, \|S - S_1\| \\ &\leq (a_k(R) + \varepsilon)\,(a_l(S) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $\varepsilon \to 0$ chegamos ao resultado buscado:

$$a_{k+l-1}(RS) \leq a_k(R)\, a_l(S).$$

(b)

Tomemos $\varepsilon > 0$. Aplicando de novo o razoamento do anterior apartado, existen operadores $S_1, T_1 \in \mathcal{B}(X, Y)$, con $\operatorname{rang} S_1 < k$ e $\operatorname{rang} T_1 < l$ de xeito que:

$$\begin{aligned} \|S - S_1\| &< a_k(S) + \varepsilon, \\ \|T - T_1\| &< a_l(T) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outra banda, tense que

$$\operatorname{rang}(S_1 + T_1) < k + l - 1,$$

e polo tanto:

$$\begin{aligned} a_{k+l-1}(S + T) &\leq \|S + T - S_1 - T_1\| \\ &\leq \|S - S_1\| + \|T - T_1\| \\ &\leq (a_k(S) + \varepsilon) + (a_l(T) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $\varepsilon \to 0$ chegamos ao resultado buscado:

$$a_{k+l-1}(S + T) \leq a_k(S) + a_l(T). \qquad \square$$

Teorema 2.5 (Coincidencia das sucesións anteriores para os operadores compactos)**.** *Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é un operador compacto, entón*

$$a_n(T) = c_n(T) = s_n(T) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

“$a_n(T) = c_n(T)$”

Sexa $T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $\operatorname{rang} T_n < n$. Se consideramos $X_n = \ker T_n$, entón $\operatorname{codim} X_n < n$ e daquela, dado que $T - T_n$ é unha extensión de $T|_{X_n}$,

$$c_n(T) \leq \|T|_{X_n}\| \leq \|T - T_n\|,$$

polo que $c_n(T) \leq a_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Doutra banda, se $X_n \subset \mathcal{H}_1$ é tal que $\operatorname{codim} X_n < n$ e P_n é a proxección ortogonal sobre ${X_n}^{\perp}$, entón para $T_n = TP_n$ temos que $\operatorname{rang} T_n < n$ e daquela,

$$a_n(T) \leq \|T - T_n\| \leq \|T|_{X_n}\|,$$

polo que $a_n(T) \leq c_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

“$a_n(T) = s_n(T)$”

Dado que por hipótese $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, podemos falar da descomposición de Schmidt de T; sexa logo

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, \quad \text{para cada } x \in \mathcal{H}_1.$$

e consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ o operador T_n dado por

$$T_n x = \sum_{j=1}^{n} s_j(T) \langle x, \varphi_j \rangle \psi_j, \quad \text{para cada } x \in \mathcal{H}_1.$$

En tal caso, sen máis que aplicar a desigualdade de Bessel, xa chegamos a que

$$a_n(T) \leq \|T - T_n\| = s_n(T), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para probar a desigualdade oposta, para cada $n \in \mathbb{N}$, sexa $T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador arbitrario de rango finito con $\operatorname{rang} T_n = m < n$. Daquela,

$$T_n x = \sum_{r=1}^{m} \langle x, v_r \rangle w_r \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}_1. \tag{2.1}$$

Consideremos o seguinte sistema de m ecuacións lineais e $n > m$ incógnitas:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, v_1 \rangle \eta_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, v_2 \rangle \eta_j = 0, \\ \quad \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, v_m \rangle \eta_j = 0. \end{cases}$$

Dado que se trata dun sistema compatible indeterminado —pois temos máis incógnitas que ecuacións—, podemos escoller unha solución $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ non trivial tal que

$$\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2 = 1.$$

Así pois, se agora escollemos

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \varphi_j \in \mathcal{H}_1,$$

entón $\|x_0\| = 1$ e —tendo en conta (2.1)—

$$T_n x_0 = \sum_{r=1}^{m} \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \eta_j \varphi_j, v_r \Big\rangle w_r = \sum_{r=1}^{m} w_r \sum_{j=1}^{n} \eta_j \langle \varphi_j, v_r \rangle = 0,$$

Polo tanto, tendo en conta a monotonía dos números de aproximación,

$$\begin{aligned} \|T - T_n\| &\geq \|(T - T_n)x_0\| = \|Tx_0\| \\ &= \Big\| \sum_{j=1}^{n} s_j(T) \eta_j \psi_j \Big\| = \Big(\sum_{j=1}^{n} {s_j}^2(T) |\eta_j|^2 \Big)^{1/2} \\ &\geq \Big({s_n}^2(T) \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2 \Big)^{1/2} = s_n(T). \end{aligned}$$

Logo debe ser $a_n(T) \geq s_n(T)$. □

Proposición 2.6 (Propiedades dos números singulares)**.**
Sexan os operadores $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ *e* $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. *Entón, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *verifícanse as seguintes propiedades:*

(*a*) $s_n(RTS) \leq \|R\| \, s_n(T) \, \|S\|$.

(*b*) $s_{n+m-1}(S + T) \leq s_n(S) + s_m(T)$.

Demostración.

Ambas propiedades consisten na aplicación do Teorema 2.5 anterior sobre as respectivas afirmacións da Proposición 2.4.

(a)

Tomemos $k = n$ e $l = 1$ na primeira das propiedades da Proposición 2.4. Entón:

$$s_n(RTS) \leq s_1(RS)\, s_n(T) = \|RS\|\, s_n(T) = \|R\|\, s_n(T)\, \|S\|,$$

como queriamos ver.

(b)

Inmediato a partir do Teorema 2.5 sobre a segunda das propiedades. $\square$

Capítulo 3

Clases de Schatten-von Neumann

Os resultados que mostramos neste capítulo constitúen o núcleo deste Traballo Fin de Grao, pois introducimos e estudamos aquí as clases de Schatten-von Neumann para $1 \leq p \leq \infty$.

A idea esencial consiste en clasificar os operadores compactos segundo a velocidade de converxencia (a cero) da súa sucesión de números singulares. Isto é, falando de xeito informal, estableceremos unha especie de "indicador do grao de compacidade" dun operador. Os espazos de sucesións ℓ_p xogarán un importante papel, pois fixarémonos na p-sumabilidade da sucesión de números singulares.

A clase de operadores obtida ao considerar $p = 2$ será especialmente interesante. Trátase dos coñecidos como operadores de Hilbert-Schmidt e coa norma axeitada formará un espazo de Hilbert. A pouco que reflexionemos, isto non debería sorprendernos pois xa coñecemos outras escalas de espazos de Banach nas que o espazo asociado ao índice 2 é o que mellores propiedades presenta. En última instancia, isto é debido á validez do Teorema de Pitágoras, piar sobre o que se fundamenta a Xeometría tamén en dimensión infinita.

Ao longo deste capítulo probaranse distintas caracterizacións dalgunhas clases de Schatten-von Neumann e remataremos probando a súa completitude respecto de certa norma axeitada que non será a do espazo de operadores $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$. Isto é, obteremos unha nova escala de espazos de Banach.

3.1. As clases de Schatten-von Neumann

Comezamos coa definición das clases de Schatten-von Neumann.

Definición 3.1 (Clases de Schatten-von Neumann).
Para $1 \leq p < \infty$, a *clase de Schatten-von Neumann* $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ é a familia de operadores dada por:

$$\mathcal{S}_p(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\colon (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p\}.$$

Para cada operador $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ consideraremos

$$\sigma_p(T) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p\Big)^{1/p}.$$

e referirémonos a $S_2(\mathcal{H})$ como o espazo de operadores de Hilbert-Schmidt.

Nota 3.2 (Ideais de operadores).
Lembremos que pola Proposición 2.6 tense que

$$s_n(RTS) \leq \|R\|\, s_n(T)\, \|S\|,$$

o que nos permite afirmar que as clases $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ teñen estrutura de ideal bilátero de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Isto é fácil de ver, pois ao compoñer un operador $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ pola esquerda e pola dereita con operadores lineais e limitados R e S de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ poderemos limitar cada un dos números singulares da composición mediante os correspondentes números singulares de T (escalados por unha constante real), facendo que o operador RTS quede en $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$.

Nótese tamén que $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, sendo $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ o espazo formado por todos os operadores compactos en $\mathcal{H}$.

A continuación probaremos unha serie de lemas que serán útiles para obter caracterizacións das clases de Schatten-von Neumann en función do comportamento asíntótico da sucesión de números reais $(\|Te_n\|)$, onde (e_n) é un sistema ortonormal.

Lema 3.3.
Os operadores de rango finito son densos en $S_p(\mathcal{H})$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración.

Basta con truncar a orde N, para N suficientemente grande, a suma da descomposición espectral de $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$. □

Lema 3.4. $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow |T| \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$

Demostración.

Lembremos que os operadores T e $|T|$ teñen os mesmos números singulares, pois se escribimos as súas descomposicións espectrais:

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$
$$(T^*T)^{1/2}x = |T|x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$
$$Tx = \sum_{n} s_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n.$$

□

Lema 3.5. *Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dúas bases de Hilbert de $\mathcal{H}$, entón*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varepsilon_n\|^2.$$

Demostración.

En efecto, pois en virtude da identidade de Parseval, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|T\varepsilon_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle T\varepsilon_n, \varepsilon_m \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle \varepsilon_n, T^*\varepsilon_m \rangle|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varepsilon_n, T^*\varepsilon_m \rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^*\varepsilon_m\|^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

e agora, aplicando novamente a identidade de Parseval,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle Te_n, \varepsilon_m \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_n, T^*\varepsilon_m \rangle|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T^*\varepsilon_m \rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^*\varepsilon_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varepsilon_n\|^2,\end{aligned}$$

onde na última igualdade empregamos (3.1). □

Estamos xa en condicións de obter unha caracterización de $\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$. O resultado é interesante, pois logramos a equivalencia entre a pertenza á devandita clase, que foi definida en base á converxencia dos números singulares, e a existencia dunha base de Hilbert sobre a que a suma das normas ao cadrado da acción do operador converxa, o que é a priori máis sinxelo de comprobar. Polos mesmos motivos, proporciónanos tamén un xeito máis práctico de obter $\sigma_2(T)$, parámetro que adquirirá relevancia na seguinte sección.

Teorema 3.6 (Caracterización da clase $\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$).
Sexa $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En tal caso,

$$T \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty \text{ para algunha base de Hilbert } (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de } \mathcal{H}.$$

Ademais, para todo operador $T \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$,

$$\sigma_2(T) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2}, \text{ sendo } (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ unha base de Hilbert de } \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

Demostración.

"$\Longleftarrow$"

Comezaremos probando que $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Para iso, tendo en conta a Nota 3.3 e a definición dos números de aproximación en termos de operadores de rango finito, basta probar que $a_n(T) \to 0$ cando $n \to \infty$. Non obstante, dado que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(T) = c_n(T) = \text{ínf}\left\{\|T|_{X_n}\| : X_n \subset X,\ \operatorname{codim} X_n < n\right\} \leq \|T|_{\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}^\perp}\|,$$

basta en realidade ver que $\|T|_{\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}^\perp}\| \to 0$ cando $n \to \infty$.

Sexa logo $x \in \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}^\perp$ con $\|x\| \leq 1$ arbitrario. En tal caso,

$$x = \sum_{j=n}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j \quad \text{e} \quad \|x\| = \Big(\sum_{j=n} |\langle x, e_j\rangle|^2\Big)^{1/2} \leq 1.$$

Daquela, empregando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \Big\|\sum_{j=n}^{\infty} \langle x, e_j\rangle Te_j\Big\| \leq \sum_{j=n}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|\,\|Te_j\| \\ &\leq \Big(\sum_{j=n}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=n} \|Te_j\|^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{j=n}^{\infty} \|Te_j\|^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Polo tanto, tendo en conta a hipótese sobre a converxencia da serie,

$$\|T|_{\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}^\perp}\| \leq \Big(\sum_{j=n}^{\infty} \|Te_j\|^2\Big)^{1/2} \to 0 \text{ cando } n \to \infty.$$

Deseguido probaremos que $\sigma_2(T) < \infty$. Se

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x, \varphi_n\rangle \psi_n, \quad x \in \mathcal{H}, \tag{3.3}$$

é a representación de Schmidt do operador T, entón —dado que $\mathcal{H} = \ker T \oplus (\ker T)^{\perp}$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é unha base de Hilbert de $(\ker T)^{\perp}$— podemos completar $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ata obter unha base de Hilbert $(\hat{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$. En tal caso, en virtude do Lema 3.3 anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\hat{\varphi}_n\|^2,$$

pero dado que $T\hat{\varphi}_n = 0$ se $\hat{\varphi}_n \in \ker T$, en realidade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T\hat{\varphi}_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|s_n(T)\psi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2,$$

o que nos permite afirmar que

$$\sigma_2(T) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big)^{1/2} < \infty.$$

"$\Longrightarrow$"

Se $T \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ entón, en particular, $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ e daquela podemos falar da súa representación de Schmidt. Así pois, se $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é unha base de Hilbert de $\mathcal{H}$, empregando a mesma notación ca en (3.3), temos agora que

$$\begin{aligned}
\|Te_n\|^2 = \langle Te_n, Te_n\rangle &= \Big\langle \sum_k s_k(T)\langle e_n, \varphi_k\rangle \psi_k, \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T)\langle e_n, \varphi_k\rangle\psi_k\Big\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T)^2 |\langle e_n, \varphi_k\rangle|^2
\end{aligned}$$

e daquela, en virtude da identidade de Parseval,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, \varphi_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T)^2 \|\varphi_k\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s_k(T)^2 = \sigma_2(T)^2 < \infty,
\end{aligned}$$

obténdose ademais a identidade enunciada en (3.2). □

Nota 3.7. Na demostración do Teorema 3.6 anterior probouse que a cantidade $\sum_n \|Te_n\|^2$ é independente da base ortonormal escollida aplicando a identidade de Parseval, despois pasando ao operador adxunto, permutando as sumas e volvendo aplicar Parseval de novo. Notemos que $\|Te_n\| = \sqrt{\sum_m |\langle Te_n, x_m\rangle|^2}$. Por tanto, o feito de que o expoñente desa cantidade sexa 2 permite eliminar a raíz cadrada e levar a cabo a permutación dos sumatorios, mentres que no caso de $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ con $p > 2$ non podemos facer o mesmo. Isto acaba causando que no Teorema de caracterización dos operadores de $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$(3.8) escribamos $\sigma_p(T)$ como un supremo.

Teorema 3.8 (Caracterización da clase $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ con $p \geq 2$ en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$)**.**
Sexa $p \geq 2$ e $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. En tal caso,

$$T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p < \infty \text{ para toda base de Hilbert } (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de } \mathcal{H}.$$

Ademais, para todo operador $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$,

$$\sigma_p(T) = \sup\left\{\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p\Big)^{1/p} : (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ base de Hilbert de } \mathcal{H}\right\}.$$

Demostración.

Dado que $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, podemos falar da súa descomposición de Schmidt:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x, \varphi_n\rangle\psi_n, \quad x \in \mathcal{H}.$$

"$\Longleftarrow$"

Razoando coma na primeira parte da demostración do Teorema 3.6 anterior, podemos completar $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ata obter unha base de Hilbert $(\hat{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$. En tal caso, por hipótese,

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varphi_n\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|s_n(T)\psi_n\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p = \sigma_p(T)^p.$$

"$\Longrightarrow$"

Sexa $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unha base de Hilbert de $\mathcal{H}$ arbitraria. En tal caso, empregando a desigualdade de Hölder —con expoñentes conxugados $p/2$ e $1/(2-1/p)$— primeiro e a desigualdade de Bessel despois, obtemos que:

$$\begin{aligned}\|Te_n\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^2|\langle e_n, \varphi_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^2|\langle e_n, \varphi_j\rangle|^{4/p}|\langle e_n, \varphi_j\rangle|^{2-4/p} \\ &\leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p|\langle e_n, \varphi_j\rangle|^2\Big)^{2/p}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_n, \varphi_j\rangle|^2\Big)^{1-2/p} \\ &\leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p|\langle e_n, \varphi_j\rangle|^2\Big)^{2/p}\|e_n\| = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p|\langle e_n, \varphi_j\rangle|^2\Big)^{2/p}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|Te_n\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p |\langle e_n, \varphi_j \rangle|^2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

de onde se segue —aplicando a identidade de Parseval— que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p |\langle e_n, \varphi_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, \varphi_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p \|\varphi_n\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p = \sigma_p(T)^p < \infty. \qquad \square\end{aligned}$$

3.2. O espazo de Banach $(\mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$

Os seguintes resultados axudarannos a probar que σ_p verifica a desigualdade triangular e, en xeral, que define unha norma na clase de operadores $\mathcal{S}_p$.

Proposición 3.9 (Caracterización dos operadores positivos de $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$)**.**
Sexa $p \geq 1$ e $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ un operador positivo. En tal caso,

$$T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_n \rangle|^p < \infty \text{ para todo sistema ortonormal } (e_n) \text{ de } \mathcal{H}.$$

Ademais, para todo operador $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ positivo,

$$\sigma_p(T) = \sup\left\{ \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_n \rangle|^p \Big)^{1/p} : (e_n) \text{ sistema ortonormal en } \mathcal{H} \right\}. \tag{3.4}$$

Demostración.

Todo operador positivo é autoadxunto. Polo tanto, cando consideramos un operador compacto e positivo, en realidade, estamos a falar dun operador compacto e autoadxunto. Así pois, se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é un operador compacto e positivo, entón podemos considerar a súa representación espectral, que virá dada por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}, \tag{3.5}$$

onde $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é certo conxunto ortonormal en $\mathcal{H}$.

"$\Longrightarrow$"

Sexa $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ un operador positivo arbitrario e (e_n) un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$ escollido tamén de xeito arbitrario. Se P é a proxección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\ker T$, entón $\langle \varphi_n, Pe_m \rangle = 0$ para todo n, $m \in \mathbb{N}$ —pois $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é unha base de Hilbert de $(\ker T)^{\perp}$— e daquela, empregando (3.5),

$$\begin{aligned} \langle Te_m, e_m \rangle &= \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle e_m, \varphi_n \rangle \varphi_n, Pe_m + \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_m, \varphi_n \rangle \varphi_n \Big\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) |\langle e_m, \varphi_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Se q é o expoñente conxugado de p —isto é, q tal que $1/p + 1/q = 1$— e reescribimos a espresión anterior en termos destes expoñentes, empregando a desigualdade de Hölder obtemos que

$$\begin{aligned} |\langle Te_m, e_m \rangle| &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) |\langle e_m, \varphi_n \rangle|^{2/p} \, |\langle e_m, \varphi_n \rangle|^{2/q} \\ &\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p |\langle e_m, \varphi_n \rangle|^2 \Big)^{1/p} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_m, \varphi_n \rangle|^2 \Big)^{1/q} \\ &\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p |\langle e_m, \varphi_n \rangle|^2 \Big)^{1/p}, \end{aligned}$$

onde a derradeira cota é consecuencia da desigualdade de Bessel.

Agora, elevando a p e sumando en m, obtemos finalmente que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Te_m, e_m \rangle|^p &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p |\langle e_m, \varphi_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p \sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_m, \varphi_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p = \sigma_p(T)^p < \infty \text{ por ser } T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \end{aligned}$$

onde —novamente— a derradeira cota é consecuencia da desigualdade de Bessel.

Ademais, dado que o conxunto ortonormal (e_n) foi escollido de xeito arbitario en $\mathcal{H}$, podemos afirmar que

$$\sup \Big\{ \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_n \rangle|^p \Big)^{1/p} : (e_n) \text{ sistema ortonormal de } \mathcal{H} \Big\} \leq \sigma_p(T). \tag{3.6}$$

"$\Longleftarrow$"

Basta empregar a representación espectral (3.5) para observar que

$$\begin{aligned}\sigma_p(T)^p &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle|^p \\ &\leq \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_n\rangle|^p \colon (e_n) \text{ sistema ortonormal de } \mathcal{H}\Big\}, \qquad (3.7)\end{aligned}$$

logo $\sigma_p(T) < \infty$ e, polo tanto, $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$.

A identidade enunciada en (3.4) é consecuencia de (3.6) e (3.7). □

Teorema 3.10 (Caracterización alternativa dos operadores de $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$)**.**
Sexa $p \geq 1$ e $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. En tal caso,

$$T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, \varepsilon_n\rangle|^p < \infty \textit{ para calquera } (e_n) \textit{ e } (\varepsilon_n) \textit{ sistemas ortonormais en } \mathcal{H}.$$

Ademais, para todo operador $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$,

$$\sigma_p(T) = \sup\Big\{ \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, \varepsilon_n\rangle|^p \Big)^{1/p} \colon (e_n), (\varepsilon_n) \textit{ sistemas ortonormais en } \mathcal{H}\Big\}. \qquad (3.8)$$

Demostración.

"$\Longrightarrow$"

Sexa $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ un operador escollido de xeito arbitrario. En tal caso, empregando a descomposición polar de T (véxase o Teorema 1.7 anterior), concluimos que se (e_n) e (ε_n) son dous sistema ortonormais en $\mathcal{H}$, entón

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, \varepsilon_n\rangle|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathcal{U}|T|e_n, \varepsilon_n\rangle|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle |T|e_n, \mathcal{U}^*\varepsilon_n\rangle|^p \\ &\leq \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle |T|e_n, \varepsilon_n\rangle|^p \colon (e_n), (\varepsilon_n) \text{ sistemas ortonormais en } \mathcal{H}\Big\}.\end{aligned}$$

Probaremos que tal supremo —no que non aparece o operador T, senón $|T|$— é finito.

En primeiro lugar, empregando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definición da norma, obtemos que

$$\begin{aligned}|\langle |T|e_n, \varepsilon_n\rangle|^2 &= |\langle |T|^{1/2}e_n, |T|^{1/2}\varepsilon_n\rangle|^2 \\ &\leq \||T|^{1/2}e_n\|^2 \, \||T|^{1/2}\varepsilon_n\|^2 \\ &= \langle |T|^{1/2}e_n, |T|^{1/2}e_n\rangle \, \langle |T|^{1/2}\varepsilon_n, |T|^{1/2}\varepsilon_n\rangle \\ &= \langle |T|e_n, e_n\rangle \, \langle |T|\varepsilon_n, \varepsilon_n\rangle\end{aligned}$$

e daquela, elevando ambos membros da desigualdade anterior a $p/2$ e sumando en n, concluimos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle |T|e_n, \varepsilon_n\rangle|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|e_n, \varepsilon_n\rangle^{p/2} \, \langle |T|e_n, \varepsilon_n\rangle^{p/2} \\ &\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|e_n, e_n\rangle^p\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|\varepsilon_n, \varepsilon_n\rangle^p\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

sendo a derradeira cota consecuencia directa da desigualdade de Hölder.

Agora ben, dado que $|T|$ é un operador positivo e $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}) \iff |T| \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$, podemos invocar a Proposición 3.9 anterior para concluir finalmente que

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|e_n, e_n\rangle^p\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle |T|\varepsilon_n, \varepsilon_n\rangle^p\Big)^{1/2} &\leq (\sigma_p(|T|)^p)^{1/2} \, (\sigma_p(|T|))^{1/2} \\ &= (\sigma_p(T)^p)^{1/2} \, (\sigma_p(T))^{1/2} = \sigma_p(T)^p\end{aligned}$$

Así pois, para $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$,

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, \varepsilon_n\rangle|^p \colon (e_n), (\varepsilon_n) \text{ sistemas ortonormais en } \mathcal{H}\Big\} \\ &\qquad \leq \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle |T|e_n, \varepsilon_n\rangle|^p \colon (e_n), (\varepsilon_n) \text{ sistemas ortonormais en } \mathcal{H}\Big\} \\ &\qquad \leq \sigma_p(T)^p < \infty.\end{aligned} \tag{3.9}$$

"$\Longleftarrow$"

Consideremos a representación de Schmidt do operador T:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle x, \varphi_n\rangle \psi_n \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

En tal caso,

$$\begin{aligned}\sigma_p(T)^p &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T\varphi_n, \psi_n\rangle|^p \\ &\leq \sup\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, \varepsilon_n\rangle|^p \colon (e_n),\ (\varepsilon_n) \text{ sistemas ortonormais en } \mathcal{H}\Big\}. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Polo tanto, $\sigma_p(T) < \infty$ e, equivalentemente, $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$.

A identidade enunciada en (3.8) é consecuencia de (3.9) e (3.10). □

Corolario 3.11.
$(\mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$ é un espazo vectorial normado.

Demostración.

Basta comprobar que $\sigma_p \colon \mathcal{S}_p(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfai as propiedades da definición de norma:

(N1) $\sigma_p(T) \geq 0$ para todo $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ e $\sigma_p(T) = 0 \Longleftrightarrow T = 0 \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$,

(N2) $\sigma_p(\lambda T) = |\lambda|\, \sigma_p(T)$ para todo $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

(N3) $\sigma_p(T + S) \leq \sigma_p(T) + \sigma_p(S)$ para todo T, $S \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$.

As dúas primeiras propiedades son consecuencia inmediata do carácter non negativo dos números singulares e da descomposición de Schmidt.

Para probar a desigualdade triangular, sexan (e_n) e (ε_n) dous sistemas ortonormais en $\mathcal{H}$ arbitrarios. En tal caso, para dous operadores T, $S \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ arbitrarios, temos que

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle (T+S)e_n, \varepsilon_n\rangle|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (|\langle Te_n, \varepsilon_n\rangle| + |\langle Se_n, \varepsilon_n\rangle|)^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, \varepsilon_n\rangle|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Se_n, \varepsilon_n\rangle|^p\Big)^{1/p}\end{aligned}$$

e daquela, empregando o Teorema 3.10 anterior, concluimos que $\sigma_p(T + S) \leq \sigma_p(T) + \sigma_p(S)$. □

Lema 3.12 (Continuidade dos números singulares)**.**
Se $T_n \to T$ en $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ entón $s_j(T_n) \to s_j(T)$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ para todo $j \in \mathbb{N}$,.

Demostración.

Tendo en conta a Proposición 2.6 anterior, sabemos que para dous operadores calquera A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$s_n(A+B) = s_{n+1-1}(A+B) \leq s_n(A) + s_1(B) = s_n(A) + \|B\|$$

e daquela, considerando $S = A + B$ —e entón $B = S - A$— deducimos que

$$|s_n(S) - s_n(A)| \leq \|S - A\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Polo tanto,

$$|s_j(T_n) - s_j(T)| \leq \|T_n - T\| \quad \text{para todo } n,\ j \in \mathbb{N};$$

e así pois, tendo en conta a hipótese, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} s_j(T_n) = s_j(T).$$ □

Rematamos a sección probando que ao considerar unha norma axeitada, dotamos ás clases de Schatten-von Neumann da estrutura de espazo de Banach, o que constitúe un paso fundamental para facer análise sobre elas, pois gozaremos da importante propiedade da completitude.

Teorema 3.13.
Para $1 \leq p < \infty$, o espazo vectorial normado $(\mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$ é un espazo de Banach.

Demostración.

Sexa $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ unha sucesión de Cauchy arbitraria en $(\mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$; probaremos que $(T_n)_{n\in\mathcal{H}}$ é converxente en $(\mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$.

Comecemos observando que, en realidade, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tamén é unha sucesión de Cauchy en $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$. En efecto, pois para calquera operador $S \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ tense que

$$\|S\| = a_1(S) = s_1(S) \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(S)^p\Big)^{1/p} = \sigma_p(S).$$

Polo tanto, dado que $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ é un espazo completo, sabemos que existe $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de modo que $\|T_n - T\| \to 0$ cando $n \to \infty$. Ademais, dado que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é pechado en $(\mathcal{B}(\mathcal{H})), \|\cdot\|)$ e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$, concluímos que $T \in \mathcal{K}(H)$.

A continuación probaremos que $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ e que $\sigma_p(T - T_n) \to 0$ cando $n \to \infty$.

Por ser $(T_n) \subset \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ unha sucesión de Cauchy en $(\mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de xeito que

$$\sigma_p(T_n - T_m) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T_n - T_m)^p < \varepsilon^p \quad \text{se } n,\, m \geq N$$

e dado que os números singulares son non negativos, podemos afirmar que

$$\sum_{j=1}^{L} s_j(T_n - T_m) < \varepsilon^p \quad \text{para calquera } L \in \mathbb{N} \text{ se } n,\, m \geq N. \tag{3.11}$$

Así pois, tomando límite cando $n \to \infty$ en (3.11) e empregando o Lema 3.12 anterior, chegamos a que

$$\sum_{j=1}^{L} s_j(T - T_m)^p < \varepsilon^p \quad \text{se } m \geq N$$

e tomando agora límite cando $L \to \infty$ na expresión anterior concluímos finalmente que

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T - T_m)^p < \varepsilon^p \quad \text{se } m \geq N.$$

É dicir,

$$\sigma_p(T - T_m) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T - T_m)^p \Big)^p < \varepsilon \quad \text{se } m \geq N,$$

de onde se segue que $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ e que $T_n \to T$ en $(\mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$. $\square$

Capítulo 4

O espazo dual de $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$

Neste capítulo continuamos co estudo das clases de Schatten-von Neumann. Agora que xa sabemos que coa norma axeitada son espazos de Banach, o natural é acometer unha análise máis profunda dos seus elementos, e un bo punto para comezar resulta ser o estudo do seu dual. É dicir, empregaremos as ferramentas máis sinxelas das que dispoñemos: as aplicacións (lineais e continuas) que operan entre o espazo e o corpo de escalares. O resultado será análogo ao dos espazos de sucesións, pois os dual consistirá na clase de Schatten de índice conxugado, o que nos indica a presenza da desigualdade de Hölder.

Veremos que para chegar ao dual a chave será definir o concepto de traza dun operador e aproveitarse da súa invariancia con respecto da base escollida e da súa boa definición para os operadores de $\mathcal{S}_1$.

4.1. O concepto de traza dun operador

Definición 4.1 (Traza dun operador)**.**
Se $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ é unha base de Hilbert de $\mathcal{H}$ e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, defínese a *traza de T segundo* (e_n) como

$$\mathrm{tr}_{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} T = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle,$$

sempre e cando a serie anterior sexa converxente.

O seguinte resultado é fundamental, pois permitiranos construír na seguinte sección o espazo dual das clases de Schatten-von Neumann, ademais de asentar a noción de traza dun operador, que noutros espazos non gozaría dunha boa definición. Por iso, chamamos a $\mathcal{S}_1$ a clase traza.

Teorema 4.2 (A traza é un invariante en $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$)**.**
Se $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ é unha base de Hilbert de $\mathcal{H}$ e $T \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$, entón a serie que define á traza de T é absolutamente converxente e o seu valor é independente da base de Hilbert escollida.

Demostración.

Consideremos a descomposición de Schmidt do operador $T \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x, \varphi_n\rangle \psi_n, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

En tal caso, empregando a desigualdade triangular, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Bessel, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_k\rangle| &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle e_k, \varphi_n\rangle \psi_n, e_k\Big\rangle\Big| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle e_k, \varphi_n\rangle\langle \psi_n, e_k\rangle\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \big|s_n(T)\langle e_k, \varphi_n\rangle\langle \psi_n, e_k\rangle\big| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} \big|\langle e_k, \varphi_n\rangle\langle \psi_n, e_k\rangle\big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, \varphi_n\rangle|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \psi_n, e_k\rangle|^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\|\varphi_n\|\|\psi_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)
\end{aligned}$$

e finalmente, tendo en conta que —por hipótese— $T \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$, concluímos a converxencia absoluta anteriormente enunciada.

A continuación probemos que o valor da suma é independente da base de Hilbert de $\mathcal{H}$ escollida. En efecto, pois empregando novamente a representación de Schmidt de T sabemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, \varphi_n\rangle\langle \psi_n, e_k\rangle$$

e operando na segunda serie concluímos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k,\varphi_n\rangle\langle\psi_n,e_k\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{\infty}\langle\psi_n,e_k,\rangle e_k, \langle\varphi_n,e_k,\rangle e_k\Big\rangle$$
$$= \langle\psi_n,\varphi_n\rangle.$$

Polo tanto,

$$\operatorname{tr} T = \sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k,e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle\psi_n,\varphi_n\rangle,$$

expresión claramente independente da base de Hilbert considerada sobre $\mathcal{H}$. □

Nota 4.3. En virtude do Teorema 4,2 anterior, para operadores $T \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$, o concepto de *traza* está ben definido, polo que empregaremos simplemente a notación $\operatorname{tr} T$.

Proposición 4.4 (Propiedades da traza)**.**
Se T, $S \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$, *entón:*

(*a*) $\operatorname{tr}(\alpha T + \beta S) = \alpha \operatorname{tr} T + \beta \operatorname{tr} S$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(*b*) $\operatorname{tr} T^* = \overline{\operatorname{tr} T}$.

Se $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ *e* $S \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$ *con* p *e* q *expoñentes conxugados, entón*

(*c*) ST, $TS \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$, $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS)$ *e* $|\operatorname{tr}(ST)| \leq \sigma_p(T)\,\sigma_q(S)$.

Demostración.

(*a*)

Dedúcese inmediatamente a partir da definición de traza sen máis que ter en conta as propiedades do produto escalar.

(*b*)

Consideremos a descomposición de Schmidt do operador T:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x,\varphi_n\rangle\psi_n, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

En tal caso,

$$\langle Tx,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x,\varphi_n\rangle\overline{\langle y,\psi_n\rangle} = \Big\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle y,\psi_n\rangle\varphi_n\Big\rangle, \quad \text{para } x,y \in \mathcal{H},$$

o cal implica que

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x, \psi_n\rangle \varphi_n, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{4.1}$$

É dicir, (4.1) é a representación de Schmidt do operador T^* e daquela, agora é claro que $T \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ e que $\sigma_1(T^*) = \sigma_1(T)$.

Así pois, dado que $T^* \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$, a traza de T^* está ben definida e

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} T^* &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle T^*e_k, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, Te_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\langle Te_k, e_k\rangle} \\ &= \overline{\sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k, e_k\rangle} = \overline{\operatorname{tr} T}.\end{aligned}$$

(c)

Tendo en conta a hipótese e empregando unha desigualdade tipo Hölder sobre os números singulares (que non probaremos aquí), basta observar que

$$\sigma_1(ST) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(ST) \le \Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(S)^q\Big)^{1/q} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p\Big)^{1/p} = \sigma_q(S)\,\sigma_p(T) < \infty,$$

para concluír que $ST \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$. Para probar que $TS \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ procédese de forma completamente análoga.

Ademais, como vimos na proba do teorema 4.2 anterior, verifícase que

$$|\operatorname{tr} T| = |\sum_{n=1}^{\infty}\langle Te_k, e_k\rangle| \le \sum_{n=1}^{\infty}\langle |Te_k, e_k|\rangle \le \sigma_1(T),$$

o que nos permite concluír que

$$|\operatorname{tr}(RT)| \le \sigma_1(RT) \le \sigma_p(T)\,\sigma_q(R).$$

Para probar a igualdade das trazas faremos uso da descomposición de Schmidt de T:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x, \varphi_n\rangle \psi_n, \quad x \in \mathcal{H}.$$

En efecto, pois en tal caso

$$STx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x, \varphi_n\rangle S\psi_n \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

de onde deducimos que

$$\operatorname{tr}(ST) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle ST\varphi_n, \varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle S\psi_n, \varphi_n \rangle.$$

Doutra banda, dado que

$$TSx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle Sx, \varphi_n \rangle \psi_n \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

obtemos igualmente que

$$\operatorname{tr}(TS) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle TS\varphi_n, \varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle S\psi_n, \varphi_n \rangle. \qquad \square$$

Nota 4.5 (O produto interior do espazo de Hilbert-Schmidt)**.**
Empregando os resultados enunciados na Proposición 4.4 anterior e definindo

$$\langle T, S \rangle = \operatorname{tr} \langle T^* S \rangle \quad \text{para } T\, S \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$$

obtemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un produto interior na clase de Schatten-von Neumann $\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$. E ademais, para $T \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H})$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle T, T \rangle} &= \sqrt{\operatorname{tr} \langle T^* T \rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \langle T^* T e_i, e_i \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \langle T e_i, T e_i \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|T e_i\|^2} = \sigma_2(T). \end{aligned}$$

Polo tanto, $(\mathcal{S}_2, \sigma_2)$ é un espazo de Hilbert, pois a norma σ_2 deriva dun produto interior.

Pódese probar facilmente que para $p \neq 2$, a clase de Schatten-von Neumann $(\mathcal{S}_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$ non é un espazo de Hilbert.

4.2. O dual das clases de Schatten-von Neumann

Lema 4.6.
Dados dous vectores $x, y \in \mathcal{H}$ consideramos o operador $T_{x,y} \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definido como

$$T_{x,y} z = \langle z, y \rangle x \qquad \textit{para todo } z \in \mathcal{H}.$$

En tal caso, para calquera $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\operatorname{tr}(T_{x,y} S) = \langle Sx, y \rangle.$$

Demostración.

Basta observar que se $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é unha base de Hilbert de $\mathcal{H}$, entón

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(T_{x,y}S) &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle T_{x,y}Se_k, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle\langle Se_k, y\rangle x, e_k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\langle Se_k, y\rangle \langle x, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, S^*y\rangle \langle x, e_k\rangle \\ &= \langle x, S^*y\rangle = \langle Sx, y\rangle.\end{aligned}$$

□

O seguinte resultado constitúe a porta de acceso a unha caracterización do dual das clases de Schatten-von Neumann, pois mostra unha relación de dualidade entre as normas cuxos índices sexan expoñentes conxugados.

Teorema 4.7 (Caracterización case-dual de σ_p)**.**

(*a*) *Dado* $T \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$*, entón*

$$\sigma_1(T) = \sup\Big\{|tr(ST)| : S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ con } \|S\| = 1\Big\} \tag{4.2}$$

(*b*) *Dado* $1 < p < \infty$ *e* $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$*, entón*

$$\sigma_p(T) = \sup\Big\{|tr(ST)| : \sigma_q(S) = 1\Big\} \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4.3}$$

(*c*) *Dado* $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$*, entón*

$$\sigma_\infty(T) = \sup\Big\{|tr(ST)| : S \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H}) \text{ con } \sigma_1(S) = 1\Big\} \tag{4.4}$$

Demostración.

"$\leq$"

En virtude da Proposición 4.4, podemos afirmar que:

$$|\operatorname{tr}(ST)| \leq \sigma_p(T)\,\sigma_q(S), \tag{4.5}$$

de onde se conclúe que

$$\sup\{|\operatorname{tr}(ST)| : \sigma_q(S) = 1\} \leq \sigma_p(T), \tag{4.6}$$

o cal vale para as tres casuísticas formuladas no enunciado.

"$\geq$"

Separemos a demostración desta desigualdade para cada un dos tres casos.

(*b*) Sexa $1 < p < \infty$ e $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$.

Consideremos a descomposición de Schmidt de T,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x, \varphi_n\rangle \psi_n.$$

Tomemos o seguinte operador:

$$S_N x = \Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\Big)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)^{p/q}\, \langle x, \psi_n\rangle \varphi_n.$$

É inmediato decatarse de que S_N é un operador de rango finito para cada $N \in \mathbb{N}$, polo que, en particular, $S_N \in S_q$.

Nótese, ademais, que a expresión de S_N non é outra cousa que unha descomposición de Schmidt (o que permite ver, en efecto, que é de rango finito):

$$S_N x = \sum_{n=1}^{N} \left(\Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\Big)^{-1/q} s_n(T)^{p/q} \right) \langle x, \psi_n\rangle \varphi_n,$$

onde o que hai entre parénteses son os números singulares de S_N.

Consecuentemente, tense que:

$$\begin{aligned}\sigma_q &= \left[\sum_{n=1}^{N} \left(\Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\Big)^{-1/q} s_n(T)^{p/q} \right)^q \right]^{1/q} = \left[\sum_{n=1}^{N} \left(\Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\Big)^{-1} s_n(T)^{p} \right) \right]^{1/q} = \\ &= \Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\Big)^{-1/q} \Big(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^p\Big)^{1/q} = 1.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Unha vez feita esta comprobación, obteñamos o seguinte:

$$\begin{aligned} S_N Tx &= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-1/q} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{p/q} \langle Tx, \psi_n\rangle \varphi_n \\ &= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-1/q} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{p/q} \Big\langle \sum_{j=1}^\infty s_j(T)\langle x, \varphi_j\rangle \psi_j, \psi_n \Big\rangle \varphi_n \\ &= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-1/q} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{p/q} \sum_{j=1}^\infty s_j(T)\langle x, \varphi_j\rangle \, \langle \psi_j, \psi_n\rangle \varphi_n \\ &= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-1/q} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{p/q} s_n(T) \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n \\ &= \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{-1/q} \sum_{n=1}^N s_n(T)^{p} \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n, \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde no derradeiro paso empregamos que $\frac{p}{q}+1 = p$ por seren expoñentes conxugados. Polo tanto, tomando $x = \varphi_n$ no anterior e introducíndoo na definición dada de traza:

$$\operatorname{tr}(S_N T) = \sum_{n=1}^N \langle S_N T\varphi_n, \varphi_n\rangle = \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{1/p},$$

onde empregamos que $-\frac{1}{q}+1 = \frac{1}{p}$.

Así, concluímos que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup\{|\mathrm{tr(ST)}| : \sigma_q(S) = 1\} \geq \Big(\sum_{n=1}^N s_n(T)^p\Big)^{1/p} = \sigma_p(T),$$

como queriamos ver.

(a) Sexa $T \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$.

Tomemos o seguinte operador:

$$S_N x = \sum_{n=1}^N \langle x, \psi_n\rangle \varphi_n.$$

Consecuentemente, tense que:

$$\sigma_\infty(S_N) = \|S_N\| = 1,$$

e por inmediata analoxía co apartado previo:

$$S_N Tx = \sum_{n=1}^{N} s_n(T)\langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n.$$

Polo tanto, tomando $x = \varphi_n$ no anterior e introducíndoo na definición dada de traza:

$$\mathrm{tr}(S_N T) = \sum_{n=1}^{N} s_n(T).$$

Así, concluímos que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup\{|\mathrm{tr}(\mathrm{ST})| : \sigma_\infty(S) = 1\} \geq \sum_{n=1}^{N} s_n(T) = \sigma_1(T),$$

como queriamos ver.

(*c*) Sexa $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$.

Tomemos o seguinte operador de rango 1:

$$R_{\varphi,\psi} x = \langle x, \psi\rangle \varphi.$$

Consecuentemente, se $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$, tense que:

$$\sigma_1(R_{\varphi,\psi}) = \|R_{\varphi,\psi}\| = 1,$$

e en virtude do Lema 4.6 anterior:

$$|\mathrm{tr}(R_{\varphi,\psi} T)| = |\langle T\varphi, \psi\rangle|.$$

Así, concluímos que

$$\sup\{|\mathrm{tr}(\mathrm{ST})| : \sigma_1(S) = 1\} \geq \sup\{|\langle T\varphi, \psi\rangle| : \|\varphi\| = \|\psi\| = 1\} = \|T\|,$$

como queriamos ver.

□

Lema 4.8.
Sexa $B\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ unha aplicación sesquilineal (lineal en x e conxugada-lineal en y). Se existe $K > 0$ de modo que

$$B(x, y) \leq K\|x\|\,\|y\| \quad \textit{para todo } x, y \in \mathcal{H}, \tag{4.9}$$

entón existe $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de modo que

$$B(x, y) = \langle Tx, y\rangle \quad \textit{para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

Demostración.

Dado $x \in \mathcal{H}$, consideraremos o funcional lineal e limitado $f_x \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$f_x(y) = \overline{B(x,y)} \quad \text{para cada } y \in \mathcal{H}.$$

Daquela, en virtude do Teorema de representación de Riesz, existe un único $Tx \in \mathcal{H}$ de xeito que

$$\overline{B(x,y)} = \langle y, Tx \rangle \quad \text{para todo } y \in \mathcal{H},$$

ou equivalentemente,

$$B(x,y) = \langle Tx, y \rangle \quad \text{para todo } y \in \mathcal{H}.$$

Comprobemos que a asignación de $x \in \mathcal{H} \longmapsto Tx \in \mathcal{H}$ mencionada anteriormente define un operador lineal e limitado. A linealidade é evidente. En efecto, pois para $v, w \in \mathcal{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ arbitrarios, temos que

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha v + \beta w), y \rangle &= \alpha B(v,y) + \beta B(w,y) \\ &= \alpha \langle Tv, y \rangle + \beta \langle Tw, y \rangle \\ &= \langle \alpha Tv + \beta Tw, y \rangle \quad \text{para todo } y \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

e entón

$$\langle T(\alpha v + \beta w) - \alpha Tv - \beta Tw, y \rangle = 0 \quad \text{para todo } y \in \mathcal{H},$$

é dicir,

$$T(\alpha v + \beta w) = \alpha Tv + \beta Tw.$$

A continuidade de T é unha consecuencia inmediata da hipótese (4.9). En efecto, pois

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\} \leq K. \qquad \square$$

Probaremos, a continuación, unha serie de teoremas que caracterizarán os duais das clases de Schatten-von Neumann, resultando non ser outra cousa que as clases de expoñente conxugado.

Teorema 4.9 (Caracterización do dual de $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$, $1 < p < \infty$)**.**
Sexan $1 < p < \infty$ e q o seu expoñente conxugado. Entón, os funcionais lineais e limitados sobre $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ son da forma

$$F(T) = \operatorname{tr}(ST), \tag{4.10}$$

con $S \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ univocamente determinado e $\|F\| = \sigma_q(S)$. En definitiva, o espazo dual de $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ resulta $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})^* = \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$.

Demostración.

Comecemos tomando un funcional $F : \mathcal{S}_p(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal e limitado e comprobemos que a súa expresión vén dada por $F(T) = \mathrm{tr}\,(ST)$ con $S \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$.

Consideremos $x, y \in \mathcal{H}$ e o operador de rango 1 construído mediante:

$$T_{x,y}z = \langle z, y\rangle x.$$

Definamos agora a súa imaxe por F,

$$B(x, y) = F(T_{x,y}),$$

e comprobemos que estamos nas hipóteses do Lema 4.8 anterior.

En efecto, B é sesquilineal, pois:

$$\begin{aligned} T_{x,\lambda y_1+\mu y_2}z &= \langle z, \lambda y_1 + \mu y_2\rangle x = \overline{\lambda}\langle z, y_1\rangle x + \overline{\mu}\langle z, y_2\rangle x \\ &= \overline{\lambda}\, T_{x,y_1}z + \overline{\mu}\, T_{x,y_2}z, \end{aligned}$$

e ademais está limitado por:

$$|B(x, y)| \leq \|F\|\, \sigma_p(T_{x,y}) = \|F\|\, \|x\|\, \|y\|.$$

Así pois, estamos nas hipóteses solicitadas, logo existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de xeito que, para $x, y \in \mathcal{H}$,

$$B(x, y) = \langle Sx, y\rangle.$$

Pero entón, en virtude do Lema 4.6,

$$B(x, y) = F(T_{x,y}) = \langle Sx, y\rangle = \mathrm{tr}(ST_{x,y}).$$

Estendendo o resultado anterior para todo operador T de rango finito, F(T)=tr(ST). Necesitamos que isto sirva para calquera operador en $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$, ademais de comprobar que $S \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$.

O primeiro é inmediato, pois en virtude do Lema 3.3, os operadores de rango finito son densos en $\mathcal{S}_p$, o que nos permite aplicar o resultado anterior a todo $T \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H})$.

En canto á segunda afirmación, empregando o Teorema 4.7:

$$\begin{aligned} \sigma_q(S) &= \sup\{|\mathrm{tr}(ST)| : \sigma_p(T) = 1, \mathrm{rang}(T) < \infty\} \\ &= \sup\{|F(T)| : \sigma_p(T) = 1, \mathrm{rang}(T) < \infty\} \\ &= \|F\| < \infty \end{aligned}$$

onde a finitude da norma débese, de novo, a que os operadores de rango finito son densos en $\mathcal{S}_p$. Por tanto, como $\sigma_q(S) < \infty$, entón $S \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$, como queriamos ver.

Só queda por ver que $S \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$ está unívocamente determinado á hora de identificarse con F.

Supoñamos, pois, que existe outro $\hat{S} \in \mathcal{S}_q(\mathcal{H})$ representando a F. En tal caso:

$$\begin{aligned}\sigma_q(S-\hat{S}) &= \sup\Big\{|\mathrm{tr}\,((S-\hat{S})T)| : \sigma_p(T)=1\Big\}\\ &= \sup\Big\{|\mathrm{tr}\,(ST) - \mathrm{tr}(\hat{S}T))| : \sigma_p(T)=1\Big\}\\ &= \sup\Big\{|F(T) - F(T)| : \sigma_p(T)=1\Big\} = 0.\end{aligned}$$

Polo tanto, $S = \hat{S}$, demostrando a unicidade da representación. □

Teorema 4.10 (Caracterización do dual de $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$).
Os funcionais lineais e limitados sobre $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ son da forma

$$F(T) = \mathrm{tr}\,(ST), \tag{4.11}$$

con $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ univocamente determinado e $\|F\| = \|S\|$). En definitiva, o espazo dual de $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ resulta $\mathcal{S}_1(\mathcal{H})^* = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demostración.

Análoga en todos os seus argumentos á do Teorema 4.9 anterior. □

Teorema 4.11 (Caracterización do dual de $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$).
Os funcionais lineais e limitados sobre $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ son da forma

$$F(T) = tr(ST), \tag{4.12}$$

con $S \in \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$ univocamente determinado e $\|F\| = \sigma_1(S)$. En definitiva, o espazo dual de $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ resulta $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})^* = \mathcal{S}_1(\mathcal{H})$.

Demostración.

Tomemos un funcional $F : \mathcal{S}_p(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal e limitado. Do feito de que $\ell_2 \subset \ell_\infty$ deducimos que $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_\infty$. Entón, o funcional F leva os elementos de $\mathcal{S}_2$ en $\mathbb{C}$, isto é, $F \in \mathcal{S}_2^*$. Así, en virtude da demostración do Teorema 4.9, sabemos que existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de xeito que

$$F(S) = \mathrm{tr}\,(ST)$$

para todo operador T de rango finito. Así:

$$\begin{aligned}\sigma_1(S) &= \sup\Big\{|\mathrm{tr}\,(ST)| : \sigma_\infty(T) = 1,\ \mathrm{rang}(T) < \infty\Big\}\\ &= \sup\Big\{|F(T)| : \sigma_\infty(T) = 1\Big\} = \|F\| < \infty,\end{aligned}$$

onde a finitude da norma débese á densidade dos operadores de rango finito en $\mathcal{S}_\infty$. $\square$

Bibliografía

[1] Cauchy, A. L. (1829). *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes*, Exercises de mathématiques **4**, 174–195.

[2] Habala, P., Hájek, P. e Zizler, V. (1996). *Banach spaces I*, MatfyzPress, Charles University, Praga.

[3] Jacobi, C. G. J. (1834). *Di binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integra- lium multiplicium*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 12, 1–69.

[4] Lalesco, T. (1912). *Introduction à la théorie des équations intégrales*, Hermann, Paris.

[5] Pietsch, A. (1980). *Operator Ideals*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford.

[6] Pietsch, A. (2014). *Traces of operators and their history*, Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, Volume 18, Number 1, June 2014. Recuperado de: `https://ojs.utlib.ee/index.php/ACUTM/article/view/ACUTM.2014.18.06/12095`

[7] Segurado, A. (2013). *Números singulares, clases de Schatten-von Neumann, números de entropía y conceptos relacionados*, Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático (Universidad Complutense de Madrid). Recuperado de: `https://ucm.es/data/cont/docs/193-2013-10-07-AlbaSegurado.pdf`

[8] von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin.