



Marcos Soto Búa

Tesis doctoral

**SENSORES DE CURVATURA:
OPTIMIZACIÓN DE SU RENDIMIENTO**

Departamento de Física Aplicada
Facultad de Física

Santiago de Compostela, 27 de noviembre de 2006

Eva Acosta Plaza, profesora titular de la Universidade de Santiago de Compostela,

EXPONE:

Que la presente memoria, titulada “*Sensores de curvatura: optimización de su rendimiento*”, ha sido realizada bajo mi dirección por el doctorando **Marcos Soto Búa** en el Área de Óptica del Departamento de Física Aplicada de la Universidade de Santiago de Compostela y constituye la tesis doctoral que presenta para optar al título de Doctor en Física por esta universidad.

Fdo.: La directora,

Fdo.: El doctorando,

Eva Acosta Plaza

Marcos Soto Búa

*A todos pertenece lo que piensas. Solo
es tuyo lo que sientes. Si quieres que
sea tuyo lo que piensas, has de sentirlo.*

Friedrich von Schiller (1759-1805)

A Josito
A mis padres

Agradecimientos

Esta memoria es el resultado de un largo trabajo de investigación realizado en el Área de Óptica del Departamento de Física Aplicada de la Universidade de Santiago de Compostela (USC). Quiero aquí expresar mi agradecimiento a Eva Acosta Plaza, directora de la tesis doctoral, por su inestimable ayuda para la materialización de este proyecto, y a Susana Ríos Rodríguez, por su implicación y ánimo personal. A los miembros del despacho colectivo de la planta baja y *satélites* - al fin y al cabo, todo el mundo pasa por allí periódicamente -, por el interés que siempre han mostrado por mi investigación. Pero, sobre todo, por estrechar vínculos con mi vida personal.

Muy especialmente, a mi querido José Luis le agradezco el tremendo apoyo, en todos los órdenes, que me ha brindado para terminar este trabajo de investigación. Él sabe que puede considerarlo como el suyo propio y a él se lo dedico. A mi familia al completo, su inefable ayuda y su confianza en mí a lo largo de todos estos años. A mis otros amigos, que siempre están ahí cuando los necesito para apoyarme y darme todo su cariño, les agradezco el compartir conmigo tantos buenos momentos en su tiempo libre, escaso y valioso. A los voluntarios y compañeros de José Luis en Intermón-Oxfam (IO), su interés sincero en el progreso de la redacción de esta memoria.

Para realizar este trabajo de investigación he disfrutado de una beca predoctoral concedida por la Secretaría Xeral de Investigación e Desenvolvemento de la Xunta de Galicia - hoy Dirección Xeral de Investigación, Desenvolvemento e Innovación (I+D+i) de la Consellería de Innovación e Industria - y de otra perteneciente al Programa de Formación de Personal Investigador (FPI) del Ministerio de Ciencia y Tecnología - hoy Ministerio de Educación y Ciencia -, organismos a los que les agradezco el apoyo económico prestado.

Por último, indicar que el trabajo redactado en esta memoria se enmarca dentro de varios proyectos de investigación financiados por la Xunta de Galicia (Ref. PGIDT00PXI20601PR), y por el Ministerio de Educación y Ciencia (Ref. AYA2000-1565-C02-02 y AYA2004-07773-C02-02).

Índice general

Introducción	1
1. La Ecuación de Transporte de Intensidad como técnica de recuperación de fase	5
1.1. Introducción	5
1.2. Fundamentos	9
1.3. Medida experimental de la derivada axial: aproximaciones lineales . .	12
1.4. Rendimiento de un sensor basado en la ETI: criterios de selección de los planos	14
1.5. Objetivos	16
1.5.1. Diseñar un método objetivo para seleccionar la posición de los planos que optimiza las medidas del sensor en el interior . . .	17
1.5.2. Diseñar un método objetivo para seleccionar la posición de los planos que optimiza las medidas del sensor en la frontera . . .	17
1.5.3. Mejorar el rendimiento del sensor de curvatura basándose en tomar medidas de irradiancia en múltiples planos	18
1.5.4. Analizar la contribución de las medidas de frontera	19
2. Optimización de la medida del interior	21
2.1. Factores que limitan la estimación de la curvatura del frente de onda	22
2.2. Varianza de la estimación de la derivada axial	23
2.2.1. Fórmula central de Stirling en diferencias finitas	23
2.2.2. Fórmula progresiva o regresiva de Newton en diferencias finitas	24
2.3. Selección del plano de medida	25
2.3.1. Análisis de la evolución axial de la intensidad	26
2.3.2. Varianza de la estimación del laplaciano de una fase cuadrática	27
2.3.3. Selección de la separación óptima y cotas superior e inferior de error	35

2.4.	Ejemplo: Selección de la separación óptima para el telescopio Gemini	42
2.4.1.	Características del sistema y de la turbulencia	43
2.4.2.	Cálculo de la separación óptima	44
3.	Optimización de la medida de frontera	49
3.1.	Métodos de medida de la derivada normal de la fase en la frontera . .	50
3.1.1.	Método directo de medida de la deformación de la región iluminada	51
3.1.2.	Metodo indirecto de medida de la deformación de la región iluminada	53
3.2.	Factores que limitan la medida de frontera	56
3.3.	Varianza de la estimación de la derivada normal en la frontera	57
3.3.1.	Método directo	57
3.3.2.	Método indirecto	58
3.4.	Selección del plano de medida	61
3.4.1.	Análisis de la dinámica del borde de la región iluminada	62
3.4.2.	Varianza de la estimación de la derivada normal de una fase cuadrática	64
3.5.	Selección de la separación óptima	70
3.6.	Ejemplo: Selección de la separación óptima para el telescopio Gemini	77
4.	Sensor de curvatura multiplano	81
4.1.	Introducción	81
4.2.	Varianza de la estimación de la derivada axial con fórmulas en múltiples planos	82
4.2.1.	Fórmula central de Stirling	82
4.2.2.	Fórmula progresiva y regresiva de Newton	85
4.3.	Selección del plano de medida	86
4.3.1.	Varianza de la estimación de la curvatura local y separación óptima	87
4.3.2.	Varianza de la estimación de la derivada normal local y separación óptima	92
4.4.	Rendimiento del sensor de curvatura multiplano	96
4.4.1.	Calidad del laplaciano recuperado en función del número de planos	96

4.4.2. Calidad de la derivada normal recuperada en función del número de planos	102
5. El problema de contorno	105
5.1. Introducción	105
5.2. Estimación del frente de onda a partir de medidas de irradiancia . . .	105
5.3. Estimación modal ortogonal	107
5.3.1. Estimación modal mediante proyectores ortogonales	109
5.3.2. Ajuste modal a medidas de irradiancia	110
5.4. Análisis de la necesidad de las medidas en el contorno	112
5.4.1. Distribución uniforme de irradiancia	113
5.4.2. Distribución no uniforme de irradiancia	119
Conclusiones	127
A. La Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI)	131
B. Rendimiento del sensor de curvatura en condiciones de iluminación limitadas	135
B.1. Varianza de la estimación de la curvatura local, cotas de error y posición óptima	136
B.2. Varianza de la estimación de la derivada normal local y separación óptima	144
C. La fórmula de Roddier	153
C.1. La fórmula de Roddier y la Ecuación de Transporte de Intensidad . .	154
C.2. Varianza de la fórmula de Roddier	155
C.3. Varianza de la estimación de la curvatura local, cotas de error y posición óptima	157
C.4. Varianza de la estimación de la derivada normal local y separación óptima	160
Bibliografía	175
Publicaciones relacionadas con este trabajo	191

Introducción

El trabajo recogido en esta memoria se enmarca en el problema de la reconstrucción de la fase de una onda electromagnética a partir de medidas de irradiancia y se centra, en concreto, en la técnica de reconstrucción en la aproximación paraxial basada en la Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI). Esta ecuación liga la derivada axial instantánea de la irradiancia de un haz con la variación transversal de los frentes de onda. La trascendencia de la ETI como técnica de recuperación de fase se encuentra en la sencillez para ser implementada simplemente a partir de medidas de irradiancia en dos planos paralelos y ortogonales al eje óptico, que la convierte en un método versátil, aplicable en muchas ramas de investigación en Óptica, entre las que destacan la Óptica activa y adaptativa, la caracterización de materiales y la Microscopía. Nuestro objetivo principal en este trabajo es realizar un estudio detallado de este método que permita optimizar su rendimiento en sus distintas aplicaciones.

La apertura finita de los dispositivos que atraviesa el haz de luz, se traduce en la presencia de una pupila en el plano de recuperación. En consecuencia, las medidas de irradiancia necesarias para estimar la derivada axial no solo deben realizarse en el interior de la pupila, sino también en torno al borde o frontera, lo que veremos será esencial para recuperar la fase sin ambigüedades. Por otra parte, la conservación de la paraxialidad exige que los frentes de onda sean fundamentalmente planos. En la mayoría de las aplicaciones, esto significa que la irradiancia en el plano de recuperación se puede considerar aproximadamente uniforme. En esta situación la ETI informa de que las medidas en el interior de la pupila se relacionan con la curvatura del frente de onda, mientras que las medidas en la frontera proporcionan su derivada normal. De ahí el nombre de los sensores de frente de onda basados en la ETI aplicados en Óptica Astronómica, que comunmente se han llamado sensores de curvatura.

En este trabajo se da respuesta a tres cuestiones que surgen al trabajar con sensores de curvatura. Primero, cómo optimizar el rendimiento del sensor de

curvatura en las configuraciones habituales del mismo. Segundo, cómo mejorar la respuesta del sensor para que la fase recuperada tenga más resolución. Tercero, debido a la mayor dificultad para realizar medidas precisas en la frontera, determinar el peso de la información recuperada en el borde de la pupila respecto del resto de información obtenida a partir de medidas en el interior.

La memoria se ha estructurado en cinco capítulos. En el primero de ellos, se hace una revisión histórica de la ETI como técnica de recuperación de fase en diversas aplicaciones, se revisan los problemas principales que surgen al ponerla en práctica, las limitaciones de las soluciones utilizadas hasta la fecha y se proponen nuevas soluciones que constituyen los objetivos de este trabajo de investigación.

En el capítulo segundo, se trata la estimación de la derivada axial de la irradiancia en el interior de la pupila suponiendo irradiancia uniforme en el plano de recuperación, es decir, se estudia la estimación del laplaciano de la fase. En concreto, se identifican las principales fuentes de error de las medidas de la curvatura del frente de onda y se modela su varianza en función de estos factores y de la posición axial de los planos de irradiancia. Por último, se procede al diseño de un método para optimizar el rendimiento del sensor en relación con estas medidas, que se comprueba en un ejemplo ilustrativo.

En el capítulo tercero, se introducen los métodos más habituales para obtener información de la fase en el borde de la pupila, se analizan sus principales limitaciones y se calcula una expresión para el error de la derivada normal de la fase en función de estos factores limitantes y de la posición axial de los planos de irradiancia. Con esta información se procede al diseño de un procedimiento de optimización de este tipo de medidas, que, al igual que en el capítulo anterior, se ilustra con un ejemplo.

Una vez identificadas las limitaciones de las implementaciones tradicionales de la ETI, en el capítulo cuarto se proponen otras configuraciones del sensor persiguiendo el objetivo de mejorar su rendimiento fijadas las condiciones de medida.

Por último, en el capítulo quinto, se aborda el problema de contorno que constituye la ETI aplicada a un haz de luz que ha atravesado una pupila, con la perspectiva de analizar la importancia en el resultado final de la información recuperada en el borde de la misma. La complejidad manifiesta de las medidas en el borde de la pupila justifica un estudio donde se pondere su peso en la recuperación de la fase en comparación con las medidas en el interior.

Para concluir, se incluyen tres apéndices no solo con herramientas de apoyo para la comprensión de los capítulos, sino también con información complementaria más orientada hacia aplicaciones concretas de la ETI, que no aparece en el cuerpo de la

memoria para dinamizar su lectura, pero no por ello menos importante. En el primero se deduce la ETI y se halla la versión de la misma particularizada a haces limitados a una abertura en el plano de recuperación. En el segundo se obtienen las expresiones necesarias para aplicar el procedimiento que se desarrolla en esta memoria para optimizar la respuesta del sensor de curvatura, en aquellas aplicaciones donde haya una limitación temporal que repercute en la detección de un número finito de fotones. Por último, el tercero concierne a la configuración más habitual de esta técnica de recuperación de fase en el ámbito de la Óptica adaptativa aplicada a la Astronomía: la configuración de Roddier.

Capítulo 1

La Ecuación de Transporte de Intensidad como técnica de recuperación de fase

En este capítulo inicial, se aborda el papel de la Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI) en el problema de la recuperación de fase a partir de medidas de irradiancia, para dar contexto al trabajo de investigación que recoge esta memoria. Tras un repaso, en la primera sección, de las principales aplicaciones de la ETI, en la segunda sección se introduce esta ecuación como relación útil para resolver un problema genérico de recuperación de fase, así como las necesidades y dificultades más importantes que surgen al aplicarla y algunas de las soluciones que se han propuesto hasta la fecha para reducirlas. Basándonos en estos antecedentes, en la tercera sección, se explican las cuestiones que han motivado este trabajo de investigación y las propuestas generales para dar solución a tales cuestiones, que constituyen los pilares del mismo.

1.1. Introducción

Cuando una onda electromagnética se propaga en un medio determinado, su amplitud y su fase sufren modificaciones en mayor o menor grado, acumulando información acerca del medio que atraviesa. La variación de amplitud provocada por la absorción de radiación durante la propagación proporciona datos acerca de la estructura del medio atravesado. No obstante, en ocasiones el medio es tan poco absorbente que la onda se transmite sin que su amplitud se modifique visiblemente.

Es entonces cuando la obtención de la fase de la onda a la salida del objeto o medio dispersivo es esencial para reunir información acerca del mismo, a costa de tener que emplear algoritmos y técnicas complejas.

Los dispositivos que se encargan de medir observables con los que obtener información acerca de la fase de la onda electromagnética se llaman sensores de frente de onda [1, 2]. Este tipo de aparatos se utilizan en muchas aplicaciones, como control de calidad de componentes ópticos [3–5] o de haces láser de alta energía, pero su mayor desarrollo llegó dentro del campo de la Óptica Astronómica de la mano de la Óptica activa y adaptativa, cuyo concepto fue descubierto en paralelo por dos investigadores en la década de los cincuenta (H. Babcock y V. P. Linnik) [6]. Sin embargo, los intentos serios de aplicar esta tecnología en Astronomía se hicieron esperar hasta mediados de los años setenta [7–9] y, hasta los noventa, la mayor parte del esfuerzo para desarrollarla se centró en las aplicaciones militares [6, 10, 11]. En Astronomía la Óptica activa y adaptativa se utiliza para mejorar la resolución de los telescopios terrestres compensando activamente sus aberraciones, inducidas térmicamente o causadas por defectos de fabricación, así como adaptándose a las aberraciones provocadas por las turbulencias atmosféricas, empleando, para ello, un espejo deformable [6, 12–17]. Estos factores tienen más relevancia conforme aumenta el tamaño de los telescopios [18], una necesidad fundamental a la hora de estudiar objetos celestes cada vez de menor tamaño y también menos brillantes [19, 20].

La fase de una onda electromagnética puede obtenerse utilizando variedad de métodos. Por ejemplo, la holografía y la interferometría permiten caracterizar con precisión la forma del frente de onda a partir de patrones de interferencia. Cuando la aplicación exige mayor robustez, estabilidad y mayor flexibilidad en los requerimientos de coherencia de la fuente, se emplean técnicas no interferométricas, entre las que destacan los sensores Shack-Hartmann [1]. Alternativamente, pueden emplearse otros métodos no interferométricos que nos permitan deducir la amplitud compleja de la onda electromagnética a partir de medidas de irradiancia en eje [21–38]. Este conjunto de técnicas se conocen habitualmente como el problema de la recuperación de fase. En este campo, hay métodos prácticos que extraen la fase como resultado de un procedimiento de optimización no lineal iterativo, basado, o bien en el conocimiento de la distribución de intensidad en un segundo plano de difracción, o bien en la aplicación de ciertas ligaduras [21, 22, 27]. Pero también existen métodos deterministas, que se fundamentan en una ecuación matemática que describe una relación más o menos precisa entre la amplitud y la fase de la onda [23–25, 31, 34, 37]. La recuperación es determinista en el sentido de que la fase

se obtiene directamente en función de los datos de irradiancia y la cuestión de la unicidad de la solución ya no surge aquí [39–41], a diferencia de los métodos que emplean algoritmos iterativos [22, 27, 42]. En este trabajo nos centraremos en un subconjunto concreto de estos últimos métodos, los que se basan en la Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI) [24, 25].

La ETI es una ecuación diferencial de continuidad válida para describir, en aproximación paraxial, la propagación de luz en medios homogéneos [43], tanto con iluminación coherente como incoherente* [46, 47]. Si no hay ceros en la distribución de irradiancia, esta ecuación expresa una relación única entre la variación transversal del frente de onda y la variación axial de la intensidad [48, 49]. En particular, si la luz se distribuye uniformemente a la salida del medio atravesado, las variaciones axiales instantáneas de la distribución de irradiancia están provocadas por las curvaturas locales del frente de onda. Este comportamiento sienta las bases del funcionamiento de los conocidos sensores de curvatura, inventados por Roddier a finales de los años ochenta para su aplicación en Óptica activa y adaptativa en Astronomía, por sugerencia de Beckers [12, 50, 51]. Multitud de trabajos ilustran el rendimiento de estos sensores en aplicaciones como el control de calidad de telescopios terrestres y la compensación de las aberraciones provocadas por las turbulencias en imágenes de objetos celestes [10, 16, 17, 53, 54, 56–64]. Otros usos del sensor de curvatura en el campo de la Óptica Astronómica son la alineación en fase de espejos segmentados [65, 66], la obtención del patrón de centelleo de la luz de las estrellas [67] o la recuperación de imágenes solares contrastadas, que demuestra el éxito de esta técnica cuando opera con fuentes extensas [68–70]. En el aspecto de las comunicaciones por satélite, la ETI se ha aplicado en la detección de la inclinación del frente de onda para guiar con precisión un haz láser [71]. También se ha demostrado su utilidad para el control de calidad de espejos [3] o lentes progresivas [72]. En el ámbito de la Óptica Fisiológica, el sensor de curvatura se ha empezado a aplicar recientemente para la medida de la topografía corneal y de la lágrima en el ojo humano [73, 74], y de las aberraciones oculares [75].

Pero, junto con la Óptica Astronómica, la Microscopía es, sin duda, el otro campo donde las técnicas de visualización de fase fundamentadas en la ETI han tenido una aceptación notable [46, 49, 76–105]. Ello ha sido posible gracias a su simplicidad, así como a la sencilla interpretación de los resultados, que las distinguen de las

*Recientemente, Paganin *et al.* han calculado la versión de esta ecuación aplicable cuando el medio refractivo es no lineal [44]. También se ha demostrado útil la versión temporal de la ETI para el cálculo de las propiedades no lineales de materiales ópticos [45].

técnicas interferométricas [80, 85]. En Microscopía la recuperación de la información acumulada en la fase es esencial en muestras poco absorbentes y delicadas, especialmente en el caso de especímenes biológicos, pues la adición de sustancias para incrementar el contraste por absorción puede dañarlos irremediablemente [93]. Inicialmente, los objetos transparentes se visualizaban mediante el simple acto de la propagación en el espacio libre, desenfocando la imagen del microscopio. El incremento de la defocalización aumenta el contraste, pero a costa de disminuir la resolución. Para incrementar la resolución, se idearon técnicas que miden específicamente el desplazamiento de fase del haz que atraviesa la muestra, como el Contraste Diferencial por Interferencia (DIC) o la Microscopía de fase de Zernike [106]. Persiguiendo este mismo objetivo e inspirándose en la técnica de visualización por desenfoco original, la ETI comienza a aplicarse plenamente en Microscopía a finales de los años noventa para resolver objetos débilmente absorbentes.

En el ámbito de la Microscopía óptica, la ETI se ha aplicado para caracterizar materiales y dispositivos ópticos, como microlentes planas [77] y fibras ópticas [80, 82, 85], así como para visualizar estructuras de muestras biológicas [80, 101]. Con el objetivo de resolver las micro o nanoestructuras que componen todo tipo de objetos, la luz visible se sustituye por otro tipo de radiaciones, como en el caso de la Microscopía electrónica [103], la Microscopía por rayos X [76, 78, 79, 81, 87, 94] y la Microscopía por haces de átomos o de neutrones [83, 107, 108]. Cuando se emplean haces de partículas de este tipo, si la radiación tiene poca energía, el objeto ha de someterse a dosis masivas para obtener imágenes contrastadas por absorción, que pueden conducir a posibles daños estructurales [84], o si, por el contrario, la energía de la radiación es muy alta, el contraste por absorción puede ser despreciable. Al igual que en Microscopía óptica, la alternativa pasa por obtener imágenes de fase contrastadas [76, 78, 109]. Existen sofisticadas técnicas interferenciales que permiten obtener datos cuantitativos precisos, pero, cuando se utilizan radiaciones de este tipo, la relajación de los requisitos de coherencia de la fuente es esencial con el fin de rebajar costes y simplificar técnicamente el dispositivo [49, 99, 110]. La aplicación de métodos de recuperación de fase no interferenciales como los fundamentados en la ETI ha flexibilizado enormemente los requisitos técnicos del sistema para muestras homogéneas, alcanzándose altas cotas de calidad en la recuperación [92, 95]. En Microscopía electrónica fueron Lynch *et al.* quienes observaron que el contraste obtenido con una pequeña defocalización es proporcional al laplaciano de la densidad de carga proyectada [93]. Este concepto también se ha aprovechado en Microscopía electrónica de Lorentz para obtener

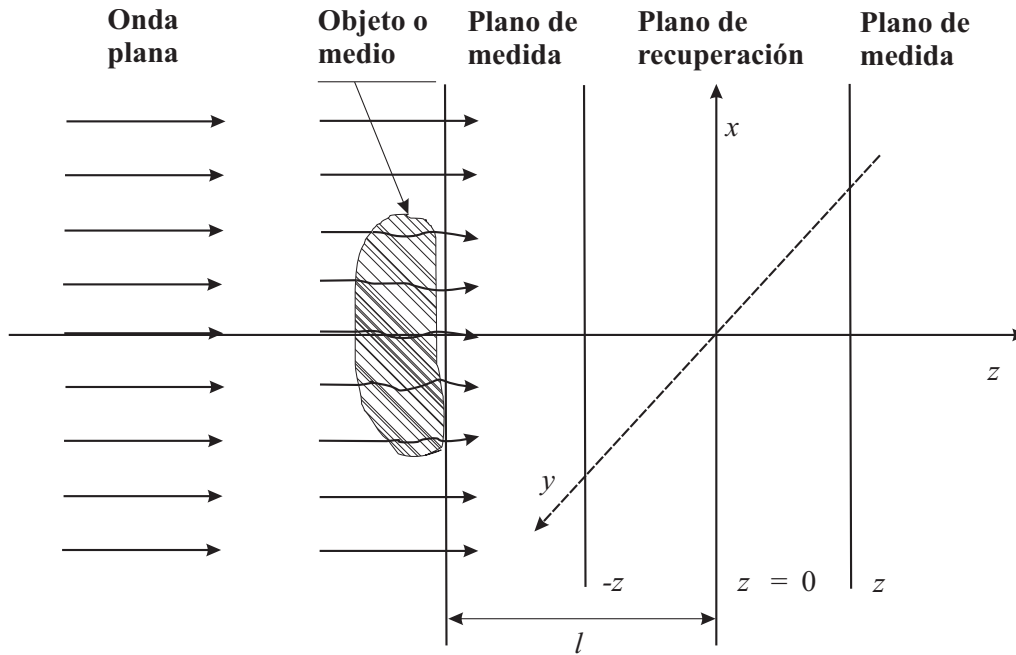


Figura 1.1: Ilustración de un típico experimento de recuperación de fase basado en la ETI en un plano $z = 0$ a la salida de un objeto o medio difractivo.

mapas de potenciales electrostático y magnetostático de materiales magnéticos y superconductores delgados [86, 88, 89, 99, 102, 104, 105, 111–113].

Finalmente, la combinación de las técnicas de recuperación de fase con la reconstrucción tomográfica ha mejorado mucho sus resultados, pues las imágenes de fase contrastadas, menos afectadas por ruido que las imágenes obtenidas por absorción, proporcionan una reconstrucción más limpia [98, 114, 115]. La recuperación es cuantitativa y el resultado ha mostrado una calidad en ocasiones superior a otros métodos de medida empleados comercialmente [82, 85, 96, 97, 116].

1.2. Fundamentos

Consideremos la imagen de la Figura 1.1. La ilustración describe un problema genérico de recuperación de fase. Una onda electromagnética plana se propaga a lo largo de la dirección del eje z e incide en un medio u objeto débilmente dispersivo que no absorbe significativamente la radiación. El objeto o medio atravesado por la onda está localizado en el entorno del eje óptico en el semiespacio $z < 0$ a una distancia l del plano de recuperación de fase, $z = 0$. Como el objeto o medio es débilmente inhomogéneo, la onda transmitida es paraxial, de la forma $\sqrt{I(\mathbf{r}, z)}e^{ikW(\mathbf{r}, z)}e^{ikz}$ con

$\mathbf{r} = (x, y)$, y se propaga a lo largo del eje z .

Aunque no se puede deducir información del objeto a partir de la absorción de radiación, la fase de la onda, $W(\mathbf{r}, z)$, sí transporta con frecuencia importante información acerca del mismo. En esta memoria consideraremos el problema de la reconstrucción de la fase de la onda $W(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}, 0)$ en el plano $z = 0$, a partir de las medidas de la distribución de irradiancia, $I(\mathbf{r}, z)$, en uno o más planos ortogonales al eje óptico. De aquí en adelante, obviaremos en este capítulo la dependencia en \mathbf{r} de estas magnitudes.

La ecuación que describe cómo cambia instantáneamente la irradiancia de una onda electromagnética paraxial en función de las variaciones transversales de la fase, es la Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI) [24]:

$$-I'(z) = \nabla \cdot (I\nabla W) = \nabla I \cdot \nabla W + I\nabla^2 W \quad (1.1)$$

donde $I'(z) = \partial I(z)/\partial z$ es la derivada axial instantánea en un plano z y $\nabla = \partial_x \hat{\mathbf{x}} + \partial_y \hat{\mathbf{y}}$ es el gradiente transversal. La Ec. (1.1) puede resolverse para recuperar la fase de la onda, W , en un plano z si se conoce I' en dicho plano.

Ichikawa *et al.* dan una interpretación de los términos de la derecha de la Ec. (1.1) que explica los fundamentos de los sensores de frente de onda basados en la ETI [117]. El primer término, $\nabla I \cdot \nabla W$, representa la variación de irradiancia causada por el desplazamiento transversal del haz no uniforme ($\nabla I \neq 0$) debido a la inclinación local de los frentes de onda, cuya normal o dirección del rayo viene dada por ∇W . El segundo término, $I\nabla^2 W$, puede interpretarse como las variaciones de irradiancia causadas por las convergencias o las divergencias locales del haz, que dependen de las curvaturas locales de los frentes de onda, $\nabla^2 W$. Ambos sumandos determinan la variación axial de la irradiancia que causan las deformaciones transversales de los frentes de onda a medida que el haz se propaga a lo largo del eje z .

La Ec. (1.1) proporciona una relación entre la irradiancia y la fase de la onda válida en el espacio libre. No obstante, en la práctica, la apertura finita del dispositivo que capta la luz se manifiesta con la presencia de una pupila, $P_o = P(\mathbf{r}, 0)$, en el plano de recuperación de fase. Esta abertura influye en la evolución axial de la irradiancia, lo que obliga a reformular la Ec. (1.1) de la forma (ver Apéndice A):

$$-I'(0) = [\nabla \cdot (I_o \nabla W)] P_o - I_o W_r \delta_c \quad (1.2)$$

donde I_o es la distribución de irradiancia en el interior de la abertura en el plano de recuperación o plano de la pupila, $z = 0$, y δ_c es una distribución lineal de Dirac que coincide con el borde de la pupila. Por tanto, en el plano $z = 0$, el primer término de

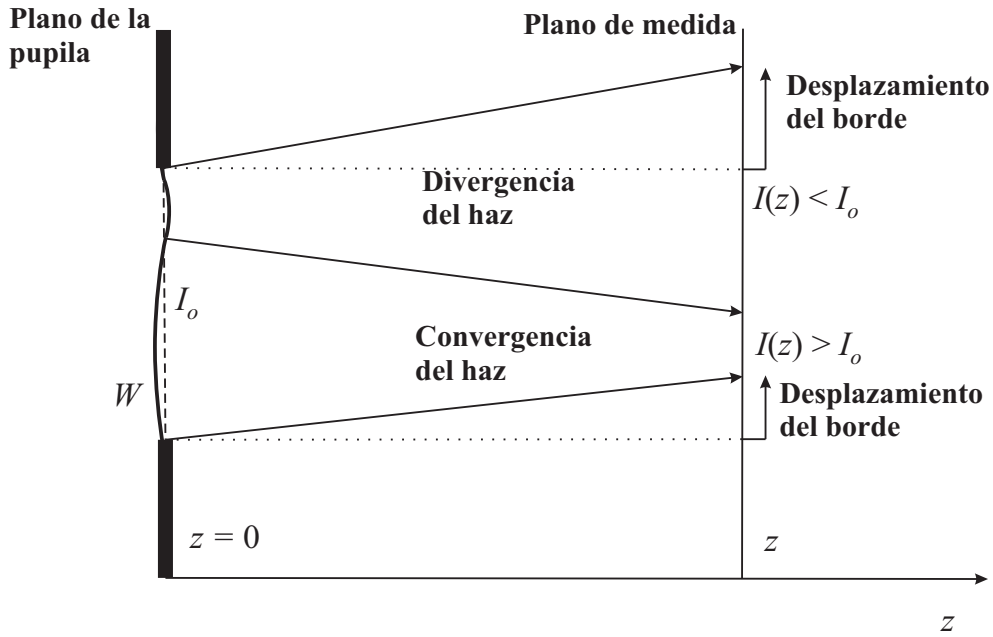


Figura 1.2: Esquema para ilustrar el significado físico de la ETI particularizada a intensidad uniforme en el plano de recuperación de fase. Los rayos convergen y divergen debido a la influencia de las curvaturas locales del frente de onda, redistribuyéndose la irradiancia de los planos posteriores. En consecuencia, la intensidad aumenta en unas zonas y disminuye en otras, y se producen movimientos del borde que deforman la región iluminada.

la derecha describe la variación axial instantánea de la irradiancia en el interior de la abertura y el segundo en el borde o frontera. Si la distribución de luz en el interior de la pupila es uniforme, entonces $\nabla I_0 \cdot \nabla W$ se anula y la ETI toma la conocida forma [118]:

$$-I'(0) = I_0 P_o \nabla^2 W - I_0 W_r \delta_c \quad (1.3)$$

La Ec. (1.3) es una ecuación de Poisson con condición de contorno de Neumann, que relaciona el incremento o decremento local de irradiancia que se produce durante la propagación axial de la luz con la curvatura local de los frentes de onda en el interior de la pupila (ver Figura 1.2) y su derivada normal local en el borde. Constituye la base del funcionamiento de un tipo concreto de sensores que se derivan de la ETI, el llamado sensor de curvatura.

Las Ecs. (1.2) y (1.3) tienen solución analítica única, salvo una constante o pistón, siempre y cuando no haya ceros en la distribución de irradiancia [48], ya que la presencia de puntos donde la intensidad se anula lleva a la aparición de dislocaciones de fase en forma de puntos rama o vórtices [48, 90, 110, 119–122], que en este trabajo

no vamos a estudiar.

A lo largo de esta memoria estudiaremos cómo optimizar la recuperación de la fase a partir de la resolución de la Ec. (1.3). Para ello, ha de medirse $I'(0)$ en el interior de la pupila para estimar el laplaciano de la fase, $\nabla^2 W$, e $I'(0)$ en el contorno para estimar la derivada de la fase normal al borde, W_r . Ahora bien, la presencia de una delta de Dirac, δ_c , en el borde provoca que ambas medidas sean radicalmente distintas, lo que obliga a analizarlas por separado.

1.3. Medida experimental de la derivada axial: aproximaciones lineales

El conocimiento de la variación axial de irradiancia en el plano de la pupila, $z = 0$, es esencial para resolver el problema de recuperación de la fase por medio de la ETI. Sin embargo, no existen detectores que midan directamente la variación axial instantánea de la intensidad. En la práctica, los detectores proporcionan medidas de irradiancia promediadas durante un espacio de tiempo más o menos breve. Por este motivo, los sensores que operan de acuerdo con la ETI utilizan versiones aproximadas de la ecuación, en las que se supone una evolución axial lineal de la irradiancia en los puntos del interior y también de la posición de los puntos del borde. Experimentalmente, se suelen manejar tres configuraciones del sensor, donde la derivada axial se aproxima con fórmulas en diferencias finitas a primer orden de medidas de irradiancia en dos planos paralelos y ortogonales al eje óptico (ver Figura 1.3). Desde el punto de vista técnico, una u otra fórmula puede resultar más apropiada para una aplicación concreta. Si llamamos $I_{\pm} = I(\mathbf{r}, \pm z)$ a la irradiancia detectada en el punto \mathbf{r} en las posiciones axiales $\pm z$, estas fórmulas son las siguientes:

(a) Fórmula central o de Stirling

La derivada se calcula en cada punto \mathbf{r} del plano $z = 0$ a partir de las medidas de irradiancia en los planos $+z$ y $-z$, situados simétricamente a ambos lados del mismo:

$$I'(0) \approx \frac{I_+ - I_-}{2z} = \hat{I}'(0) \quad (1.4)$$

Esta configuración se emplea habitualmente en aplicaciones de la ETI en el campo de la Microscopía tanto óptica, como electrónica, por rayos X o por haces de átomos o neutrones [80, 85, 92, 96, 115]. También se utiliza en Óptica

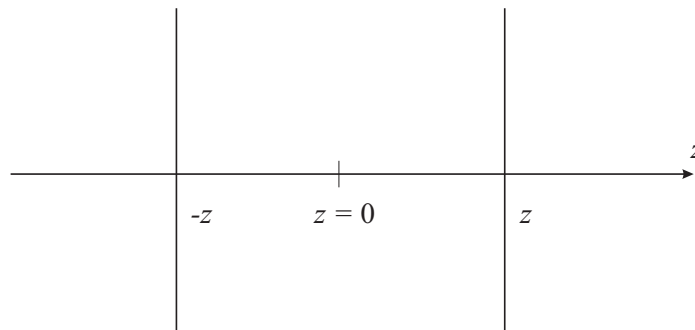
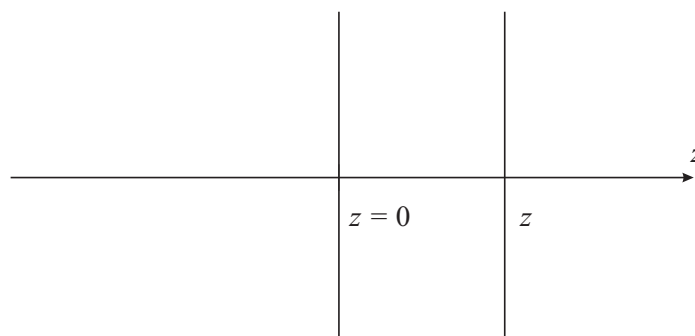
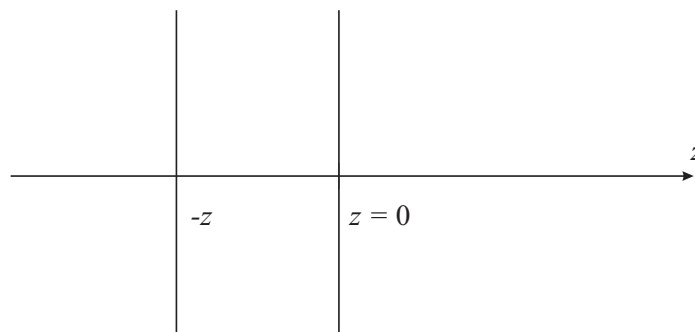
Fórmula central y de Roddier**Fórmula progresiva****Fórmula regresiva**

Figura 1.3: Configuraciones típicas del sensor de curvatura con dos planos de medida transversales al eje óptico para estimar la derivada axial de la irradiancia en el plano de recuperación, $z = 0$.

activa y adaptativa en Astronomía cuando la fuente de iluminación es muy débil [56, 123].

(b) Fórmula progresiva (+) o regresiva (-) de Newton

La derivada se aproxima en los puntos de $z = 0$ a partir de la medida de

irradiancia en $+z$ o bien en $-z$, respectivamente:

$$I'(0) \approx \frac{I_{\pm} - I_o}{\pm z} = \hat{I}'(0) \quad (1.5)$$

Esta fórmula se ha empleado en experimentos de Microscopía para caracterizar materiales u otros objetos homogéneos [81, 95, 98, 103], dispositivos ópticos como espejos [3], lentes [72, 77] y fibras ópticas [82], y, en menor medida, en experimentos de Óptica Astronómica [124, 125], entre los que se encuentran la captura de imágenes solares contrastadas [68].

(c) **Fórmula de Roddier**

Esta fórmula se usa solo en aplicaciones concretas donde pueda asumirse que la distribución de luz es uniforme en el plano de recuperación, $z = 0$. La derivada axial se aproxima con la fórmula central en diferencias finitas y la irradiancia en $z = 0$, I_o , se modela como el valor medio de las irradiancias en los planos $+z$ y $-z$, construyéndose la que se conoce como señal del sensor:

$$S = z \frac{I'(0)}{I_o} \approx \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-} = \hat{S} \quad (1.6)$$

La fórmula de Roddier se utiliza tradicionalmente en los sensores de curvatura integrados en sistemas de Óptica activa y adaptativa acoplados en grandes telescopios terrestres [16, 17, 52, 55–57, 118], pero también se ha empleado puntualmente para alinear en fase espejos segmentados [65, 66], en aberrometría ocular [73–75] y en otras aplicaciones [107, 114].

1.4. Rendimiento de un sensor basado en la ETI: criterios de selección de los planos

La aparición del sensor de curvatura en Óptica Astronómica en competencia con el sensor Shack-Hartmann propició varios trabajos de investigación en la línea de determinar el grado de eficiencia de uno en comparación con el otro [10, 56, 126–128]. Para unas condiciones de medida determinadas, el rendimiento de un sensor Shack-Hartmann está fijado por las características de la matriz de microlentes fija que utiliza. En cambio, la calidad de respuesta del sensor de curvatura está condicionada, sobre todo, por la distancia entre los planos seleccionada para aproximar la derivada axial en diferencias finitas [10, 16, 17, 24, 87, 94, 103, 118, 123, 126, 129, 130], lo

que le permite adaptarse con flexibilidad a cambios en las condiciones de medida [10, 126].

Entre los factores que deterioran la respuesta de un sensor basado en la ETI, pueden distinguirse dos agentes fundamentales: el ruido de los datos de entrada y el rango de validez del modelo matemático en diferencias finitas que se utiliza para estimar la derivada axial. La presencia de ruido aditivo en las señales proporcionadas por los detectores de irradiancia es especialmente relevante en aquellas aplicaciones en las que el sensor opera en condiciones de escasa luminosidad, situación frecuente en Óptica Astronómica. Para acotar su influencia, la separación entre los planos debe limitarse inferiormente. Por otro lado, al implementar señales en diferencias finitas para estimar la derivada axial, se está suponiendo que la irradiancia evoluciona linealmente en el rango de z donde funciona el sensor. Pero el comportamiento no lineal de la intensidad crece conforme la posición del plano de medida se aleja de $z = 0$ y, por tanto, la separación entre los planos no debe ser muy elevada para que la respuesta no lineal del sensor no sea muy significativa [16, 53, 123, 131–133].

En definitiva, los errores de las medidas junto con el comportamiento no lineal de la irradiancia son dos problemas fundamentales íntimamente ligados por la distancia de separación entre los planos, que determina la precisión de la estimación de la derivada axial y, con ello, la calidad de la recuperación. Para lograr un rendimiento óptimo del sensor, ha de escogerse una posición de los planos en el eje z donde la contribución de ambas fuentes de error se equilibre [16, 17, 53, 81, 82, 123, 129, 132–134].

A pesar de ello, en la bibliografía relacionada existe un buen número de publicaciones que tratan aplicaciones de la ETI donde no se hacen referencias a los criterios seguidos para seleccionar los planos de medida utilizados en el experimento [10, 76, 95, 96, 114, 135]. En otras ocasiones, no obstante, sí se da alguna información acerca de cómo se ha deducido la posición de los mismos. Por ejemplo, en las aplicaciones de Óptica Astronómica se suelen programar complicadas simulaciones numéricas que proporcionan resultados estadísticos o probabilísticos que orientan en la elección de la mejor posición [53]. En otros casos se ha optado por seleccionar los planos por ensayo y error comparando en paralelo con otras técnicas para obtener la fase, que ayudan a confirmar si la distancia escogida es adecuada [72, 80, 86, 103, 130]. Asimismo, incluso tras diseñar métodos complicados de selección, a veces se constata el empleo de técnicas poco objetivas para ajustar la posición de los planos, jugando la experiencia del investigador con un peso muy importante en esta tarea [53, 56, 102, 130].

Otros trabajos, como el de Roddier y Roddier [118, 126] y el de Teague [24], proporcionan intervalos que acotan el valor de z a partir del conocimiento estadístico o probabilístico disponible *a priori* acerca de los frentes de onda y de las condiciones de iluminación. El método de Roddier y Roddier se utiliza específicamente en la aplicación de la recuperación de frentes de onda degradados por turbulencias atmosféricas. El criterio de Teague es más general y proporciona un límite superior para z basado en el comportamiento no lineal intrínseco de este tipo de sensores. En concreto, la evolución no lineal de la irradiancia se modela matemáticamente hasta segundo orden en función de las características de la fase. El peso del término lineal respecto del cuadrático proporciona el valor del límite. Asimismo, las fluctuaciones de la irradiancia causadas por el ruido fotónico se cuantifican y se traducen en un extremo inferior del intervalo de operación.

Estos dos métodos facilitan datos objetivos para orientar en la selección de la posición axial de los planos de medida, pero el intervalo que proporcionan es demasiado amplio. El valor de z más adecuado a las condiciones de medida es una distancia imprecisa entre el límite superior y el inferior. En la práctica, ambos métodos sirven, en realidad, para acotar el intervalo axial donde no se deben situar los planos de medida.

Por último, es muy importante destacar que con estos dos criterios se pretende optimizar la medida de la curvatura en el interior de la pupila. Hasta donde llega nuestro conocimiento, no se ha diseñado ningún procedimiento similar que oriente al seleccionar la posición de los planos para estimar la derivada normal de la fase en la frontera.

1.5. Objetivos

En esta sección se exponen los objetivos principales de este trabajo de investigación, enmarcado en el contexto de la recuperación de fase a la salida de un medio u objeto débilmente dispersivo utilizando, para ello, un sensor de curvatura. Por tanto, supondremos que el medio modifica débilmente la amplitud y la fase de la onda y que la distribución de irradiancia es uniforme en el plano de recuperación de fase, $z = 0$. En esta memoria, se presentan nuevas soluciones y respuestas a problemas fundamentales que surgen al trabajar con sensores de curvatura que, en nuestra opinión, todavía se encontraban sin resolver satisfactoriamente. Estas cuestiones son las siguientes:

1.5.1. Diseñar un método objetivo para seleccionar la posición de los planos que optimiza las medidas del sensor en el interior

A la vista de lo expuesto hasta ahora, se deduce que la posibilidad de disponer de un procedimiento objetivo para seleccionar la separación entre los planos más adecuada a las condiciones de medida, facilitaría enormemente la puesta en funcionamiento de este tipo de sensores en sus distintas aplicaciones.

Por este motivo, nos propusimos el desarrollo de un método que proporcionase de forma objetiva la separación óptima conocida cierta información *a priori* acerca de la estadística del ruido y de los frentes de onda. El objetivo de los sensores de curvatura es medir las curvaturas locales de la fase en el interior de la región iluminada [10]. El desarrollo de una teoría para maximizar su rendimiento, pasa por modelar matemáticamente no solo la propagación del ruido a las medidas de curvatura local, sino también del comportamiento no lineal de la respuesta del sensor. A este respecto ha habido algunas aportaciones que analizan estos dos fenómenos por separado [24, 123, 131, 132]. Sin embargo, puesto que la ligadura de ambos errores por medio de la separación z es un hecho comprobado experimentalmente, nos proponemos estudiar la contribución de ambas fuentes de error en conjunto, hallando una expresión que describa la varianza de las medidas de la curvatura local en función de z .

1.5.2. Diseñar un método objetivo para seleccionar la posición de los planos que optimiza las medidas del sensor en la frontera

La medida de la derivada de la fase normal al borde de la pupila es fundamental para obtener la fase sin ambigüedades a partir de la señal proporcionada por un sensor de curvatura, pues constituye la condición de contorno necesaria para resolver la ETI [48]. En la literatura especializada apenas hay reseñas al método para llevar a cabo las medidas de frontera, destacando únicamente los trabajos de Milman *et al* y de I. Han [131, 136]. En cambio, con cierta frecuencia se menciona la dificultad para obtener resultados de calidad para la derivada normal en comparación con la curvatura [53, 66, 136–138]. A pesar de ello, desconocemos la existencia de algún criterio objetivo que oriente en la selección de los planos de medida para obtener la derivada normal.

Los errores de los datos de entrada y el comportamiento no lineal de la dinámica del borde en la propagación de la luz reducen la precisión de esta medida. Disponer de una expresión donde se describa la dependencia del error de la estimación de la derivada normal local con la separación z facilitaría la determinación objetiva de la posición de los planos que garantiza la mejor respuesta del sensor para unas condiciones de medida determinadas. En este trabajo nos proponemos calcularla. Paralelamente, estudiaremos hasta qué punto influye en la calidad de la medida el tamaño de la región de frontera.

Tanto la ETI como las ecuaciones que describen la dinámica del borde de la región iluminada pertenecen al ámbito geométrico. En este trabajo no vamos a tener en cuenta el efecto de la difracción en la recuperación, pues su influencia puede considerarse despreciable [52].

1.5.3. Mejorar el rendimiento del sensor de curvatura basándose en tomar medidas de irradiancia en múltiples planos

La respuesta de un sensor basado en la ETI que opere en la separación óptima podría ser insuficiente para garantizar el grado de resolución en la fase recuperada que la aplicación exige.

Dentro del ámbito de la Microscopía, en los últimos años se ha ganado resolución gracias al diseño de algoritmos lineales alternativos, no basados en la ETI, que propagan menos error de no linealidad trabajando con datos de irradiancia tomados en planos más separados de $z = 0$, buscando reducir el efecto del ruido [36, 94, 139, 140]. También se han diseñado algoritmos iterativos para refinar la fase inicialmente reconstruida por medio de la ETI a partir de las distribuciones de irradiancia en dos planos [16, 90, 98, 134, 141, 142].

Otra de las estrategias utilizadas consiste en emplear algoritmos que precisan de datos de irradiancia en múltiples planos [23, 121, 143–145]. Con estos métodos se incrementa la resolución reduciéndose el efecto del ruido en la reconstrucción de la fase, pero a costa de incrementar las necesidades computacionales. Los algoritmos de este tipo basados en la ETI mejoran los resultados a base de promediar la derivada axial estimada a partir de múltiples pares de planos de irradiancia [144].

Siguiendo esta línea de aumentar la resolución espacial de la recuperación a cambio de incrementar el número de datos de irradiancia, proponemos en este trabajo aplicar fórmulas en diferencias finitas para aproximar la derivada axial de la ETI

utilizando más de dos planos de irradiancia. Con ello se persigue el doble objetivo de minimizar la contribución del ruido de medida y de reducir el error de no linealidad de la aproximación, sin que ello implique necesariamente un incremento sustancial del gasto computacional al reconstruir la fase.

1.5.4. Analizar la contribución de las medidas de frontera

Se ha visto que para poder obtener una solución única del problema de recuperación de fase representado por las Ecs. (1.2) ó (1.3) es necesario estimar $I'(0)$ en el interior de la región iluminada y también en la frontera. Pero también se ha hecho constar la dificultad experimental de obtener resultados precisos para la derivada normal de la fase en el borde, pudiendo jugar la selección del tamaño de la región de frontera un papel activo en ello. Las simetrías del objeto o medio dispersivo, o bien el tipo de iluminación, pueden fijar condiciones para evitar las medidas de frontera [24, 136, 146]. En la última parte de esta memoria, analizaremos con detalle el peso de la contribución de las medidas en el contorno para estudiar cómo obtener la máxima información acerca de la fase con solo medidas en el interior del dominio.

Capítulo 2

Optimización de la medida del interior

En el capítulo anterior hemos introducido la Ecuación de Transporte de Intensidad particularizada a irradiancia constante en el plano de recuperación de fase, $z = 0$, como base del funcionamiento del sensor de curvatura. En este capítulo analizaremos el rendimiento de este tipo de dispositivos al recuperar la curvatura de los frentes de onda en el interior de la pupila, $\nabla^2 W$, que depende de su capacidad para estimar la derivada axial de la irradiancia, $I'(0)$.

El ruido de las medidas de irradiancia en los dos planos de medida y el comportamiento no lineal intrínseco del sensor son las principales limitaciones que degradan su respuesta. Con esta información nos proponemos expresar matemáticamente la varianza de la curvatura estimada en el interior en función de estas dos contribuciones, que han de estar ligadas por medio de la distancia de separación entre los planos. A partir de aquí, diseñaremos un método para deducir una posición de los planos de medida que garantice objetivamente la respuesta óptima del sensor. Llevaremos a cabo el desarrollo de este procedimiento para la fórmula de Stirling y para la fórmula de Newton en dos planos. Dejaremos para más adelante el análisis de configuraciones alternativas del sensor que utilizan fórmulas en diferencias finitas con más de dos datos de entrada. Finalmente, un ejemplo ilustrará la efectividad de este procedimiento de optimización, aplicándolo a un sensor de curvatura acoplado a un dispositivo compensador de turbulencias atmosféricas. En concreto, utilizando los parámetros característicos del telescopio Gemini y de las condiciones atmosféricas promedio de su ubicación, se determina la posición de los

planos que proporciona la mejor medida de la curvatura de los frentes de onda*.

2.1. Factores que limitan la estimación de la curvatura del frente de onda

De acuerdo con la Ec. (1.3), el laplaciano de la fase en el interior de la pupila P_o del plano $z = 0$ se relaciona con la derivada axial de la irradiancia en dicho plano, $I'(0)$, de la forma:

$$\nabla^2 W = -\frac{I'(0)}{I_o} \quad (2.1)$$

donde I_o es la irradiancia uniforme en $z = 0$.

Los dos agentes esenciales que deterioran la calidad del laplaciano de la fase recuperado son el ruido de los datos de entrada y el error del modelo en diferencias finitas utilizado para aproximar la derivada axial. En general, los detectores de irradiancia proporcionan señales afectadas por ruido aditivo, que aumenta conforme la luminosidad se hace más escasa. El ruido se debe tanto a errores intrínsecos del detector como a errores provocados por la aleatoriedad espacio-temporal de los fotones al incidir en él [6, 14, 147]. El primer tipo se suele llamar ruido de detección, que, en el caso de las cámaras CCD, se conoce como ruido de lectura [147–149]. El segundo se llama ruido fotónico y es fundamental en la detección de luz y, por tanto, inevitable. Tampoco se puede evitar el efecto de la radiación de fondo, que contribuye negativamente restando contraste a las imágenes [149]. El ruido fotónico depende del nivel de luz, a diferencia del ruido de detección y del ruido de fondo, que son de la misma magnitud con independencia de la luminosidad.

Por otro lado, como la derivada axial se construye aproximándola en diferencias finitas a primer orden, se presupone que el comportamiento del dispositivo es lineal en todo el rango axial donde se captan medidas de irradiancia [16, 53, 123, 131, 132]. Sin embargo, esto es solo cierto para valores de z pequeños, donde el efecto del ruido es mayor.

*Un cálculo análogo se realiza en el Apéndice C con la fórmula de Roddier. Sus principios son semejantes, pero no completamente iguales, a los de la fórmula central en diferencias finitas, requiriendo un estudio aparte, que no se incluye en el cuerpo principal de esta memoria para dinamizar su lectura. No obstante, debemos señalar que este hecho no debe restar importancia a los resultados alcanzados, dada la trascendencia de la fórmula de Roddier en la destacable expansión de los sensores de curvatura en el ámbito de la Óptica Astronómica. Es por ello que el ejemplo que se incluye en este capítulo ilustra los resultados obtenidos en el Apéndice C para la fórmula de Roddier.

2.2. Varianza de la estimación de la derivada axial

En las líneas que siguen, calcularemos la varianza de la estimación de la derivada axial en función de la posición de los planos en el eje z . Modelaremos la presencia de ruido de medida: sin pérdida de generalidad en los resultados, para calcular y analizar el comportamiento de la varianza de la curvatura, supondremos aquí que las fluctuaciones de irradiancia en cada punto son de media cero e independientes del nivel de señal. Esta situación es equivalente a considerar como fluctuaciones por ruido de detección las fluctuaciones provocadas por el ruido fotónico, cometiéndose un error de estadística que no influye apreciablemente en el comportamiento cualitativo de la varianza. No obstante, en el Apéndice B se incluye el cálculo completo para condiciones de iluminación limitadas, que es especialmente útil en la aplicación de Óptica Astronómica.

2.2.1. Fórmula central de Stirling en diferencias finitas

La fórmula central en diferencias finitas permite estimar $I'(0) = I'(\mathbf{r}, 0)$ en $z = 0$ a partir de las irradiancias en dos planos situados simétricamente a ambos lados de $z = 0$:

$$\hat{I}'(0) = \frac{i_+ - i_-}{2z} \quad (2.2)$$

donde $z > 0$ y el circunflejo sobre \hat{I}' denota una estimación de I' . $i_+ = i(\mathbf{r}, z)$ e $i_- = i(\mathbf{r}, -z)$ son las señales proporcionadas por el dispositivo de detección en los planos $+z$ y $-z$ respectivamente, que en cada punto \mathbf{r} y en cada instante de tiempo t son la suma de la irradiancia exacta sin ruido o determinista, $I_{\pm} = I(\mathbf{r}, \pm z)$, y el ruido, $n_{\pm} = n_{\pm}(\mathbf{r}, \pm z)$, es decir:

$$i_{\pm} = I_{\pm} + n_{\pm} \quad (2.3)$$

Consideramos que los errores n_{\pm} son de media cero, covarianza nula entre puntos distintos y varianza $\mathcal{E} \{ [n_{\pm}]^2 \} = \sigma^2$ en todos los puntos de cada plano z , donde $\mathcal{E} \{ \cdot \}$ denota valor medio.

Con el objetivo de obtener estimaciones precisas de la derivada axial de la intensidad en un punto cualquiera \mathbf{r} , queremos encontrar la separación entre los planos, $z = z(\mathbf{r})$, tal que se verifica la siguiente condición:

$$s^2 \left[\hat{I}'(0) \right] = \mathcal{E} \left\{ \left[\hat{I}'(0) - I'(0) \right]^2 \right\} = \text{mín} \quad (2.4)$$

En definitiva, debemos calcular cuánto se aleja la aproximación experimental de la derivada axial, $\hat{I}'(0)$, del valor determinista de la derivada, $I'(0)$, en el plano $z = 0$ y después hallar el valor de z que minimiza la varianza $s^2 [\hat{I}'(0)]$.

Suponiendo que la intensidad, $I(\mathbf{r}, z)$, es una función univaluada, continua, cuya derivada primera es también continua y cuya derivada segunda existe en el rango $(0, z)$ de operación del sensor, entonces podemos aplicar el teorema de Taylor para la intensidad en cada punto \mathbf{r} en torno a $z = 0$, que establece que [150]:

$$I_{\pm} = I_o \pm I'(0)z + \frac{1}{2} I''(\zeta_{\pm}) z^2 \quad (2.5)$$

donde en el tercer sumando del miembro de la derecha, $\zeta_+ = \zeta_+(\mathbf{r})$ es un punto dentro del intervalo $(0, z)$ ($\zeta_- = \zeta_-(\mathbf{r})$ es otro tal que $\zeta_- \in (-z, 0)$). Este sumando representa el resto del desarrollo en serie de Taylor a primer orden y da cuenta del error de la aproximación lineal de la derivada axial. Introduciendo el resultado anterior en la Ec. (2.2) y teniendo en cuenta la Ec. (2.3), la derivada axial estimada en cada punto \mathbf{r} del plano $z = 0$ es:

$$\hat{I}'(0) = I'(0) + \frac{n_+ + n_-}{2z} + \frac{1}{4} [I''(\zeta_+) - I''(\zeta_-)] z \quad (2.6)$$

A la vista de esta ecuación, queda claro que la precisión de $\hat{I}'(0)$ depende del peso del segundo sumando, debido al error de las medidas, que limitará el valor de z inferiormente, y del tercer sumando, debido al error de la aproximación en diferencias finitas, que lo limitará superiormente.

Suponiendo que no hay correlación entre el ruido en los puntos de ambos planos y que ambas fuentes de error contribuyen independientemente, se deduce que la varianza de la aproximación de la derivada axial con la fórmula de Stirling es:

$$s^2 [\hat{I}'(0)] = \frac{\sigma^2}{2z^2} + \frac{1}{16} [I''(\zeta_+) - I''(\zeta_-)]^2 z^2 \quad (2.7)$$

donde cabe recalcar que la varianza varía de un punto a otro, ya que $\zeta_{\pm} = \zeta_{\pm}(\mathbf{r})$.

2.2.2. Fórmula progresiva o regresiva de Newton en diferencias finitas

La fórmula progresiva o regresiva en diferencias finitas permite aproximar la derivada axial en un punto \mathbf{r} del plano de recuperación de fase, $I'(0) = I'(\mathbf{r}, 0)$, utilizando como datos de entrada la irradiancia en dicho plano, $i_o = i_o(\mathbf{r}, 0)$, y la

irradiancia en otro plano a una distancia z a la derecha ($+z$, progresiva) o a la izquierda ($-z$, regresiva), $i_{\pm} = i_{\pm}(\mathbf{r}, \pm z)$:

$$\hat{I}'(0) = \frac{i_{\pm} - i_o}{\pm z} \quad (2.8)$$

siendo $z > 0$. Las medidas de irradiancia se suponen degradadas por ruido de la misma estadística descrita en la sección anterior y obtendremos estimaciones precisas de $I'(0)$ en \mathbf{r} en la medida que la separación $z = z(\mathbf{r})$ verifique la condición (2.4).

De forma análoga procedemos a aplicar el Teorema de Taylor a la intensidad en cada punto \mathbf{r} en torno a $z = 0$, Ec. (2.5), y sustituimos en la Ec. (2.8) teniendo en cuenta la Ec. (2.3), obteniéndose una relación similar a la Ec. (2.6) entre la aproximación progresiva o regresiva y el valor determinista de la derivada axial. Suponiendo que la contribución del ruido y del error de la aproximación de la derivada en diferencias finitas son independientes y teniendo en cuenta la hipótesis de no correlación del ruido en los puntos \mathbf{r} de ambos planos se deduce que la varianza de la derivada axial estimada en cada \mathbf{r} con la fórmula de Newton es:

$$s^2 \left[\hat{I}'(0) \right] = \frac{2\sigma^2}{z^2} + \frac{1}{4} [I''(\zeta_{\pm})]^2 z^2 \quad (2.9)$$

donde $\zeta_{\pm} = \zeta_{\pm}(\mathbf{r})$ es un punto tal que $\zeta_{+} \in (0, z)$ ($\zeta_{-} \in (-z, 0)$).

2.3. Selección del plano de medida

Las varianzas (2.7) y (2.9) demuestran que en idénticas condiciones de medida, la precisión que se alcanza al estimar la curvatura del frente de onda depende de la fórmula concreta que se escoja para aproximar la derivada axial. En estas expresiones generales de las varianzas, el primer sumando está relacionado con el ruido de las medidas de irradiancia y aumenta conforme la separación z disminuye. El segundo sumando depende exclusivamente de la forma del frente de onda a recuperar y describe, en función de z , cuánto se desvía el modelo en diferencias finitas respecto de la curvatura exacta del frente de onda.

Las Ecs. (2.7) y (2.9) reúnen características que impiden emplearlas directamente para hallar una única separación entre los planos que optimice la respuesta del sensor en la configuración correspondiente. Por un lado, informan de que, en general, el error de la aproximación de la derivada axial depende del punto \mathbf{r} concreto. Por otro lado, el segundo término de estas varianzas es desconocido en cada punto \mathbf{r} , ya que $\zeta = \zeta(\mathbf{r})$. El método de selección de la separación entre los planos deberá eludir

estos problemas para proporcionar una única posición de los mismos que optimice globalmente la respuesta del sensor en el plano de recuperación de fase, $z = 0$. Antes de proceder a diseñarlo, es necesario realizar un análisis previo de la propagación axial de la irradiancia en función de las características del frente de onda.

2.3.1. Análisis de la evolución axial de la intensidad

El problema de la propagación de un haz difractado por una abertura en $z = 0$ da lugar a integrales dobles de la forma [151, 152]:

$$\iint g(x, y, z) e^{ikf(x, y, z)} dx dy \quad (2.10)$$

donde, en la aproximación de Fresnel:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2z} [(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2] + W(x, y) \quad (2.11)$$

y donde g es la amplitud de la onda en el plano de la abertura. Tanto g como f son independientes de k y el dominio de integración está determinado por la abertura. En el rango de la aproximación de Fresnel, la distribución de irradiancia en cada plano axial depende, en esencia, de las características de la fase a segundo orden en los llamados puntos críticos de primera clase, $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$, del plano $z = 0$ [152, 153], es decir:

$$I(\mathbf{r}, z) = \frac{I_o(\mathbf{r}_c)}{1 + z\nabla^2 W(\mathbf{r}_c) + z^2 H[W(\mathbf{r}_c)]} \quad (2.12)$$

donde $\nabla^2 W(\mathbf{r}_c)$ es el operador laplaciano y $H[W(\mathbf{r}_c)]$ es el operador hessiano de la fase evaluados en dichos puntos. Los puntos críticos son puntos del plano $z = 0$ donde el argumento de la exponencial del integrando de la Ec. (2.10), $f = f(\mathbf{r})$, verifica:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

La Ec. (2.12) es válida siempre y cuando $\mathbf{r} = (x, y)$ no se encuentre en las inmediaciones de las cústicas [153]. En realidad, su denominador debería estar en valor absoluto, pero aquí se ha eliminado y se ha tomado el signo positivo porque trabajamos con planos de irradiancia situados antes de las cústicas. Esta ecuación nos muestra que la suposición de que la irradiancia evoluciona linealmente en la variable z es una simplificación, que solo es cierta para valores de z suficientemente pequeños, pues, en realidad, la evolución axial de la intensidad en el rango de Fresnel depende de las características de la fase de forma más compleja.

En general, a cada punto \mathbf{r} le corresponde un punto crítico distinto del plano $z = 0$ y la ecuación que relaciona \mathbf{r} con \mathbf{r}_c es complicada de resolver. Sin embargo, la Ec. (2.12) no presenta una dependencia explícita en los puntos críticos en el caso particular de que la fase W en el plano $z = 0$ sea cuadrática, esto es, que tenga la forma:

$$W_o = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy \quad (2.14)$$

donde a representa el pistón, b y c son inclinaciones y d , e y f están relacionados con el operador laplaciano y con el operador hessiano de la fase cuadrática W_o . Dado que estos dos operadores son invariantes, podemos simplificar W_o rotando los ejes de coordenadas de tal modo que la Ec. (2.14) pueda reescribirse en su forma canónica [154]:

$$W_o = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 \quad (2.15)$$

De las Ecs. (2.14) y (2.15), se deduce que $\nabla^2 W_o = 2(d + e) = 2(D + E)$ y $H(W_o) = 4de - f^2 = 4DE$. De este modo, la intensidad evoluciona en cada punto $\mathbf{r} = (x, y)$ de acuerdo con:

$$I(z) = \frac{I_o}{1 + 2(D + E)z + 4DEz^2} \quad (2.16)$$

donde no hay dependencia en los puntos críticos, pues cada uno de los puntos de la pupila tiene el mismo valor del laplaciano y del operador hessiano. Por tanto, dado un plano z , la irradiancia es la misma para cada punto \mathbf{r} de dicho plano.

La aplicación de la Ec. (2.16) en las fórmulas (2.7) y (2.9) de la § 2.2 proporciona, en este caso, la misma varianza de $\hat{I}'(0)$ para todos los puntos \mathbf{r} de un mismo plano axial, cuya minimización permite calcular un único valor para la separación óptima de los planos de medida. Aunque esta no es la situación que normalmente nos encontraremos globalmente en el plano de la pupila, como iremos viendo, el estudio detallado de estas varianzas en función de los parámetros D y E nos permitirá diseñar una estrategia para resolver problemas más complejos.

2.3.2. Varianza de la estimación del laplaciano de una fase cuadrática

En este apartado analizaremos la evolución del error de la estimación de la curvatura de un frente de onda cuadrático W_o con fórmulas en diferencias finitas, en función de la posición axial de los planos de irradiancia, z . En concreto, haremos un análisis detallado para distintos valores de las curvaturas principales en el eje x , D , y

en el eje y , E , para elaborar más adelante un método para seleccionar la separación de los planos que optimiza la respuesta del sensor.

Desde el punto de vista de la Óptica, los frentes de onda descritos por las Ecs. (2.14) y (2.15) son frentes de onda esferocilíndricos. Pero la Geometría Algebraica da una interpretación de estas ecuaciones muy apropiada para el análisis que vamos a realizar. Básicamente, W_o es la representación de una superficie cuadrática que describe algunos de los tipos estándar de cuádricas [155]. En concreto, distinguiremos cuatro tipos de frentes de onda cuadráticos:

- Si D y E tienen el mismo signo, los frentes de onda en $z = 0$ son paraboloides elípticos. $D = E$ es un caso especial, pues el frente de onda es un paraboloide parabólico, esto es, un frente de onda esférico en aproximación paraxial.
- Si D y E tienen signos distintos, los frentes son paraboloides hiperbólicos.
- Si $D = 0$ o $E = 0$, los frentes son cilindros parabólicos.
- Si $D = E = 0$, los frentes de onda son planos.

La ilustración de la Figura 2.1 muestra ejemplos de estos cuatro tipos de frentes de onda cuadráticos.

Veamos a continuación cómo es la varianza de la estimación de la curvatura de un frente cuadrático si la derivada axial se aproxima con la fórmula de Stirling y con las fórmulas de Newton:

a) Fórmula central en diferencias finitas

Introduciendo las intensidades I_+ e I_- calculadas a partir de la Ec. (2.16) en la fórmula central en diferencias finitas, la estimación de la derivada axial en función de los parámetros que caracterizan la fase cuadrática (2.15) es, en ausencia de ruido:

$$\hat{I}'(0) = \frac{-2(D + E)I_o}{(1 + 4DEz^2)^2 - [2(D + E)z]^2} \quad (2.17)$$

Es decir, $-\hat{I}'(0)/I_o$ se acerca más al laplaciano, $2(D + E)$, a medida que $z \rightarrow 0$.

Como la evolución axial de la irradiancia no depende explícitamente de los puntos críticos, $I''(\zeta_{\pm})$ tiene el mismo valor en todos los puntos \mathbf{r} de un plano $\pm z$. Así, despejando $I''(\zeta_+)$ e $I''(\zeta_-)$ en el desarrollo en serie de Taylor de la Ec. (2.5) para I_+ e I_- , sustituyendo en la Ec. (2.7) y teniendo en cuenta que

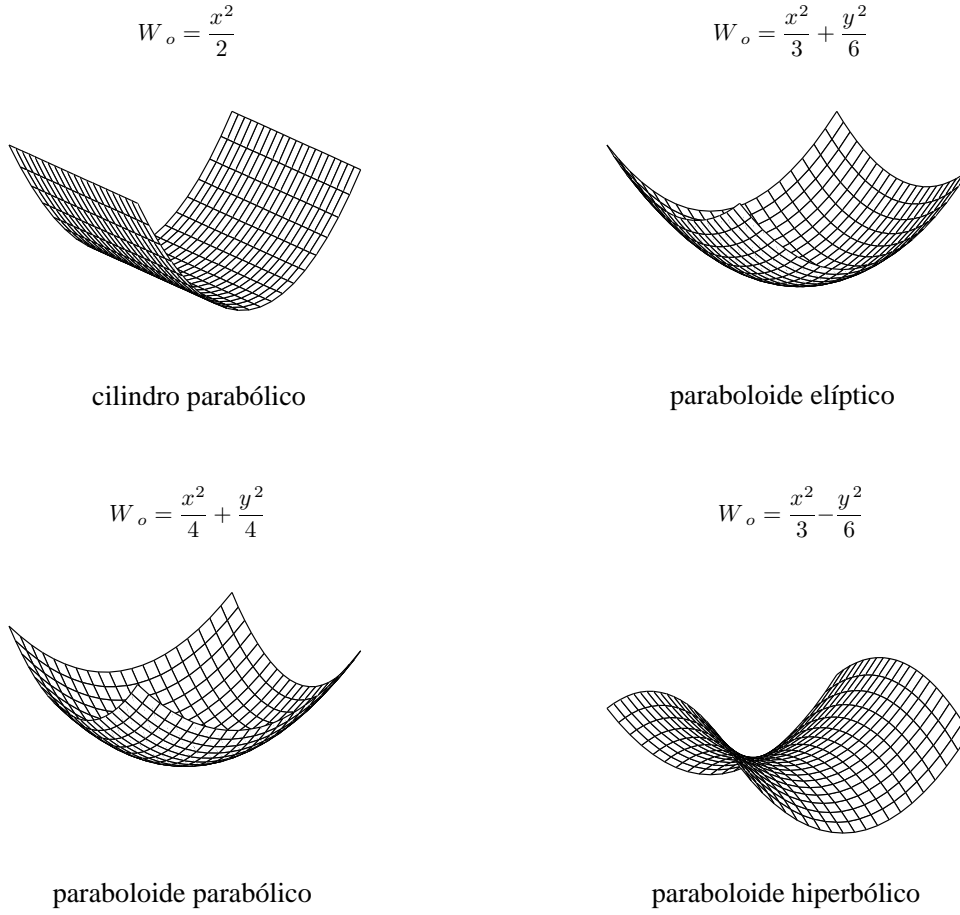


Figura 2.1: Ejemplos de los cuatro tipos de superficies cuadráticas seleccionadas para estudiar el rendimiento del sensor de curvatura.

según la ETI $I'(0) = -2(D + E)I_o$, entonces el laplaciano de la cuádrica de la Ec. (2.15) se estima con la varianza:

$$\epsilon_o^2 = \frac{1}{2z^2} \left(\frac{\sigma}{I_o} \right)^2 + 4(D + E)^2 z^4 \left[\frac{4DE(2 + 4DEz^2) - 4(D + E)^2}{(1 + 4DEz^2)^2 - 4(D + E)^2 z^2} \right]^2 \quad (2.18)$$

b) Fórmulas progresiva o regresiva en diferencias finitas

Análogamente, si sustituimos la intensidad en el plano $\pm z$ tomada de la Ec. (2.16) en la fórmula progresiva o regresiva en diferencias finitas (Ec. (2.8)), en ausencia de ruido, la estimación de la derivada axial en función de las características locales del frente de onda es:

$$\hat{I}'(0) = -I_o \left[\frac{2(D + E) \pm 4DEz}{1 \pm 2(D + E)z + 4DEz^2} \right] \quad (2.19)$$

Por tanto, $-\hat{I}'(0)/I_o$ se acerca a $2(D + E)$ siempre y cuando $z \rightarrow 0$.

Llevando a cabo un cálculo análogo al del apartado a), se deduce que la varianza del laplaciano de la fase cuadrática estimado por medio de la fórmula progresiva y regresiva en diferencias finitas es:

$$\epsilon_o^2 = \frac{2}{z^2} \left(\frac{\sigma}{I_o} \right)^2 + z^2 \left[\frac{4(D + E)^2 - 4DE \pm 8DE(D + E)z}{1 \pm 2(D + E)z + 4DEz^2} \right]^2 \quad (2.20)$$

Seguidamente, vamos a estudiar detalladamente la evolución de ϵ_o en función de z , pero, debido a las simetrías en D y E de las ecuaciones que acabamos de calcular, solo analizaremos los casos siguientes:

- $D \geq 0$ y $E \geq 0$ con $D \geq E$.
- $D < 0$ y $E > 0$ con $|D| \geq E$.

Además, consideraremos solo combinaciones de los parámetros D y E tales que $2(|D| + |E|) \leq V$, donde V es una cota superior. Tomamos una cota superior para la suma de los valores absolutos de las curvaturas principales y no para el valor absoluto del laplaciano, con el propósito de desechar, por ejemplo, casos de frentes hiperbólicos con valores muy altos de $|D|$ y $|E|$ tales que su laplaciano fuese nulo o prácticamente nulo. Con ello, implícitamente se está acotando superiormente el valor del hessiano, lo que garantiza que los frentes de onda cuadráticos son suaves con pequeñas desviaciones en torno a un frente de onda plano o, equivalentemente, se garantiza la paraxialidad del haz.

En la Figura 2.2 se dibuja la desviación estándar de la curvatura, ϵ_o , recuperada con la fórmula central y en las Figuras 2.3 y 2.4 con las fórmulas progresiva y regresiva de Newton, respectivamente. Se supone que las irradiancias proporcionadas por el detector oscilan con desviación relativa $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) de cada figura muestra el comportamiento de ϵ_o para frentes de onda con forma de cilindro parabólico, el (b) para frentes con forma de paraboloides elíptico, el (c) para frentes con forma de paraboloides parabólico y el (d) para aquellos con forma de paraboloides hiperbólico. Los parámetros D y E de los ejemplos dibujados se han escogido para mantener la condición $2(|D| + |E|) \leq V = 1$. El comportamiento cualitativo de las curvas dibujadas es común a ambas fórmulas y sus características más salientables son las siguientes:

- A medida que disminuye la distancia entre los planos el error tiende a infinito y a medida que uno cualquiera de los dos planos se aproxima a la posición de

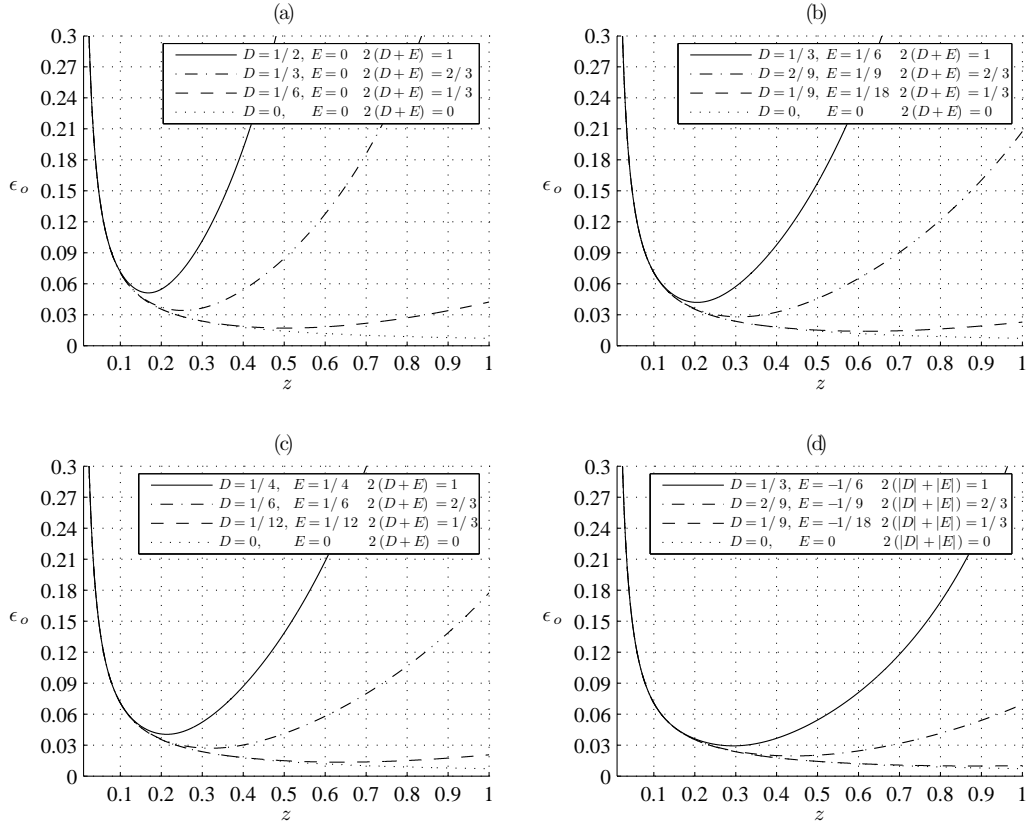


Figura 2.2: Desviación estándar de la curvatura del frente de onda cuadrático en función de la posición de los planos de medida, z , suponiendo que se estima con la fórmula central de Stirling, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a frentes de onda con forma de cilindro parabólico, el (b) a frentes de onda con forma de paraboloides elíptico, el (c) a frentes de onda con forma de paraboloides parabólico y el (d) a frentes de onda de tipo paraboloides hiperbólico.

la línea focal en x o en y más pequeña (fijadas por $z = 1/D$ y $z = 1/E$), el error se incrementa también drásticamente.

- Manteniendo constantes las condiciones de detección, σ/I_o , siempre hay una desviación mínima absoluta, $\epsilon_o(z_{\min})$, que decrece a medida que disminuye el laplaciano, en contraste con la posición correspondiente de los planos, z_{\min} , que crece. El frente de onda plano, de curvatura nula, es el caso límite y su varianza tiende a cero si la separación entre los planos tiende a infinito.
- Si las características del frente de onda se mantienen constantes, la posición del mínimo absoluto, z_{\min} , se aleja de $z = 0$ a medida que aumenta el nivel de ruido de las medidas de irradiancia, σ/I_o (se verá en la Figura 2.7).

El paralelismo entre ambos tipos de fórmulas en diferencias finitas conforma

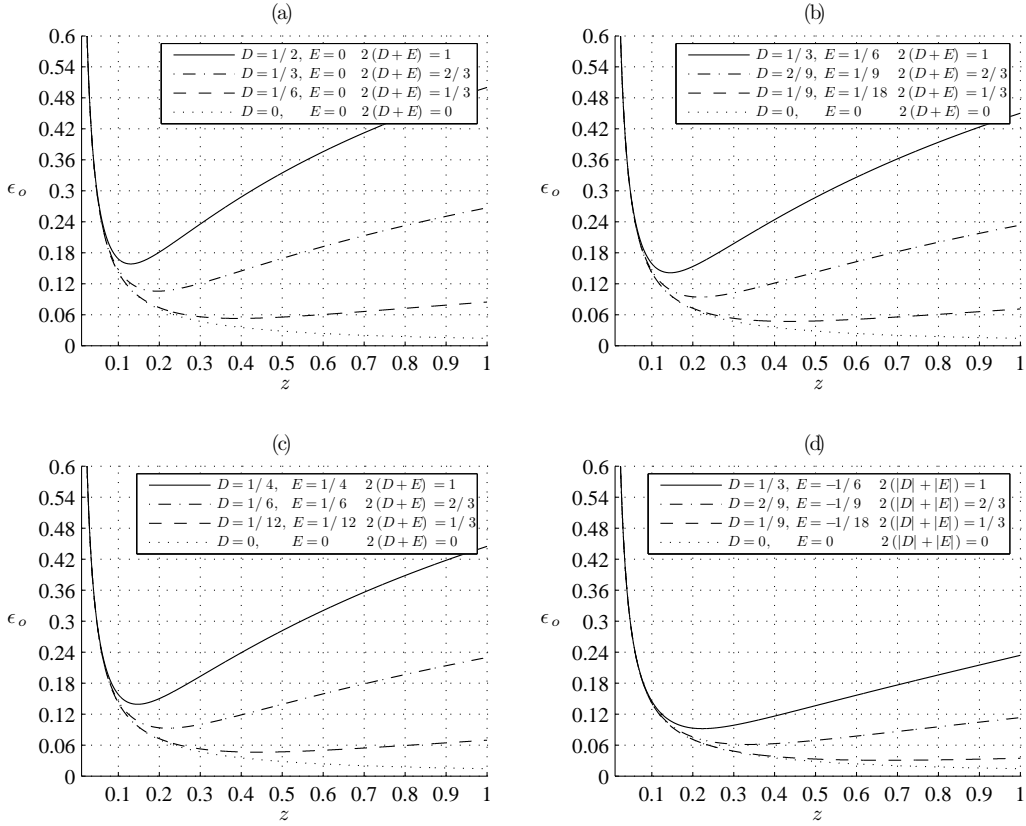


Figura 2.3: Desviación estándar de la curvatura del frente de onda cuadrático en función de la posición de los planos de medida, z , suponiendo que se estima con la fórmula progresiva de Newton, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a frentes de onda con forma de cilindro parabólico, el (b) a frentes de onda con forma de paraboloides elíptico, el (c) a frentes de onda con forma de paraboloides parabólico y el (d) a frentes de onda de tipo paraboloides hiperbólico.

comportamientos cualitativos de las curvas de error muy similares, salvo una excepción: en las fórmulas de Newton, la evolución del error difiere del comportamiento general cuando la diferencia finita se aplica en una dirección donde no hay línea focal (comparar las Figuras 2.3 y 2.4). Para los valores de D y E escogidos en estas representaciones, esta situación se da en la fórmula progresiva. Según z va aumentando, el error de la curvatura recuperada utilizando esta fórmula tiende a un valor constante igual a $\epsilon_o = 2(D+E)$, es decir, llega al 100 %, en contraste con la fórmula regresiva donde el error sí que aumenta drásticamente, muy por encima del 100 %, a medida que el plano de irradiancia se sitúa más cerca del foco. Por otro lado, las curvas representadas en la figura correspondiente a la fórmula regresiva se intercambian con las de la fórmula progresiva y viceversa si los parámetros D y E tienen signos opuestos a los analizados. También es importante resaltar el hecho de

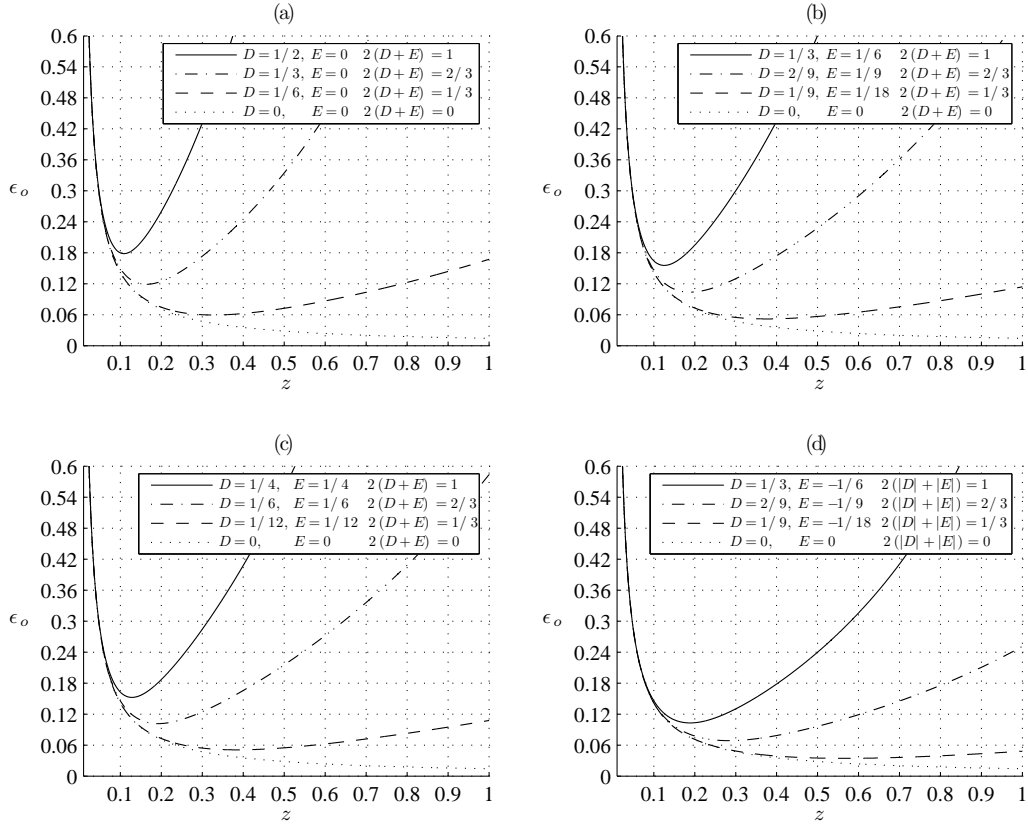


Figura 2.4: Desviación estándar de la curvatura del frente de onda cuadrático en función de la posición de los planos de medida, z , suponiendo que se estima con la fórmula regresiva de Newton, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a frentes de onda con forma de cilindro parabólico, el (b) a frentes de onda con forma de paraboloides elíptico, el (c) a frentes de onda con forma de paraboloides parabólico y el (d) a frentes de onda de tipo paraboloides hiperbólico.

que, para los valores de los parámetros D y E escogidos en las figuras, la curva para la fórmula regresiva se encuentra siempre por encima de la curva correspondiente de la fórmula progresiva. Pero se dará el comportamiento contrario cuando los signos de D y E sean opuestos a los mostrados.

Las Ecs. (2.18) y (2.20), junto con sus representaciones en las Figuras 2.2, 2.3 y 2.4 son válidas desde $z = 0$ hasta las proximidades de la línea focal, donde el error tiende a infinito. Sea cual sea la fórmula aproximada empleada, los planos no deben separarse de $z = 0$ una distancia próxima a la distancia focal. Esta característica es coherente con la observación experimental de que los planos de irradiancia deben tomarse lejos de la posición de las cúspides para garantizar el funcionamiento correcto del sensor [16].

En las Figuras 2.5(a), para la fórmula central, 2.5(b), para la fórmula regresiva

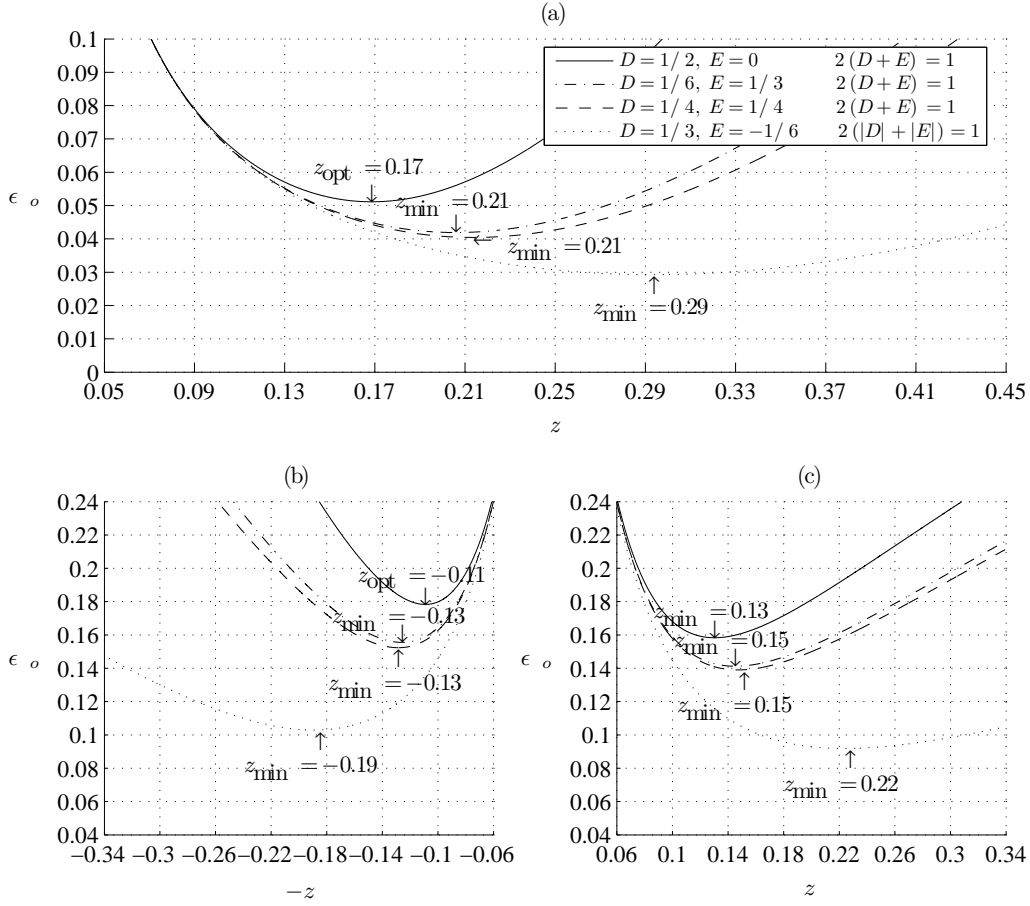


Figura 2.5: Evolución del error de las curvaturas de los frentes de onda cuadráticos que verifican $2(|D| + |E|) = 1$ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estiman con la fórmula central (a), con la fórmula regresiva (b) y con la fórmula progresiva (c), bajo la influencia de ruido de detección con desviación relativa $\sigma/I_o = 0,01$.

y 2.5(c) para la fórmula progresiva de Newton, se muestra la desviación ϵ_o solo para aquellas combinaciones de D y E tales que $2(|D| + |E|)$ iguala la cota superior, $V = 1$. En estas figuras también se indica la posición del plano donde se minimiza ϵ_o , en las mismas unidades que la posición de la línea focal. Es decir, supongamos que el frente es un cilindro parabólico con $D = 1/(4f) = 1/2$ y $E = 0$. Si $V = 1 \text{ m}^{-1}$, entonces la línea focal se halla en $f = 0,5 \text{ m}$ y el mínimo en $z_{\text{opt}} = 0,17 \text{ m}$, para la fórmula central, y en $z_{\text{opt}} = 0,11 \text{ m}$, para las fórmulas de Newton.

A partir de ellas se deduce que de todas las combinaciones de D y E tales que $2(|D| + |E|) = V$, la curva que está por encima de todas las demás en la zona del mínimo corresponde al cilindro parabólico, seguida, en orden decreciente, por la curva del paraboloides elíptico, la del paraboloides parabólico y, por último, la del hiperbólico.

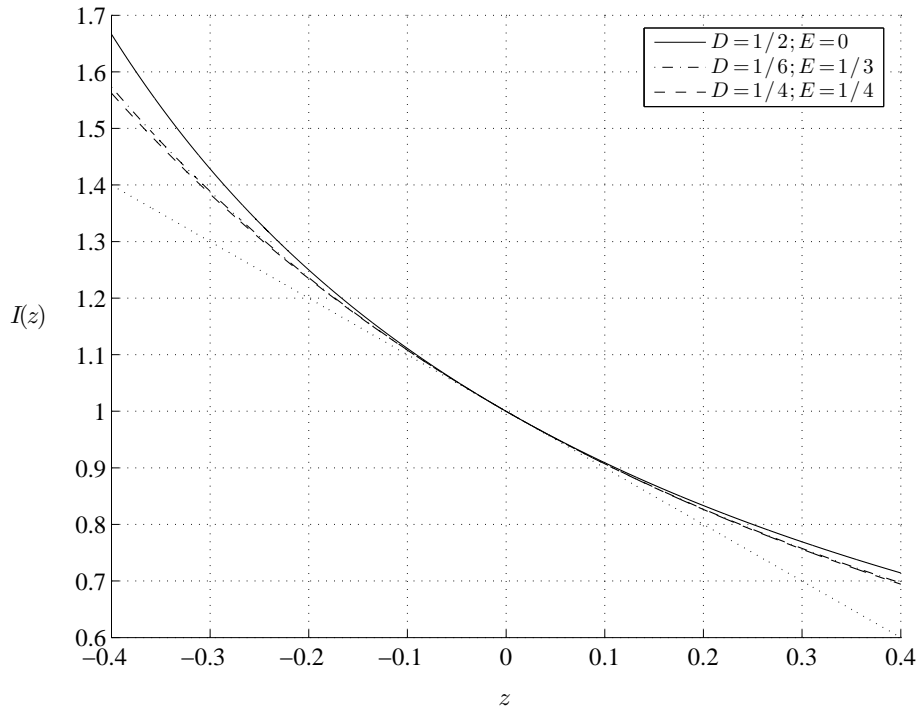


Figura 2.6: Evolución axial de la intensidad para las fases cuadráticas de laplaciano unidad analizadas. En línea de puntos se representa la aproximación lineal proporcional al laplaciano.

La razón para este comportamiento es que, aunque consideremos frentes cuadráticos con el mismo valor del laplaciano, la contribución del error de no linealidad varía entre unos y otros. En concreto, de entre los cuatro estándares de cuádricas estudiados, la irradiancia asociada al cilindro parabólico es la que evoluciona axialmente más alejada del comportamiento lineal (ver Figura 2.6). Adicionalmente, cabe destacar que la curva asociada al frente de onda plano se encuentra siempre por debajo de cualquier otra curva, sea cual sea el valor de V y el tipo de fase cuadrática con que comparemos.

Por último, la Figura 2.5 nos indica también que en las mismas condiciones de medida, la fórmula central proporciona mejores resultados que las fórmulas de Newton.

2.3.3. Selección de la separación óptima y cotas superior e inferior de error

En la sección anterior, hemos calculado y representado frente a z la desviación estándar de la estimación experimental de la curvatura de un frente de onda

cuadrático en función del nivel de ruido, σ/I_o , y de las características del frente expresadas en sus curvaturas principales D y E . El análisis de estas curvas de error nos permitirá deducir ahora la separación entre los planos que proporciona la mejor respuesta del sensor ante frentes de onda cuadráticos. En concreto, la Figura 2.5 nos informa de que si lo único que conocemos de la fase cuadrática en el plano $z = 0$ es que su laplaciano alcanza como máximo un valor V , entonces la peor respuesta del sensor de curvatura se da ante los frentes con forma de cilindro parabólico de curvatura V . Por eso, la mejor respuesta del sensor ante frentes de onda cuadráticos se garantizaría separando los planos de irradiancia la distancia $z = z_{\text{opt}}$ que viene determinada por el mínimo de la curva de error correspondiente al cilindro parabólico de curvatura V .

Basándonos en este resultado alcanzado con este caso sencillo, encontraremos en esta sección la separación entre planos que optimiza la respuesta global del sensor de curvatura en el interior ante frentes de onda más complicados.

Si suponemos que el frente de onda, W , en los puntos del plano $z = 0$ es suave, continuo y diferenciable, entonces existen entornos Ω donde W puede aproximarse localmente por superficies cuadráticas, W_o , de la forma (2.14), donde ahora a representa el pistón, $b = \partial W/\partial x$ y $c = \partial W/\partial y$ son las inclinaciones locales de W en Ω , y $d = (1/2)(\partial^2 W/\partial x^2)$, $e = (1/2)(\partial^2 W/\partial y^2)$ y $f = \partial^2 W/\partial x\partial y$ están relacionados con el operador laplaciano y con el operador hessiano locales de la fase W en el entorno Ω . La unión de todos los entornos Ω recubre la superficie del frente de onda completamente. Como los operadores laplaciano y hessiano son invariantes, podemos simplificar la cuádrica (2.14) rotando los ejes de coordenadas y reescribiendo W_o en su forma canónica, es decir, en la forma descrita por la Ec. (2.15). Los parámetros D y E de la aproximación cuadrática local W_o , representan ahora las curvaturas principales locales del frente de onda W en el interior del entorno Ω . Por tanto, el operador laplaciano y el operador hessiano locales de W asociados a cada entorno Ω son constantes en cada plano axial para todos los puntos de Ω y la evolución de la irradiancia en el eje z se puede expresar localmente como en la Ec. (2.12), en función de los parámetros D y E del entorno. Estas curvaturas de cada entorno Ω provocan convergencias o divergencias de los haces, que se manifiestan con cambios de la distribución de luz dentro de la región iluminada en función de la posición axial z (ver Figura 1.2). En definitiva, de acuerdo con esta hipótesis, podemos afirmar que las Ecs. (2.18) y (2.20) describen el error de la recuperación de la curvatura local del frente de onda W en un entorno Ω .

De este modo, concentrémonos ahora en la estimación de las curvaturas locales de

un frente de onda, suponiendo que existen entornos Ω donde W puede aproximarse por superficies cuadráticas W_o tales que $2(|D| + |E|)$ es menor o igual que un cierto valor normalizado a la unidad, que denotamos por V . En la Figura 2.5, z_{opt} denota la posición de los planos que minimiza la desviación estándar de la estimación de la curvatura local del frente de onda en un entorno con forma de cilindro parabólico con $V = 1$. Si en Ω la cuádrica fuese de otro tipo, entonces, de acuerdo con esa figura, situando los planos en z_{opt} está garantizado que su laplaciano se estimaría con menos desviación que si fuese un cilindro parabólico.

Veamos qué implicaciones tiene este comportamiento a nivel local en la recuperación del laplaciano a nivel global, es decir, en la unión de todos los entornos del plano $z = 0$. Si los planos de medida se sitúan en las posiciones $z < z_{\text{opt}}$, entonces las curvaturas locales estimadas en cualquier parte del interior de la pupila tendrán siempre más error que si los planos se colocan en las posiciones $z = z_{\text{opt}}$. Por otro lado, si las irradiancias se detectan en $z > z_{\text{opt}}$, aunque mejora la estimación en los entornos donde la aproximación de W es un paraboloido o un plano, empeora la recuperación de las curvaturas locales en entornos donde W se aproxima por cilindros parabólicos. De este modo, si hubiese una densidad significativa de entornos dentro del dominio definido por la pupila donde el frente de onda se aproximase mejor por medio de superficies cilíndricas de curvatura máxima ($V = 1$), si $z \neq z_{\text{opt}}$, globalmente empeoraría la estimación del laplaciano de la fase en $z = 0$. En consecuencia, si la única información *a priori* disponible acerca de los frentes de onda es que su curvatura máxima es V , minimizando ϵ_o^2 para un cilindro parabólico de curvatura V , es decir, $D = V/2$ y $E = 0$, obtendríamos z_{opt} , la mejor posición de los planos que es compatible con esta información. Todo esto independientemente de la fórmula en diferencias finitas que se utilice para configurar el sensor.

En términos generales, con el objetivo de escoger adecuadamente sus componentes principales, cuando se procede al diseño de cualquier dispositivo sensorial de fase debe disponerse de un cierto grado de conocimiento *a priori* acerca de los frentes de onda que se quieren medir. Por ejemplo, en el caso de los sensores de frente de onda Shack-Hartmann, es necesaria cierta información previa de la fase para diseñar las matrices de microlentes con el espaciado y la apertura numérica adecuados. En el caso de los sensores de curvatura, una vez que se ha determinado el nivel de ruido de los planos de irradiancia, el paso siguiente es fijar su posición, para lo que es necesario hacer uso de la información de la fase disponible. Si conocemos una estimación de las máximas curvaturas locales de la fase en la abertura, tenemos ya la capacidad para hallar objetivamente una separación óptima siguiendo el método descrito hasta

ahora. No obstante, normalmente estos datos no siempre se conocen. En su lugar podríamos disponer de cierta información estadística de los frentes de onda que nos oriente a la hora de escoger un valor para V .

Ilustrémoslo de la siguiente forma. Por ejemplo, supongamos que la fase en el plano $z = 0$ varía en el tiempo y se conoce lo suficiente acerca de su comportamiento estadístico como para que podamos:

- estimar $L = |\langle \nabla^2 W(\mathbf{r}) \rangle|$, donde $\langle \cdot \rangle$ indica valor medio espacio-temporal en el total de la pupila.
- estimar $\Delta L = \sqrt{\langle [\nabla^2 W(\mathbf{r}) - \langle \nabla^2 W(\mathbf{r}) \rangle]^2 \rangle}$, la desviación cuadrática media espacio-temporal calculada en la totalidad de la pupila.

Si no hay información adicional, proponemos tomar los planos de irradiancia en la posición z_{opt} que minimiza $\epsilon_o(z)$ tomando $D = V/2$ y $E = 0$, siendo $V = L + \alpha\Delta L$, donde α es un parámetro que cuantifica la probabilidad de que $V \in [L - \alpha\Delta L, L + \alpha\Delta L]^*$. De este modo, nos aseguramos de que la desviación de la curvatura local de W en un entorno Ω cualquiera, $\epsilon_o(z)$, oscila, para todo z , entre las siguientes cotas:

$$\epsilon_{\text{inf}}(z) \leq \epsilon_o(z) \leq \epsilon_{\text{sup}}(z) \quad (2.21)$$

donde $\epsilon_{\text{inf}}(z)$ es la mayor cota inferior, que está fijada por la curva de un frente de onda plano, y $\epsilon_{\text{sup}}(z)$ es la menor cota superior, que viene indicada por la curva del cilindro parabólico de curvatura V . La magnitud de estas cotas será distinta según se emplee una u otra fórmula en diferencias finitas. A continuación, expresaremos las ecuaciones de las cotas en función de la variable normalizada $h = Vz$, que permite generalizar el error y la posición óptima de los planos a cualquier valor de V :

a) **Fórmula central de Stirling**

$\epsilon_o(z)$ de la Ec. (2.18) para $D = V/2$ y $E = 0$ representa para cada z la menor cota superior de error de la estimación de la curvatura, ϵ_{sup} , que, con la normalización $h = Vz$, es:

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{sup}}}{V}\right)^2 = \frac{1}{2h^2} \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 + \left(\frac{h^2}{1-h^2}\right)^2 \quad (2.22)$$

*Si $\alpha = 1$, la probabilidad es del 68,3%, si $\alpha = 2$, la probabilidad es del 95,4% y si $\alpha = 3$, la probabilidad llega al 99,7% [156].

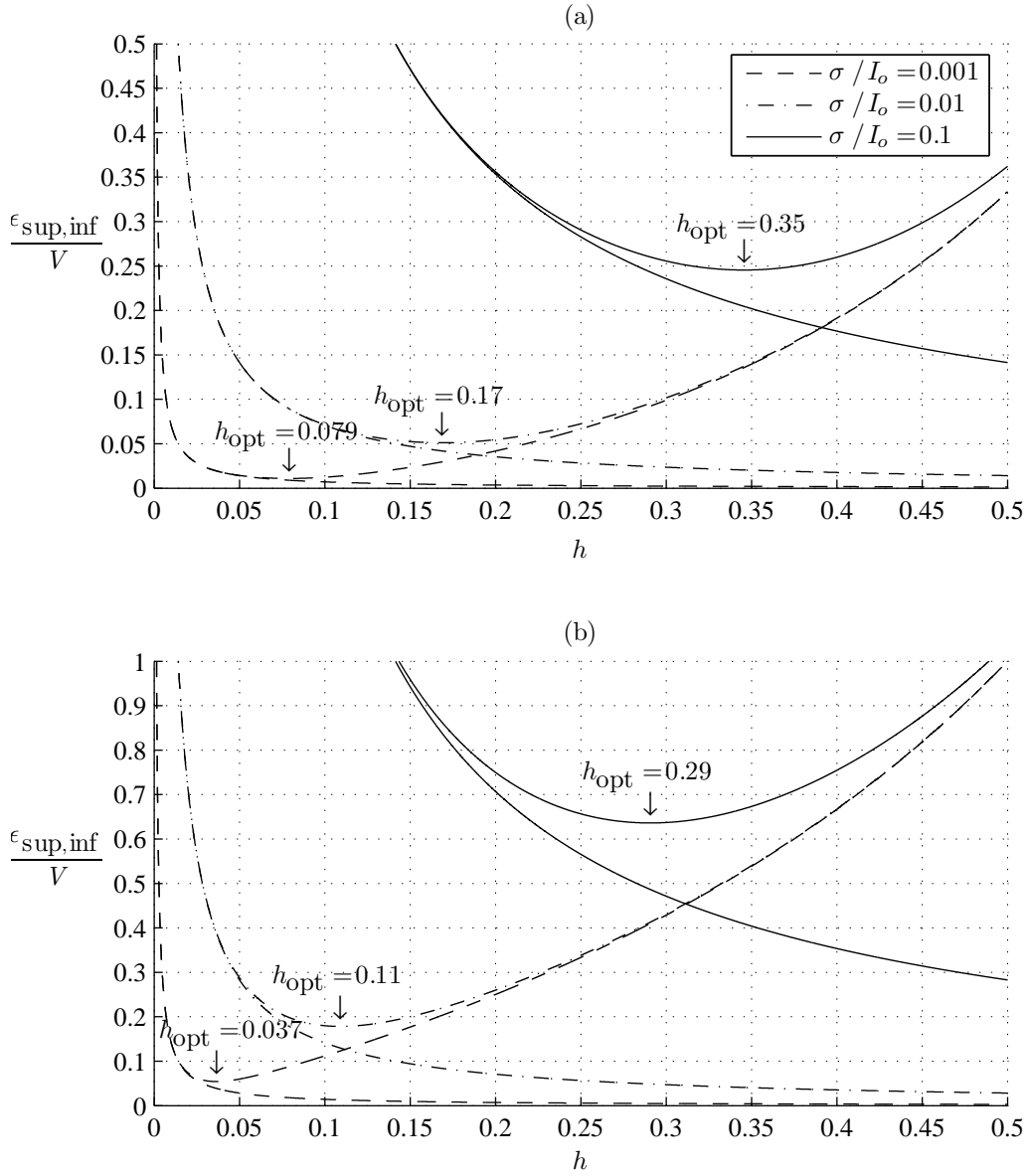


Figura 2.7: Cota superior de error, ϵ_{sup} , y cota inferior de error, ϵ_{inf} , de la estimación de la curvatura local de la fase en Ω con la fórmula central (a) y con las fórmulas de Newton (b), para varios niveles del ruido de detección, σ/I_o .

mientras que $\epsilon_o(z)$ para $D = E = 0$ representa la mayor cota inferior de error de la estimación de la curvatura, ϵ_{inf} :

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{inf}}}{V}\right)^2 = \frac{1}{2h^2} \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 \quad (2.23)$$

En la Figura 2.7(a) representamos estas cotas para algunos ejemplos de σ/I_o , apreciándose la disminución del rendimiento del sensor conforme aumenta el

nivel de ruido en las medidas de irradiancia.

Para hallar una relación entre la separación óptima, h_{opt} , y el nivel de ruido de las medidas, σ/I_o , derivamos la Ec. (2.22) respecto de h e igualamos a cero, obteniendo:

$$-\left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 (1 - h_{\text{opt}}^2)^3 + 4h_{\text{opt}}^6 = 0 \quad (2.24)$$

b) Fórmulas progresiva y regresiva de Newton

La Ec. (2.20) particularizada a $D = V/2$ y $E = 0$ proporciona la menor cota superior de error para cada $h = Vz$:

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{sup}}}{V}\right)^2 = \frac{2}{h^2} \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 + \left(\frac{h}{1-h}\right)^2 \quad (2.25)$$

mientras que si se particulariza a $D = E = 0$, proporciona la mayor cota inferior de error:

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{inf}}}{V}\right)^2 = \frac{2}{h^2} \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 \quad (2.26)$$

En la Figura 2.7(b) representamos estas cotas para los mismos ejemplos de σ/I_o que en el apartado anterior. Comparando esta figura con la Figura 2.7(a), se ve con claridad el aumento de la incertidumbre de las curvaturas recuperadas cuando se usan las fórmulas de Newton en comparación con la fórmula central.

De la minimización de la Ec. (2.25) respecto de h obtenemos la siguiente ecuación, que relaciona la separación óptima, h_{opt} , con el nivel de ruido en las medidas de irradiancia, σ/I_o :

$$-2 \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 (1 - h_{\text{opt}})^3 + h_{\text{opt}}^4 = 0 \quad (2.27)$$

Por último, la Figura 2.8(a) muestra la dependencia de la separación óptima, h_{opt} , con el nivel de ruido, σ/I_o , suponiendo que se implementa la fórmula central. En los apartados (b) y (c), se representan las cotas superior, ϵ_{sup}/V , e inferior, ϵ_{inf}/V , de error de la curvatura en la posición óptima. Asimismo, se indican los datos de los coeficientes β , γ y δ del ajuste de las cotas y de las posiciones óptimas a la siguiente ecuación en función del nivel de ruido:

$$\text{fun} = \beta \left(\sqrt{\frac{\sigma}{I_o}}\right) + \gamma \left(\sqrt{\frac{\sigma}{I_o}}\right)^2 + \delta \left(\sqrt{\frac{\sigma}{I_o}}\right)^3 \quad (2.28)$$

Sustituyendo en la Ec. (2.28) los coeficientes del apartado (a) de la Figura 2.8, podemos calcular fácilmente la separación entre los planos, h_{opt} , que optimiza la

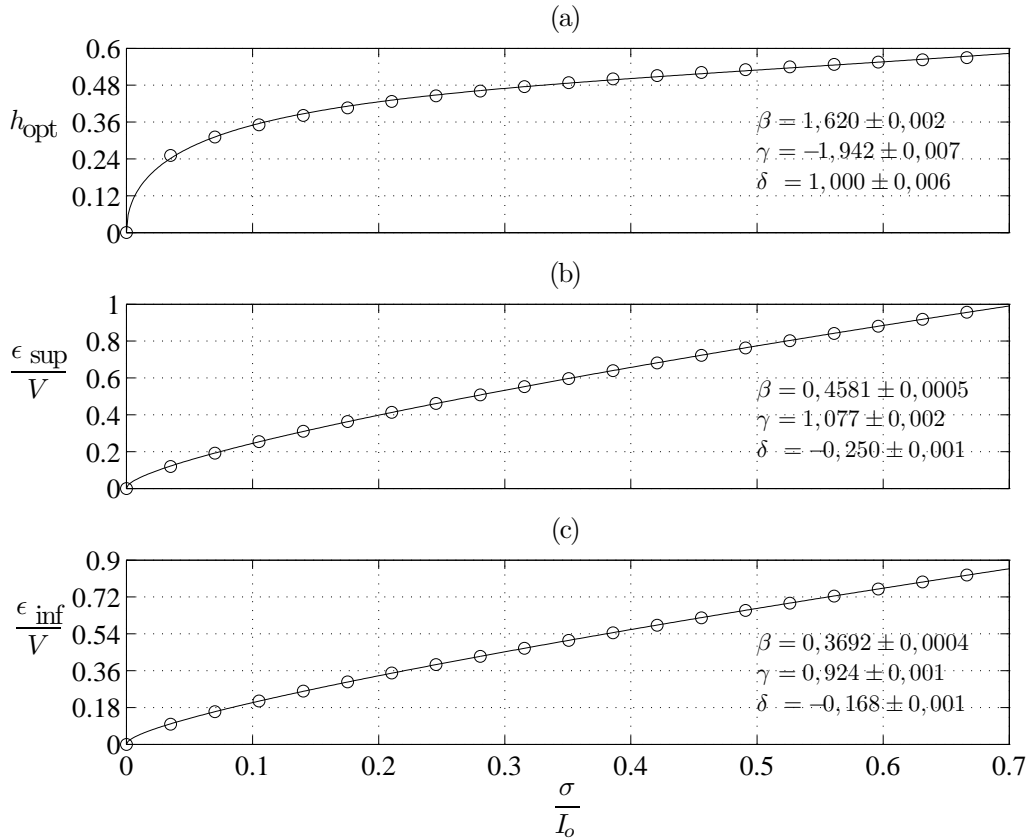


Figura 2.8: Posición óptima de los planos y cotas superior e inferior de error de la curvatura local de la fase en Ω , en función del nivel de ruido en el plano de la abertura, σ/I_o , para la fórmula central. Con el símbolo “o” se indican algunos de los puntos utilizados para realizar el ajuste, que se obtienen a partir de las Ecs. (2.22), (2.23) o (2.24) para cada valor de σ/I_o . La línea continua representa el ajuste de los puntos.

respuesta del sensor de curvatura para unas condiciones de medida determinadas. El mismo procedimiento para los coeficientes de los apartados (b) y (c) nos proporciona las cotas entre las que oscila el error de las curvaturas locales estimadas con el sensor. En la Figura 2.9 se hace la representación análoga para las fórmulas de Newton.

Las Figuras 2.8 y 2.9 constituyen uno de los resultados más importantes de este trabajo de investigación, pues son una referencia objetiva para determinar no solo la posición de los planos que optimiza la respuesta del sensor para unas condiciones de operación dadas, sino también las cotas superior e inferior entre las que oscila el error de las curvaturas locales estimadas, que ningún otro criterio previo proporcionaba. Para poder aplicar este procedimiento solo resulta necesario tener información sobre el nivel de ruido de medida, σ/I_o , y un mínimo conocimiento *a priori* acerca de la fase, es decir, una cota superior de las curvaturas locales, V .

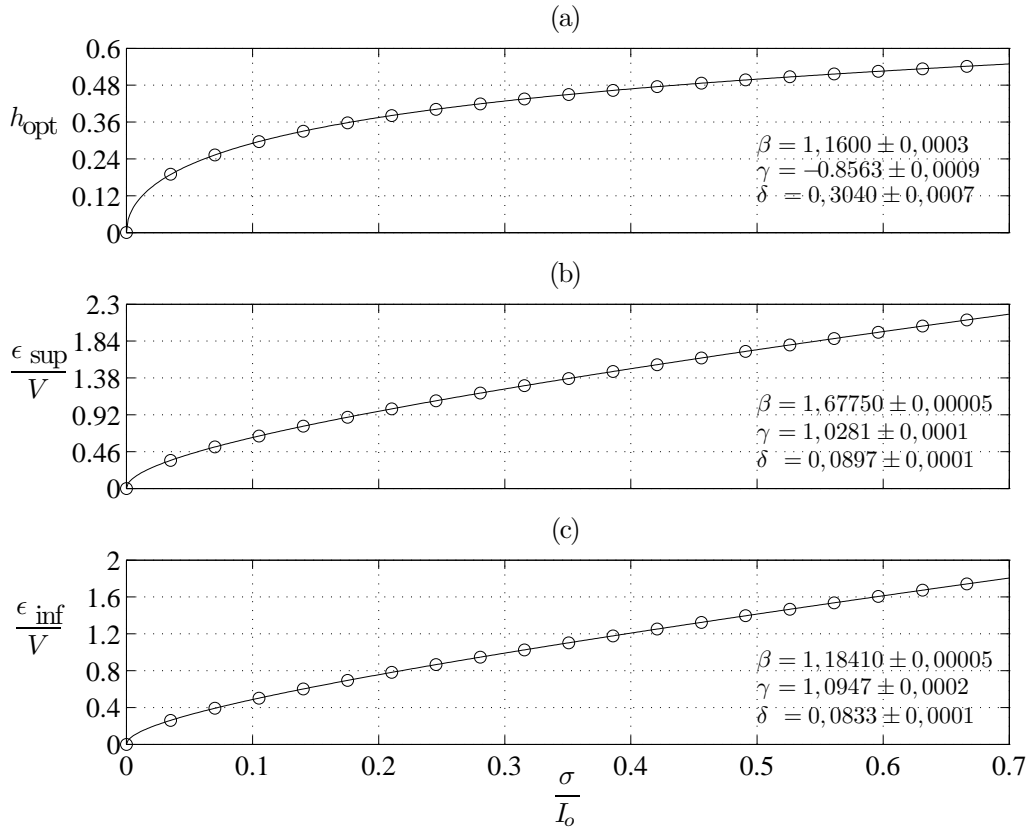


Figura 2.9: Posición óptima de los planos y cotas superior e inferior de error de la curvatura local de la fase en Ω , en función del nivel de ruido en el plano de la abertura, σ/I_0 , para las fórmulas de Newton. Con el símbolo “o” se indican algunos de los puntos utilizados para realizar el ajuste, que se obtienen a partir de la Ec. (2.25), (2.26) o (2.27) para cada valor de σ/I_0 . La línea continua representa el ajuste de los puntos.

2.4. Ejemplo: Selección de la separación óptima para el telescopio Gemini

En las líneas siguientes, se ilustra con un ejemplo el método de selección de la posición de los planos descrito en la § 2.3. El problema escogido consiste en calcular la separación entre los planos que optimiza la respuesta del sensor de curvatura acoplado al sistema de óptica adaptativa del telescopio Gemini. Este sensor de curvatura, al igual que la mayoría de los que son utilizados en Óptica Astronómica, se ha diseñado de acuerdo a la configuración de Roddier (ver § 1.3).

El sensor se emplea para medir las aberraciones de frentes de onda distorsionados por turbulencias atmosféricas y trabaja con un número de fotones limitado, siendo significativa la influencia del ruido fotónico. A lo largo de este capítulo, hemos

supuesto que las medidas de irradiancia solo están afectadas por ruido de detección independiente del nivel de señal. Los resultados que se han mostrado para las fórmulas típicas en diferencias finitas son cualitativamente análogos a los que se obtienen para un número de fotones disponible limitado, según puede comprobarse en el Apéndice B. No obstante, la diferente estadística del ruido de medida en un caso y en el otro se traduce en cambios cuantitativos en los resultados, de ahí la utilidad de los datos presentados en ese apéndice. Por su parte, los cálculos específicos para la fórmula de Roddier, adecuados para su aplicación en este ejemplo, se muestran en el Apéndice C.

Para seleccionar los planos de irradiancia, nos basaremos solamente en los datos técnicos publicados en el trabajo de Rigaut *et al.* de 1997, relativos a los componentes del telescopio Gemini y a las condiciones de turbulencia medias de su ubicación en Mauna Kea (Hawaii) [56].

2.4.1. Características del sistema y de la turbulencia

En la Tabla 2.1 se resumen los parámetros principales que caracterizan el telescopio Gemini y las turbulencias atmosféricas medias de su emplazamiento [56]. Los frentes turbulentos que se quieren compensar provienen de una estrella natural de magnitud $m_R = 14,7$ en la banda R^* . El ritmo de emisión de fotones indicado está ya calculado para la totalidad de la abertura del telescopio Gemini. De los datos de la tabla se desprende que el sistema de Óptica adaptativa es real, con 56 subaberturas repartidas en una pupila de 7,9 m de diámetro con una obstrucción central de 1,2 m de diámetro. Cada subabertura tiene asociado un detector y un actuador que modifica la forma de un espejo deformable. Se emplean fotodiodos de avalancha (APD), limitados solo por ruido fotónico, que operan en una longitud de onda $\lambda = 0,7 \mu\text{m}$. El 50% de los fotones que emite la estrella no se detectan por efecto de la atmósfera, de la transmisión instrumental del telescopio y de la eficiencia cuántica del detector. Por último, el comportamiento estadístico de las turbulencias atmosféricas en Mauna Kea está caracterizado por el parámetro de Fried, $r_o = 25$ cm, para una longitud de onda $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$.

Con los parámetros de la Tabla 2.1 calcularemos un valor para V y para el número de fotones promedio disponibles en cada subabertura, N , necesarios para hallar z_{opt} de acuerdo con los resultados del Apéndice C.

*La banda astronómica R está centrada en una longitud de onda $\lambda = 0,7 \mu\text{m}$ con un ancho de banda efectivo de $0,22 \mu\text{m}$ [149].

Parámetros	Valores
Diámetro del telescopio (m): \mathcal{D}	7,9
Diámetro de la obstrucción central (m)	1,2
Dimensión radial de la región de frontera: L	1,6 \mathcal{D}
Número-F (f/#)	60
Ritmo de emisión de fotones para una estrella $m_R = 0$ (fotones/s)	$8,2 \cdot 10^{11}$
Brillo del cielo en la banda R (magnitud arcseg $^{-2}$)	$20,3 \cdot 10^{11}$
Pérdidas (%)	50
Ruido de lectura del APD	$0 e^-$
Retraso del APD	0
Número de subaberturas	56
Velocidad del viento (m/s)	20
r_o en $0,55 \mu\text{m}$ (cm)	25
Longitud de onda de trabajo del sensor (μm)	0,7

Tabla 2.1: Parámetros del telescopio Gemini y de las condiciones de visibilidad en el observatorio de Mauna Kea (Hawaii).

2.4.2. Cálculo de la separación óptima

En las líneas siguientes calcularemos la separación entre planos necesaria para que el sensor de curvatura opere correctamente en las condiciones descritas. Dado que el sistema de óptica adaptativa es real, la calidad de la compensación dependerá del comportamiento local de la fase y de la irradiancia en el entorno definido por cada una de las subpupilas. Partimos de la hipótesis de que en el área de una subpupila la superficie del frente de onda es, en esencia, cuadrática.

Por un lado, supondremos que la estadística de la turbulencia sigue el espectro de Kolmogorov y calcularemos un valor para $V = L + \Delta L$ asociado a toda la abertura del telescopio (ver § 2.3.3). $L = |\langle \nabla^2 W(\mathbf{r}) \rangle|$ es el valor absoluto del promedio espacio-temporal de la curvatura en la totalidad de la pupila, que, para frentes de onda distorsionados por turbulencias atmosféricas, es igual a cero. De este modo, la cota superior de las curvaturas locales es $V = \Delta L = \sqrt{\langle [\nabla^2 W(\mathbf{r}) - \langle \nabla^2 W(\mathbf{r}) \rangle]^2 \rangle} = \sqrt{\langle [\nabla^2 W(\mathbf{r})]^2 \rangle}$, es decir, la raíz cuadrada de la varianza espacio-temporal del laplaciano de la fase. El frente de onda se desarrolla como combinación lineal de

polinomios de Zernike*, $W = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_j$, y el dispositivo adaptativo está diseñado para detectar y compensar el efecto de los $J = 56$ primeros. Este nivel de compensación fija el valor máximo de la curvatura promedio, V , que asumimos que puede darse en el entorno local delimitado por una subpupila.

Por otro lado, calcularemos el número de fotones promedio, N , que se detectan en cada subabertura durante el tiempo de exposición. Con ambos datos determinaremos la separación z_{opt} que debe utilizarse para que el sistema alcance el máximo nivel de compensación.

1. Curvatura máxima promedio en la abertura del telescopio

A continuación calculamos la cota superior de la curvatura local, $V = \Delta L$, para los $J = 56$ primeros polinomios de Zernike. Acabamos de ver que:

$$V = \sqrt{\langle [\nabla^2 W(\mathbf{r})]^2 \rangle} = \sqrt{\langle [\nabla^2 W(\rho \mathcal{D}/2, \theta)]^2 \rangle} \quad (2.29)$$

donde $\rho \in (0, 1)$ y $\theta \in (0, 2\pi)$ y \mathcal{D} es el diámetro de la pupila del telescopio. Suponiendo que la fase se desarrolla como combinación lineal de J polinomios de Zernike, $W(\rho \mathcal{D}/2, \theta) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{j=1}^J a_j Z_j(\rho, \theta)$, entonces:

$$V = \frac{2\lambda}{\pi \mathcal{D}^2} \sqrt{\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \langle \nabla^2 Z_j(\rho, \theta) \rangle \mathcal{E}\{a_j a_k\} \langle \nabla^2 Z_k(\rho, \theta) \rangle} \quad (2.30)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ es ahora el promedio espacial y $\mathcal{E}\{\cdot\}$ es el promedio temporal. El valor medio espacial del laplaciano de cada polinomio de Zernike se calcula en el círculo de radio unidad, es decir:

$$\langle \nabla^2 Z_j(\rho, \theta) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \nabla^2 Z_j(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \quad (2.31)$$

y $\mathcal{E}\{a_j a_k\}$ son los elementos de la matriz de covarianzas de los coeficientes del desarrollo de la fase, que, para el espectro de Kolmogorov, es [14, 157]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{a_j a_k\} = & 0,0072 \left(\frac{\mathcal{D}}{r_o}\right)^{5/3} (-1)^{(n_j+n_k-2m_j)/2} [(n_j+1)(n_k+1)]^{1/2} \pi^{8/3} \delta_{m_j m_k} \\ & \times \frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \Gamma\left[\frac{n_j+n_k-5/3}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n_j-n_k+17/3}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n_k-n_j+17/3}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n_j+n_k+23/3}{2}\right]} \end{aligned} \quad (2.32)$$

*En este calculo se utiliza la notación de Noll de los polinomios de Zernike [157].

$\mathcal{E}\{a_j a_k\}$	
$\mathcal{E}\{a_4^2\}$	$0,023180345(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_4 a_{22}\}$	$0,000315852(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_4 a_{56}\}$	$0,000000521(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{11}^2\}$	$0,002449955(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{11} a_{37}\}$	$0,000088166(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{22}^2\}$	$0,000654043(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{22} a_4\}$	$0,000315852(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{22} a_{56}\}$	$0,000034494(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{37}^2\}$	$0,000251506(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{37} a_{11}\}$	$0,000088166(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{56}^2\}$	$0,000118472(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{56} a_4\}$	$0,000000521(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$
$\mathcal{E}\{a_{56} a_{22}\}$	$0,000034494(\mathcal{D}/r_o)^{5/3}$

Tabla 2.2: Covarianzas no nulas asociadas a los 56 primeros polinomios de Zernike cuyo valor medio espacial en el círculo de radio unidad no se anula.

donde $n_{j,k}$ indica el orden radial asociado al polinomio de Zernike $Z_{j,k}$. La ecuación anterior es solo válida para combinaciones $j-k = \text{par}$ y $j-k = \text{impar}$.

Ahora bien, de los 56 primeros polinomios de Zernike, solo el promedio espacial de los rotacionalmente simétricos es no nulo. En concreto, solo contribuyen los siguientes valores medios: $\langle \nabla^2 Z_4(\rho) \rangle = 8\sqrt{3}$, $\langle \nabla^2 Z_{11}(\rho) \rangle = 24\sqrt{5}$, $\langle \nabla^2 Z_{22}(\rho) \rangle = 48\sqrt{7}$, $\langle \nabla^2 Z_{37}(\rho) \rangle = 80\sqrt{9}$ y $\langle \nabla^2 Z_{56}(\rho) \rangle = 120\sqrt{11}$. Asimismo, los únicos coeficientes no nulos de la matriz de covarianzas, de todas las combinaciones posibles asociadas a estos polinomios de Zernike, son los que se muestran en la Tabla 2.2.

El radio de Fried es $r_o = 25$ cm para una longitud de onda $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$. Pero la longitud de onda de trabajo del sensor de curvatura es $\lambda = 0,7 \mu\text{m}$. Teniendo en cuenta que la velocidad promedio de la capa de turbulencia es $\bar{v} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, podemos calcular el radio de Fried asociado a una longitud de onda $\lambda \mu\text{m}$ por medio de la ecuación [15]:

$$r_o(\lambda) = 20 \left(\frac{\lambda}{0,55} \right)^{6/5} \text{ [cm]}, \quad (2.33)$$

que implica un radio de Fried de $r_o = 33,39$ cm. Sustituyendo estos datos en la Ec. (2.30), teniendo en cuenta que el sensor trabaja en la longitud de onda $\lambda = 0,7 \mu\text{m}$, obtenemos la curvatura máxima promedio de los frentes de onda: $V = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$.

2. Número de fotones disponible

En la Tabla 2.1 se indica que una estrella de magnitud $m_R = 0$ emite fotones dirigidos a la totalidad de la abertura del telescopio a un ritmo $F_o = 8,2 \cdot 10^{11}$ fotones $\cdot \text{s}^{-1}$. A partir de este dato, se puede calcular el ritmo F al que una estrella de cualquier magnitud, m , emite fotones dirigidos hacia la abertura. Concretamente, para una longitud de onda determinada, la magnitud de la estrella viene dada por [15]:

$$m = -2,5 \ln \left(\frac{F}{F_o} \right) \quad [\text{arcseg}^{-2}] \quad (2.34)$$

Queremos calcular la posición óptima de los planos cuando el sensor de curvatura funciona con la luz que proviene de una estrella de magnitud $m = m_R = 14,7$. Despejando F en la ecuación anterior se obtiene $F = 1\,080\,970$ fotones $\cdot \text{s}^{-1}$. Por otro lado, la Tabla 2.1 también informa de que solo el 50 % de los fotones consiguen ser detectados, con lo que la lectura efectiva proporcionada por los detectores es de $F = 540\,485$ fotones $\cdot \text{s}^{-1}$. El mismo procedimiento permite calcular el ritmo F^f con el que los fotones de la radiación de fondo inciden en los detectores. La radiación de fondo limita la observación de objetos muy tenues a través de la atmósfera debido especialmente a la emisión intrínseca del cielo nocturno [149]. La magnitud equivalente del ruido de fondo es, según la Tabla 2.1, $m_R^f = 20,3 \text{ arcseg}^{-2}$. Teniendo en cuenta que los detectores solo captan el 50 % de los fotones que entran en la abertura, se tiene que $F^f = 3110$ fotones $\cdot \text{s}^{-1}$. Dado que el fondo limita el contraste inferiormente, en la práctica solo dispondremos de $F = 540\,485 - 3110 = 537\,375$ fotones $\cdot \text{s}^{-1}$.

Ahora solo necesitamos calcular el tiempo de respuesta o tiempo de exposición de los detectores, que está íntimamente relacionado con el ancho de banda del sistema. El tiempo de respuesta del sistema compensador no puede ser superior al tiempo de correlación atmosférico, que da cuenta de la rapidez a la que evolucionan las capas de turbulencia. Para calcular el tiempo de exposición, nos basamos en el procedimiento que describe F. Roddier en las secciones §. 3.4 y §. 3.5 de la Ref. [15]. En concreto, Roddier modela el funcionamiento

del sistema de Óptica adaptativa como un sistema integrador ideal. Como el sistema es integrador, es un sistema en lazo cerrado y el espejo ha de lograr compensar, al cabo de varios ciclos, las curvaturas locales del frente de onda en la región definida por cada una de las subpupilas [10, 123]. Como es ideal se suponen despreciables el error de predicción, es decir, el retraso en la compensación o también, por ejemplo, fenómenos de histéresis en los actuadores piezoeléctricos. De este modo, el mínimo ancho de banda admisible para un sistema compensador basado en un sensor de curvatura es:

$$\nu_o = 0,34 \frac{2\bar{v}}{d} \quad (2.35)$$

donde \bar{v} es la velocidad promedio de la capa de turbulencia y d es el diámetro de cada subabertura. La pupila del telescopio está muestreada por 56 subpupilas de la misma área repartidas a lo largo y ancho de la región entre el borde de la abertura del telescopio, de diámetro $\mathcal{D} = 7,9$ m, y el borde de la obstrucción central, de diámetro 1,2 m. Con todo ello podemos ya calcular el tiempo de integración:

$$\tau_o = \frac{1}{2\pi\nu_o} = \frac{\mathcal{D} - 1,2}{4 \cdot 0,34 \pi \sqrt{56} \bar{v}} = \frac{7,9 - 1,2}{1,36 \pi \sqrt{56} \cdot 20} = 0,010 \text{ s} \quad (2.36)$$

y así, tras el tiempo de exposición τ_o , cada detector ha captado en promedio:

$$N = \frac{F \cdot \tau_o}{56} = 96 \text{ fotones} \quad (2.37)$$

3. Separación óptima

Con los datos calculados para la curvatura local máxima, $V = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$, y para el nivel de luz disponible por detector, $N = 96$ fotones, procedemos aquí a calcular la separación entre planos que optimiza el rendimiento del sensor de curvatura. Sustituyendo N en la ecuación para la posición óptima de la Tabla C.1 (ver Apéndice C), hallamos h_{opt} y dividiendo por V se obtiene $z_{\text{opt}} = 875$ km. En esta posición, la cota superior del error de la estimación de la curvatura local en el área de cada subpupila es $\epsilon_{\text{sup}} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ y la cota inferior es $\epsilon_{\text{inf}} = 8,4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}$.

Estudios teóricos y simulaciones numéricas junto con la experiencia adquirida con los sistemas UH (*University of Hawaii*) y CFHT (*Canada France Hawaii Telescope*) [53], permiten a Rigaut *et al.* afirmar que la operación óptima del sensor de curvatura en las condiciones descritas en la Tabla 2.1 se da para una posición de los planos, $z = 898$ km, prácticamente igual al z_{opt} que acabamos de calcular.

Capítulo 3

Optimización de la medida de frontera

En el Capítulo 1, se ha visto que el problema de recuperación de fase a partir de medidas de irradiancia basado en la ETI consiste en resolver una ecuación diferencial elíptica con condición de contorno de Neumann. Cuando la distribución de irradiancia es uniforme en el plano de recuperación, se trata de una ecuación de Poisson. En consecuencia, para que no haya ambigüedades en la solución, generalmente no llega con recopilar información del laplaciano de la fase en el interior, $\nabla^2 W$, sino que también ha de obtenerse información de su derivada normal en el borde, W_r . En la ETI (Ec. (1.3)), W_r va modulada por una distribución lineal de Dirac, δ_c , que coincide con el borde de la pupila en $z = 0$. Por ello, para extraer información de la derivada normal de la fase en la frontera, las medidas de la derivada axial de irradiancia deben promediarse radialmente en un intervalo que contenga el borde de la región iluminada [136].

La aproximación de la derivada axial en diferencias finitas a primer orden produce aquí problemas parecidos a los estudiados en las medidas del interior, pero también surgen otros nuevos, a causa de la integración en el borde, que dificultan específicamente la estimación de W_r . La contribución conjunta de todas las fuentes de error depende de la distancia de separación entre los planos. Análogamente a lo visto para el interior, para realizar la medida de frontera, se utilizan medidas de irradiancia en planos situados entre el plano de la pupila y las cáusticas.

Salvo en aquellos casos donde la posición óptima de los planos se selecciona programando complicadas simulaciones numéricas [53], en la mayoría de las aplicaciones no se informa acerca del criterio utilizado para escoger la posición de los

planos de medida. En estas situaciones, todo apunta a que las medidas de frontera se realizan empleando las mismas posiciones de los planos que las medidas del interior. No obstante, *a priori* no existe ninguna razón que garantice que la separación elegida para optimizar la medida del laplaciano permita obtener también medidas de frontera de buena calidad.

Debido a los problemas que surgen al poner en práctica el procedimiento anterior, se han propuesto otros métodos para estimar W_r , que utilizan como datos de entrada el radio de la región iluminada en dos planos adyacentes ortogonales al eje z [131]. Mediante este tipo de métodos, se elimina la contribución del ruido de las medidas de irradiancia, pero se sustituye por la inevitable incertidumbre de las medidas de la posición del borde.

En este capítulo desarrollaremos un procedimiento, análogo al realizado para el interior, para optimizar la señal de frontera proporcionada por el sensor de curvatura. Comenzaremos describiendo con más detalle los fundamentos de estos métodos y proseguiremos analizando las principales limitaciones que presentan y que determinan la precisión del resultado final. Por último, modelaremos el error de W_r en función de la posición de los planos de medida en el eje z , que nos permitirá encontrar la separación entre ellos que minimiza las contribuciones del error en conjunto.

3.1. Métodos de medida de la derivada normal de la fase en la frontera

Cualquiera de los dos métodos que se emplean para obtener W_r en el borde de la pupila tiene como finalidad cuantificar el cambio de dimensión radial de la zona geoméricamente iluminada. El primero, consiste en medir directamente la deformación radial de las regiones iluminadas en dos planos paralelos perpendiculares al eje óptico del sistema [131]. Lo llamaremos método directo. En el segundo, el desplazamiento radial del borde se mide indirectamente, como resultado de implementar la ETI aproximando la derivada axial con diferencias finitas a primer orden de medidas de irradiancia en dos planos promediadas radialmente en el contorno [136]. Nos referiremos a él como método indirecto*.

*En este capítulo estudiaremos exclusivamente las aproximaciones clásicas en diferencias finitas de la derivada axial. La fórmula de Roddier, semejante en algunos aspectos a la fórmula central, no se analiza en este capítulo para facilitar su comprensión. No obstante, dado su destacable protagonismo en el campo de la Óptica Astronómica, merece un estudio aparte en este trabajo, que se incluye en

En esta sección deduciremos las ecuaciones que relacionan las medidas que lleva a cabo el sensor con la derivada normal de la fase en la frontera. Partiendo de estas ecuaciones, describiremos las simplificaciones que se realizan para poderlas implementar experimentalmente en el sensor de curvatura. Este paso es muy importante para identificar, más adelante, las principales fuentes de error que deterioran la respuesta del sensor en relación con las medidas de frontera.

3.1.1. Método directo de medida de la deformación de la región iluminada

La hipótesis de partida consiste en que la deformación radial de las regiones iluminadas en dos planos z y $-z$, es proporcional a la derivada de la fase normal al borde de la pupila, W_r . De este modo, en cada ángulo θ se toman, experimentalmente, las siguientes relaciones para estimar W_r en la frontera [131]:

$$\begin{aligned} R_+ - R_- &= 2z\hat{W}_r \\ R_{\pm} - R &= \pm z\hat{W}_r \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $R_{\pm} = R_{\pm}(\theta)$ es el radio de la región iluminada en las posiciones $\pm z$ y $\hat{W}_r = \hat{W}_r(\theta)$ es la estimación de la derivada normal en el punto (R, θ) del borde. Dado que en la primera ecuación se usan datos en dos planos situados simétricamente a ambos lados de $z = 0$, la llamaremos fórmula central. En cuanto a la segunda ecuación, la llamaremos fórmula progresiva o bien fórmula regresiva según se utilice el radio en el plano $+z$ o bien en el plano $-z$, respectivamente.

En lo que sigue, demostraremos que las Ecs. (3.1) son, en realidad, una aproximación a primer orden de la dinámica del borde de la región iluminada en planos perpendiculares al eje z , válida solo muy cerca de $z = 0$.

Partimos de las ecuaciones de los rayos asociadas a una onda paraxial de fase W que se propaga a lo largo del eje z [152, 153]:

$$\begin{aligned} x &= x_c \pm zW_{x_c} \\ y &= y_c \pm zW_{y_c} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $W_{x_c} = (\partial W / \partial x)_{(x_c, y_c)}$ y $W_{y_c} = (\partial W / \partial y)_{(x_c, y_c)}$. Estas ecuaciones describen la trayectoria del rayo que pasa por el punto (x_c, y_c) del plano de la pupila, $z = 0$, en función de las coordenadas y de las inclinaciones de la fase, W_{x_c} y W_{y_c} , en dicho punto.

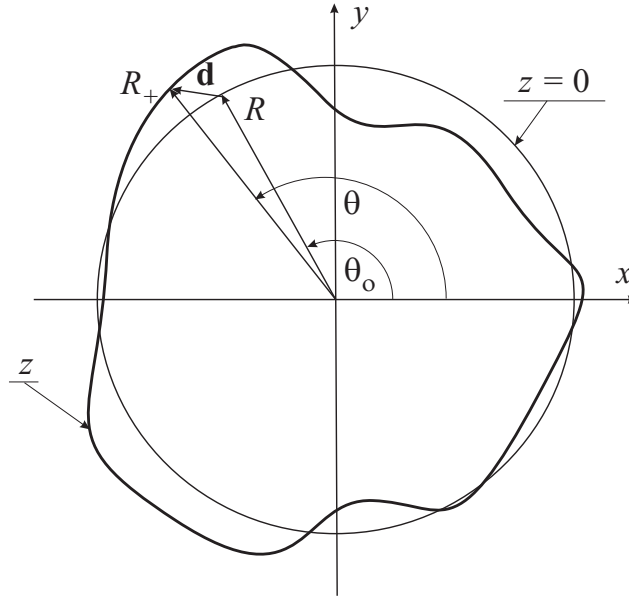


Figura 3.1: Ejemplo de evolución de la zona geoméricamente iluminada desde el plano de la abertura, $z = 0$, a un plano desplazado, z .

En coordenadas polares se expresan de la forma:

$$\begin{cases} r \cos(\theta - \theta_c) = r_c \pm zW_{r_c} \\ r \sin(\theta - \theta_c) = \pm z \frac{W_{\theta_c}}{r_c} \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $W_{r_c} = (\partial W / \partial r)_{(r_c, \theta_c)}$ y $W_{\theta_c} = (\partial W / \partial \theta)_{(r_c, \theta_c)}$, siendo (r_c, θ_c) las coordenadas polares del punto del plano $z = 0$ por donde pasa el rayo. Si la distancia de separación escogida, z , es lo suficientemente pequeña como para que el desplazamiento angular de los rayos, $\theta - \theta_c$, no sea muy grande, podemos truncar a primer orden los desarrollos en serie de potencias de las funciones trigonométricas de las ecuaciones anteriores, obteniéndose:

$$\begin{cases} r = r_c \pm zW_{r_c} \\ \theta = \theta_c \pm z \frac{W_{\theta_c}}{rr_c} \end{cases} \quad (3.4)$$

Pero para llegar a las Ecs. (3.1) es necesario hacer una aproximación más fuerte, es decir, hay que suponer que la deformación de la región iluminada es estrictamente radial, esto es, $\theta = \theta_c$. En definitiva, se supone que el efecto de la derivada angular de la fase en los puntos de la frontera no es significativo desde el plano de recuperación, $z = 0$, al plano z .

En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo para ilustrar la evolución axial de la zona iluminada, donde el vector \mathbf{d} indica el desplazamiento del borde, que, en general,

tiene componente radial y tangencial.

Si se trabaja con distancias z lejos de las cáusticas, podemos asegurar que los puntos del borde en el plano $z = 0$, (R, θ_c) , dan lugar a puntos del borde en un plano $\pm z$, (R_{\pm}, θ) [153]. Por tanto, a partir de las Ecs. (3.3), se deduce que el radio de la región iluminada evoluciona en cada ángulo θ de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$R_{\pm} = \sqrt{(R \pm zW_{rc})^2 + \left(z\frac{W_{\theta_c}}{R}\right)^2} \quad (3.5)$$

Si la distancia z es muy pequeña, entonces la zona iluminada se deforma linealmente con z y proporcionalmente a W_{rc} , lo que posibilita el método descrito por las Ecs. (3.1), es decir:

$$\begin{aligned} R_{\pm} - R &= \sqrt{(R \pm zW_{rc})^2 + \left(z\frac{W_{\theta_c}}{R}\right)^2} - R \cong R\sqrt{1 \pm 2z\frac{W_{rc}}{R}} - R \\ &\cong R\left(1 \pm z\frac{W_{rc}}{R}\right) - R = \pm zW_{rc} \end{aligned} \quad (3.6)$$

De acuerdo con este modelo, en cada ángulo θ , la derivada normal sería la constante de proporcionalidad que liga el desplazamiento radial del borde con el desplazamiento longitudinal del plano de medida en el eje z . Pero, en realidad, la Ec. (3.6) informa de que la linealidad del proceso de deformación de la zona iluminada solo se puede suponer en un rango limitado del eje z . El motivo, ya adelantado en la Figura 3.1, es que, en realidad, la derivada angular de la fase, W_{θ_c} , interviene también en la traslación del borde de la región iluminada. Como las medidas de los radios de las dos zonas iluminadas se llevan a cabo para un ángulo θ constante, la derivada radial calculada como diferencia entre ambos radios se asigna al punto (R, θ) de la frontera de la pupila cuando, en realidad, corresponde a otro punto (R, θ_c) de las inmediaciones (ver Ecs. (3.4)). Esta asignación incorrecta induce un error que crece con la separación z , debido a la contribución no siempre despreciable del término zW_{θ_c}/R de la Ec. (3.5).

3.1.2. Metodo indirecto de medida de la deformación de la región iluminada

Con este método se trata de obtener la derivada de la fase normal al borde de la pupila a partir de medidas de la derivada axial de la intensidad, de acuerdo con la relación entre ambas magnitudes descrita por la ETI (Ec. (1.3)):

$$I'(0) = I_o W_r \delta_c \quad (3.7)$$

En esta ecuación, W_r va modulada por una delta de Dirac en el borde de la pupila, $\delta_c = \delta(r - R)$. De este modo, una forma sencilla de extraer la derivada normal es promediando la ETI radialmente en un intervalo que incluya la delta de Dirac del borde [136], es decir:

$$\mathcal{I}'(0) = \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R+L/2} I'(0) dr = \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R+L/2} I_o W_r \delta(r - R) dr = I_o \frac{W_r}{L} \quad (3.8)$$

donde $\mathcal{I}'(0)$ representa, en un ángulo θ , el promedio radial de la derivada axial dentro de una región alrededor del borde de anchura radial L : la región de frontera. Experimentalmente, se implementa alguna de las aproximaciones en diferencias finitas de la derivada axial, cuyos datos de entrada son las distribuciones de irradiancia de dos planos axiales $\pm z$ y/o $z = 0$. En la Figura 3.2(a) se representan ejemplos de los perfiles de irradiancia en un ángulo θ del plano z , $I(z)$, del plano $z = 0$, $I(0)$, y del plano $-z$, $I(-z)$. Matemáticamente pueden expresarse de la forma:

$$\begin{cases} I(0) &= I_o [1 - H(r - R)] \\ I(z) &= I_+ [1 - H(r - R_+)] \\ I(-z) &= I_- [1 - H(r - R_-)] \end{cases} \quad (3.9)$$

siendo R_{\pm} el radio de la región iluminada asociado al ángulo θ en el plano $\pm z$ (Ec. (3.5)), I_{\pm} la irradiancia en el punto (r, θ) de dicho plano en el supuesto de que no hubiese una pupila en el plano $z = 0$ (en aproximación de Fresnel, Ec. (2.12)) y H es la función de salto unitario, es decir [158]:

$$H(r - R) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > R \\ 0 & \text{si } r \leq R \end{cases}, \quad (3.10)$$

que representa el efecto que causa la pupila del plano $z = 0$.

Por tanto, las aproximaciones en diferencias finitas de la derivada axial que típicamente se implementan para estimar la derivada normal de la fase en la frontera, \hat{W}_r , pueden expresarse de la forma siguiente:

a) Fórmula Central o de Stirling

En un punto (R, θ) del borde de la abertura, la derivada axial se estima como:

$$\hat{\mathcal{I}}'(0) = \frac{\mathcal{I}_+ - \mathcal{I}_-}{2z} \quad (3.11)$$

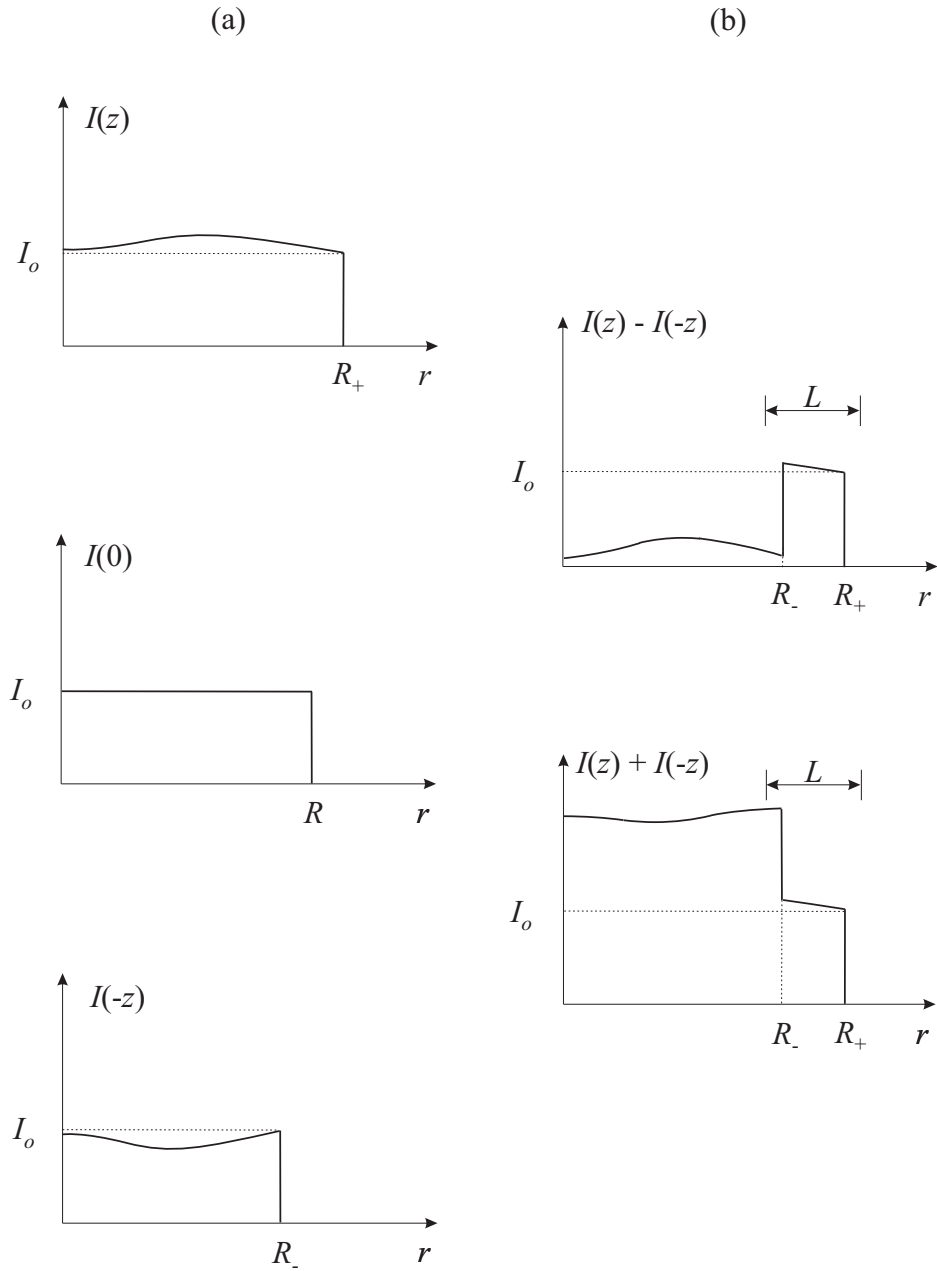


Figura 3.2: (a) Ejemplo de perfiles de irradiancia en planos $\pm z$ y $z = 0$ perpendiculares al eje del sistema. (b) Suma y resta de las irradiancias de los planos $+z$ y $-z$.

con $z > 0$, donde el circunflejo sobre $\hat{\mathcal{I}}'$ indica que se trata de una estimación de la derivada axial y donde:

$$\mathcal{I}_{\pm} = \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R+L/2} I_{\pm} [1 - H(r - R_{\pm})] dr = \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R_{\pm}} I_{\pm} dr \quad (3.12)$$

El algoritmo es más preciso a medida que se reduce la distancia entre los planos, es decir:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{I}}'(0) &= \frac{1}{2z} \left(\frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R_+} I_+ dr - \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R_-} I_- dr \right) \cong \frac{I_o}{L} \left[\frac{R_+ - R - (R_- - R)}{2z} \right] \\ &\cong \frac{I_o z W_r - (-z W_r)}{L \cdot 2z} = I_o \frac{W_r}{L} = \mathcal{I}'(0)\end{aligned}\quad (3.13)$$

donde también se comprueba que este método y el descrito por las Ecs. (3.1) son equivalentes cuando los planos se sitúan muy cerca de $z = 0$.

b) Fórmula progresiva y regresiva de Newton

En este caso, la derivada axial se aproxima en cada punto (R, θ) del borde de la forma:

$$\hat{\mathcal{I}}'(0) = \frac{\mathcal{I}_\pm - \mathcal{I}_o}{\pm z} \quad (3.14)$$

con \mathcal{I}_\pm de la Ec. (3.12) e \mathcal{I}_o :

$$\mathcal{I}_o = \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R+L/2} I_o [1 - H(r - R)] dr = \frac{I_o}{L} \left(R - R + \frac{L}{2} \right) = \frac{I_o}{2} \quad (3.15)$$

Llevando a cabo un proceso análogo al del apartado anterior se deduce fácilmente que:

$$\hat{\mathcal{I}}'(0) \cong I_o \frac{W_r}{L} = \mathcal{I}'(0) \quad (3.16)$$

3.2. Factores que limitan la medida de frontera

En la sección anterior, hemos introducido los dos métodos que se utilizan para obtener la derivada normal de la fase en el borde de la pupila. Las fórmulas empleadas experimentalmente son aproximaciones a primer orden de las ecuaciones exactas y la estimación de W_r por estos métodos puede llegar a ser muy imprecisa. Concretamente, como ya vimos, los algoritmos funcionan correctamente siempre y cuando pueda suponerse que un punto (R, θ) del borde de la pupila en $z = 0$ se mueve hasta $(R \pm z W_r, \theta)$ en el plano $\pm z$. No obstante, la deformación real del borde difiere, en general, de este comportamiento lineal.

Acabamos de comprobar que la precisión de cualquiera de los dos métodos se incrementa conforme los planos se acercan [16, 131, 136]. Pero también hay que tener en cuenta la presencia de errores en los datos de entrada, cuyos efectos se hacen notar sobre todo en las posiciones cercanas al plano $z = 0$. En el caso de

los métodos directos, los errores de los datos son las incertidumbres de las medidas de la posición del borde de la zona iluminada. En los métodos indirectos, son las fluctuaciones de las irradiancias debido al ruido. En definitiva, los errores de las medidas y el efecto de la derivada angular de la fase en la dinámica del borde de la región iluminada son dos problemas fundamentales, íntimamente ligados por la posición de los planos, z , que determina la precisión del resultado final.

Por otro lado, para que el método basado en la ETI sea preciso, la derivada que debemos medir en la frontera debe ser infinitamente estrecha, según indica la delta de Dirac, δ_c (Ecs. (3.7) y (3.8)). No obstante, en la práctica, el salto de $\hat{I}'(0) = [I(z) - I(-z)] / (2z)$ en la región de frontera tiene un perfil aproximadamente rectangular, que solo converge a la delta de Dirac en el límite en que z es pequeño [158] (ver Figura 3.2(b)). Además, puesto que W_r se estima promediando $\hat{I}'(0)$ en la frontera, la precisión del método indirecto también depende de la anchura radial seleccionada para la región de frontera, L .

3.3. Varianza de la estimación de la derivada normal en la frontera

A continuación calcularemos la varianza de la derivada normal estimada siguiendo los métodos directo e indirecto en función de la distancia de separación z .

3.3.1. Método directo

En el método directo solo distinguimos dos fuentes de error. La primera es el error del modelo, es decir, cuánto se aleja de la ecuación exacta la ecuación simplificada que emplea el algoritmo de medida. La segunda es la propagación de los errores de los datos de entrada a la derivada normal. Vamos a suponer que estas dos contribuciones son independientes y la varianza total de \hat{W}_r será, por tanto, la suma de ambas.

Supongamos que el método de detección de la posición del borde de las regiones iluminadas proporciona medidas de los radios R_{\pm} y R en cada ángulo θ con una incertidumbre $s(R_{\pm}) = s(R) = \sigma$. Podemos estimar la derivada normal en un punto (R, θ) utilizando las Ecs. (3.1), cuyas varianzas son, para cada fórmula:

a) Fórmula central

Las medidas son R_+ y R_- en el plano $+z$ y el plano $-z$, respectivamente.

Entonces, la varianza de \hat{W}_r es:

$$\begin{aligned} s^2(\hat{W}_r) &= \left(\frac{\partial \hat{W}_r}{\partial R_+} \right)^2 s^2(R_+) + \left(\frac{\partial \hat{W}_r}{\partial R_-} \right)^2 s^2(R_-) + \left(\hat{W}_r - W_r \right)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2z^2} + \left(\frac{R_+ - R_-}{2z} - W_r \right)^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

con R_{\pm} de la Ec. (3.5).

b) Fórmula progresiva y regresiva

Las medidas son R_{\pm} en el plano $\pm z$ y R en $z = 0$. La varianza de la derivada normal de la fase en el borde de la pupila es, entonces:

$$\begin{aligned} s^2(\hat{W}_r) &= \left(\frac{\partial \hat{W}_r}{\partial R_{\pm}} \right)^2 s^2(R_{\pm}) + \left(\frac{\partial \hat{W}_r}{\partial R} \right)^2 s^2(R) + \left(\hat{W}_r - W_r \right)^2 \\ &= \frac{2\sigma^2}{z^2} + \left(\frac{R_{\pm} - R}{\pm z} - W_r \right)^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

con R_{\pm} de la Ec. (3.5).

3.3.2. Método indirecto

En este caso la derivada normal de la fase en la frontera se estima a partir de medidas de irradiancia. La luz se capta utilizando detectores situados en el borde de la pupila en una región que abarca desde $R - L/2$ a $R + L/2$, como se muestra en la Figura 3.3 para una pupila circular [16]. Cada detector, de anchura radial L , cubre un ángulo $\Delta\theta$ donde realiza medidas promediadas de irradiancia. El resultado para la derivada normal, \hat{W}_r , es una medida promediada en el ángulo $\Delta\theta$, con centro en θ , que se asigna al punto (R, θ) [136]. No obstante, en este cálculo teórico vamos a suponer que en cada ángulo θ del contorno tenemos un detector que proporciona medidas de irradiancia, es decir, supondremos que podemos estimar W_r en cada ángulo θ . Llamemos \mathcal{I}_+ e \mathcal{I}_- a las irradiancias promedio en las posiciones z y $-z$, respectivamente, captadas por el detector del ángulo θ . La cantidad de luz que capta este detector varía dependiendo de la distancia z porque las aberraciones de los frentes de onda actúan deformando la región iluminada, como se muestra en la Figura 3.3.

En el método indirecto las dos fuentes principales de error son el error del modelo utilizado para aproximar la derivada axial y el ruido de las medidas de irradiancia,

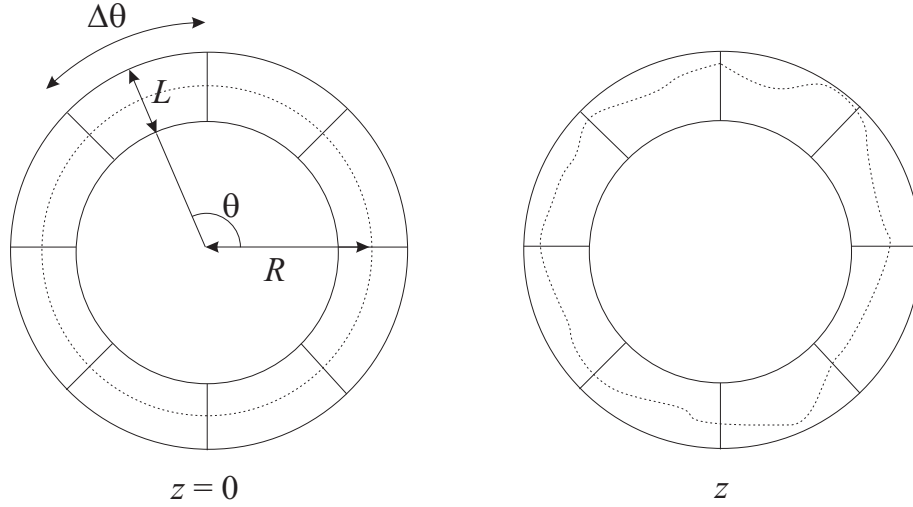


Figura 3.3: Ejemplo de matriz de detectores en la región de frontera. En línea de puntos se dibujan las zonas iluminadas en el plano de la pupila, $z = 0$, y en un plano desplazado, z .

que consideramos contribuyen independientemente. Sin pérdida de generalidad en los resultados, para calcular y analizar el comportamiento de la varianza de \hat{W}_r , $s^2(\hat{W}_r)$, supondremos que las fluctuaciones de irradiancia en cada punto son de media cero e independientes del nivel de señal. Esta es una simplificación, ya que así las fluctuaciones por ruido fotónico se consideran como fluctuaciones por ruido de detección, cometiéndose un error de estadística que no influye apreciablemente en el comportamiento cualitativo de $s^2(\hat{W}_r)$. No obstante, en el Apéndice B se incluye este cálculo en función del número de fotones que llegan al detector, de utilidad cuando se precisen datos cuantitativos en aplicaciones donde la disponibilidad de luz es limitada, como, por ejemplo, en Óptica Astronómica.

Si n_{\pm} es el ruido de las medidas de irradiancia en cada punto \mathbf{r} (ver § 2.2.1), el ruido del promedio radial de la irradiancia en la frontera, η_{\pm} , es también de media cero y de varianza σ^2 :

$$s^2(\mathcal{I}_{\pm}) = \mathcal{E}\{[\eta_{\pm}]^2\} = \sigma^2 \quad (3.19)$$

donde $\mathcal{E}\{\cdot\}$ denota valor medio.

Teniendo en cuenta estas hipótesis, calcularemos $s^2(\hat{W}_r)$ partiendo de la varianza de la derivada axial de la intensidad estimada en diferencias finitas. Análogamente al procedimiento de optimización de las medidas del interior, con el objetivo de obtener estimaciones precisas de $\mathcal{I}'(0)$ en cada ángulo θ de la frontera, encontraremos la

separación entre los planos, $z = z(\theta)$, que verifica:

$$s^2 \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) \right] = \mathcal{E} \left\{ \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) - \mathcal{I}'(0) \right]^2 \right\} = \text{mín} \quad (3.20)$$

Es decir, calcularemos la desviación cuadrática media de la aproximación experimental de la derivada axial, $\hat{\mathcal{I}}'(0)$, respecto del valor determinista de la derivada promedio, $\mathcal{I}'(0)$, en el plano $z = 0$, para más adelante hallar el valor de z que la minimiza.

a) **Varianza de la derivada axial aproximada por la fórmula central en diferencias finitas**

Supongamos que en un plano $\pm z$, el promedio radial de la irradiancia en cada ángulo θ de la región de frontera, \mathcal{I}_{\pm} , es una función univaluada, continua, cuya derivada primera es también continua y cuya derivada segunda existe en el rango axial de operación del sensor. Entonces, podemos aplicar el teorema de Taylor a primer orden para \mathcal{I}_{\pm} en torno a $z = 0$ y hallar, para cada ángulo θ , el siguiente desarrollo en serie:

$$\mathcal{I}_{\pm} = \mathcal{I}_o \pm \mathcal{I}'(0)z + \frac{1}{2}\mathcal{I}''[\zeta_{\pm}(\theta)]z^2 \quad (3.21)$$

El tercer sumando del miembro de la derecha es el resto del desarrollo del promedio radial de la irradiancia entre los límites $R - L/2$ y $R + L/2$, donde, para cada ángulo θ , $\zeta_{\pm} = \zeta_{\pm}(\theta)$ es un punto dentro del intervalo $(0, z)$ o $(-z, 0)$.

Introduciendo el desarrollo (3.21) en la Ec. (3.11), la derivada axial estimada en un punto (R, θ) de la frontera de la pupila en $z = 0$ es:

$$\hat{\mathcal{I}}'(0) = \mathcal{I}'(0) + \frac{\eta_+ + \eta_-}{2z} + \frac{1}{4} \{ \mathcal{I}''[\zeta_+(\theta)] - \mathcal{I}''[\zeta_-(\theta)] \} z \quad (3.22)$$

La precisión de $\hat{\mathcal{I}}'(0)$ depende del peso del segundo sumando, debido al error de las medidas, y del tercer sumando, debido al error de la aproximación en diferencias finitas; a lo que hay que añadir el tamaño de la región de frontera, L , del que también depende implícitamente.

Teniendo en cuenta que no existe correlación entre el ruido de un plano y otro y suponiendo que ambas fuentes de error contribuyen independientemente, a partir de las Ecs. (3.19), (3.20) y (3.22), deducimos que la varianza de la estimación de la derivada axial en un punto (R, θ) es:

$$s^2 \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) \right] = \frac{\sigma^2}{2z^2} + \frac{1}{16} \{ \mathcal{I}''[\zeta_+(\theta)] - \mathcal{I}''[\zeta_-(\theta)] \}^2 z^2 \quad (3.23)$$

Este resultado no es más que el promedio radial de la varianza de la Ec. (2.7) calculada en el Capítulo 2 para la fórmula central en puntos \mathbf{r} del interior.

b) **Varianza de la derivada axial aproximada con la fórmula progresiva y regresiva en diferencias finitas**

Como en el apartado anterior, aplicando el desarrollo de Taylor del promedio radial de la irradiancia (Ec. (3.21)) en la Ec. (3.14), se obtiene una relación similar a la Ec. (3.22), que da cuenta de la desviación de $\hat{\mathcal{I}}'(0)$ respecto de $\mathcal{I}'(0)$ en un punto (R, θ) del contorno. Si suponemos que el ruido de ambos planos no está correlacionado y que ambas fuentes de error contribuyen independientemente, la varianza de la derivada axial estimada en (R, θ) con la fórmula de Newton es, de acuerdo con la Ec. (3.20):

$$s^2 \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) \right] = \frac{2\sigma^2}{z^2} + \frac{1}{4} \{ \mathcal{I}'' [\zeta_{\pm}(\theta)] \}^2 z^2 \quad (3.24)$$

De nuevo, la Ec. (3.24) coincide con el promedio radial en la región de frontera de la varianza de la Ec. (2.9), que habíamos calculado para un punto \mathbf{r} del interior de la zona iluminada.

3.4. Selección del plano de medida

Las Ecs. (3.17) y (3.18) para el método directo y las Ecs. (3.23) y (3.24) para el indirecto modelan en función de z el error de \hat{W}_r en un punto (R, θ) del borde. El primer sumando de cada ecuación cuantifica la contribución de los errores de los datos de entrada y decrece al aumentar z . El segundo sumando no depende del ruido, sino de las características del frente de onda. Describe cuánto se desvía la respuesta del sensor respecto de la derivada normal de la fase en la frontera y crece con z . Adicionalmente, en las Ecs. (3.23) y (3.24), ambos sumandos dependen implícitamente del tamaño de la región de frontera, L .

En este punto nos encontramos con problemas parecidos a los que nos enfrentamos en las ecuaciones análogas de la § 2.3 correspondientes a la medida del interior, que nos impiden utilizar directamente las ecuaciones calculadas hasta ahora para optimizar la respuesta del sensor en la frontera. Por un lado, el segundo término de las Ecs. (3.17) y (3.18) del método directo depende del radio de la región iluminada en cada ángulo θ . Es decir, para minimizar la varianza de \hat{W}_r , deberíamos tener un cierto conocimiento de cómo evoluciona la posición del borde en todos los ángulos θ en función de la posición z del plano axial. Por otro lado, en las ecuaciones para

el método indirecto, el segundo término es función del resto de la aproximación en serie de Taylor a primer orden del promedio radial de la irradiancia en el intervalo $[R - L/2, R + L/2]$. En general, este sumando es diferente y desconocido para cada ángulo θ . En consecuencia, las fórmulas calculadas no pueden ponerse en práctica directamente para hallar una única separación óptima que minimice la varianza de la derivada normal estimada en todo el perímetro de la pupila. Además, aun conociendo exactamente el segundo término de las ecuaciones, proporcionarían una separación entre los planos diferente para cada ángulo θ .

Para llegar a nuestro objetivo, diseñaremos a continuación un método donde aplicaremos razonamientos similares a los utilizados en el Capítulo 2 que ayuden a evitar estos problemas. En concreto, estudiaremos la evolución del borde de la región iluminada suponiendo que la fase en el plano $z = 0$ es cuadrática y calcularemos el error que se comete al estimar su derivada normal en la frontera con el método directo y el indirecto. El comportamiento de este error en función de la posición de los planos de medida en el eje z nos proporcionará información suficiente para diseñar un procedimiento para optimizar la estimación de la derivada normal de frentes de onda más complejos en la totalidad del perímetro de la pupila.

3.4.1. Análisis de la dinámica del borde de la región iluminada

Sea el método de estimación de W_r directo o indirecto, la calidad de respuesta del sensor depende del proceso de deformación de la región iluminada conforme la luz se propaga en la dirección del eje z . En cada ángulo θ , la Ec. (3.5) nos informa de la evolución del radio de la zona iluminada en cada plano z . Sin embargo, la dependencia en el punto (R, θ_c) del plano $z = 0$, implícita en W_{r_c} y W_{θ_c} , introduce dificultades a la hora de usar directamente dicha ecuación para diseñar el procedimiento de optimización de la medida de frontera para cualquier frente de onda. Es por ello que deberemos hallar alguna expresión más simple, que no dependa de (R, θ_c) , para describir la dinámica del borde.

Siguiendo un razonamiento paralelo al del Capítulo 2 para las medidas del interior, calcularemos primero cómo evoluciona el radio de la región iluminada para frentes de onda cuadráticos sencillos y hallaremos la varianza de la medida de su derivada normal en el borde de la pupila. El análisis de esta varianza nos proporcionará información para diseñar un protocolo de actuación para mejorar el rendimiento del sensor en la frontera ante frentes de onda más complejos.

Para analizar la deformación de la región iluminada que provoca una fase cuadrática W_o , es suficiente con que la cuádrica esté en forma canónica, ya que la pupila circular del plano $z = 0$ no cambia si se rotan los ejes de coordenadas. Por tanto, supongamos que la pupila en $z = 0$ es circular, de radio R , y que la fase en dicho plano es cuadrática, de la forma canónica:

$$W_o = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 \quad (3.25)$$

donde A representa el pistón, B y C son las inclinaciones del frente en x y en y , y D y E son sus curvaturas principales en x y en y .

Si la superficie del frente de onda en los puntos del plano $z = 0$ es cuadrática, veremos que resulta factible hallar una ecuación que describa la evolución del radio de la región iluminada, R_o^\pm , que no dependa de θ_c .

En este caso, las ecuaciones que regulan la trayectoria de los puntos (x_c, y_c) del plano $z = 0$ a los puntos (x, y) del plano z (Ecs. (3.2)) son:

$$\begin{cases} x = \pm Bz + x_c (1 \pm 2Dz) \\ y = \pm Cz + y_c (1 \pm 2Ez) \end{cases} \quad (3.26)$$

Si los puntos del origen se toman en el borde de una pupila circular de radio R , entonces $x_c^2 + y_c^2 = R^2$ y las ecuaciones anteriores representan el lugar geométrico de los puntos de una elipse en el plano $\pm z$:

$$\left(\frac{x \mp Bz}{1 \pm 2Dz} \right)^2 + \left(\frac{y \mp Cz}{1 \pm 2Ez} \right)^2 = R^2 \quad (3.27)$$

donde se observa el papel de cada uno de los parámetros de la fase cuadrática en la dinámica del borde de la región iluminada. Así, B y C dan cuenta de la traslación del centro de la pupila durante la propagación y los coeficientes D y E del aumento o decremento del tamaño de la región iluminada, es decir, cuantifican la elipticidad que gana la pupila circular del plano $z = 0$ en cada plano axial z . Naturalmente, cuanto más se traslade su centro y cuanto más elíptica se vuelva la región iluminada, más peso tendrá la derivada angular de la fase en la dinámica del borde. Teniendo en cuenta que las coordenadas de un punto de la elipse en el plano $\pm z$ son $x = R_o^\pm \cos \theta$ e $y = R_o^\pm \sin \theta$, sustituyendo en la Ec. (3.27) y despejando R_o^\pm , se obtiene:

$$R_o^\pm = \frac{[1 \pm 2(D+E)z + 4DEz^2] \times \text{Raíz} \pm z [(1 \pm 2Ez)^2 B \cos \theta + (1 \pm 2Dz)^2 C \sin \theta]}{(1 \pm 2Ez)^2 \cos^2 \theta + (1 \pm 2Dz)^2 \sin^2 \theta} \quad (3.28)$$

donde:

$$\text{Raíz} = \sqrt{R^2 [(1 \pm 2Ez)^2 \cos^2 \theta + (1 \pm 2Dz)^2 \sin^2 \theta] - z^2 (B \sin \theta - C \cos \theta)^2}$$

A partir de esta ecuación, podemos calcular el radio de la región iluminada en un plano $\pm z$, asociado a un ángulo θ , en función de los parámetros característicos de la fase cuadrática de la Ec. (3.25), sin haber dependencia en el ángulo θ_c . Sustituyendo R_o^\pm en las varianzas de la § 3.3, calcularemos la varianza de la derivada normal de la cuádrica en cada ángulo θ .

3.4.2. Varianza de la estimación de la derivada normal de una fase cuadrática

Dada la fase cuadrática W_o en el plano $z = 0$ (Ec. (3.25)), la derivada normal en cada punto (R, θ) del borde de la pupila es:

$$W_{or} = B \cos \theta + C \sin \theta + 2R (D \cos^2 \theta + E \sin^2 \theta) \quad (3.29)$$

A continuación calcularemos la varianza de la derivada normal estimada en cada ángulo θ , $\epsilon_o^2 = s^2 (\hat{W}_{or})$. Comenzaremos con el método directo y seguiremos con el indirecto:

a) Método directo

En los algoritmos directos, la varianza de \hat{W}_{or} en un ángulo θ , ϵ_o^2 , se calcula sustituyendo simplemente la expresión para R_o^\pm de la Ec. (3.28) en las siguientes ecuaciones:

a.1) Fórmula central

$$\epsilon_o^2 = \frac{\sigma^2}{2z^2} + \left(\frac{R_o^+ - R_o^-}{2z} - W_{or} \right)^2 \quad (3.30)$$

a.2) Fórmula progresiva y regresiva

$$\epsilon_o^2 = \frac{2\sigma^2}{z^2} + \left(\frac{R_o^\pm - R}{\pm z} - W_{or} \right)^2 \quad (3.31)$$

b) Método indirecto

En los algoritmos indirectos, el cálculo es algo más complejo porque ϵ_o^2 depende no solo de R_o^\pm , sino también de las irradiancias integradas radialmente en la región de frontera, \mathcal{I}_\pm .

En ausencia de una pupila en el plano $z = 0$, la irradiancia en cualquier punto \mathbf{r} evolucionaría en los planos $\pm z$ de la forma (ver § 2.3.1):

$$I_{\pm} = \frac{I_o}{1 \pm 2(D + E)z + 4DE} \quad (3.32)$$

Entonces, la única dependencia en la coordenada radial de la distribución de irradiancia en cada plano z se encuentra en la función de salto que modela el efecto de la pupila de $z = 0$ (ver Ec. (3.9)). De este modo, las irradiancias integradas en la región de frontera son:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\pm} &= \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R+L/2} I_{\pm} [1 - H(r - R_o^{\pm})] dr = \frac{I_{\pm}}{L} (R_o^{\pm} - R + L/2) \\ &= \frac{I_o}{L} \left[\frac{R_o^{\pm} - R + L/2}{1 \pm 2(D + E)z + 4DEz^2} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde R_o^{\pm} se calcula a partir de la Ec. (3.28). Veamos ahora $\epsilon_o^2 = s^2 (\hat{W}_{or})$ cuando W_{or} se estima aproximando con fórmulas en diferencias finitas la derivada axial de la irradiancia promediada:

b.1) Fórmula central

Partiendo de la Ec. (3.23), sustituyendo $\mathcal{I}'' [\zeta_+(\theta)]$ e $\mathcal{I}'' [\zeta_-(\theta)]$ calculados a partir del desarrollo (3.21) y teniendo en cuenta las Ecs. (3.8), (3.11) y (3.15), la varianza de \hat{W}_{or} estimada utilizando esta configuración del sensor es:

$$\begin{aligned} \epsilon_o^2 &= \frac{L^2}{8z^2} \left(\frac{\sigma}{\mathcal{I}_o} \right)^2 + \left\{ \frac{1}{2z} \left[\frac{R_o^+ - R + L/2}{1 + 2(D + E)z + 4DEz^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{R_o^- - R + L/2}{1 - 2(D + E)z + 4DEz^2} \right] - W_{or} \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

b.2) Fórmula progresiva y regresiva

Partiendo de la Ec. (3.24), sustituyendo $\mathcal{I}'' [\zeta_{\pm}(\theta)]$ despejado en la Ec. (3.21) y teniendo en cuenta las Ecs. (3.8), (3.14) y (3.15), la varianza de \hat{W}_{or} es:

$$\epsilon_o^2 = \frac{L^2}{2z^2} \left(\frac{\sigma}{\mathcal{I}_o} \right)^2 + \left\{ \frac{1}{\pm z} \left[\frac{R_o^{\pm} - R + L/2}{1 \pm 2(D + E)z + 4DEz^2} - \frac{L}{2} \right] - W_{or} \right\}^2 \quad (3.35)$$

A continuación analizaremos el comportamiento de ϵ_o en función de z y de los parámetros de W_o (Ec. (3.25)). Clasificaremos los frentes de onda cuadráticos utilizando la misma notación que en la Página 28 del Capítulo 2, en función de los valores de sus curvaturas principales D y E . Es decir, distinguiremos entre frentes de onda con forma de cilindro parabólico, paraboloides elíptico, paraboloides parabólico y paraboloides hiperbólico. Como antes, consideraremos solo combinaciones de los parámetros tales que $2(|D| + |E|) \leq V$, siendo V una cota superior, para garantizar que los frentes de onda cuadráticos son suaves con pequeñas desviaciones en torno a un frente de onda plano. No obstante, como $W_{o,r}$ depende también de los coeficientes B y C , debemos acotar el valor máximo de estas inclinaciones para mantener la condición de paraxialidad de los frentes de onda. En concreto, analizaremos frentes de onda cuadráticos tales que $\sqrt{B^2 + C^2} \leq U$, donde U es otra cota superior.

En las Figuras 3.4(a), 3.4(b) y 3.4(c) representamos ϵ_o frente a z en la configuración central, la configuración progresiva y la configuración regresiva, respectivamente, del método directo. Para cada plano z , el valor de $\epsilon_o(z)$ representado en las curvas es el resultado de calcular el máximo de la varianza de $\hat{W}_{o,r}$ de todos los ángulos θ en dicho plano z . Suponemos que la medida del radio en un ángulo θ , R_o^\pm , tiene una incertidumbre $\sigma = 0,01$, siendo el radio de la pupila $R = 1$, y que las cotas de las curvaturas principales y de las inclinaciones son $V = U = 1^*$. No obstante, tan solo hemos representado los resultados para aquellos valores de D y E tales que $2(|D| + |E|) = 1$ y aquellos de B y C tales que $\sqrt{B^2 + C^2} = 1$. Esto implica que las curvas representadas corresponden a los frentes de onda menos suaves, para los que, en vista de los resultados obtenidos para la medida del interior, se da la respuesta más deteriorada del sensor de curvatura.

Tomando estos mismos valores de los parámetros de W_o , de las cotas U y V y del radio de la pupila, R , en la Figura 3.5 se muestra la varianza de la derivada normal estimada utilizando el método indirecto en sus tres configuraciones, en función de la posición axial de los planos, z . El error se ha calculado suponiendo $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,01$ para la fluctuación de la irradiancia promedio detectada en un ángulo θ del plano $z = 0$. Hemos tomado $L = 0,3R$ para la dimensión radial del anillo de detectores, pues solo vamos a estudiar el comportamiento de las curvas de error en función de z y del tipo de cuádrica. La influencia de la elección del tamaño de la región de frontera

*En la práctica, normalmente se verificará $1/V > R$. Sin embargo, se han tomado estos valores sencillos para U , V y R porque nuestro objetivo aquí es aclarar el comportamiento cualitativo de las curvas de error y no tanto dar resultados cuantitativos. Por otro lado, en la § 3.6 se verá que para frentes de onda turbulentos, $U \approx V$.

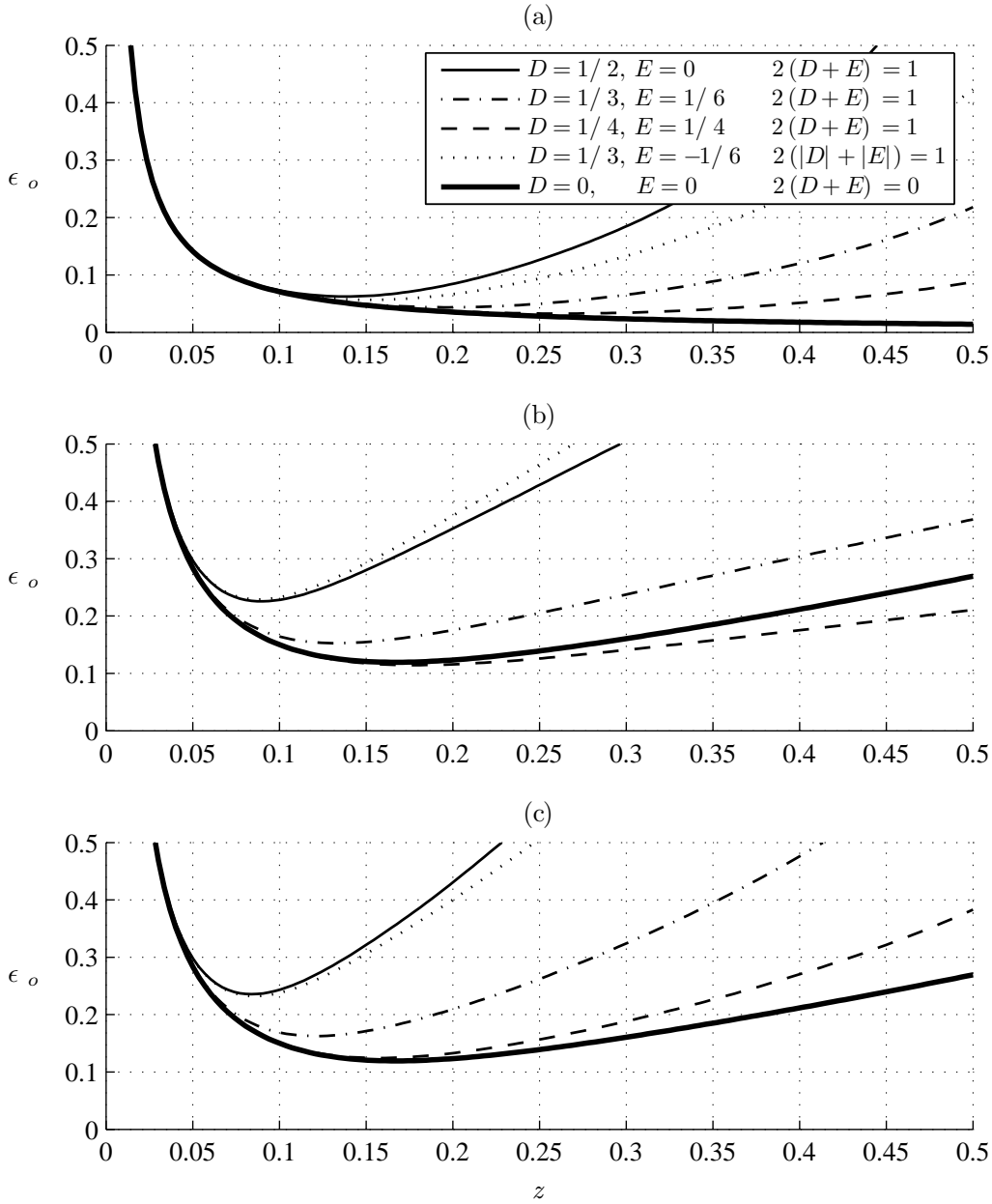


Figura 3.4: Curvas de error de \hat{W}_{or} estimada con la configuración central (a), con la configuración progresiva (b) y con la regresiva (c), utilizando el método directo para $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,01$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y fases cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano.

se analizará más adelante. Por último, al igual que en las curvas anteriores para el método directo, en todas las figuras se ha calculado la desviación estándar en cada uno de los ángulos y se ha representado el máximo de todos los errores obtenidos en cada plano z . En definitiva, podemos asegurar que cada curva muestra la menor

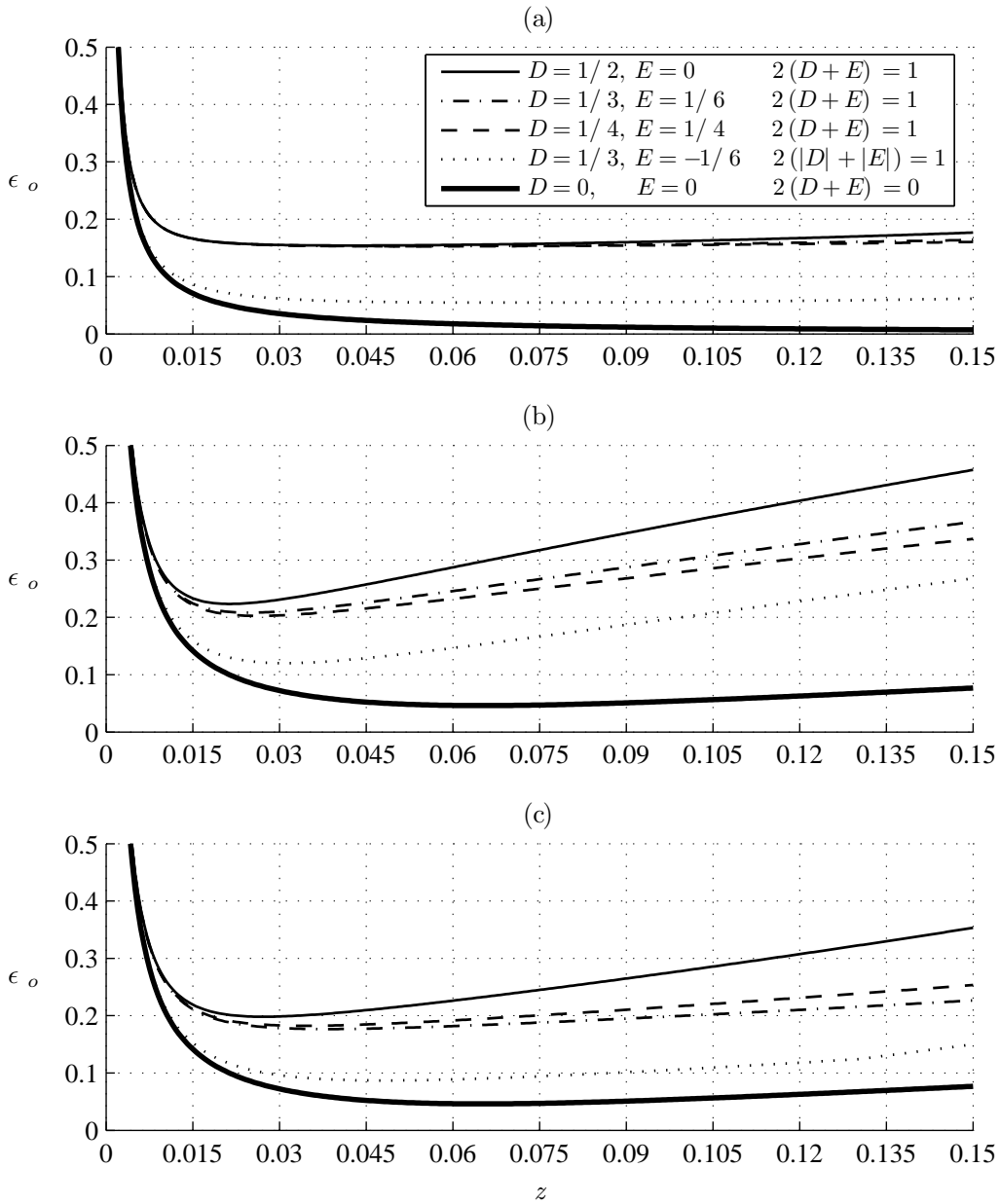


Figura 3.5: Curvas de error de \hat{W}_{or} estimada con la configuración central (a), con la configuración progresiva (b) y con la regresiva (c), utilizando el método indirecto para $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,01$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y fases cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano.

cota superior del error de \hat{W}_{or} .

En ambos métodos e independientemente del tipo de fórmula empleada, el comportamiento cualitativo de estas curvas es similar al observado para las curvas de error del laplaciano recuperado en el interior. Sus principales características son:

- A medida que disminuye la distancia entre los planos el error tiende a infinito y a medida que uno cualquiera de los dos planos se aproxima a la posición de la línea focal en x o en y más pequeña, el error se incrementa también drásticamente.
- Manteniendo constantes las condiciones de detección, σ , siempre hay una desviación mínima absoluta, $\epsilon_o(z_{\text{mín}})$, que decrece a medida que disminuyen $\sqrt{B^2 + C^2}$ o $2(|D| + |E|)$. La posición correspondiente de los planos, $z_{\text{mín}}$, se aleja de $z = 0$.
- Es importante indicar que si las características del frente de onda se mantienen constantes, la posición del mínimo absoluto, $z_{\text{mín}}$, se aleja de $z = 0$ a medida que aumenta la incertidumbre de los datos de entrada, σ .

Entre las curvas asociadas a una configuración del sensor y las asociadas a otra, también se aprecian diferencias. Si hablamos del método indirecto, a igualdad de valores de los parámetros de la fase, del ruido y de la dimensión radial de los detectores, la fórmula más precisa para estimar la derivada normal es la fórmula central, seguida de la fórmula regresiva y, por último, la fórmula progresiva (ver Figura 3.6). En el caso del método directo, la configuración central proporciona el sensor con la mejor calidad de respuesta.

No obstante, hay que indicar que si todos los parámetros tienen signos opuestos, entonces los resultados representados para la fórmula progresiva pasan a ser los de la regresiva y a la inversa. Cuando los planos se sitúan simétricamente a ambos lados del plano $z = 0$, el resultado no cambia.

Teniendo todo esto en cuenta, desde el punto de vista cuantitativo e independientemente del tipo de configuración del sensor, se observa que la curva que está por encima de todas las demás corresponde al cilindro parabólico, seguida de la correspondiente al paraboloides elíptico, al paraboloides parabólico y, por último, al hiperbólico. Es decir, análogamente a lo visto para las medidas del interior, la peor respuesta del sensor en la frontera se da ante los frentes de onda cilíndricos porque la contribución del error del modelo es en este caso superior al de los otros tipos de frentes cuadráticos.

Por último, es necesario recordar que para representar ϵ_o hemos calculado el máximo error en cada ángulo θ . En realidad, las curvas dibujadas coinciden precisamente con las curvas de error de \hat{W}_{o_r} en los ángulos θ donde $|W_{o_r}| \ll |W_{o_\theta}|$, es decir, para obtener la mejor estimación de W_{o_r} debemos minimizar el error de

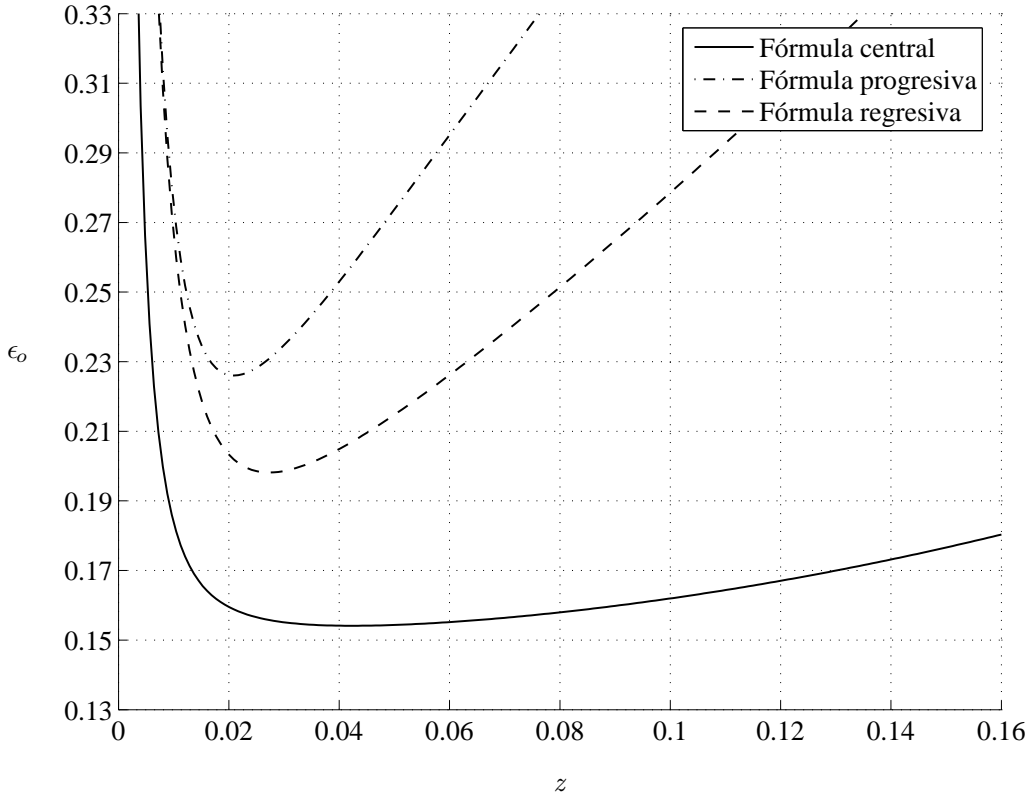


Figura 3.6: Representación frente a z de la desviación estándar máxima de la derivada normal de la fase cuadrática con $\sqrt{B^2 + C^2} = 1$, $D = 1/2$, $E = 0$, estimada con el método indirecto empleando las fórmulas en diferencias finitas indicadas, siendo $R = 1$ y $L = 0,3R$ en cada caso.

\hat{W}_{o_r} en dichos ángulos. En la Figura 3.7 se representan W_{o_r} y W_{o_θ} para un cilindro parabólico con $B = 1$, $C = 0$, $D = 1/2$ y $E = 0$. Todas las curvas dibujadas para este tipo de cuádrica corresponden a ángulos θ donde $W_{o_r} \approx 0$ y W_{o_θ} es máxima en valor absoluto (en este ejemplo, en torno a $5\pi/4$ ó $7\pi/4$).

3.5. Selección de la separación óptima

El análisis realizado en la sección anterior para fases cuadráticas en el plano $z = 0$ nos permitirá a continuación diseñar un método para optimizar la estimación de la derivada normal de una fase cualquiera en la frontera. Este método complementa el procedimiento de optimización de la recuperación del laplaciano del interior desarrollado en el Capítulo 2. En concreto, las figuras representadas nos informan de que si lo único que conocemos acerca de la fase en el plano de la pupila, $z = 0$, es que se trata de una fase cuadrática (Ec. (3.25)) y que sus parámetros verifican

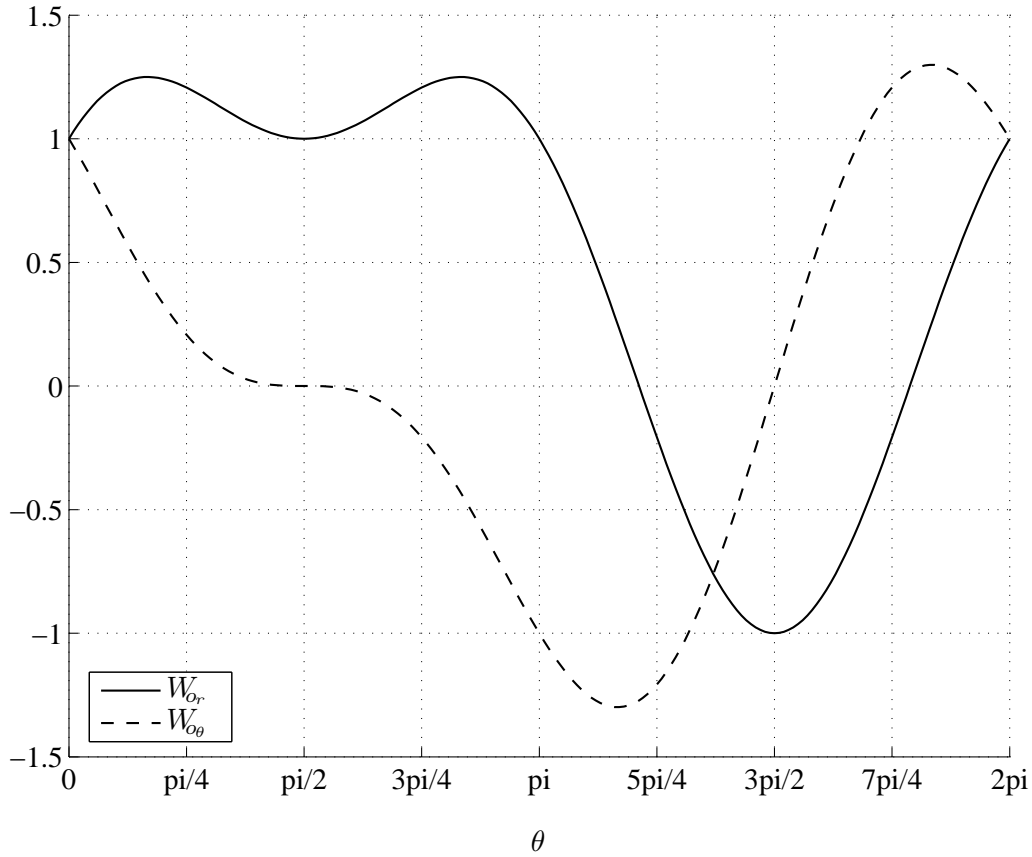


Figura 3.7: Derivada normal y angular del frente cilíndrico parabólico con $B = 1$, $C = 0$, $D = 1/2$ y $E = 0$ en la frontera.

que $2(|D| + |E|)$ alcanza como máximo un valor V y que $\sqrt{B^2 + C^2}$ está también acotada por un valor U , entonces la peor respuesta del sensor de curvatura se da ante los frentes con forma de cilindro parabólico de curvatura V y de inclinación U . Por este motivo, separando los planos de irradiancia la distancia $z = z_{\min}$, que viene determinada por el mínimo de la curva de error correspondiente al cilindro parabólico de curvatura V e inclinación U , se garantiza la mejor respuesta del sensor ante cualquier frente de onda cuadrático como los considerados.

Llegados a este punto, nos basaremos en el procedimiento que se utilizó para optimizar las medidas del laplaciano del interior, para diseñar un método análogo para seleccionar la posición de los planos que optimiza las medidas de frontera. Así, supongamos que el frente de onda $W = W(x, y)$ en los puntos del plano $z = 0$ es suave, continuo y diferenciable. Entonces, también puede aproximarse localmente en entornos, Ω , situados en el borde de la región iluminada, por superficies cuadráticas

de la forma siguiente:

$$W_o = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy \quad (3.36)$$

donde a representa el pistón, $b = \partial W/\partial x$ y $c = \partial W/\partial y$ son las inclinaciones en x y en y , respectivamente, y $d = (1/2)(\partial^2 W/\partial x^2)$, $e = (1/2)(\partial^2 W/\partial y^2)$ y $f = \partial^2 W/\partial x\partial y$ están relacionados con el laplaciano y el hessiano de W en Ω . A diferencia de la forma canónica de W_o (Ec. (3.25)), aquí aparece el parámetro f porque, en general, los ejes del entorno Ω pueden tener cualquier orientación.

Para cada punto (R, θ) del borde suponemos que existe un entorno $\Omega = \Omega(\theta)$ donde el frente de onda reúne estas características. Esto quiere decir que en cada ángulo θ , suponemos que los movimientos del borde de la región iluminada están regidos por las deformaciones que provocan las inclinaciones y las curvaturas locales del frente de onda en Ω . Es decir, en cada ángulo θ , el borde de la región iluminada evoluciona de la misma forma que el borde de la elipse asociada a la aproximación cuadrática local del frente de onda en Ω .

Para ilustrar esta hipótesis emplearemos un ejemplo. Supongamos que en el plano de la pupila, $z = 0$, la fase es:

$$W(x, y) = \mathcal{A}(x^3 - 3xy^2) \quad (3.37)$$

Queremos analizar el movimiento del borde de la zona iluminada en un punto (x_c, y_c) del contorno, desde el plano $z = 0$ al plano z . Las Ecs. (3.2) describen la evolución de la posición del punto (x_c, y_c) de $z = 0$, a un punto (x, y) del plano z que, para este caso particular, son las siguientes:

$$\begin{cases} x = x_c + 3\mathcal{A}z(x_c^2 - y_c^2) \\ y = y_c - 6\mathcal{A}zx_c y_c \end{cases} \quad (3.38)$$

Calculemos la fase local cuadrática W_o de la Ec. (3.36) evaluada en puntos (x_o, y_o) de $z = 0$ dentro del entorno Ω asociado al punto (x_c, y_c) . Para ello debemos obtener los valores de los parámetros b, c, d, e y f de W_o en el entorno Ω . En concreto:

$$\begin{aligned} b &= 3\mathcal{A}(y_o^2 - x_o^2) \\ c &= 6\mathcal{A}x_o y_o \\ d &= 3\mathcal{A}x_o \\ e &= -3\mathcal{A}x_o \\ f &= -6\mathcal{A}y_o \end{aligned} \quad (3.39)$$

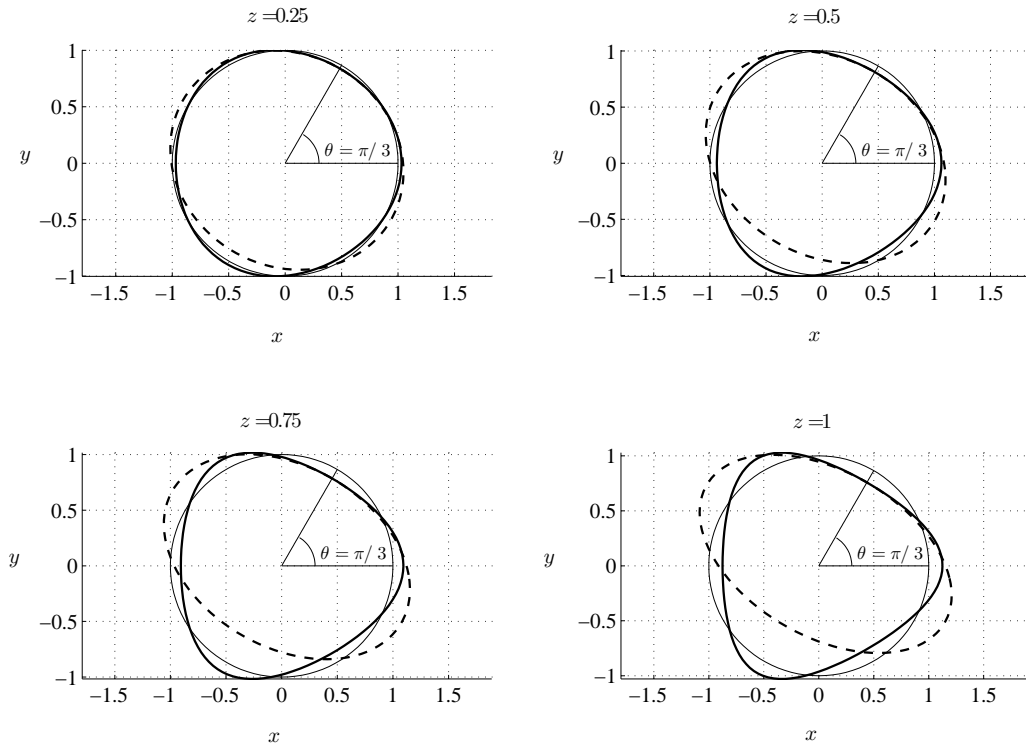


Figura 3.8: Secuencia que muestra la evolución del borde de la región iluminada desde el plano $z = 0$ al plano z . En línea delgada continua se representa la pupila en el plano $z = 0$. En línea gruesa continua se muestra el borde de la región iluminada en cada plano z , que corresponde a la fase W . Por último, en línea discontinua se muestra la evolución del borde de la región iluminada que predice la aproximación cuadrática W_o en la dirección $\theta = \pi/3$.

y las coordenadas de los puntos (x_o, y_o) del interior del entorno Ω , incluidos los del borde de la zona iluminada, evolucionarán axialmente de acuerdo con:

$$\begin{cases} x = x_o + z(b + 2dx_o + fy_o) \\ y = y_o + z(c + 2ex_o + fx_o) \end{cases} \quad (3.40)$$

En la Figura 3.8 se muestra la pupila circular en el plano $z = 0$ de radio $R = 1$, junto con la evolución, en cuatro planos z , del borde de la región iluminada correspondiente a W y también a la aproximación cuadrática local W_o asociada al entorno Ω del punto con $R = 1$ y $\theta = \pi/3$, tomando $\mathcal{A} = 1/(24R)$. En ella se observa la típica zona iluminada correspondiente al *trifol* junto con la elipse correspondiente a la fase cuadrática, que evolucionan en contacto en la dirección $\theta = \pi/3$. Esta secuencia confirma que el radio de la región iluminada evoluciona en torno a cada ángulo θ en función de las características locales de la fase a primer y segundo orden.

En la sección anterior, hemos representado curvas que describen el rendimiento del

sensor a la hora de recuperar la derivada normal de una fase cuadrática en la frontera, W_{or} , en función de la posición de los planos en el eje z . Pero, en vista del razonamiento que acabamos de hacer, también nos informan de la precisión con la que el sensor estima la derivada normal local de un frente de onda cualquiera en un entorno Ω de un punto del borde. Ahora bien, los errores representados en la sección anterior para W_o son la menor cota superior del error en cualquier ángulo θ y, por tanto, son independientes de la orientación de la elipse del plano $\pm z$. Entonces, podremos aplicar las varianzas de la sección anterior para todo entorno Ω independientemente de la orientación de sus ejes, en función de los parámetros B , C , D y E de la forma canónica de la fase cuadrática W_o .

Otra consecuencia de que las curvas representadas sean cotas superiores de error, donde se verifica $2(|D| + |E|) = V$ y $\sqrt{B^2 + C^2} = U$, es que aquellas curvas donde $2(|D| + |E|) < V$ y $\sqrt{B^2 + C^2} < U$ se situarían por debajo de las mostradas. Fijémonos, entonces, en la curva asociada a un frente de onda con forma de cilindro parabólico. Si llamamos z_{\min} a la posición del mínimo de esta curva, si los planos de medida se sitúan en las posiciones $z < z_{\min}$, entonces las derivadas normales locales se estimarán con menos precisión que si se mide en las posiciones $z = z_{\min}$, cualquiera que sea el frente de onda cuadrático. Asimismo, si los planos se colocan en posiciones $z > z_{\min}$, aunque mejora la estimación en los entornos donde la aproximación cuadrática W_o es elíptica, parabólica o hiperbólica, empeora la recuperación de la derivada normal en entornos donde W_o es cilíndrica. Siguiendo el mismo razonamiento que en las medidas del interior, si existe una densidad significativa de entornos donde el frente de onda tiene forma fundamentalmente cilíndrica, entonces la recuperación de la derivada normal empeoraría tomando $z > z_{\min}$. En definitiva, si de la fase solo conocemos las cotas U y V , minimizando la máxima varianza ϵ_o^2 para un frente de onda con forma de cilindro parabólico de curvatura V e inclinación U , obtendríamos la mejor posición de los planos compatible con esta información.

En la Figura 3.6 se representa la curva asociada a $D = 1/2$ y $E = 0$, con $\sqrt{B^2 + C^2} = 1$, $R = 1$ y $L = 0,3R$, para las fórmulas en diferencias finitas del método indirecto, de donde se deduce que la fórmula central proporciona la mejor respuesta del sensor. Es importante indicar que el error se mantiene en niveles bajos en un rango de z más amplio para la fórmula central que para las fórmulas de Newton. Esta es una característica muy a tener en cuenta, pues la elección de la posición de los planos se muestra más flexible para la fórmula central que para las fórmulas de Newton.

A diferencia de las medidas del interior, para optimizar la recuperación de W_r con el método indirecto, hay que escoger adicionalmente una dimensión radial de la región de frontera, L , que conjuntamente con la selección apropiada de z minimice la varianza de \hat{W}_r . Es decir, para cada valor de L existe uno de z , z_{\min} , que minimiza la varianza de \hat{W}_r . Pero para seleccionar la separación óptima, z_{opt} , debemos hallar el par (L, z_{\min}) que garantiza la mejor respuesta del sensor. En concreto, se trata de ajustar L a la deformación máxima de la región iluminada en el plano de medida, evitando la pérdida de información que se produce cuando el borde de la región iluminada sobrepasa los límites interior o exterior del anillo de detectores de la región de frontera. Solo así podremos decir que $z_{\text{opt}} = z_{\min}$. En la Figura 3.9 se representa $\epsilon_o(z)$ en la configuración central y en la de Newton, para $R = 1$, $\sqrt{B^2 + C^2} = 1$, $D = 1/2$ y $E = 0$, y para varias desviaciones de las medidas de irradiancia, σ/\mathcal{I}_o , cuando L se ha ajustado a la deformación radial máxima de la región iluminada en z_{opt} . El proceso que hemos seguido es el siguiente: Dado un valor de σ/\mathcal{I}_o , simplemente hemos variado L y, en paralelo, z_{\min} , hasta que L coincide con el valor máximo de $R_o^+ - R_o^-$ evaluado en z_{\min} , en un proceso iterativo. Por ejemplo, supongamos que $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,01$. Partiendo de $L = 1$ se obtiene $z_{\min} = 0,056$. Pero situando los planos en esa posición, se obtiene que $R_o^+ - R_o^- = 0,22 \neq 1$, lo que indica que la dimensión radial de la región de frontera no está ajustada correctamente. Si ahora tomamos $L = 0,22$, entonces $z_{\min} = 0,041$ y $R_o^+ - R_o^- = 0,16 \neq 0,22$. Como L sigue siendo todavía distinto a $R_o^+ - R_o^-$, tomamos $L = 0,16$ y calculamos de nuevo z_{\min} . El proceso continúa iterativamente hasta que el valor de L preseleccionado coincide con $R_o^+ - R_o^-$. En este ejemplo esta situación se produce cuando $L = 0,14$ y podremos decir que la posición del mínimo error, z_{\min} , nos proporciona el plano óptimo, es decir, $z_{\text{opt}} = z_{\min} = 0,036$. Comparando con la Figura 3.5, se aprecia que la magnitud del error en el plano óptimo disminuye apreciablemente cuando L se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada.

No obstante, habitualmente no dispondremos de la información manejada hasta aquí acerca de los parámetros B , C , D y E en Ω , sino que en su lugar tendremos acceso a cierta información *a priori* acerca de la estadística de los frentes de onda que llegan al sensor, de utilidad para proceder a seleccionar los planos. Análogamente al procedimiento desarrollado para las medidas del interior, supongamos que nuestro conocimiento previo de la estadística de los frentes de onda en los puntos del plano $z = 0$, nos permite:

- estimar $V = |\langle \nabla^2 W(\mathbf{r}) \rangle| + \alpha \sqrt{\langle [\nabla^2 W(\mathbf{r}) - \langle \nabla^2 W(\mathbf{r}) \rangle]^2 \rangle}$,

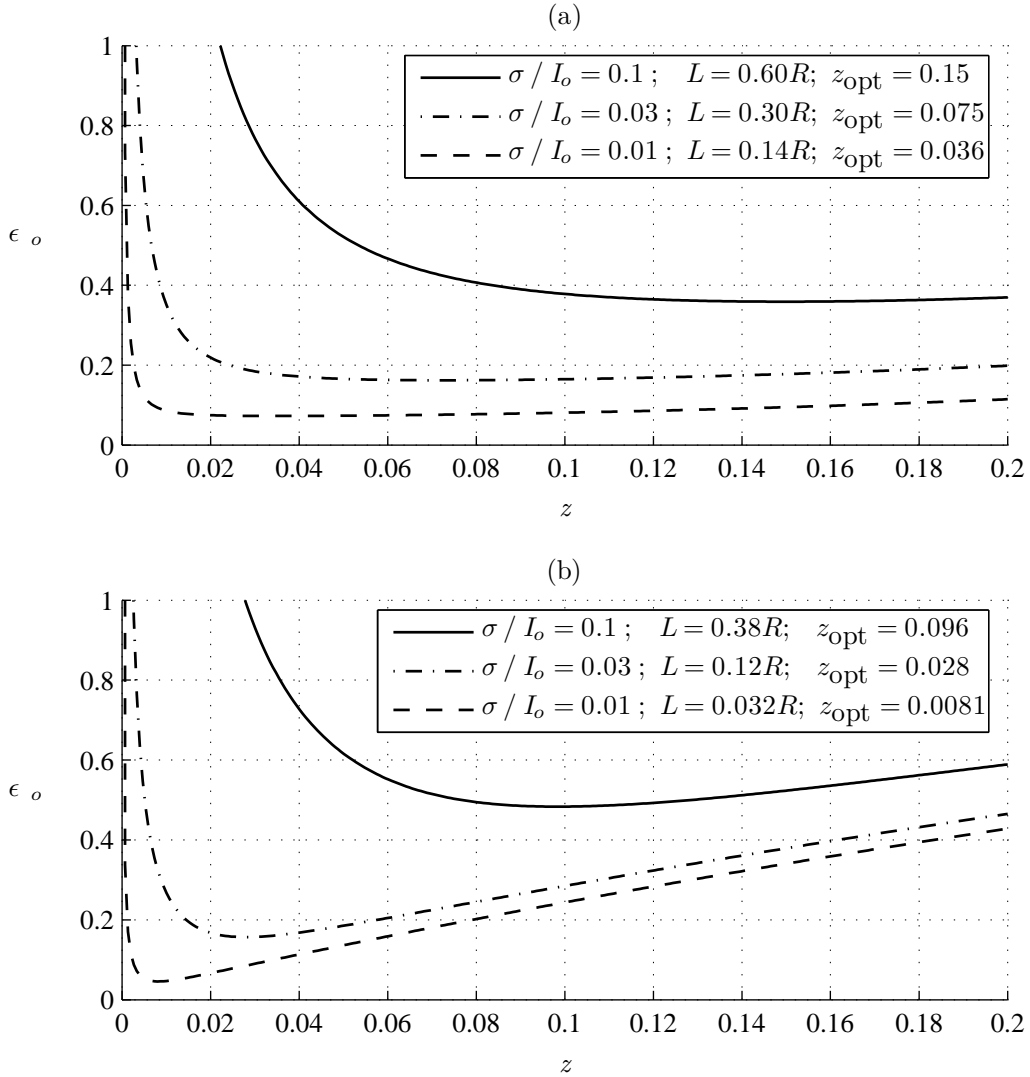


Figura 3.9: Curvas de error de la derivada normal de la fase en la frontera estimada con la configuración central (a) y en la de Newton (b), cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación máxima de la región iluminada, suponiendo el nivel de ruido en el plano de recuperación, σ/I_o , indicado. Adicionalmente se incluye la separación óptima, z_{opt} .

- estimar $T_x = |\langle W_x(\mathbf{r}) \rangle| + \alpha \sqrt{\langle [W_x(\mathbf{r}) - \langle W_x(\mathbf{r}) \rangle]^2 \rangle}$ y $T_y = |\langle W_y(\mathbf{r}) \rangle| + \alpha \sqrt{\langle [W_y(\mathbf{r}) - \langle W_y(\mathbf{r}) \rangle]^2 \rangle}$,

siendo $\langle \cdot \rangle$ el valor medio espacio-temporal en el total de la pupila y α un parámetro que cuantifica la probabilidad de que el valor de la magnitud fluctúe dentro del intervalo de confianza (ver nota al pie en Página 38). Estas magnitudes resumen el comportamiento estadístico a orden 2 de los frentes de onda en $z = 0$. Por tanto, estas características se dan también localmente en un entorno Ω del contorno. Con

esta información podemos tomar $D = V/2$, $E = 0$, $B = T_x$ y $C = T_y$. Fijado el nivel de ruido, σ/\mathcal{I}_o , y la anchura radial más apropiada del detector, L , y si no hay más información adicional, proponemos situar los planos de irradiancia en la posición z_{opt} que minimiza $\epsilon_o(z)$ particularizada a los valores de B , C , D y E estimados de esta forma.

3.6. Ejemplo: Selección de la separación óptima para el telescopio Gemini

Una vez diseñado un procedimiento para obtener medidas de frontera optimizadas, a continuación procedemos a ilustrarlo por medio de un ejemplo. En concreto, en paralelo con el ejemplo de la § 2.4, calcularemos la separación entre los planos que optimiza la medida de frontera del sensor de curvatura acoplado al telescopio Gemini. Las condiciones de operación y las características principales del dispositivo se describen en dicha sección. A destacar, el telescopio tiene una apertura de $\mathcal{D} = 7,9$ m de diámetro y la región de frontera una anchura radial $L = 0,6\mathcal{D}$. Los dispositivos fotosensibles acoplados en cada subapertura son fotodiodos de avalancha (APD) que operan en una longitud de onda $\lambda = 0,7 \mu\text{m}$, captando un promedio de $N = 96$ fotones cada uno durante el tiempo de exposición. El frente de onda se desarrolla como combinación lineal de polinomios de Zernike, $W = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_j$, y el dispositivo adaptativo está diseñado para detectar y compensar el efecto de los $J = 56$ primeros*. La compensación se realiza aplicando deformaciones locales al espejo, estimadas utilizando la fórmula de Roddier en la región correspondiente a cada subpupila, que asumiremos del orden de un entorno Σ (ver Apéndice C). Es decir, vamos a suponer que en el entorno definido por cada subpupila, la fase muestra un comportamiento similar a una fase cuadrática como la de la Ec. (3.25).

Estimaremos las cotas T_x , T_y y V y, por tanto, los coeficientes B , C , D y E promedio en cada subpupila, a partir de las varianzas espacio-temporales de las derivadas de la fase, ya que la aleatoriedad de los frentes de onda distorsionados por turbulencias atmosféricas implica que el valor promedio espacio-temporal de las derivadas de la fase se anula. Es decir, calcularemos $V = \sqrt{\langle [\nabla^2 W(\mathbf{r})]^2 \rangle} = \sqrt{\langle [\nabla^2 W(\rho\mathcal{D}/2, \theta)]^2 \rangle}$ y $T_x = \sqrt{\langle [W_x(\mathbf{r})]^2 \rangle} = \sqrt{\langle [W_x(\rho\mathcal{D}/2, \theta)]^2 \rangle}$, siendo $\langle \cdot \rangle$ el valor promedio espacio-temporal. En los frentes de onda turbulentos se verifica, además,

*La notación utilizada para los polinomios de Zernike es la propuesta por Noll [157].

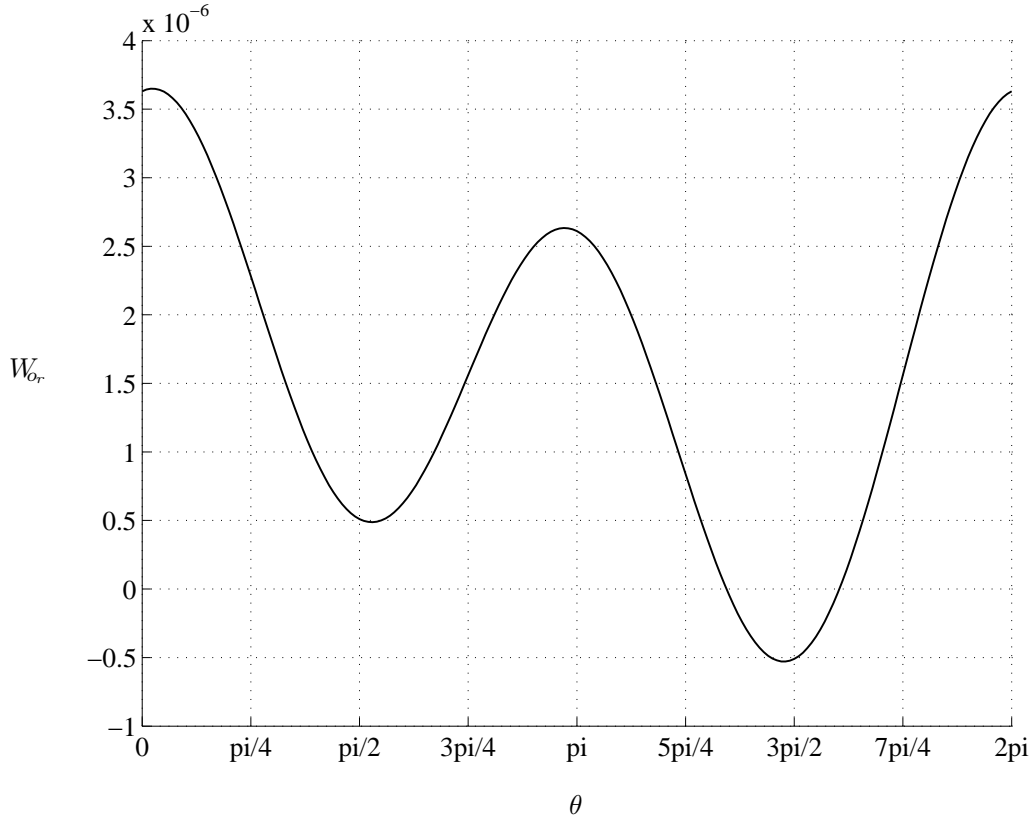


Figura 3.10: Derivada normal de la fase en la frontera correspondiente al frente cilíndrico parabólico con $B = C = 5,1 \cdot 10^{-7}$, $D = 3,95 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ y $E = 0 \text{ m}^{-1}$.

$T_x = T_y$. De este modo:

$$V = \frac{2\lambda}{\pi D^2} \sqrt{\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \langle \nabla^2 Z_j(\rho, \theta) \rangle \mathcal{E}\{a_j a_k\} \langle \nabla^2 Z_k(\rho, \theta) \rangle} \quad (3.41)$$

$$T_x = \frac{\lambda}{\pi D} \sqrt{\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \langle \frac{\partial Z_j(\rho, \theta)}{\partial x} \rangle \mathcal{E}\{a_j a_k\} \langle \frac{\partial Z_k(\rho, \theta)}{\partial x} \rangle} = T_y$$

donde $\langle \cdot \rangle$ significa ahora promedio espacial en el círculo de radio unidad y $\mathcal{E}\{\cdot\}$ significa promedio temporal. Asumiendo que los frentes de onda siguen la estadística de Kolmogorov, las covarianzas $\mathcal{E}\{a_j a_k\}$ se calculan a partir de la Ec. (2.32).

En el Capítulo 2 calculamos $V = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ como cota superior de la curvatura local en Ω y, por tanto:

$$D = V/2 = 3,95 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \quad (3.42)$$

$$E = 0$$

En cuanto a las inclinaciones locales:

$$B = T_x = 5,1 \cdot 10^{-7} \quad (3.43)$$

$$C = T_y = 5,1 \cdot 10^{-7}$$

Aplicando $N = 96$, $\sigma = 0$, $L = 0,6\mathcal{D}$ para la dimensión radial de la región de frontera y los coeficientes B, C, D y E de las Ecs. (3.42) y (3.43) en la Ec. (C.14), calculando el valor máximo de $\epsilon_o(\theta, z)$ en cada plano z y minimizando respecto de la variable z , se obtiene $z_{\text{opt}} = 490$ km. Comparando este resultado con la separación óptima obtenida en el ejemplo de la § 2.4 para el laplaciano de la fase, se observa que la separación entre planos que proporciona la medida de frontera más precisa es aproximadamente la mitad que la que optimiza la medida del interior.

Por último, el error de esta medida es elevado, pues $\epsilon_o^{\text{máx}}(z_{\text{opt}}) \approx 2 \cdot 10^{-6}$, que es aproximadamente la mitad de la magnitud de las oscilaciones de W_{o_r} en torno al cero (ver Figura 3.10). Este dato corrobora el hecho de que las medidas de frontera son, en general, más imprecisas que las medidas del interior, como se puede ver comparando con los resultados del ejemplo de la § 2.4. No obstante, es de esperar que el error de \hat{W}_r considerado globalmente en todo el perímetro de la pupila disminuya, pues el resto de derivadas normales locales se estiman con más precisión.

Capítulo 4

Sensor de curvatura multiplano

4.1. Introducción

En los capítulos anteriores, hemos identificado y expresado matemáticamente los errores que afectan a la medida de la derivada axial: el error de truncamiento de la fórmula en diferencias finitas que la aproxima a primer orden y el ruido de los datos de irradiancia. Ambas contribuciones están ligadas entre sí por la separación entre los dos planos de medida. Hemos comprobado que existe una posición de los planos óptima, z_{opt} , tal que la contribución de ambos tipos de error se equilibra, minimizándose la varianza de la estimación de la derivada axial. Con esta distancia de separación entre los planos, el error de la señal proporcionada por el sensor se minimiza a causa de una disminución de ambas contribuciones en su conjunto, sin que la reducción de una implique el aumento desmedido de la otra.

Suponiendo que el sensor opera en condiciones óptimas, los mejores resultados con esta técnica se obtienen con la configuración que mejor aproxima la derivada axial, es decir, con aquella que propaga menos el ruido de los datos de entrada y que modela con más precisión el comportamiento no lineal intrínseco de la derivada axial. En este sentido, de entre las aproximaciones con dos datos de entrada estudiadas hasta ahora, la fórmula de Stirling es la que proporciona la mejor recuperación.

Sin embargo, el rendimiento alcanzado en la separación óptima podría ser insuficiente, en el sentido de que la aplicación precise más resolución en la fase recuperada. Para mejorarla, se ha optado últimamente por el empleo de otras técnicas lineales que propaguen menos error de no linealidad, en las que se busca reducir la contribución del ruido tomando los datos de irradiancia más lejos del plano de recuperación [36, 139, 140], o utilizar medidas en más planos de irradiancia pero a

costa de incrementar enormemente las necesidades computacionales [23, 121, 143–145]. También se han aplicado algoritmos no lineales iterativos para refinar la fase inicialmente recuperada por medio de la ETI a partir de medidas de irradiancia en dos planos [16, 90, 98, 134, 141].

Como una aportación más a la técnica de recuperación de fase basada en la ETI, proponemos en este capítulo aplicar fórmulas en diferencias finitas más precisas para aproximar la derivada axial. Las configuraciones del sensor que se derivan de estas fórmulas utilizan indefectiblemente medidas en más de dos planos de irradiancia. Escogiendo adecuadamente la posición y el peso de los datos de entrada de la fórmula, se minimiza la contribución del ruido de medida y se reduce el error de no linealidad de la aproximación, sin que ello implique necesariamente un incremento sustancial del gasto computacional al reconstruir la fase.

4.2. Varianza de la estimación de la derivada axial con fórmulas en múltiples planos

En el Capítulo 2, calculamos la varianza de la respuesta del sensor para las dos aproximaciones clásicas de la derivada en diferencias finitas con dos planos de irradiancia: la fórmula central o de Stirling y las fórmulas de Newton progresiva y regresiva. El error de no linealidad de la aproximación en diferencias finitas se dedujo a partir del resto de la fórmula de Taylor de la irradiancia en torno al plano de medida, $z = 0$, truncado a primer orden. Por otro lado, el efecto del ruido se modeló suponiendo que las fluctuaciones de irradiancia en cada punto son de media cero e independientes del nivel de señal. Siguiendo un procedimiento análogo, en esta sección calcularemos la varianza de estas dos aproximaciones de la derivada axial en diferencias finitas generalizadas a $M \geq 2$ planos de irradiancia en función de la separación interplanos, z .

4.2.1. Fórmula central de Stirling

En un instante de tiempo t , la intensidad en cada punto $\mathbf{r} = (x, y)$ de un plano jz , $i_j = i(\mathbf{r}, jz)$, se expresa como la suma de la intensidad exacta sin ruido o determinística, $I_j = I(\mathbf{r}, jz)$, y el ruido, $n_j = n_j(\mathbf{r}, jz)$, con $j \in \mathbb{Z}^+$:

$$i_j = I_j + n_j \tag{4.1}$$

donde n_j son errores aditivos con media cero, varianza σ^2 en todos los puntos de cada plano jz y correlación nula entre puntos distintos. Se quiere estimar $I'(0) = I'(\mathbf{r}, 0)$ y para ello utilizaremos la aproximación central en diferencias finitas usando $M = 2m$ datos de entrada. Se define:

$$\hat{I}'(0) = \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j i_j \quad (4.2)$$

donde $m \in \mathbb{Z}^+$, $z > 0$ y el circunflejo sobre \hat{I}' denota una estimación de I' . Para cada punto \mathbf{r} se quieren encontrar los pesos a_j que verifican las dos condiciones siguientes:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{E} \left\{ \hat{I}'(0) \right\} = I'(0), \quad s^2 \left[\hat{I}'(0) \right] = \mathcal{E} \left\{ \left[\hat{I}'(0) - I'(0) \right]^2 \right\} = \text{mín} \quad (4.3)$$

donde $\mathcal{E} \{ \cdot \}$ denota valor medio. Para cada punto \mathbf{r} y en torno al plano $z = 0$, se verifica:

$$\hat{I}'(0) = \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j n_j + \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j I_o + \frac{z}{z} \sum_{j=-m}^m a_j j I'(0) + \frac{z^2}{z} \sum_{j=-m}^m a_j \frac{j^2}{2} I''(\zeta_j) \quad (4.4)$$

con $\zeta_j \in (0, jz) \forall j$, que se obtiene sustituyendo el desarrollo de Taylor de I_j hasta primer orden (Ec. (2.5)) en la aproximación (4.2). Entonces, en cada punto \mathbf{r} se verifica:

$$\hat{I}'(0) - \sum_{j=-m}^m a_j j I'(0) = \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j n_j + \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j I_o + z \sum_{j=-m}^m a_j \frac{j^2}{2} I''(\zeta_j) \quad (4.5)$$

Haciendo:

$$\sum_{j=-m}^m a_j j = 1 \quad \sum_{j=-m}^m a_j = 0 \quad (4.6)$$

la diferencia entre la derivada exacta y la estimada es:

$$\hat{I}'(0) - I'(0) = \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j n_j + z \sum_{j=-m}^m a_j \frac{j^2}{2} I''(\zeta_j) \quad (4.7)$$

Es decir, la aproximación en diferencias finitas se aleja del valor real de la derivada axial una cantidad que depende del ruido de los datos de entrada y del resto del desarrollo en serie de Taylor de la irradiancia truncado a primer orden, estando ambas contribuciones pesadas por el correspondiente coeficiente a_j asociado a cada plano jz y satisfaciéndose la primera condición de la Ec. (4.3). La desviación cuadrática media es:

$$s^2 \left[\hat{I}'(0) \right] = \frac{\sigma^2}{z^2} \left(\sum_{j=-m}^m a_j^2 \right) + z^2 \left[\sum_{j=-m}^m a_j \frac{j^2}{2} I''(\zeta_j) \right]^2 \quad (4.8)$$

M	m	$a_{\pm 1}$	$a_{\pm 2}$	$a_{\pm 3}$	$a_{\pm 4}$	$a_{\pm 5}$	$a_{\pm 6}$
2	1	$\pm 1/2$					
4	2	$\pm 1/5$	$\pm 1/10$				
6	3	$\pm 3/28$	$\pm 1/14$	$\pm 1/28$			
8	4	$\pm 1/15$	$\pm 1/20$	$\pm 1/30$	$\pm 1/60$		
10	5	$\pm 1/22$	$\pm 2/55$	$\pm 3/110$	$\pm 1/55$	$\pm 1/110$	
12	6	$\pm 3/91$	$\pm 5/182$	$\pm 2/91$	$\pm 3/182$	$\pm 1/91$	$\pm 1/182$

Tabla 4.1: Coeficientes a_j correspondientes a la fórmula central en función del número de planos.

donde se han tenido en cuenta las hipótesis asumidas para el ruido, junto con la independencia entre la contribución de los errores de los datos y la del error de truncamiento. Para que la varianza de $\hat{I}'(0)$ satisfaga la segunda condición de la Ec. (4.3), necesariamente ha de escogerse el peso de los datos de entrada de forma que se minimice la contribución del ruido de medida, es decir, han de escogerse los coeficientes a_j tales que:

$$\sum_{j=-m}^m a_j^2 = \text{mín} \quad (4.9)$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver la Ec. (4.9) con las condiciones (4.6) [159], se obtiene:

$$a_j = \frac{3j}{m(m+1)(2m+1)} \quad (4.10)$$

En la Tabla 4.1, se indican algunos de estos coeficientes para el número de planos M indicado. El cálculo de la suma de la Ec. (4.9) es:

$$\sum_{j=-m}^m a_j^2 = \frac{3}{m(m+1)(2m+1)} = \tilde{a}_m \quad (4.11)$$

Por tanto, la expresión general para la varianza de la aproximación central de la derivada (4.2) es:

$$s^2 \left[\hat{I}'(0) \right] = \frac{\sigma^2}{z^2} \tilde{a}_m + z^2 \left[\sum_{j=-m}^m a_j \frac{j^2}{2} I''(\zeta_j) \right]^2 \quad (4.12)$$

4.2.2. Fórmula progresiva y regresiva de Newton

En este caso la derivada axial se aproxima en $\mathbf{r} = (x, y)$ como diferencias finitas de medidas de la irradiancia en el plano $z = 0$ y en $M - 1 = m$ planos equiespaciados situados, o bien a la derecha (diferenciación progresiva), o bien a la izquierda de $z = 0$ (diferenciación regresiva). De este modo, definimos una estimación de $I'(0) = I'(\mathbf{r}, 0)$ como:

$$\hat{I}'(0) = \frac{1}{\pm z} \sum_{j=1}^m b_j (i_j - i_o) \quad (4.13)$$

donde $m \in \mathbb{Z}^+$, $z > 0$ y el denominador es $+z$ para la aproximación progresiva y $-z$ en el caso regresivo. El ruido que afecta a los datos de irradiancia (Ec. (4.1)), reúne las mismas características que en la sección anterior. Para cada punto se quieren hallar los coeficientes b_j tales que la aproximación (4.13) verifica las Ecs. (4.3).

Como antes, sustituimos en la Ec. (4.13) la fórmula de Taylor para I_j en torno a $z = 0$ y obtenemos la diferencia entre la derivada exacta y la estimada. En esta ocasión, para que se verifiquen las condiciones (4.3), los coeficientes b_j solo han de cumplir:

$$\sum_{j=1}^m b_j j = 1 \quad \sum_{j=1}^m b_j^2 = \text{mín} \quad (4.14)$$

Así, despejamos la diferencia entre la derivada exacta y la estimada en una ecuación análoga a la Ec. (4.7). Considerando la hipótesis de que la contribución del ruido de los datos de irradiancia y la del error de truncamiento son independientes, llegamos a una ecuación para la varianza de la aproximación (4.13), análoga a la Ec. (4.8):

$$s^2 [\hat{I}'(0)] = \frac{2\sigma^2}{z^2} \left(\sum_{j=1}^m b_j^2 \right) + z^2 \left[\sum_{j=1}^m b_j \frac{j^2}{2} I''(\zeta_j) \right]^2 \quad (4.15)$$

con $\zeta_j \in (0, jz) \forall j$ para la aproximación progresiva y con $\zeta_j \in (-jz, 0) \forall j$ para la regresiva. Para calcular los coeficientes b_j , imponemos las condiciones (4.14) para b_j y hallamos el correspondiente multiplicador de Lagrange, obteniéndose:

$$b_j = \frac{6j}{m(m+1)(2m+1)} \quad (4.16)$$

En la Tabla 4.2, se indican algunos de los coeficientes b_j asociados al número de planos M indicado. Con la Ec. (4.16) ya podemos calcular:

$$\sum_{j=1}^m b_j^2 = \frac{6}{m(m+1)(2m+1)} = \tilde{b}_m \quad (4.17)$$

M	m	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
2	1	1					
3	2	1/5	2/5				
4	3	1/14	1/7	3/14			
5	4	1/30	1/15	1/10	2/15		
6	5	1/55	2/55	3/55	4/55	1/11	
7	6	1/91	2/91	3/91	4/91	5/91	6/91

Tabla 4.2: Coeficientes b_j correspondientes a la fórmula progresiva y regresiva en función del número de planos.

es decir, $\tilde{b}_m = 2\tilde{a}_m$. Sustituyendo la Ec. (4.17) en la Ec. (4.15), se tiene la expresión general para la varianza de las aproximaciones progresiva y regresiva de la derivada en un punto \mathbf{r} :

$$s^2 \left[\hat{I}'(0) \right] = \frac{2\sigma^2}{z^2} \tilde{b}_m + z^2 \left[\sum_{j=1}^m b_j \frac{j^2}{2} I''(\zeta_j) \right]^2 \quad (4.18)$$

4.3. Selección del plano de medida

Las Ecs. (4.12) y (4.18) describen, para cada punto \mathbf{r} , las varianzas de ambas fórmulas en diferencias finitas con múltiples datos de entrada en función de la distancia interplanos, z . Las varianzas calculadas en el Capítulo 2 para fórmulas en dos planos son casos particulares de estas ecuaciones. Esencialmente, las fórmulas aquí calculadas presentan características muy similares a aquellas. El primer sumando describe la contribución de los errores de los datos de entrada y es inversamente proporcional a z^2 . El segundo sumando es directamente proporcional a z^2 y da cuenta del error de no linealidad de las fórmulas en función del resto del desarrollo en serie de Taylor de la irradiancia en torno al plano $z = 0$.

La precisión de la fórmula en diferencias finitas y, por tanto, la calidad de respuesta del sensor de curvatura depende de la contribución de estos dos sumandos. Los coeficientes del primero, \tilde{a}_m y \tilde{b}_m , se han escogido para minimizar la propagación del ruido de los datos de irradiancia. En la Tabla 4.3 se indican algunos de ellos para distintos valores de m . Análogamente a lo visto en las fórmulas en dos planos, el segundo sumando es más complejo. El punto $\zeta_j \in (0, jz)$ es desconocido y, en general, distinto para cada punto \mathbf{r} de cada plano jz . Esto nos impide la aplicación directa

m	\tilde{a}_m
1	1/2
2	1/10
3	1/28
4	1/60
5	1/110
25	1/11050
50	1/676700

Tabla 4.3: Coeficientes \tilde{a}_m para distintos valores de m .

de las ecuaciones halladas para calcular una separación interplanos que optimice la respuesta del sensor globalmente en el plano $z = 0$.

Siguiendo un procedimiento análogo al de los Capítulos 2 y 3, hallaremos en esta sección expresiones obtenidas a partir de las Ecs. (4.12) y (4.18) para optimizar el funcionamiento de un sensor que utilice múltiples planos.

4.3.1. Varianza de la estimación de la curvatura local y separación óptima

Según lo visto en la § 2.3.1, en la integral de difracción de Fresnel contribuyen fundamentalmente regiones en la vecindad de ciertos puntos de la pupila de entrada, \mathbf{r}_{c_j} . De este modo, la irradiancia $I_j = I(\mathbf{r}, jz)$ en un punto \mathbf{r} evoluciona en cada plano jz esencialmente en función de las características de la fase en torno a dichos puntos, \mathbf{r}_{c_j} , del plano $z = 0$ (Ec. (2.12)). Pero si trabajamos en entornos Ω del frente de onda donde este se comporta fundamentalmente como su recubrimiento cuadrático W_o (Ec. (2.14) o su equivalente en forma canónica, Ec. (2.15)), toda dependencia en \mathbf{r}_{c_j} implícita en la Ec. (2.12) desaparece. Así, en todos los puntos \mathbf{r} del interior de Ω , la irradiancia evoluciona en cada plano jz de la forma:

$$I_j = \frac{I_o}{1 + 2(D + E)jz + 4DEj^2z^2} \quad (4.19)$$

donde D y E son las curvaturas principales del frente en el entorno Ω y donde los planos jz están situados antes de las cústicas.

Haciendo uso de la ecuación anterior, podemos calcular varianzas de las fórmulas en diferencias finitas con múltiples planos válidas en puntos \mathbf{r} del interior de Ω , de

forma análoga al cálculo realizado para las fórmulas en dos planos del Capítulo 2, y sustituirlas en la siguiente ecuación para obtener la varianza de la curvatura local en Ω , ϵ_o^2 :

$$\epsilon_o^2 = \frac{1}{I_o^2} \left\{ 4(D + E)^2 \sigma^2 + s^2 \left[\hat{I}'(0) \right] \right\} \quad (4.20)$$

Hay que indicar aquí que, mientras que con dos planos de irradiancia se consideró que la varianza de I_o , σ^2 , es despreciable comparado con $s^2 \left[\hat{I}'(0) \right]$, cuando se utilizan más de dos planos podría darse el caso de que la varianza de la derivada axial disminuya hasta llegar a alcanzar valores del orden de σ^2 . De ahí el no despreciarla en este caso. Entonces, las varianzas asociadas a cada fórmula son:

a) **Fórmula central**

A partir de la Ec. (4.7), calculamos la contribución del error de truncamiento de la aproximación central en diferencias finitas:

$$z \left[\sum_{j=-m}^m a_j \frac{j^2}{2} I''(\zeta_j) \right] = \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j I_j - I'(0) \quad (4.21)$$

De este modo, la Ec. (4.12) en función de los parámetros D y E del entorno Ω es:

$$s^2 \left[\hat{I}'(0) \right] = \frac{\sigma^2 \tilde{a}_m}{z^2} + I_o^2 \left[2(D + E) + \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m \frac{a_j}{1 + 2(D + E)jz + 4DEj^2z^2} \right]^2 \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta la Ec. (4.10), $a_{-j} = -a_j$, y podemos simplificar el segundo término de la ecuación anterior y sustituirla en la Ec. (4.20), obteniéndose la siguiente expresión para la varianza de la curvatura local estimada con la fórmula central en el entorno Ω :

$$\begin{aligned} \epsilon_o^2 &= \left[4(D + E)^2 + \frac{\tilde{a}_m}{z^2} \right] \left(\frac{\sigma}{I_o} \right)^2 + 4(D + E)^2 \\ &\times \left[1 - \tilde{a}_m \sum_{j=-m}^m \frac{j^2}{(1 + 4DEj^2z^2)^2 - 4(D + E)^2 j^2 z^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

b) **Fórmula progresiva y regresiva**

De modo análogo al apartado anterior, calculamos el segundo término de la Ec. (4.18) y obtenemos la varianza de esta fórmula en función de los parámetros

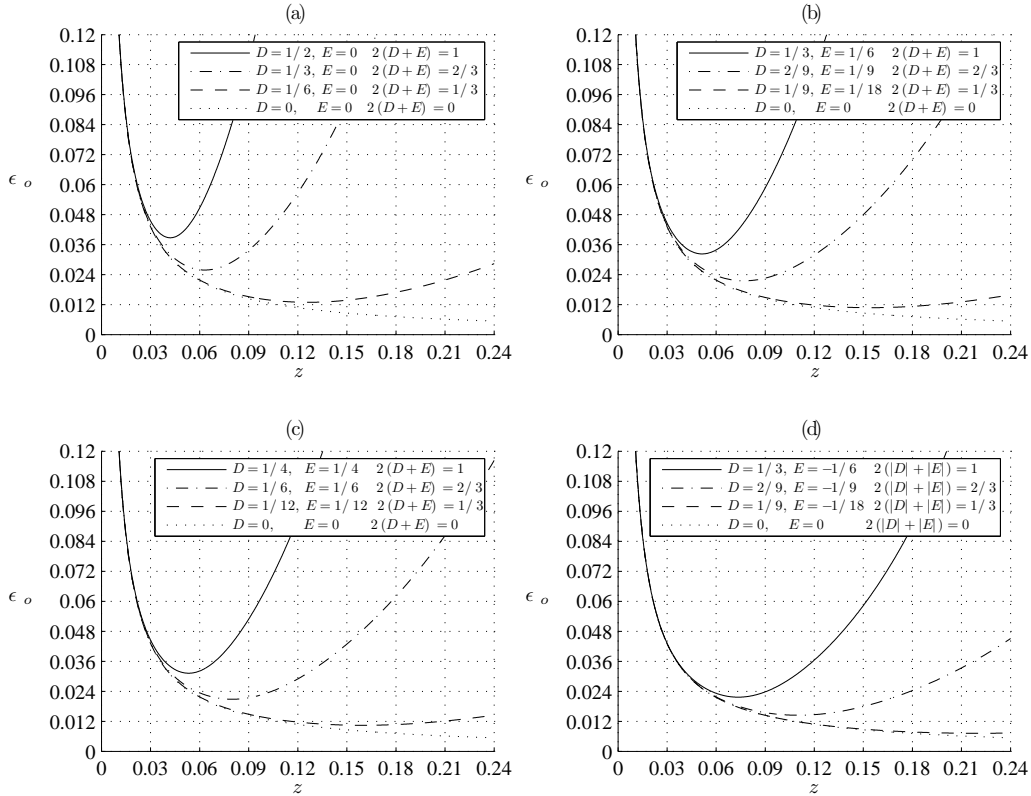


Figura 4.1: Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en un entorno Ω en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula central de Stirling particularizada a $M = 8$ planos de medida, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólico y el (d) a aproximaciones de tipo paraboloides hiperbólico.

D y E característicos de la aproximación cuadrática del frente de onda en el entorno Ω . Por último, sustituyendo en la Ec. (4.20), calculamos la varianza de la curvatura local de W estimada en el entorno Ω con la fórmula progresiva y regresiva:

$$\begin{aligned} \epsilon_o^2 = & \left[4(D+E)^2 + 2\frac{\tilde{b}_m}{z^2} \right] \left(\frac{\sigma}{I_o} \right)^2 \\ & + \left[2(D+E) \pm \frac{1}{z} \sum_{j=1}^m b_j \frac{\mp 2(D+E)jz - 4DEj^2z^2}{1 \pm 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

En las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3, se representan las curvas de error de la curvatura local estimada en el entorno Ω con las fórmulas central, progresiva y regresiva,

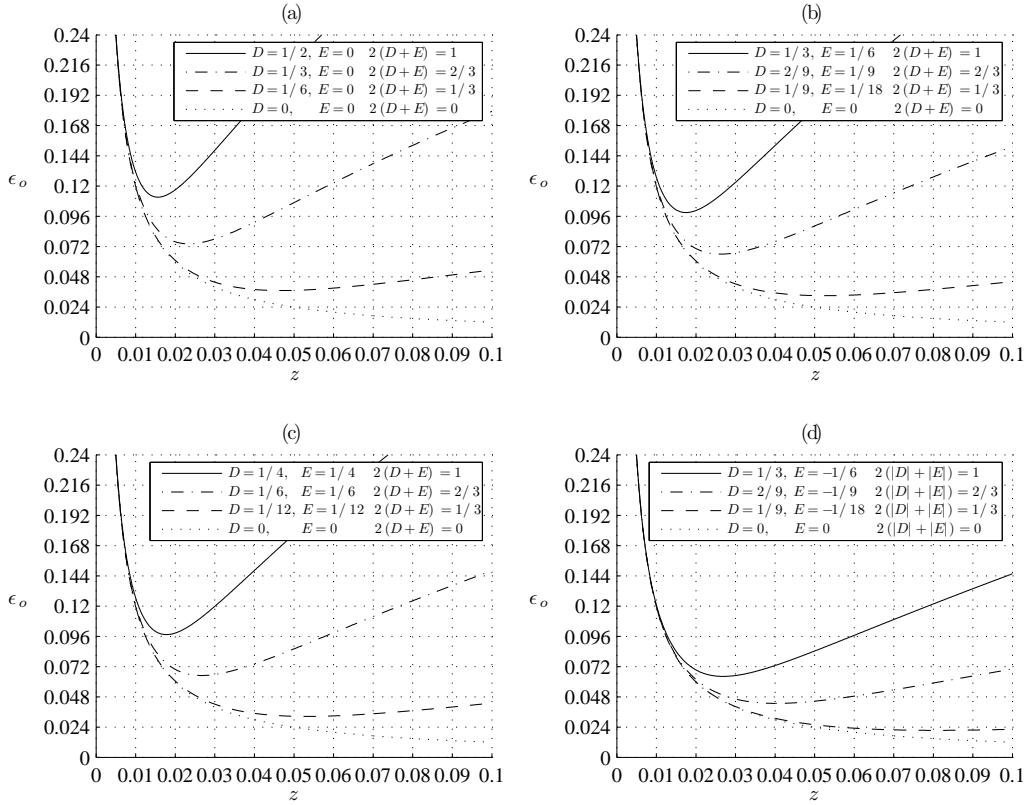


Figura 4.2: Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en un entorno Ω en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula progresiva de Newton particularizada a $M = 8$ planos de medida, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólico y el (d) a aproximaciones de tipo paraboloides hiperbólico.

respectivamente, con $M = 8$ planos de irradiancia*. Suponemos que las irradiancias proporcionadas por el detector fluctúan con desviación relativa $\sigma/I_o = 0,01$. Los valores de los parámetros D y E se han seleccionado manteniendo la condición $2(|D| + |E|) \leq V = 1$, al igual que en las figuras de la § 2.3.2 asociadas a fórmulas con datos de irradiancia en solo dos planos. El apartado (a) de cada figura muestra el comportamiento de ϵ_o para frentes de onda con forma de cilindro parabólico en Ω , el (b) para frentes con forma de paraboloides elíptico, el (c) para frentes con forma de paraboloides esférico y el (d) para aquellos con forma de paraboloides hiperbólico.

De nuevo, tal y como observamos en las curvas para dos planos, de todas las

*Podría utilizarse otro número de planos y se llegaría a las mismas conclusiones, pues el comportamiento cualitativo general de las curvas en función de z no cambia por escoger un número de planos distinto en la fórmula en diferencias finitas.

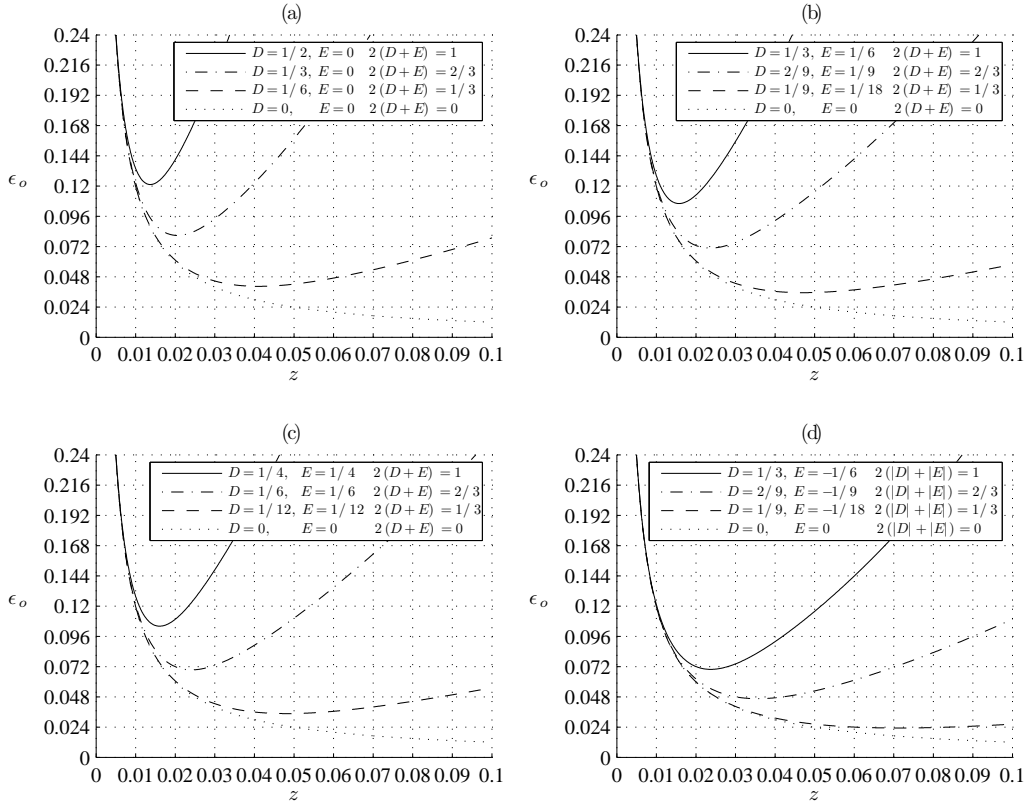


Figura 4.3: Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en un entorno Ω en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula regresiva de Newton particularizada a $M = 8$ planos de medida, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólicos y el (d) a aproximaciones de tipo paraboloides hiperbólicos.

combinaciones de D y E tales que $2(|D| + |E|) = V = 1$ (curvas en línea continua de las figuras) la curva que está por encima de todas las demás corresponde al cilindro parabólico, seguida, en orden decreciente, por la curva del paraboloides parabólico, la del paraboloides elíptico y, por último, la del hiperbólico. Si llamamos z_{opt} a la separación interplanos que coincide con el mínimo de la curva con $V = 1$ del cilindro parabólico, si los planos de medida se posicionan separados entre sí una distancia $z < z_{\text{opt}}$, entonces las curvaturas locales estimadas en cualquier entorno Ω del dominio donde haya otro tipo de cuádrica tendrán siempre más error que si se separan $z = z_{\text{opt}}$. Por otro lado, si las irradiancias se detectan en planos separados $z > z_{\text{opt}}$, aunque mejora la estimación de las curvaturas locales en los entornos donde la aproximación cuadrática es un paraboloides o un plano, empeora en entornos donde el frente de onda puede aproximarse por cilindros parabólicos. Consecuentemente, la distancia

interplanos óptima es z_{opt} .

En definitiva, el incremento del número de datos de entrada de las fórmulas no modifica el comportamiento cualitativo de las curvas de error y, por tanto, podremos aplicar el procedimiento descrito en la § 2.3.3 para hallar una única separación interplanos, z_{opt} , que optimice la medida de la curvatura.

4.3.2. Varianza de la estimación de la derivada normal local y separación óptima

El error de las fórmulas en diferencias finitas (4.2) y (4.13) aplicadas a la medida de la derivada axial en la frontera es:

$$s^2 \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) \right] = \frac{\sigma^2}{z^2} \tilde{a}_m + z^2 \left[\sum_{j=-m}^m a_j \frac{j^2}{2} \mathcal{I}''(\zeta_j) \right]^2 \quad (4.25)$$

para la configuración central, y:

$$s^2 \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) \right] = \frac{2\sigma^2}{z^2} \tilde{b}_m + z^2 \left[\sum_{j=1}^m b_j \frac{j^2}{2} \mathcal{I}''(\zeta_j) \right]^2 \quad (4.26)$$

para la configuración progresiva y regresiva, que, de acuerdo con lo visto en el Capítulo 3, se calculan siguiendo el mismo procedimiento de la § 4.2 sustituyendo la irradiancia I_j en un punto \mathbf{r} del plano jz por su promedio radial en la frontera, \mathcal{I}_j , asociado a un ángulo θ , es decir:

$$\mathcal{I}_j = \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R+L/2} I_j [1 - H(r - R_j)] dr = \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R_j} I_j dr \quad (4.27)$$

siendo L la anchura radial de la región de frontera, R_j el radio de la región iluminada en un ángulo θ del plano jz y H la función de salto unitario de la Ec. (3.10).

En un entorno $\Omega = \Omega(\theta)$ de un punto del borde (R, θ) , suponemos que la superficie del frente de onda es, en esencia, cuadrática (Ec. (3.25)). De este modo, el promedio radial de la irradiancia en los puntos de Ω entre $R - L/2$ y $R + L/2$ evoluciona en cada plano jz de la forma:

$$\mathcal{I}_j = \frac{I_o}{L} \left[\frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D + E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \quad (4.28)$$

donde el radio de la región iluminada asociado al ángulo θ es, en cada plano jz :

$$R_j = \frac{jz[(1+2Ejz)^2 B \cos \theta + (1+2Djz)^2 C \sin \theta] \times \text{Raíz} + [1+2(D+E)jz+4DEj^2z^2]}{(1+2Ejz)^2 \cos^2 \theta + (1+2Djz)^2 \sin^2 \theta} \quad (4.29)$$

con:

$$\text{Raíz} = \sqrt{R^2 \left\{ (1 + 2Ejz)^2 \cos^2 \theta + (1 + 2Djz)^2 \sin^2 \theta \right\} - j^2 z^2 (B \sin \theta - C \cos \theta)^2}$$

siendo B, C, D y E los parámetros de la cuádrica W_o que aproxima el frente de onda en Ω (Ec. (3.25)). La varianza ϵ_o^2 de la derivada normal local estimada en el entorno Ω asociado a un ángulo θ es, para cada fórmula:

a) **Fórmula central**

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor del promedio de la irradiancia y la Ec. (4.25), la varianza de la derivada axial promediada en la frontera es:

$$s^2 \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) \right] = \frac{\sigma^2}{z^2} \tilde{a}_m + \left[\frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j \mathcal{I}_j - \mathcal{I}'(0) \right]^2 \quad (4.30)$$

Sustituyendo la Ec. (4.28) en la ecuación anterior y teniendo en cuenta las Ecs. (3.8) y (3.15):

$$\epsilon_o^2 = \frac{L^2 \tilde{a}_m}{4z^2} \left(\frac{\sigma}{\mathcal{I}_o} \right)^2 + \left[W_{or} - \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j \frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D + E)jz + 4DEj^2 z^2} \right]^2 \quad (4.31)$$

con W_{or} de la Ec. (3.29).

b) **Fórmula progresiva y regresiva**

A partir de la Ec. (4.26) y del desarrollo de Taylor de la irradiancia, la varianza de la derivada axial en la frontera es, en este caso:

$$s^2 \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) \right] = \frac{2\sigma^2}{z^2} \tilde{b}_m + \left[\frac{1}{\pm z} \sum_{j=1}^m b_j (\mathcal{I}_j - \mathcal{I}_o) - \mathcal{I}'(0) \right]^2 \quad (4.32)$$

Siguiendo el mismo procedimiento de la fórmula central, con la salvedad de evaluar todo en $z = \pm z$:

$$\epsilon_o^2 = \frac{L^2 \tilde{b}_m}{2z^2} \left(\frac{\sigma}{\mathcal{I}_o} \right)^2 + \left\{ W_{or} \mp \frac{1}{z} \sum_{j=1}^m b_j \left[\frac{R_j - R + L/2}{1 \pm 2(D + E)jz + 4DEj^2 z^2} - \frac{L}{2} \right] \right\}^2 \quad (4.33)$$

con W_{or} de la Ec. (3.29).

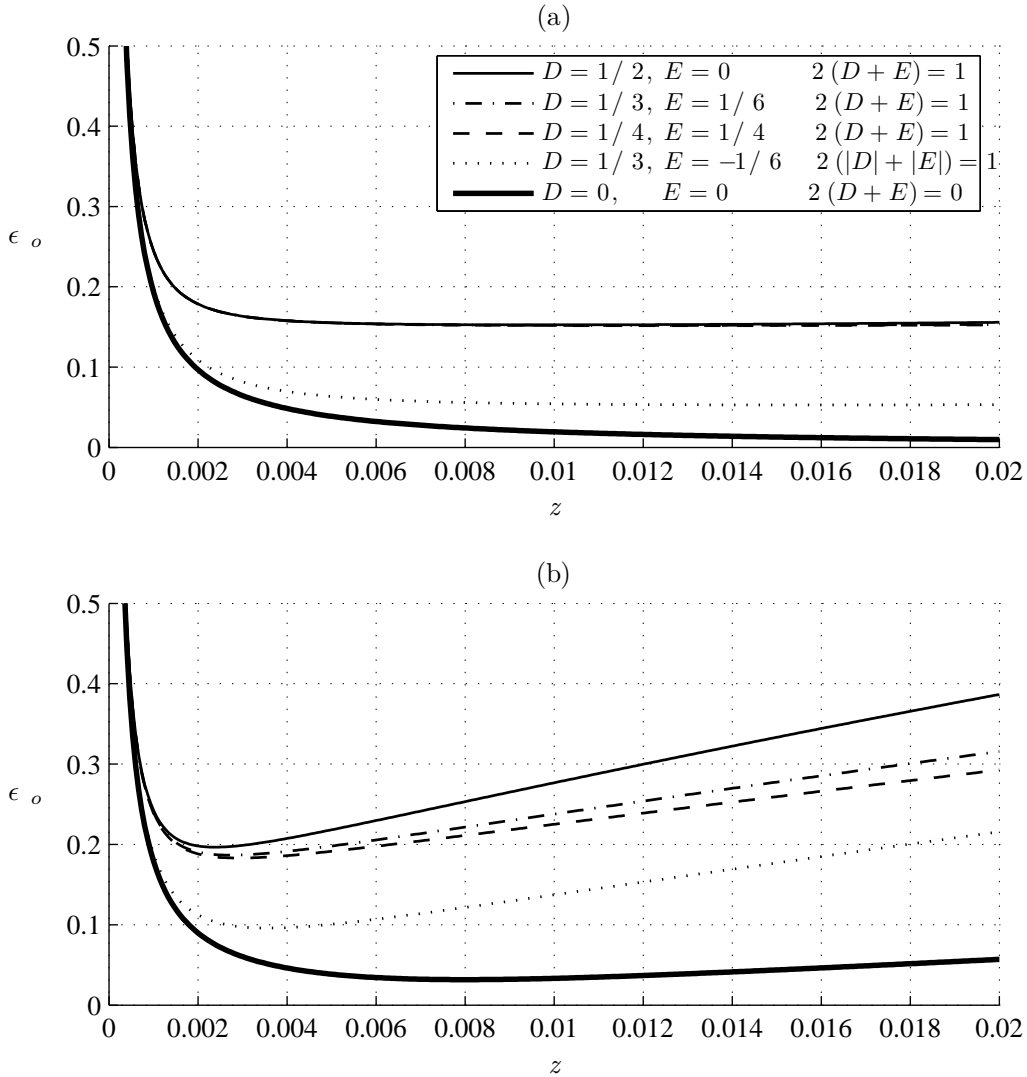


Figura 4.4: Curvas de error de la derivada normal local estimada en un entorno Ω en la configuración central (a) y en la de Newton (b) particularizadas a $M = 8$ planos de medida, para $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,01$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y aproximaciones cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano.

Las Figuras 4.4(a) y 4.4(b) muestran las curvas de error de la derivada normal local estimada con la fórmula central y con las fórmulas de Newton, respectivamente, particularizadas a $M = 8$ planos de irradiancia. Como en las figuras análogas del Capítulo 3 asociadas a fórmulas con datos de irradiancia en dos planos, consideramos solo combinaciones de las inclinaciones locales, B y C , y de las curvaturas principales, D y E , de la cuádrica tales que $\sqrt{B^2 + C^2} \leq U$ y $2(|D| + |E|) \leq V$. Recordemos que U es una cota superior de las inclinaciones locales que limita la traslación de la región iluminada, y V es un valor que acota superiormente sus deformaciones

angulares locales provocadas por las curvaturas principales del frente de onda en el entorno Ω . Aquí normalizaremos ambas cotas a la unidad, es decir, tomaremos $U = 1$ y $V = 1$ y, además, consideraremos que la pupila es de radio unidad, $R = 1$. Aunque en la práctica normalmente $1/U \approx 1/V \gg R$, se consideran aquí estos valores sencillos porque solo queremos analizar cualitativamente el comportamiento del error. Adicionalmente, solo representamos los resultados para algunas combinaciones ilustrativas de D y E tales que $2(|D| + |E|) = 1$ y aquellos de B y C tales que $\sqrt{B^2 + C^2} = 1$. Esto implica que las curvas representadas corresponden a los frentes de onda menos suaves, para los que se da la peor respuesta del sensor de curvatura. Asimismo, tomamos una desviación $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,01$ para la fluctuación de la irradiancia promedio detectada en un ángulo θ del plano $z = 0$ y un valor para la anchura radial del anillo de detectores, $L = 0,3R$, dejando para más adelante el estudio de la influencia de la elección previa del tamaño de la región de frontera. Por último, cada curva es el resultado de calcular la desviación estándar máxima de todos los ángulos, con lo que es la menor cota superior del error de la estimación de W_{or} en cualquier ángulo θ . Si se toman los valores opuestos de los parámetros de la cuádrica, es decir, $-B$, $-C$, $-D$ y $-E$, las curvas que se obtienen con la fórmula central son idénticas a las dibujadas, mientras que las curvas para la fórmula progresiva pasan a ser las de la regresiva y a la inversa. En la Figura 4.4(b) asociada a las fórmulas de Newton, se muestran las curvas correspondientes a la fórmula progresiva porque, para los parámetros B , C , D y E escogidos, el error es mayor con esta fórmula que con la fórmula regresiva.

Por las mismas razones esgrimidas para dos planos de irradiancia, el mínimo de la curva donde $D = V/2$ y $E = 0$, es decir, el mínimo de la curva asociada a un frente cilíndrico de curvatura V nos fija la separación interplanos más apropiada. Ahora bien, para hallar la separación interplanos óptima, z_{opt} , también deberemos ajustar adicionalmente el ancho de la región de frontera, L , a la deformación radial máxima de la región iluminada.

Por tanto, el incremento del número de datos de entrada de las fórmulas tampoco modifica aquí el comportamiento esencial de las curvas de error y podremos aplicar el procedimiento de la § 3.5 para hallar una única separación interplanos, z_{opt} , que proporcione las medidas de frontera más precisas.

4.4. Rendimiento del sensor de curvatura multiplano

Una vez que hemos comprobado la aplicabilidad de los procedimientos desarrollados en los Capítulos 2 y 3 en sensores de curvatura que funcionen con múltiples planos, procedemos en esta sección a analizar el rendimiento del sensor en función del número de planos. Llevaremos a cabo este análisis estudiando por separado los resultados para la medida en el interior y para la medida en la frontera.

4.4.1. Calidad del laplaciano recuperado en función del número de planos

Si en cada entorno Ω el frente de onda verifica que $2(|D| + |E|) \leq V$, entonces, separando cada plano del siguiente la cantidad $z = z_{\text{opt}}$ seleccionada en la § 4.3.1, el error de la curvatura local estimada en Ω se encuentra entre $\epsilon_o(z_{\text{opt}})$ para un frente con forma de cilindro parabólico y $\epsilon_o(z_{\text{opt}})$ para un frente de onda plano (Ec. (2.21)). Para las fórmulas en diferencias finitas aquí analizadas, estas cotas de error son:

a) Fórmula central

La menor cota superior se obtiene sustituyendo los parámetros $D = V/2$ y $E = 0$ en la Ec. (4.23), que corresponden a una aproximación cuadrática con forma de cilindro parabólico de curvatura V . Tomando las coordenadas axiales normalizadas a V , $h = Vz$, esta cota es:

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{sup}}}{V}\right)^2 = \left(1 + \frac{\tilde{a}_m}{h^2}\right) \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 + \left[1 - \tilde{a}_m \sum_{j=-m}^m \frac{j^2}{1 - (jh)^2}\right]^2 \quad (4.34)$$

La mayor cota inferior se calcula sustituyendo $D = E = 0$ en la Ec. (4.23); parámetros que están asociados a un frente de onda plano, es decir:

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{inf}}}{V}\right)^2 = \frac{\tilde{a}_m}{h^2} \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 \quad (4.35)$$

En la Figura 4.5(a) se representan estas cotas para varios valores de σ/I_o , apreciándose el aumento de la incertidumbre de las curvaturas locales recuperadas a medida que aumenta el ruido de las medidas de irradiancia.

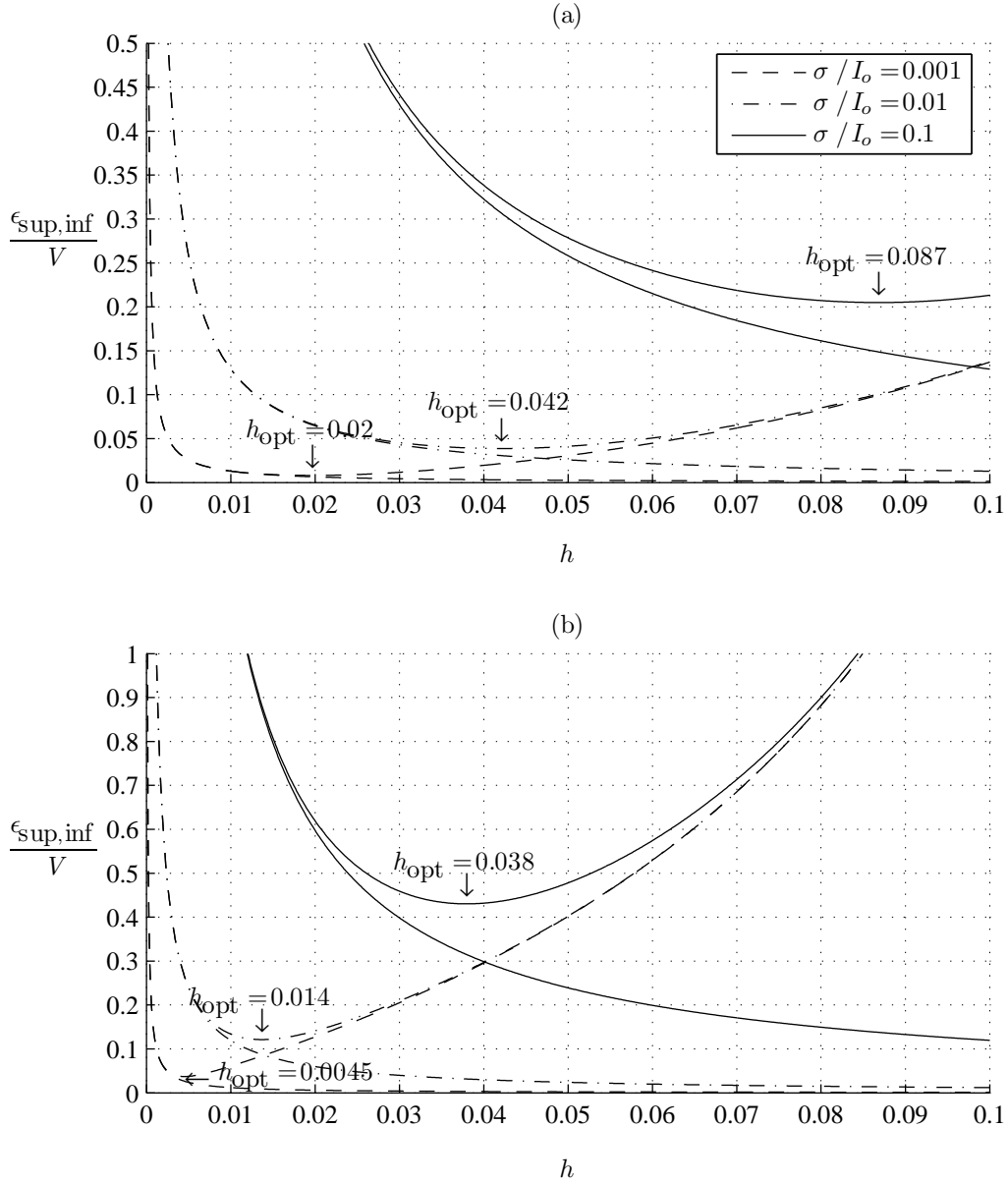


Figura 4.5: Cota superior de error, ϵ_{sup} , y cota inferior de error, ϵ_{inf} , de la estimación de la curvatura de la fase con la fórmula central (a) y con la de Newton (b) particularizadas a $M = 8$ planos, para varios niveles del ruido de detección, σ/I_o .

Minimizando la Ec. (4.34) respecto de la variable h , obtenemos una relación entre la separación óptima, h_{opt} , y el nivel de ruido de las medidas, σ/I_o :

$$\frac{1}{h_{\text{opt}}^3} \left(\frac{\sigma}{I_o} \right)^2 + 2h_{\text{opt}} \left[1 - \tilde{a}_m \sum_{j=-m}^m \frac{j^2}{1 - (jh_{\text{opt}})^2} \right] \left\{ \sum_{j=-m}^m \left[\frac{j^2}{1 - (jh_{\text{opt}})^2} \right]^2 \right\} = 0 \quad (4.36)$$

b) **Fórmula progresiva y regresiva**

Calculamos la menor cota superior tomando $D = V/2$ y $E = 0$ en la Ec. (4.24) y evaluando en $h = Vz$:

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{sup}}}{V}\right)^2 = \left(1 + \frac{2\tilde{b}_m}{h^2}\right) \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 + \left[1 - \sum_{j=1}^m b_j \left(\frac{j}{1 - jh}\right)\right]^2 \quad (4.37)$$

La mayor cota inferior se obtiene sustituyendo $D = E = 0$:

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{inf}}}{V}\right)^2 = \frac{2\tilde{b}_m}{h^2} \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 \quad (4.38)$$

y minimizando la Ec. (4.37) respecto de h e igualando a cero, obtenemos una relación entre la posición óptima de los planos, h_{opt} , y el nivel de ruido de medida, σ/I_o :

$$\frac{2\tilde{b}_m}{h_{\text{opt}}^3} \left(\frac{\sigma}{I_o}\right)^2 - \left[1 - \sum_{j=1}^m b_j \left(\frac{j}{1 - jh_{\text{opt}}}\right)\right] \left[\sum_{j=1}^m b_j \left(\frac{j}{1 - jh_{\text{opt}}}\right)^2\right] = 0 \quad (4.39)$$

En la Figura 4.5(b) se muestran estas cotas para los mismos valores de σ/I_o que en la Figura 4.5(a). Al igual que ocurría con las fórmulas con dos planos, el error en la separación óptima es mayor en las curvas correspondientes a las fórmulas de Newton, como se deduce comparando aquellos pares de curvas de ambas figuras asociados al mismo nivel de ruido. En definitiva, independientemente del número de planos, los errores de los datos de entrada y el error de modelización se propagan más a la medida de curvatura si se usan las fórmulas de Newton en lugar de la fórmula central.

Por otro lado, la Figura 4.5, para fórmulas en $M = 8$ planos, junto con la Figura 2.7, para fórmulas en $M = 2$ planos, nos permiten comparar el rendimiento del sensor en relación al número de planos de irradiancia que utiliza para estimar la curvatura local. Por ejemplo, en las curvas con $\sigma/I_o = 0,1$ para la fórmula central, se aprecia un descenso de la cota superior de error en la separación óptima desde $\epsilon_{\text{sup}}/V = 0,24$ con dos planos hasta $\epsilon_{\text{sup}}/V = 0,20$ con ocho planos. En las curvas con $\sigma/I_o = 0,01$, el error disminuye desde $\epsilon_{\text{sup}}/V = 0,051$ con dos planos hasta $\epsilon_{\text{sup}}/V = 0,039$ con ocho planos. Para las fórmulas de Newton, si $\sigma/I_o = 0,1$, el error se reduce desde $\epsilon_{\text{sup}}/V = 0,64$ con dos planos hasta $\epsilon_{\text{sup}}/V = 0,43$ con ocho planos. Si $\sigma/I_o = 0,01$, la reducción va desde $\epsilon_{\text{sup}}/V = 0,18$ con dos planos hasta $\epsilon_{\text{sup}}/V = 0,12$ con ocho planos.

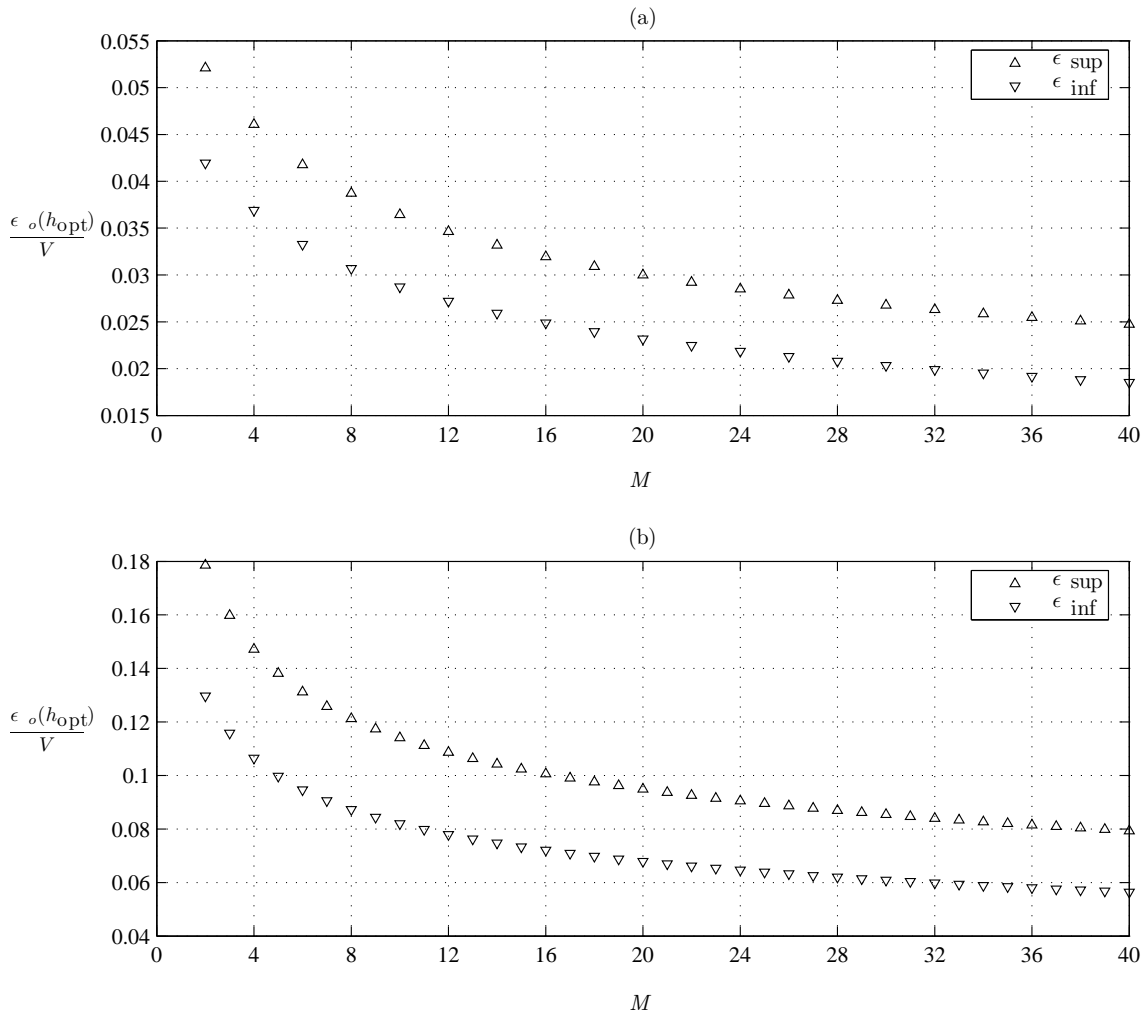


Figura 4.6: Evolución de la cota superior de error de la curvatura local en función del número de planos de medida, suponiendo que se estima con la fórmula central en diferencias finitas, (a), y con la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b). En ambos casos $\sigma/I_o = 0,01$.

La evolución de las cotas superior e inferior de error en h_{opt} en función del número de planos puede verse más claramente en la Figura 4.6. En esta representación se muestra cómo a consecuencia del uso de más planos de irradiancia el error de la estimación de la curvatura local podría hacerse tan pequeño como para llegar a ser comparable a σ .

El empleo de fórmulas con más planos de irradiancia también trae consigo la reducción de la distancia interplanos a medida que aumenta M (ver Figura 4.7). Esta situación pone un límite superior en el número de medidas de irradiancia, pues el valor de z podría reducirse tanto que la imprecisión de la posición de los planos, que en este trabajo no se está teniendo en cuenta, podría llegar a ser significativa.

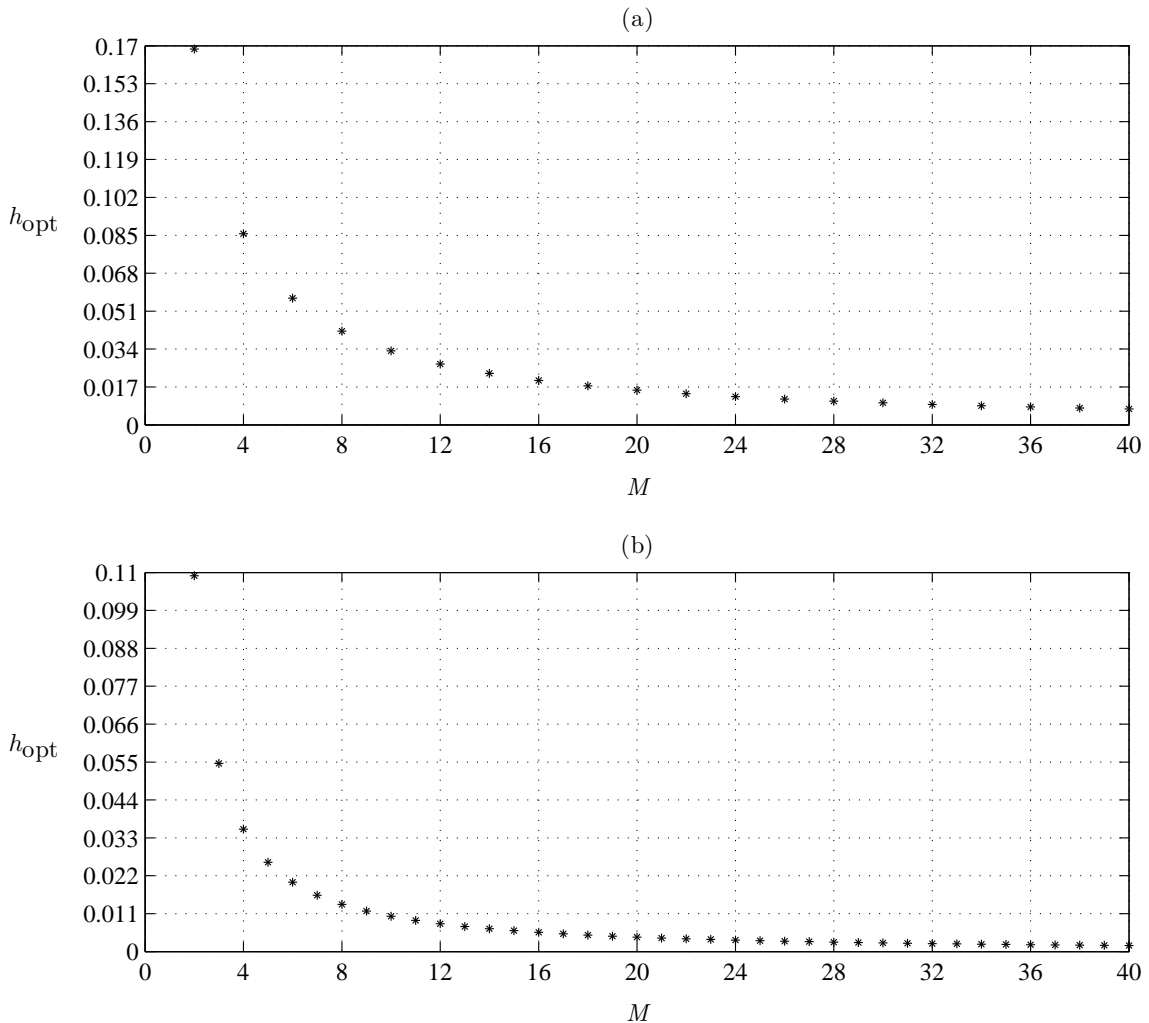


Figura 4.7: Evolución de la separación interplanos conforme crece el número de planos de medida, para la fórmula central en diferencias finitas, (a), y para la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b), suponiendo $\sigma/I_o = 0,01$.

Adicionalmente, si z llega a ser suficientemente pequeño, la hipótesis de no correlación entre las medidas de irradiancia en un plano y los adyacentes podría dejar de ser consistente.

La Figura 4.8 es una representación que explica cómo el plano más alejado de la pupila está cada vez más cerca de $z = 0$ conforme aumenta el número de planos. Es decir, la disminución de h_{opt} a consecuencia del aumento del número de planos, va pareja a una reducción del rango axial donde se toman medidas de irradiancia.

A raíz de estos resultados, podemos concluir que en experimentos donde la irradiancia solo está afectada por ruido de media cero independiente del nivel de señal, la estimación de la curvatura es más precisa si se emplean fórmulas con más

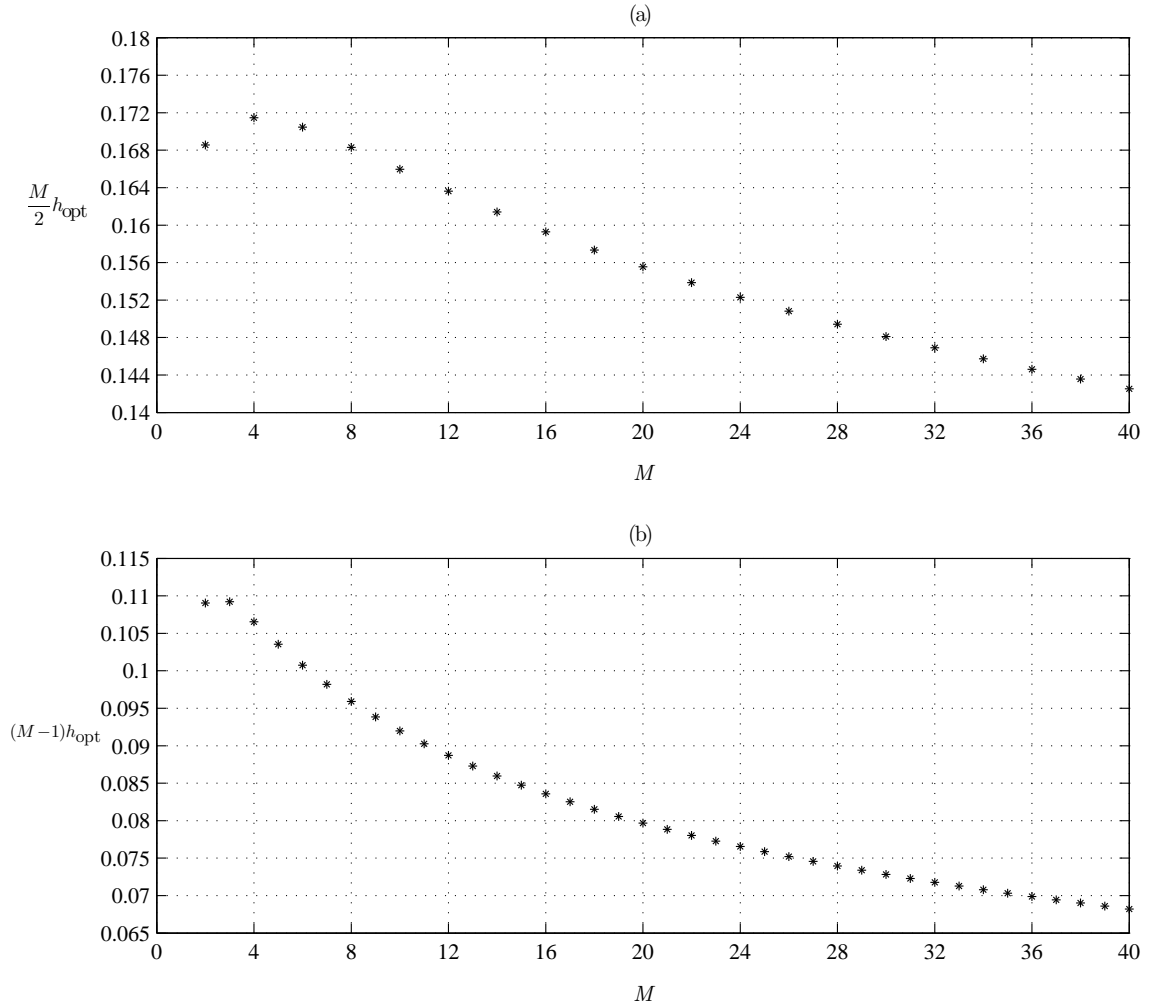


Figura 4.8: Evolución de la posición de los planos más alejados de $z = 0$ conforme crece el número de planos de medida, para la fórmula central en diferencias finitas, (a), y para la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b), suponiendo $\sigma/I_o = 0,01$.

de dos planos.

A cambio de tener que sustituir el detector por otro más avanzado, mejorar el rendimiento del sensor exige llevar a cabo medidas en más de dos planos para ganar resolución. Podemos verlo en la Figura 4.9. Esta es una representación de la calidad del detector que deberíamos utilizar en un sensor de curvatura que trabaje con solo dos planos, para que en la posición óptima estimemos las curvaturas locales con la misma precisión que un sensor multiplano optimizado que utilice un detector que proporcione medidas de irradiancia con desviación estándar $\sigma/I_o = 0,01$.

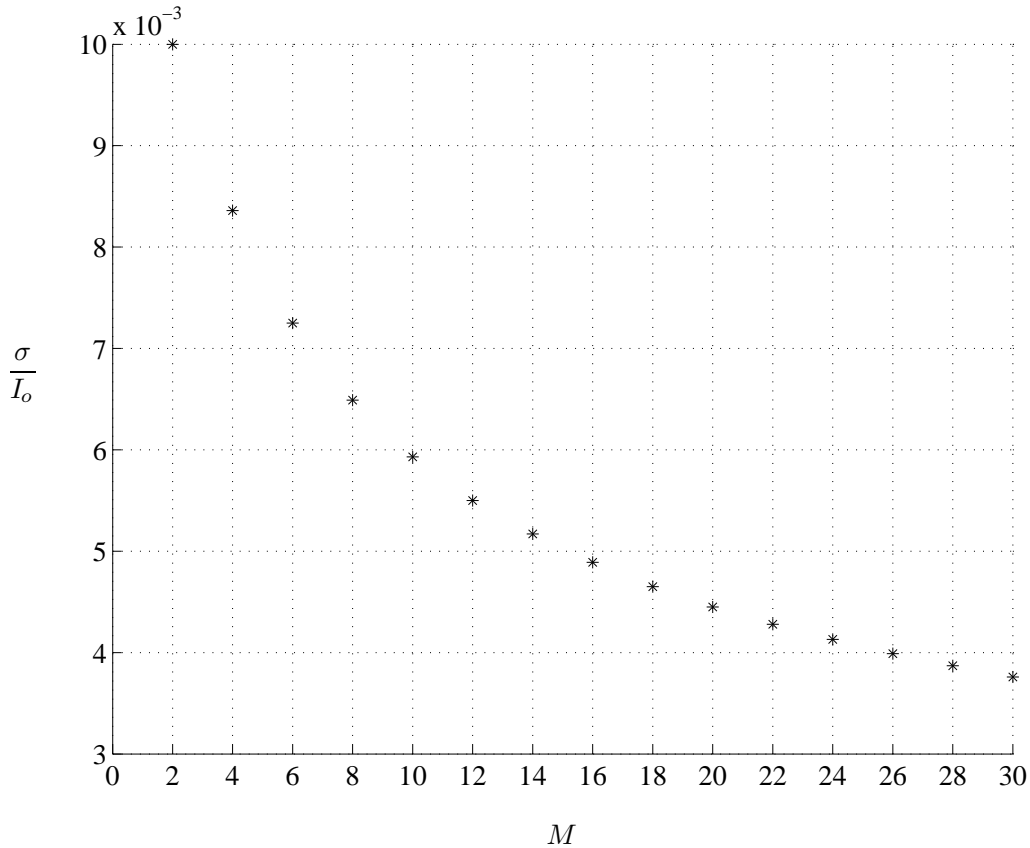


Figura 4.9: Nivel de ruido de medida, σ/I_o , asumible en un sensor que funciona con dos planos de medida, para garantizar la recuperación de una curvatura local de magnitud V en el esquema central con la misma precisión que un sensor de curvatura multiplano que utiliza un detector afectado por ruido de detección con desviación relativa $\sigma/I_o = 0,01$.

4.4.2. Calidad de la derivada normal recuperada en función del número de planos

Si la aproximación cuadrática del frente de onda en cada entorno Ω verifica que $\sqrt{B^2 + C^2} \leq U$ y $2(|D| + |E|) \leq V$, en la § 4.3.2 se ha visto que la separación interplanos está fijada por el mínimo de la varianza asociada a un frente cilíndrico de curvatura máxima, $D = V/2$ y $E = 0$, y con la máxima inclinación, $\sqrt{B^2 + C^2} = U$. Pero para conseguir la mejor respuesta del sensor, adicionalmente debemos adaptar el tamaño de la región de frontera, L , para que coincida con la deformación radial máxima de la región iluminada. Así se minimiza la contribución del ruido de las medidas de irradiancia evitando, al mismo tiempo, la pérdida de información que implica que el borde de la región iluminada sobrepase los límites de los detectores que constituyen la región de frontera.

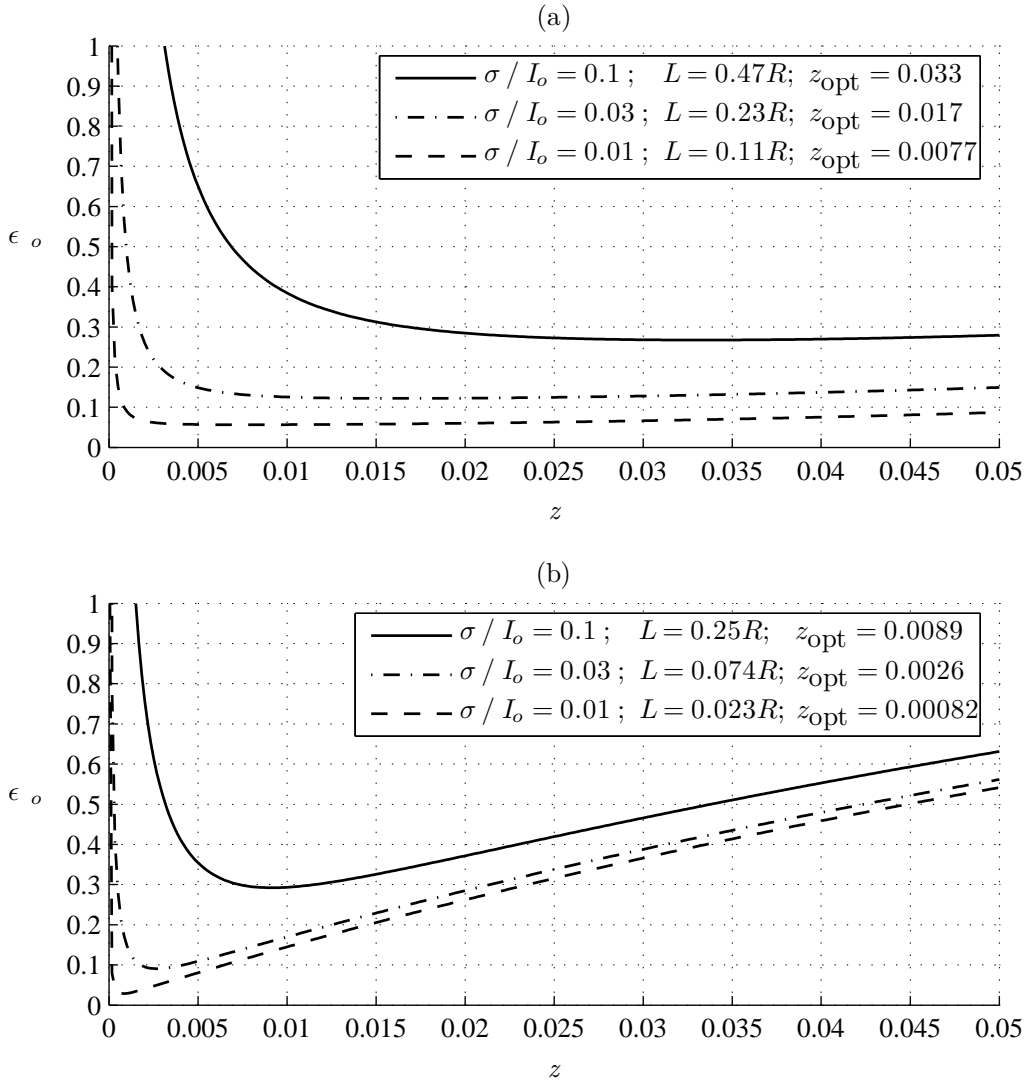


Figura 4.10: Curvas de error de la derivada normal de la fase en la frontera estimada con la configuración central (a) y la de Newton (b) particularizadas a $M = 8$ planos de medida, cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada, suponiendo el nivel de ruido en el plano de recuperación, σ/I_o , indicado. Adicionalmente, se incluye la separación óptima, z_{opt} .

Tomemos entonces un frente de onda cilíndrico con $U = 1$ y $V = 1$. En las Figuras 4.10(a), para la fórmula central, y 4.10(b), para la fórmula de Newton, se representa $\epsilon_o(z)$ cuando L se ha ajustado a la deformación radial máxima de la región iluminada en z_{opt} para los valores de σ/I_o indicados. Comparando con la figura correspondiente para dos planos, Figura 3.9, se aprecia una disminución del error de la estimación de W_{or} en z_{opt} . En el caso de la fórmula central, la disminución va desde $\epsilon_o = 0,36$ con dos planos a $\epsilon_o = 0,27$ con ocho planos, para $\sigma/I_o = 0,1$, y desde $\epsilon_o = 0,16$ con

dos planos a 0,12 con ocho planos, para $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,01$. En el caso de la fórmula de Newton, el error disminuye desde 0,49 con dos planos a $\epsilon_o = 0,3$ con ocho planos, para $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,1$, y desde $\epsilon_o = 0,15$ con dos planos a $\epsilon_o = 0,09$ con ocho planos, para $\sigma/\mathcal{I}_o = 0,01$. Al igual que con el laplaciano, el empleo de más datos de entrada también reduce el error de la recuperación de W_{or} . En definitiva, en experimentos donde las medidas de irradiancia están afectadas solo por ruido de media cero e independiente del nivel de señal, la estimación de la derivada normal es más precisa si aumenta el número de datos de irradiancia.

Por último, análogamente a lo observado con las fórmulas en dos planos, ϵ_o permanece en valores cercanos al mínimo en un rango axial mayor en la fórmula central que en las fórmulas de Newton. Por tanto, la elección de z_{opt} con la fórmula central se muestra más flexible que con las fórmulas de Newton, independientemente del número de planos utilizado para aproximar la derivada axial.

Capítulo 5

El problema de contorno

5.1. Introducción

Desde el punto de vista matemático, la reconstrucción de fase en la técnica basada en la ETI se reduce a resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales con condición de contorno de Neumann. Sin embargo, existen dificultades prácticas manifiestas a la hora de obtener medidas de frontera de calidad, debido, fundamentalmente, a las limitaciones específicas que afectan a este tipo de medidas respecto de las del interior.

Este hecho hace que nos planteemos en este capítulo el objetivo de analizar el peso de las medidas de la derivada normal de la fase en la frontera en este tipo de métodos de recuperación de fase. Asimismo, se estudiarán soluciones para minimizar el error añadido por las medidas de contorno, viendo cuando estas son estrictamente necesarias y cuando no lo son para poder recuperar la fase de forma única.

5.2. Estimación del frente de onda a partir de medidas de irradiancia

Los algoritmos que se usan para reconstruir la fase a partir de la información proporcionada por un sensor de frente de onda se suelen clasificar en algoritmos zonales y algoritmos modales [160]. En el primer caso, el frente de onda se recupera en un conjunto discreto de puntos de medida, mientras que en el segundo se reconstruye en función de los coeficientes de un desarrollo en serie funcional.

Los principales algoritmos de reconstrucción de tipo zonal basados en la ETI han

sido desarrollados para el caso particular de distribuciones de intensidad uniformes en el plano de recuperación de fase. Estos métodos resuelven la Ec. (1.3) empleando funciones de Green [24], diferencias finitas [3, 52, 126] o transformadas de Fourier [161, 162]. El principal problema que caracteriza los métodos de estimación zonal, para el caso que nos ocupa, es la dificultad de introducir en los algoritmos las condiciones de contorno, lo que generalmente conlleva errores que se añaden a los de las medidas de frontera. En los métodos que utilizan transformadas de Fourier se resuelve el problema imponiendo condiciones periódicas ficticias, como en el caso de G. Vdovin [3], o bien definiendo un dominio mayor que el real con el objetivo de tener en cuenta la contribución de la frontera, como en el caso de Roddier *et al.* [161]. En el método utilizado por M. R. Teague, se calcula una solución para la fase que depende de una función de Green y su derivada normal [24]. No obstante, ambas presentan singularidades integrables que hacen perder precisión en la recuperación de la fase.

Las estimaciones modales de magnitudes físicas son bastante habituales y aparecen en varias áreas de la Física (por ejemplo, el desarrollo multipolar del potencial electrostático en función de polinomios de Legendre [163] o la solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico, donde la función de onda se expresa como combinación lineal de funciones propias constituidas por el producto de un polinomio de Hermite y una función exponencial de Gauss [164]). La principal ventaja de los métodos de estimación modal respecto de los de estimación zonal es que proporcionan una expresión de la magnitud como desarrollo en un conjunto de funciones.

La recuperación modal del frente de onda tiene por objetivo estimar los coeficientes del desarrollo de la fase en un conjunto de funciones base, generalmente polinomios, suponiendo así un comportamiento analítico de la fase que permite extrapolarla a cualquier punto de la abertura. Aun cuando es posible utilizar como funciones base cualquier conjunto de polinomios, con frecuencia se escogen en Óptica los polinomios de Zernike, debido fundamentalmente a que son fáciles de relacionar con las aberraciones clásicas [2, 165].

Se han desarrollado algunos métodos de estimación modal del frente de onda específicos para su aplicación combinada con la ETI [135–137, 146]. Sin embargo, estos métodos no son ortogonales, es decir, los coeficientes del desarrollo de la fase en la base escogida de funciones ortogonales no pueden obtenerse independientemente porque se expresan en función de derivadas de dichas funciones. Aunque la fase se exprese de forma modal mediante un desarrollo en serie de funciones ortogonales, la

actuación de los operadores lineales laplaciano y derivada normal sobre las funciones base del desarrollo no garantiza que se conserve la ortogonalidad entre las funciones obtenidas, produciéndose un acoplamiento entre los coeficientes.

Se han propuesto varias estrategias que permiten resolver el problema del acoplamiento entre los coeficientes modales para geometrías concretas de los planos de medida [166, 167]. No obstante, el método de los proyectores ortogonales da una solución más general y más adecuada a los objetivos de este capítulo [168]. Para ello se introduce un conjunto de funciones, los proyectores ortogonales o funciones de peso, que son ortogonales a las funciones que resultan de aplicar un operador lineal (gradiente, Laplaciano, ...) a las funciones base. Esto permite estimar cada coeficiente modal de forma independiente como la proyección de las medidas del sensor sobre la función base elegida.

Este método no es necesariamente el mejor método de recuperación de fase. Sin embargo, permite separar la información de la fase relativa al interior de la correspondiente a la frontera y la necesidad de imponer condiciones de contorno para un problema particular es mucho más intuitiva que en otros algoritmos, pues las condiciones de frontera aparecen en el método de forma natural. Por este motivo, este procedimiento resulta muy adecuado para estudiar la influencia de las condiciones de contorno en el problema de recuperación de fase a partir de la Ecuación de Transporte de Intensidad.

En lo que sigue, describiremos brevemente los fundamentos en los que se basa el método.

5.3. Estimación modal ortogonal

Sea $f(\mathbf{r})$ un observable que está relacionado con una determinada magnitud $W(\mathbf{r})$ por medio de la ecuación o conjunto de ecuaciones:

$$L[\mathbf{r}] = f(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

donde L representa un *operador lineal* actuando sobre W y \mathbf{r} el vector de posición en un espacio N -dimensional.

Sea una función de aproximación de $W(\mathbf{r})$ construida como combinación lineal de un conjunto de funciones base $\psi_i(\mathbf{r})$ con coeficientes a_i ($i = 1, 2, \dots, M$):

$$Q_M(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^M a_i \psi_i(\mathbf{r}) \quad (5.2)$$

donde los coeficientes a_i se escogen de forma que el valor de $Q_M(\mathbf{r})$ sea próximo al de $W(\mathbf{r})$ para cada valor de \mathbf{r} en un cierto dominio Σ del espacio.

Si se verifica:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} Q_M(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) \quad (5.3)$$

se dice que la suma $\sum_{i=1}^M a_i \psi_i(\mathbf{r})$ converge puntualmente hacia $W(\mathbf{r})$ (esto es, en cada punto \mathbf{r}). Ahora bien, si para cada $\epsilon > 0$ existe un M_ϵ independiente de \mathbf{r} tal que $\|W(\mathbf{r}) - Q_M(\mathbf{r})\| < \epsilon$ para todo \mathbf{r} en el dominio Σ , siempre que $M \geq M_\epsilon$ se dice que la suma $\sum_{i=1}^M a_i \psi_i(\mathbf{r})$ converge uniformemente hacia $W(\mathbf{r})$ o que $Q_M(\mathbf{r})$ aproxima $W(\mathbf{r})$ uniformemente.

La convergencia puntual no asegura el mantenimiento de las propiedades de continuidad, derivabilidad, integrabilidad, etc. cuando se pasa de las funciones base a las funciones límite. Por este motivo, sería conveniente exigir la convergencia uniforme para la función de aproximación. Sin embargo, en la práctica es imposible y lo más preciso es calcular los coeficientes a_i de manera que $Q_M(\mathbf{r})$ aproxime $W(\mathbf{r})$ según el método de mínimos cuadrados o, en otras palabras, en media [169]. Es decir, que la norma diferencia definida por la integral:

$$\|W(\mathbf{r}) - Q_M(\mathbf{r})\| = \int_{\Sigma} [W(\mathbf{r}) - Q_M(\mathbf{r})]^2 d^N r \quad (5.4)$$

tienda a cero cuando $M \rightarrow \infty$. El que el valor de esta integral sea pequeño no implica que $Q_M(\mathbf{r})$ aproxime $W(\mathbf{r})$ para todo \mathbf{r} . El significado es que $Q_M(\mathbf{r})$ aproxime $W(\mathbf{r})$ salvo en un conjunto de intervalos pequeño. Si:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} [W(\mathbf{r}) - Q_M(\mathbf{r})]^2 d^N r = 0 \quad (5.5)$$

se dice que la sucesión $Q_M(\mathbf{r})$ converge en media a $W(\mathbf{r})$. La integral de la Ec. (5.4) es la desviación cuadrática media de $Q_M(\mathbf{r})$ respecto de $W(\mathbf{r})$.

Aquí se considerará el problema de aproximar $W(\mathbf{r})$ en el sentido de mínimos cuadrados para el conjunto de funciones ψ_i . Si el conjunto de funciones base, $\{\psi_i(\mathbf{r})\}$, se elige de forma que sean ortonormales dentro de un dominio Σ con contorno C , es decir:

$$\int_{\Sigma} \psi_i(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}) d^N r = \delta_{ij} \quad (5.6)$$

el conjunto de coeficientes $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_M)$ que minimiza la norma $\|W(\mathbf{r}) - Q_M(\mathbf{r})\|$ se obtiene proyectando la magnitud sobre las funciones base:

$$\hat{a}_i = \int_{\Sigma} W(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) d^N r \quad (5.7)$$

Sin embargo, con frecuencia no es posible medir directamente la magnitud $W(\mathbf{r})$, sino que solo se dispone de medidas de observables relacionados con dicha magnitud a través de una ecuación o conjunto de ecuaciones del tipo de la Ec. (5.1). En este caso, dado que generalmente las funciones $L[\psi_i(\mathbf{r})]$ no son ortogonales, los coeficientes modales $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_M)$ no pueden obtenerse proyectando dichas funciones sobre las medidas, sino como resultado de minimizar la norma $\|L[W(\mathbf{r})] - L[Q_M(\mathbf{r})]\|$, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}_i} \left\{ \int_{\Sigma} \left\{ L[W(\mathbf{r})] - \sum_{i=1}^M \hat{a}_i L[\psi_i(\mathbf{r})] \right\}^2 d^N r \right\} = 0 \quad (5.8)$$

cuya solución es:

$$\sum_{j=1}^M \left\{ \hat{a}_j \int_{\Sigma} L[\psi_i(\mathbf{r})] L[\psi_j(\mathbf{r})] d^N r \right\} - \int_{\Sigma} L[\psi_i(\mathbf{r})] L[W(\mathbf{r})] d^N r = 0 \quad (5.9)$$

La expresión anterior es un sistema lineal de ecuaciones cuya solución proporciona los coeficientes $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_M)$. La presencia del término cruzado no nulo para las funciones $L[\psi_i(\mathbf{r})]$ indica que de esta forma no se podrían obtener los coeficientes modales independientemente proyectando las medidas $L[W(\mathbf{r})]$ sobre las funciones $L[\psi_i(\mathbf{r})]$.

Seguidamente se describirá un modelo de estimación modal ortogonal que soluciona el acoplamiento anterior a partir de medidas de magnitudes que se pueden relacionar con la fase por medio de un operador lineal L . Utilizando el Teorema de Green generalizado [170] e introduciendo un conjunto de funciones auxiliares, se obtendrá una expresión para los coeficientes modales como suma de la proyección de las medidas en el dominio sobre dichas funciones y de la contribución de medidas en el contorno, apareciendo este último término en el caso de operadores de tipo diferencial. Este tipo de representación nos permitirá analizar de una forma sencilla e intuitiva la influencia de las condiciones de contorno en la estimación de fase a partir de medidas del gradiente axial de intensidad.

5.3.1. Estimación modal mediante proyectores ortogonales

Haciendo uso del Teorema de Green generalizado y del operador adjunto de L (denotado aquí como \tilde{L}), es posible solucionar los problemas de acoplamiento modal anteriormente citados.

Si W y ξ son funciones de \mathbf{r} , el teorema de Green establece que:

$$\xi L(W) - W \tilde{L}(\xi) = \nabla \cdot \mathbf{P}(W, \xi, \partial W, \partial \xi, \dots) \quad (5.10)$$

donde ∇ es el operador gradiente y \mathbf{P} es lo que se conoce como un vector generalizado en términos del mismo vector unitario que describe a \mathbf{r} . En general, \mathbf{P} depende no solo de W y ξ , sino también de sus derivadas en el caso de operadores diferenciales y puede ser igual a cero para el caso de los integrales [170].

Integrando en ambos lados la Ec. (5.10) sobre un dominio Σ con contorno C y haciendo uso del Teorema de la divergencia en la parte derecha [169], se obtiene:

$$\int_{\Sigma} W \tilde{L}(\xi) d^N r = \int_{\Sigma} \xi L(W) d^N r - \oint_C \mathbf{P}(W, \xi, \partial W, \partial \xi, \dots) d\mathbf{l} \quad (5.11)$$

siendo $d\mathbf{l}$ un elemento de contorno de dirección normal a C y sentido hacia fuera del dominio.

De este resultado se deduce que si existe un conjunto de funciones ξ_i tales que $\tilde{L}(\xi_i) = \psi_i$, puede resolverse la estimación modal ortogonal en términos de $L(W)$ una vez se evalúe el conjunto de funciones de peso o proyectores ortogonales, $\{\xi_i(\mathbf{r})\}$, y se conozcan las condiciones de contorno sobre $W(\mathbf{r})$ y sus derivadas para el caso de operadores diferenciales:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i &= \int_{\Sigma} W \psi_i d^N r = \int_{\Sigma} W \tilde{L}(\xi_i) d^N r \\ &= \int_{\Sigma} \xi_i L(W) d^N r - \oint_C \mathbf{P}(W, \xi, \partial W, \partial \xi, \dots) d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Si L representa un operador diferencial lineal como el Laplaciano o el operador gradiente, la integral de contorno de la Ec. (5.12) puede expresarse generalmente como una suma de productos de $W(\mathbf{r})$ y derivadas de las funciones ξ_i , y productos de las funciones ξ_i y derivadas normales de $W(\mathbf{r})$. Si se conocen todas las condiciones de contorno, puede llevarse a cabo la proyección modal directamente a través de la Ec. (5.12) utilizando cualquier solución particular de $\tilde{L}(\xi_i) = \psi_i$. Si no se conocen, tan solo se podrán calcular aquellos coeficientes modales cuyas funciones de peso asociadas obedezcan condiciones de contorno homogéneas que permitan que las integrales de contorno se anulen. Esto se traduce en que algunos de los coeficientes quedan indeterminados. Así ocurre, por ejemplo, con el coeficiente modal asociado al pistón en medidas de la pendiente del frente de onda, por lo que en este caso la fase se puede recuperar salvo una constante aditiva [171].

5.3.2. Ajuste modal a medidas de irradiancia

A continuación se desarrollará el método de los proyectores ortogonales para medidas del gradiente axial de irradiancia, caso en el que el operador lineal es de

tipo diferencial y tiene la forma $L \equiv \nabla \cdot (I\nabla)$. Como ya se comentó anteriormente los coeficientes modales se obtendrán teniendo en cuenta la contribución de las medidas en el dominio y las medidas en el contorno.

Considérese un haz paraxial propagándose a lo largo del eje óptico, z . La amplitud compleja escrita como $\sqrt{I(\mathbf{r}, z)}e^{i\frac{2\pi}{\lambda}W(\mathbf{r}, z)}$, con $\mathbf{r} = (x, y)$, donde $I(\mathbf{r}, z)$ representa la irradiancia, $W(\mathbf{r}, z)$ la fase y λ la longitud de onda, satisface la Ecuación de Transporte de Intensidad:

$$\nabla \cdot (I\nabla W) = -I'(0) \quad (5.13)$$

siendo ∇ el operador gradiente en el plano transversal xy , $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Si se conoce la irradiancia y su derivada axial instantánea en un plano z dado, la Ec. (5.13) puede resolverse para obtener $W(\mathbf{r}, z)$.

Particularizando el caso general introducido en la sección anterior, el método de las funciones de peso permitirá estimar la fase $W(\mathbf{r}, 0)$ conocidas medidas del observable $I'(0)$ en el interior, $\nabla \cdot (I\nabla W)$, y en la frontera, $W_r = \partial W / \partial n$.

Sea Σ un dominio simplemente conexo* en el plano xy con frontera C donde se medirá la irradiancia. Sin pérdida de generalidad se asumirá que Σ yace en el plano $z = 0$ con lo que la dependencia en z no se considerará a partir de ahora. La fase W se supone analítica en el dominio Σ . Se considerará $I(\mathbf{r}) > 0$ en Σ .

Teniendo en cuenta que, en este caso, el operador es autoadjunto [170], si se encuentra un conjunto de funciones de peso $\{\xi_i(\mathbf{r})\}$ que obedezcan:

$$L(\xi_i) = \nabla \cdot (I\nabla \xi_i) = \psi_i \quad (5.14)$$

donde ψ_i representan el conjunto de funciones base ortonormales en Σ (Ec. (5.6)), se puede hacer uso del Teorema de Green generalizado y obtener los coeficientes de la función de aproximación (5.2) de forma independiente a través de la siguiente expresión:

$$a_i = \int_{\Sigma} \xi_i I'(0) d\Sigma + \oint_C W I \nabla \xi_i d\mathbf{l} - \oint_C I \xi_i \nabla W d\mathbf{l} \quad (5.15)$$

La Ec. (5.15) ilustra de una forma muy apropiada el papel de las condiciones de contorno a la hora de recuperar la fase. En primer lugar, se desprende que para determinar la fase de forma única no solo es necesario medir el gradiente axial de la irradiancia en el dominio, sino también deberán conocerse la fase y su derivada normal en el contorno. En segundo lugar, se deduce que la posibilidad de eliminar la necesidad de las medidas de frontera dependerá de las condiciones de contorno que

*Un dominio conexo por caminos se dice que es simplemente conexo si cualquier curva cerrada sencilla puede encogerse continuamente a un punto en el dominio.

cumplan las funciones de peso ξ_i y del tipo de distribución de intensidad en el plano de medida.

5.4. Análisis de la necesidad de las medidas en el contorno

En la § 5.2 se mencionaron algunos algoritmos de recuperación de fase a partir de medidas de irradiancia clasificados según proporcionen la fase o en aproximación zonal o en aproximación modal. Entre los que permiten estimar la fase de forma modal, se desarrolló en la § 5.3 el método de los proyectores ortogonales, que resuelve algunos de los problemas asociados a otros métodos y, especialmente, el problema de la no ortogonalidad en la obtención de los coeficientes modales.

La fórmula dada para los coeficientes modales se caracteriza porque es muy intuitiva, en el sentido de que separa de forma clara y sencilla la contribución de las medidas en el dominio de la contribución de las medidas en el contorno. Esto permitirá abordar el principal objetivo de este capítulo, que es analizar la necesidad de las medidas de frontera en el problema de recuperación de fase basado en la ETI, es decir, aclarar en qué casos dichas medidas son imprescindibles para recuperar la fase de forma única. Asimismo, se verá bajo qué condiciones se puede minimizar su contribución, de utilidad en el caso de que solo puedan obtenerse medidas de contorno muy imprecisas.

En esta sección se demostrará que la base elegida para desarrollar el frente de onda y la distribución de irradiancia en el plano de medida influyen de forma determinante a la hora de poder asegurar que coeficientes modales se pueden obtener de forma exacta sin necesidad de medidas en la frontera. La región de medida considerada para realizar el estudio corresponde a un dominio circular de radio unidad.

Primero, analizaremos el problema de contorno para el caso de la Técnica de Curvatura, que corresponde a la solución de la ETI cuando la intensidad es constante en el plano de recuperación, y continuaremos estudiándolo para dos tipos de distribuciones de irradiancia no uniforme con simetría rotacional: perfil gaussiano y perfil parabólico truncado.

5.4.1. Distribución uniforme de irradiancia

A continuación se va a analizar la necesidad de las condiciones de contorno para el caso de la conocida Técnica de Curvatura. Esta situación corresponde a una distribución de irradiancia uniforme en el plano de medida, siendo la ETI una ecuación de Poisson con condición de contorno de Neumann (Ec. (1.3)).

En la § 5.3.2 se concluyó que para evaluar cada coeficiente es necesario conocer la fase, W , y su derivada normal en la frontera, W_r , con el fin de obtener solución única al problema. Particularizando la Ec. (5.15) al caso de intensidad constante en el dominio y si las funciones de peso obedecen también la condición de contorno de Neumann $\partial\xi_k(\rho, \theta)/\partial\rho = 0$ en C , con $\rho \in (0, 1)$ y $\theta \in (0, 2\pi)$, se obtiene la expresión de los coeficientes modales en función de las medidas proporcionadas por un sensor de curvatura:

$$a_k = - \int_{\Sigma} \xi_k \nabla^2 W d\Sigma - \oint_C \xi_k \nabla W dl \quad (5.16)$$

La estimación de coeficientes modales sin necesidad de medidas de contorno es posible, únicamente, para el caso de funciones base ψ_i cuyas funciones de peso asociadas satisfagan la condición de contorno $\xi_k(\rho, \theta) = 0$ en C :

$$a_k = - \int_{\Sigma} \xi_k \nabla^2 W d\Sigma \quad (5.17)$$

La base elegida para desarrollar la fase juega un papel fundamental a la hora de obtener funciones de peso que cumplan dicha restricción. En las líneas siguientes, se calcularán las funciones de peso para tres conjuntos de funciones base diferentes, todas ellas ortogonales en el círculo de radio unidad, con el objeto de determinar qué información se puede obtener en la Técnica de Curvatura sin datos en la frontera.

Condiciones de contorno para las funciones de peso asociadas a polinomios de Zernike

Las funciones de peso asociadas a los polinomios de Zernike, Z_k , cuando estos se utilizan como un conjunto de funciones base ortonormales, pueden calcularse a partir de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \xi_k(\rho, \theta) = Z_k(\rho, \theta) \quad (5.18)$$

con la condición de contorno $\partial\xi_k(\rho, \theta)/\partial\rho = 0$ en la circunferencia, siendo $\rho \in (0, 1)$ y $\theta \in (0, 2\pi)$ las coordenadas polares planas en el círculo de radio unidad.

A continuación se verá qué implica el hecho de imponer la condición de contorno adicional $\xi_k(\rho = 1, \theta) = 0$ en el cálculo de las funciones de peso. (En lo que sigue se utilizará la notación de Noll para los polinomios de Zernike [157]).

(a) **Modos rotacionalmente simétricos, Z_n^0 , con n par**

Los polinomios de Zernike que describen los modos rotacionalmente simétricos se pueden obtener a partir de la siguiente expresión:

$$Z_n^0 = \sqrt{n+1} \sum_{s=0}^{n/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[\left(\frac{n}{2} - s\right)!\right]^2} \quad (5.19)$$

Una solución de la forma:

$$\xi_n^0(\rho) = \int_1^\rho \frac{1}{\rho'} \left[\int_1^{\rho'} Z_n^0(\rho'') \rho'' d\rho'' \right] d\rho' \quad (5.20)$$

satisface la Ec. (5.18) y las condiciones de contorno de Neumann y de Dirichlet, $[d\xi_n^0(\rho)/d\rho]_{\rho=1} = \xi_n^0(\rho=1) = 0$, a excepción de la función de peso asociada al pistón, con $n = m = 0$. Por tanto, los modos rotacionalmente simétricos, excepto el pistón, pueden calcularse midiendo tan solo el Laplaciano de la fase.

(b) **Modos no simétricos, Z_n^m , $m \neq 0$**

Los polinomios de Zernike que describen los modos no simétricos se obtienen a partir de la siguiente fórmula:

$$Z_n^m = \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} \rho^{n-2s} \times \begin{cases} \text{sen}(m\theta) & \text{si } m > 0 \\ \text{cos}(m\theta) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

La función de peso se puede calcular en este caso mediante el método de separación de variables, obteniéndose:

$$\xi_n^m(\rho, \theta) = \left[A\rho^{|m|} + B\rho^{-|m|} + \frac{\rho^{|m|}}{2|m|} \int_0^\rho \rho'^{(1-|m|)} Z_n^{|m|}(\rho') d\rho' - \frac{\rho^{-|m|}}{2|m|} \int_0^\rho \rho'^{(1+|m|)} Z_n^{|m|}(\rho') d\rho' \right] \begin{cases} \text{sen}(m\theta) & \text{si } m > 0 \\ \text{cos}(m\theta) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

donde A y B son constantes arbitrarias (correspondientes a la solución de la ecuación homogénea). Con el fin de obtener soluciones analíticas en todo el dominio, se impone $B = 0$.

(b.1) **Modos cuya frecuencia azimutal, $|m|$, es diferente a la radial, n**

Si en la expresión (5.22) se toma:

$$A = -\frac{1}{2|m|} \int_0^1 \rho^{(1-|m|)} Z_n^{|m|}(\rho) d\rho \quad (5.23)$$

se puede comprobar fácilmente que las funciones de peso verifican ambas condiciones homogéneas, $[\partial \xi_n^m(\rho, \theta) / \partial \rho]_{\rho=1} = 0$ y $\xi_n^m(\rho = 1, \theta) = 0$, y, por tanto, estos modos también pueden calcularse a partir de medidas de la curvatura del frente solamente.

(b.2) **Modos cuya frecuencia azimutal, $|m|$, es igual a la radial, n : $Z_{|m|}^m$**

Este tipo de modos corresponden a funciones armónicas, solución de la ecuación de Poisson, separables en parte radial y parte angular. La expresión de las funciones de peso se reduce a:

$$\xi_{|m|}^m(\rho, \theta) = \left[A\rho^{|m|} + \frac{\rho^{|m|+2}}{4(|m|+1)} \right] \begin{cases} \text{sen}(m\theta) & \text{si } m > 0 \\ \text{cos}(m\theta) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

siendo:

$$A = -\frac{(|m|+2)}{4|m|(|m|+1)} \quad (5.25)$$

para obtener $[\partial \xi_{|m|}^m(\rho, \theta) / \partial \rho]_{\rho=1} = 0$. Sin embargo, en este caso $\xi_{|m|}^m(\rho = 1) = -1/[2|m|(|m|+1)] \neq 0$, implicando que para estimar estos modos se necesitan medidas en el contorno, hecho esperable debido a su carácter armónico.

Por tanto, es posible recuperar todos los coeficientes modales del desarrollo de la fase en polinomios de Zernike a partir de solamente datos de curvatura del frente de onda, a excepción de aquellos correspondientes a polinomios de frecuencia azimutal y radial iguales, es decir, los modos armónicos. En la Tabla 5.1 se incluyen algunas funciones de peso correspondientes al desarrollo de la fase en una base de polinomios de Zernike e iluminación uniforme en $z = 0$.

Condiciones de contorno para las funciones de peso asociadas a las funciones pseudoanalíticas de Karhunen-Loève, $K_i(\rho, \theta)$

En aplicaciones relacionadas con turbulencias atmosféricas, los polinomios de Zernike no son un conjunto óptimo de funciones base porque sus coeficientes

n	m	$Z_n^m(\rho, \theta)$	$\xi_n^m(\rho, \theta)$
1	1	$2\rho \sin(\theta)$	$-\frac{1}{4I_o} (3\rho - \rho^3) \sin(\theta)$
2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	$-\frac{\sqrt{3}}{8I_o} (-\rho^4 + 2\rho^2 - 1)$
2	2	$\sqrt{6}\rho^2 \sin(2\theta)$	$-\frac{\sqrt{6}}{12I_o} (2\rho^2 - \rho^4) \sin(2\theta)$
3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - \rho) \sin(\theta)$	$-\frac{\sqrt{8}}{8I_o} (\rho^5 - 2\rho^3 + \rho) \sin(\theta)$
3	3	$\sqrt{8}\rho^3 \sin(3\theta)$	$-\frac{\sqrt{8}}{48I_o} (-3\rho^5 + 5\rho^3) \sin(3\theta)$
4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	$-\frac{\sqrt{5}}{4I_o} (-\rho^6 + 9\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$
4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin(2\theta)$	$-\frac{\sqrt{10}}{8I_o} (-\rho^6 + 2\rho^4 - \rho^2) \sin(2\theta)$

Tabla 5.1: Polinomios de Zernike y funciones de peso asociadas para iluminación uniforme.

asociados no son independientes estadísticamente. La necesidad de realizar un estudio adecuado de las turbulencias atmosféricas llevó a la búsqueda de unas funciones base cuyos coeficientes asociados no estuvieran correlacionados. Estas funciones son las denominadas funciones de Karhunen-Loève.

Al igual que los polinomios de Zernike, las funciones de Karhunen-Loève pueden factorizarse en productos de funciones radiales y angulares [172]:

$$K_l(\rho, \theta) = \Lambda_p^q(\rho) \Theta^q(\theta) \quad (5.26)$$

donde $\Theta^q(\theta) = \begin{cases} \sin(q\theta) & \text{si } q > 0 \\ \cos(q\theta) & \text{si } q < 0 \end{cases}$ y donde las partes radiales se obtienen resolviendo la ecuación integral:

$$\int_0^1 Y_q(\rho, \rho') \Lambda_p^q(\rho) d\rho = \langle \alpha_k^2 \rangle \Lambda_p^q(\rho') \quad (5.27)$$

siendo $\langle \alpha_k^2 \rangle$ la varianza normalizada de los coeficientes de Karhunen-Loève e $Y_q(\rho, \rho')$ la función núcleo q -ésima dependiente de la función de estructura normalizada. Para cada Y_q dada existe un conjunto de autofunciones ortonormales, $\{\Lambda_p^q(\rho)\}$, cuya condición de ortogonalidad es:

$$\int_0^1 \Lambda_p^q(\rho) \Lambda_{p'}^q(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2} \delta_{pp'} \quad (5.28)$$

La solución de la Ec. (5.27), aun no siendo analítica, admite una buena aproximación en serie de potencias de la forma:

$$\Lambda_p^q(\rho) = \rho^q \sum_{s=0}^{\infty} g_s \rho^{2s} \quad (5.29)$$

p	q	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
1	0	2,1558	6,4545	4,1230	1,3654	0,2192	0,0320		
1	1	1,5545	0,2444	0,0438					
1	2	3,2273	2,7488	1,0245	0,1758	0,0269			
1	3	6,0555	8,1895	4,5994	1,3254	0,2139			
1	4	10,729	19,053	14,215	5,7788	1,3699	0,1279		
2	0	3,1888	32,765	85,091	97,412	62,759	24,974	6,1831	0,7158
2	1	6,5287	19,114	17,922	8,6614	2,3235	0,3526		
2	2	16,382	56,727	73,054	50,190	20,788	5,2854	0,6234	

Tabla 5.2: Coeficientes de ajuste de la parte radial de las funciones pseudoanalíticas de Karhunen-Loève [172].

donde la rápida convergencia a cero de los coeficientes g_s hace posible obtener una aproximación polinómica precisa de las funciones $\{\Lambda_p^q(\rho)\}$. En la Tabla 5.2 aparecen tabulados los coeficientes asociados a funciones de Karhunen-Loève, tomando una solución aproximada de la Ec. (5.27) truncando (5.29) a 8 términos.

Teniendo en cuenta entonces que la parte radial de las funciones de Karhunen-Loève admite un desarrollo analítico, esta se puede también desarrollar como combinación lineal de polinomios de Zernike con frecuencias azimutales idénticas de la forma:

$$\Lambda_p^q(\rho) = \sum_{k=2}^{\infty} U_{kl} R_n^m(\rho) \quad (5.30)$$

donde m representa la frecuencia azimutal, el índice k ordena los polinomios de Zernike y se relaciona con los índices (n, m) , y el índice l ordena las funciones de Karhunen-Loève y se relaciona con los índices (p, q) . Además, en ciertas aplicaciones esta función se puede aproximar por medio de un número finito de polinomios de Zernike, con lo que la serie anterior aparece truncada. Las funciones de Karhunen-Loève aproximadas de esta forma se llaman funciones pseudoanalíticas de Karhunen-Loève.

Como consecuencia, se pueden calcular las funciones de peso para este caso como combinación lineal de las funciones de peso previamente calculadas en el apartado anterior. Sin embargo, este tipo de aproximación para toda función de Karhunen-Loève, a excepción de las rotacionalmente simétricas, contiene siempre un polinomio de Zernike con carácter armónico, de forma que no pueden evaluarse sin la señal de

k	m	\mathcal{U}_{km}	k	m	\mathcal{U}_{km}
0	0	1*	2	1	$y^3 + 3x^2y - y$
1	0	x *	1	2	$x^3 + 3xy^2 - x$
0	1	y *	2	2	$5x^4 + 5y^4 - 6x^2 - 6y^2 + 18x^2y^2 + 1$
1	1	xy *	3	0	$5x^3 + 3xy^2 - 3x$
2	0	$3x^2 + y^2 - 1$	0	3	$5y^3 + 3x^2y - 3y$
0	2	$x^2 + 3y^2 - 1$	3	1	$5x^3y + 3xy^3 - 3xy$

Tabla 5.3: Polinomios de Apell y Kampé de Fériet.

frontera. Por tanto, si se escogen las funciones de Karhunen-Loève para desarrollar la fase, a partir únicamente de medidas del Laplaciano, solo se pueden recuperar los modos con $m = 0$.

Condiciones de contorno para las funciones de peso asociadas a polinomios de Appell y Kampé de Fériet, $\mathcal{U}_i(x, y)$

Estos polinomios nunca han sido utilizados en Óptica, pero aquí nos servirán para ilustrar otra faceta más del problema de contorno que representa la recuperación de fase por medio de la ETI. Constituyen una base ortogonal en el círculo de radio unidad, pero no todos son separables en parte radial y parte angular. Obedecen la expresión general [173]:

$$\mathcal{U}_{km} = \frac{\partial^{k+m}}{\partial x^k \partial y^m} (x^2 + y^2 - 1)^{k+m} \quad (5.31)$$

En la Tabla 5.3 figura una lista de los 12 primeros polinomios de Apell y Kampé de Fériet, señalándose los que tienen carácter armónico por medio del símbolo *. Se puede demostrar fácilmente que no existen funciones de peso asociadas a estos polinomios tales que se anulen en el contorno porque el contenido armónico y el no armónico no está separado en esta base de polinomios. Además, para algunos de ellos tampoco existe solución al problema de Neumann o Dirichlet y, por tanto, se necesitan ambas condiciones de contorno para resolver el problema de acuerdo con el método de los proyectores ortogonales.

De este modo, se concluye que dependiendo de la base ortogonal elegida para

desarrollar la fase, existe la posibilidad de recuperar algunos de los modos sin necesidad de medidas de la derivada del frente de onda en la frontera.

Se ha demostrado que cuando la base está constituida por polinomios de Apell y Kampé de Fériet se necesitan condiciones de contorno de Neumann y de Dirichlet para recuperar la fase sin ambigüedades. En cambio, cuando la fase se desarrolla basándose en funciones pseudoanalíticas de Karhunen-Loève, solo se puede calcular la contribución de los modos rotacionalmente simétricos sin medidas en la frontera. Por último, para una base de polinomios de Zernike, solo los modos armónicos necesitan condiciones de frontera para poder ser recuperados.

La máxima información acerca del frente de onda se puede obtener sin condiciones de contorno mediante la elección de una base ortogonal para desarrollar la fase que distinga modos armónicos y no armónicos, pues la información de la parte armónica de la fase se encuentra exclusivamente en la frontera. Los polinomios de Zernike son una base que reúne esta característica, además de la de su ortogonalidad en el círculo de radio unidad. En realidad, sin haber llevado a cabo un estudio teórico riguroso, sino por simple inspección de los primeros modos, I. Han ya había observado que desarrollando la fase en una base de polinomios de Zernike podía obtener el contenido armónico a partir de la medida de W_r en la frontera y del contenido no armónico obtenido midiendo $\nabla^2 W$ en el interior [136].

Ya que existen bases para las que algunos modos pueden obtenerse sin necesidad de medidas en el contorno, se concluye que algunas de las aberraciones presentes en el frente de onda, relacionadas con la parte no armónica, pueden estimarse usando solo información del Laplaciano de la fase. En la sección siguiente, se verá si la elección de una distribución adecuada de irradiancia en el plano de medida, permite estimar la fase sin necesidad de medidas en el contorno, para lo cual se analizarán dos ejemplos de distribuciones de irradiancia.

5.4.2. Distribución no uniforme de irradiancia

En esta sección se resolverá la ETI para distribuciones de irradiancia no uniformes en el plano de medida. Nuestro objetivo es estudiar la posibilidad de obtener la fase de forma única sin necesidad de medidas en la frontera dependiendo del comportamiento local de la distribución de irradiancia en el contorno. Con el fin de simplificar los cálculos, pero sin pérdida de generalidad en las conclusiones principales, se analizarán dos distribuciones rotacionalmente simétricas que corresponden a los dos perfiles de intensidad siguientes:

(a) Perfil de intensidad gaussiano:

$$I(\rho) = \begin{cases} I_0 e^{-\beta\rho^2} & \rho \leq 1 \\ 0 & \rho > 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

(b) Perfil de intensidad parabólico:

$$I(\rho) = \begin{cases} I_0 (1 - \rho^2) & \rho \leq 1 \\ 0 & \rho > 1 \end{cases} \quad (5.33)$$

Sea cual sea la distribución de irradiancia en el plano de recuperación, las fases que no serían detectables por medio de medidas de irradiancia en el interior del dominio son aquellas que sean solución de la ecuación homogénea, es decir, aquellas que verifiquen:

$$\nabla \cdot (I \nabla W) = 0 \quad (5.34)$$

pues $I'(0) = 0$, con lo que los coeficientes modales solo podrían calcularse en función de medidas de W o de W_r en la frontera.

Perfil gaussiano de intensidad

En la Ref. [23], Teague propone la elección de un perfil de intensidad que caiga prácticamente a cero en la frontera, con el fin de minimizar la influencia del contorno en el proceso de recuperación de fase a partir de medidas de irradiancia en ausencia de medidas en el borde. En concreto, se propone un perfil de la forma $I_0 e^{-\beta\rho^{2N}}$. Para realizar en este trabajo un estudio cualitativo riguroso de la necesidad de las medidas en el contorno cuando la distribución de irradiancia tiene esta forma, será suficiente con escoger un perfil gaussiano ($N = 1$).

Entonces, supóngase que la distribución de irradiancia en el plano de recuperación viene determinada por el perfil gaussiano de la Ec. (5.32). Para cada polinomio de Zernike del desarrollo de la fase, resolveremos la ecuación que proporciona las funciones de peso, es decir:

$$\nabla \cdot \left[I_0 e^{-\beta\rho^2} \nabla \xi_n^m(\rho, \theta) \right] = Z_n^m(\rho, \theta) \quad (5.35)$$

Se distinguen dos casos:

(a) **Modos rotacionalmente simétricos** Z_n^0 , con n par

La función de peso asociada tiene la forma:

$$\xi_n^0(0) = \int_1^\rho \frac{e^{\beta\rho'^2}}{I_0\rho'} \left(\int_1^{\rho'} \rho'' Z_n^0(\rho'') d\rho'' \right) d\rho' \quad (5.36)$$

y satisface la Ec. (5.35) con condiciones de contorno de Neumann y de Dirichlet: $[d\xi_n^0(\rho)/d\rho]_{\rho=1} = \xi_n^0(\rho=1) = 0$.

De esta forma, para recuperar los modos rotacionalmente simétricos, salvo el pistón, solo son necesarias medidas del gradiente axial de intensidad en el dominio, de acuerdo con la ecuación:

$$a_k = - \int_{\Sigma} \xi_k I'(0) d\Sigma \quad (5.37)$$

(b) **Modos no simétricos** Z_n^m

En este caso, la solución de la Ec. (5.35) no es tan sencilla como la anterior y, para calcularla, es necesario simplificar la ecuación realizando diversos cambios de variable. Primero resolveremos la ecuación homogénea y después encontraremos una solución particular con el fin de hallar la solución general de la ecuación de las funciones de peso.

Suponiendo que las funciones de peso son factorizables en parte radial y parte angular, $\xi_n^m(\rho, \theta) = R_n^m(\rho) \Theta(m\theta)$ con $\Theta(m\theta) = \begin{cases} \text{sen}(m\theta) & \text{si } m > 0 \\ \text{cos}(m\theta) & \text{si } m < 0 \end{cases}$, el problema se reduce a encontrar la solución de la ecuación homogénea para la parte radial:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho(1 - 2\rho^2 \alpha^2) \frac{dR}{d\rho} - m^2 R = 0 \quad (5.38)$$

es decir:

$$R(\rho) = \rho^{|m|} \phi \left(\frac{|m|}{2}, |m| + 1; \beta\rho^2 \right) \quad (5.39)$$

donde ϕ es la función hipergeométrica confluyente [159].

Por otra parte, se puede demostrar que:

$$\xi_n^m(\rho, \theta) = e^{\beta\rho^2} P_n^m(\rho) \Theta(m\theta) \quad (5.40)$$

es una solución particular de la Ec. (5.35), donde $P_n^m(\rho)$ es un polinomio de grado n que se puede calcular por el método de variación de parámetros [150]

y, por tanto, una función de la forma:

$$\xi_n^m(\rho, \theta) = \left[A\rho^{-|m|} \phi\left(\frac{|m|}{2}, |m| + 1; \beta\rho^2\right) + B\rho^{|m|} \phi\left(\frac{|m|}{2}, |m| + 1; \beta\rho^2\right) + e^{\beta\rho^2} P_n^m(\rho) \right] \Theta(m\theta) \quad (5.41)$$

es la solución de la Ec. (5.35).

Las constantes A y B se eligen dependiendo de las condiciones de contorno necesarias para resolver el problema y de las propiedades de las funciones de peso. Por ejemplo, las funciones de peso han de poderse integrar fácilmente y, por eso, las soluciones que se buscan son analíticas. Así, se toma $A = 0$, mientras que B se elige de forma que ξ_n^m verifique condiciones de contorno de Neumann, es decir, $[\partial\xi_n^m(\rho, \theta)/\partial\rho]_{\rho=1} = 0$. Una vez escogida B de esta forma, se puede demostrar que ξ_n^m no verifica simultáneamente la condición de Dirichlet, es decir, $\xi_n^m(\rho = 1, \theta) \neq 0$. Por tanto, se necesitan condiciones de contorno de Neumann para la fase, con el fin de poder evaluar la contribución de este tipo de modos de acuerdo con la expresión:

$$a_k = - \int_{\Sigma} \xi_k I'(0) d\Sigma - \oint_C W_r I \xi_k d\theta \quad (5.42)$$

De estos resultados se concluye que cuando la distribución de irradiancia en el plano de recuperación se puede describir por un perfil gaussiano, se necesitan medidas de la pendiente radial de la fase en la frontera con el fin de encontrar solución única analítica al problema. En la Tabla 5.4 se incluye un listado de las funciones de peso para los 12 primeros polinomios de Zernike, correspondientes a esta distribución de irradiancia.

No obstante, en la Ec. (5.42) se observa que el comportamiento del producto $I(\rho = 1, \theta) \xi_k(\rho = 1, \theta)$ juega un papel muy importante en la contribución de la frontera en la fase recuperada. Es decir, la integral de frontera $\oint_C W_r I \xi_k d\theta$ puede llegar a ser despreciable respecto de la integral de superficie en el dominio, para valores lo suficientemente pequeños del producto $I \xi_k$. En la Figura 5.1 se muestra el comportamiento de la parte radial de dicho producto en la frontera para los modos armónicos $\xi_{|m|}^m$ en función del parámetro β , que define la anchura de la intensidad gaussiana. A medida que el parámetro β de la gaussiana aumenta, el producto $I(\rho = 1) R_{|m|}^m(\rho = 1)$ disminuye, con lo que para valores de β lo suficientemente grandes se puede despreciar la integral de contorno y estimar la fase de forma

n	m	$Z_n^m(\rho, \theta)$	$\xi_n^m(\rho, \theta)$
1	1	$2\rho \operatorname{sen}(\theta)$	$-\frac{\rho}{3I_0\beta} \left[(1 + 2\beta) \frac{\phi(\frac{1}{2}, 2; \beta\rho^2)}{\phi(\frac{3}{2}, 2; \beta)} e^\beta - e^{\beta\rho^2} \right] \operatorname{sen}(\theta)$
2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	$\frac{\sqrt{3}}{4I_0\beta^2} \left[e^\beta - (1 + \beta - \beta\rho^2) e^{\beta\rho^2} \right]$
2	2	$\sqrt{6}\rho^2 \operatorname{sen}(2\theta)$	$-\frac{\sqrt{6}}{8I_0\beta} \rho^2 \left[(1 + \beta) \frac{\phi(1, 3; \beta\rho^2)}{\phi(2, 3; \beta)} e^\beta - e^{\beta\rho^2} \right] \operatorname{sen}(2\theta)$
3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - \rho) \operatorname{sen}(\theta)$	$-\frac{\sqrt{8}}{30I_0\beta^2} \left\{ (-2\beta^2 + 5\beta - 6) \frac{\phi(\frac{1}{2}, 2; \beta\rho^2)}{\phi(\frac{3}{2}, 2; \beta)} \rho e^\beta - [9\beta\rho^3 - (10\beta + 6)\rho] e^{\beta\rho^2} \right\} \operatorname{sen}(\theta)$
3	3	$\sqrt{8}\rho^3 \operatorname{sen}(3\theta)$	$-\frac{\sqrt{8}}{30I_0\beta} \rho^3 \left[(3 + 2\beta) \frac{\phi(\frac{3}{2}, 4; \beta\rho^2)}{\phi(\frac{5}{2}, 4; \beta)} e^\beta - 3e^{\beta\rho^2} \right] \operatorname{sen}(3\theta)$
4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	$\frac{\sqrt{5}}{4I_0\beta^3} \left\{ (\beta - 4) e^\beta - [(4 + 3\beta)\beta\rho^2 - 2\beta^2\rho^4 - (\beta^2 + 3\beta + 4)] e^{\beta\rho^2} \right\}$
4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \operatorname{sen}(2\theta)$	$-\frac{\sqrt{10}}{24I_0\beta^2} \left[(4 + 3\beta - \beta^2) \frac{\phi(1, 3; \beta\rho^2)}{\phi(2, 3; \beta)} \rho^2 e^\beta - (8\beta\rho^4 - 13\rho^2) e^{\beta\rho^2} \right] \operatorname{sen}(2\theta)$

Tabla 5.4: Polinomios de Zernike y funciones de peso asociadas para un perfil gaussiano de intensidad.

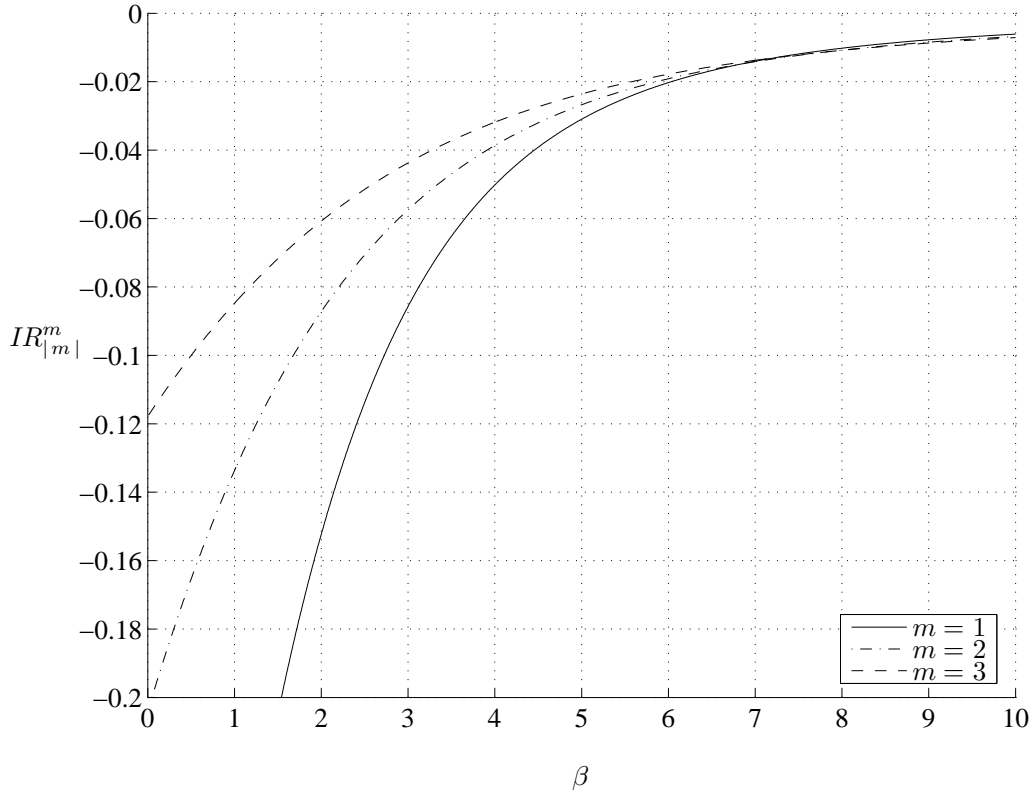


Figura 5.1: Representación del producto de la intensidad por la parte radial de la función de peso en la frontera, en función del parámetro β del perfil de la intensidad para tres modos armónicos.

aproximada por medio de los coeficientes dados por:

$$a_k \approx - \int_{\Sigma} \xi_k I' (0) d\Sigma \quad (5.43)$$

Es importante resaltar que el hecho de que β aumente equivale a que el valor del salto de la discontinuidad de intensidad de la frontera disminuya, lo que se deduce fácilmente teniendo en cuenta los límites laterales en $\rho = 1$ del perfil de intensidad considerado:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1^+} I(\rho) &= 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow 1^-} I(\rho) &= I_o e^{-\beta} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Esto justifica de forma rigurosa que sea posible reconstruir la fase sin la contribución de la frontera para los perfiles de intensidad que caen prácticamente a cero en el contorno propuestos por Teague [23].

Por último, cabe citar que, aunque se ha utilizado un desarrollo de la fase en polinomios de Zernike, los resultados se pueden extrapolar a cualquier base ortogonal

que separe los modos rotacionalmente simétricos de los no simétricos.

Perfil parabólico de intensidad

Dado el perfil de intensidad parabólico de la Ec. (5.33), las funciones de peso correspondientes se obtienen resolviendo la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\nabla \cdot [I_o (1 - \rho^2) \nabla \xi_n^m (\rho, \theta)] = Z_n^m (\rho, \theta) \quad (5.45)$$

donde $\xi_n^m (\rho, \theta) = R_n^m (\rho) \Theta (m\theta)$ con $\Theta (m\theta) = \begin{cases} \text{sen} (m\theta) & \text{si } m > 0 \\ \text{cos} (m\theta) & \text{si } m < 0 \end{cases}$.

La Ec. (5.45) es un problema de autovalores para el que existe una única solución analítica: $\xi_n^m (\rho, \theta) = Z_n^m (\rho, \theta) / \lambda_n^m$, donde λ_n^m son los autovalores correspondientes a las autofunciones $\xi_n^m (\rho, \theta)$. Dicho de otra forma, los polinomios de Zernike son las autofunciones de la Ec. (5.45). Por tanto, dado que $I (\rho = 1) \xi_n^m (\rho = 1) = 0$ e $I (\rho = 1) [\partial \xi_n^m / \partial \rho]_{\rho=1} = 0$, pues $I (\rho = 1) = 0$, las integrales de contorno de la Ec. (5.15) se anulan y, de esta forma, no es necesario ningún tipo de información en el contorno para encontrar solución única para la fase y los coeficientes se hallan de forma exacta por medio de:

$$a_k = - \int_{\Sigma} \xi_k I' (0) d\Sigma \quad (5.46)$$

Para este perfil y, en general, para cualquier perfil donde la intensidad caiga gradualmente hasta igualarse a cero en el contorno, las medidas en la frontera no son necesarias para recuperar la fase de forma única a excepción del pistón [146].

En este momento, después del estudio realizado a lo largo de este capítulo, queremos destacar la importancia de la base escogida para desarrollar la fase y también de la forma del perfil de intensidad en el plano de recuperación a la hora de determinar la necesidad y el peso de las medidas en el contorno al recuperar la fase.

Por un lado, hemos deducido que existen bases de polinomios que nos permiten separar la información recuperada en el interior del dominio de la obtenida en la frontera. A partir de aquí se pueden contruir algoritmos, como el de I. Han, que aprovechen esta característica.

Por otro lado, también hemos visto que la forma de la distribución de irradiancia en el plano de recuperación fija el peso de las medidas en el contorno respecto

de las medidas en el interior. Este parámetro da la posibilidad de reducir el peso de las medidas del contorno en la recuperación, generalmente cargadas de más incertidumbre. Por ejemplo, si el perfil cae prácticamente a cero en el borde, podría realizarse una reconstrucción precisa del frente sin necesidad de medidas en la frontera y únicamente con medidas en el interior si la contribución a la distorsión de los modos que se obtienen con medidas en la frontera fuera lo suficientemente pequeña. Incluso, si la irradiancia cae continuamente hasta hacerse idénticamente cero en el borde de la pupila, entonces puede recuperarse la fase de forma única solo con medidas de la derivada axial en el interior de la pupila.

Conclusiones

A lo largo de esta memoria se han ido describiendo las soluciones que proponemos para facilitar la puesta en práctica de los sensores de curvatura y para mejorar su respuesta en sus distintas aplicaciones. A continuación recordamos las principales conclusiones:

1. Se ha diseñado un novedoso procedimiento que orienta en la selección de la distancia entre planos de irradiancia más apropiada en función del ruido de medida y de las características de los frentes de onda. Adicionalmente, este método objetivo proporciona una estimación del error de la medida y es lo suficientemente general como para ser utilizado en cualquier aplicación del sensor de curvatura.

La evolución axial de la irradiancia en entornos del interior de la abertura donde el frente de onda se aproxima de forma precisa por una superficie cuadrática proporcionó la información necesaria para calcular la varianza de la curvatura local del frente en función de la posición de los planos. Para calcular la varianza de la derivada normal local en el contorno, fue necesario modelar, además, la dinámica local del borde de la región iluminada en entornos de la frontera de la misma clase. Con este modelo se ha demostrado que en el proceso de deformación de la zona iluminada intervienen no solo las inclinaciones locales del frente de onda, sino también significativamente sus curvaturas locales.

Los entornos del frente de onda con forma de cilindro parabólico de curvatura máxima se revelan como los que más limitan la precisión de la recuperación de la curvatura. La posición de los planos que minimiza la varianza de la curvatura local estimada en este tipo de entornos garantiza los mejores resultados globalmente en la totalidad de la abertura. Teniendo esto en cuenta, se ha calculado una ecuación analítica que proporciona la posición óptima de los planos, conocidos únicamente el nivel de ruido de las medidas de irradiancia y el valor máximo de las curvaturas locales del frente. Por su parte, la recuperación

más imprecisa de la derivada normal se da también en los entornos del borde con forma de cilindro parabólico de curvatura máxima, a lo que hay que añadir que tengan inclinación máxima. La minimización del error de la derivada normal local recuperada en entornos de esta clase proporciona la distancia entre planos que garantiza los mejores resultados globalmente para todo el perímetro de la pupila. En coherencia con el comportamiento observado experimentalmente, se ha verificado que el rendimiento óptimo del sensor se obtiene para una posición de los planos intermedia entre el plano de recuperación de fase y el comienzo de las cáusticas.

Se ha visto que el modelo en diferencias finitas adoptado para aproximar la derivada axial de la irradiancia determina la calidad de respuesta del sensor, siendo la fórmula central el modelo más preciso.

Se ha demostrado que al estimar la derivada normal con el método directo, la utilización de medidas en planos situados simétricamente a ambos lados del plano de recuperación proporciona los mejores resultados.

También se ha comprobado que la elección del tamaño de la región de frontera en el método indirecto modifica sustancialmente la precisión de la derivada normal recuperada. En concreto, se ha visto que la respuesta óptima del sensor en la frontera exige determinar no solo la posición óptima de los planos, sino también una dimensión radial de la región de frontera de tamaño similar al máximo desplazamiento radial del borde de la región iluminada en la posición óptima. Adicionalmente, una vez ajustado el tamaño de la región de frontera, se ha comprobado que la selección de la posición óptima de los planos es más flexible para las fórmulas central y de Roddier que para las fórmulas de Newton.

El procedimiento de optimización se ha ilustrado con un ejemplo en el campo de la Óptica Astronómica y suponiendo que los frentes de onda turbulentos siguen estadística de Kolmogorov, que ha mostrado un excelente acuerdo entre el resultado proporcionado por el método propuesto y la posición de los planos utilizada en la práctica y que delata que los mejores resultados para la medida en la frontera se obtienen utilizando una posición de los planos diferente a la de la medida en el interior.

2. Se ha propuesto una nueva configuración del sensor de curvatura, donde la derivada axial se estima utilizando fórmulas en diferencias finitas que emplean más de dos planos de irradiancia. El peso de cada plano de irradiancia en la

fórmula se optimiza para limitar el efecto del ruido de medida. La utilización de más de dos planos de irradiancia, por su parte, se traduce en una disminución del error de no linealidad del algoritmo, mayor conforme aumenta el número de planos. Con ello se aporta un nuevo punto de vista en la búsqueda de métodos para reducir la influencia del ruido de medida y también el error de modelado o de no linealidad del algoritmo.

Se ha comprobado la aplicabilidad del método de selección de la posición óptima para fórmulas en diferencias finitas con más de dos planos. Esto ha permitido valorar la eficiencia de un sensor que funcione con múltiples planos en comparación con las configuraciones típicas de los sensores de curvatura con solo dos medidas de irradiancia. Los resultados obtenidos son optimistas para aquellas aplicaciones donde no haya limitación en el nivel de luz disponible, mientras que no suponen una mejora en aquellas donde se disponga solo de un número finito de fotones.

3. Se ha demostrado que en las técnicas de recuperación de fase basadas en la ETI, esta se puede estimar de forma única sin necesidad de información en el contorno solo para aquellas distribuciones de irradiancia en el plano de recuperación que caigan continuamente a cero en la frontera. En general, una caída abrupta exige utilizar medidas en el contorno para recuperar la fase completamente y sin ambigüedades.

Se ha demostrado, además, que para distribución de irradiancia uniforme en el plano de recuperación, se puede obtener la máxima información del frente de onda sin medidas en la frontera utilizando un modelo de estimación modal en el que la base sean los polinomios de Zernike o, en general, cualquier base de polinomios donde se separe el comportamiento armónico del no armónico.

Apéndice A

La Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI)

A continuación deduciremos la Ecuación de Transporte de Intensidad (ETI) a partir de la Ecuación Paraxial de Ondas y calcularemos la versión para haces que atraviesan una pupila en el plano $z = 0$.

Consideremos una onda electromagnética monocromática que se propaga en la dirección z , cuya amplitud compleja viene dada por:

$$u(\mathbf{r}, z) = A(\mathbf{r}, z) e^{ikW(\mathbf{r}, z)} e^{ikz} \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbf{r} = (x, y)$, $W(\mathbf{r}, z)$ es la fase en el plano z , k es el número de ondas y $A(\mathbf{r}, z) = \sqrt{I(\mathbf{r}, z)}$, siendo $I(\mathbf{r}, z)$ la intensidad de dicha onda en un plano z .

La amplitud compleja, $u(\mathbf{r}, z)$, es una solución de la Ecuación Paraxial de Ondas:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \nabla^2\right) u(\mathbf{r}, z) = 0 \quad (\text{A.2})$$

siendo $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ el laplaciano bidimensional, es decir:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \nabla^2\right) A(\mathbf{r}, z) e^{ikW(\mathbf{r}, z)} e^{ikz} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Operando se obtiene la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} & \left(-2k^2 A \frac{\partial W}{\partial z} + \nabla^2 A - kA^2 |\nabla W|^2\right) e^{ikW} \\ & + i \left[2ik \frac{\partial A}{\partial z} + k(A \nabla^2 W + 2\nabla A \cdot \nabla W)\right] e^{ikW} = 0 \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Igualando a cero la parte imaginaria y teniendo en cuenta que $\nabla A = \nabla I / (2\sqrt{I})$, se deduce que:

$$I\nabla^2 W + \nabla I \cdot \nabla W = - \frac{\partial I}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

que no es más que la Ecuación de Transporte de Intensidad. Normalmente se verá, sin embargo, de la forma:

$$\nabla \cdot (I\nabla W) = - \frac{\partial I}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

La ETI relaciona la variación axial instantánea de la irradiancia en un plano z con la variación transversal de la fase en dicho plano. La versión de la Ec. (A.6) es adecuada para estudiar la propagación de ondas que se extienden en todo el espacio. Calculemos ahora una relación similar para un haz que atraviesa una pupila en el plano $z = 0$. Denotaremos los ejes transversales en cada plano z como xy y los del plano $z = 0$ como $x_o y_o$.

Si trabajamos en el plano $z = 0$, la ETI es:

$$\left. \frac{\partial I(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = - \nabla \cdot [I(0)\nabla W] \quad (\text{A.7})$$

donde $I(z) = I(x, y, z)$ es la irradiancia en cada punto (x, y) de un plano z , $I(0) = I(x_o, y_o, 0)$ es la irradiancia en $z = 0$ y $W = W(x_o, y_o)$ es la fase en cada punto (x_o, y_o) del plano $z = 0$. La onda (A.1) se propaga a lo largo del eje z hasta que en el plano $z = 0$ atraviesa la pupila circular $P_o = P(x_o, y_o)$. En concreto, la pupila modula la intensidad del plano de la abertura y ejerce un efecto en la propagación de la luz, que ha de describir la ecuación que proporciona la variación axial de irradiancia. De este modo, la distribución de irradiancia en el plano $z = 0$, $I(0)$, se expresa en función de la pupila P_o de la forma:

$$I(0) = I(x_o, y_o, 0) = I(x_o, y_o)P(x_o, y_o) = I_o P_o \quad (\text{A.8})$$

donde $I_o = I(x_o, y_o)$ es la irradiancia en los puntos del interior de P_o . Si se sustituye en el miembro de la derecha de la ETI se tiene:

$$\begin{aligned} - \nabla \cdot [I(0)\nabla W] &= - \nabla \cdot [I_o P_o (\nabla W)] \\ &= - [(\nabla I_o)(\nabla W) + I_o (\nabla^2 W)] P_o - I_o (\nabla W)(\nabla P_o) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Para calcular $(\nabla W)(\nabla P_o)$ empleamos coordenadas polares planas (r_o, θ_o) , de modo que la pupila circular se puede modelar como $P_o = P(r_o) = 1 - H(r_o - R)$, donde

$H(r_o - R)$ es la función de salto unitario en el punto $r_o = R$, siendo R el radio de la pupila, es decir [158]:

$$H(r_o - R) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_o > R \\ 0 & \text{si } r_o \leq R \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

De este modo:

$$(\nabla W)(\nabla P_o) = \left(W_{r_o} \hat{\mathbf{r}}_o + \frac{W_{\theta_o}}{r_o} \hat{\boldsymbol{\theta}}_o \right) (P_{r_o} \hat{\mathbf{r}}_o) = W_{r_o} P_{r_o} \quad (\text{A.11})$$

donde $W_{r_o} = \partial W / \partial r_o$, $W_{\theta_o} = \partial W / \partial \theta_o$ y $P_{r_o} = \partial P_o / \partial r_o$. Como $P_o = 1 - H(r_o - R)$ entonces:

$$P_{r_o} = \frac{\partial}{\partial r_o} [1 - H(r_o - R)] = -\delta(r_o - R) = -\delta_c \quad (\text{A.12})$$

donde el subíndice c indica que la delta de Dirac coincide con el borde de la pupila, C . Si sustituimos en la Ec. (A.9):

$$-\nabla \cdot [I_o P_o (\nabla W)] = -\nabla \cdot (I_o \nabla W) P_o + I_o W_{r_o} \delta_c \quad (\text{A.13})$$

De este modo, la ETI pasa a tener la forma usual:

$$\left. \frac{\partial I(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -\nabla \cdot (I_o \nabla W) P_o + I_o W_{r_o} \delta_c \quad (\text{A.14})$$

Apéndice B

Rendimiento del sensor de curvatura en condiciones de iluminación limitadas

A lo largo de esta memoria, se han dado los pasos necesarios para diseñar un procedimiento que ayude a optimizar la respuesta de un sensor de curvatura de acuerdo a criterios objetivos. Para ello, hemos analizado cualitativamente el rendimiento del sensor, suponiendo que todas las fluctuaciones de las medidas de irradiancia que realiza se debían a ruido de detección. Sin embargo, cuando el sensor se emplea para recuperar aberraciones dinámicas como, por ejemplo, frentes de onda turbulentos, las medidas de irradiancia pueden constar de un número bajo de fotoelectrones y, consecuentemente, el ruido fotónico adquiere más protagonismo. La diferente estadística de un tipo de fluctuaciones y otro implica algunos cambios en el cálculo de las varianzas de las curvaturas y de las derivadas normales locales, aunque, como veremos, su comportamiento cualitativo en función de la posición de los planos de irradiancia en el eje z no se modifica apreciablemente. No obstante, las diferencias pueden traducirse en cambios cuantitativos significativos del error y de la posición óptima de los planos.

En este apéndice nos proponemos calcular estas varianzas en función del nivel de ruido fotónico y del ruido de detección, que nos permitirán hallar la posición óptima de los planos conocido el número de fotones promedio detectados durante el tiempo de exposición.

B.1. Varianza de la estimación de la curvatura local, cotas de error y posición óptima

Supongamos que durante un cierto tiempo de exposición, τ , un detector Σ capta en un plano jz un número de fotones, i_j , tal que:

$$i_j = I_j + n_j^{\text{rms}} + n_j^{\text{ph}} \quad (\text{B.1})$$

donde I_j es el número de fotones que se detectan en promedio en el plano jz durante el tiempo de exposición, τ , n_j^{rms} son errores de detección, aditivos, con media cero, varianza σ^2 y covarianza nula entre detectores y planos distintos, mientras que n_j^{ph} es ruido fotónico, aditivo, de media cero, con una varianza $\sigma_j^2 = I_j$ y covarianza nula entre detectores y planos distintos.

De acuerdo con el Capítulo 3, a partir de estas medidas de irradiancia se construye una fórmula en diferencias finitas para aproximar la derivada axial, $\hat{I}'(0)$, en el plano $z = 0$. La relación entre $\hat{I}'(0)$ y la curvatura del frente de onda que proporciona la ETI se puede emplear para calcular la varianza de la curvatura del frente a partir de $s^2 [\hat{I}'(0)]$. Si en lugar de la Ec. (4.1) se introduce la Ec. (B.1) en los cálculos de la § 4.2, entonces en la varianza de la derivada axial aproximada en diferencias finitas interviene un término más que informa de la contribución del ruido fotónico, que allí no tuvimos en cuenta. En concreto, obtenemos la siguiente ecuación para la varianza de $\hat{I}'(0)$ estimada en Σ con la fórmula central con $M = 2m$ planos (Ec. (4.2)):

$$s^2 [\hat{I}'(0)] = \frac{1}{z^2} \left(\sigma^2 \tilde{a}_m + \sum_{j=-m}^m a_j^2 I_j \right) + z^2 \left[\sum_{j=-m}^m a_j \frac{j^2}{2} I''(\xi_j) \right]^2 \quad (\text{B.2})$$

La ecuación correspondiente a la fórmula progresiva y regresiva con $M = m + 1$ planos (Ec. (4.13)) es:

$$s^2 [\hat{I}'(0)] = \frac{1}{z^2} \left[(2\sigma^2 + I_o) \tilde{b}_m + \sum_{j=1}^m b_j^2 I_j \right] + z^2 \left[\sum_{j=1}^m b_j \frac{j^2}{2} I''(\xi_j) \right]^2 \quad (\text{B.3})$$

Los coeficientes a_j , b_j , \tilde{a}_m y \tilde{b}_m son los mismos que los del Capítulo 4 (ver § 4.2).

Supongamos que durante el tiempo de exposición un detector Σ capta en promedio un número finito de fotones, N , que se distribuyen entre los distintos planos de medida, es decir:

$$N = \sum_{j=-m}^m I_j, \quad N = I_o + \sum_{j=1}^m I_j \quad (\text{B.4})$$

para el esquema central y para las fórmulas de Newton, respectivamente.

Ahora supongamos que los frentes de onda son lo suficientemente suaves como para que en el área de cada detector Σ se pueda considerar que la fase se comporta esencialmente como una fase cuadrática, W_o , (Ec. (2.15)). Introduciendo $s^2 [\hat{I}'(0)]$ en la Ec. (4.20) y teniendo en cuenta la Ec. (2.15), calculamos la varianza de la curvatura local estimada en Σ en función de N para ambos tipos de fórmulas:

a) **Fórmula central**

$$\begin{aligned} \epsilon_o^2 = & \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 \left[\frac{\tilde{a}_m}{z^2} + 4(D+E)^2 \right] \left[\sum_{j=-m}^m \frac{1}{1 + 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right]^2 \\ & + \left(\frac{1}{N}\right) \left[\sum_{j=-m}^m \frac{1}{1 + 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \\ & \times \left[4(D+E)^2 + \frac{1}{z^2} \sum_{j=-m}^m \frac{a_j^2}{1 + 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \\ & + 4(D+E)^2 \left[1 - \tilde{a}_m \sum_{j=-m}^m \frac{j^2}{[1 + 4DEj^2z^2]^2 - [2(D+E)jz]^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

b) **Fórmula progresiva y regresiva**

$$\begin{aligned} \epsilon_o^2 = & \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 \left[\frac{2\tilde{b}_m}{z^2} + 4(D+E)^2 \right] \left[1 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 \pm 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right]^2 \\ & + \left(\frac{1}{N}\right) \left[1 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 \pm 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \\ & \times \left[\frac{\tilde{b}_m}{z^2} + 4(D+E)^2 + \frac{1}{z^2} \sum_{j=1}^p \frac{b_j^2}{1 \pm 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \\ & + \left[2(D+E) \pm \frac{1}{z} \sum_{j=1}^m d_j \frac{\mp 2(D+E)jz - 4DEj^2z^2}{1 \pm 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En la Figura B.1, para dos planos de medida, y en la Figura B.2, para ocho planos, se muestran ejemplos de las curvas de error que se obtienen a partir de la Ec. (B.5) para los mismos valores de los parámetros de la fase cuadrática local en Σ , W_o , que en las curvas análogas de las Figuras 2.2 y 4.1. Se supone que el número de fotones detectados es $N = 10^4$ y que el detector es cuasiideal, esto es, $\sigma = 0$.

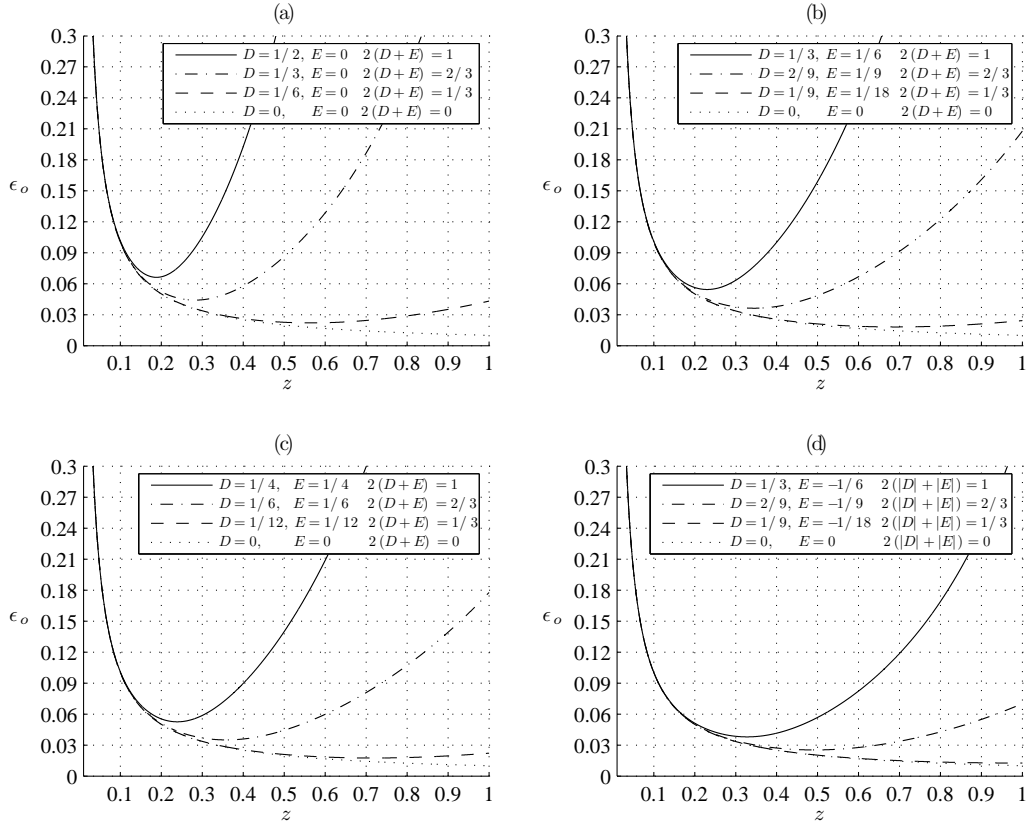


Figura B.1: Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula central particularizada a $M = 2$ planos de medida, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólico y el (d) a aproximaciones con forma de paraboloides hiperbólico.

Esto quiere decir que las fluctuaciones relativas por ruido fotónico, con desviación $1/\sqrt{N} = 0,01$, son de la misma magnitud que las consideradas en las Figuras 2.2 y 4.1, causadas por ruido de detección con desviación $\sigma/I_o = 0,01$, y los cambios entre unas curvas y otras se deben a la diferente estadística de las fluctuaciones de los datos de irradiancia. A pesar de ello, el comportamiento cualitativo de unas curvas y otras es idéntico y podremos aplicar el procedimiento diseñado en el Capítulo 2 para optimizar la estimación de las curvaturas locales en Σ . A partir de las Figuras B.3, para dos planos de medida, y B.4, para ocho planos, se puede llegar a las mismas conclusiones para las fórmulas de Newton.

Continuando con el esquema seguido en esta memoria, calculamos ahora las cotas superior e inferior de error obtenidas particularizando las Ecs. (B.5) y (B.6) a $D =$

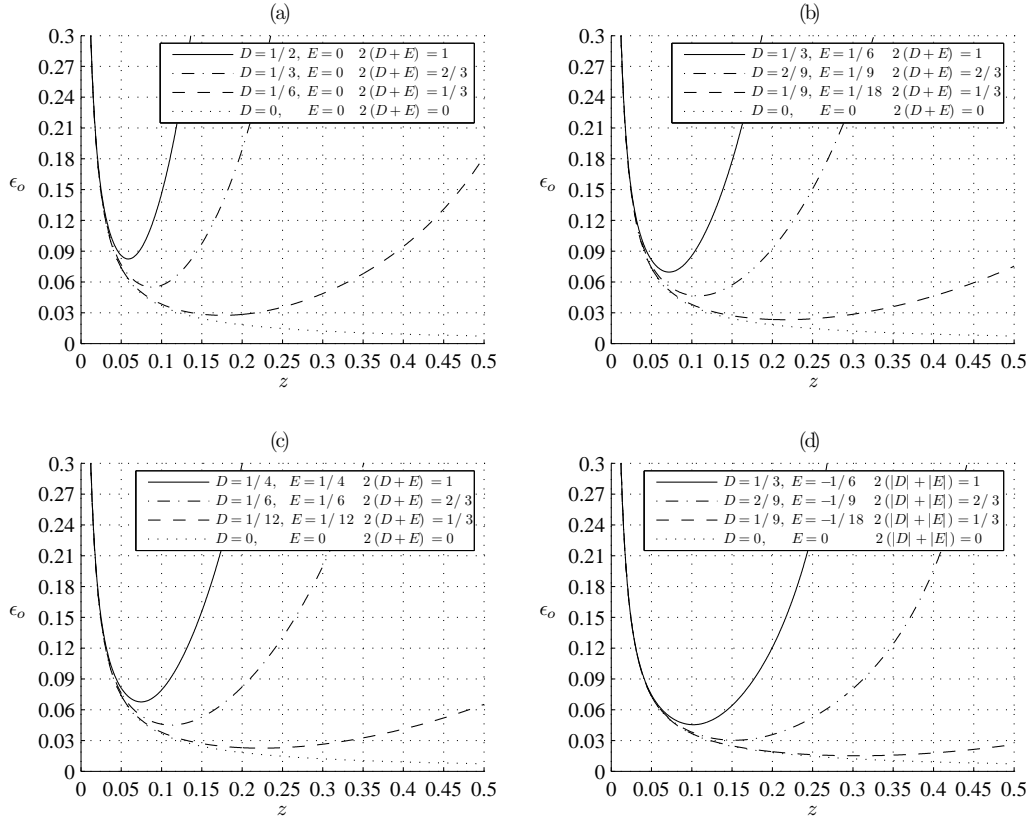


Figura B.2: Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula central particularizada a $M = 8$ planos de medida, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólico y el (d) a aproximaciones con forma de paraboloides hiperbólico.

$V/2$ y $E = 0$, y $D = E = 0$, respectivamente:

a) **Fórmula central**

a.1) Cota superior de error

$$\begin{aligned} \left(\frac{\epsilon_{\text{sup}}}{V}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 \left(\frac{\tilde{a}_m}{h^2} + 1\right) \left(\sum_{j=-m}^m \frac{1}{1+jh}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\right) \left(\sum_{j=-m}^m \frac{1}{1+jh}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{h^2} \sum_{j=-m}^m \frac{a_j^2}{1+jh}\right) + \left[1 - \tilde{a}_m \sum_{j=-m}^m \frac{j^2}{1-(jh)^2}\right]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

a.2) Cota inferior de error

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{inf}}}{V}\right)^2 = 2m \frac{\tilde{a}_m}{h^2} \left[2m \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\right)\right] \quad (\text{B.8})$$

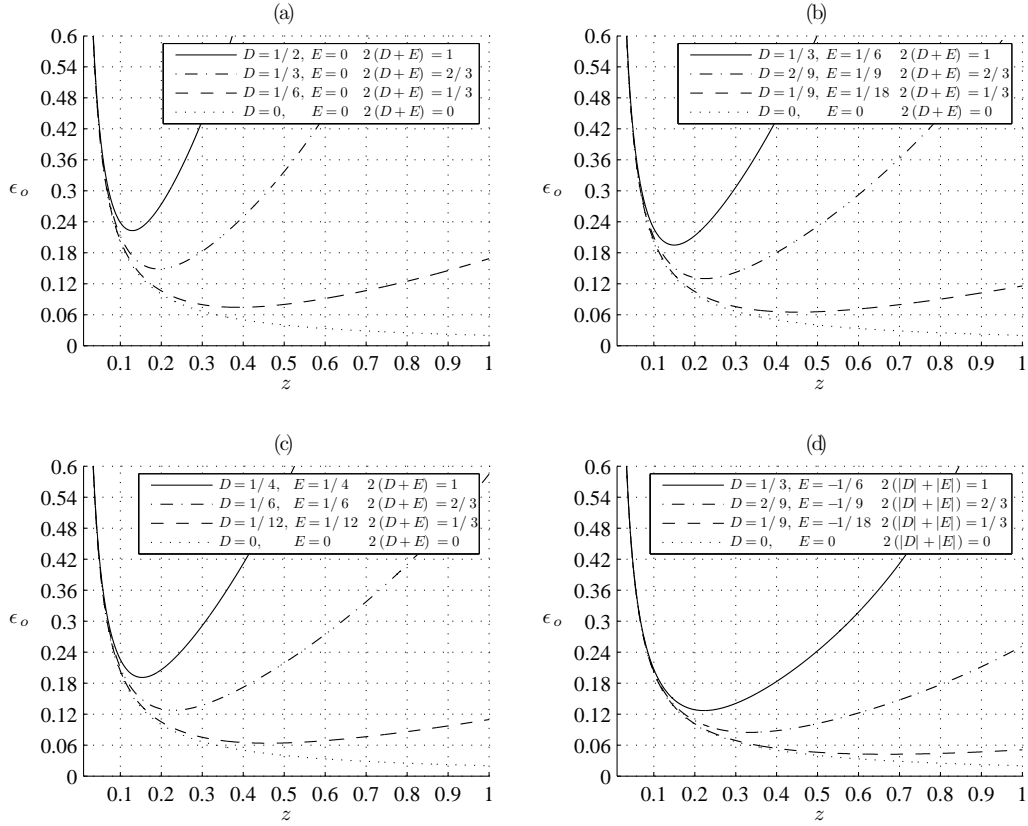


Figura B.3: Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula regresiva particularizada a $M = 2$ planos de medida, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólico y el (d) a aproximaciones con forma de paraboloides hiperbólico.

b) Fórmula progresiva y regresiva

b.1) Cota superior de error

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\epsilon_{\text{sup}}}{V}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 \left(\frac{2\tilde{b}_m}{h^2} + 1\right) \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-jh}\right)^2 \\
 &+ \left(\frac{1}{N}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{1-jh}\right) \left(1 + \frac{\tilde{b}_m}{h^2} + \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^m \frac{b_j^2}{1-jh}\right) \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^m b_j \frac{jh}{1-jh}\right)^2 \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

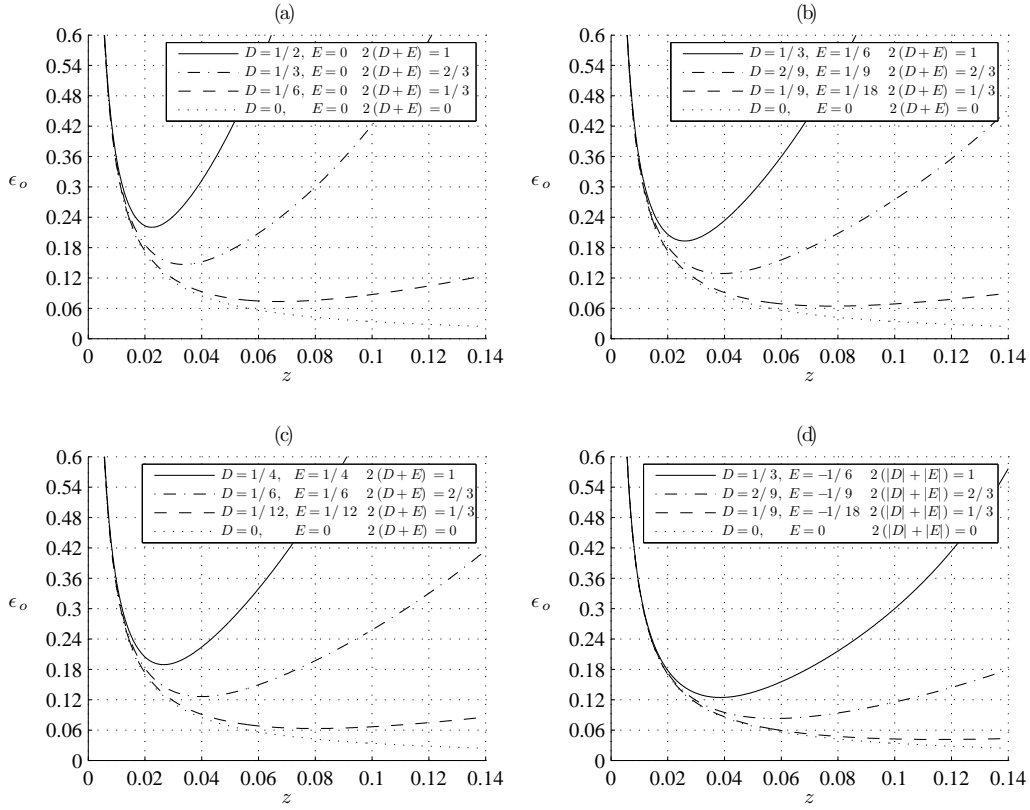


Figura B.4: Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula regresiva particularizada a $M = 8$ planos de medida, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloido elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloido parabólico y el (d) a aproximaciones con forma de paraboloido hiperbólico.

b.2) Cota inferior de error

$$\left(\frac{\epsilon_{\text{inf}}}{V}\right)^2 = \frac{2\tilde{b}_m}{h^2} (m+1) \left[(m+1) \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\right) \right] \quad (\text{B.10})$$

donde se han utilizado coordenadas axiales de los planos normalizadas a V , $h = Vz$, siendo V la cota superior de los valores posibles de $2(|D| + |E|)$. En la Tabla B.1 se muestran estos mismos resultados para la fórmula central particularizados a dos planos de irradiancia. Asimismo, se indica la ecuación que se obtiene al minimizar la cota superior de error, que nos permite calcular z_{opt} dado un valor de N , de σ , en su caso, y de un valor de V . En la Tabla B.2 se da información análoga para las fórmulas de Newton con dos planos de irradiancia. Lo más destacable que se desprende de estas dos tablas es que, a igualdad de fluctuación relativa, el ruido de detección contribuye en ϵ_o^2 el doble que el ruido fotónico.

Fórmula central

$$\begin{aligned}
\epsilon_o^2 & \left[2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \right] \frac{1}{z^2} \left[\frac{1+4DEz^2}{(1+4DEz^2)^2-4(D+E)^2z^2} \right]^2 + 4(D+E)^2 z^4 \left[\frac{4DE(2+4DEz^2)-4(D+E)^2}{(1+4DEz^2)^2-4(D+E)^2z^2} \right]^2 \\
\frac{\epsilon_{\text{sup}}^2(h)}{V^2} & \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{1-h^2} \right)^2 \left[2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \right] + \left(\frac{h^2}{1-h^2} \right)^2 \\
\frac{\epsilon_{\text{inf}}^2(h)}{V^2} & \frac{1}{h^2} \left[2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \right] \\
h_{\text{opt}} = f(N, \sigma) & \left[2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \right] (3h_{\text{opt}}^2 - 1) + 2h_{\text{opt}}^6 = 0
\end{aligned}$$

Tabla B.1: Varianza de la curvatura local, cotas superior e inferior de error y ecuación del plano óptimo para la fórmula central con dos planos de medida, en función del número de fotones promedio detectados en Σ durante el tiempo de exposición, N , y de la desviación del ruido de detección, σ .

Fórmulas de Newton

$$\begin{aligned}
\epsilon_o^2 & \left[2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \right] \frac{1}{z^2} \left[\frac{2\pm 2(D+E)z+4DEz^2}{1\pm 2(D+E)z+4DEz^2} \right]^2 + z^2 \left[\frac{4(D+E)^2-4DE\pm 8DE(D+E)z}{1\pm 2(D+E)z+4DEz^2} \right]^2 \\
\frac{\epsilon_{\text{sup}}^2(h)}{V^2} & \frac{1}{h^2} \left(\frac{2-h}{1-h} \right)^2 \left[2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \right] + \left(\frac{h}{1-h} \right)^2 \\
\frac{\epsilon_{\text{inf}}^2(h)}{V^2} & \frac{4}{h^2} \left[2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \right] \\
h_{\text{opt}} = f(N, \sigma) & \left[2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 + \frac{1}{N} \right] (2 - h_{\text{opt}}) (h_{\text{opt}}^2 - 4h_{\text{opt}} + 2) - h_{\text{opt}}^4 = 0
\end{aligned}$$

Tabla B.2: Varianza de la curvatura local, cotas superior e inferior de error y ecuación del plano óptimo para las fórmulas progresiva y regresiva con dos planos de medida, en función del número de fotones promedio detectados en Σ durante el tiempo de exposición, N , y de la desviación del ruido de detección, σ .

Comparemos ahora las Figuras B.1 y B.3, asociadas a la estimación de la curvatura local con fórmulas con dos planos, con las Figuras B.2 y B.4, asociadas a la estimación de la curvatura local con fórmulas con ocho planos. Analizando las curvas que corresponden a la fórmula central, el error en el mínimo crece al pasar de dos a ocho planos, es decir, el rendimiento del sensor de curvatura empeora al aumentar el número de planos. Aunque el incremento del número de planos de irradiancia supone una disminución del error de no linealidad, el peso del ruido fotónico en la varianza de la curvatura crece porque el número de fotones disponible se distribuye entre ocho planos de medida en lugar de entre dos. Para las fórmulas de Newton, el error en la posición óptima se mantiene. En definitiva, aumenta la contribución del ruido de las medidas, mientras que el peso del error de no linealidad disminuye en menor cuantía en la fórmula central o en la misma en las fórmulas de Newton. Por tanto, la incertidumbre de las curvaturas locales estimadas con la fórmula central crece a medida que aumenta el número de planos, mientras que con las fórmulas de Newton se mantiene aproximadamente constante, como se muestra en la Figura B.5 para un detector cuasiideal ($\sigma = 0$). Si el detector no es cuasiideal ($\sigma \neq 0$), las medidas en cada plano están afectadas adicionalmente por ruido de detección y la pérdida de rendimiento es mayor, como se deduce comparando con la Figura B.6.

Si las condiciones de iluminación son muy limitadas, son significativamente más competitivos los detectores cuasiideales. Por eso, en los sensores de curvatura aplicados en Óptica Astronómica, se ha optado generalmente por el uso de detectores de fotodiodos de avalancha (APD) [10, 53, 56, 58, 59], limitados solo por ruido fotónico.

En cuanto a la separación interplanos óptima, disminuye a medida que aumenta el número de planos utilizados para recuperar la curvatura local (ver Figura B.7). No obstante, el rango de z que abarca el conjunto de todos los planos crece conforme M aumenta, existiendo riesgo de invasión de la zona de cáusticas (ver Figura B.8).

Por último, podemos comparar estas figuras con las figuras correspondientes del Capítulo 4 para ruido de detección y ruido fotónico despreciable. A pesar de que el peso de las fluctuaciones de las medidas de irradiancia es el mismo, la diferente estadística del ruido fotónico y del ruido de detección se traduce en cambios cuantitativos en los resultados. Por ejemplo, cuando solo hay ruido fotónico, los planos han de separarse más y las desviaciones de las curvaturas locales estimadas aumentan.

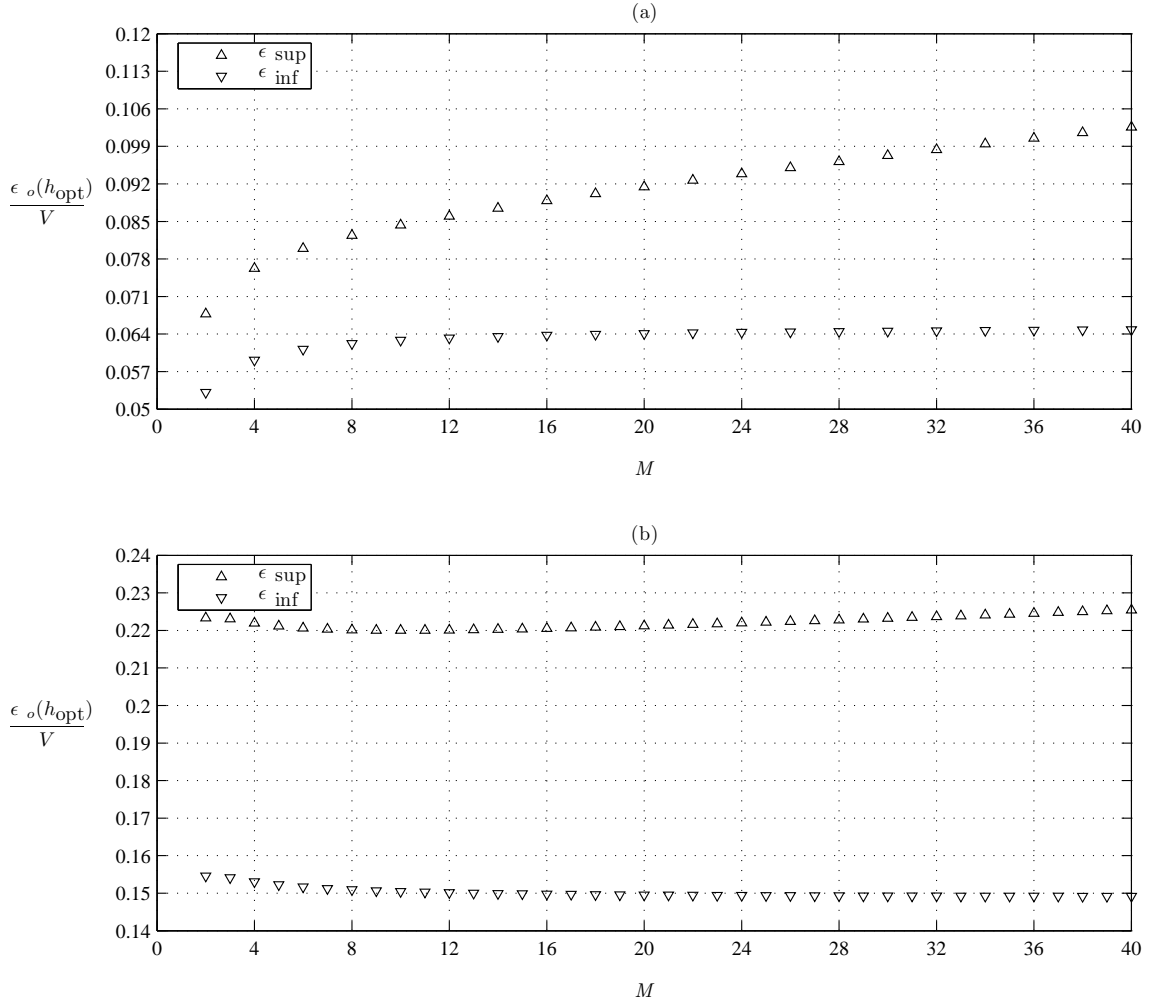


Figura B.5: Evolución de las cotas superior e inferior de error de la curvatura local en función del número de planos de medida, suponiendo que se estima con la fórmula central en diferencias finitas, (a), y con la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b). En ambos casos $N = 10^4$ y $\sigma = 0$.

B.2. Varianza de la estimación de la derivada normal local y separación óptima

En el Capítulo 3 hemos visto que para obtener la derivada normal de la fase en el borde de la pupila, de radio R , la derivada axial de la irradiancia ha de promediarse radialmente en la región de frontera, en un intervalo $[R - L/2, R + L/2]$, obteniéndose $\mathcal{I}'(0)$. Experimentalmente, en el sensor se implementa una aproximación en diferencias finitas, $\hat{\mathcal{I}}'(0)$, cuyos datos son las irradiancias promediadas radialmente en la región de frontera, \mathcal{I}_o e \mathcal{I}_j , captadas en $z = 0$ y en jz , respectivamente. Las ecuaciones que describen la varianza de $\hat{\mathcal{I}}'(0)$,

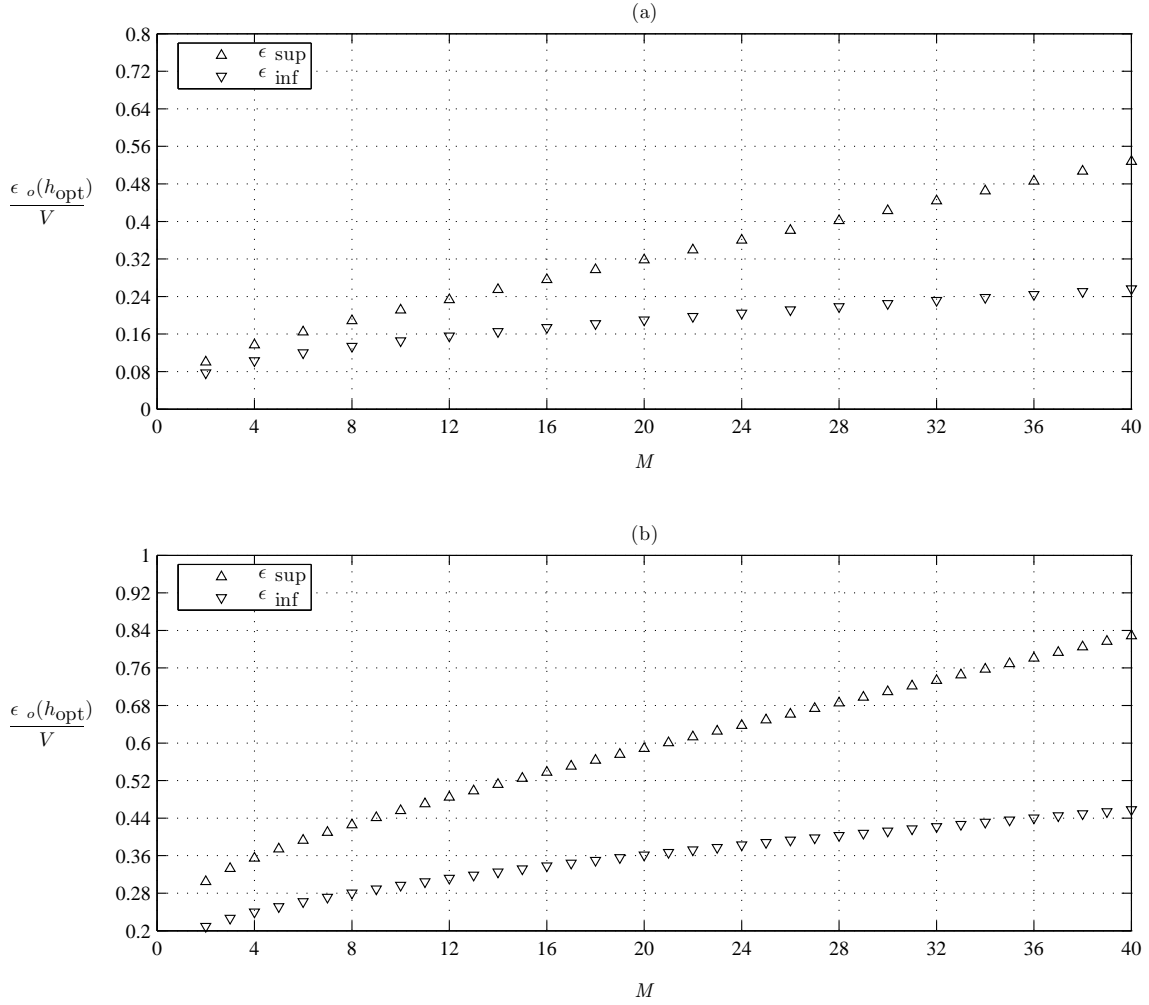


Figura B.6: Evolución de las cotas superior e inferior de error de la curvatura local en función del número de planos de medida, suponiendo que se estima con la fórmula central en diferencias finitas, (a), y con la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b). En ambos casos $N = 10^4$ y $\sigma = 100$.

$s^2 \left[\hat{\mathcal{I}}'(0) \right]$, se obtienen a partir de las Ecs. (B.2) y (B.3) cambiando simplemente I por \mathcal{I} .

Consideremos ahora un detector Σ centrado en un punto (R, θ) del borde de la pupila en $z = 0$. Supongamos que en Σ el frente de onda W se comporta esencialmente como su aproximación cuadrática W_o de la Ec. (3.25). Entonces, operando con las Ecs. (B.2) y (B.3) para \mathcal{I} y teniendo en cuenta las Ecs. (3.15) y (4.28), podemos calcular la varianza de la derivada normal local estimada en Σ , $\hat{W}_{o,r}$, en función del número de fotones que el detector capta en promedio durante el tiempo de exposición, es decir, $N = \mathcal{I}_+ + \mathcal{I}_-$. Si $\mathcal{I}'(0)$ se aproxima con las fórmulas central y de Newton en diferencias finitas, estas varianzas son:

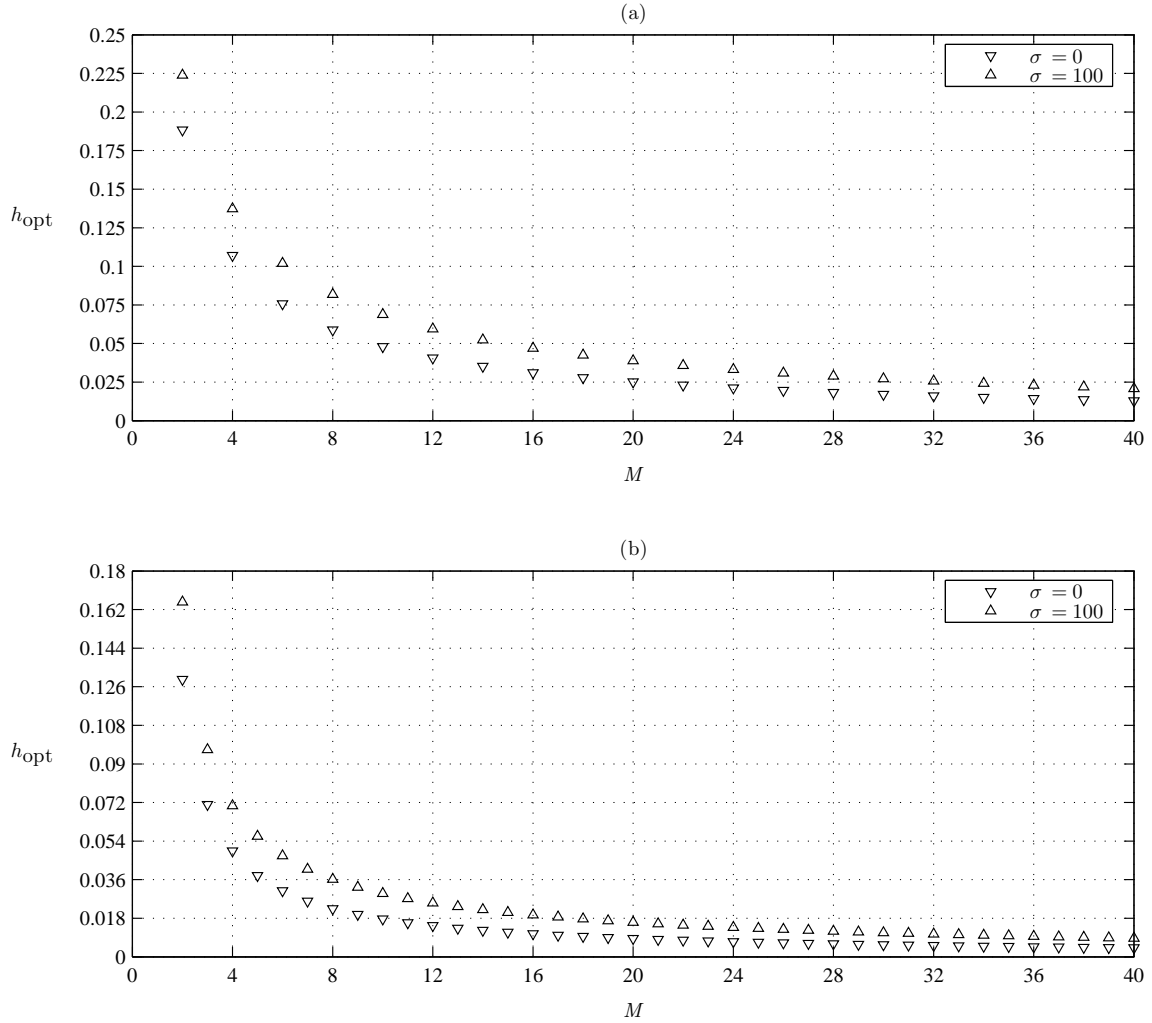


Figura B.7: Evolución de la separación interplanos conforme crece el número de planos de medida, para la fórmula central en diferencias finitas, (a), y para la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b), suponiendo $N = 10^4$ con $\sigma = 0$ y $\sigma = 100$.

a) Fórmula central

$$\begin{aligned}
 \epsilon_o^2 = & \frac{\tilde{a}_m}{z^2} \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 \left[\sum_{j=-m}^m \frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D + E)jz + 4DEj^2z^2} \right]^2 \\
 & + \frac{1}{z^2} \left[\sum_{j=-m}^m a_j^2 \frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D + E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \\
 & \times \left(\frac{1}{N} \right) \left[\sum_{j=-m}^m \frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D + E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \\
 & + \left[W_{or} - \frac{1}{z} \sum_{j=-m}^m a_j \frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D + E)jz + 4DEj^2z^2} \right]^2 \quad (\text{B.11})
 \end{aligned}$$

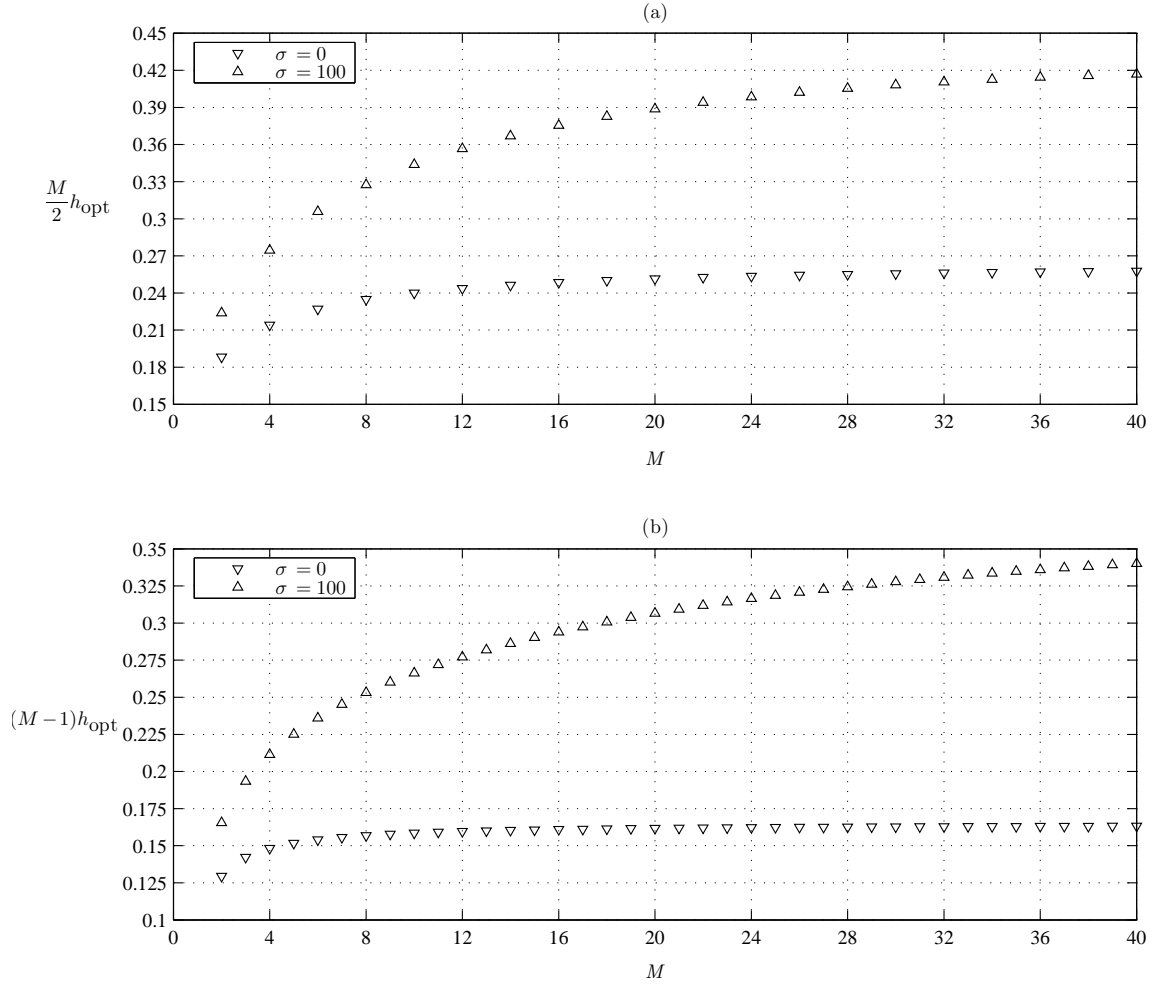


Figura B.8: Evolución de la posición de los planos más alejados de $z = 0$ conforme crece el número de planos de medida, para la fórmula central en diferencias finitas, (a), y para la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b), suponiendo $N = 10^4$ con $\sigma = 0$ y $\sigma = 100$.

b) Fórmula progresiva y regresiva

$$\begin{aligned}
\epsilon_o^2 = & \frac{2\tilde{b}_m}{z^2} \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 \left[\frac{L}{2} + \sum_{j=1}^m \frac{R_j - R + L/2}{1 + 4Djz + 4DEj^2z^2} \right]^2 \\
& + \frac{1}{z^2} \left[\tilde{b}_m \left(\frac{L}{2}\right) + \sum_{j=1}^m b_j^2 \frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \\
& \times \left(\frac{1}{N}\right) \left[\frac{L}{2} + \sum_{j=1}^m \frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} \right] \\
& + \left\{ W_{or} \mp \frac{1}{z} \sum_{j=1}^m b_j \left[\frac{R_j - R + L/2}{1 + 2(D+E)jz + 4DEj^2z^2} - \frac{L}{2} \right] \right\}^2 \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

Fórmula	ϵ_o^2
central	$\frac{1}{4z^2} \left\{ \left[\frac{1}{N} + 2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 \right] \left[\frac{R_o^+ - R + L/2}{1 + 2(D+E)z + 4DEz^2} + \frac{R_o^- - R + L/2}{1 - 2(D+E)z + 4DEz^2} \right]^2 \right.$ $\left. + \left[\frac{R_o^+ - R + L/2}{1 + 2(D+E)z + 4DEz^2} - \frac{R_o^- - R + L/2}{1 - 2(D+E)z + 4DEz^2} - 2zW_{or} \right]^2 \right\}$
Newton	$\frac{1}{z^2} \left\{ \left[\frac{1}{N} + 2 \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 \right] \left[\frac{R_o^\pm - R + L/2}{1 \pm 2(D+E)z + 4DEz^2} + \frac{L}{2} \right]^2 \right.$ $\left. + \left[\frac{R_o^\pm - R + L/2}{1 \pm 2(D+E)z + 4DEz^2} - \frac{L}{2} \mp zW_{or} \right]^2 \right\}$

Tabla B.3: Varianza de la derivada normal local estimada en Σ utilizando las fórmulas de Stirling o de Newton particularizadas a $M = 2$ planos de medida, en función del número de fotones promedio captados por el detector durante el tiempo de exposición, N , y del nivel de ruido de detección, σ/N .

donde R_j viene dado por la Ec. (4.29) y W_{or} por la Ec. (3.29). En la Tabla B.3 se indican estos dos resultados particularizados a fórmulas con dos planos de irradiancia. Al igual que en la desviación de las curvaturas locales del interior, el ruido de detección también contribuye aquí el doble que el ruido fotónico.

En la Figura B.9(a), para dos planos de medida, y en la Figura B.9(b), para ocho planos, se representan las curvas de error que se obtienen a partir de la Ec. (B.11) para los mismas combinaciones de los coeficientes de la fase local en Σ que en las curvas análogas de las Figuras 3.5(a) y 4.4(a), respectivamente. En la Figura B.10 se hacen representaciones similares para las fórmulas de Newton obtenidas a partir de la Ec. (B.12). Se supone $L = 0,3R$ para la dimensión radial de la región de frontera y que el número de fotones detectados es $N = 10^4$ con $\sigma = 0$. De este modo, las fluctuaciones por ruido fotónico consideradas aquí tienen la misma desviación relativa que las de ruido de detección de magnitud $\sigma/I_o = 0,01$, como en las Figuras 3.5 y 4.4. Dada la similitud en el comportamiento de las curvas de estas figuras respecto de las de la Figura B.9, podremos aplicar el procedimiento diseñado en el Capítulo 3 para optimizar la estimación de la derivada normal local en Σ . En concreto, conocidos N , el σ específico del detector, L y las cotas U y V de los parámetros de W_o , tomamos $\sqrt{B^2 + C^2} = U$, $D = V/2$ y $E = 0$ en las Ecs. (B.11) y (B.12) y calculamos el valor máximo de ϵ_o para todo ángulo θ en cada plano z . Con ello hallamos una curva que describe la dependencia con la posición z de la cota superior de error de la estimación de la derivada normal local en (R, θ) . El mínimo

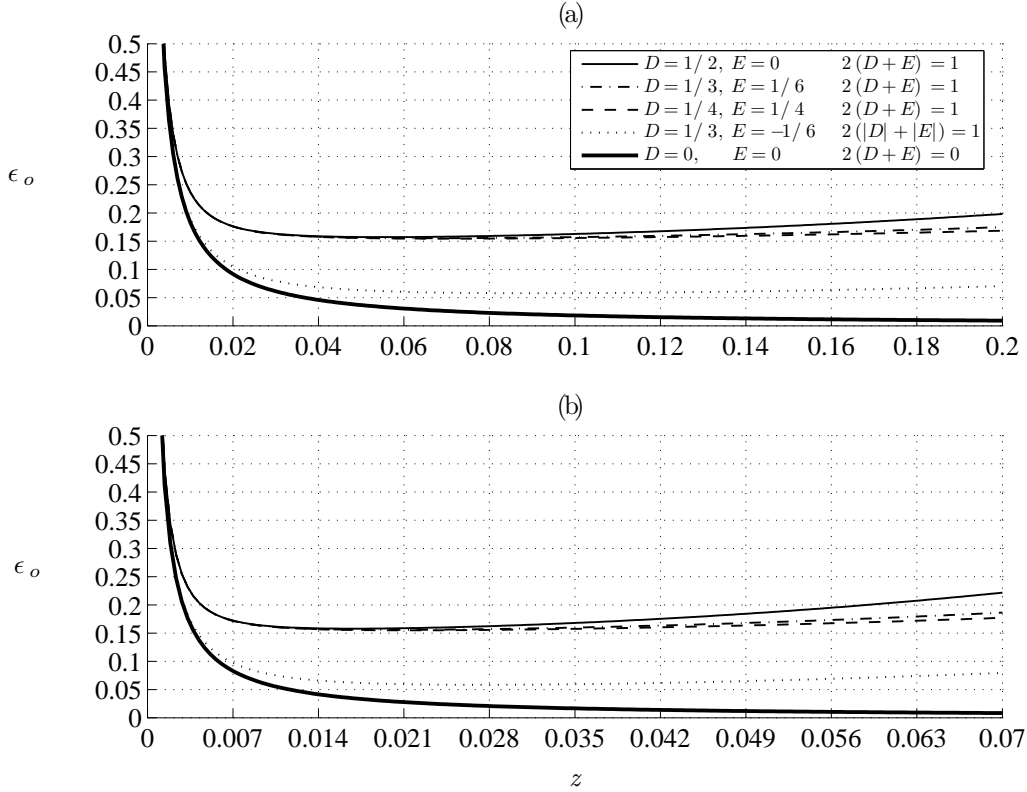


Figura B.9: Curvas de error de la derivada normal local de la fase estimada en Σ utilizando el método indirecto en la configuración central particularizada a $M = 2$ planos (a) y a $M = 8$ planos de medida (b), para $N = 10^4$, $\sigma = 0$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y aproximaciones cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano.

de esta curva nos proporciona, para este valor de L , la posición de los planos, $z_{\text{mín}}$, que minimiza la varianza de la derivada normal recuperada globalmente en todo el perímetro de la pupila. No obstante, como se ha visto en el Capítulo 3, para hallar la posición óptima de los planos, z_{opt} , es necesario averiguar el par $(L, z_{\text{mín}})$ tal que, situando los planos en $z_{\text{mín}}$, L coincide con la deformación radial máxima de la región iluminada en $z_{\text{mín}}$. Solo en esta situación $z_{\text{opt}} = z_{\text{mín}}$.

En lo que respecta a la estimación de las derivadas normales locales, utilizar más planos de irradiancia implica también un empeoramiento en los resultados. Podemos apreciarlo comparando las Figuras B.11(a) y B.11(b) para la fórmula central y las Figuras B.12(a) y B.12(b) para las fórmulas de Newton. Si se usa la fórmula central, el error en la separación óptima aumenta desde $\epsilon_o = 0,46$ con dos planos a $\epsilon_o = 0,58$ con ocho planos, si $N = 100$, y desde $\epsilon_o = 0,2$ a $\epsilon_o = 0,25$, si $N = 1000$. Con la fórmula de Newton se pasa de $\epsilon_o = 0,83$ con dos planos a $\epsilon_o = 1,05$ con ocho planos en la separación óptima, si $N = 100$, y de $\epsilon_o = 0,26$ a $\epsilon_o = 0,32$, si $N = 1000$.

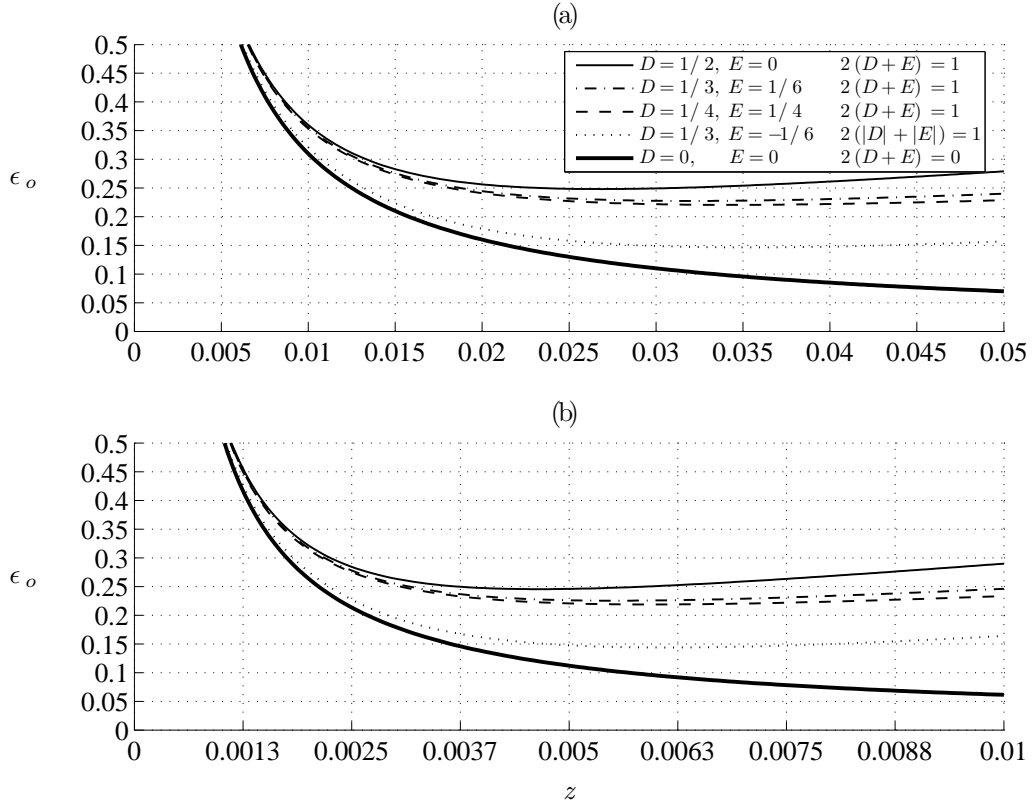


Figura B.10: Curvas de error de la derivada normal local de la fase estimada en Σ utilizando el método indirecto en la configuración progresiva particularizada a $M = 2$ planos (a) y a $M = 8$ planos de medida (b), para $N = 10^4$, $\sigma = 0$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y aproximaciones cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano.

Por último, podemos comparar las figuras representadas en esta sección con las correspondientes de los Capítulos 3 y 4 para ruido independiente del nivel de señal. Las diferencias entre unas curvas y otras se deben a la diferente estadística de las fluctuaciones de las medidas de irradiancia porque para hacer estas representaciones se han escogido fluctuaciones con desviaciones relativas idénticas. Por ejemplo, se observa un aumento de la separación interplanos y también del error en las derivadas normales estimadas cuando las medidas están degradadas por ruido fotónico exclusivamente.

A la vista de los resultados presentados en este apéndice, el empleo de más planos de irradiancia empeora el rendimiento del sensor en aplicaciones donde exista una limitación temporal que acote la disponibilidad de fotones.

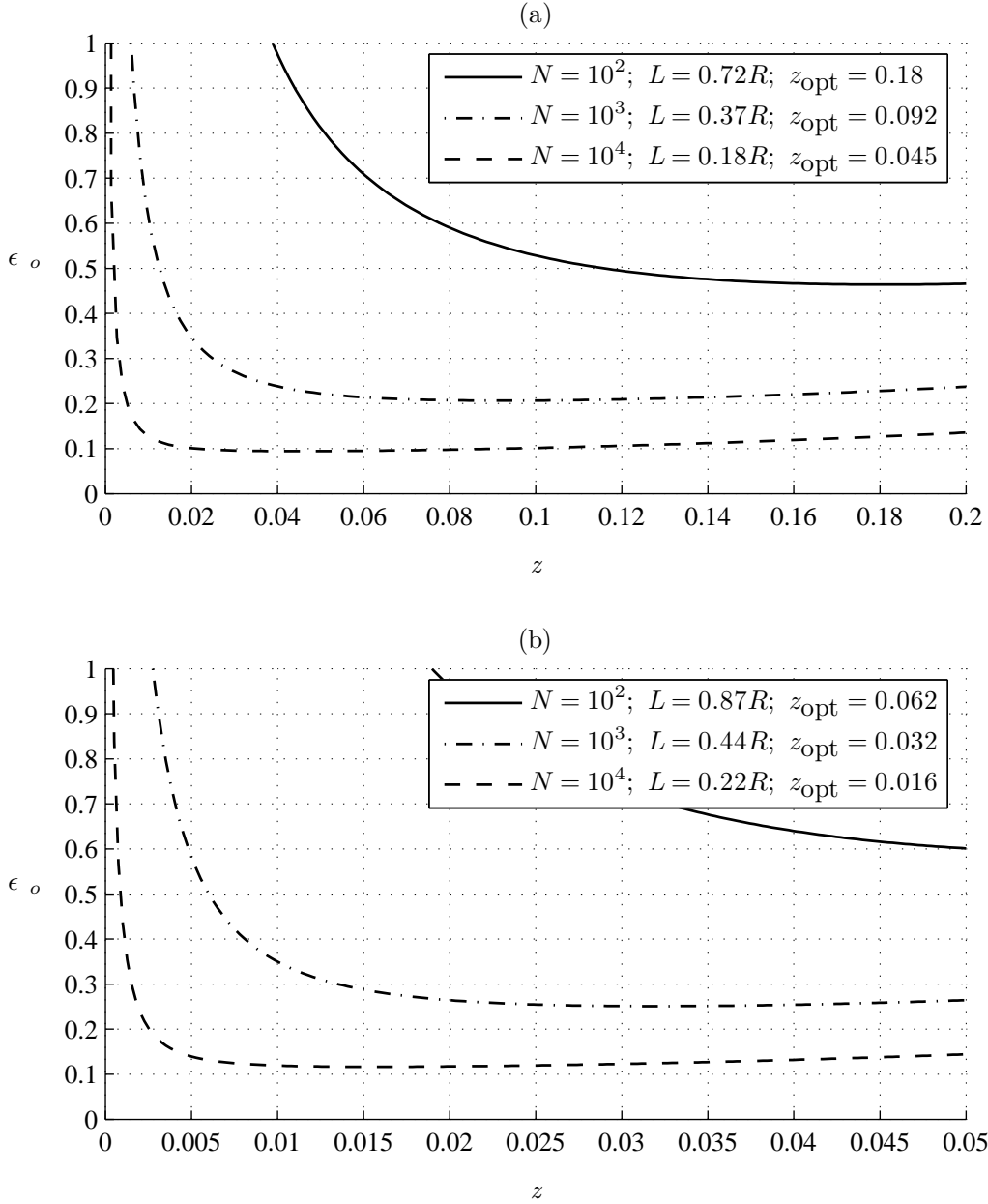


Figura B.11: Curvas de error de la derivada normal local de la fase en la frontera estimada con la configuración central particularizada a $M = 2$ planos (a) y a $M = 8$ planos de medida (b), cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada, suponiendo que en Σ se detecta el número de fotones promedio N indicado y $\sigma = 0$. Adicionalmente, se incluye la separación óptima, z_{opt} .

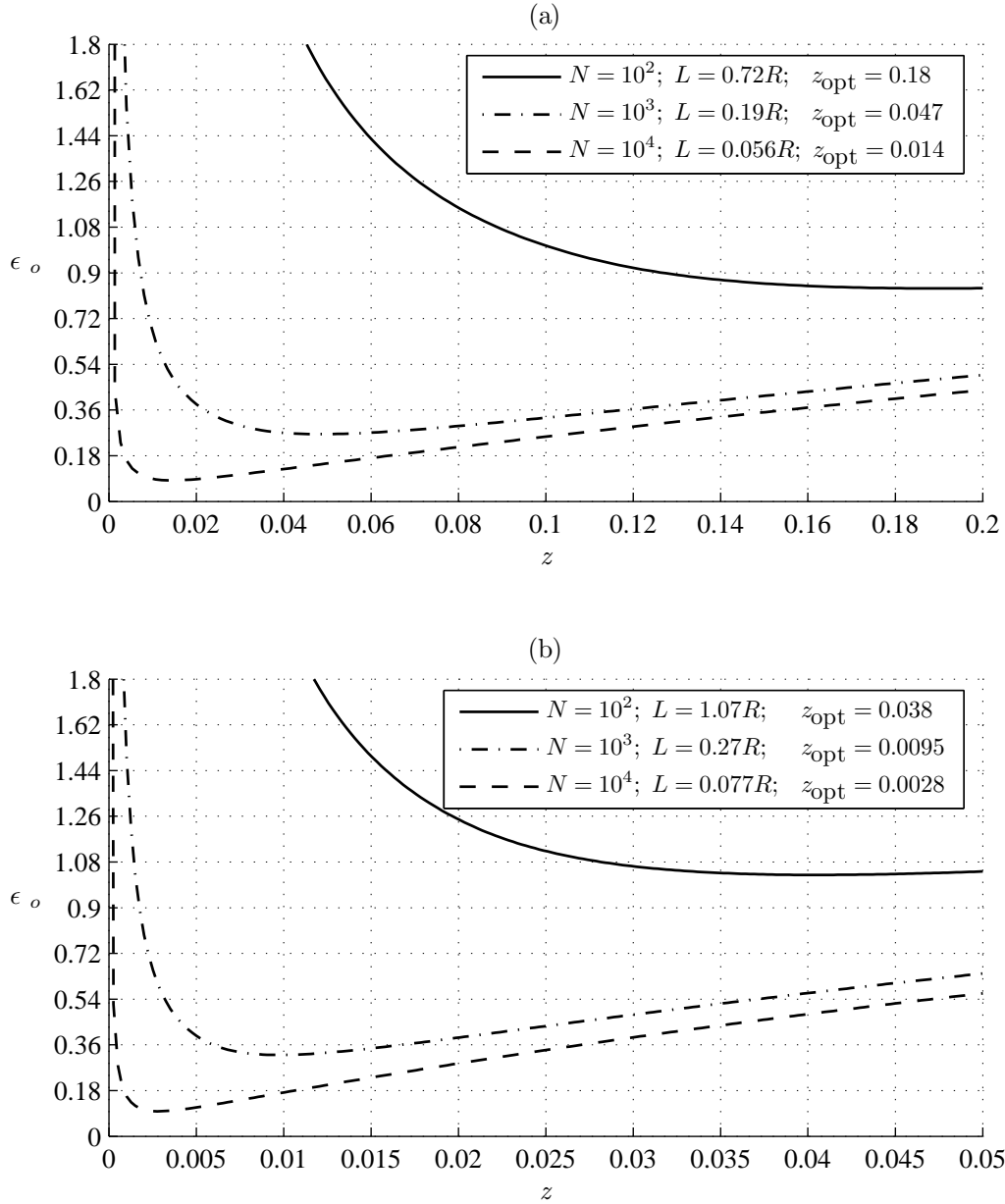


Figura B.12: Curvas de error de la derivada normal local de la fase en la frontera estimada con la configuración progresiva particularizada a $M = 2$ planos (a) y a $M = 8$ planos de medida (b), cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada, suponiendo que en Σ se detecta el número de fotones promedio N indicado y $\sigma = 0$. Adicionalmente, se incluye la separación óptima, z_{opt} .

Apéndice C

La fórmula de Roddier

En los sensores de curvatura acoplados a grandes telescopios terrestres, se emplea tradicionalmente la fórmula de Roddier para estimar la curvatura de los frentes de onda turbulentos en el interior de la pupila del telescopio y su derivada normal en el borde. François Roddier dedujo esta relación a partir de las integrales de difracción de Fresnel [174], puntualizando posteriormente que esta fórmula se deriva también de la Ecuación de Transporte de Intensidad [118, 126].

En los sensores de frente de onda aplicados en Óptica Astronómica, surgen problemas que se deben fundamentalmente a la limitación del número de fotones disponible causada por la evolución temporal de las turbulencias atmosféricas. Además, en el caso concreto del sensor de curvatura, el requisito de que la irradiancia sea uniforme en el plano de la pupila exige limitar, en lo posible, el efecto del centelleo en la apertura del telescopio. En consecuencia, Roddier y Roddier optan por emplear una fórmula basada en la fórmula central en diferencias finitas, pero donde la irradiancia del plano $z = 0$ se aproxima como la media de las irradiancias en los planos $+z$ y $-z$. De este modo, evitan repartir los fotones disponibles entre un tercer plano de intensidad en $z = 0$ y aprovechan las ventajas de la fórmula central frente a las fórmulas de Newton en lo que respecta a la propagación a la medida de curvatura local del efecto del ruido y también del centelleo* [12, 50, 51, 123–126].

Al igual que las fórmulas clásicas en diferencias finitas, la fórmula de Roddier es otra aproximación lineal del comportamiento real del sensor, que también se vuelve imprecisa a medida que los planos de medida se separan más del plano $z = 0$. En este apéndice calculamos la varianza de esta fórmula en función del número de

*En condiciones de turbulencia típicas, algunos autores sitúan entre el 10 % y el 15 % la magnitud del error por centelleo en la medida de la curvatura [175].

fotones disponible y de la posición de los planos en el eje z . Finalmente, analizamos el comportamiento de las curvas de error al estimar las curvaturas y las derivadas normales locales, para así proceder a hallar una separación óptima entre los planos.

C.1. La fórmula de Roddier y la Ecuación de Transporte de Intensidad

La fórmula de Roddier está íntimamente relacionada con la ETI (Ec. (1.3)). En concreto, al igual que en la fórmula central, la derivada axial se aproxima como la diferencia finita de las irradiancias I_{\pm} en dos planos situados simétricamente a ambos lados del plano de recuperación de fase, $z = 0$. Pero el método de Roddier se distingue porque la irradiancia en el plano de la pupila no se mide sino que se aproxima por el valor medio de las irradiancias en $+z$ y $-z$, es decir:

$$\hat{S} = \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-} = z \frac{I_+ - I_-}{2z} \frac{2}{I_+ + I_-} \approx z \frac{I'(0)}{I(0)} = -z \nabla^2 W P_o + z \delta_c W_r = S \quad (\text{C.1})$$

donde \hat{S} denota la señal que Roddier implementa experimentalmente en el sensor de curvatura y S es la señal determinista deducida a partir de la ETI, y donde se ha tenido en cuenta la Ec. (1.3).

A la vista de la ecuación anterior, está clara la relación entre la fórmula de Roddier y la curvatura del frente de onda en el interior de la pupila, P_o . Sin embargo, la relación con la derivada normal en la frontera es algo más compleja debido a la presencia de la delta de Dirac, δ_c . Al igual que vimos con las fórmulas clásicas en diferencias finitas, para estimar la derivada normal del frente de onda en cada ángulo θ del borde de la pupila, se toman medidas de irradiancia promediadas radialmente en la región de frontera. Esto quiere decir que se calculan valores medios para el numerador y el denominador y la división se extrae posteriormente.

Así, experimentalmente en cada ángulo θ se implementa:

$$\hat{S} = \frac{\mathcal{I}_+ - \mathcal{I}_-}{\mathcal{I}_+ + \mathcal{I}_-} \quad (\text{C.2})$$

con \mathcal{I}_{\pm} dadas por la Ec. (3.12). En un punto (R, θ) del borde, la relación entre la señal de Roddier y W_r que proporciona la ETI es:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= z \frac{\mathcal{I}'(0)}{\mathcal{I}_o} = z \frac{\frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R+L/2} I'(0) dr}{\frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R+L/2} I(0) dr} = z \frac{\int_{R-L/2}^{R+L/2} I(0) \delta(r-R) W_r dr}{\int_{R-L/2}^{R+L/2} I_o [1 - H(r-R)] dr} \\ &= \frac{z I_o W_r}{I_o (R - R + \frac{L}{2})} = z \frac{2}{L} W_r \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde \mathcal{I}_o se toma de la Ec. (3.15), R es el radio de la pupila y L es la anchura radial de la región de frontera.

Si la distancia entre planos se reduce infinitamente, entonces $\hat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$. Para comprobarlo hallamos el numerador y el denominador cuando z es pequeño y calculamos el cociente. El primero se obtiene a partir de la Ec. (3.13). En cuanto al denominador, haciendo uso de la Ec. (3.6):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{I}}_o &= \frac{\mathcal{I}_+ + \mathcal{I}_-}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R_+} I_+ dr + \frac{1}{L} \int_{R-L/2}^{R_-} I_- dr \right) \\ &\cong \frac{I_o}{2L} \left(R_+ - R + \frac{L}{2} + R_- - R + \frac{L}{2} \right) \cong \frac{I_o}{2L} (zW_r - zW_r + L) = \frac{I_o}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Si ahora multiplicamos la Ec. (3.13) por z y dividimos por el resultado anterior, se obtiene:

$$\hat{\mathcal{S}} \stackrel{z \rightarrow 0}{\cong} z \frac{I_o \frac{W_r}{L}}{\frac{I_o}{2}} = z \frac{2}{L} W_r = \mathcal{S} \quad (\text{C.5})$$

Por tanto, $\hat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ cuando $z \rightarrow 0$, lo que posibilita el método.

C.2. Varianza de la fórmula de Roddier

Supongamos que un detector Σ del sensor capta i_{\pm} fotones en un plano $\pm z$ durante el tiempo de exposición, τ . La señal que proporciona es la suma del número de fotones promedio que se detectan durante el tiempo τ , I_{\pm} , y el ruido, $n_{\pm}^{\text{rms}} + n_{\pm}^{\text{ph}}$, es decir:

$$i_{\pm} = I_{\pm} + n_{\pm}^{\text{rms}} + n_{\pm}^{\text{ph}} \quad (\text{C.6})$$

donde n_{\pm}^{rms} es el ruido de detección y n_{\pm}^{ph} representa las fluctuaciones en las cuentas de fotones causadas por el ruido fotónico. Ambos son errores de media cero y covarianza nula entre detectores y planos distintos pero, mientras que la varianza del ruido de detección en el área del detector es σ^2 en cualquier plano z , la varianza del ruido fotónico, $\sigma_{\pm}^2 = I_{\pm}$, depende del nivel de irradiancia en cada plano z .

La varianza de los datos de entrada se propaga a la varianza de la fórmula de Roddier, $\hat{\mathcal{S}}$, de la forma:

$$s_a^2(\hat{\mathcal{S}}) = \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial I_+} \right)^2 (I_+ + \sigma^2) + \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial I_-} \right)^2 (I_- + \sigma^2) \quad (\text{C.7})$$

donde:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial I_+} = \frac{2I_-}{(I_+ + I_-)^2} \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial I_-} = -\frac{2I_+}{(I_+ + I_-)^2} \quad (\text{C.8})$$

Tras unas sencillas operaciones de cálculo, se obtiene la siguiente expresión para la varianza debida al ruido:

$$s_a^2(\hat{S}) = \frac{1}{I_+ + I_-} (1 - \hat{S}^2) + 2 \left(\frac{\sigma}{I_+ + I_-} \right)^2 (1 + \hat{S}^2) \quad (\text{C.9})$$

Por otro lado, la dinámica no lineal de la irradiancia en su evolución axial (ver § 2.3.1) afecta a la aproximación de $I'(0)$ como una diferencia finita central y a la aproximación de $I(0)$ como valor medio de I_+ e I_- , dando lugar al siguiente error:

$$s_b^2(\hat{S}) = \left[\hat{S} - z \frac{I'(0)}{I(0)} \right]^2 \quad (\text{C.10})$$

Suponiendo que ambas fuentes de error, con desviaciones s_a y s_b , contribuyen independientemente e introduciendo el desarrollo en serie de Taylor de la irradiancia en torno al plano $z = 0$ (Ec. (2.5)), se obtiene:

$$\begin{aligned} s^2(\hat{S}) = & \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{1}{I_+ + I_-} \left\{ 1 - z^2 \left[\frac{I'(0) + \frac{1}{4}z [I''(\xi_+) - I''(\xi_-)]}{I_o + \frac{1}{4}z^2 [I''(\xi_+) + I''(\xi_-)]} \right]^2 \right\} \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\sigma}{I_+ + I_-} \right)^2 \left\{ 1 + z^2 \left[\frac{I'(0) + \frac{1}{4}z [I''(\xi_+) - I''(\xi_-)]}{I_o + \frac{1}{4}z^2 [I''(\xi_+) + I''(\xi_-)]} \right]^2 \right\} \right\} \\ & + z^2 \left[\frac{I'(0) + \frac{1}{4}z [I''(\xi_+) - I''(\xi_-)]}{I_o + \frac{1}{4}z^2 [I''(\xi_+) + I''(\xi_-)]} - \frac{I'(0)}{I(0)} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

De forma similar a las fórmulas clásicas en diferencias finitas, la varianza de la fórmula de Roddier se incrementa cuando los planos se sitúan cerca de $z = 0$, debido a la contribución del sumando en $1/z^2$, y cuando se sitúan lejos, debido a la contribución del sumando en z^2 . No obstante, si se compara con las ecuaciones análogas para las fórmulas clásicas del Capítulo 2, la varianza de esta fórmula tiene un comportamiento más complejo en función de z , pues en el sumando en $1/z^2$ están ligadas la contribución del ruido y de la no linealidad de la irradiancia.

El número finito de fotones disponible es el factor que más influye a la hora de recuperar frentes de onda turbulentos por medio de un sensor de curvatura. En la práctica, esta limitación se traduce en la necesidad de usar pocos detectores de gran tamaño para captar la mayor cantidad de fotones posible durante el tiempo de exposición. Así el sensor de curvatura realiza medidas de la curvatura local en el interior y de la derivada normal local en la frontera promediadas en el área de cada detector. Esta solución es factible gracias a que los frentes de onda turbulentos son fundamentalmente planos.

Por estos motivos, en las secciones siguientes calcularemos la varianza de la curvatura local en el interior de la pupila y de la derivada normal local en el borde estimadas con la fórmula de Roddier, suponiendo válida la aproximación cuadrática de los frentes de onda turbulentos en el área de cada detector. Expresaremos estas varianzas en función del número total de fotones, $N = I_+ + I_-$, que capta un detector Σ durante el tiempo de exposición, τ .

C.3. Varianza de la estimación de la curvatura local, cotas de error y posición óptima

Supongamos que los frentes de onda turbulentos son lo suficientemente suaves como para que en el área del detector Σ el frente pueda aproximarse por la superficie cuadrática de la Ec. (2.15). Entonces, la irradiancia evoluciona axialmente de la forma (2.16) en el dominio definido por Σ . Si se calculan las irradiancias I_+ e I_- de los planos $+z$ y $-z$ con esta ecuación y se sustituyen en la fórmula de Roddier (Ec. (C.1)), se obtiene:

$$S_o = -\frac{2(D+E)z}{1+4DEz^2} \quad (\text{C.12})$$

Es decir, la señal del sensor obtenida en Σ , S_o , solo es directamente proporcional a la curvatura del frente de onda, $2(D+E)$, en el rango en el que $z \ll 1/\sqrt{4DE}$. Si el hessiano, $4DE$, es muy grande, los planos de irradiancia deben escogerse muy poco separados para que no sea significativo el comportamiento no lineal de la señal del sensor.

La Ec. (C.12) proporciona una relación entre la señal del sensor y la curvatura que puede emplearse para calcular la varianza de la estimación de la curvatura local. En concreto, a partir de esta ecuación y de la Ec. (C.11), calculamos la siguiente expresión válida en Σ :

$$\begin{aligned} \epsilon_o^2 = & \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{N} \right) \left\{ 1 - \left[\frac{2(D+E)z}{1+4DEz^2} \right]^2 \right\} + \frac{2}{z^2} \left(\frac{\sigma}{N} \right)^2 \left\{ 1 + \left[\frac{2(D+E)z}{1+4DEz^2} \right]^2 \right\} \\ & + \left[\frac{8(D+E)DEz^2}{1+4DEz^2} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

En la Figura C.1 se muestra la desviación de la curvatura local del frente de onda estimada en Σ , suponiendo que el detector capta un promedio de $N = 10^4$ fotones durante el tiempo de exposición en ausencia de ruido de detección ($\sigma = 0$). Desde el apartado (a) al (d) se escogen los mismos valores para los parámetros

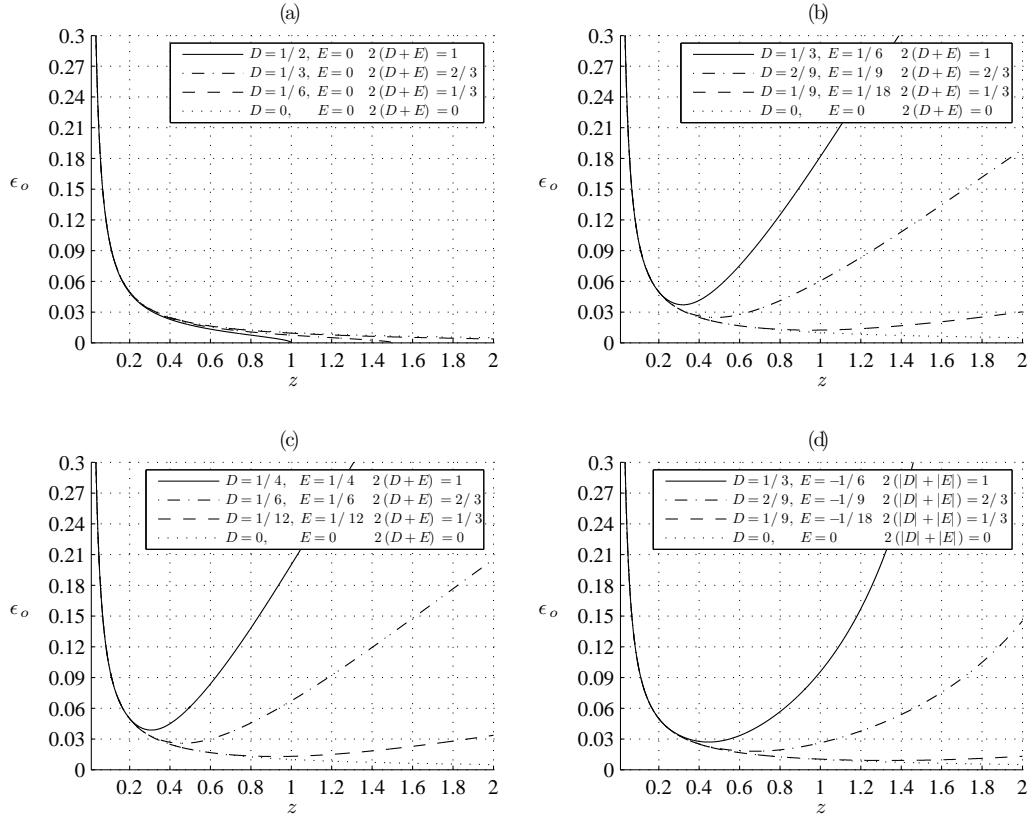


Figura C.1: Desviación estándar de la curvatura del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos de medida, z , suponiendo que se estima con la fórmula de Roddier, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólicos y el (d) a aproximaciones paraboloidales hiperbólicas.

de la fase cuadrática que en las representaciones análogas del Capítulo 2, donde se supuso $2(|D| + |E|) \leq V = 1$, siendo V la cota superior del valor absoluto de las curvaturas locales del frente en Σ . Estas curvas presentan un comportamiento similar al de las curvas asociadas a las fórmulas típicas en diferencias finitas, con excepción de las correspondientes a los frentes cuadráticos con forma de cilindro parabólico (con $D = 0$ ó $E = 0$), que muestran un comportamiento diferente al resto de aproximaciones cuadráticas. En concreto, a pesar de que las irradiancias asociadas a este tipo de frentes de onda evolucionan axialmente más alejadas del comportamiento lineal (ver Figura 2.6), el error de la curvatura no tiende a infinito cuando z alcanza la distancia focal. Puesto que D o E se anulan, también se anula el hessiano del frente cilíndrico, lo que implica que la señal (C.12) en Σ evoluciona linealmente en todo el rango axial proporcionalmente al valor del laplaciano. Es decir,

Fórmula central

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{\text{sup}}^2(h)}{V^2} & \quad \frac{1}{h^2} \left\{ \left(\frac{1}{N}\right) \left[1 - \left(\frac{h}{1+\frac{h^2}{4}}\right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{h}{1+\frac{h^2}{4}}\right)^2 \right] \right\} + \left(\frac{\frac{h^2}{4}}{1+\frac{h^2}{4}}\right)^2 \\ \frac{\epsilon_{\text{inf}}^2(h)}{V^2} & \quad \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{1}{N}\right) + 2 \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 \right] & \quad \text{si } \sigma \neq 0 \\ & \quad \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{N}\right) (1 - h^2) & \quad \text{si } \sigma = 0 \\ h_{\text{opt}} = f(N, \sigma) & \quad -\frac{2}{h_{\text{opt}}} \left\{ \left(\frac{1}{N}\right) \left[\left(1 + \frac{h_{\text{opt}}^2}{4}\right)^3 - \frac{h_{\text{opt}}^4}{4} \right] + 2 \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{h_{\text{opt}}^2}{4}\right)^3 + \frac{h_{\text{opt}}^4}{4} \right] \right\} \\ & \quad + \frac{h_{\text{opt}}^5}{4} \end{aligned}$$

Tabla C.1: Cota superior y cota inferior de error de la curvatura local y ecuación del plano óptimo para la fórmula de Roddier en función del número de fotones promedio captados en Σ durante el tiempo de exposición, N , y de la desviación del ruido de detección, σ .

en ausencia de ruido la señal proporcionada por el sensor para un frente cuadrático con $D = 0$ o $E = 0$ sería exacta independientemente de la separación escogida. Si no hay ruido de detección ($\sigma = 0$), la curva de error asociada al frente cilíndrico de curvatura máxima, $D = V/2$ y $E = 0$, constituye la cota inferior de error de la curvatura local estimada con la señal de Roddier. En presencia de ruido de detección ($\sigma \neq 0$), la cota inferior viene determinada por la curva de error asociada al frente de onda plano, $D = E = 0$.

La Figura C.1 nos informa de que el valor más alto de ϵ_o en la zona del mínimo, se da para los frentes de onda con forma de paraboloides parabólicos de curvatura V . En definitiva, recurriendo al razonamiento de la § 2.3.3 del Capítulo 2, la separación óptima se obtiene minimizando la varianza asociada a los frentes paraboloidales parabólicos de curvatura máxima. En la Tabla C.1 se indican, en función de las coordenadas axiales normalizadas a V , $h = Vz$, la cota superior de error, la cota inferior de error y la ecuación que liga la posición óptima, h_{opt} , con el número de fotones promedio detectados en Σ , N .

C.4. Varianza de la estimación de la derivada normal local y separación óptima

Supongamos ahora que el detector Σ pertenece a la región de frontera, está centrado en el ángulo θ y tiene dimensión radial L y angular $\Delta\theta$ (ver Figura 3.3). Las cuentas de fotones que proporciona en los planos $\pm z$ están promediadas espacialmente en el área del detector. Esto quiere decir que el detector promedia la irradiancia radialmente en L y angularmente en $\Delta\theta$ y la medida se asigna al ángulo θ .

Teniendo en cuenta las mismas hipótesis del apartado anterior para los frentes de onda turbulentos, podemos aproximar el frente de onda en el área de cada detector por la cuádrica de la Ec. (3.25). Las inclinaciones y las curvaturas de la cuádrica provocan deformaciones locales del borde de la región iluminada en cada plano axial, cuyo radio $R_o^\pm = R_o^\pm(\theta)$ en los planos $\pm z$ puede calcularse para cada ángulo θ por medio de la Ec. (3.28). Por otro lado, la irradiancia captada en cada plano axial por el detector Σ asociado al ángulo θ viene dada por la Ec. (3.32).

La señal $\hat{\mathcal{S}}_o = \hat{\mathcal{S}}_o(\theta)$ en el detector Σ con centro en el punto (R, θ) de la frontera, se obtiene a partir de la Ec. (C.2), es decir, como la diferencia de irradiancias captadas en los planos $+z$ y $-z$ normalizada a la suma de ambas irradiancias. La Ec. (C.11) puede expresarse en función de las medidas de irradiancia en la frontera, sustituyendo simplemente I por su promedio radial en el intervalo $[R - L/2, R + L/2]$, es decir, \mathcal{I} . Teniendo en cuenta además la Ec. (C.3), la varianza de la señal de Roddier en el detector Σ asociado a un ángulo θ del borde es:

$$\epsilon_o^2 = \left(\frac{L}{2z}\right)^2 \left\{ \frac{1}{N} (1 - \hat{\mathcal{S}}_o^2) + 2 \left(\frac{\sigma}{N}\right)^2 (1 + \hat{\mathcal{S}}_o^2) + \left[\hat{\mathcal{S}}_o - 2z \left(\frac{W_{or}}{L}\right) \right]^2 \right\} \quad (\text{C.14})$$

donde $N = \mathcal{I}_+ + \mathcal{I}_-$ son los fotones que Σ detecta en promedio durante el tiempo de exposición τ , y \mathcal{S}_o y W_{or} en Σ son:

$$\begin{aligned} W_{or} &= B \cos \theta + C \sin \theta + 2R(D \cos^2 \theta + E \sin^2 \theta) \\ \hat{\mathcal{S}}_o &= \frac{\frac{R_o^+ - R + L/2}{1 + 2(D+E)z + 4DEz^2} - \frac{R_o^- - R + L/2}{1 - 2(D+E)z + 4DEz^2}}{\frac{R_o^+ - R + L/2}{1 + 2(D+E)z + 4DEz^2} + \frac{R_o^- - R + L/2}{1 - 2(D+E)z + 4DEz^2}} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

donde se toma R_o^\pm de la Ec. (3.28) y B , C , D y E describen las características del frente de onda hasta orden dos en el área del detector.

En la Figura C.2 se representa la desviación ϵ_o de la derivada normal local estimada en un punto (R, θ) para las combinaciones de los parámetros de W_o

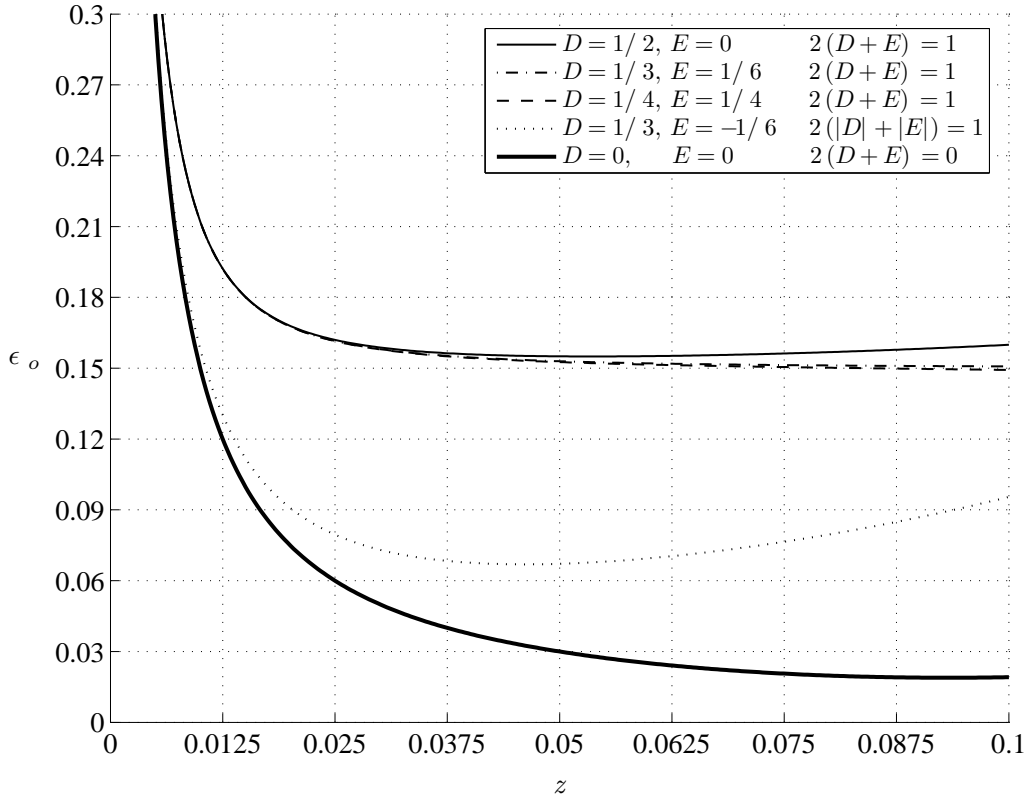


Figura C.2: Curvas de error de la derivada normal local estimada en Σ utilizando la configuración de Roddier, para $N = 10^4$, $\sigma = 0$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y aproximaciones cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano.

indicadas, tales que $U = 1$ y $V = 1$. Se supone que el detector es cuasiideal ($\sigma = 0$) y capta $N = 10^4$ fotones en total durante el tiempo de exposición. Como en las figuras análogas del Capítulo 3, se ha tomado $L = 0,3R$ para la dimensión radial del anillo de detectores y se ha calculado la desviación estándar en cada uno de los ángulos y representado el máximo de todos los errores obtenidos en cada plano z . Cada curva dibujada es, entonces, la menor cota superior del error de \hat{W}_{o_r} .

Estas curvas presentan las mismas características enumeradas en la § 3.4.2 para las curvas asociadas a las fórmulas clásicas en diferencias finitas. Por este motivo, la separación óptima viene determinada por el mínimo de la curva correspondiente al frente de onda cilíndrico: $D = V/2$ y $E = 0$, con el valor más alto de $\sqrt{B^2 + C^2}$.

Ahora bien, para maximizar el rendimiento del sensor de curvatura, hemos visto en el Capítulo 3 que hay que calcular un tamaño óptimo de la región de frontera, L , ajustándolo a la deformación radial máxima de la región iluminada en la separación óptima, $R_o^+ - R_o^-$. Llevando a cabo el proceso que, con este fin, se describe en la § 3.5

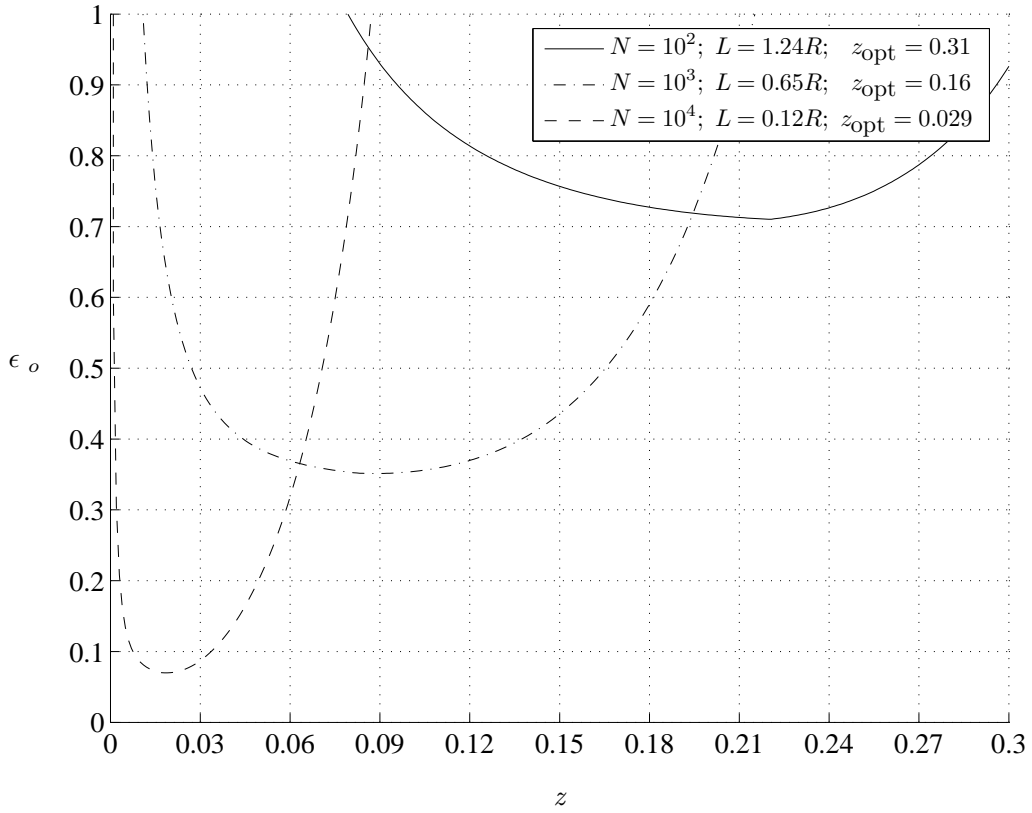


Figura C.3: Curvas de error de la derivada normal local de la fase en la frontera estimada con la configuración de Roddier cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada, suponiendo que en Σ se detecta el número de fotones promedio N indicado y $\sigma = 0$. Adicionalmente, se incluye la separación óptima, z_{opt} .

se obtiene la Figura C.3, donde se muestra el aspecto de la curva para $D = 1/2$, $E = 0$ y $\sqrt{B^2 + C^2} = 1$, suponiendo que se detectan $N = 10^2$, $N = 10^3$ y $N = 10^4$ fotones. Comparando esta figura con la Figura B.11(a) se comprueba que el resultado es algo más preciso para la fórmula central que para la fórmula de Roddier. La diferencia es más significativa conforme disminuye el número de fotones disponible.

Índice de figuras

1.1.	Ilustración de un típico experimento de recuperación de fase basado en la ETI en un plano $z = 0$ a la salida de un objeto o medio difractivo.	9
1.2.	Esquema para ilustrar el significado físico de la ETI particularizada a intensidad uniforme en el plano de recuperación de fase. Los rayos convergen y divergen debido a la influencia de las curvaturas locales del frente de onda, redistribuyéndose la irradiancia de los planos posteriores. En consecuencia, la intensidad aumenta en unas zonas y disminuye en otras, y se producen movimientos del borde que deforman la región iluminada.	11
1.3.	Configuraciones típicas del sensor de curvatura con dos planos de medida transversales al eje óptico para estimar la derivada axial de la irradiancia en el plano de recuperación, $z = 0$.	13
2.1.	Ejemplos de los cuatro tipos de superficies cuadráticas seleccionadas para estudiar el rendimiento del sensor de curvatura.	29
2.2.	Desviación estándar de la curvatura del frente de onda cuadrático en función de la posición de los planos de medida, z , suponiendo que se estima con la fórmula central de Stirling, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a frentes de onda con forma de cilindro parabólico, el (b) a frentes de onda con forma de paraboloides elíptico, el (c) a frentes de onda con forma de paraboloides parabólico y el (d) a frentes de onda de tipo paraboloides hiperbólico.	31

- 2.3. Desviación estándar de la curvatura del frente de onda cuadrático en función de la posición de los planos de medida, z , suponiendo que se estima con la fórmula progresiva de Newton, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a frentes de onda con forma de cilindro parabólico, el (b) a frentes de onda con forma de paraboloides elíptico, el (c) a frentes de onda con forma de paraboloides parabólico y el (d) a frentes de onda de tipo paraboloides hiperbólico. 32
- 2.4. Desviación estándar de la curvatura del frente de onda cuadrático en función de la posición de los planos de medida, z , suponiendo que se estima con la fórmula regresiva de Newton, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a frentes de onda con forma de cilindro parabólico, el (b) a frentes de onda con forma de paraboloides elíptico, el (c) a frentes de onda con forma de paraboloides parabólico y el (d) a frentes de onda de tipo paraboloides hiperbólico. 33
- 2.5. Evolución del error de las curvaturas de los frentes de onda cuadráticos que verifican $2(|D|+|E|) = 1$ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estiman con la fórmula central (a), con la fórmula regresiva (b) y con la fórmula progresiva (c), bajo la influencia de ruido de detección con desviación relativa $\sigma/I_o = 0,01$ 34
- 2.6. Evolución axial de la intensidad para las fases cuadráticas de laplaciano unidad analizadas. En línea de puntos se representa la aproximación lineal proporcional al laplaciano. 35
- 2.7. Cota superior de error, ϵ_{sup} , y cota inferior de error, ϵ_{inf} , de la estimación de la curvatura local de la fase en Ω con la fórmula central (a) y con las fórmulas de Newton (b), para varios niveles del ruido de detección, σ/I_o 39
- 2.8. Posición óptima de los planos y cotas superior e inferior de error de la curvatura local de la fase en Ω , en función del nivel de ruido en el plano de la abertura, σ/I_o , para la fórmula central. Con el símbolo “o” se indican algunos de los puntos utilizados para realizar el ajuste, que se obtienen a partir de las Ecs. (2.22), (2.23) o (2.24) para cada valor de σ/I_o . La línea continua representa el ajuste de los puntos. . . 41

2.9. Posición óptima de los planos y cotas superior e inferior de error de la curvatura local de la fase en Ω , en función del nivel de ruido en el plano de la abertura, σ/I_o , para las fórmulas de Newton. Con el símbolo “o” se indican algunos de los puntos utilizados para realizar el ajuste, que se obtienen a partir de la Ec. (2.25), (2.26) o (2.27) para cada valor de σ/I_o . La línea continua representa el ajuste de los puntos. 42

3.1. Ejemplo de evolución de la zona geoméricamente iluminada desde el plano de la abertura, $z = 0$, a un plano desplazado, z 52

3.2. (a) Ejemplo de perfiles de irradiancia en planos $\pm z$ y $z = 0$ perpendiculares al eje del sistema. (b) Suma y resta de las irradiancias de los planos $+z$ y $-z$ 55

3.3. Ejemplo de matriz de detectores en la región de frontera. En línea de puntos se dibujan las zonas iluminadas en el plano de la pupila, $z = 0$, y en un plano desplazado, z 59

3.4. Curvas de error de \hat{W}_{or} estimada con la configuración central (a), con la configuración progresiva (b) y con la regresiva (c), utilizando el método directo para $\sigma/I_o = 0,01$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y fases cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano. 67

3.5. Curvas de error de \hat{W}_{or} estimada con la configuración central (a), con la configuración progresiva (b) y con la regresiva (c), utilizando el método indirecto para $\sigma/I_o = 0,01$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y fases cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano. 68

3.6. Representación frente a z de la desviación estándar máxima de la derivada normal de la fase cuadrática con $\sqrt{B^2 + C^2} = 1$, $D = 1/2$, $E = 0$, estimada con el método indirecto empleando las fórmulas en diferencias finitas indicadas, siendo $R = 1$ y $L = 0,3R$ en cada caso. . 70

3.7. Derivada normal y angular del frente cilíndrico parabólico con $B = 1$, $C = 0$, $D = 1/2$ y $E = 0$ en la frontera. 71

- 3.8. Secuencia que muestra la evolución del borde de la región iluminada desde el plano $z = 0$ al plano z . En línea delgada continua se representa la pupila en el plano $z = 0$. En línea gruesa continua se muestra el borde de la región iluminada en cada plano z , que corresponde a la fase W . Por último, en línea discontinua se muestra la evolución del borde de la región iluminada que predice la aproximación cuadrática W_o en la dirección $\theta = \pi/3$ 73
- 3.9. Curvas de error de la derivada normal de la fase en la frontera estimada con la configuración central (a) y en la de Newton (b), cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación máxima de la región iluminada, suponiendo el nivel de ruido en el plano de recuperación, σ/I_o , indicado. Adicionalmente se incluye la separación óptima, z_{opt} 76
- 3.10. Derivada normal de la fase en la frontera correspondiente al frente cilíndrico parabólico con $B = C = 5,1 \cdot 10^{-7}$, $D = 3,95 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ y $E = 0 \text{ m}^{-1}$ 78
- 4.1. Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en un entorno Ω en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula central de Stirling particularizada a $M = 8$ planos de medida, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólicos y el (d) a aproximaciones de tipo paraboloides hiperbólicos. 89
- 4.2. Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en un entorno Ω en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula progresiva de Newton particularizada a $M = 8$ planos de medida, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólicos y el (d) a aproximaciones de tipo paraboloides hiperbólicos. 90

4.3.	Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en un entorno Ω en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula regresiva de Newton particularizada a $M = 8$ planos de medida, siendo $\sigma/I_o = 0,01$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólico y el (d) a aproximaciones de tipo paraboloides hiperbólico.	91
4.4.	Curvas de error de la derivada normal local estimada en un entorno Ω en la configuración central (a) y en la de Newton (b) particularizadas a $M = 8$ planos de medida, para $\sigma/I_o = 0,01$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y aproximaciones cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano.	94
4.5.	Cota superior de error, ϵ_{sup} , y cota inferior de error, ϵ_{inf} , de la estimación de la curvatura de la fase con la fórmula central (a) y con la de Newton (b) particularizadas a $M = 8$ planos, para varios niveles del ruido de detección, σ/I_o	97
4.6.	Evolución de la cota superior de error de la curvatura local en función del número de planos de medida, suponiendo que se estima con la fórmula central en diferencias finitas, (a), y con la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b). En ambos casos $\sigma/I_o = 0,01$	99
4.7.	Evolución de la separación interplanos conforme crece el número de planos de medida, para la fórmula central en diferencias finitas, (a), y para la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b), suponiendo $\sigma/I_o = 0,01$	100
4.8.	Evolución de la posición de los planos más alejados de $z = 0$ conforme crece el número de planos de medida, para la fórmula central en diferencias finitas, (a), y para la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b), suponiendo $\sigma/I_o = 0,01$	101
4.9.	Nivel de ruido de medida, σ/I_o , asumible en un sensor que funciona con dos planos de medida, para garantizar la recuperación de una curvatura local de magnitud V en el esquema central con la misma precisión que un sensor de curvatura multiplano que utiliza un detector afectado por ruido de detección con desviación relativa $\sigma/I_o = 0,01$	102

- 4.10. Curvas de error de la derivada normal de la fase en la frontera estimada con la configuración central (a) y la de Newton (b) particularizadas a $M = 8$ planos de medida, cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada, suponiendo el nivel de ruido en el plano de recuperación, σ/\mathcal{I}_o , indicado. Adicionalmente, se incluye la separación óptima, z_{opt} 103
- 5.1. Representación del producto de la intensidad por la parte radial de la función de peso en la frontera, en función del parámetro β del perfil de la intensidad para tres modos armónicos. 124
- B.1. Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula central particularizada a $M = 2$ planos de medida, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólicos y el (d) a aproximaciones con forma de paraboloides hiperbólicos. 138
- B.2. Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula central particularizada a $M = 8$ planos de medida, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólicos y el (d) a aproximaciones con forma de paraboloides hiperbólicos. 139
- B.3. Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula regresiva particularizada a $M = 2$ planos de medida, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólicos y el (d) a aproximaciones con forma de paraboloides hiperbólicos. 140

B.4. Desviación estándar de la curvatura local del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos, z , suponiendo que se estima con la fórmula regresiva particularizada a $M = 8$ planos de medida, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólico y el (d) a aproximaciones con forma de paraboloides hiperbólico. 141

B.5. Evolución de las cotas superior e inferior de error de la curvatura local en función del número de planos de medida, suponiendo que se estima con la fórmula central en diferencias finitas, (a), y con la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b). En ambos casos $N = 10^4$ y $\sigma = 0$ 144

B.6. Evolución de las cotas superior e inferior de error de la curvatura local en función del número de planos de medida, suponiendo que se estima con la fórmula central en diferencias finitas, (a), y con la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b). En ambos casos $N = 10^4$ y $\sigma = 100$ 145

B.7. Evolución de la separación interplanos conforme crece el número de planos de medida, para la fórmula central en diferencias finitas, (a), y para la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b), suponiendo $N = 10^4$ con $\sigma = 0$ y $\sigma = 100$ 146

B.8. Evolución de la posición de los planos más alejados de $z = 0$ conforme crece el número de planos de medida, para la fórmula central en diferencias finitas, (a), y para la fórmula progresiva y regresiva de Newton, (b), suponiendo $N = 10^4$ con $\sigma = 0$ y $\sigma = 100$ 147

B.9. Curvas de error de la derivada normal local de la fase estimada en Σ utilizando el método indirecto en la configuración central particularizada a $M = 2$ planos (a) y a $M = 8$ planos de medida (b), para $N = 10^4$, $\sigma = 0$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y aproximaciones cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano. 149

- B.10. Curvas de error de la derivada normal local de la fase estimada en Σ utilizando el método indirecto en la configuración progresiva particularizada a $M = 2$ planos (a) y a $M = 8$ planos de medida (b), para $N = 10^4$, $\sigma = 0$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y aproximaciones cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano. 150
- B.11. Curvas de error de la derivada normal local de la fase en la frontera estimada con la configuración central particularizada a $M = 2$ planos (a) y a $M = 8$ planos de medida (b), cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada, suponiendo que en Σ se detecta el número de fotones promedio N indicado y $\sigma = 0$. Adicionalmente, se incluye la separación óptima, z_{opt} 151
- B.12. Curvas de error de la derivada normal local de la fase en la frontera estimada con la configuración progresiva particularizada a $M = 2$ planos (a) y a $M = 8$ planos de medida (b), cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada, suponiendo que en Σ se detecta el número de fotones promedio N indicado y $\sigma = 0$. Adicionalmente, se incluye la separación óptima, z_{opt} 152
- C.1. Desviación estándar de la curvatura del frente de onda en Σ en función de la posición de los planos de medida, z , suponiendo que se estima con la fórmula de Roddier, con $N = 10^4$ y $\sigma = 0$. El apartado (a) corresponde a aproximaciones cuadráticas con forma de cilindro parabólico, el (b) a aproximaciones con forma de paraboloides elíptico, el (c) a aproximaciones con forma de paraboloides parabólico y el (d) a aproximaciones paraboloidales hiperbólicas. 158
- C.2. Curvas de error de la derivada normal local estimada en Σ utilizando la configuración de Roddier, para $N = 10^4$, $\sigma = 0$, $L = 0,3R$, $R = 1$ y aproximaciones cuadráticas con $U = V = 1$. También se representa el resultado para el frente de onda plano. 161

C.3. Curvas de error de la derivada normal local de la fase en la frontera estimada con la configuración de Roddier cuando el tamaño de la zona de detección, L , se ajusta a la deformación radial máxima de la región iluminada, suponiendo que en Σ se detecta el número de fotones promedio N indicado y $\sigma = 0$. Adicionalmente, se incluye la separación óptima, z_{opt} 162

Índice de tablas

2.1. Parámetros del telescopio Gemini y de las condiciones de visibilidad en el observatorio de Mauna Kea (Hawaii).	44
2.2. Covarianzas no nulas asociadas a los 56 primeros polinomios de Zernike cuyo valor medio espacial en el círculo de radio unidad no se anula.	46
4.1. Coeficientes a_j correspondientes a la fórmula central en función del número de planos.	84
4.2. Coeficientes b_j correspondientes a la fórmula progresiva y regresiva en función del número de planos.	86
4.3. Coeficientes \tilde{a}_m para distintos valores de m	87
5.1. Polinomios de Zernike y funciones de peso asociadas para iluminación uniforme.	116
5.2. Coeficientes de ajuste de la parte radial de las funciones pseudoanalíticas de Karhunen-Loève [172].	117
5.3. Polinomios de Apell y Kampé de Fériet.	118
5.4. Polinomios de Zernike y funciones de peso asociadas para un perfil gaussiano de intensidad.	123
B.1. Varianza de la curvatura local, cotas superior e inferior de error y ecuación del plano óptimo para la fórmula central con dos planos de medida, en función del número de fotones promedio detectados en Σ durante el tiempo de exposición, N , y de la desviación del ruido de detección, σ	142

-
- B.2. Varianza de la curvatura local, cotas superior e inferior de error y ecuación del plano óptimo para las fórmulas progresiva y regresiva con dos planos de medida, en función del número de fotones promedio detectados en Σ durante el tiempo de exposición, N , y de la desviación del ruido de detección, σ 142
- B.3. Varianza de la derivada normal local estimada en Σ utilizando las fórmulas de Stirling o de Newton particularizadas a $M = 2$ planos de medida, en función del número de fotones promedio captados por el detector durante el tiempo de exposición, N , y del nivel de ruido de detección, σ/N 148
- C.1. Cota superior y cota inferior de error de la curvatura local y ecuación del plano óptimo para la fórmula de Roddier en función del número de fotones promedio captados en Σ durante el tiempo de exposición, N , y de la desviación del ruido de detección, σ 159

Bibliografía

- [1] J. M. Geary, *Introduction to Wavefront Sensors (Tutorial Texts in Optical Engineering)*, SPIE-The International Society for Optical Engineering (Bellingham, Washington, 1995).
- [2] D. Malacara ed., *Optical Shop Testing* (John Wiley and Sons, Nueva York, 1978).
- [3] G. Vdovin, "Reconstruction of an object shape from the near-field intensity of a reflected paraxial beam", *Appl. Opt.* vol. 36(22), pp. 5508-5513 (1997).
- [4] C. Koliopoulos, O. Kwon, R. Shagam, J. C. Wyant, C. R. Hayslett, "Infrared point-diffraction interferometer", *Opt. Lett.* vol. 3(3), pp. 118-120 (1978).
- [5] D. Malacara, Z. Malacara, "Testing and centering of lenses by means of a Hartmann test with four holes", *Opt. Eng.* vol. 31(7), pp. 1551-1555 (1992).
- [6] R. K. Tyson ed., *Adaptive optics engineering handbook* (Marcel Dekker, Inc., Nueva York, 2000).
- [7] J. W. Hardy, J. Feinleib, J. C. Wyant, "Real time phase correction of optical imaging systems", Conferencia presentada en el *Topical Meeting on Optical Propagation through Turbulence*, University of Colorado, Boulder, Colorado, 9-11 julio 1994.
- [8] J. W. Hardy, J. E. Lefebvre, C. L. Koliopoulos, "Real-time atmospheric compensation", *J. Opt. Soc. Am.* vol. 67(3), pp. 360-369 (1977).
- [9] J. W. Hardy, "Active Optics: A New Technology for the Control of Light", *Proc. IEEE* vol. 66(6), pp. 651-697 (1978).

- [10] F. Roddier, M. Northcott, J. E. Graves, “A simple low-order adaptive optics system for near-infrared applications”, *Pub. Astron. Soc. Pac.* vol. 103, pp. 131-149 (1991).
- [11] G. P. Collins, “Making stars to see stars: DOD adaptive optics work is declassified”, *Phys. Today* vol. 45, pp. 17-21 (1992).
- [12] J. M. Beckers, “Adaptive Optics for Astronomy: Principles, Performance, and Applications”, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* vol. 31, pp. 13-62 (1993).
- [13] T. Reichhardt, “Astronomy adapts to sharpen up its image”, *Nature* vol. 400, pp. 807 (1999).
- [14] M. C. Roggemann, B. Welsh, *Imaging through turbulence* (CRC Press, Boca Raton, 1996).
- [15] François Roddier ed., *Adaptive Optics in Astronomy* (University Press, Cambridge, 1999).
- [16] C. Roddier, F. Roddier, “Wave-front reconstruction from defocused images and the testing of ground-based optical telescopes”, *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 10, pp. 2277-2287 (1993).
- [17] C. Roddier, J. E. Graves, M. J. Northcott, F. Roddier, “Testing optical telescopes from defocused stellar images”, *Proc. SPIE* vol. 2199, pp. 1172-1177 (1994).
- [18] N. Hubin, M. Le Louarn, M. Sarazin, A. Tohovinin, E. Viard, “New challenges for adaptive optics: the OWL 100m telescope”, *Proc. SPIE* vol. 4007 (2000).
- [19] B. Sicardy, F. Roddier, C. Roddier, E. Perozzi, J. E. Graves, O. Guyon, M. J. Northcott, “Images of Neptune’s ring arcs obtained by a ground-based telescope”, *Nature* vol. 400, pp. 731-733 (1999).
- [20] W. J. Merline, L. M. Close, C. Dumas, C. R. Chapman, F. Roddier, F. Ménard, D. C. Slater, G. Duvert, C. Shelton, T. Morgan, “Discovery of a moon orbiting the asteroid 45 Eugenia”, *Nature* vol. 401, pp. 565-568 (1999).
- [21] R. W. Gerchberg, W. O. Saxton, “A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures”, *Optik* vol. 35(2), pp. 237-246 (1972).

- [22] J. R. Fienup, "Phase retrieval algorithms: a comparison", *Appl. Opt.* vol. 21(15), pp. 2758-2769 (1982).
- [23] M. R. Teague, "Irradiance moments: their propagation and use for unique phase retrieval of phase", *J. Opt. Soc. Am.* vol. 72(9), pp. 1199-1209 (1982).
- [24] M. R. Teague, "Deterministic phase retrieval: a Green's function solution", *J. Opt. Soc. Am.* vol. 73, pp. 1434-1441 (1983).
- [25] M. R. Teague, "Image formation in terms of the transport equation", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 2(11), pp. 2019-2026 (1985).
- [26] J. N. Cederquist, J. R. Fienup, C. C. Wackerman, S. R. Robinson, D. Kryskowski, "Wave-front phase estimation from Fourier intensity measurements", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 6(7), pp. 1020-1026 (1989).
- [27] C. Roddier, F. Roddier, "Combined approach to the Hubble Space Telescope wave-front distortion analysis", *Appl. Opt.* vol. 32(16), pp. 2992-3008 (1993).
- [28] J. R. Fienup, B. J. Thelen, R. G. Paxman, D. A. Carrara, "Comparison of Phase Diversity and Curvature Wavefront Sensing", *Proc. SPIE* vol. 3353, pp. 930-940 (1998).
- [29] K. G. Larkin, C. J. R. Sheppard, "Direct method for phase retrieval from the intensity of cylindrical wave fronts", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 16(7), pp. 1838-1844 (1999).
- [30] G. Keshava Datta, R. M. Vasu, "Non-interferometric methods of phase estimation for application in optical tomography", *J. Modern Opt.* vol. 46(9), pp. 1377-1388 (1999).
- [31] J. B. Tiller, A. Barty, D. Paganin, K. A. Nugent, "The holographic twin image problem: a deterministic phase solution", *Opt. Commun.* vol. 183, pp. 7-14 (2000).
- [32] K. A. Nugent, D. Paganin, T. E. Gureyev, "A phase odyssey", *Phys. Today* vol. 54(8), pp. 27-32 (2001).
- [33] P. M. Blanchard, D. J. Fisher, S. C. Woods, A. H. Greenaway, "Phase-diversity wave-front sensing with a distorted diffraction grating", *Appl. Opt.* vol. 39(35), pp. 6649-6655 (2000).

- [34] M. J. Bastiaans, K. B. Wolf, "Phase reconstruction from intensity measurements in linear systems", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 20(6), pp. 1046-1049 (2003).
- [35] H. I. Campbell, S. Zhang, A. H. Greenaway, S. Restaino, "Generalized phase diversity for wave-front sensing", *Opt. Lett.* vol. 29(23), pp. 2707-2709 (2004).
- [36] T. E. Gureyev, T. J. Davis, A. Pogani, S. C. Mayo, S. W. Wilkins, "Optical phase retrieval by use of first Born and Rytov-type approximations", *Appl. Opt.* vol. 43(12), pp. 2418-2430 (2004).
- [37] E. Kolenovic, "Correlation between intensity and phase in monochromatic light", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 22(5), pp. 899-906 (2005).
- [38] N. A. Bharmal, D. F. Buscher, C. A. Haniff, "Near-focus high-sensitivity wavefront sensing", *Mon. Not. R. Astron. Soc.* vol. 360, pp. 1325-1332 (2005).
- [39] S. R. Robinson, "On the problem of phase from intensity measurements", *J. Opt. Soc. Am.* vol. 68(1), pp. 87-92 (1978).
- [40] A. J. Devaney, R. Chidlaw, "On the uniqueness question in the problem of phase retrieval from intensity measurements", *J. Opt. Soc. Am.* vol. 68(10), pp. 1352-1354 (1978).
- [41] J. T. Foley, R. R. Butts, "Uniqueness of phase retrieval from intensity measurements", *J. Opt. Soc. Am.* vol. 71(8), pp. 1008-1014 (1981).
- [42] J. R. Fienup, "Phase retrieval using boundary conditions", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 3(2), pp. 284-288 (1986).
- [43] M. Fernández-Guasti, J. L. Jiménez, F. Granados-Agustín, A. Cornejo-Rodríguez, "Amplitude and phase representation of monochromatic fields in physical optics", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 20(8), pp. 1629-1634 (2003).
- [44] D. Paganin, K. A. Nugent, "Phase measurement of waves that obey nonlinear equations", *Opt. Lett.* vol. 27(8), pp. 622-624 (2002).
- [45] C. Dorrer, "Characterization of nonlinear phase shifts by use of the temporal transport-of-intensity equation", *Opt. Lett.* vol. 30, pp. 3237-3239 (2005).
- [46] N. Streibl, "Phase imaging by the transport equation of intensity", *Opt. Commun.* vol. 49(1), pp. 6-10 (1984).

- [47] G. Ade, "On the validity of the transport equation for the intensity in Optics", *Opt. Commun.* vol. 52(5), pp. 307-310 (1985).
- [48] T. E. Gureyev, A. Roberts, K. A. Nugent, "Partially coherent fields, the transport-of-intensity equation, and phase uniqueness", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 12(9), pp. 1942-1946 (1995).
- [49] D. Paganin, K. A. Nugent, "Noninterferometric Phase Imaging with Partially Coherent Light", *Phys. Rev. Lett.* vol. 80(12), pp. 2586-2589 (1998).
- [50] F. Roddier, "Curvature sensing and compensation: a new concept in adaptive optics", *Appl. Opt.* vol. 27(7), pp. 1223-1225 (1988).
- [51] J. M. Beckers, "Interpretation of out-of-focus star images in terms of wave-front curvature", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 11(1), pp. 425-427 (1994).
- [52] N. Roddier, F. Roddier, "Curvature sensing and compensation: a computer simulation", *Proc. SPIE* vol. 1114, pp. 92-96 (1989).
- [53] F. Rigaut, R. Arsenault, J. Kerr, D. Salmon, M. Northcott, Y. Dutil, C. Boyer, "The Canada-France-Hawaii adaptive optics bonette II: simulations and control", *Proc. SPIE* vol. 2201, pp. 149-160 (1994).
- [54] F. Roddier, C. Roddier, J. E. Graves, K. Jim, M. J. Northcott, "Adaptive Optics Imaging at the CFHT", *Proc. of the 4th CFHT Users Meeting*, pp. 125-131 (1995).
- [55] L. Salas, L. Gutiérrez, M. H. Pedrayes, J. Valdez, C. Carrasco, M. Carrillo, B. Orozco, B. García, E. Luna, E. Ruíz, S. Cuevas, A. Iriarte, A. Cordero, O. Harris, F. Quiroz, E. Sohn, L. A. Martínez, "Active primary mirror support for the 2.1-m telescope at the San Pedro Mártir Observatory", *Appl. Opt.* vol. 36(16), pp. 3708-3716 (1997).
- [56] F. Rigaut, B. L. Ellerbroek, M. Northcott, "Comparison of curvature-based and Shack-Hartmann-based adaptive optics for the Gemini telescope", *Appl. Opt.* vol. 36(13), pp. 2856-2868 (1997).
- [57] F. Rigaut, D. Salmon, R. Arsenault, J. Thomas, O. Lai, D. Rouan, J. P. Véran, P. Gigan, D. Crampton, J. M. Fletcher, J. Stilburn, C. Boyer, P. Jagourel, "Performance of the Canada-France-Hawaii Telescope Adaptive Optics Bonette", *Pub. Astron. Soc. Pac.* vol. 110, pp. 152-164 (1998).

- [58] J. E. Graves, M. Northcott, F. Roddier, C. Roddier, L. Close, “First Light for Hokupa’a: 36 Element Curvature AO System at UH”, *Proc. SPIE* vol. 3353, pp. 34-43 (1998).
- [59] H. Takami, N. Takato, Y. Hakano, M. Iye, S. Oya, Y. Kamata, T. Kanzawa, Y. Minowa, M. Otsubo, K. Nakashima, W. Gaessler, D. Saint-Jacques, “Performance of Subaru Cassegrain Adaptive Optics System”, *Pub. Astron. Soc. Pac.* vol. 56, pp. 225-234 (2004).
- [60] A. Stockton, G. Canalizo, S. Ridgway, “High-resolution K' imaging of the $z = 1,786$ Radio Galaxy 3C 294”, *Astrophys. J.* vol. 519, pp. 131-134 (1999).
- [61] <http://www.cfht.hawaii.edu/Instruments/Imaging/AOB/publications.html>
- [62] <http://www.ifa.hawaii.edu/ao/publi/publi.html>
- [63] <http://www.gemini.edu/sciops/instruments/adaptiveOptics/AOIndex.html>
- [64] <http://www.naoj.org/Observing/Proposals/Publish/index.html>
- [65] J. M. Rodríguez-Ramos, J. J. Fuensalida, “Phasing of segmented mirrors: a new algorithm and numerical results for piston detection”, *Proc. SPIE* vol. 4003, pp. 270-278 (2000).
- [66] J. M. Rodríguez-Ramos, J. J. Fuensalida, “Phasing of segmented mirrors: a new algorithm for piston detection”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* vol. 328, pp. 167-173 (2001).
- [67] E. N. Ribak, E. Gershnik, M. Cheselka, “Stellar scintillations as a remote atmospheric wave-front sensor”, *Opt. Lett.* vol. 21(6), pp. 435-437 (1996).
- [68] S. R. Restaino, “Wave-front sensing and image deconvolution of solar data”, *Appl. Opt.* vol. 31(35), pp. 7442-7449 (1992).
- [69] R. Kupke, F. Roddier, D. L. Mickey, “Curvature-based wavefront sensor for use on extended patterns”, *Proc. SPIE* vol. 2201, pp. 519-527 (1994).
- [70] G. Molodij, F. Roddier, R. Kupke, D. L. Mickey, “Curvature wavefront sensor for solar adaptive optics”, *Solar Phys.* vol. 206, pp. 189-206 (2002).

- [71] M. Toyoda, K. Araki, Y. Suzuki, “Wave-front tilt sensor with two quadrant detectors and its application to a laser beam pointing system”, *Appl. Opt.* vol. 41(12), pp. 2219-2223 (2002).
- [72] J. A. Quiroga, J. A. Gómez-Pedrero, J. C. Martínez-Antón, “Wavefront measurement by solving the irradiance transport equation for multifocal systems”, *Opt. Eng.* vol. 40(12), pp. 2885-2891 (2001).
- [73] S. Gruppetta, L. Koechlin, F. Lacombe, P. Puget, “Curvature sensor for the measurement of the static corneal topography and the dynamic tear film topography in the human eye”, *Opt. Lett.* vol. 30(20), pp. 2757-2759 (2005).
- [74] S. Gruppetta, F. Lacombe, P. Puget, “Study of the dynamic aberrations of the human tear film”, *Opt. Express.* vol. 13(19), pp. 7631-7636 (2005).
- [75] F. Díaz-Douton, J. Pujol, M. Arjona, S. O. Luque, “Curvature sensor for ocular wavefront measurement”, *Opt. Lett.* vol. 31(15), pp. 2245-2247 (2006).
- [76] K. A. Nugent, T. E. Gureyev, D. Cookson, D. Paganin, Z. Barnea, “Quantitative phase imaging using hard x-rays”, *Phys. Rev. Lett.* vol. 77, pp. 2961-2964 (1996).
- [77] S. Ríos, L. Gato, E. Acosta, T. Kato, K. Iga, “Estimation of Optical Phase Aberrations of Micro-Optics Components by the Irradiance Transport Equation”, *Jpn. J. Appl. Phys.* vol. 37, pp. 3686-3690 (1998).
- [78] T. E. Gureyev, S. W. Wilkins, “On x-ray phase retrieval from polychromatic images”, *Opt. Commun.* vol. 147, pp. 229-232 (1998).
T. E. Gureyev, S. W. Wilkins, “On x-ray phase retrieval from polychromatic images (erratum)”, *Opt. Commun.* vol. 154, p. 391 (1998).
- [79] T. E. Gureyev, S. W. Wilkins, “On x-ray phase imaging with a point source”, *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 15(3), pp. 579-585 (1998).
- [80] A. Barty, K. A. Nugent, D. Paganin, A. Roberts, “Quantitative optical phase microscopy”, *Opt. Lett.* vol. 23(11), pp. 817-819 (1998).
- [81] T. E. Gureyev, C. Raven, A. Snigirev, I. Snigireva, S. W. Wilkins, “Hard x-ray quantitative non-interferometric phase-contrast microscopy”, *J. Phys. D: Appl. Phys.* vol. 32, pp. 563-567 (1999).

- [82] N. Jayshree, G. Keshava Datta, R. M. Vasu, "Optical tomographic microscope for quantitative imaging of phase objects", *Appl. Opt.* vol. 39(2), 277-283 (2000).
- [83] B. E. Allman, P. J. McMahon, K. A. Nugent, D. Paganin, D. L. Jacobson, M. Arif, S. A. Werner, "Phase radiography with neutrons", *Nature* vol. 408, pp. 158-159 (2000).
- [84] B. E. Allman, P. J. McMahon, J. B. Tiller, K. A. Nugent, D. Paganin, A. Barty, "Noninterferometric quantitative phase imaging with soft x rays", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 17(10), pp. 1732-1743 (2000).
- [85] A. Barty, K. A. Nugent, A. Roberts, D. Paganin, "Quantitative phase tomography", *Opt. Commun.* vol. 175, pp. 329-336 (2000).
- [86] S. Bajt, A. Barty, K. A. Nugent, M. McCartney, M. Wall, D. Paganin, "Quantitative phase-sensitive imaging in a transmission electron microscope", *Ultramicrosc.* vol. 83, pp. 67-73 (2000).
- [87] T. E. Gureyev, S. Mayo, S. W. Wilkins, D. Paganin, A. W. Stevenson, "Quantitative In-Line Phase-Contrast Imaging with Multienergy X Rays", *Phys. Rev. Lett.* vol. 86(25), pp. 5827-5830 (2001).
- [88] M. De Graef, Y. Zhu, "Quantitative noninterferometric Lorentz microscopy", *J. Appl. Phys.* vol. 89(11), pp. 7177-7179 (2001).
- [89] M. De Graef, M. A. Willard, D. E. Laughlin, M. E. McHenry, "Lorentz Microscopy Observations of a Nanocrystalline $\text{Fe}_{44}\text{Co}_{44}\text{Zr}_7\text{B}_4\text{Cu}_1$ Alloy", *IEEE Trans. Mag.* vol. 37(4), pp. 2343-2346 (2001).
- [90] L. J. Allen, M. P. Oxley, "Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation", *Opt. Commun.* vol. 199, pp. 65-75 (2001).
- [91] C. J. R. Sheppard, "Three-dimensional phase imaging with the intensity transport equation", *Appl. Opt.* vol. 41(28), pp. 5951-5955 (2002).
- [92] E. D. Barone-Nugent, A. Barty, K. A. Nugent, "Quantitative phase-amplitude microscopy I: optical microscopy", *J. Microsc.* vol. 206(3), pp. 194-203 (2002).
- [93] P. J. McMahon, E. D. Barone-Nugent, B. E. Allman, K. A. Nugent, "Quantitative phase-amplitude microscopy II: differential interference contrast imaging for biological TEM", *J. Microsc.* vol. 206(3), pp. 204-208 (2002).

- [94] S. C. Mayo, P. R. Miller, S. W. Wilkins, T. J. Davis, D. Gao, T. E. Gureyev, D. Paganin, D. J. Parry, A. Pogany, A. W. Stevenson, “Quantitative X-ray projection microscopy: phase-contrast and multi-spectral imaging”, *J. Microsc.* vol. 207(2), pp. 79-96 (2002).
- [95] D. Paganin, S. C. Mayo, T. E. Gureyev, P. R. Miller, S. W. Wilkins, “Simultaneous phase and amplitude extraction from a single defocused image of a homogeneous object”, *J. Microsc.* vol. 206(1), pp. 33-40 (2002).
- [96] A. Roberts, E. Ampem-Lassen, A. Barty, K. A. Nugent, G. W. Baxter, N. M. Dragomir, S. T. Huntington, “Refractive-index profiling of optical fibers with axial symmetry by use of quantitative phase microscopy”, *Opt. Lett.* vol. 27(23), pp. 2061-2063 (2002).
- [97] A. Roberts, K. Thorn, M. L. Michna, N. M. Dragomir, P. Farrell, G. W. Baxter, “Refractive-index profiling of optical fibers with axial symmetry by use of quantitative phase microscopy”, *Opt. Lett.* vol. 27(23), pp. 86 (2002).
- [98] S. C. Mayo, T. J. Davis, T. E. Gureyev, P. R. Miller, D. Paganin, A. Pogany, A. W. Stevenson, S. W. Wilkins, “X-ray phase contrast microscopy and microtomography”, *Opt. Express* vol. 11(19), pp. 2289-2302 (2003).
- [99] V. V. Volkov, Y. Zhu, “Phase Imaging and Nanoscale Currents in Phase Objects Imaged with Fast Electrons”, *Phys. Rev. Lett.* vol. 91(4), pp. 043904-1-4 (2003).
- [100] C. L. Curl, T. Harris, P. J. Harris, B. E. Allman, C. J. Bellair, A. G. Stewart, L. M. D. Delbridge, “Quantitative phase microscopy: a new tool for measurement of cell culture growth and confluency in situ”, *Pflugers Arch - Eur. J. Physiol.* vol. 448, pp. 462-468 (2004).
- [101] C. J. Bellair, “Quantitative phase amplitude microscopy IV: imaging thick specimens”, *J. Microsc.* vol. 214(1), pp. 62-69 (2004).
- [102] V. V. Volkov, Y. Zhu, “Lorentz phase microscopy of magnetic materials”, *Ultramicrosc.* vol. 98, pp. 271-281 (2004).
- [103] P. Donnadieu, M. Verdier, G. Berthomé, P. Mur, “Imaging a dense nanodot assembly by phase retrieval from TEM images”, *Ultramicrosc.* vol. 100, pp. 79-90 (2004).

- [104] A. Kohn, A. K. Petford-Long, T. C. Anthony, “Magnetic potential in patterned materials determined using energy-dependent Lorentz phase microscopy”, *Phys. Rev. B* vol. 72, pp. 014444-1-11 (2005).
- [105] T. J. Bromwich, A. Kohn, A. K. Petford-Long, T. Kasama, R. E. Dunin-Borkowski, S. B. Newcomb, C. A. Ross, “Remanent magnetization states and interactions in square arrays of 100-nm cobalt dots measured using transmission electron microscopy”, *J. Appl. Phys.* vol. 98, pp. 053909-1-8 (2005).
- [106] J. M. Cowley, *Diffraction Physics* (Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1986).
- [107] P. J. Fox, T. R. Mackin, L. D. Turner, I. Colton, K. A. Nugent R. E. Scholten, “Noninterferometric phase imaging of a neutral atomic beam”, *J. Opt. Soc. Am. B* vol. 19(8), pp. 1773-1776 (2002).
- [108] E. Lehmann, K. Lorenz, E. Steichele, P. Vontobel, “Non-destructive testing with neutron phase contrast imaging”, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* vol. 542, pp. 95-99 (2005).
- [109] A. Groso, M. Stampanoni, R. Abela, P. Schneider, S. Linga, R. Müller, “Phase contrast tomography: An alternative approach”, *Appl. Phys. Lett.* vol. 88, pp. 214104-1-3 (2006).
- [110] K. A. Nugent, D. Paganin, “Matter-wave phase measurement: A noninterferometric approach”, *Phys. Rev. A* vol. 61, pp. 063614-1-9 (2000).
- [111] M. De Graef, M. A. Willard, M. E. McHenry, Y. Zhu, “*In-situ* Lorentz TEM Cooling Study of Magnetic Domain Configurations in Ni₂MnGa”, *IEEE Trans. Mag.* vol. 37(4), pp. 2663-2665 (2001).
- [112] P. K. Somodi, W. O. Saxton, R. E. Dunin-Borkowski, I. Y. Antypas, “Analysis of Lorentz images of magnetic materials using a real space solution of the transport of intensity equation”, *Proc. of the 13th European Microscopy Congress* vol. 1, pp. 197-198, Amberes, 22-27 August 2004.
- [113] S. McVitie, M. Cushley, “Quantitative Fresnel Lorentz microscopy and the transport of intensity equation”, *Ultramicrosc.* vol. 106, pp. 423-431 (2006).

- [114] H. Thayyullathil, R. Langoju, R. Padmaram, R. M. Vasu, R. Kanjirojan, L. M. Patnaik, “Three-dimensional optical tomographic imaging of supersonic jets through inversion of phase data obtained through the transport-of-intensity equation”, *Appl. Opt.* vol. 43(21), pp. 4133-4141 (2004).
- [115] G. Ganesh Chandan, R. M. Vasu, S. Asokan, “Tomographic imaging of phase objects in turbid media through quantitative estimate of phase of ballistic light”, *Opt. Commun.* vol. 191, pp. 9-14 (2001).
- [116] E. Ampem-Lassen, S. T. Huntington, N. M. Dragomir, K. A. Nugent, A. Roberts, “Refractive index profiling of axially symmetric optical fibers: a new technique”, *Opt. Express* vol. 13(9), pp. 3277-3282 (2005).
- [117] K. Ichikawa, A. W. Lohmann, M. Takeda, “Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transform method: experiments”, *Appl. Opt.* vol. 27(16), pp. 3433-3436 (1988).
- [118] F. Roddier, “Wavefront sensing and the irradiance transport equation”, *Appl. Opt.* vol. 29(10), pp. 1402-1403 (1990).
- [119] D. L. Fried, J. L. Vaughn, “Branch cuts in the phase function”, *Appl. Opt.* vol. 31(15), pp. 2865-2882 (1992).
- [120] V. Aksenov, V. Banakh, O. Tikhomirova, “Potential and vortex features of optical speckle fields and visualization of wave-front singularities”, *Appl. Opt.* vol. 37(21), pp. 4536-4538 (1998).
- [121] L. J. Allen, H. M. L. Faulkner, M. P. Oxley, D. Paganin, “Phase retrieval and aberration correction in the presence of vortices in high-resolution transmission electron microscopy”, *Ultramicrosc.* vol. 88, pp. 85-97 (2001).
- [122] L. J. Allen, H. M. L. Faulkner, K. A. Nugent, M. P. Oxley, D. Paganin, “Phase retrieval from images in the presence of first-order vortices”, *Phys. Rev. E* vol. 63, pp. 037602-1-4 (2001).
- [123] M. A. van Dam, R. G. Lane, “Extended analysis of curvature sensing”, *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 17(7), pp. 1390-1397 (2002).
- [124] P. Hickson, G. Burley, “Single-image wavefront curvature sensing”, *Proc. SPIE* vol. 2201, pp. 549-554 (1994).

- [125] P. Hickson, "Wave-front curvature sensing from a single defocused image", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 11(5), pp. 1667-1673 (1994).
- [126] F. Roddier, C. Roddier, N. Roddier, "Curvature sensing: a new wavefront sensing method", *Proc. SPIE* vol. 976, pp. 203-209 (1988).
- [127] F. Roddier, "Error propagation in a closed-loop adaptive optics system: a comparison between Shack-Hartmann and curvature wave-front sensors", *Opt. Commun.* vol. 113, pp. 357-359 (1995).
- [128] F. Roddier, "Maximum Gain and Efficiency of Adaptive Optics Systems", *Pub. Astron. Soc. Pac.* vol. 110, pp. 837-840 (1998).
- [129] D. Paganin, A. Barty, P. J. McMahon, K. A. Nugent, "Quantitative phase-amplitude microscopy. III. The effects of noise", *J. Microsc.* vol. 214(1), pp. 51-61 (2004).
- [130] M. Bellegia, M. A. Schofield, V. V. Volkov, Y. Zhu, "On the transport of intensity technique for phase retrieval", *Ultramicrosc.* vol. 102, pp. 37-49 (2004).
- [131] M. Milman, D. Redding, L. Needels, "Analysis of curvature system for large-aperture adaptive optics systems", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 13(6), pp. 1226-1238 (1996).
- [132] M. Milman, L. Needels, D. Redding, "Wavefront Reconstruction Methods for a Natural Guide Star Adaptive Optics Application to the Keck Telescope", *Proc. SPIE* vol. 2201, pp. 666-676 (1994).
- [133] M. A. van Dam, R. G. Lane, "Tip/tilt estimation from defocused images", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 19(4), pp. 745-752 (2002).
- [134] T. E. Gureyev, "Composite techniques for phase retrieval in the Fresnel region", *Opt. Commun.* vol. 220, pp. 49-58 (2003).
- [135] T. E. Gureyev, K. A. Nugent, "Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation", *Opt. Commun.* vol. 133, pp. 339-346 (1997).
- [136] I. Han, "New method for estimating wavefront from curvature signal by curve fitting", *Opt. Eng.* vol. 34(4), pp. 1232-1237 (1995).

- [137] T. E. Gureyev, A. Roberts, K. A. Nugent, “Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: matrix solution with use of Zernike polynomials”, *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 12(9), pp.1932-1941 (1995).
- [138] C. Ftaclas, A. Kostinski, “Curvature sensors, adaptive optics, and Neumann boundary conditions”, *Appl. Opt.* vol. 40(4), 435-438 (2001).
- [139] L. D. Turner, B. B. Dhal, J. P. Hayes, A. P. Mancuso, K. A. Nugent, D. Paterson, R. E. Scholten, C. Q. Tran, A. G. Peele, “X-ray phase imaging: Demonstration of extended conditions with homogeneous objects”, *Opt. Express* vol. 12(13), pp. 2960-2965 (2004).
- [140] T. E. Gureyev, A. Pogani, D. M. Paganin, S. W. Wilkins, “Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region”, *Opt. Commun.* vol. 231, pp. 53-70 (2004).
- [141] W. K. Hsieh, F. R. Chen, J. J. Kai, A. I. Kirkland, “Resolution extension and exit wave reconstruction in complex HREM”, *Ultramicrosc.* vol. 98, pp. 99-114 (2004).
- [142] A. Souvorov, T. Ishikawa, A. Kuyumchyan, “Multiresolution phase retrieval in the Fresnel region by use of wavelet transform”, *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 23(2), pp. 279-287 (2006).
- [143] D. Van Dyck, W. Coene, “A new procedure for wave function restoration in high resolution electron microscopy”, *Optik* 77(3), pp. 125-128 (1987).
- [144] W. Coene, G. Janssen, M. O. de Beeck, D. Van Dyck., “Phase retrieval through Focus Variation for Ultra-Resolution in Field-Emission Transmission Electron Microscopy”, *Phys. Rev. Lett.* vol. 69(26), pp. 3743-3746 (1992).
- [145] L. J. Allen, W. McBride, M. P. Oxley, “Exit wave reconstruction using soft X-rays”, *Opt. Commun.* vol. 233, pp. 77-82 (2004).
- [146] T. E. Gureyev, K. A. Nugent, “Phase retrieval with the transport-of-intensity equation II: Orthogonal series solution for nonuniform illumination”, *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 13(8), pp. 1670-1682 (1996).
- [147] G. E. Healey, R. Kondepudy, “Radiometric CCD Camera Calibration and Noise Estimation”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* vol. 16(3), pp. 267-276 (1994).

- [148] G. S. Burley, G. A. H. Walker, R. Johnson, "A versatile CCD Wave Front Curvature Sensor", *Pub. Astron. Soc. Pac.* vol. 110, pp. 330-338 (1998).
- [149] P. Lena, *Observational Astrophysics* (Springer Verlag, Berlin, 1988).
- [150] K. F. Riley, M. P. Hobson and S. J. Bence, *Mathematical methods for physics and engineering* (University Press, Cambridge, 1997).
- [151] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, Nueva York, 1968).
- [152] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics* (University Press, Cambridge, 1980).
- [153] J. J. Stamnes *Waves in focal regions: propagation diffraction and focusing of light, sound and water waves* (Adam Hilger, Bristol, 1986).
- [154] I. Bronstein, K. Semendiaev, *Manual de matemáticas: para ingenieros y estudiantes* (Ed. MIR, Moscú, 1971).
- [155] W. H. Beyer, *Standard Mathematical Tables* (CRC Press, Inc. Boca Raton, 1984).
- [156] C. S. del Río, *Análisis de errores* (EUDEMA, Madrid, 1989).
- [157] R. J. Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence", *J. Opt. Soc. Am.* vol. 66(3), pp. 207-211 (1976).
- [158] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications* (McGraw-Hill, Nueva York, 1965).
- [159] G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* (McGraw-Hill, México D. F., 1983).
- [160] R. Cubalchini, "Modal wave-front estimation from phase derivative measurements", *J. Opt. Soc. Am.* vol. 69(7), pp. 972-977 (1979).
- [161] F. Roddier, C. Roddier, "Wavefront reconstruction using iterative Fourier Transforms", *Appl. Opt.* vol. 30(11), pp. 1325-1327 (1991).
- [162] E. Ribak, "Experimental limits on curvature sensing", *Proc. SPIE* vol. 3866, pp. 217-220 (1999).
- [163] R. K. Wangness, *Campos electromagnéticos* (Ed. Limusa, México D. F., 1996).

- [164] R. Eisberg, R. Resnick, *Física Cuántica* (Ed. Limusa, México D. F., 1993).
- [165] V. N. Mahajan, *Optical Imaging and Aberrations* SPIE-The international Society for Optical Engineering (Bellingham, Washington, 2001).
- [166] V. V. Voitsekhovich, "Phase-retrieval problem and orthogonal expansions: curvature sensing", *J. Opt. Soc. Am. A* vol. 12(10), pp. 2194-2202 (1995).
- [167] M. Grédiac, "Method for surface reconstruction from slope or curvature measurements of retatngular areas", *Appl. Opt.* vol. 36(20), pp.4823-4829 (1997).
- [168] E. Acosta, S. Bará, S. Ríos, "Modal projectors for linear operators in Optics", *Opt. Commun.* vol. 162, pp. 211-214 (1999).
- [169] H. F. Weinberger, *Partial differential equations* (Blaisdell Publishing Co., Nueva York, 1965).
- [170] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (McGraw-Hill, Nueva York, 1953).
- [171] E. Acosta, S. Bará, M. A. Rama, S. Ríos, "Determination of phase mode components in terms of local wave-front slopes: an analytical approach", *Opt. Lett.* vol. 20(10), pp. 1083-1085 (1995).
- [172] G. Dai, "Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions", *J. Opt. Soc. Am.*, 12(10), pp. 2182-2193 (1995).
- [173] A. H. Stroud, *Aproximate calculation of multiple integrals* (Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1971).
- [174] F. Roddier, "Curvature Sensing: A diffraction Theory", *NOAO R&D Note*, No. 87-3 (1987).
- [175] V. V. Voitsekhovich, L. J. Sánchez, "Effect of scintillations in curvature sensing", *Astron. Astrophys.* vol. 399, pp. 1177-1181 (2003).

Publicaciones relacionadas con este trabajo

- E. Acosta, S. Ríos, M. Soto, V. V. Voitsekhovich, “Role of boundary measurements in curvature sensing”, *Opt. Commun.* vol. 109, pp. 59-62 (1999).
- M. Soto, S. Ríos, E. Acosta, V. V. Voitsekhovich, “Accurate Estimation of Aberrations of Microoptics Components through Intensity Measurements: Numerical Simulations for Best Positioning and Noise Analysis”, *Jap. J. Appl. Phys.* vol. 39, pp. 1562-1565 (2000).
- M. Soto, S. Ríos, E. Acosta, “Role of boundary conditions in phase estimation by Transport of Intensity Equation”, *Opt. Commun.* vol. 184, pp. 19-24 (2000).
- M. Soto, E. Acosta, S. Ríos, “Performance analysis of curvature sensors: optimum positioning of the measurement planes”, *Opt. Express* vol. 11, pp. 2577-2588 (2003).