



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El grupo de isometrías del plano hiperbólico

Ismael del Campo López

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El grupo de isometrías del plano hiperbólico

Ismael del Campo López

Septiembre, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

| |
|---|
| Área de Coñecemento: Geometría y Topología |
| Título: El grupo de isometrías del plano hiperbólico |
| Breve descripción do contido |
| Dentro de la geometría no euclidiana tenemos la geometría hiperbólica. Concretamente vamos a calcular el grupo de isometrías del plano hiperbólico. Estudiaremos una serie de aplicaciones que conservan un producto interior en el tangente y veremos los principales modelos de la geometría hiperbólica. Usando estos calculamos el grupo de isometrías del plano hiperbólico. |
| Recomendacións |
| |
| Outras observacións |
| |

Índice general

| | |
|---|-----|
| Resumen | VII |
| Introducción | IX |
| 1. Transformaciones de Möbius | 1 |
| 2. El plano superior complejo | 9 |
| 3. El plano hiperbólico o plano de Lovachevski | 17 |
| 4. El grupo de isometrías del plano hiperbólico | 27 |
| 5. Conclusión | 41 |
| Bibliografía | 43 |

Resumen

La finalidad de este trabajo es dar una pequeña introducción al mundo de la geometría hiperbólica, en concreto al plano hiperbólico, llegando a calcular su grupo de isometrías. Para ello se recurre a modelos, como el plano superior complejo y el disco de Poincaré. A medida que se introducen estos espacios y se estudian sus propiedades iremos descubriendo partes del grupo de isometrías del plano hiperbólico para, al final, determinarlo por completo. A su vez, se mostrará que ambos modelos son geoméricamente equivalentes.

Abstract

The aim of this work is to provide a brief introduction to the world of hyperbolic geometry, specifically to the hyperbolic plane, getting to calculate its group of isometries. For this, we use models, such as the upper half-plane and the Poincaré disc. In fact, both models are geometrically the same. By introducing these spaces and studying their properties we will discover the group isometries of the hyperbolic plane.

Introducción

Todo comienza hacia el año 300 a. C con el autor del texto de matemáticas de éxito más fabuloso que se haya escrito nunca, *Los Elementos* de Euclides, padre de la geometría. En este libro el matemático griego asienta los cimientos de la geometría y establece cinco nociones y cinco axiomas para definir la que ahora conocemos como geometría euclidiana.

Por su forma, el V de los axiomas (el de las paralelas) desató la desconfianza de la comunidad matemática. Este fue cuestionado desde la antigüedad y no es hasta el siglo XIX cuando ven la luz los primeros resultados trascendentes al respecto.

No es fácil presentar un cuadro general del desarrollo de la geometría de la primera mitad del siglo XIX. Es en este contexto donde aparece la geometría no-euclídea, que se desarrolla independiente a los movimientos de la época. Aunque durante el primer tercio del siglo los matemáticos Saccheri, Lambert y Legendre intentaron demostrar que el postulado euclídeo de las paralelas era consecuencia de los otros cuatro, Gauss llegó a concluir que estos esfuerzos fueron en vano pero no se lo comunicó a nadie.

Lovachevski, matemático ruso eminente, ofrece un punto de vista revolucionario en su artículo *Sobre los Principios de la Geometría* (1829), que marca el nacimiento oficial de la geometría no euclídea: la geometría hiperbólica. En este trabajo hizo pública una geometría construida expresamente sobre una hipótesis que contradecía el V postulado. Se trataba pues de una geometría correcta desde cualquier punto de vista, pero parecía tan opuesta al sentido común, incluso para Lovachevski, que él mismo la llamó 'geometría imaginaria'.

Nuestro objetivo es introducirnos a la geometría hiperbólica para calcular el grupo de isometrías del plano hiperbólico, mediante los modelos de Poincaré. También veremos el funcionamiento de la geometría hiperbólica en el plano usando estos modelos y llegando a afirmar por cuenta propia que el V postulado de Euclides es independiente de los otros y tan necesario como los demás para definir la geometría euclidiana.

Capítulo 1

Transformaciones de Möbius

Sea $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Vamos a estudiar las transformaciones de Möbius que son aplicaciones del tipo:

$$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$
$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

NOTACIÓN Para $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\operatorname{Re}(z) = x \quad \operatorname{Im}(z) = y. \text{ Esto es } z = x + iy.$$

$$f(z) = w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \operatorname{Re}(w) = u \quad \operatorname{Im}(w) = v, \text{ i.e. } w = u + iv$$

La motivación para estudiar este tipo de aplicaciones es que llevan el semiplano superior complejo $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ en si mismo. De este hecho y a partir de otras propiedades de las transformaciones de Möbius veremos más adelante quién es el grupo de isometrías del plano hiperbólico.

A continuación tenemos una serie de propiedades de este tipo de transformaciones que nos van a ser útiles.

Proposición 1.1. *Sea $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ una transformación de Möbius con la notación ya mencionada. Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ entonces existe f^{-1} inversa de f dada por:*

$$f^{-1}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$
$$w \longmapsto \frac{dw-b}{-cw+a}$$

es decir, la matriz asociada sería $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Demostración. Vamos a calcular la expresión de f^{-1} directamente:

$$f(z) = w = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow w(cz+d) = az+b \Leftrightarrow wcz - az = b - wd \Leftrightarrow z(wc - a) = b - wd \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ w &\longmapsto \frac{dw-b}{-cw+a} \end{aligned}$$

y le asociamos la matriz $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ □

Observación 1.2. La matriz asociada a la inversa de f tiene el mismo determinante que ella:

$$\begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = ad - bc$$

Observación 1.3. Para demostrar la proposición anterior podemos usar el teorema de la inversa. Sabemos que $\exists f'$ siempre y cuando no se anule el denominador: $cz + d \neq 0$

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{acz + ad - acz - cd}{(cz + d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2} = \frac{\text{Det}(A)}{(cz + d)^2} \quad (1.1)$$

con $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Observación 1.4. La matriz $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ es la matriz inversa de A salvo determinante:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ab \\ cd - cd & ad - bc \end{bmatrix} = \text{Det}(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Si consideramos las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ es evidente que la transformación de Möbius asociada a cada una de ellas es la misma. Lo que nos lleva a cambiar el conjunto $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con el que estamos asociando las funciones de Möbius por el conjunto $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})/\lambda$ que se ajusta más a la naturaleza de dichas funciones. En este conjunto las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})/\lambda$ son inversas salvo el signo de su determinante. Cerrarnos al conjunto $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})/\lambda$ conlleva limitar el estudio a las funciones con determinante 1 o -1.¹

Proposición 1.5. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con $\text{Det}(A) > 0$ y $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $y > 0$. Si f es la transformación de Möbius asociada a A entonces $\text{Im}(w) = \text{Im}(f(z)) > 0$, i.e., f lleva en semiplano superior complejo en sí mismo.

¹Continuaremos con el estudio del conjunto $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})/\lambda$ en el Capítulo 2.

Demostración.

$$\begin{aligned}
w &= \frac{az + b}{cz + d} = (az + b) \frac{1}{|cz + d|^2} (c\bar{z} + d) = (az + b)(c\bar{z} + d) \frac{1}{|cz + d|^2} = \\
&= \frac{1}{|cz + d|^2} (ax + b + iay)(cx + d - icy) = \\
&= \frac{1}{|cz + d|^2} [(acx^2 + dax + bxc + db + acy^2) + i(-cyax - cyb + cyax + ayd)] \\
&= \frac{1}{\underbrace{|cz + d|^2}_{\geq 0}} [(scx^2 + dax + bxc + db + acy^2) + i \underbrace{(ad - cb)}_{=Det(A)>0} y]
\end{aligned}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma usual en \mathbb{C} .

Entonces $v = Im(w) > 0 \Leftrightarrow y > 0$

□

Recapitulando, las transformaciones de Möbius son inversibles siempre y cuando $Det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \neq 0$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Además conservan el semiplano superior complejo si $Det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) > 0$.

Pensando en \mathbb{R}^2

Sea $L = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $Det(L) \neq 0$ ($\Leftrightarrow L$ inversible)

Observación 1.6. $Det(L) = \lambda^2 + \mu^2 = |\lambda + i\mu|^2 = 0 \Rightarrow [L \text{ inversible} \Leftrightarrow \lambda + i\mu \neq 0]$

Tomamos $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ entonces:

$$\begin{aligned}
\langle LA, LB \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} \lambda A_1 - \mu A_2 \\ \mu A_1 + \lambda A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda B_1 - \mu B_2 \\ \mu B_1 + \lambda B_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \\
&= \lambda^2 A_1 B_1 - \lambda \mu A_1 B_2 - \lambda \mu A_2 B_1 + \mu^2 A_2 B_2 + \mu^2 A_1 B_1 + \lambda \mu A_1 B_2 + \lambda \mu A_2 B_1 + \lambda^2 A_2 B_2 = \\
&= \lambda^2 (A_1 B_1 + A_2 B_2) + \mu^2 (A_1 B_1 + A_2 B_2) = Det(L) \langle A, B \rangle
\end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^2

Observación 1.7. Recordemos que una aplicación $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donde Ω es un abierto de \mathbb{C} se dice holomorfa si, y solamente si existe $f'(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Además este tipo de aplicaciones son abiertas y f holomorfa $\Rightarrow \left[\exists \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \right]$.

Sea $f : z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ una transformación de Möbius. Pensemos f como una aplicación de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , es decir, $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow f(z) = \frac{a(x,y)+b}{c(x,y)+d} \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Llegados a este punto es importante darse cuenta que por ser f derivable como función de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann y podemos afirmar:

$$\exists Df(x, y) = Jf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Denotemos por A a la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ asociada a una transformación de Möbius, que es holomorfa por ser cociente de holomorfas donde el denominador no se anula.

Observación 1.8. Donde el denominador se anula se puede arreglar: $f'(z) = \frac{Det(A)}{(cz+d)^2}$.

Queremos demostrar que $Df(x, y)$ conserva la distancia en el siguiente sentido:

$$\langle Df(x, y)B, Df(x, y)C \rangle = \left(\frac{Im(f(z))}{Im(z)} \right)^2 \langle B, C \rangle \quad \forall B, C \in \mathbb{R}^2 \quad (1.3)$$

Sabemos que la matriz asociada a la aplicación $Df(x, y)$ es de la forma $\begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y por lo visto anteriormente:

$$\langle Df(x, y)B, Df(x, y)C \rangle = Det(Df(x, y)) \langle B, C \rangle$$

Luego para verificar (1.3) basta probar:

$$\left(\frac{v}{y} \right)^2 = Det(Df(x, y)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right)^2 = |f'(z)|^2$$

Para esto necesitamos calcular $v = Im(f(z))$ o despejarla de algún modo, que es lo que vamos a hacer:

$$\begin{aligned} v &= Im\left(\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}\right) = Im\left(\frac{(ax+b+iaiy)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2}\right) = \\ &= Im\left(\frac{1}{|cz+d|^2}[(acx^2+dax+bcx+bd+acy^2)+i(ay(cx+d)-cy(ax+b))]\right) = (1.4) \\ &= \frac{1}{|cz+d|^2}(aycx+dax-cyax-ayd) = \frac{y}{|cz+d|^2}(ad-cb) = \frac{y}{|cz+d|^2}Det(A) \end{aligned}$$

Entonces $\frac{v}{y} = \frac{yDet(A)}{|cz+d|^2}$: y y habíamos visto que $Det(Df(x, y)) = |f'(z)|^2 = \left(\frac{Det(A)}{|cz+d|^2}\right)^2$.
Combinando estos dos resultados

$$Det(Df(x, y)) = \left(\frac{v}{y}\right)^2$$

como queríamos probar.

El resultado que acabamos de probar viene motivado por la siguiente idea. Más adelante definiremos un producto interior en el plano tangente y la igualdad que acabamos de demostrar es la prueba de que las transformaciones de Möbius llevadas al tangente conservan este producto. De este modo las transformaciones de Möbius serán isometrías para la métrica derivada del producto en el tangente.

Otro tipo de transformaciones

Como hemos visto, las transformaciones de Möbius con determinante de la matriz asociada positivo se comportan 'bien' con el semiplano superior complejo.

Las transformaciones con determinante de la matriz asociada cero no nos interesan pues no son invertibles y estamos buscando isometrías (que son invertibles).

¿Qué ocurre con las de matriz asociada con determinante negativo? A pesar de que no conservan el semiplano superior complejo podemos conseguir con ellas unas transformaciones interesantes.

Sea $g : z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con matriz asociada $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ una transformación de Möbius tal que $\text{Det}(B) < 0$ y consideremos la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z & \longmapsto & \bar{z} & \longmapsto & g(\bar{z}) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \end{array}$$

Esta transformación sí conserva el semiplano superior complejo. Veámoslo

$$\begin{aligned} \text{Im}[g(\bar{z})] &= \text{Im} \left[\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right] = \text{Im} \left[\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \cdot \frac{cz + d}{cz + d} \right] = \text{Im} \left[\frac{(ax + b - ayi)(cx + d + cyi)}{|cz + d|^2} \right] = \\ &= \text{Im} \left[\frac{1}{|cz + d|^2} (acx^2 + adx + axcyi + bcx + bd + bcyi - ayxci - adyi + acy^2) \right] = \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2} (axy + bcy - ayx - ady) = \frac{y}{|cz + d|^2} (bd - ad) = -\frac{y}{|cz + d|^2} (ad - bc) = \\ &= \frac{y}{|cz + d|^2} (-\text{Det}(B)) > 0 \end{aligned}$$

The cross-ratio o razón doble

Tomamos z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de \mathbb{C} . Existen distintas maneras de definir la razón doble (o *cross-ratio* en inglés) intercambiando los índices, pero son todas equivalentes.

Nosotros la definimos como sigue:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \quad (1.5)$$

Si $z_1 = \infty$ entonces definimos la razón doble como:

$$[\infty, z_2; z_3, z_4] = \lim_{z \rightarrow \infty} [z, z_2; z_3, z_4] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z - z_3}{z - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

y análogamente para $[z_1, \infty; z_3, z_4]$, $[z_1, z_2; \infty, z_4]$, $[z_1, z_2; z_3, \infty]$.

Proposición 1.9. Consideremos $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius. Entonces f conserva la razón doble, esto es:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)] \quad \forall z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$$

Demostración. En primer lugar $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ luego tiene sentido considerar la igualdad que queremos probar. Supongamos que $f(z_i) \neq \infty \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ entonces:

$$[f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)] = \frac{f(z_1) - f(z_3)}{f(z_1) - f(z_4)} : \frac{f(z_2) - f(z_3)}{f(z_2) - f(z_4)}$$

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_3) &= \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = \frac{(az_1 + b)(cz_3 + d) - (az_3 + b)(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} = \\ &= \frac{acz_1z_3 + adz_1 + bcz_3 + db - (acz_3z_1 + adz_3 + bcz_1 + db)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} = \\ &= \frac{ad(z_1 - z_3) - bc(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \end{aligned}$$

Por simetría tenemos calculadas todas las diferencias.

$$\begin{aligned} [f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)] &= \left(\frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} : \frac{(ad - bc)(z_1 - z_4)}{(cz_1 + d)(cz_4 + d)} \right) : \\ &: \left(\frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)} : \frac{(ad - bc)(z_2 - z_4)}{(cz_2 + d)(cz_4 + d)} \right) \\ &= \frac{(z_1 - z_3)(cz_4 + d)}{(z_1 - z_4)(cz_3 + d)} : \frac{(z_2 - z_3)(cz_4 + d)}{(z_2 - z_4)(cz_3 + d)} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \\ &= [z_1, z_2; z_3, z_4] \end{aligned}$$

□

Corolario 1.10. En las condiciones de la proposición anterior también se conservan las razones:

$$[\infty, z_2; z_3, z_4], [z_1, \infty; z_3, z_4], [z_1, z_2; \infty, z_4], [z_1, z_2; z_3, \infty]$$

Observación 1.11. La aplicación $g : z \in \mathbb{C} \rightarrow \bar{z} \in \mathbb{C}$ no conserva la razón doble:

$$[g(4), g(2); g(i), g(2i)] = \frac{6 + 10i}{6 + 8i} \neq \frac{10 - 10i}{10 - 8i} = [4, 2; i, 2i]$$

Luego $g \circ f$ no conserva la razón doble sea quien sea la aplicación f , lo que incluye a las transformaciones de Möbius con determinante negativo que hemos visto.

Capítulo 2

El plano superior complejo

Nos centramos ahora en el que será el conjunto de nuestro estudio. Sea \mathbb{C} el plano complejo y consideremos el subconjunto $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ de todos los complejos con parte imaginaria estrictamente positiva. Dicho conjunto junto con la métrica de Riemann dada por:

$$ds = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{y} \quad (2.1)$$

resulta en un modelo del plano hiperbólico que se conoce como modelo del plano superior complejo.

Veremos que en este espacio métrico el papel que juegan las rectas euclidianas en el plano se corresponde con el de las geodésicas de \mathbb{H} . Y es por esto que no se sostiene el V postulado de *Los Elementos de Euclides* de la geometría euclidiana, el axioma de las paralelas. Es decir, \mathbb{H} con la métrica de Riemann mencionada es un espacio no-Euclidiano, un modelo del plano hiperbólico (Capítulo 3).

Definición 2.1. La métrica (2.1) en \mathbb{H} se conoce como métrica hiperbólica.

Antes de nada, definimos la longitud de una curva y la distancia entre dos puntos para nuestro espacio métrico \mathbb{H} siguiendo la teoría de las métricas Riemann.

Definición 2.2. Sea $I = [0, 1]$ y $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ un camino diferenciable a trozos $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{H} : t \in I\}$. Definimos la longitud hiperbólica de γ , $h(\gamma)$, como

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)} dt$$

siendo $|\cdot|$ la norma usual en \mathbb{C} .

Definición 2.3. Sean $z, w \in \mathbb{H}$. Definimos la distancia hiperbólica $\rho(z, w)$ entre z y w mediante la siguiente fórmula

$$\rho(z, w) = \inf h(\gamma)$$

donde γ es un camino diferenciable a trozos entre z y w .

Como ya hemos visto, a cada transformación de Möbius le habíamos asignado un par de matrices. Tomamos solo las transformaciones de Möbius con determinante positivo. Es sencillo observar que todas las matrices asociadas a estas transformaciones se pueden reducir a las que tienen determinante 1, pues al multiplicar la matriz por un número real la matriz cambia (y por tanto su determinante) pero la transformación de Möbius asociada sigue siendo la misma (ver Capítulo 1). Por lo que el conjunto de transformaciones de Möbius con determinante positivo sería el siguiente:

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \quad (2.2)$$

Ahora bien, para cada aplicación en $PSL(2, \mathbb{R})$ tendríamos dos matrices con determinante 1 asociadas a ella, que serían $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $-A$. Sea $SL(2, \mathbb{R})$, el grupo unimodal, grupo de matrices 2×2 con coeficientes reales y determinante 1. El conjunto (2.2) es isomorfo a $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1_2\}$ donde 1_2 es la matriz identidad 2×2 , i.e., $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1_2\}$

Teorema 2.4. Las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ son homomorfismos en \mathbb{H} .

Demostración. Acabamos de ver que los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ son las transformaciones de Möbius con determinante positivo. Por la Proposición 1.5 sabemos que estas aplicaciones tienen dominio e imagen en \mathbb{H} es decir tiene sentido la afirmación del teorema. Además por la Proposición 1.1 tienen inversa en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Para demostrar que los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ son homomorfismos basta ver que, si $f \in PSL(2, \mathbb{R})$, f es continua, puesto que $f^{-1} \in PSL(2, \mathbb{R})$ también. □

Definición 2.5. Una aplicación de \mathbb{H} en sí mismo se dice isometría si conserva la distancia hiperbólica. El conjunto de todas las isometrías de \mathbb{H} es un grupo y lo denotamos por $Isom(\mathbb{H})$.

Teorema 2.6. $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$

Demostración. Por la Proposición 1.5 sabemos que las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ llevan el semiplano superior complejo en sí mismo. Demostraremos que si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ es un camino diferenciable a trozos, su longitud hiperbólica no cambia al aplicarle una de dichas transformaciones. Es decir, para cualquier $f \in PSL(2, \mathbb{R})$ tenemos $h(\gamma) = h(f(\gamma))$.

Sea entonces $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ un camino diferenciable a trozos dado por $z(t) = x(t) + y(t)i$ con $t \in I$ y sea $w(t) = f(z(t)) = u(t) + v(t)i$.

Tenemos:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2}$$

y como $f \in PSL(2, \mathbb{R})$ sabemos que $ad - cb = 1$, de donde

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2} \quad (2.3)$$

Si revisamos los cálculos que hicimos para las transformaciones de Möbius, concretamente en (1.4), demostramos que $v = \frac{y}{|cz+d|^2}$. Con esto y sabiendo que $|1| = 1$ y la norma de un producto es el producto de las normas:

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{1}{(cz + d)^2} \right| = \frac{|1|}{|(cz + d)^2|} = \frac{1}{|cz + d|^2} = \frac{v}{y}$$

Por lo tanto

$$h(f(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dz} \right| \left| \frac{dz}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right|}{y(t)} dt = h(\gamma)$$

La distancia hiperbólica entre dos puntos $z, k \in \mathbb{H}$ es $\rho(z, k) = \inf h(\gamma)$ siendo γ un camino diferenciable a trozos entre z y k . Como $h(\gamma) = h(f(\gamma))$ se sigue que $\inf h(\gamma) = \inf h(f(\gamma))$ para γ un camino diferenciable a trozos entre z y k . Concluimos así que $\rho(z, k) = \rho(f(z), f(k))$ y por lo tanto f es una isometría. Como $f \in PSL(2, \mathbb{R})$ fue escogida arbitrariamente, $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$. \square

Geodésicas

Ejercicio 2.7. Sea L una circunferencia euclidiana o una recta ortogonales al eje real que interseca a dicho eje en un punto finito α . Prueba que la transformación $g(z) = -(z - \alpha)^{-1} + \beta$ pertenece a $PSL(2, \mathbb{R})$ y para un β determinado lleva L en el eje imaginario.

Solución 2.8. La aplicación es $g(z) = -(z - \alpha)^{-1} + \beta = \frac{\beta z - (\alpha\beta + 1)}{z - \alpha}$ que la asociada a la matriz $\begin{bmatrix} \beta & -\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}$ de determinante 1, esto es, $g \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Denotamos por α' el segundo punto de intersección de L y $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si $\alpha' = \infty$ entonces $\beta = 0$, si $\alpha' \neq \infty$ entonces $\beta = (\alpha' - \alpha)^{-1}$.

Teorema 2.9. Las geodésicas en \mathbb{H} son las semicircunferencias con centro en el eje real y las rectas perpendiculares al eje real.

¹Regla de la cadena

Demostración. Sean z_1 y z_2 dos puntos en \mathbb{H} . Vamos a ver que ocurre si los dos puntos están en el eje imaginario. De ser así, z_1 y z_2 serán de la forma ci con $c \in \mathbb{R}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $z_1 = ai$ y $z_2 = bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ es un camino diferenciable a trozos cualquiera entre z_1 y z_2 con $\gamma(t) = x(t) + y(t)i$ tenemos:

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} dt = \\ &= \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pero $\ln \frac{b}{a}$ es la longitud hiperbólica del segmento del eje imaginario que une z_1 y z_2 : consideremos el camino diferenciable a trozos dado por $\gamma(t) = (a + t(b-a))i$ con $t \in I$ que es el segmento del eje imaginario que une z_1 y z_2 y calculamos su longitud hiperbólica:

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(b-a)^2}}{a + t(b-a)} dt = \int_0^1 \frac{b-a}{a + t(b-a)} dt = \\ &= \ln(a + t(b-a)) \Big|_0^1 = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observación 2.10. Como hemos escogido $b > a$ sabemos que $\sqrt{(b-a)^2} = b-a$

La importancia de lo que acabamos de probar está en que las geodésicas son las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos (distancia medida a través de la curva). Acabamos de demostrar que cualquier camino diferenciable a trozos entre z_1 y z_2 tiene una longitud hiperbólica igual o superior al segmento del eje imaginario que une dichos puntos. Esto prueba que la geodésica uniendo ai y bi es el segmento del eje imaginario entre ellos.

Veamos que ocurre si z_1 y z_2 son dos puntos cualquiera de \mathbb{H} .

Si estos puntos están en la misma vertical, es decir, tienen la misma parte real existe una única recta pasando por z_1 y z_2 (consecuencia directa de los axiomas de la geometría euclidiana). Además esta recta es perpendicular al eje real.

Si los puntos no están en la misma vertical existe una única circunferencia con centro en el eje real pasando por z_1 y z_2 : si consideramos el segmento de recta que une z_1 y z_2 , sabemos que el centro de cualquier círculo que pase por estos puntos va a estar en la recta bisector del segmento que los une. Llamaremos a esta recta bisector B . Pero además queremos que esta circunferencia tenga el centro en el eje real, luego su centro está en la intersección de B con el eje real, pongamos c . Esta intersección, de existir, es única porque estamos hablando de la intersección de rectas, pero además, existe siempre ya que

la única posibilidad de que B y el eje real no se corten es que sean paralelos, y como B es perpendicular al segmento que une z_1 y z_2 este segmento sería perpendicular al eje real lo que contradice que z_1 y z_2 no están en la misma vertical. Luego nuestra circunferencia buscada tiene un único centro c , como ya vimos, y un radio concreto que sería $|c - z_1|$ siendo $|\cdot|$ la norma usual en \mathbb{C} . Por último, es consecuencia de la construcción de la circunferencia que z_1 y z_2 están en ella: como su radio es $|c - z_1|$ podemos decir que pasa por z_1 y como $c \in B$ y los puntos de B equidistan de z_1 y z_2 se sigue que $radio = |c - z_1| = |c - z_2|$, es decir, z_2 también está en esta circunferencia.

Después de todo esto, podemos afirmar que dados dos puntos en \mathbb{H} existe una única recta perpendicular al eje real o un única circunferencia con centro en el eje real que los une.² Sea pues L la recta o circunferencia mencionados pasando por z_1 y z_2 puntos cualquiera de \mathbb{H} . Por el ejercicio 2.7 sabemos que existe $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ una transformación que lleva L en el eje imaginario (y por lo tanto también z_1 y z_2).

Empezamos demostrando que si los puntos están en el eje imaginario la geodésica que los une es el segmento de eje imaginario entre ellos, así la geodésica uniendo los puntos $g(z_1)$ y $g(z_2)$ es el segmento del eje imaginario que une $g(z_1)$ y $g(z_2)$. Por el Teorema 2.6, $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$ y $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ entonces se sigue de forma inmediata que la geodésica uniendo z_1 y z_2 es el trozo de L que une estos puntos. \square

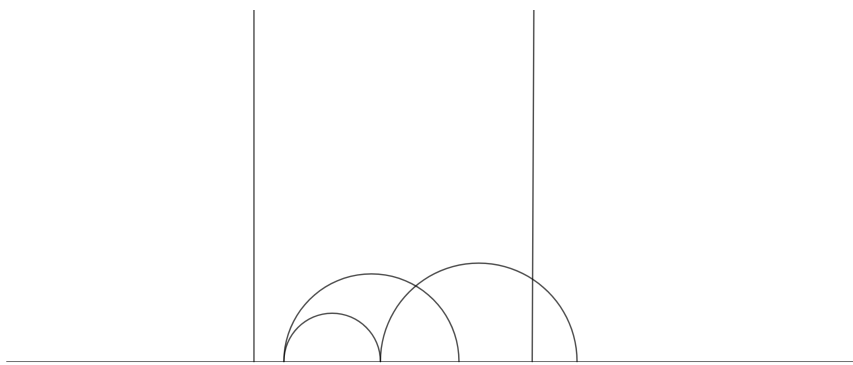


Figura 2.1: Geodésicas en \mathbb{H}

²Esta unicidad será empleada más adelante

Corolario 2.11. *Cualquiera dos puntos $z, w \in \mathbb{H}$ pueden unirse por una única geodésica, y la distancia hiperbólica entre ellos es igual a la longitud hiperbólica del segmento de dicha única geodésica delimitado por z y w . De ahora en adelante denotaremos este segmento por $[z, w]$*

Demostración. Las geodésicas en \mathbb{H} son, como acabamos de probar, las semicircunferencias con centro en el eje real y las rectas perpendiculares al eje real. En la prueba del Teorema 2.9 ya se proporciona el argumento de la unicidad y es consecuencia de la unicidad de la circunferencia con centro el eje real y la recta perpendicular al eje real. Es decir si dados dos puntos en \mathbb{H} o existe una única circunferencia con centro el eje real o una única recta perpendicular al mismo eje que los une y todas las geodésicas en \mathbb{H} son de esta forma, solo existe una única geodésica uniendo dos puntos cualquiera en \mathbb{H} .

Para ver lo que queda solo es necesario pensar en las definiciones de geodésica y distancia hiperbólica. La distancia hiperbólica entre dos puntos de \mathbb{H} es el ínfimo de las longitudes de los caminos que los unen y una geodésica uniendo estos puntos es la curva de menor longitud, en este caso hiperbólica, que los une. Con esto es inmediato que la distancia hiperbólica entre dos puntos en \mathbb{H} es la longitud del segmento de la geodésica que los une. \square

Corolario 2.12. *Si z y w son dos puntos distintos en \mathbb{H} entonces*

$$\rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w)$$

si y solo si $\xi \in [z, w]$

Demostración. Sean $z, w \in \mathbb{H}$.

(\Leftarrow) Sea $\xi \in \mathbb{H}$ tal que $\xi \in [z, w]$. Por el Corolario 2.11, $\rho(z, w)$ es la longitud hiperbólica de $[z, w]$. Como $\xi \in [z, w]$ la longitud hiperbólica del segmento $[z, w]$ es la suma de la longitud hiperbólica de $[z, \xi]$ y de $[\xi, w]$. Volviendo a aplicar el Corolario 2.11 tenemos $\rho(z, \xi) = h([z, \xi])$ y $\rho(\xi, w) = h([\xi, w])$ y así:

$$\rho(z, w) = h([z, w]) = h([z, \xi]) + h([\xi, w]) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w)$$

(\Rightarrow) Sea $\xi \in \mathbb{H}$ y supongamos que $\rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w)$. De nuevo por el Corolario 2.11 esto significa que la longitud hiperbólica del segmento de geodésica $[z, w]$ es igual a la longitud hiperbólica de $[z, \xi]$ más la longitud hiperbólica $[\xi, w]$. Es decir, existen caminos diferenciables a trozos entre z, ξ y entre ξ, w (los que determinan los trozos de geodésicas) tales que la suma de sus longitudes hiperbólicas es $[z, w]$. Luego, si los unimos, tenemos un camino diferenciable a trozos entre z y w pasando por ξ cuya longitud hiperbólica es $[z, w]$, i.e dicho camino es una geodésica en \mathbb{H} uniendo z y w .

Pero de nuevo, aplicando el Corolario 2.11, existe una única geodésica uniendo z y w . Luego la única manera de hacer esto posible es que $\xi \in [z, w]$. \square

Estudiadas ya las geodésicas de \mathbb{H} y algunas propiedades de las mismas continuamos con nuestro estudio de las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Veamos como afectan dichas transformaciones a las geodésicas. El siguiente teorema es de gran importancia en el cálculo del grupo de isometrías de \mathbb{H} .

Teorema 2.13. *Las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ conservan las geodésicas, o lo que es lo mismo llevan geodésicas en geodésicas.*

Demostración. Sea $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, z y w dos puntos distintos de \mathbb{H} y $\xi \in [z, w]$. Por el Teorema 2.6 sabemos que g conserva la distancia hiperbólica entonces:

$$\rho(g(z), g(w)) = \rho(z, w) \quad \rho(g(z), g(\xi)) = \rho(z, \xi) \quad \rho(g(\xi), g(w)) = \rho(\xi, w)$$

Además como $\xi \in [z, w]$ por el Corolario 2.12 : $\rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w)$. Sustituyendo en esta ecuación las igualdades anteriores:

$$\rho(g(z), g(w)) = \rho(g(z), g(\xi)) + \rho(g(\xi), g(w))$$

lo que ocurre si, y solamente si $g(\xi) \in [g(z), g(w)]$ (Corolario 2.12).

Como ξ se escogió arbitrariamente en el segmento de geodésica $[z, w]$ esto significa que todos los puntos de $[z, w]$ van a $[g(z), g(w)]$ a través de g . Es decir que la imagen de $[z, w]$ por g es $[g(z), g(w)]$ de donde se deduce que $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ cualquiera lleva geodésicas de \mathbb{H} en geodésicas de \mathbb{H} . \square

Observación 2.14. Podemos dar una prueba independiente al anterior teorema. Basta con saber que las transformaciones fraccionales lineales (entre las que se encuentran las de $PSL(2, \mathbb{R})$) llevan circunferencias euclidianas y rectas euclidianas en circunferencias y rectas. Además conservan el eje real y los ángulos. Juntando todo, llevan circunferencias y rectas ortogonales al eje real en circunferencias y rectas ortogonales al eje real y las geodésicas en \mathbb{H} son de esta forma.

Capítulo 3

El plano hiperbólico o plano de Lovachevski

La geometría hiperbólica es aquella que satisface los axiomas de la geometría euclidiana salvo el V postulado. Este postulado tiene dos enunciaciones equivalentes, nosotros emplearemos la que dice así:

Axioma 3.1. *Sea un punto P exterior a una recta r . Existe una única recta s paralela a r pasando por P .*

En esta sección veremos, de forma cualitativa, que el plano superior complejo \mathbb{H} es un modelo del plano hiperbólico o plano de Lovachevski. Este modelo junto con otro, geoméricamente equivalentes, son los llamados modelos de Poincaré del plano hiperbólico.

Comenzamos definiendo el concepto de recta en \mathbb{H} .

Definición 3.2. Llamamos recta hiperbólica en \mathbb{H} a la intersección de una recta euclidiana perpendicular al eje real o de una circunferencia euclidiana con centro el eje real con \mathbb{H} . Esto es las rectas hiperbólicas de \mathbb{H} son las geodésicas.

Observación 3.3. De ahora en adelante, en esta sección, distinguiremos siempre entre recta euclidiana y recta hiperbólica.

Mediante esta definición de recta hiperbólica conseguimos conservar las propiedades de la recta euclidiana como demuestra la siguiente proposición:

Proposición 3.4. *Para cada par de puntos $p, q \in \mathbb{H}$ existe una única recta hiperbólica que los une.*

Demostración. En el Corolario 2.11 vimos que por dos puntos de \mathbb{H} pasa una única geodésica. Como las rectas hiperbólicas son las geodésicas de \mathbb{H} queda probada la proposición. \square

Teniendo una definición de recta hiperbólica tan distinta de la recta euclidiana, es de esperar que el comportamiento de las rectas de \mathbb{H} sea distinto de las de la geometría euclidiana. Y así es.

Introducimos el concepto de paralelismo en \mathbb{H} en base al paralelismo en \mathbb{C} . En \mathbb{C} dos rectas euclidianas se dicen paralelas si son disjuntas (no se cortan). Tomando esta idea como referencia (ya que $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$) definimos:

Definición 3.5. Dos rectas hiperbólicas son paralelas en \mathbb{H} si son disjuntas.

Hemos llegado al *quid* de por qué \mathbb{H} es un modelo del plano hiperbólico. En el siguiente teorema veremos como, con estos conceptos que acabamos de introducir, el V postulado de Euclides no se sostiene en \mathbb{H} .

Observación 3.6. De hecho en la geometría euclidiana las rectas paralelas son equidistantes pero las rectas hiperbólicas paralelas tampoco van a verificar esto.

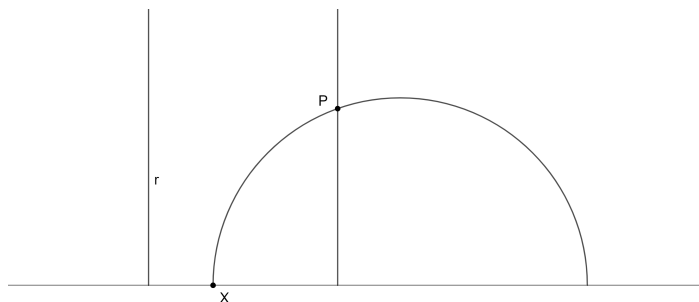
Teorema 3.7. *Sea r una recta hiperbólica en \mathbb{H} y P un punto de \mathbb{H} que no está en r . Existen muchas (infinitas) rectas hiperbólicas pasando por P paralelas a r .*

Demostración. Sea $P \in \mathbb{H}$ un punto y r una recta hiperbólica en \mathbb{H} tales que $P \notin r$. Distinguiremos dos casos.

Supongamos en primer lugar que r es una recta hiperbólica en \mathbb{H} resultado de intersecar una recta euclidiana R ortogonal al eje real con \mathbb{H} .

Por el V postulado de la geometría euclidiana existe una única recta L paralela a R pasando por P . Como R es perpendicular al eje real y L es paralela a R resulta que L es una recta perpendicular al eje real pasando por P . Por lo tanto una recta hiperbólica paralela a r pasando por P sería $L \cap \mathbb{H}$ (r y $L \cap \mathbb{H}$ no se van a cortar nunca por la construcción de L).

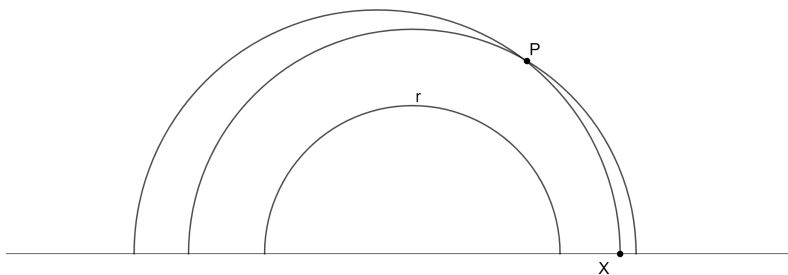
Veamos otra distinta. Escogemos un punto $X \in \mathbb{R}$ entre $R \cap \mathbb{R}$ y $L \cap \mathbb{R}$ y sea A la circunferencia euclidiana pasando por X y P con centro en el eje real (esto es posible ya que $Re(X) \neq Re(P)$ debido a $X \notin L$). Tal y como hemos construido A , $A \cap R = \emptyset$ por lo que podemos afirmar que $A \cap \mathbb{H}$ es otra recta hiperbólica paralela a r pasando por P .



Con este método podemos construir infinitas rectas paralelas a r pasando por P , basta con tomar otro punto distinto X' en el eje real entre R y L de los infinitos que hay.

El caso que nos queda es que la recta hiperbólica r sea resultado de intersecar una circunferencia euclidiana A con centro en el eje real con \mathbb{H} . Consideremos una circunferencia euclidiana, B , concéntrica con A pasando por P . Por hipótesis $P \notin A$ y al ser B concéntrico con A y $P \in B$ se tiene $A \cap B = \emptyset$. Así $B \cap \mathbb{H}$ es una recta hiperbólica paralela a r pasando por P .

Para construir otra recta hiperbólica distinta tomamos un punto $X \in \mathbb{R}$ entre las circunferencias A y B . Llamamos C a la circunferencia euclidiana con centro el eje real que pasa por X y por P . Por construcción C y A son disjuntas, luego $C \cap \mathbb{H}$ es una recta hiperbólica paralela a r pasando por P distinta a $B \cap \mathbb{H}$. Y como en el caso anterior basta



tomar otro punto X' distinto a X en sus mismas condiciones para poder construir otra recta hiperbólica paralela a r pasando por P . Este método permite, al igual que el anterior, construir infinitas rectas hiperbólicas paralelas a r pasando por P .

□

El teorema anterior prueba que \mathbb{H} con la métrica de Riemann definida, es decir el modelo del plano superior complejo, es un modelo del plano hiperbólico, puesto que no satisface el V postulado de la geometría euclidiana.

La geometría hiperbólica se define con los mismos axiomas que la euclidiana sustituyendo el último (V postulado) por el siguiente:

Axioma 3.8. *Dada una recta hiperbólica r y un punto P exterior a ella, existen al menos dos rectas hiperbólicas (distintas) paralelas a r pasando por P .*

El disco de Poincaré

Al empezar este apartado hemos dicho que vamos a ver dos modelos del plano hiperbólico. Uno es el plano superior complejo y el que queda es el que se conoce como modelo del disco de Poincaré.

Definición 3.9. Sea $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ el disco unitario, donde $|\cdot|$ es la norma usual en \mathbb{C} . El modelo del disco de Poincaré es U con la métrica de Riemann dada por

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} \quad (3.1)$$

donde $|\cdot|$ denota la norma usual en \mathbb{C}

De la misma manera que definimos la longitud hiperbólica y la distancia hiperbólica en \mathbb{H} definimos la longitud hiperbólica y la distancia hiperbólica en U usando la métrica dada por (3.1) que denotaremos h' y ρ' respectivamente.

El disco de Poincaré y el plano superior complejo son espacios isométricos. Desde el punto de vista de la geometría este hecho nos permite intercambiar un modelo por el otro cuando queramos, pudiendo escoger el que más nos convenga para estudiar lo que nos interese.

Existen distintas transformaciones del plano superior complejo en el disco de Poincaré, concretamente construiremos una transformación de Möbius del disco al plano superior complejo. Esta misma va a ser una isometría.

Para ello haremos una inversión con respecto a una circunferencia, luego una reflexión y finalmente un giro.

Definición 3.10. Sea $\gamma(O, r)$ la circunferencia de centro O y radio r . Una inversión de la circunferencia $\gamma(O, r)$ es una transformación del plano que lleva un punto A en un punto A' en el rayo OA satisfaciendo la siguiente condición:

$$|\overline{OA}| |\overline{OA'}| = r^2 \quad (3.2)$$

donde $|\overline{OA}|$ y $|\overline{OA'}|$ denotan la longitud de los segmentos \overline{OA} y $\overline{OA'}$ respectivamente.

Consideramos el conjunto del disco de Poincaré $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ con frontera $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Para hacer la inversión podemos utilizar cualquier circunferencia de radio 2 y centro un punto de Ω . Pongamos la circunferencia γ de centro $1 + 0i$, punto que denominaremos B , y radio 2 y hagamos la inversión de U con respecto a γ .

Sea $z \in U$ un punto cualquiera X de disco de Poincaré y $u \in \mathbb{C}$ el punto X' imagen de X por la inversión de γ .

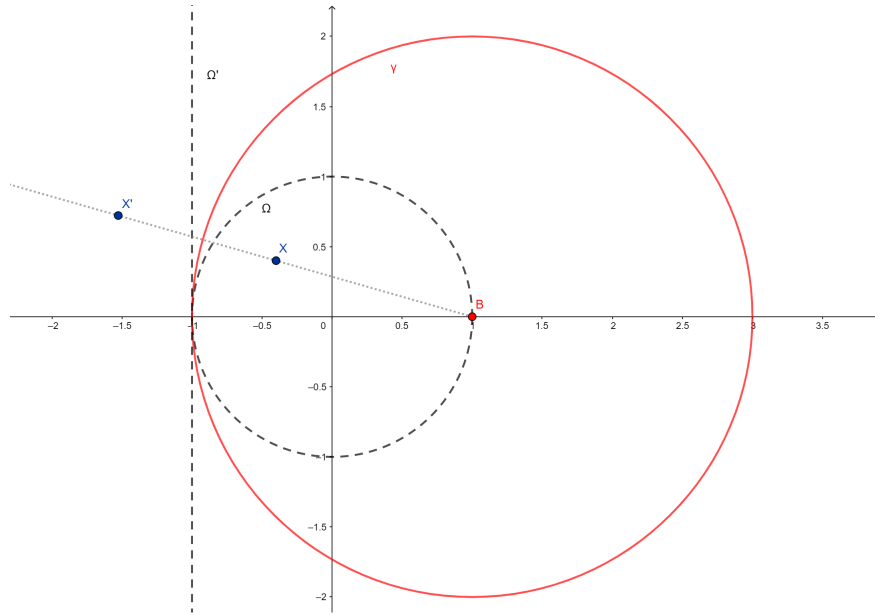


Figura 3.1: Inversión de U de la circunferencia γ .

Por ser una inversión de γ lo que buscamos, la condición (3.2) nos dice que se verifica:

$$|\overline{BX'}||\overline{BX}| = 2^2 \Leftrightarrow |u - 1||z - 1| = 4 \quad (3.3)$$

siendo $|\cdot|$ la norma usual en \mathbb{C} .

Además X' tiene que estar en el radio BX :

$$u - 1 = K(z - 1) \quad (3.4)$$

$K \in \mathbb{R}, K > 0$ (por ser γ de centro 1). Aplicando la norma a la igualdad anterior:

$$|u - 1| = |K(z - 1)| = |K||z - 1| = K|z - 1| \quad (3.5)$$

al ser $K > 0$.

Despejando K en (3.5) y sustituyendo con (3.3):

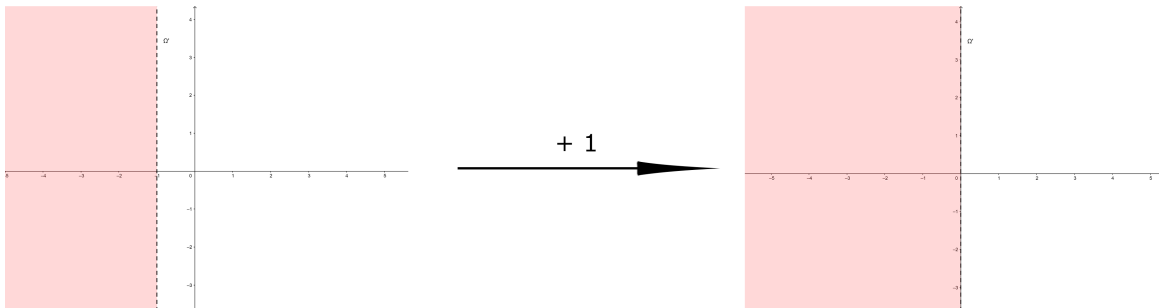
$$K = \frac{|u-1|}{|z-1|} = \frac{\frac{4}{|z-1|}}{|z-1|} = \frac{4}{|z-1|^2}$$

Una vez calculada K podemos recuperar la ecuación (3.4) y despejar u en función de z teniendo así una expresión para la inversión de γ

Observación 3.11. Recordemos que u era la imagen de un punto en el disco $z \in U$ por la inversión de la circunferencia γ .

$$u = \frac{4(z-1)}{|z-1|^2} + 1 = \frac{4(z-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} + 1 = \frac{4}{\bar{z}-1} + 1 = \frac{4+\bar{z}-1}{\bar{z}-1} = \frac{\bar{z}+3}{\bar{z}-1} \quad (3.6)$$

De esta manera hemos pasado del disco unidad al semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 1\}$ así que desplazando a la derecha la imagen de nuestra inversión tenemos el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$ que se parece al plano superior complejo pero girado.

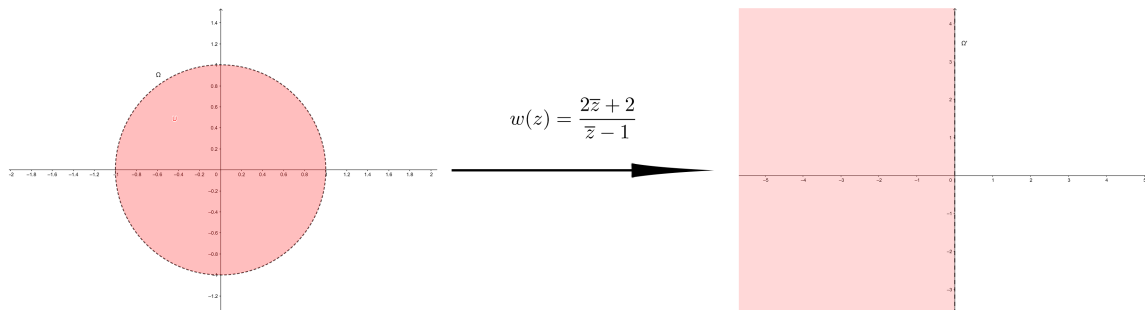


$$u + 1 = \frac{\bar{z} + 3}{\bar{z} - 1} + 1 = \frac{\bar{z} + 3 + \bar{z} - 1}{\bar{z} - 1} = \frac{2\bar{z} + 2}{\bar{z} - 1}$$

Por el momento tenemos la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} w: U &\longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\} \\ z &\longmapsto \frac{2\bar{z} + 2}{\bar{z} - 1} \end{aligned}$$

que lleva el disco unidad U en el semiplano izquierdo.



Haciendo una reflexión con respecto al eje real ($z \rightarrow \bar{z}$) y una rotación de 90° ($z \rightarrow -iz$) tendremos la transformación de Möbius buscada. Por simplificar la expresión añadiremos un factor de dilatación $\frac{1}{2}$. En resumen, de forma analítica sería $f(z) = \frac{1}{2}(-\bar{z}i)$.

En conclusión la transformación que lleva el disco de Poincaré en el plano hiperbólico es:

$$(f \circ w)(z) = f(w(z)) = \frac{1}{2} \left(-\overline{\left(\frac{2\bar{z} + 2}{\bar{z} - 1} \right)} i \right) = -\frac{1}{2} \frac{2z + 2}{z - 1} i = \frac{z + 1}{1 - z} i \quad (3.7)$$

que es una transformación de Möbius con inversa:

$$z = \frac{v + 1}{1 - v} i \Leftrightarrow z(1 - v) = i + vi \Leftrightarrow z - zv - i - vi = 0 \Leftrightarrow z - i = (z + i)v \Leftrightarrow v = \frac{z - i}{z + i} \quad (3.8)$$

Pongamos $v = \frac{z - i}{z + i} \in U$ con $z \in \mathbb{H}$, es decir que v es imagen de la transformación de \mathbb{H} a U . Lo que vamos a demostrar es que esta transformación es una isometría entre \mathbb{H} y U . Para ello veremos que la métrica correspondiente a v en U es la de z en \mathbb{H} .

Calculemos:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{z + i - (z - i)}{(z + i)^2} = \frac{2i}{(z + i)^2}$$

luego

$$\left| \frac{dv}{dz} \right| = \left| \frac{2i}{(z + i)^2} \right| = \frac{|2i|}{|(z + i)^2|} = \frac{2}{|z + i|^2}$$

donde, como siempre, $|\cdot|$ denota la norma usual en \mathbb{C} (recordemos la norma del producto es el producto de las normas).

También:

$$\begin{aligned}
 1 - |v|^2 &= 1 - \left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 = 1 - \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{|z+i|^2 - |z-i|^2}{|z+i|^2} = \\
 &= \frac{\operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z) + 1)^2 - (\operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z) - 1)^2)}{|z+i|^2} = \\
 &= \frac{(\operatorname{Im}(z) + 1)^2 - (\operatorname{Im}(z) - 1)^2}{|z+i|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)^2 + 2\operatorname{Im}(z) + 1 - \operatorname{Im}(z)^2 + 2\operatorname{Im}(z) - 1}{|z+i|^2} = \\
 &= \frac{4\operatorname{Im}(z)}{|z+i|^2}
 \end{aligned}$$

Con todo esto tenemos:

$$\frac{2|dv|}{1-|v|} = 2 \frac{2|dz|}{|z+i|^2} \frac{|z+i|^2}{4\operatorname{Im}(z)} = \frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)}$$

Por lo tanto la métrica en H se corresponde con $\frac{2|dv|}{1-|v|^2}$ en U que es la misma métrica del modelo del disco de Poincaré. Concluimos así que dicha transformación es una isometría entre ambos modelos de Poincaré del plano hiperbólico.

Podemos usar esta isometría para calcular las geodésicas de U . Pero primero es necesario probar que el diámetro de U correspondiente al segmento del eje imaginario es una geodésica en U .

Consideremos los puntos 0 e ri ($r > 0$) de U y sea $\gamma : I \rightarrow U$ un camino diferenciable a trozos que los une, con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ y $t \in I = [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 h'(z) &= \int_0^1 \frac{2|z|}{1-|z|^2} dt = \int_0^1 \frac{2\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}}{1-(x(t)^2 + y(t)^2)} dt \geq \int_0^1 \frac{2\sqrt{(\frac{dy}{dt})^2}}{1-(x(t)^2 + y(t)^2)} dt \geq \\
 &\geq \int_0^1 \frac{2\frac{dy}{dt}}{1-y(t)^2} dt = \int_0^r \frac{2dy}{1-y^2} = \int_0^r \frac{2dy}{(1-y)(1+y)} = \int_0^r \left(\frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{(1+y)} \right) dy = \\
 &= \int_0^r \frac{1}{(1+y)} dy + \int_0^r \frac{1}{(1-y)} dy = (\ln|1+y| - \ln|1-y|)|_0^r = (\ln(1+y) - \ln(1-y))|_0^r = \\
 &= \ln \frac{1+y}{1-y} \Big|_0^r = \ln \frac{1+r}{1-r} - \ln 1 = \ln \frac{1+r}{1-r}
 \end{aligned}$$

Pero $\ln \frac{1+r}{1-r}$ es precisamente la longitud hiperbólica en U del segmento de eje imaginario

que une 0 y ri : pongamos $\gamma(t) = tri = (0, tr)$ con $t \in I$

$$\begin{aligned} h'(\gamma) &= \int_0^1 \frac{2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{1 - (x(t)^2 + y(t)^2)} dt = \int_0^1 \frac{2r}{1 - (rt)^2} dt = \int_0^r \frac{2}{1 - z^2} dz = \int_0^r \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} \right) dz = \\ &= \int_0^r \frac{1}{1+z} dz + \int_0^r \frac{1}{1-z} dz = (\ln|1+z| - \ln|1-z|)|_0^r = \ln \frac{1+z}{1-z} \Big|_0^r = \ln \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

Así concluimos que la geodésica que une 0 e ir es el segmento del eje imaginario que los une.

Para ver cuales son las geodésicas de U solo es necesario ver que la isometría de U a \mathbb{H} lleva las circunferencia ortogonales a la circunferencia principal $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y los diámetros de dicha circunferencia principal en geodésicas de \mathbb{H} .

Una vez hecho esto aplicamos la transformación del ejercicio 2.7 para llevar las geodésicas al eje imaginario en \mathbb{H} y posteriormente por la isometría llevamos este conjunto contenido en el eje imaginario al eje imaginario en U . Como estamos componiendo isometrías (la del ejercicio 2.7 también lo es puesto que vimos que $PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$) se conserva la distancia y se concluye así que las geodésicas de U son los arcos de circunferencia perpendiculares a la circunferencia principal y los diámetros de la misma.

La circunferencia principal de U es $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y esto coincide con la frontera euclidiana de U . De manera similar, la frontera euclidiana de \mathbb{H} es el subconjunto de la esfera de Riemann $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si retomamos (2.4) vemos que los puntos de la frontera euclidiana del plano hiperbólico se caracterizan porque su distancia hiperbólica a cualquier otro punto en el plano es infinita. Este conjunto de puntos se conoce como puntos en el infinito.

Capítulo 4

El grupo de isometrías del plano hiperbólico

Para calcular el grupo de isometrías del plano hiperbólico trabajaremos con el modelo del plano superior complejo. Recordemos que por el Teorema 2.6 las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ son isometrías del plano superior complejo.

Lo que va a ocurrir es que $PSL(2, \mathbb{R})$ junto con otras transformaciones van a ser el grupo de isometrías tan buscado.

Para verlo, necesitamos de un par de resultados que nos darán formulas explícitas para la distancia hiperbólica de dos puntos en \mathbb{H} en función de los propios puntos en vez de usar la longitud del segmento de geodésica que los une.

Teorema 4.1. Sean $z, w \in \mathbb{H}$ ($z \neq w$) y pongamos los puntos terminales de la geodésica que une z y w como $z', w' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, escogidos de manera que z está entre z' y w . Entonces

$$\rho(z, w) = \ln[w, z; z', w']$$

siendo $[w, z; z', w']$ la razón doble o cross-ratio de la definición (1.5).

Demostración. Sean $z, w, z', w' \in \mathbb{H}$ en las condiciones del teorema. De acuerdo con el ejercicio 2.7 existe un elemento $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ que lleva la geodésica que une z y w en el eje imaginario.

Podemos asumir que $g(z') = 0$, $g(w') = \infty$ y $g(z) = i$ y el motivo es el siguiente:

Dada la naturaleza de nuestra transformación g (ver ejercicio 2.7) sabemos que los puntos terminales z' y w' de la geodésica de partida van por g a los puntos terminales de la geodésica que es el eje imaginario, i.e, 0 e ∞ . Ahora bien si $g(z') = \infty$ y $g(w') = 0$ basta con aplicar la transformación $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ para obtener una transformación nueva $g' = -\frac{1}{g}$ que

verifica $g'(z') = 0$, $g'(w') = \infty$. Además esta transformación tiene determinante 1, es decir que $g' \in PSL(2, \mathbb{R})$: como $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ pongamos $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - cb = 1$, luego

$$g'(z) = -\frac{1}{g(z)} = -\frac{cz+d}{az+b}$$

donde $-(cb - ad) = ad - cb = 1$ lo que prueba que $g' \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Así podemos asumir que $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ es tal que $g(z') = 0$ y $g(w') = \infty$. Nos queda por ver que también podemos asumir que $g(z) = i$.

Supongamos que no es así y $g(z) = hi$ con $h > 0$. Como en el caso anterior, podemos aplicarle una transformación a g de forma que z valla a i y g siga estando en $PSL(2, \mathbb{R})$. La transformación es $z \rightarrow kz$, $k > 0$ (en este caso sería $k = \frac{1}{h}$). Además $kg(z)$ sigue estando en $PSL(2, \mathbb{R})$ aunque tenga determinante k pues ya vimos que en $PSL(2, \mathbb{R})$ están representadas todas las transformaciones con determinante positivo.

Toda esta retahíla de argumentos nos permite asumir que la transformación $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, que lleva la geodésica que une z y w en el eje imaginario, es tal que $g(z') = 0$, $g(w') = \infty$ y $g(z) = i$. Entonces $g(w) = ri$ ($r > 1$) y como hemos visto en (2.5):

$$h([g(z), g(w)]) = \ln\left(\frac{ri}{i}\right) = \ln r$$

Por el Corolario 2.11 $\rho(g(z), g(w)) = h([g(z), g(w)]) = \ln r$.

Además $g \in PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$ (Teorema 2.6) de lo que podemos deducir:

$$\rho(z, w) = \rho(g(z), g(w)) = \ln r \quad (4.1)$$

Por otra banda $[ri, i; 0, \infty] = \frac{ri-0}{i-0} = r$. Recordemos que en el Corolario 1.10 demostramos que la razón doble es invariante por las transformaciones de Möbius (transformaciones que contienen a $PSL(2, \mathbb{R})$), así:

$$[w, z; z', w'] = [g(w), g(z); g(z'), g(w')] = [ri, i; 0, \infty] = r \quad (4.2)$$

Con (4.1) y (4.2) concluimos:

$$\rho(z, w) = \ln[w, z; z', w']$$

□

Para probar el siguiente teorema emplearemos el resultado del ejercicio que viene a continuación.

Ejercicio 4.2. Demuestra que para $z, w \in \mathbb{H}$ y $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ se verifica la siguiente igualdad:

$$|g(z) - g(w)| = |z - w| |g'(z)g'(w)|^{\frac{1}{2}}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma usual en \mathbb{C}

Solución 4.3. Sea z, w y $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ en las condiciones mencionadas.

$$\begin{aligned} g(z) - g(w) &= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{(az+b)(cw+d) - (aw+b)(cz+d)}{(cz+d)(cw+d)} = \\ &= \frac{aczw + adz + bcw + bd - (aczw + adw + bcz + bd)}{(cz+d)(cw+d)} = \frac{(ad-bc)z + (bc-ad)w}{(cz+d)(cw+d)} \end{aligned}$$

Recordemos que por ser $g \in PSL(2, \mathbb{R})$: $ad - dc = 1$ luego

$$g(z) - g(w) = \frac{z - w}{(cz+d)(cw+d)}$$

de donde

$$|g(z) - g(w)| = \left| \frac{z - w}{(cz+d)(cw+d)} \right| = \frac{|z - w|}{|(cz+d)(cw+d)|} = \frac{|z - w|}{|cz+d||cw+d|} \quad (4.3)$$

por las propiedades de $|\cdot|$ con el producto en \mathbb{C} .

Por otro lado, de (1.1) tenemos

$$g'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2} \quad g'(w) = \frac{1}{(cw+d)^2}$$

y por lo tanto

$$|g'(z)| = \left| \frac{1}{(cz+d)^2} \right| = \frac{1}{|cz+d|^2} \quad |g'(w)| = \left| \frac{1}{(cw+d)^2} \right| = \frac{1}{|cw+d|^2}$$

aplicando de nuevo las propiedades de $|\cdot|$ con el producto. Así

$$|g'(z)g'(w)|^{\frac{1}{2}} = (|g'(z)||g'(w)|)^{\frac{1}{2}} = |g'(z)|^{\frac{1}{2}}|g'(w)|^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{|cz+d|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|cw+d|^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|cz+d||cw+d|}$$

Para terminar solo queda sustituir esta expresión en (4.3):

$$|g(z) - g(w)| = \frac{|z - w|}{|cz+d||cw+d|} = |z - w| |g'(z)g'(w)|^{\frac{1}{2}}$$

El siguiente teorema es un formulario para la distancia hiperbólica. Una de las igualdades que nos proporciona nos va a ser de gran ayuda para calcular $Isom(\mathbb{H})$.

Teorema 4.4. Sean $z, w \in \mathbb{H}$. Se verifica:

(i)

$$\rho(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

(ii)

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$$

(iii)

$$\sinh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}}}$$

(iv)

$$\cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}}}$$

(v)

$$\tanh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|$$

Demostración. Todas estas igualdades son equivalente siendo necesario probar solo una de ella para demostrarlas todas. No vamos a ver que son equivalentes ya que la que nos interesa es (iii) y es un ejercicio rutinario comprobar la equivalencia, pero sí vamos a demostrar esta.

Por una parte el lado izquierdo de la igualdad

$$\sinh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}}}$$

es invariante por cualquier transformación de $PSL(2, \mathbb{R})$. Esto es consecuencia de que $PSL(2, \mathbb{R}) \subset \operatorname{Isom}(\mathbb{H})$ (Teorema 2.6).

Por otra parte demostraremos que el lado derecho de la igualdad también es invariante por transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$. Para ello, del ejercicio 4.2

$$|z - w| = \frac{|g(z) - g(w)|}{|g'(z)g'(w)|^{\frac{1}{2}}}$$

y recordemos que de (1.1) se sigue

$$|z - w| = \frac{|g(z) - g(w)|}{\left| \frac{\operatorname{Im}(g(z))}{\operatorname{Im}(z)} \frac{\operatorname{Im}(g(w))}{\operatorname{Im}(w)} \right|^{\frac{1}{2}}}$$

Como la parte imaginaria de los elementos de \mathbb{H} es siempre positiva y g conserva el plano superior complejo

$$|z - w| = \frac{|g(z) - g(w)|}{\left(\frac{\operatorname{Im}(g(z))}{\operatorname{Im}(z)} \frac{\operatorname{Im}(g(w))}{\operatorname{Im}(w)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Teniendo una expresión para $|z - w|$ podemos sustituirla en el lado derecho de la ecuación (III) para ver si este es invariante por g :

$$\begin{aligned} \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}}} &= \frac{|g(z) - g(w)|}{\left(\frac{\operatorname{Im}(g(z))}{\operatorname{Im}(z)} \frac{\operatorname{Im}(g(w))}{\operatorname{Im}(w)}\right)^{\frac{1}{2}}} : 2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{|g(z) - g(w)|}{2\left(\frac{\operatorname{Im}(g(z))}{\operatorname{Im}(z)} \frac{\operatorname{Im}(g(w))}{\operatorname{Im}(w)}\right)^{\frac{1}{2}} (\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{|g(z) - g(w)|}{2\left(\frac{\operatorname{Im}(g(z))\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Im}(z)} \frac{\operatorname{Im}(g(w))\operatorname{Im}(w)}{\operatorname{Im}(w)}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{|g(z) - g(w)|}{2(\operatorname{Im}(g(z))\operatorname{Im}(g(w)))^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Efectivamente ambos lados de la ecuación (III) son invariantes por cualquier transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Sea L la única geodésica de \mathbb{H} que pasa por z y w . Por el ejercicio 2.7 existe una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ que lleva L en el eje imaginario. Esta transformación existe siempre, independientemente de quien sean los punto z y w o la geodésica L que los une. Con esto y habiendo demostrado que la ecuación (III) es invariante por cualquier transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ para probar (III) es suficiente con hacerlo para dos puntos z y w en el eje imaginario.

En consecuencia, sean $z = ia$ y $w = ib$ y vamos a probar (III). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a < b$. Vimos ya en (2.5) que al ser z, w puntos de eje imaginario $\rho(z, w) = \rho(ia, ib) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

$$\begin{aligned} \sinh\left[\frac{1}{2}\rho(z, w)\right] &= \sinh\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \sinh\left[\ln\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right] = \\ &= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}{(ab)^{\frac{1}{2}}} : 2 = \\ &= \frac{b - a}{2(ab)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Observación 4.5. En la ecuación anterior estamos usando que

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

para todo $z \in \mathbb{H}$. Además también $|z - w| = \sqrt{(a - b)^2} = b - a$ por ser $a, b > 0$ y $b > a$.

□

El siguiente teorema identifica todas las isometrías de \mathbb{H}

Teorema 4.6. *El grupo $Isom(\mathbb{H})$ está generado por las transformaciones lineales de $PSL(2, \mathbb{R})$ junto con la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$.*

Demostración. Sea Φ una isometría de \mathbb{H} . Vamos a repetir el argumento del Teorema 2.13: sean $z, w \in \mathbb{H}$ y $\xi \in [z, w]$, como Φ es una isometría tenemos:

$$\rho(\Phi(z), \Phi(w)) = \rho(z, w)$$

Por el Corolario 2.12 como $\xi \in [z, w]$

$$\rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w)$$

y de nuevo por ser Φ una isometría $\rho(z, \xi) + \rho(\xi, w) = \rho(\Phi(z), \Phi(\xi)) + \rho(\Phi(\xi), \Phi(w))$. Tenemos entonces:

$$\rho(\Phi(z), \Phi(w)) = \rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w) = \rho(\Phi(z), \Phi(\xi)) + \rho(\Phi(\xi), \Phi(w))$$

y por el Corolario 2.12 esto ocurre si, y solo si $\Phi(\xi) \in [\Phi(z), \Phi(w)]$ lo que demuestra que Φ lleva geodésicas en geodésicas.

Denotemos por I el eje imaginario estrictamente positivo. Por lo acabado de ver, al ser I una geodésica, $\Phi(I)$ también lo es. De acuerdo con el ejercicio 2.7 existe una isometría $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ que lleva $\Phi(I)$ en I . Aplicando las transformaciones $z \rightarrow kz$ ($k > 0$) y $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ como hicimos en la prueba de Teorema 4.1 podemos asumir que $g \circ \Phi$ fija i y lleva los intervalos (i, ∞) y $(0, i)$ en ellos mismos, por lo tanto $g \circ \Phi$ fija cada uno de los puntos de I .

Ahora sea $z = x + yi \in \mathbb{H}$, y $g \circ \Phi(z) = u + iw$. Para todo t positivo:

$$\rho(z, it) = \rho(g \circ \Phi(z), g \circ \Phi(it)) = \rho(u + iw, it)$$

ya que $g \circ \Phi$ es una isometría por ser composición de las mismas ($g \in PSL(2, \mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$)

Aplicando (III) del Teorema 4.4 en ambos lados de la igualdad:

$$\sinh \left[\frac{1}{2} \rho(x + iy, i) \right] = \sinh \left[\frac{1}{2} \rho(u + iv, i) \right]$$

$$\frac{|x + iy - it|}{2(yt)^{\frac{1}{2}}} = \frac{|u + iv - it|}{2(vt)^{\frac{1}{2}}}$$

Elevamos ambos lados al cuadrado

$$\frac{x^2 + (y - t)^2}{4yt} = \frac{u^2 + (v - t)^2}{4vt} \Leftrightarrow [x^2 + (y - t)^2]v = [u^2 + (v - t)^2]y \quad (4.4)$$

Como esto es válido para todo $t > 0$ podemos dividir ambos lados por t^2 y tomar límites cuando $t \rightarrow \infty$ obteniendo así $v = y$. Sustituyendo en 4.4 tenemos que $x^2 = u^2$.

Recapitulando $g \circ \Phi(x + iy) = u + iy$ verificando $x^2 = u^2$ luego las únicas posibilidades son:

$$g \circ \Phi(z) = z$$

o

$$g \circ \Phi(z) = -\bar{z}$$

Como $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y hemos visto que es invertible pongamos:

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

y

$$g^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

con $ad - cb = 1$.

Observación 4.7. Recordemos que $g^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a} \in PSL(2, \mathbb{R})$, consecuencia de que por ser $g(z) \in PSL(2, \mathbb{R})$ tenemos que $ad - cb = 1$ que es también el determinante de la matriz asociada a g^{-1}

Si $g \circ \Phi(z) = z \Rightarrow g \circ \Phi = Id$ siendo $Id(z) = z$ la función identidad en \mathbb{H} . Entonces $\Phi(z) = (g^{-1} \circ g \circ \Phi)(z) = (g^{-1} \circ Id)(z) = g^{-1}(z) \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Si $g \circ \Phi(z) = -\bar{z}$ entonces $\Phi(z) = (g^{-1} \circ g \circ \Phi)(z) = g^{-1}(-\bar{z})$ con $g^{-1}(z) \in PSL(2, \mathbb{R})$. Esto es, Φ es composición de una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ y la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$.

En conclusión, cualquier isometría Φ es o una transformación de $PSL(2, \mathbb{R})$ o una transformación de $PSL(2, \mathbb{R})$ aplicada a la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$, i.e, el grupo $Isom(\mathbb{H})$ está generado por las transformaciones lineales de $PSL(2, \mathbb{R})$ junto con la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$ como queríamos demostrar. \square

Parémonos a reflexionar en este punto. Acabamos de ver que las isometrías de \mathbb{H} son las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ o son de la forma $g(-\bar{z})$ con $g \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Recordemos que en el primer capítulo vimos que no solo las transformaciones de Möbius con determinante positivo conservan el semiplano superior complejo, si no que las que tienen determinante negativo actuando sobre una transformación concreta (la conjugación compleja) también lo hacen. Pues bien, estas transformaciones están aquí presentes.

Consideremos las isometrías de \mathbb{H} de la forma $g(-\bar{z}) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$. Veamos qué les ocurre:

$$g(-\bar{z}) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d} = \frac{-a(\bar{z}) + b}{-c(\bar{z}) + d}$$

con $-ad + bc = -(ad - bc) = -1$, esto es, son las transformaciones con matriz asociada de determinante -1 aplicadas a \bar{z} , las mismas que conservan en semiplano superior complejo.

Recapitulando, las isometrías de \mathbb{H} son las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ o son de la forma:

$$g(\bar{z}) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad y \quad ad - cb = -1 \quad (4.5)$$

Definición 4.8. Denotamos por $PS^*L(2, \mathbb{R})$ el conjunto de las transformaciones de Möbius con matriz asociada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $Det(A) = \pm 1$.

De la misma manera que vimos para $PSL(2, \mathbb{R})$ el grupo $PS^*L(2, \mathbb{R})$ es isomorfo a $S^*L(2, \mathbb{R})/\pm 1_2$ donde $S^*L(2, \mathbb{R})$ es el grupo de matrices reales 2×2 con determinante ± 1 e 1_2 denota la matriz identidad 2×2 .

Este grupo que acabamos de definir es isomorfo al grupo de las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ junto con las transformaciones de la forma (4.5). Para ello identificaremos las transformaciones de ambos grupos de forma biunívoca, pero antes veremos que son dos grupos con la composición de aplicaciones.

Sean $g = \frac{az+b}{cz+d}$ y $g' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ entonces

$$\begin{aligned} (g' \circ g)(z) &= \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} = \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{cz+d} : \frac{c'(az+b) + d'(cz+d)}{cz+d} = \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{c'(az+b) + d'(cz+d)} = \\ &= \frac{a'az + a'b + cb'z + b'd}{c'az + c'b + d'cz + d'd} = \frac{(aa' + cb')z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'd} \end{aligned}$$

que es una transformación de Möbius con matriz asociada:

$$\begin{bmatrix} aa' + cb' & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de la misma:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} aa' + cb' & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{vmatrix} &= (aa' + cb')(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = \\
&= aa'c'b + aa'd'd + cb'c'b + ab'd'd - (a'bc'a + a'bd'c + b'dc'a + b'dd'c) = \\
&= aa'd'd + cb'c'c - c'ab'd - a'bd'c = a'd'(ad - cb) - b'c'(ad - cb) = \\
&= (ad - cb)(a'd' - b'c')
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Luego si $g, g' \in PSL(2, \mathbb{R})$ tenemos que $ad - bc = 1 = a'd' - b'c'$, esto es, $g' \circ g$ es una transformación de Möbius con matriz asociada de determinante $(ad - cb)(a'd' - b'c') = 1$. Acabamos de probar que, \circ , la operación composición de aplicaciones, es una operación interna en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Además $Id \in PSL(2, \mathbb{R})$, que es el neutro para \circ , donde Id denota la aplicación identidad en \mathbb{C} restringida a \mathbb{H} . Y también hemos demostrado que la inversa de una transformación de Möbius es una transformación de Möbius con el mismo determinante de la matriz asociada. Por todo esto (sabemos que \circ es asociativa para cualesquiera aplicaciones) concluimos que $PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo con la operación composición.

Repitiendo los mismos argumentos para $g, g' \in PS^*L(2, \mathbb{R})$ se concluye fácilmente que $PS^*L(2, \mathbb{R})$ es un grupo con la operación composición.

Nos queda por ver que las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ junto con las de la forma (4.5) forman un grupo con la operación composición.

Proposición 4.9. *Las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ junto con las de la forma (4.5) son un grupo con la operación composición.*

Demostración. Comprobamos las condiciones de grupo directamente.

Operación interna

Si $g, g' \in PSL(2, \mathbb{R})$, por ser este un grupo con \circ tenemos que $g' \circ g \in PSL(2, \mathbb{R})$. Supongamos que tenemos una transformación $g' \in PSL(2, \mathbb{R})$ y otra de la forma (4.5) pongamos $g(-\bar{z})$ con $g \in PSL(2, \mathbb{R})$:

$$g' \circ (g(-\bar{z})) = g'(g(-\bar{z})) = {}^1(g' \circ g)(-\bar{z})$$

Como $g' \circ g$ está en $PSL(2, \mathbb{R})$ la composición de $g(-\bar{z})$ y g' es una transformación de la forma (4.5) y está en el conjunto.

La composición al revés también está en el conjunto. Pongamos $g = \frac{az+b}{cz+d}$ y $g' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$

¹Propiedad asociativa de la composición de aplicaciones.

$$-\overline{g'(z)} = -\overline{\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right)} = -\frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'} = \frac{a'(-\bar{z}) - b'}{c'\bar{z} + d'} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{-a'(-\bar{z}) + b'}{c'(-\bar{z}) - d'}$$

se tiene que $(-a')(-d') - c'b' = a'd' - c'b' = 1$ de lo que concluimos que $-\overline{g'(z)} = h'(-\bar{z})$ siendo $h' \in PSL(2, \mathbb{R})$. Luego:

$$g(-\overline{g'(z)}) = g(h'(-\bar{z})) = (g \circ h')(-\bar{z})$$

con $g, h' \in PSL(2, \mathbb{R})$. Como $g \circ h' \in PSL(2, \mathbb{R})$ tenemos que $g(-\overline{g'(z)})$ es una transformación de la forma (4.5) y por lo tanto está en el conjunto.

Nos queda por ver que ocurre al componer dos transformaciones de la forma $g(-\bar{z})$ y $g'(-\bar{z})$ con $g, g' \in PSL(2, \mathbb{R})$. Conservando las notaciones para g y g' :

$$-\overline{g'(-\bar{z})} = -\overline{\left(\frac{a'(-\bar{z}) + b'}{c'(-\bar{z}) + d'}\right)} = -\frac{a'(-z) + b'}{c'(-z) + d'} = \frac{a'(z) - b'}{-c'z + d'}$$

donde $a'd' - b'c' = 1$, es decir, existe $h' \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $-\overline{g'(-\bar{z})} = h'(z)$. Por lo que

$$g(-\overline{g'(-\bar{z})}) = g(h'(z)) = (g \circ h')(z)$$

donde $g \circ h' \in PSL(2, \mathbb{R})$ por ser $g, h' \in PSL(2, \mathbb{R})$ como ya vimos. Lo que demuestra que $g(-\overline{g'(-\bar{z})})$ está en nuestro conjunto de transformaciones.

Vistos todos los casos, concluimos que \circ es una operación interna en el conjunto de las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ y las de la forma (4.5).

Observación 4.10. Para las transformaciones de Möbius siempre se tiene $\overline{g(z)} = \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = g(\bar{z})$ por las propiedades del conjugado de un número complejo.

Existencia de neutro

Es el mismo caso que en $PSL(2, \mathbb{R})$. La aplicación identidad en \mathbb{H} es el neutro para \circ y está en particular en $PSL(2, \mathbb{R})$ que está contenido en nuestro conjunto de transformaciones.

Asociatividad

La operación \circ es asociativa por su propia naturaleza y en particular en el conjunto de nuestro estudio.

Existencia de simétrico para \circ

Para los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ vimos que existe simétrico para todos y el simétrico está también en $PSL(2, \mathbb{R})$. Nos queda ver quien es el simétrico de los elementos de la forma (4.5): Sea $g(-\bar{z})$ una transformación con $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y calculemos una expresión para su inversa directamente.

$$\begin{aligned} \frac{a(-\bar{w}) + b}{c(-\bar{w}) + d} = z &\Leftrightarrow a(-\bar{w}) + b = z[c(-\bar{w}) + d] \Leftrightarrow a(-\bar{w}) + b - c(-\bar{w})z - dz = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\bar{w}(a - cz) = dz - b \Leftrightarrow -\bar{w} = \frac{dz - b}{-cz + a} = g^{-1}(z) \end{aligned}$$

Despejando la ecuación anterior obtenemos que la inversa de $g(-\bar{z})$ es $\overline{-g^{-1}(z)}$. Efectivamente

$$g\left(-\overline{-g^{-1}(z)}\right) = g\left(-\left(-\overline{g^{-1}(z)}\right)\right) = g(-(-g^{-1}(z))) = g(g^{-1}(z)) = z$$

$$\overline{-g^{-1}(g(-\bar{z}))} = -g^{-1}\left(\overline{g(-\bar{z})}\right) = -g^{-1}(g(-z)) = -(g^{-1} \circ g)(-z) = -(-z) = z$$

Además, pertenece al conjunto de transformaciones que estamos estudiando:

$$\overline{-g^{-1}(z)} = -g^{-1}(\bar{z}) = -\frac{d\bar{z} - b}{-c\bar{z} + a} = \frac{d\bar{z} - b}{c\bar{z} - a} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{d(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + a}$$

con $da - cb = 1$ luego es de la forma (4.5) y está en el conjunto.

Concluimos de esta manera que las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ junto con las de la forma (4.5) forman un grupo con la operación composición. □

Este grupo de transformaciones es isomorfo al grupo $PS^*L(2, \mathbb{R})$. Para demostrarlo construimos una aplicación, f , de $PS^*L(2, \mathbb{R})$ en el grupo formado por $PSL(2, \mathbb{R})$ y las transformaciones de la forma (4.5) que lleva los elementos de $PSL(2, \mathbb{R}) \in PS^*L(2, \mathbb{R})$ en ellos mismos, y los demás en su conjugado. Es decir, si g es una transformación de Möbius con matriz asociada de determinante 1 entonces $f(g) = g$ mientras que si g es una transformación de Möbius con matriz asociada de determinante -1 entonces $f(g) = \bar{g}$.

La aplicación f está bien definida puesto que $f(g)$ es o una transformación de $PSL(2, \mathbb{R})$ o $f(g(z)) = \overline{g(\bar{z})} = g(\bar{z})$ con g una transformación con matriz asociada de determinante -1 , es decir, una transformación de la forma (4.5).

Para ver que es un homomorfismo de grupos sean $g, g' \in PS^*L(2, \mathbb{R})$. Distinguimos casos:

Si $g, g' \in PSL(2, \mathbb{R})$ tenemos que $g \circ g' \in PSL(2, \mathbb{R})$ luego $f(g \circ g') = g \circ g' = f(g) \circ f(g')$.

Si g, g' son ambas de matriz asociada con determinante -1 entonces $g \circ g'$ es una transformación de $PSL(2, \mathbb{R})$ (ver (4.6)) y así $(f(g) \circ f(g'))(z) = \overline{(g \circ g')}(z) = g(\overline{g'(z)}) = g(\overline{g'(z)}) = g(g'(z)) = (g \circ g')(z) = f((g \circ g')(z))$.

Por ultimo, si $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y g' es una transformación con matriz asociada de determinante -1 tenemos que $g \circ g'$ es una transformación de Möbius con matriz asociada de determinante -1 por (4.6). Luego $f(g \circ g')(z) = \overline{g \circ g'}(z) = g(\overline{g'(z)}) = (f(g) \circ f(g'))(z)$. Y de la misma manera para $g' \circ g$.

Una vez comprobado que f un homomorfismo de grupos queda ver que es biyectivo.

Inyectivo

Sea $g \in Ker(f)$ entonces $f(g) = Id$ donde Id denota la aplicación identidad en \mathbb{H} y $Ker(f)$ el núcleo de f . Si $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ entonces $Id = f(g) = g$. Si g es una transformación con matriz asociada de determinante -1 tenemos $Id(z) = f(g(z)) = \overline{g(z)} = g(\bar{z})$ que no es una transformación de Möbius mientras que Id sí lo es, luego este caso no puede ser. De esta manera tenemos que $Ker(f) = \{Id\}$ que es el neutro del grupo, concluimos por la siguiente proposición que f es inyectiva.

Proposición 4.11. *Un homomorfismo de grupos es inyectivo si, y solo si, el núcleo de dicho homomorfismo es igual al neutro del grupo del dominio.*

Sobreyectivo

Consideremos h una transformación en el grupo formado por $PSL(2, \mathbb{R})$ y las transformaciones del tipo (4.5). Si $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ entonces $h \in PS^*L(2, \mathbb{R})$ y $f(h) = h$. Si h es de la forma (4.5) entonces existe g una transformación de Möbius con matriz asociada determinante -1 tal que $h(z) = g(\bar{z}) = \overline{g(z)} = f(g(z))$, i.e existe $g \in PS^*L(2, \mathbb{R})$ tal que $f(g) = h$.

Con todo esto tenemos que f es un isomorfismo de grupos y que los grupos $PS^*L(2, \mathbb{R})$ y el formado por las transformaciones $PSL(2, \mathbb{R})$ y las de la forma (4.5) son isomorfos.

Entre estas isometrías encontramos una distinción clara. Decimos que una isometría conserva la orientación si el determinante de su matriz asociada es positivo mientras que si es negativo decimos que la invierte. Por esto, las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ son

isometrías que conservan la orientación mientras que las de la forma (4.5), en particular $g(z) \rightarrow -\bar{z}$, son isometrías que invierten la orientación.

Vamos a considerar el espacio tangente en un punto z de \mathbb{H} que denotamos por $T_z\mathbb{H}$. La métrica de Riemann en \mathbb{H} que hemos estado utilizando viene del siguiente producto interior en $T_z\mathbb{H}$: para $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ y $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ en $T_z\mathbb{H}$

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_z = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)$$

Observación 4.12. $\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 = \langle (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \rangle$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en \mathbb{R}^2 .

Denotemos la norma correspondiente al producto escalar en $T_z\mathbb{H}$ por $\|\cdot\|$. Como hemos visto en el primer capítulo las isometrías en \mathbb{H} son diferenciables, es decir actúan en $T_z\mathbb{H}$, pero no de cualquier manera si no que conservan la norma que acabamos de definir, de aquí nuestro interés por ellas en el primer capítulo.

Esto es sencillo de demostrar si tenemos en cuenta que la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$ conserva la norma en el tangente y que para $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ también se conserva por (1.3).

Además el recíproco también se verifica: si tenemos una aplicación diferenciable de \mathbb{H} en \mathbb{H} que conserva la norma en el tangente es una isometría. Sea g una aplicación en las condiciones anteriores y $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ un camino diferenciable a trozos dado por $z(t) = (x(t), y(t))$

$$h(g(\gamma)) = \int_0^1 \frac{|g'(z(t))||z'(t)|}{\text{Im}(g(z(t)))} dt$$

como g' conserva la norma definida en $T_z\mathbb{H}$ se tiene $\frac{|g'(z(t))||z'(t)|}{\text{Im}(g(z(t)))} = \frac{|z'(t)|}{\text{Im}(z(t))}$ luego:

$$h(g(\gamma)) = \int_0^1 \frac{|z'(t)|}{\text{Im}(z(t))} dt = h(\gamma)$$

Si tenemos en cuenta la identidad de polarización para el espacio $T_z\mathbb{H}$ para dos puntos $\xi, \eta \in T_z\mathbb{H}$:

$$\langle \xi, \eta \rangle_z = \frac{1}{2} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2)$$

y como las isometrías conservan la norma $\|\cdot\|$ se conserva también producto interior y el valor absoluto de un ángulo entre dos vectores del espacio tangente.

Definición 4.13. Definimos el ángulo entre dos geodésicas de \mathbb{H} en un punto de intersección z como el ángulo entre sus vectores tangentes en $T_z\mathbb{H}$.

Esta noción de ángulo coincide con la noción de ángulo de un espacio euclidiano, basta con observar que el producto interior de $T_z\mathbb{H}$ es un múltiplo escalar del producto interior en \mathbb{R}^2 . Así:

$$\cos \theta = \frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle}{|\zeta_1|^2 |\zeta_2|^2} = \frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_z \operatorname{Im}(z)^2}{\operatorname{Im}(z) \|\zeta_1\| \operatorname{Im}(z) \|\zeta_2\|} = \frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_z}{\|\zeta_1\| \|\zeta_2\|}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma usual en \mathbb{R}^2 .

Definición 4.14. Una transformación en \mathbb{H} se dice conforme si conserva los ángulos y se dice anti-conforme si conserva el valor absoluto del ángulo pero cambia su signo.

Teorema 4.15. *Cualquier transformación de $PSL(2, \mathbb{R})$ es conforme mientras que las transformaciones de la forma (4.5) son anti-conformes.*

Demostración. Los dos tipos de transformaciones conservan el valor absoluto del ángulo por ser isometrías, que es lo que acabamos de ver. Pero $PSL(2, \mathbb{R})$ conserva la orientación por lo tanto, el ángulo, mientras que las de la forma (4.5) la invierten por lo que cambian el signo del ángulo.

De otra forma, cualquier transformación $g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$ es conforme en el plano complejo puesto que, para $z \in \mathbb{C}$, $g'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2} \neq 0$ mientras que la transformación $z \rightarrow -\bar{z}$ es anti-conforme (geoméricamente invierte la orientación). Además al componer una aplicación conforme con una anti-conforme resulta en una aplicación anti-conforme. \square

Observación 4.16. Para una aplicación holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con Ω abierto en \mathbb{C}

$$f \text{ conserva los ángulos orientados en } a \in \Omega \Leftrightarrow f'(a) \neq 0$$

Para terminar tenemos un resultado importante, consecuencia directa de que cualquier círculo hiperbólico en \mathbb{H} es un círculo euclidiano y vice versa.

Teorema 4.17. *La topología inducida en \mathbb{H} por la métrica hiperbólica es la misma que la inducida por la métrica euclidiana de \mathbb{C}*

Capítulo 5

Conclusión

Comenzamos el estudio del grupo de isometrías del plano hiperbólico viendo las propiedades de una serie de transformaciones, que a primera vista poco tenían que ver con la geometría hiperbólica. Las transformaciones de Möbius, poco a poco, fueron cobrando importancia a medida que nos adentramos en el modelo del plano superior complejo. Visto desde el final se intuye mejor la necesidad de centrarse primero en este tipo de transformaciones.

Mediante una métrica de Riemann se define un espacio (el plano superior complejo) con unas geodésicas peculiares que, como más adelante vemos, resultan tremendamente convenientes para este modelo. En nuestro estudio empleamos las propiedades de las aplicaciones de Möbius, argumentos de cálculo diferencial, algebraico y analíticos así como argumentos geométricos simples pero muy eficaces. Se definieron conceptos en el plano superior complejo en base a conceptos de la geometría euclidiana permitiendo aprovechar condiciones de esta última para resolver problemas rápidamente.

Resultó que cambiando la definición de recta (más bien, redefiniendo la recta) para el plano superior complejo, este era un espacio no-Euclidiano. Y se consiguió ver con argumentos puramente geométricos que es un modelo para la geometría hiperbólica, que también definimos.

Fue introducido otro modelo del plano hiperbólico: el disco de Poincaré. Conseguimos ver que ambos modelos eran isométricos y calculamos brevemente la geodésicas del disco.

Con todo dispuesto empieza el cálculo del grupo de isometrías del plano hiperbólico, usando el modelo del plano superior complejo. Con los resultados sobre geodésicas combinados con las propiedades de las transformaciones de Möbius y una identidad geométrica determinamos totalmente dicho grupo de isometrías.

En todo momento se mantuvo una relación entre las transformaciones de Möbius y un grupo de matrices que al final derivó en una isometría entre $Isom(\mathbb{H})$ y $PS^*L(2, \mathbb{R}) \simeq$

$S^*L(2, \mathbb{R})/\{\pm 1_2\}$. Para terminar separamos las isometrías en aquellas que conservan los ángulos y la orientación y aquellas que la invierten y conservan el valor absoluto de los ángulos pero cambian su signo.

El plano hiperbólico resultó, en muchos aspectos, distinto al plano euclidiano pero es sorprendente que el modelo del plano superior complejo tenga la misma topología inducida por la métrica de Riemann, que la inducida por la topología de \mathbb{C} . Más aún cuando este último es un espacio euclidiano.

Llegados a este punto podemos responder firmemente a la pregunta de si el V postulado de *Los elementos de Euclides* es consecuencia de los cuatro anteriores o es necesario para definir la geometría euclidiana. Y es que, como se muestra a lo largo de este trabajo, el V postulado de Euclides lo cambia todo.

Bibliografía

- [1] Katok, S. , *Fuchsian Groups, Chapter I, Pags. 1–23*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1992.
- [2] Anderson, J. W., *Hyperbolic Geometry*, Springer undergraduate mathematics series, Springer-Verlag, London, 1999.
- [3] Pennisi, L. L., Gordon, L. I. and Lasher, S., *Elements of complex variables, Pags. 318-319*, 2nd ed.,New York ; London : Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [4] Wilson, P. M. H., *Curved Spaces: From Classical Geometries to Elementary Differential Geometry, Chapters 4–5, Pags 75–115*, Cambridge University Press, New York, 2008.
- [5] Kaisaris, S., *Transforming the disk model of hyperbolic geometry to the upper half-plane model*, The Teaching of Mathematics **XX No. 2** (2017), 74–80.
- [6] Boyer, C. B., *Historia de la matemática*, 1st ed., Alianza Editorial, Madrid, 1986.