FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Problemas de Sturm-Liouville

MOUHCINE YOUSFI

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Problemas de Sturm-Liouville

MOUHCINE YOUSFI

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: ANÁLISIS MATEMÁTICO
Título: Problemas de Sturm-Liouville
Breve descrición do contido
Se abordará la llamada Teoría de Sturm-Liouville de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Se estudiará la teoría de la oscilación, junto con la teoría espectral, de la ecuación homogénea. La unicidad de solución de la ecuación no homogénea también se probará mediante la construcción de la función de Green correspondiente.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen

Se abordará la llamada Teoría de Sturm-Liouville de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Se estudiará la teoría de la oscilación, junto con la teoría espectral, de la ecuación homogénea. La unicidad de solución de la ecuación no homogénea también se probará mediante la construcción de la función de Green correspondiente.

Abstract

The so-called Theory of Sturm-Liouville of Second Order Ordinary Differential Equations will be addressed. The oscillation theory, together with the spectral theory, of the homogeneous equation will be studied. The uniqueness of solution of the non-homogeneous equation will be also be studied by means of the construction of the corresponding Green function.

Introducción

El objetivo del presente FIN DE GRADO es realizar un estudio de la llamada teoría de Sturm–Liouville, el TRABAJO que se hace es acerca del comportamiento oscilatorio de las soluciones de las ecuaciones de Sturm-Liouville (autofunciones) y el comportamiento de sus correspondientes autovalores (teoría espectral) de los problemas de Sturm-Liouville regulares y la demostración de la unicidad de la solución de la ecuación no homogénea mediante la construcción de la función de Green. Poco a poco iremos descubriendo muchas propiedades acerca de este tipo de ecuaciones. En el desarrollo del trabajo mostramos cómo surgió la teoría de Sturm–Liouville y cómo sus creadores fueron descubriendo por separado esta interesante teoría.

Primero hacemos una introducción a los problemas de Sturm–Liouville mediante algunas definiciones y resultados que nos sirven como base para el desarrollo de los temas posteriores y el análisis de nuestros problemas.
Después de ver definiciones y resultados en cada tema veremos la solución de algunas ecuaciones de Sturm–Liouville, y también daremos ejemplos a considerar y la construcción de la función de Green de algunos problemas.
Veremos el teorema más importante de la teoría de Sturm–Liouville llamado teorema espectral, el cual nos demuestra las propiedades más sobresalientes de este tipo de ecuaciones de Sturm–Liouville.
En el Capítulo 1 empezamos con una introducción a la teoría de Sturm–Liouville. También se presentan unas definiciones y resultados que sirven para el desarrollo de la teoría de los capítulos posteriores y son válidas para identificar cuando los problemas son regulares o singulares. También daremos algunos ejemplos interesantes.
El Capítulo 2 se centra en el estudio de la teoría de oscilación de soluciones y la comparación y separación de ceros de ciertas ecuaciones mediante el llamado teorema de comparación de Sturm-Liouville. Estos resultados se generalizan a situaciones más generales.
El Capítulo 3 trata de problemas lineales de contorno regulares. En él se pone de manifiesto una gran cantidad de definiciones y teoremas que nos serán de mucha ayuda para resolver nuestros problemas de Sturm–Liouville. La mayoría de estas definiciones y teoremas están

puestos con el propósito de descubrir las propiedades más sobresalientes de los problemas de Sturm–Liouville regulares.

En el Capítulo 4 enunciamos las propiedades (axiomas) de la función de Green. Veremos la demostración de la unicidad de solución de la ecuación no homogénea mediante la construcción de la función de Green correspondiente y desarrollamos algunos ejemplos de la construcción de dicha función.

En el capítulo 5 veremos el desarrollo de la teoría espectral de los problemas regulares de Sturm-Liouville, así como sus propiedades más importantes, y en menor medida abordemos problemas periódicos y singulares. También estudiamos el desarrollo de funciones con cierta regularidad en términos de funciones propias ortogonales introduciendo un producto interior en el espacio vectorial de la funciones de cuadrado medible en un intervalo real $[a, b]$, $L^2(a, b)$.

Capítulo 1

Introducción a los problemas de Sturm-Liouville

En este capítulo se sigue las referencias [2], [3] y [5].
La teoría general de autovalores, autofunciones y desarrollos en términos de autofunciones es una de las parcelas más ricas y profundas de la matemática moderna.
GEORGE F. SIMMONS

1.1. Introducción Histórica

La teoría de Sturm-Liouville fue creada en una serie de artículos entre 1829 y 1840 por Jacques Charles François Sturm y Joseph Liouville. Este trabajo creó un completo y nuevo tema en el Análisis Matemático. En particular, esta teoría permitió la generalización de la idea de series trigonométricas (Series de Fourier) y se extendió el uso de las funciones de Green a un amplio rango de las ecuaciones diferenciales. La teoría trata la ecuación diferencial general lineal de segundo orden

$$\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{dy}{dx}\right)+\left(q\left(x\right)+\lambda r\left(x\right)\right)y=0,$$

donde la variable x pertenece al intervalo $[a,b]$, el cual también puede ser la recta real completa o solo los reales no negativos. Las funciones reales con ciertas regularidades $p\left(x\right)$, $q\left(x\right)$ y $r\left(x\right)$ son conocidas y satisfacen ciertas condiciones de contorno en la frontera del intervalo $[a,b]$. Sabiendo que las soluciones existen solamente para valores particulares de la constante λ, los cuales son llamados autovalores y la solución $y_\lambda\left(x\right)$ es llamada la autofunción asociada al autovalor λ.
Los problemas de Sturm–Liouville surgen en el estudio de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Por ejemplo, encontramos que existe un conjunto discreto de autovalores $\lambda_k, k=$

$0, 1, 2 \ldots$, y que el conjunto de funciones $y_k(x), k = 0, 1, \ldots$, es completo y luego esas funciones pueden ser utilizadas para formar series generalizadas de Fourier.
Los resultados de Sturm y Liouville son impresionantes cuando los vemos en el contexto de las matemáticas al inicio del siglo XIX. Antes de 1820 los trabajos en ecuaciones diferenciales estaban enfocados en encontrar soluciones en términos de fórmulas finitas, pero para la ecuación general antes mencionada Sturm no podría encontrar una expresión para la solución, sí bien obtuvo información acerca de las propiedades de la solución de la ecuación misma. Esta información fue la primera teoría cualitativa realizada para las ecuaciones diferenciales y anticipó al trabajo de Poincaré en ecuaciones diferenciales no lineales desarrollado a finales del siglo XIX.

Sturm tuvo mucho interés en obtener resultados sobre ecuaciones diferenciales específicas como ocurría con la teoría del calor de Poisson. Liouville trabajó también en ecuaciones diferenciales derivadas de la teoría de calor. Los trabajos de Sturm y Liouville sobre ecuaciones diferenciales abarcan la expansión de funciones en series y el hoy bien conocido problema de Sturm–Liouville sobre ecuaciones diferenciales de segundo orden.

En lo que sigue, nos centraremos sobre una clase particular de ecuaciones diferenciales de segundo orden, conocidas como las ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville, cuyas soluciones habrán de satisfacer ciertas condiciones de contorno. Muchas de las funciones importantes en ciencia e ingeniería habitualmente llamadas funciones 'especiales' son soluciones de este tipo de problemas (ecuaciones de Sturm-Liouville más ciertas condiciones de contorno). Además, los problemas de Sturm-Liouville aparecen de forma natural al resolver las ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de separación de variables.

1.2. Definición de problemas de Sturm-Liouville

Podemos generalizar el método de separación de variables y problemas de autovalores asociados, considerando la ecuación de onda clásica con coeficientes variables

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + q(x)\,y = r(x)\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

sujeta a las condiciones de frontera para $t > 0$

$$a_1 y(0,t) + a_2 y_x(0,t) = 0, \quad b_1 y(l,t) + b_2 y_x(l,t) = 0,$$

y las condiciones iniciales

$$y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < l,$$

donde asumimos que p, q y r son funciones continuas en $x \in (0, l)$ y a_1, a_2, b_1, b_2 son constantes reales positivas tales que

$$| a_1 | + | a_2 | \neq 0, \quad | b_1 | + | b_2 | \neq 0.$$

y $l > 0$ es un número real positivo dado.

Aplicando el método de separación de variables con

$$y(x,t) = X(x)\, T(t) \neq 0$$

y $-\lambda$ como una constante de separación se obtiene que

$$\big(p(x)\, X'(x)\big)' + \big(q(x) + \lambda r(x)\big) X(x) = 0, \quad x \in (0, l), \tag{1.1}$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

con las condiciones de frontera

$$a_1 X(0) + a_2 X'(0) = 0, \quad b_1 X(l) + b_2 X'(l) = 0. \tag{1.2}$$

Definición 1.1. Sea la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal y homogénea

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d}{dx} y(x)\right] + \big(q(x) + \lambda r(x)\big)\, y(x) = 0 \tag{1.3}$$

definida en el intervalo $[a, b]$, donde :

- $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ son funciones reales y continuas en el intervalo $[a, b]$ (La condición de continuidad en los extremos, es decir en $x = a$ o en $x = b$, puede no satisfacerse en ciertos problemas de Sturm-Liouville singulares).
- $p(x)$ y $r(x)$ no cambian de signo en el intervalo $a < x < b$. Tomamos sin pérdida de generalidad que $r(x) > 0$, excepto, en puntos aislados en los que $r(x) = 0$. A la función $r(x)$ se llama función peso.
- λ es un parámetro real arbitrario.

Bajo estas condiciones, la ecuación (1.3) es una ecuación de Sturm-Liouville.

Definición 1.2. El problema de autovalores definido por la ecuación (1.1) y las condiciones de la frontera (1.2) es llamado el problema de Sturm–Liouville.

Definición 1.3. Los valores de λ, para los cuales el problema de Sturm–Liouville tiene una solución no trivial son llamados los autovalores, y sus correspondientes soluciones son llamadas las autofunciones.

Definición 1.4. Se llama problema de Sturm-Liouville al problema de condiciones de contorno constituido por una ecuación de Sturm-Liouville más ciertas condiciones de contorno homogéneas conocidas como condiciones de contorno de Sturm-Liouville.

En términos de operadores se puede definir el operador de Sturm-Liouville como el operador diferencial lineal

$$L \equiv \frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + \frac{q(x)}{r(x)} \tag{1.4}$$

de tal modo que la ecuación de Sturm-Liouville puede expresase como

$$Ly(x) = -\lambda y(x). \tag{1.5}$$

1.3. Generalidad de la ecuación de Sturm-Liouville

Existe una amplia clase de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que pueden escribirse en forma de ecuación de Sturm-Liouville. Veámoslo :

Una ecuación diferencial lineal cualquiera de segundo orden

$$a_0(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + \tau(x)\, y(x) = 0, \text{ con } \; a_0(x) \neq 0, \quad a_1(x) \neq 0 \;\; \forall x$$

se puede escribir como

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y' + \frac{\tau(x)}{a_0(x)} = 0$$

donde se puede escribir $\tau(x) = \lambda + a_2(x)$.

Por otra parte si p es de clase uno, la ecuación de Sturm-Liouville es de la forma

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)} y' + \frac{q(x) + \lambda r(x)}{p(x)} y = 0.$$

Cuando la integral $\int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt$ existe, entonces comparando las dos ultimas ecuaciones se ve que la primera ecuación es de tipo de Sturm-Liouville, si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son tales que

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = \frac{p'(x)}{p(x)} \Rightarrow p(x) = \exp\left[\int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right]$$

y

$$\frac{\lambda + a_2(x)}{a_0(x)} = \frac{\lambda + \dfrac{q(x)}{r(x)}}{\dfrac{p(x)}{r(x)}}.$$

Es decir,

$$r(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)}$$

$$q(x) = r(x)\, a_2(x) = p(x)\, \frac{a_2(x)}{a_1(x)}.$$

En definitiva, la ecuación $a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + [\lambda + a_2(x)]\, y = 0$ es equivalente a una ecuación de Sturm-Liouville (o simplemente diremos que es una ecuación de Sturm-Liouville) pues podemos reescribirla así:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\, \frac{d}{dx} y(x)\right] + q(x)\, y(x) + \lambda r(x)\, y(x) = 0$$

si $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ están dados por :

$$p(x) = \exp\left[\int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right],$$

$$r(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)},$$

y

$$q(x) = r(x)\, a_2(x) = p(x)\, \frac{a_2(x)}{a_1(x)}.$$

Las únicas restricciones sobre $a_i(x)$ son las que se derivan de las exigencias de que $p(x)$, $p_0(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ han de ser continuas y de que $p(x)$ y $r(x)$ no han de cambiar de signo en el intervalo (a, b).

1.4. Condiciones de contorno de Sturm-Liouville

Un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes continuos tenía solución única. En concreto, la solución de una ecuación lineal de segundo orden queda determinada fijando el valor de la solución y de su derivada en un punto dado. Las cosas cambian si imponemos las condiciones en los dos extremos de un intervalo $[a, b]$. Estos problemas de contorno presentan propiedades muy diferentes. Por ejemplo, un problema tan sencillo y regular como

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones: $y = C \sin x$, con C constante arbitraria.
Estas condiciones de contorno se clasifican en tres clases, dando lugar a tres clases de problemas de Sturm-Liouville.

1.4.1. Problema de Sturm-Liouville regular/Condiciones de contorno regulares

Definición 1.5. A la ecuación de Sturm–Liouville (1.5) en $[a, b]$ junto con dos condiciones de la frontera

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0; \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \tag{1.6}$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes reales dadas, se le llama un sistema de Sturm–Liouville Regular

Definición 1.6. Hay dos subtipos especiales de condiciones de contorno regulares:
• Condiciones de contorno de Dirichlet. En este caso $a_2 = b_2 = 0$, con lo que (1.6) toma la forma

$$y(a) = y(b) = 0.$$

• Condiciones de contorno de Von Neumann. Aquí $a_1 = b_1 = 0$, y por tanto (1.6) se reduce a

$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

Definición 1.7. Al conjunto de todos los autovalores λ de un problema de Sturm-Liouville regular se le llama el espectro del problema.

1.4.2. Problemas singulares de Sturm-Liouville

Definición 1.8. A la ecuación de Sturm-Liouville (1.5) se le llama singular cuando se cumple uno de los siguientes casos:
• la ecuación está dada en un intervalo semi-infinito o infinito,
• la función $p(x)$ o $r(x)$ se anula en algún punto del intervalo de definición de la ecuación,
• uno de los coeficientes de la ecuación va al infinito en uno o ambos extremos de un intervalo finito.

Definición 1.9. Una ecuación de Sturm-Liouville singular junto con las condiciones de frontera lineales homogéneas apropiadas es llamada un Sistema de Sturm-Liouville Singular.

Ejemplo 1.10. Consideramos el problema de Sturm-Liouville que involucra la ecuación de Legendre

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \lambda y = \left(\left(1 - x^2\right) y'\right)' + \lambda y = 0, \ -1 < x < 1,$$

con las condiciones de frontera(que no se corresponde con (1.6))

$$\lim_{x\to -1} y(x) < \infty, \quad \lim_{x\to 1} y(x) < \infty$$

En este caso, $p(x) = 1 - x^2$ y $r(x) = 1$, y $p(x)$ es igual a cero en $x = \pm 1$. Se ve en [6] que los autovalores de este problema son $\lambda_n = n(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$ y las funciones propias correspondientes son los polinomios de Legendre $P_{n-1}(x)$ donde en términos de la **fórmula de Rodrigues** están definidos por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

1.4.3. Problemas periódicos de Sturm-Liouville

Definición 1.11. La ecuación de Sturm-Liouville

$$Ly(x) + \lambda y(x) = 0, \ \ a \leqslant x \leqslant b$$

en la cual $p(a) = p(b)$, junto con las condiciones de frontera periódicas

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b),$$

es llamada un sistema periódico de Sturm-Liouville.

Ejemplo 1.12. El siguiente problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \tag{1.7}$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi). \tag{1.8}$$

es periódico. Notemos que $p(x) = 1$ y por lo tanto $p(-\pi) = p(\pi)$. Para $\lambda > 0$, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

con c_1, c_2 son constantes arbitrarias.
Imponiendo las condiciones de frontera (1.8), obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \\ 2c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0. \end{cases}$$

Por tanto, el problema (1.7), (1.8) tiene soluciones no triviales si y solo si

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \quad c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0.$$

luego,

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Las autofunciones son, pues, $y_n = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx = \{\cos nx, \sin nx\}$. Entonces, para cada autovalor $\lambda_n = n^2$, existen dos soluciones linealmente independientes $\cos nx$ y $\sin nx$. Para $\lambda < 0$ la solución general es

$$y\left(x\right) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}, \text{ con } p = \sqrt{-\lambda} > 0.$$

Al imponer las condiciones de contorno (1.8), obtenemos

$$\begin{cases} c_1 \left[e^{p\pi} - e^{-p\pi}\right] - c_2 \left[e^{p\pi} - e^{-p\pi}\right] = 0, \\ c_1 \left[e^{p\pi} - e^{-p\pi}\right] + c_2 \left[e^{p\pi} - e^{-p\pi}\right] = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Dado que

$$\begin{vmatrix} e^{p\pi} - e^{-p\pi} & e^{-p\pi} - e^{p\pi} \\ e^{p\pi} - e^{-p\pi} & e^{p\pi} - e^{-p\pi} \end{vmatrix} = 2\left(e^{p\pi} - e^{-p\pi}\right)^2 \neq 0, \text{ si } p > 0,$$

el sistema (1.10) sólo la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Por lo tanto no hay autovalores negativos. Por último, analizamos el caso $\lambda = 0$. En este caso la solución general es

$$y\left(x\right) = c_1 + c_2 x.$$

De nuevo aplicando las condiciones de contorno (1.8) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} c_1 - c_2\pi = c_1 + c_2\pi, \\ \qquad c_2 = c_2. \end{cases} \tag{1.10}$$

El sistema (1.10) se satisface para $c_2 = 0$ y cualquier c_1. Así que, $\lambda = 0$ es un autovalor y la autofunción asociada es la función constante $y\left(x\right) = c_1 = \{1\}$. En definitiva, los autovalores son 0, n^2 y las autofunciones correspondientes son $\{1\}$, $\cos nx$, $\sin nx$, donde n es un entero positivo.

Capítulo 2

Teoría de oscilación

2.1. Introducción

En este capítulo consideramos la siguiente Ecuación Diferencial lineal de segundo orden

$$\left(p\left(x\right)y'\right)' + q(x)y = 0 \tag{2.1}$$

y su caso especial

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{2.2}$$

donde las funciones $p, q \in C(I)$, $p\left(x\right) > 0$ para todo $x \in I$ e I un intervalo de números reales.
Por una solución de (2.1) nos referimos a una función no trivial $y \in C^1\left(I\right)$ tal que $py \in C^1\left(I\right)$.

Definición 2.1. Una solución y de (2.1) se dice que es oscilatoria si su conjunto de ceros no está acotado superiormente, es decir, si $y\left(x_1\right) = 0$ entonces existe un $x_2 > x_1$ tal que $y\left(x_2\right) = 0$.

La ecuación (2.1) se dice que es oscilatoria si toda solución de (2.1) es oscilatoria. Una solución $y\left(x\right)$ que no es oscilatoria se denomina no oscilatoria. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0$$

cuya solución general es

$$y\left(x\right) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

donde c_1 , c_2 son constantes reales. Obviamente esta solución es oscilatoria. Mientras que la ecuación diferencial

$$y'' - y = 0$$

con solución general

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales no es oscilatoria en $I = [0, \infty)$.
En este capítulo se seguiremos las referencias [1], [2], [3],[4] [6] y [11].
Desde el punto de vista práctico, el siguiente resultado es fundamental.

2.2. Teorema de comparación de Sturm

Teorema 2.2. *(Teorema de comparación de Sturm) Si $a, b \in I$ son dos ceros consecutivos de una solución no trivial y de (2.2), y si q es continua y $q_1(x) > q(x)$ en $[a, b]$, luego cada solución no trivial z de la ecuación diferencial*

$$z'' + q_1(x) z = 0 \tag{2.3}$$

tiene un cero en (a, b).

Demostración. Multiplicando (2.2) por $z(x)$ y (2.3) por $y(x)$ y restando, obtenemos

$$z(x) y''(x) - y(x) z''(x) + (q(x) - q_1(x)) y(x) z(x) = 0$$

que es lo mismo que

$$(z(x) y'(x) - y(x) z'(x))' + (q(x) - q_1(x)) y(x) z(x) = 0.$$

Dado que $y(a) = y(b) = 0$, al integrar en $[a, b]$ tenemos

$$z(b) y'(b) - z(a) y'(a) = \int_a^b (q_1(x) - q(x)) y(x) z(x) \, dx. \tag{2.4}$$

A partir de la linealidad de (2.2) podemos asumir que $y(x) > 0$ en (a, b). Supongamos también que z es positiva en el intervalo. Entonces, tenemos que por hipótesis $q(x) < q_1(x)$, por lo que la integral

$$\int_a^b (q_1(x) - q(x)) y(x) z(x) \, dx > 0$$

Además, si y es positiva en el intervalo y a e b son ceros consecutivos entonces,

$$y'(a) > 0, \quad y'(b) < 0$$

ya que, si $y'(a) = 0$ ó $y'(b) = 0$ entonces $y = 0$ por ser solución de una EDO lineal homogénea y $y(a) = y'(a) = 0$ o $y(b) = y'(b) = 0$. Por lo tanto, si z es siempre positiva en (a, b) entonces tendremos que

$$z(b)\,y'(b) - z(a)\,y'(a) < 0$$

con lo cual llegamos a una contradicción, ya que el término de la derecha es positivo. Luego, z debe cambiar de signo en el intervalo. □

Corolario 2.3. *Si* $q(x) \geq \dfrac{(1+\epsilon)}{4x^2}$, $\epsilon > 0$ *para todo* $x > 0$, *entonces la ecuación diferencial* (2.2) *es oscilatoria en* $I = (0, \infty)$.

Demostración. Para $\epsilon > 0$, todas las soluciones no triviales de la ecuación diferencial

$$y''(x) + \frac{\epsilon}{4} y(x) = 0 \tag{2.5}$$

son oscilatorias.

La expresión de la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} x$$

donde c_1, c_2 son constantes reales.

Haciendo el siguiente cambio de variable $t = e^x$ en (2.5), obtenemos que

$$dt = e^x dx, \quad t = \frac{dt}{dx}$$

Ahora si utilizamos la regla de la cadena podemos ver que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = t\frac{dy}{dt}$$

aplicando de nuevo la regla de la cadena a está ultima igualdad obtenemos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(t\frac{dy}{dt}\right) = t\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Así que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = t\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = t\frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right) = t\frac{dy}{dt} + t^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

Si sustituimos esto en la ecuación (2.5), resulta que

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \frac{\epsilon}{4} y = 0 \tag{2.6}$$

Ahora usando el cambio de variable $y = \dfrac{z}{\sqrt{t}}$, deducimos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) z + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dz}{dt} = \frac{-1}{2}\frac{1}{t\sqrt{t}} z + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dz}{dt} = \frac{-1}{2t} y + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dz}{dt}.$$

Así que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{2t\sqrt{t}} z + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dz}{dt}$$

derivando con respecto a t la igualdad anterior se obtiene que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2t^2}y - \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2t\sqrt{t}}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Por lo que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2t^2\sqrt{t}}z - \frac{1}{2t}\left[\frac{-1}{2t\sqrt{t}}z + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dz}{dt}\right] - \frac{1}{2t\sqrt{t}}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Es decir,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2t^2\sqrt{t}}z + \frac{1}{4t^2\sqrt{t}}z - \frac{1}{2t\sqrt{t}}\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t\sqrt{t}}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{dz}{dt} + \frac{3}{4t^2\sqrt{t}}z + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Al sustituir este cambio de variable en (2.6) obtenemos

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1+\epsilon}{4t^2} = 0 \tag{2.7}$$

Dado que $z(t) = e^{\frac{x}{2}}y(e^x)$, la ecuación (2.7) también es oscilatoria. Por lo tanto, del Teorema 2.2 deducimos que entre dos ceros cualesquiera de una solución de (2.7) hay un cero de cada solución de (2.2), es decir la ecuación diferencial (2.2) es oscilatoria en $I = (0, \infty)$. □

Teorema 2.4. *Sea u cualquier solución no trivial de $u'' + q(x)u = 0$, en donde $q(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Si*

$$\int_1^\infty q(x)\,dx = \infty, \tag{2.8}$$

entonces u tiene un número infinito de ceros en $(0, \infty)$.

Demostración. Supongamos lo contrario, i.e, $u(x)$ se anula en un número finito de veces para $0 < x < \infty$, de manera que existe un punto $x_0 > 1$ tal que $u(x) \neq 0$ para todo $x \geq x_0$. Supongamos sin perdida de generalidad, que $u(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$. Nuestro objetivo es refutar la suposición, probando que $u'(x)$ es negativo a partir de punto a la derecha de x_0, puesto que $u''(x) = -q(x)u(x)$ es negativa $(q, u > 0)$, de tal modo que u' decrece, i.e, u es cóncava a la derecha de x_0 y por tanto $u(x)$ tiene un cero a la derecha de x_0. Haciendo para $x \geq x_0$

$$v(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$$

entonces,

$$v'(x) = q(x) + v^2(x),$$

y al integrar en (x_0, x) la igualdad anterior, donde $x > x_0$, se tiene que

$$v(x) - v(x_0) = \int_{x_0}^{x} q(x)\, dx + \int_{x_0}^{x} v^2(x).$$

Si x es suficientemente grande, utilizando (2.8) se llega a la conclusión de que $v(x)$ es positivo. Por tanto, hemos demostrado que $u(x)$ y $u'(x)$ tienen signos opuestos si x es suficientemente grande, de manera que $u'(x)$ es negativo, y ello demuestra el resultado. □

Ejemplo 2.5. Obviamente la ED $y'' = 0$ no es oscilatoria. Por lo tanto, si la función $q(x) < 0$ en I, el Teorema 2.2 implica inmediatamente que cada solución de la ecuación diferencial (2.2) no puede tener más de un cero en I. En particular, la ecuación diferencial $y'' - x^2 y = 0$ no es oscilatoria en $I = \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.6. Obviamente la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ es oscilatoria. Así, del Teorema 2.2 se deduce que la ecuación diferencial

$$y'' + (1 + x)\, y = 0$$

también es oscilatoria en $I = [0, \infty)$.

Ejemplo 2.7. Consideramos la ecuación

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - a^2\right) y = 0$$

llamada la ecuación de **Bessel de índice** a.

Estudiamos dicha ecuación en el intervalo $(0, \infty)$ con $a \geq 0$ un número real. Veamos que toda solución de dicha ecuación posee una sucesión de ceros $\{x_n\}$. Además, si ordenamos estos ceros de forma creciente entonces resulta que:

$$\lim_{n \to \infty} (x_{n+1} - x_n) = \pi.$$

Haciendo el siguiente cambio de variable $u(x) = y(x)\sqrt{x}$, obtenemos que

$$y'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} u(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} u'(x).$$

Derivando y' otra vez con respecto a x deducimos que

$$y''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} u(x) - \frac{1}{2x\sqrt{x}} u'(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} u''(x).$$

Este cambio de variable conduce a la siguiente nueva ecuación:

$$x\sqrt{x} u''(x) + \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{x^2 - a^2}{x^2}\right) u(x) = 0.$$

Como $x > 0$, podemos dividir la ecuación anterior entre $x\sqrt{x}$ y obtenemos

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4a^2}{4x^2}\right) u = 0.$$

Distinguimos los siguientes tres casos:
(a) Caso : $0 \leq a < \dfrac{1}{2}$.

Como $1 + \dfrac{1-4a^2}{4x^2} > 1$, comparamos las soluciones u con las de

$$z'' + z = 0,$$

que es una ecuación minorante de la nuestra .

Si tomamos, en particular, la solución $\sin x$ de $z'' + z = 0$, podemos afirmar que existe una sucesión creciente de ceros de nuestra solución $z(x)$ (que son precisamente los ceros de $\sin x$).

Consideramos la sucesión de los ceros positivos de la ecuación de *Bessel*, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ordenada de forma creciente y divergente a $+\infty$.

Dado x_n, comparamos $u(x)$ con la solución $\sin(x - x_n)$ de $z'' + z = 0$ para poder concluir que

$$x_{n+1} - x_n < \pi$$

Por otra parte comparamos nuestra solución con las soluciones de

$$z'' + (1+\epsilon) z = 0$$

que es una mayorante de nuestra ecuación de un x en adelante ,pues

$$1 + \frac{1-4a^2}{4x^2} < 1 + \epsilon, \text{ para } x > M_\epsilon$$

En particular, fijado x_n suficientemente grande, tomando

$$\sin\left(\sqrt{1+\epsilon}\,(x - x_n)\right)$$

es una solución de la ecuación

$$z'' + (1+\epsilon) z = 0$$

y tiene al menos un cero entre cada dos ceros de la solución u.
Como el cero que sigue en dicha solución a x_n es $x_n + \dfrac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}}$ entonces

$$x_n + \frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} < x_{n+1}.$$

o, equivalentemente

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} < x_{n+1} - x_n.$$

Luego, de un x_n en adelante se tiene que

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+\epsilon}} < x_{n+1} - x_n < \pi$$

y como ϵ fue arbitrariamente fijado, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \pi$$

(b) Caso: $\frac{1}{2} < a$.

Como, en este caso, $1 + \frac{1-4a^2}{4x^2} < 1$. Dado $\epsilon > 0$, tenemos

$$1 + \frac{1-4a^2}{4x^2} > 1 - \epsilon \text{ para } x > M_\epsilon$$

El razonamiento es muy similar al caso anterior.

(c) Caso: $a = \frac{1}{2}$.

En este caso la ecuación es

$$u'' + u = 0$$

que tiene las soluciones

$$u(x) = a_1 \sin(x - a_2)$$

con a_1, a_2 constantes reales, que poseen una sucesión de ceros a distancia exactamente π.

2.2.1. Localización de ceros

Proposición 2.8. *(Distancia entre ceros de una solución)*
Sean m, M constantes tales que

$$0 < m^2 \leq q(x) \leq M^2 \text{ en } [a,b]$$

y sea u una solución no trivial de

$$u'' + q(x)\, u = 0$$

(i) *Si x_1 y x_2 son ceros consecutivos de $u(x)$ entonces*

$$\frac{\pi}{M} \leq x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{m}$$

(ii) *Si $u(a) = u(b) = 0$ y $u(x)$ tiene $n-1$ ceros en (a,b), entonces*

$$\frac{m(b-a)}{\pi} \leq n \leq \frac{M(b-a)}{\pi}. \tag{2.9}$$

Demostración. (i) $z(x) = \sin m(x - x_1)$ es una solución de

$$z'' + m^2 z = 0$$

tal que $z(x_1) = 0$.

Por lo tanto, el siguiente cero de esta solución es $x_1 + \dfrac{\pi}{m}$. Por el Teorema 2.2 de comparación de Sturm obtenemos que $x_2 \leq x_1 + \dfrac{\pi}{m}$, equivalentemente $x_2 - x_1 \leq \dfrac{\pi}{m}$.

De forma análoga usando la ecuación

$$z'' + M^2 z = 0$$

obtenemos que

$$x_2 - x_1 \geqslant \frac{\pi}{M}.$$

(ii) Si $u(a) = u(b) = 0$ y u tiene $n-1$ ceros en (a, b) entonces tenemos que hay n intervalos entre los ceros consecutivos en $[a, b]$.

Por el aparatado (i) se sigue que

$$n\frac{\pi}{M} \leq b - a \leq n\frac{\pi}{m}$$

es decir,

$$\frac{m(b-a)}{\pi} \leq n \leq \frac{M(b-a)}{\pi}.$$

□

2.3. Extensión del Teorema de comparación de Sturm

2.3.1. Teorema de Sturm-Picone

A continuación, extenderemos el Teorema de comparación de Sturm para la ecuación diferencial (2.1). Para esto, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.9. *Sean las funciones y, z, py', $p_1 z'$ diferenciables y $z(x) \neq 0$ en I. Entonces se tiene la siguiente identidad:*

$$\left[\frac{y}{z}\left(zpy' - yp_1 z'\right)\right]' = y\left(py'\right)' - \frac{y^2}{z}\left(pz'\right)' + \left(p - p_1\right)y'^2 + p_1\left(y' - \frac{y}{z}z'\right)^2. \qquad (2.10)$$

Demostración. Expandiendo el lado izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned}\left[\frac{y}{z}\left(zpy'-yp_1z'\right)\right]' &= \frac{y}{z}\left(z\left(py'\right)'+z'py'-y\left(p_1z'\right)-y'p_1z'\right)+\left(\frac{y'}{z}-\frac{y}{z^2}z\right)\left(zpy'-yp_1z'\right)\\ &= y\left(py'\right)'-\frac{y^2}{z}\left(p_1z'\right)'+py'^2-\frac{2yy'p_1z'}{z}+\frac{y^2p_1z'^2}{z^2}\\ &= y\left(py'\right)'-\frac{y^2}{z}\left(p_1z'\right)'+\left(p-p_1\right)y'^2+p_1\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.10. *(Teorema de Sturm-Picone)*
Si $a, b \in I$ son dos ceros consecutivos de una solución no trivial y de (2.1), y si $p_1(x)$, $q_1(x)$ son continuas en $[a,b]$ y

$$0 < p_1(x) \leq p(x), \quad q_1(x) \geq q(x) \text{ en } [a,b],$$

entonces toda solución no trivial $z(x)$ de la ecuación diferencial

$$\left(p_1(x)\, z'\right)' + q_1(x)\, z = 0 \tag{2.11}$$

tiene un cero en $[a,b]$.

Demostración. Sea $z(x) \neq 0$ en $[a,b]$, entonces el Lema 2.9 es aplicable y de (2.10) y las ecuaciones diferenciales (2.1) y (2.11), deducimos

$$\left[\frac{y}{z}\left(zpy'-yp_1z'\right)\right]' = \left(q_1-q\right)y^2+\left(p-p_1\right)y'^2+p_1\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2.$$

Integrando la identidad anterior y utilizando que $y(a) = y(b) = 0$, obtenemos

$$\int_a^b \left[\left(q_1-q\right)y^2+\left(p-p_1\right)y'^2+p_1\left(y'-\frac{y}{z}z'\right)^2\right] = 0,$$

que es una contradicción, a menos que $q_1(x) = q(x)$, $p_1(x) = p(x)$ y $y' - \left(\frac{y}{z}\right)z' = 0$. La última identidad es la misma que $\left(\frac{y}{z}\right)'(x) = 0$, y por lo tanto $\frac{y(x)}{z(x)} = \textit{constante}$. Sin embargo, como $y(a) = 0$ esta constante debe ser cero, y entonces $\frac{y(x)}{z(x)} = 0$. O, lo que es lo mismo, $y(x) = 0$. Esta contradicción (ya que no es solución trivial) implica que z debe tener un cero en $[a,b]$. □

2.3.2. Teorema de separación de ceros de Sturm

Corolario 2.11. *(Teorema de separación de Sturm) Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (2.1) en I, entonces sus ceros están entrelazados, es decir, entre dos ceros consecutivos de una solución hay exactamente un cero de la otra.*

Demostración. Dado que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ no pueden tener ceros comunes, el Teorema 2.10 para $p_1(x) = p(x)$, $q_1(x) = q(x)$ implica que la solución $y_2(x)$ tiene al menos un cero entre dos ceros consecutivos de $y_1(x)$.
Intercambiando $y_1(x)$ e $y_2(x)$ vemos que $y_2(x)$ tiene como máximo un cero entre dos ceros consecutivos de $y_1(x)$. □

Ejemplo 2.12. Es fácil ver que las funciones

$$y_1(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \text{ e } y_2(x) = c_3 \cos(x) + c_4\ sen(x)$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ si y solo si

$$c_1 \cdot c_4 - c_2 \cdot c_3 \neq 0.$$

Así, del Corolario 2.11, se deduce que estas funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tienen ceros alternados.

En un intervalo finito $I = [a, b]$ la ecuación diferencial (2.1) puede tener como máximo un número finito de ceros, y esto lo demostraremos en el siguiente resultado.

Teorema 2.13. *La única solución de la ecuación diferencial* (2.1) *que se anula en infinitos valores de* $I = [a, b]$ *es la solución trivial.*

Demostración. Supongamos que la solución $y(x)$ de (2.1) tiene un número infinito de ceros en I. El conjunto de ceros tendrá un punto límite $x^\star \in I$ (ya que el intervalo I es cerrado), y existirá una sucesión x_m de ceros que converge a $x^\star$ con

$$x_m \neq x^\star\ ,\ \ m = 0, 1 \ldots$$

Veamos que $y(x^\star) = y'(x^\star) = 0$, luego por la unicidad de las soluciones de ED seguirá que $y(x) = 0$ en I. Para esto, la continuidad de la solución $y(x)$ implica que

$$y(x^\star) = \lim_{m \to \infty} y(x_m) = 0$$

A continuación, de la diferenciabilidad de la solución $y(x)$, tenemos

$$y'(x^\star) = \lim_{m \to \infty} \frac{y(x_m) - y(x^\star)}{x_m - x^\star} = \lim_{m \to \infty} \frac{0}{x_m - x^\star} = 0.$$

□

Veamos ahora un resultado final en este capitulo que da una condición suficiente para que la ecuación diferencial (2.1) sea oscilatoria en el intervalo $I = (0, \infty)$.

2.4. Teorema de la oscilación de Leighton

Si desarrollamos el termino $(py')'$ en la ecuación (2.1) obtenemos

$$p(x)\,y''(x)+p'(x)\,y'(x)+q(x)\,y(x)=0$$

y si llamamos D a la expresión diferencial en (a,b):

$$D=\frac{d^2}{dx^2}+P(x)\frac{d}{dx}+Q(x)$$

donde en este caso: $P(x)=\dfrac{p'(x)}{p(x)}$, $Q(x)=\dfrac{q(x)}{p(x)}$ resulta:

$$Dy=y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y,\quad a<x<b.$$

Entonces y es solución de (2.1) en (a,b) si y sólo si $Dy=0$.

Observación 2.14. Sea $z(x)=\dfrac{y'(x)}{y(x)}$ y donde

$$Dy=y''+Py'+Qy=0 \tag{2.12}$$

z satisface la de primer orden no lineal:

$$z'(x)+z^2(x)+P(x)\,z(x)+Q(x)=0 \tag{2.13}$$

Esta es la llamada **ecuación de Riccati** asociada a (2.12). Recíprocamente, si z es solución de (2.13) e y satisface la ecuación:

$$y'(x)=z(x)\cdot y(x),$$

es decir, si $y=K\cdot e^{\int z dx}$ con K constante, entonces y es solución de (2.12). Así, el problema de resolver la ecuación de segundo orden (2.12) se reduce a la integración de una ecuación de primer orden no lineal.

Teorema 2.15. *(Teorema de la oscilación de Leighton)*
Si $\displaystyle\int^{\infty}\frac{1}{p(x)}=\infty$ *y* $\displaystyle\int^{\infty} q(x)=\infty$*, entonces la ecuación diferencial* (2.1) *es oscilatoria en* $I=(0,\infty)$.

Demostración. Supongamos que y es una solución no oscilatoria de (2.1) que podemos asumir además que es positiva en $[x_0,\infty)$, donde $x_0>0$.

Además la ecuación de *Riccati*

$$z'+q(x)+\frac{z^2}{p(x)}=0$$

tiene una solución $z(x)$ en $[x_0, \infty)$ (por la observación (2.14)). Esta solución obviamente satisface la ecuación

$$z(x) = z(x_0) - \int_{x_0}^{x} q(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{z^2(t)}{p(t)} dt. \tag{2.14}$$

Como $\int^{\infty} q(t)\,dt = \infty$, siempre podemos encontrar un $x_1 > x_0$ tal que

$$z(x_0) - \int_{x_0}^{x} q(x) < 0$$

para todo x en $[x_1, \infty)$. Así, de (2.14) se deduce que

$$z(x) < -\int_{x_0}^{x} \frac{z^2(x)}{p(x)}$$

para todo $x \in [x_1, \infty)$.
Sea

$$r(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{z^2(t)}{p(t)} > 0, \ \ x \in [x_1, \infty),$$

por lo tanto $z(x) < -r(x)$, y

$$r'(x) = \frac{z^2(x)}{p(x)} > \frac{r^2(x)}{p(x)} \tag{2.15}$$

para todo $x \in [x_1, \infty)$.

Integrando (2.15) en (x_1, ∞), obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{r(x)} + \frac{1}{r(x_1)} > \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{p(t)}$$

y teniendo en cuenta que $r(x) > 0$ para $x \in [x_1, \infty)$ deducimos que

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{p(x)} < \frac{1}{r(x_1)} < \infty$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la solución $y(x)$ es oscilatoria. □

Ejemplo 2.16. Consideramos de nuevo la ED de *Bessel*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - a^2\right) y = 0$$

en $(0, \infty)$.

Esta ecuación se transforma al multiplicarla por $\frac{1}{x}$, en la ecuación

$$[xy']' + \frac{x^2 - a^2}{x} y = 0.$$

Se tiene que $p(x) = x,\ \ q(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x}$. Además, para $\nu > 0$ obtenemos que

$$\int_\nu^\infty \frac{dx}{p(x)} = \lim_{s\to\infty} [\ln t]_\nu^s = +\infty.$$

Si ahora tomamos $\nu \geq a$, en el intervalo $[\nu, \infty)$ se verifica que

$$x - a \leq x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

luego

$$\int_\nu^\infty q(x)\,dx = \int_\nu^\infty \frac{x^2 - a^2}{x} dx \geq \int_\nu^\infty (x - a)\,dx = \lim_{s\to\infty} \left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_\nu^s = +\infty.$$

El Teorema 2.15 implica que las soluciones de la *ED* de *Bessel* son oscilatorias para todo a.

Capítulo 3

Problemas lineales regulares de contorno

3.1. Introducción

Hasta ahora nos hemos concentrado solo en problemas de valor inicial, en los cuales para una ecuación diferencial dada las condiciones suplementarias en la función desconocida (solución) y sus derivadas se prescriben a un valor fijo, x_0, de la variable independiente x. Sin embargo, como hemos indicado en el Capitulo 1, hay una variedad de otras posibles condiciones que son importantes en las aplicaciones.

En muchos problemas los requisitos adicionales se dan en forma de condiciones de contorno: la función desconocida y algunos de sus derivados se fijan en más de un valor de la variable independiente x. La ecuación diferencial junto con las condiciones de contorno se conocen como un problema de valor de frontera.
Se sigue las referencias [1] Y [3].

3.2. Problema de Sturm-Liouville no homogéneo

3.2.1. Definiciones y motivaciones

Consideramos la ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = r(x) \tag{3.1}$$

y su correspondiente ecuación homogénea

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \tag{3.2}$$

en el intervalo $I = [a, b]$, donde asumimos que las funciones $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $r(x)$ son continuas en I .
Junto con la ecuación diferencial (3.1) consideraremos las condiciones de contorno de la forma:

$$\begin{cases} l_1[y] = a_0 y(a) + a_1 y'(a) + b_0 y(b) + b_1 y'(b) = A, \\ l_2[y] = c_0 y(a) + c_1 y'(a) + d_0 y(b) + d_1 y'(b) = B, \end{cases} \tag{3.3}$$

donde a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 0, 1$ y A, B son constantes reales.
En todo momento debemos asumir que estas son esencialmente dos condiciones, es decir,

$$rango \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 & d_0 & d_1 \end{pmatrix} = 2$$

El problema de valor de limite (de frontera) (3.1), (3.3) se llama lineal no homogéneo, mientras que la ecuación diferencial homogénea (3.2) junto con las condiciones de contorno homogéneas

$$l_1[y] = 0, \quad l_2[y] = 0 \tag{3.4}$$

se llamará un problema de valor límite homogéneo.
Las condiciones de contorno (3.3) son bastante generales y, en particular, incluyen:
(i) primeras condiciones de contorno (condiciones de Dirichlet):

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

(ii) segundas condiciones de contorno (condiciones mixtas):

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B,$$

o

$$y'(a) = A, \quad y(b) = B$$

(iii) condiciones de frontera separadas (terceras condiciones de la frontera):

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) = A \\ d_0 y(b) + d_1 y'(b) = B \end{cases}$$

donde tanto $a_0^2 + a_1^2 > 0$ y $d_0^2 + d_1^2 > 0$.
(iv) condiciones de frontera periódicas:

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b) \tag{3.5}$$

El problema de valores de frontera (3.1), (3.3) se llama regular si tanto a como b son finitos, y la función $p_0(x) \neq 0$ para todas las $x \in I$.

Si $a = -\infty$ y/o $b = \infty$ y/o $p_0(x) = 0$ para al menos un punto $x \in I$, entonces el problema (3.1), (3.3) se dice que es singular. Consideraremos en este caso solamente el problema de valores de frontera regular.

Por una solución del problema del valor límite (3.1), (3.3) nos referimos a una función de clase C^2 en I que verifica la ecuación (3.1) y satisface las condiciones de contorno (3.3). La teoría de existencia y unicidad de los problemas de valores de frontera es más difícil que la de los problemas de valores iniciales. De hecho, en el caso de problemas de valores de frontera un ligero cambio en las condiciones de contorno puede conducir a cambios significativos en el comportamiento de las soluciones. Por ejemplo, el problema de valor inicial

$$y'' + y = 0, \;\; y(0) = c_1, \;\; y(0) = c_2$$

tiene una solución única

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

para cualquier conjunto de constantes c_1, c_2.

Sin embargo, el problema de valores de frontera

$$y'' + y = 0, \, y(0) = 0, \;\; y(\pi) = \epsilon \; (\neq 0)$$

no tiene solución.

El problema

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = \epsilon, \quad 0 < b < \pi$$

tiene una solución única

$$y(x) = \frac{\epsilon \sin(x)}{\sin(b)}$$

mientras que el problema $y'' + y = 0, \, y(0) = 0, \;\; y(\pi) = 0$ tiene un número infinito de soluciones $y(x) = c \sin(x)$, donde c es una constante arbitraria. Del mismo modo, ya que para la ecuación diferencial

$$\left(1 + x^2\right) y - 2xy + 2y = 0$$

la solución general es

$$y(x) = c_1 \left(-1 + x^2\right) + c_2 x,$$

observamos que existe una solución única que satisface las condiciones de contorno

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B,$$

y un número infinito de soluciones que satisfacen

$$y\,(-1) = 0, \quad y\,(1) = 0$$

y ninguna solución que satisfaga

$$y\,(-1) = 0, \quad y\,(1) = 1$$

Obviamente, para el problema homogéneo de (3.2), (3.4) la solución trivial siempre existe. Sin embargo, de los ejemplos anteriores se deduce que además de tener la solución trivial, los problemas de valores de frontera homogéneos también pueden tener soluciones no triviales. Nuestro primer resultado proporciona una condición necesaria y suficiente para que el problema problema (3.2), (3.4) tenga solo la solución trivial.

3.3. Caracterización de solución del problema homogéneo

Teorema 3.1. *Sean* $y_1\,(x)$ *e* $y_2\,(x)$ *dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial* (3.2). *Entonces el problema del valor de frontera homogéneo* (3.2), (3.4) *tiene solo la solución trivial si y solo si*

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1[y_1] & l_1[y_2] \\ l_2[y_1] & l_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demostración. Cualquier solución de la ED (3.2) se puede escribir como

$$y\,(x) = c_1 y_1\,(x) + c_2 y_2\,(x).$$

Esta es una solución del problema (3.2), (3.4) si y solo si

$$\begin{cases} l_1\,[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1 l_1\,[y_1] + c_2 l_1\,[y_2] = 0, \\ l_2\,[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1 l_2\,[y_1] + c_2 l_2\,[y_2] = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Sin embargo, el sistema (3.6) solo tiene la solución trivial si y solo si $\Delta \neq 0$ (la matriz de coeficientes del sistema tiene determinante distinto de cero). □

Corolario 3.2. *El problema del valor de frontera homogéneo* (3.2), (3.4) *tiene un número infinito de soluciones no triviales si y solo si* $\Delta = 0$.

Ejemplo 3.3. Considérese el problema del valor de frontera

$$xy'' - y' - 4x^3 y = 0 \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} l_1\,[y] = y\,(1) = 0 \\ l_2\,[y] = y\,(2) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Para la ED (3.7)

$$y_1(x) = \cosh\left(x^2 - 1\right), \quad y_2(x) = \frac{1}{2}\sinh\left(x^2 - 1\right)$$

son dos soluciones linealmente independientes.

Además, ya que para las condiciones (3.8), tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh 3 & \frac{1}{2}\sinh 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

deducimos que el Problema (3.7), (3.8) tiene solo la solución trivial.

3.4. Caracterización de solución del problema no homogéneo

Teorema 3.4. *El problema de condiciones de frontera no homogéneo* (3.1), (3.3) *tiene una solución única si y solo si el problema homogéneo* (3.2)*, con las condiciones de frontera* (3.4) *tiene solo la solución trivial.*

Demostración. Sean y_1 e y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ED homogénea (3.2) y z una solución particular de (3.1). Entonces la solución general de (3.1) se puede escribir como

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + z(x)$$

Esta es una solución del problema (3.1), (3.3) si y solo si

$$\begin{cases} l_1[c_1y_1 + c_2y_2 + z] = c_1 l_1[y_1] + c_2 l_1[y_2] + l_1[z] & = A, \\ l_2[c_1y_1 + c_2y_2 + z] = c_1 l_2[y_1] + c_2 l_2[y_2] + l_2[z] & = B. \end{cases} \tag{3.9}$$

Sin embargo, el sistema no homogéneo (3.9) tiene una única solución si y solo si $\Delta \neq 0$, es decir, si y solo si el sistema homogéneo (3.6) tiene solo la solución trivial. Del Teorema 3.1 deducimos que $\Delta \neq 0$ es equivalente a hecho de que el problema de condiciones de frontera homogéneo (3.2), (3.4) tenga solamente la solución trivial. □

Ejemplo 3.5. Consideramos el problema de valores en la frontera

$$y'' = x - d$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(2) + by'(2) = 0 \end{cases}$$

La solución general es $y(x) = c_1 + c_2 x + \dfrac{x^3}{6} - d\dfrac{x^2}{2}$. Por lo tanto, $y'(x) = c_2 + \dfrac{x^2}{2} - dx$. Imponiendo las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{1}{6} - \dfrac{d}{2} = 0, \\ c_1 + 2 + \dfrac{4}{3} - 2d + bc_2 + 2b - 2bd = 0. \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{d}{2} - \dfrac{1}{6}, \\ c_1 + (2+b)\, c_2 = 2bd + 2d - 2b - \dfrac{4}{3}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Este sistema lineal tendrá solución única en c_1 y c_2 si y solo si el sistema homogéneo tiene sólo la solución trivial (si el determinante de los coeficientes es no nulo). Cuando el homogéneo tenga infinitas soluciones, el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna. Dado que,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b = -1.$$

Por lo tanto, si $b \neq -1$, podemos despejar de forma única c_1 y c_2, y la solución queda determinada, cualquiera que sea d. Por otra parte, si $b = -1$ entonces (3.10) se convierte en

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \dfrac{d}{2} - \dfrac{1}{6}, \\ c_1 + c_2 = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Este último sistema tiene solución cuando $\frac{d}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow d = \frac{5}{3}$, y en este caso hay infinitas soluciones. En consecuencia, para $b = -1$, $d \neq \dfrac{5}{3}$ no hay solución.

Consideramos la ecuación no homogénea:

$$\left(p(x)\, y'\right)' + q(x)\, y = f(x) \tag{3.11}$$

y su ecuación homogénea ($f \equiv 0$):

$$\left(p(x)\, y'\right)' + q(x)\, y = 0 \tag{3.12}$$

con las condiciones separadas homogéneas :

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) = 0, \\ d_0 y(b) + d_1 y'(b) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

donde tanto $a_0^2 + a_1^2 > 0$ y $d_0^2 + d_1^2 > 0$ y $p \in C^1[a,b]$, $q, f \in C[a,b]$, $p > 0$ en $[a,b]$.

Teorema 3.6. *El problema* (3.11), (3.13) *tiene solución única si y sólo si* (3.12), (3.13) *tiene sólo la solución trivial. Si* (3.12), (3.13) *tiene soluciones no triviales* y_h *entonces* (3.11), (3.13) *tiene infinitas soluciones o no tiene ninguna según sea igual o distinta de cero, respectivamente, la integral:*

$$\int_a^b f y_h = 0. \tag{3.14}$$

Demostración. La primera parte está demostrada en Teorema 3.4. Veamos que si hay soluciones no triviales y de (3.11), (3.13) entonces la integral (3.14) es nula. Teniendo en cuenta que

$$f y_h = \left[[p y']' + q y \right] y_h = \left[p \left(y_h y' - y y_h' \right) \right]' + \left[[p y_h']' + q y_h \right] y$$

se obtiene que

$$\int_a^b f y_h dx = \int_a^b \left[\left[p y' \right]' + q y \right] y_h = \left[p \left(y_h y' - y y_h' \right) \right]_a^b + \int_a^b \left[\left[p y_h' \right]' + q y_h \right] y = 0,$$

ya que $p > 0$ e y_h es solución no trivial de (3.13), y que y, y_h verifican las condiciones de contorno (3.13) y por lo tanto se tiene el resultado. □

Ejemplo 3.7. Hacemos ahora una discusión del ejemplo 3.5 utilizando el Teorema 3.6. El problema homogéneo ($y'' = 0$) tiene sólo la solución trivial si $b \neq -1$. Y si $b = -1$ las soluciones son $y = c\,(1-x) = \{1 - x\}$, siendo c constante real.
El problema no homogéneo ($(y')' = x - d$), tendrá entonces solución única si $b \neq -1$, e infinitas ó 0, para $b = -1$, según se anule o no la integral:

$$\int_1^2 (x-d)\,(1-x)\,dx = \frac{d}{2} - \frac{5}{6} \Leftrightarrow d = \frac{5}{3}.$$

Ahora estudiamos condiciones de contorno no homogéneas y el caso en el que la ecuación depende de un parámetro.
Sea el problema (3.11) con las condiciones de contorno no homogéneas:

$$\begin{cases} a_0 y\,(a) + a_1 y'\,(a) = A, \\ d_0 y\,(b) + d_1 y'\,(b) = B. \end{cases} \tag{3.15}$$

y su problema homogéneo (3.12), (3.13) con las mismas condiciones sobre los coeficientes discretos impuestos anteriormente en el problema (3.12), (3.13). Si encontramos una función z que satisfaga (3.15) entonces el problema (3.13), (3.12) se transforma en otro con condiciones homogéneas. En efecto, utilizando la linealidad de la ecuación (3.13) y las condiciones de contorno, el cambio de variable $u = y - z$ con y solución de (3.13), (3.12) lleva al problema:

$$(p(x)u')' + q(x)u = f(x) - (p(x)v')' - q(x)v$$

$$\begin{cases} a_0 u(a) + a_1 u'(a) = 0, \\ d_0 u(b) + d_1 u'(b) = 0. \end{cases}$$

que es del tipo (3.11), (3.12) ya estudiado. Así que, deducimos del Teorema 3.6 el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *El problema* (3.11), (3.15) *tiene solución única si y sólo si* (3.12), (3.13) *tiene sólo la solución trivial. Y si* (3.12), (3.13) *tiene infinitas soluciones,* (3.11), (3.15) *puede tener infinitas o ninguna.*

Para encontrar dicha z normalmente trabajamos por tanteo. Si no es constante, probamos una recta; si no vale, funciones más complejas. Se verá en la construcción de la función de Green al utilizar el método de variación de parámetros.

Observación 3.9. Resulta claro que aunque en el problema (3.11), (3.15) sea $f(x) = 0$, si una condición de contorno es no homogénea, las propiedades son las típicas de uno no homogéneo.

Por último consideramos la siguiente ecuación no homogénea que depende del parámetro λ:

$$(py')' - gy + \lambda ry = f(x) \tag{3.16}$$

junto con las condiciones de frontera (3.13). Llamemos por (P_h) al problema de Sturm-Liouville asociado a (3.16), (3.13) (el de $f = 0$). Para cada valor de λ tenemos un problema de los ya vistos (con $q = -g + \lambda r$). Se tiene por tanto el siguiente teorema:

Teorema 3.10. *El problema* (3.16), (3.13) *tiene solución única si y sólo si λ no es autovalor de (P_h).*

Capítulo 4

Funciones de Green

4.1. Introducción

En este capítulo definiremos una función $G(x,t)$ llamada función de Green para el problema regular de Sturm-Liouville

$$L[y](x) = r(x), \quad a < x < b \tag{4.1}$$

y su problema homogéneo

$$L[y](x) = 0, \quad a < x < b, \tag{4.2}$$

junto con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) = 0, \\ d_0 y(b) + d_1 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

donde

$$L[y] := \frac{d}{dx}\left(p_0 \frac{dy}{dx}\right) + p_1 y.$$

Usualmente, buscamos una solución de esta ecuación con las condiciones de frontera dadas. Una aproximación formal al problema es encontrar el operador inverso L^{-1}. Entonces la solución de (4.1), (4.3) se puede encontrar como $y = L^{-1}[r]$. Demostraremos que la solución del problema (4.1) con condiciones de frontera (4.3), se puede expresar explícitamente en términos de $G(x,t)$. Para esto, en lo que sigue a lo largo de este capítulo vamos a suponer que el problema (4.2), con las condiciones de frontera homogéneos (4.3) tiene solo la solución trivial.
En este capítulo seguiremos las referencias [1], [2], [11].

4.2. Definición axiomática de la función de Green

Definición 4.1. La función de Green $G(x,t)$ para el problema (4.2), con condiciones homogéneas (4.3) se define en el cuadrado $[a,b]\times[a,b]$ y posee las siguientes propiedades fundamentales:

(**i**) $G(x,t)$ es continua en $[a,b]\times[a,b]$. Además, para cada t fijado, las derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial G(x,t)}{\partial x}$$

son continuas en x, para $x \neq t$.

(**ii**) $\dfrac{\partial G(x,t)}{\partial x}$ es continua en cada uno de los triángulos $a \le x < t \le b$ y $a \le t < x \le b$, además

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t^+,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t^-,t) = \frac{1}{p_0(t)}$$

donde

$$\frac{\partial G}{\partial x}\left(t^+,t\right) = \lim_{x\to t^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial x}\left(t^-,t\right) = \lim_{x\to t^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$$

(**iii**) Para cada $t \in [a,b]$

$$z(x) = G(x,t)$$

es una solución de la ED homogénea (4.2) en cada uno de los intervalos $[a,t)$ y $(t,b]$.

(**iv**) Para cada $t \in [a,b]$

$$z(x) = G(x,t)$$

satisface las condiciones de contorno homogéneas (4.3)

Estas propiedades caracterizan completamente la función de Green $G(x,t)$. Para mostrar esto, consideramos $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ED homogénea (4.2).

Por la propiedad (**iii**) existen cuatro funciones, digamos, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$, de manera que

$$G(x,t) = \begin{cases} y_1(x)\lambda_1(t) + y_2(x)\lambda_2(t), & \text{si } a \le x \le t \\ y_1(x)\mu_1(t) + y_2(x)\mu_2(t), & \text{si } t \le x \le b \end{cases}$$

Ahora usando las propiedades **(i)** y **(ii)**, obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$y_1(t)\,\lambda_1(t) + y_2(t)\,\lambda_2(t) = y_1(t)\,\mu_1(t) + y_2(t)\,\mu_2(t) \tag{4.4}$$

de modo que (4.2) y (4.3) se pueden escribir como

$$y_1'(t)\,\mu_1(t) + y_2'(t)\,\mu_2(t) - y_1'(t)\,\lambda_1(t) - y_2'(t)\,\lambda_2(t) = \frac{1}{p_0(t)}. \tag{4.5}$$

Sean $\nu_1(t) = \mu_1(t) - \lambda_1(t)$ y $\nu_2(t) = \mu_2(t) - \lambda_2(t)$ de modo que (4.4) y (4.5) se pueden escribir como

$$y_1(t)\,\nu_1(t) + y_2(t)\,\nu_2(t) = 0 \tag{4.6}$$

$$y_1'(t)\,\nu_1(t) + y_2'(t)\,\nu_2(t) = \frac{1}{p_0(t)} \tag{4.7}$$

Dado que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes entonces su Wronskiano será

$$W[y_1, y_2)](t) = y_1(t)\,y_2'(t) - y_1'(t)\,y_2(t) \neq 0$$

para todo $t \in [a, b]$.
Por lo tanto, las relaciones (4.6), (4.7) determinan de manera única $\nu_1(t)$ y $\nu_2(t)$.
Ahora usando las relaciones $\mu_1(t) = \lambda_1(t) + \nu_1(t)$ y $\mu_2(t) = \lambda_2(t) + \nu_2(t)$, La función de Green se puede escribir como

$$G(x,t) = \begin{cases} y_1(x)\,\lambda_1(t) + y_2(x)\,\lambda_2(t), & \text{si } a \leq x \leq t \\ y_1(x)\,\lambda_1(t) + y_2(x)\,\mu_2(t) + y_1(x)\,\nu_1(t) + y_2(x)\,\nu_2(t), & \text{si } t \leq x \leq b \end{cases} \tag{4.8}$$

Finalmente, usando la propiedad **(iv)**, nos encontramos

$$l_1[y_1]\,\lambda_1(t) + l_1[y_2]\,\lambda_2(t) = -b_0\,(y_1(b)\,\nu_1(t) + y_2(b)\,\nu_2(t)) - d_1\left(y_1'(b)\,\nu_1(t) + y_2'(b)\,\nu_2(t)\right) \tag{4.9}$$

$$l_2[y_1]\,\lambda_1(t) + l_2[y_2]\,\lambda_2(t) = -d_0\,(y_1(b)\,\nu_1(t) + y_2(b)\,\nu_2(t)) - d_1\left(y_1'(b)\,\nu_1(t) + y_2'(b)\,\nu_2(t)\right) \tag{4.10}$$

Dado que el problema homogéneo (4.2), junto con las condiciones de frontera homogéneas (4.3) solo tiene la solución trivial, del Teorema 3.1 se deduce que el sistema (4.9), (4.10) determina únicamente $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$.
Después veremos que no existe otra función que tiene las propiedades **(i)** – **(iv)**, es decir, la función de Green $G(x,t)$ del problema homogéneo (4.2), con las condiciones de frontera homogéneas (4.3) es única.

4.3. Construcción de la función de Green del problema no homogéneo

Como se afirmó anteriormente, ahora mostraremos que la solución única $y(x)$ del problema (4.1), con las condiciones homogéneas (4.3) se puede representar en términos de $G(x,t)$ de la siguiente manera:

$$y(x) = L^{-1}[r] = \int_a^b G(x,t)\, r(t)\, dt = \int_a^x G(x,t)\, r(t)\, dt + \int_x^b G(x,t)\, r(t)\, dt. \quad (4.11)$$

Usaremos el método de variación de constantes para obtener una representación general de la solución del problema homogéneo (4.1), con las condiciones homogéneas (4.3). Para ello escogemos dos soluciones no triviales y_1 e y_2 de la ecuación homogénea (4.2).
Tomamos y_1 de modo que verifica la primera condición homogénea de (4.3) e y_2 que satisfaga la segunda condición homogénea de (4.3) (i.e $l_1[y_1] = 0$, $l_2[y_2] = 0$).
La existencia de y_1 e y_2 es consecuencia del teorema de existencia y unicidad de problemas con valores iniciales, ya que podemos elegir las condiciones iniciales en a (respectivamente en b) de manera que la primera condición homogénea de (4.3) se cumple y la solución no sea trivial.
Para poder utilizar el método de variación de constantes debemos asegurarnos de que y_1 y y_2 son linealmente independientes.
Para ello, si y_1 e y_2 fuesen linealmente dependientes, entonces una tiene que ser múltiplo de la otra, es decir, $y_1 = c \cdot y_2$. Por lo tanto como y_2 satisface la segunda condición homogénea de (4.3), entonces y_1 también satisface esa condición. Además y_1 satisface la primera condición homogénea de (4.3), así que y_1 es solución del problema homogéneo (4.2) con las condiciones de contorno homogéneas (4.3). Como hemos supuesto que el problema homogéneo (4.2) con las condiciones de contorno homogéneas (4.3) tiene sólo la solución trivial, concluimos que y_1 es una solución trivial (Contradicción ya que y_1 no es solución trivial por hipótesis).
Con esta contradicción tenemos que y_1 y y_2 son linealmente independientes.
Para poder aplicar el método de variación de constantes, escribimos primero la ecuación (4.1) en la forma:

$$y'' + \frac{p_1'}{p_0} y' + \frac{p_1}{p_0} = \frac{r}{p_0}.$$

Asumimos que

$$y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \quad (4.12)$$

es solución de (4.1) con $c_1(x)$ y $c_2(x)$ dos funciones a determinar.

Para buscar las funciones incógnitas, primero debemos calcular $y'(x)$ y $y''(x)$. Al derivar (4.12) obtenemos

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2.$$

Para simplificar los cálculos y evitar las derivadas de segundo orden para las incógnitas c_1 y c_2 en la expresión para y'', imponemos la condición

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0.$$

Así, la fórmula para y' se convierte en

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Por lo tanto

$$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''.$$

Ahora al sustituir y, y', y'' en (4.1) tenemos

$$\begin{aligned} r(x) =& c_1 \left(p_0 y_1'' + p_0' y_1' + p_1 y_1 \right) + c_2 \left(p_0 y_2'' + p_0' y_2' + p_1 y_2 \right) + p_0 \left(c_1' y_1' + c_2' y_2' \right) \\ =& p_0 \left(c_1' y_1' + c_2' y_2' \right), \end{aligned}$$

ya que y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea.
Por lo tanto,

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{r}{p_0}.$$

Como y_1 y y_2 son linealmente independientes, se sigue que el Wornskiano de y_1 y y_2 nunca se anula, por lo tanto al resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} y_1 c_1' + y_2 c_2' = & 0, \\ y_1' c_1' + y_2' c_2' = & \dfrac{r}{p_0}, \end{cases}$$

obtenemos que

$$c_1' = \frac{-y_2(x)\, r(x)}{p_0(x)\, W[y_1, y_2](x)}, \quad c_2' = \frac{y_1(x)\, r(x)}{p_0(x)\, W[y_1, y_2](x)}$$

donde

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Al integrar estas ecuaciones obtenemos finalmente

$$c_1(x) = \int_b^x \frac{-y_2(t)\,r(t)}{p_0(t)\,W[y_1,y_2](t)}dt$$

$$c_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(t)\,r(t)}{p_0(t)\,W[y_1,y_2](t)}dt$$

Así que la solución particular de (4.1) (que es también la general de (4.1) ya que hemos supuesto que la homogénea tiene solamente la solución trivial) es

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) \\ &= y_1(x)\int_b^x \frac{-y_2(t)\,r(t)}{p_0(t)\,W[y_1,y_2](t)}dt + y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(t)\,r(t)}{p_0(t)\,W[y_1,y_2](t)}dt \\ &= \int_a^b G(x,t)\,r(t)\,dt, \end{aligned} \tag{4.13}$$

siendo

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)\,y_2(x)}{p_0(t)\,W[y_1,y_2](t)}, & \text{si } a \le t \le x \\ \dfrac{y_2(t)\,y_1(x)}{p_0(t)\,W[y_1,y_2](t)}, & \text{si } x \le t \le b \end{cases}$$

A continuación, usamos el hecho de que y_1 e y_2 satisfacen la ecuación homogénea (4.2) para mostrar que

$$p_0(x)\,W[y_1,y_2](x) = C, \text{ para todo } x \text{ en } [a,b]$$

donde C es una constante.

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(p_0(x)\,W[y_1,y_2](x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(p_0(x)\left[y_1(x)\,y_2'(x) - y_1'(x)\,y_2(x)\right]\right) \\ &= y_1(x)\frac{d}{dx}\left[p_0(x)\,y_2'(x)\right] + y_1'(x)\,p_0(x)\,y_2(x) \\ &\quad - y_2(x)\frac{d}{dx}\left[p_0(x)\,y_1'(x)\right] - y_1'(x)\,p_0(x)\,y_2(x) \\ &= y_1(x)\frac{d}{dx}\left[p_0(x)\,y_2'(x)\right] - y_2(x)\frac{d}{dx}\left[p_0(x)\,y_1'(x)\right] \\ &= y_1(x)\left[-p_1(x)\,y_2(x)\right] - y_2\left[-p_1(x)\,y_1(x)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G(x,t)$ tiene la siguiente forma:

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)\,y_2(x)}{C}, & \text{si } a \le t \le x \\ \dfrac{y_2(t)\,y_1(x)}{C}, & \text{si } x \le t \le b \end{cases} \tag{4.14}$$

donde C está dada por la ecuación $p_0(x)\,W[y_1,y_2](x) = C$, con $x \in [a,b]$ e y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación (4.1) verificando

$$\begin{cases} l_1 [y_1] = 0, \\ l_2 [y_2] = 0. \end{cases}$$

4.3.1. Solución del problema no homogéneo mediante la construcción de la función de Green

Teorema 4.2. *Supongamos que el problema homogéneo* (4.2) *con las condiciones de frontera* (4.3) *tiene solamente la solución trivial, y sea* $G(x,t)$ *la función de Green del problema regular de Sturm-Liouville* (4.1) *con valores en la frontera* (4.3)*. Entonces se verifica:*
(i) *existe una función de Green única* $G(x,t)$ *para el problema* (3.1) *con valores en la frontera* (4.3)*.*
(ii) *la solución única* $y(x)$ *del problema no homogéneo* (4.1)*, junto con* (4.3) *puede ser representada por*

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)\, r(t)\, dt$$

para cualquier función r *continua en* $[a,b]$*.*
(iii) $G(x,t)$ *es simétrica, es decir,* $G(x,t) = G(t,x)$*.*

Observación 4.3. La propiedad (iii) se deduce como veremos más adelante porque el operador L es autoadjunto.

Demostración. (i) Existencia: se obtiene tal función de Green usando el método de variación de constantes como hemos detallado anteriormente
Unicidad: Las propiedades (i), (ii) , (iii) y (iv) caracterizan $G(x,t)$ porque si dos funciones de Green $G_1(x,t)$ y $G_2(x,t)$ las cumplen, para cada $t \in [a,b]$ la función de x:

$$y(x) = G_1(x,t) - G_2(x,t)$$

es de clase C^2 en $[a,b]$, cumple (4.2) y las condiciones de contorno (4.3). Por tanto

$$y(x) = 0$$

para todo x (ya que hemos supuesto que el problema homogéneo (4.2), (4.3) sólo tiene la solución trivial).
(ii) Usamos el método de variación de parámetros para buscar una solución $y(x)$, de tal manera que verifica la ecuación no homogénea (4.1). Por lo tanto, basta ver que $y(x)$, dada en (4.14), satisface las condiciones de la frontera (4.3).

Calculamos en el primer lugar $y'(x)$ a partir de la ecuación (4.13) (con $pW[y_1, y_2] = C$):

$$\begin{aligned} y'(x) = y_1'(x) \int_b^x \frac{-y_2(t)\, r(t)}{C} dt - \frac{y_1(x)\, y_2(x)\, r(x)}{C} \\ + y_2'(x) \int_a^x \frac{y1(t)\, r(t)}{C} dt + \frac{y_1(x)\, y_2(x)\, r(x)}{C} \\ = y_1'(x) \int_b^x \frac{-y_2(t)\, r(t)}{C} dt + y_2'(x) \int_a^x \frac{y_1(t)\, r(t)}{C} dt \end{aligned} \tag{4.15}$$

Usamos las ecuaciones (4.13) y (4.15) para obtener

$$\begin{aligned} a_0 y(a) + a_1 y'(a) =& a_0 y_1(a) \int_a^b \frac{y_2(t)\, r(t)}{C} dt + a_1 y_1'(a) \int_a^b \frac{y_2(t)\, r(t)}{C} dt \\ =& \left[a_0 y_1(a) + a_1 y_1'(a)\right] \int_a^b \frac{y_2(t)\, r(t)}{C} dt \\ =& 0 \end{aligned}$$

pues $y_1(x)$ satisface la primera condición de (4.3).
Así, la función dada por (4.11) verifica la primera condición de (4.3). Análogamente por el mismo cálculo se tiene que y también satisface la segunda condición de (4.3).

Por lo tanto, $y(x)$ resuelve el problema no homogéneo (4.1) con valores en la frontera (4.3).
(iii) la simetría se deduce a partir de la definición de $G(x,t)$ en (4.14), basta intercambiar x y t en las fórmulas. $\square$

Ejemplo 4.4. Considérese el problema de valores en la frontera periódico

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0, \quad k > 0, \quad x \in [0, \omega], \quad \omega > 0 \tag{4.16}$$

$$\begin{cases} y(0) = y(\omega), \\ y'(0) = y'(\omega). \end{cases} \tag{4.17}$$

Para la ecuación diferencial 4.16 dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(x) = \cos kx \text{ e } y_2(x) = \sin kx.$$

Por lo tanto, el Teorema 3.1 afirma que el problema (4.16), (4.17) tiene solo la solución trivial si y solo si

$$\Delta = 4k \sin^2\left(\frac{k\omega}{2}\right) \neq 0, \text{ i.e, } \omega \neq \frac{2\pi l}{k}, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Además, las igualdades (4.6) y (4.7) se reducen a

$$\begin{cases} \cos kt \quad \nu_1(t) + \sin kt \quad \nu_2(t) & = 0 \\ -k \sin kt \quad \nu_1(t) + k \cos kt \quad \nu_2(t) & = 1 \end{cases}$$

Estas relaciones implican

$$\nu_1(t) = -\frac{\sin kt}{k}\ ,\ \ \nu_2(t) = \frac{\cos kt}{k}.$$

A partir de (4.16) y (4.17) se tiene que las ecuaciones (4.9) y (4.10) se reducen a

$$\begin{cases} (1-\cos k\omega)\,\lambda_1(t) - \sin k\omega \quad \lambda_2(t) = \dfrac{\sin k(\omega - t)}{k}, \\ \sin k\omega \quad \lambda_1(t) + (1-\cos k\omega)\,\lambda_2(t) = \dfrac{\cos k(\omega - t)}{k}, \end{cases}$$

lo que determina $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ como

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2k\sin\dfrac{k\omega}{2}}\cos k\left(t - \frac{\omega}{2}\right)\ ,\ \ \lambda_2(t) = \frac{1}{2k\sin\dfrac{k\omega}{2}}\sin k\left(t - \frac{\omega}{2}\right).$$

Sustituyendo estas funciones en (4.8), obtenemos la función de Green del problema de valores en la frontera periódico (4.16), (4.17) como

$$G(x,t) = \frac{1}{2k\sin\dfrac{k\omega}{2}}\begin{cases} \cos k\left(x - t + \frac{\omega}{2}\right) \text{ si }, & a \le x \le t \\ \cos k\left(t - x + \frac{\omega}{2}\right) \text{ si }, & t \le x \le b \end{cases}$$

que, como ya sabemos, es simétrica, es decir, $G(x,t) = G(t,x)$.

4.3.2. Demostración de las propiedades de la función de Green

Demostramos ahora las propiedades de la función de Green del problema no homogéneo (4.1), con las condiciones (4.3).

Teorema 4.5. *Sea* $G(x,t)$ *la función de Green dada por* (4.14) *para el problema regular de Sturm-Liouville con las condiciones de frontera* (4.3). *Entonces*

(a) $G(x,t)$ *es continua en* $[a,b]\times[a,b]$, *y para cada* t *fijo, las derivadas parciales* $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ *son funciones continuas de la variable* x, *con* $x \neq t$.

(b) En la diagonal del cuadrado $[a,b]\times[a,b]$ $x = t$, *la derivada parcial* $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ *tiene una discontinuidad de salto finito :*

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t^+,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t^-,t) = \frac{1}{p_0(t)}.$$

(c) Fijado t, *la función* $G(x,t)$ *satisface el problema homogéneo* (4.2) *y las condiciones de frontera* (4.3) *correspondientes para* $x \neq t$, *es decir,*

$$L[G(\cdot,t)](x) = 0,\ \textit{con}\ \ x \neq t$$

donde L *el operador lineal asociado a la ecuación homogénea y*

$$a_0 G(a,t) + a_1\frac{\partial G}{\partial x}(a,t) = 0,\ d_0 G(b,t) + d_1\frac{\partial G}{\partial x}(b,t) = 0.$$

Demostración. (a) Como y_1 e y_2 son ambas soluciones de la homogénea (4.2), es decir

$$L[y] = 0 \text{ en } [a, b]$$

se tiene que tanto G como $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ son funciones continuas en los triángulos $a \leq t < x \leq b$ y $a \leq x < t \leq b$.
Así, por la expresión (4.14) de $G(x,t)$, deducimos que $G(x,t)$ es continua en el cuadrado $[a,b] \times [a,b]$ y, para cada t fijado, tenemos que son funciones continuas de x para $x \neq t$.
(b) Por ser

$$p_0 W[y_1, y_2] = C,$$

utilizando la fórmula (4.14) se deduce que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to t^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) - \lim_{x \to t^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) &= \frac{y_1(t)\, y_2'(t)}{C} - \frac{y_1'(t)\, y_2(t)}{C} \\
&= \frac{W[y_1, y_2](t)}{C} = \frac{1}{p_0(t)}.
\end{aligned}$$

(c) Para t fijado, la función de Green $G(x,t)$ es múltiplo constante de $y_1(x)$ cuando $x < t$ y un múltiplo constante de $y_2(x)$ cuando $t < x$.
Como y_1 e y_2 verifican la ecuación homogénea (4.2) $(L[y_i] = 0, i = 1, 2)$, entonces lo mismo pasa con $G(\cdot, t)$ para $x \neq t$.
Veamos que $G(x,t)$ verifica las condiciones de frontera (4.3).
Para $x < t$, tenemos que

$$G(x,t) = \left(\frac{y_2(t)}{C}\right) y_1(x).$$

Como $y_1(x)$ satisface la primera condición de (4.3), se tiene que

$$a_0 G(a,t) + a_1 \frac{\partial G}{\partial x}(a,t) = \left(\frac{y_2(t)}{C}\right) [a_0 y_1(a) + a_1 y_1'(a)] = 0.$$

De forma análoga, cuando $t < x$, obtenemos que

$$G(x,t) = \left(\frac{y_1(t)}{C}\right) y_2(x).$$

La solución $y_2(x)$ satisface la segunda condición de (4.3), así que

$$d_0 G(b,t) + d_1 \frac{\partial G}{\partial x}(b,t) = \left(\frac{y_1(t)}{C}\right) [d_0 y_2(b) + d_1 y_2'(b)] = 0.$$

Por lo tanto, para cada s dado, $G(\cdot, t)$ cumple las condiciones de frontera (4.3). $\square$

Ahora denotaremos el operador integral T dado por (4.11), como

$$T[r] = \int_a^b G(x,t)\, r(x)\, dt.$$

Teorema 4.6. *Supongamos que* $\lambda = 0$ *no es autovalor del problema de Sturm-Liouville* (4.1), (4.3). *Entonces bajo las suposiciones del Teorema* (4.2), λ *es un autovalor de* L *si y sólo si* $\frac{1}{\lambda}$ *es un autovalor de* T. *Además, si* r *es la autofunción de* L *que corresponde al autovalor* λ, *entonces* r *es una autofunción de* T *correspondiente al autovalor* $\frac{1}{\lambda}$.

Demostración. Supongamos que $L[r] = \lambda r$ para alguna función $r \in C^2[a,b]$ distinta de cero. A partir de la definición de T, tenemos que

$$r = L^{-1}[\lambda r] = T[\lambda r].$$

Equivalentemente, ya que $\lambda \neq 0$,

$$T[r] = \frac{1}{\lambda} r.$$

Esto nos dice que $\frac{1}{\lambda}$ es un autovalor de T con su correspondiente autofunción r. Recíprocamente, si r (distinta de cero) es una autofunción de T correspondiente al autovalor $\lambda \neq 0$, entonces

$$T[r] = \lambda r.$$

Ya que $T = L^{-1}$ y L es un operador lineal, entonces

$$r = L(T[r]) = L(\lambda r) = \lambda L[r]$$

Por lo que $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de L y su correspondiente autofunción es r. □

4.4. Condiciones de contorno no homogéneas

4.4.1. Principio de superposición

Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$\frac{1}{r(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right] y(x) + \lambda y(x) = \frac{f(x)}{r(x)},$$

o, equivalente en forma de operadores a

$$(L + \lambda) y(x) = \frac{f(x)}{r(x)}, \tag{4.18}$$

donde L viene dado por (1.4), junto con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 y'(a) = A, \\ d_0 y(b) + d_1 y'(b) = B, \end{cases} \tag{4.19}$$

y sean $\tilde{y}$, z_1 y z_2 las soluciones de

$$\begin{aligned}(L+\lambda)\,\tilde{y}\,(x) &= \frac{f\,(x)}{r\,(x)},\\ a_0\tilde{y}\,(a)+a_1\tilde{y}'\,(a) &= 0,\\ d_0\tilde{y}\,(b)+d_1\tilde{y}'\,(b) &= 0,\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}(L+\lambda)\,z_1\,(x) &= 0,\\ a_0z_1\,(a)+a_1z_1'\,(a) &= A,\\ d_0z_1\,(b)+d_1z_1'\,(b) &= 0,\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}(L+\lambda)\,z_2\,(x) &= 0,\\ a_0z_2\,(a)+a_1z_2'\,(a) &= 0,\\ d_0z_2\,(b)+d_1z_2'\,(b) &= B.\end{aligned} \tag{4.22}$$

respectivamente.
Aplicando el principio de superposición se obtiene que la solución del problema de Sturm-Liouville no homogéneo (4.18), (4.19) es

$$y\,(x)=\tilde{y}\,(x)+z_1\,(x)+z_2\,(x).$$

La unicidad del problema (4.18), (4.19) se sigue del hecho de que al restar dos posibles soluciones tendremos una solución del problema homogéneo con condiciones homogéneas, cuya solución única es la trivial.

Ejemplo 4.7. Sea el siguiente problema de Sturm-Liouville no homogéneo

$$y''\,(x)=f\,(x)\,, \tag{4.23}$$

$$\begin{cases} y\,(0)=\alpha,\\ y\,(1)+y'\,(1)=\beta.\end{cases} \tag{4.24}$$

Empezamos calculando la solución $\tilde{y}$ del problema de Sturm-Liouville no homogéneo con condiciones homogéneas:

$$\tilde{y}\,(x)=f\,(x)$$

$$\begin{cases} \tilde{y}\,(0)=0,\\ \tilde{y}\,(1)+\tilde{y}'\,(1)=0.\end{cases} \tag{4.25}$$

Para ello calculamos la función de Green, utilizando la demostración del Teorema 4.2:
• Para $0\le t\le x<1$:

$$y_1''(x) = 0 \Rightarrow y_1(x) = A_1 x + B_1.$$

Imponiendo la primera condición de contorno de (4.25) tenemos que

$$y_1(0) = 0 = B_1 \Rightarrow y_1(x) = A_1 x.$$

- Para $0 < x \leq t \leq 1$:

$$y_2''(x) = 0 \Rightarrow y_2(x) = A_2 x + B_2,$$

Imponiendo la segunda condición de contorno de (4.25) tenemos que

$$y_2(1) + y_2'(1) = 0 = 2A_2 + B_2 \Rightarrow B_2 = -2A_2 \Rightarrow y_2(x) = A_2(x-2).$$

Luego la función de Green es

$$G(x,t) = \begin{cases} c_1(t)\, x, & 0 \leq x \leq t, \\ c_2(t)(x-2), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de continuidad de la función de Green y de discontinuidad de su derivada hallamos las funciones c_1 y c_2:

$$\begin{cases} c_1(t)\, t - c_2(t)(t-2) = 0, \\ c_1(t) - c_2(t) = 0, \end{cases}$$

cuya solución es

$$c_1(t) = \frac{t}{2} - 1, \quad c_2(t) = \frac{t}{2}.$$

Luego la función de Green es

$$G(x,t) = \begin{cases} (t-2)\frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq t, \\ (x-2)\frac{t}{2}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Por tanto la solución $\tilde{y}$ para una función $f(x)$ dada será

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= \int_0^1 G(x,t)\, f(t)\, dt \\ &= \frac{x-2}{2}\int_0^x t f(t)\, dt + \frac{x}{2}\int_x^1 (t-2)\, f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Ahora debemos calcular z_1 solución del siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$z_1''(x) = 0,$$

$$\begin{cases} z_1(0) = \alpha, \\ z_1(1) + z_1'(1) = 0. \end{cases}$$

La solución de la ecuación diferencial es $z_1(x) = Ax + B$. Imponiendo la condición de contorno en $x = 0$, se obtiene $B = \alpha$ de modo que $z_1(x) = Ax + \alpha$. De la condición de contorno en el otro extremo se deduce que

$$z_1(1) + z_1'(1) = 0 \Rightarrow 2A + \alpha = 0 \Rightarrow A = -\frac{\alpha}{2} \Rightarrow z_1(x) = \frac{\alpha}{2}(2 - x).$$

De forma análoga, determinamos una solución z_2 del siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$z_2''(x) = 0,$$

$$\begin{cases} z_2(0) = 0, \\ z_2(1) + z_2'(1) = \beta. \end{cases}$$

La solución de la ecuación diferencial es $z_2(x) = Ax + B$. De la condición de contorno en $x = 0$ se deduce $z_2(x) = Ax$. Imponiendo la otra condición de contorno se obtiene que

$$z_2(1) + z_2'(1) = \beta \Rightarrow 2A = \beta \Rightarrow A = \frac{\beta}{2} \Rightarrow z_2(x) = \frac{\beta}{2}x.$$

En definitiva, la solución del problema de Sturm-Liouville no homogéneo dado por las ecuaciones (4.23), (4.24) es

$$\begin{aligned} y(x) &= \tilde{y}(x) + z_1(x) + z_2(x) \\ &= \frac{x-2}{2}\int_0^x tf(t)\,dt + \frac{x}{2}\int_x^1 (t-2)\,f(t)\,dt + \frac{\alpha}{2}(2-x) + \frac{\beta}{2}x. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Problemas de autovalores y ecuaciones de Sturm-Liouville

Hemos visto en el Capítulo 3 que el problema homogéneo (3.2) junto con las condiciones de frontera homogéneos (3.4) puede tener soluciones no triviales.
Si los coeficientes de la ED y/o de las condiciones de contorno dependen de un parámetro, entonces uno de los problemas más importantes de la física matemática es determinar el valor del parámetro para el cual existen tales soluciones no triviales. Estos valores especiales del parámetro reciben el nombre de valores propios y los correspondientes soluciones no triviales se llaman funciones propias.
Se sigue las referencias [1], [2], [5], [7], [8], [9], [10] ,[12], [13] y [14].

5.1. Teoría espectral

5.1.1. Definiciones

Tomamos la siguiente ecuación diferencial

$$\left(p\left(x\right)y'\right)' + q\left(x\right)y + \lambda r\left(x\right)y = L\left[y\right] + \lambda r\left(x\right)y = 0, \tag{5.1}$$

donde

$$L\left[y\right] = \left(p\left(x\right)y'\right)' + q\left(x\right)y,$$

junto con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} a_0 y\left(a\right) + a_1 y'\left(a\right) = 0, \\ d_0 y\left(b\right) + d_1 y'\left(b\right) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Este problema se conoce como el problema de Sturm-Liouville.
En la ecuación diferencial (5.1), λ es un parámetro real, y las funciones q, $r \in C\left(J\right)$,

$p \in C^1(J)$ y $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ en $J = [a, b]$. Excluimos los casos en que $a_0 = a_1 = 0$ o $d_0 = d_1 = 0$ (es decir, asimismo $a_0^2 + a_1^2 > 0$, $d_0^2 + d_1^2 > 0$).

El problema (5.1), (5.2) que satisface las condiciones anteriores se dice que es un problema regular de Sturm-Liouville .

Resolver tal problema significa encontrar valores de λ y las correspondientes soluciones no triviales $y_\lambda(x)$.

Ejemplo 5.1. Consideramos el problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Si $\lambda < 0$, se tiene que la solución general es $y = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}$, con $p = \sqrt{-\lambda} > 0$.

Imponiendo las condiciones de contorno en cada caso se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{p\pi} + c_2 e^{-p\pi} = 0, \end{cases}$$

cuya solución es $c_1 = c_2 = 0$ pues $e^{p\pi} \neq e^{-p\pi}$ si $p > 0$. Por lo tanto ningún $\lambda < 0$ es autovalor.

Si $\lambda = 0$ la solución es $y = c_1 + c_2 x$. De las condiciones de contorno se obtiene que

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2 \pi = 0, \end{cases}$$

La solución del sistema anterior es $c_1 = c_2$, con lo cual $y \equiv 0$. Por lo tanto, $\lambda = 0$ tampoco es autovalor.

Y para $\lambda > 0$ la solución es $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$, con $w = \sqrt{\lambda} > 0$. El sistema (5.4) se reduce a

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 \sin w\pi = 0. \end{cases}$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solo si $c_2 \neq 0$. Para ello, $w\pi = \pi\sqrt{\lambda} = n\pi$, i.e, $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Para cada uno de estos λ_n hay soluciones no triviales

$$y_n = c_2 \sin nx = \{\sin nx\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Observamos que se cumple que si $m \neq n$: $\displaystyle\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = 0$, pues

$$\sin nx \sin mx = \tfrac{1}{2}\left[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right]$$

y

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-m\right)x-\cos\left(n+m\right)x\right]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(n-m\right)x}{n-m}-\frac{\sin\left(n+m\right)x}{n+m}\right]_0^{\pi}=0.$$

Del ejemplo 5.1 queda claro que el problema (5.3), (5.4) tiene un número infinito de valores propios reales λ_n, que se pueden ordenar como una sucesión monótona creciente

$$\lambda_1<\lambda_2<\ldots$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

Además, para cada valor propio λ_n correspondiente de (5.3), (5.4) existe una familia de funciones propias $y_n\left(x\right)$, que tiene exactamente $\left(n-1\right)$ ceros en el intervalo abierto $\left(0,\pi\right)$. Cada autovalor tiene asociado un espacio vectorial de dimensión 1. Además, estas funciones propias son ortogonales en el sentido de la siguiente definición.

Definición 5.2. Una familia de funciones $\{y_n\left(x\right):n=0,1\ldots\}$, tal que cada $y_n\left(x\right)$ es continua a trozos en un intervalo infinito o finito $[a,b]$, se dice que es ortogonal en $[a,b]$ con respecto a la función no negativa $r\left(x\right)$ (función peso) si cumple

$$<y_m,y_n>=\int_a^b r\left(x\right)y_m\left(x\right)y_n\left(x\right)dx=0 \text{ para todo } m\neq n$$

y

$$\int_a^b r\left(x\right)y_n^2\left(x\right)dx\neq 0 \text{ para todo } n.$$

En lo sigue, asumiremos que la función peso $r\left(x\right)$ tiene solo un número finito de ceros en $[a,b]$ y las integrales

$$\int_a^b r\left(x\right)y_n\left(x\right)$$

existen para todo $n=0,1,2\ldots.$

El sistema ortogonal $\{y_n\left(x\right):n=0,1,2\ldots\}$ en $[a,b]$ con respecto a la la función peso $r\left(x\right)$ se dice que es ortonormal si para todo n se verifica que

$$\int_a^b r\left(x\right)y_n^2\left(\left(x\right)dx=1\ .$$

Por lo tanto, las funciones ortonormales tienen las mismas propiedades que las funciones ortogonales, pero además se han normalizado, es decir, cada función $\psi_n\left(x\right)$ del sistema ortogonal se ha dividido por la norma de esa función, que se define como

$$\| y_n \| = \sqrt{\int_a^b r(x)\, y_n^2(x)}.$$

Esto nos permite hablar de unicidad de las funciones del conjunto.
Por ser

$$\int_0^\pi \sin kx \sin lx dx = 0, \text{ para todo } \ k \neq l,$$

se tiene que el sistema de funciones propias $\{y_n(x) = \operatorname{sen}(nx), n \in \mathbb{N}\}$ del Ejemplo 5.1 es ortogonal en $[0, \pi]$ con respecto de la función de peso $r(x) = 1$.

Si todas las funciones propias asociadas a un valor propio particular son múltiplos escalares entre sí, entonces el valor propio se llama simple.

Observación 5.3. La principal diferencia entre las propiedades de los problemas regulares y periódicos de Sturm-Liouville es que los valores propios para el problema periódico de Sturm-Liouville no tienen que ser simples. Por ejemplo, para el problema periódico del Ejemplo 1.12 se sigue habiendo una sucesión infinita de autovalores $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \ldots$ tendiendo a $+\infty$, pero las autofunciones $y_0 = 1$, $y_n = \{cosnx, sennx\}$ forman, si $n > 0$, un espacio vectorial de dimensión 2. Utilizando las identidades trigonométricas $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a-b)]$ y las fórmulas del ángulo doble se comprueba que sigue siendo cierto que autofunciones distintas son ortogonales entre sí.

5.1.2. Propiedades de autovalores y autofunciones del operador Sturm-Liouville

Veamos unos resultados que caracterizan las propiedades de valores propios y las funciones propias correspondientes del problema regular de Sturm-Liouville (5.1), (5.2).

Operadores autoadjuntos

Definición 5.4. Un operador diferencial L

$$L[y] = p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y$$

de coeficientes continuos en $[a, b]$ se dice autoadjunto si $p_0 \in C^1[a, b]$ y $p_1(x) = p_0'(x)$ para todo $x \in [a, b]$, es decir:

$$L[y] = p_0(x)\, y'' + p_0'(x)\, y' + p_2(x)\, y = (p_0(x)\, y')' + p_2(x)\, y.$$

Proposición 5.5. *Toda ecuación:*

$$p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = r(x), \quad p_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

se puede escribir en forma equivalente como:

$$L[y] = f(x)$$

donde el operador L *es autoadjunto. Es decir, en la forma*

$$(py')' + qy = f(x)$$

donde $p \in C^1[a,b]$, $q \in C[a,b]$, $p(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$.

Demostración. Escribimos la ecuación en la forma:

$$y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}y' + \frac{p_2(x)}{p_0(x)}y = \frac{r(x)}{p_0(x)}.$$

Multiplicamos ambos miembros por:

$$p(x) = \exp\{\int_a^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\}dt$$

obtenemos

$$(py')' + qy = f(x)$$

donde

$$q(x) = \frac{p(x)\,p_2(x)}{p_0(x)} \ , \ f(x) = \frac{p(x)\,r(x)}{p_0(x)}$$

□

Identidad de Lagrange y la fórmula de Green

Teorema 5.6. *(Identidad de Lagrange para* $L[y] = (py')' + qy$*)*
Sean u *y* v *funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo* $[a,b]$. *Entonces*

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}(pW[u,v]),$$

donde

$$W[u,v] = uv' - vu'$$

es el wronskiano de u *y* v

Demostración. Usamos la regla del producto, sumamos y restamos $pu'v'$ para tener

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u\left[\left(pv'\right)' + qv\right] - v\left[\left(pu'\right)' + qu\right] \\ &= u\left(pv'\right)' + quv - v\left(pu\right)' - quv \\ &= u\left(pv'\right)' + u'\left(pv'\right) - v'\left(pu'\right) - v\left(pu'\right)' \\ &= \left[u\left(pv'\right)\right]' - \left[v\left(pu'\right)\right]' \\ &= \left[p\left(uv' - vu'\right)\right]' \\ &= \frac{d}{dx}\left(pW[u,v]\right). \end{aligned}$$

□

A partir de la identidad de Lagrange podemos deducir que si u y v son soluciones de la ecuación diferencial

$$\left(py'\right)' + qy + \lambda r(x)\, y = 0$$

entonces

$$pW[u,v] = constante \tag{5.5}$$

Al integrar la identidad de Lagrange, obtenemos la siguiente ecuación llamada **fórmula de Green**.

Corolario 5.7. *(Fórmula de Green para* $L[y] = \left(py'\right)' + qy$*)*
Sean u y v funciones con segundas derivadas continuas en el intervalo $[a,b]$. *Entonces*

$$\int_a^b \left(uL[v] - vL[u]\right)(x)\, dx = \left(pW[u,v]\right)\Big|_a^b .$$

Si además u y v verifican las condiciones de frontera (5.2), la fórmula de Green se simplifica a

$$\int_a^b \left(uL[v] - vL[u]\right)(x)\, dx = 0. \tag{5.6}$$

En efecto, cuando $a_1 \neq 0$ y $d_1 \neq 0$, entonces

$$u'(a) = -\left(\frac{a_0}{a_1}\right) u(a)\ ,\ \ u'(b) = -\left(\frac{d_0}{d_1}\right) u(b),$$

$$v'(a) = -\left(\frac{a_0}{a_1}\right) v(a)\ ,\ \ v'(b) = -\left(\frac{d_0}{d_1}\right) v(b).$$

Al sustituir estos valores en el lado derecho de la fórmula de Green tenemos

$$\begin{aligned} p(b)\,W[u,v](b) - p(a)\,W[u,v](a) &= \\ p(b)\left[u(b)\,v'(b) - u'(b)\,v(b)\right] - p(a)\left[u(a)\,v'(a) - u'(a)\,v(a)\right] &= \\ p(b)\left[u(b)\left(\frac{-d_0}{d_1}\right)v(b) - \left(\frac{-d_0}{d_1}\right)u(b)\,v(b)\right]& \\ -p(a)\left[u(a)\left(\frac{-a_0}{a_1}\right)v(a) - \left(\frac{-a_0}{a_1}\right)u(a)\,v(a)\right] &= 0 \end{aligned}$$

Cuando $a_1 = 0$ (de modo que $a_0 \neq 0$), la ecuación (5.2) implica que $u(a)$ y $v(a)$ se anulan.
Por lo tanto,

$$[u(a)\,v'(a) - u'(a)\,v(a)] = 0.$$

Análogamente, cuando $d_1 = 0$, obtenemos que

$$[u(b)\,v'(b) - u'(b)\,v(b)] = 0.$$

Así que, si u y v verifican cualquiera de las condiciones de contorno (5.2), entonces se cumple (5.6).
Si hacemos

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

entonces $< \cdot, \cdot >$ es un **producto interior** en el conjunto de funciones con valores reales en $[a,b]$.
Con esta notación, podemos escribir (5.6) como

$$< u, L[v] >=< v, L[u] > .$$

Hemos demostrado que si L es de la forma

$$L[y] = (py')' + qy$$

y el dominio de L es el conjunto de funciones que tienen segundas derivadas continuas en $[a,b]$ y satisfacen las condiciones en la frontera (5.2), entonces L es un operador autoadjunto (por definición del operador autoadjunto).
Una vez dada la definición de un operador autoadjunto, podemos demostrar la observación 4.3. En efecto, sean $f, g \in C[a,b]$ arbitrarias. Denotando por $x = G(f)$ y $y = G(g)$ las soluciones dadas por la representación (4.11) de $L[x] = f$ y $L[y] = g$ respectivamente. Como L es autoadjunto sabemos que

$$< L[x], y >=< x, L[y] > .$$

Equivalente a,

$$< f, G(g) >=< G(f), y > .$$

Se tiene entonces que:

$$\int_a^b \int_a^b (G(x,t) - G(t,x)) f(x) g(t) \, dtdx = 0, \ \ \forall f, g \in C[a,b] .$$

Por lo tanto, $G(x,t) = G(t,x)$.

Teoremas espectrales de los problemas de Sturm-Liouville

Teorema 5.8. *Los valores propios del problema regular de Sturm-Liouville* (5.1), (5.2) *son simples, es decir, si* λ *es un valor propio de* (5.1), (5.2) *y* $\psi_1(x)$ *y* $\psi_2(x)$ *son las funciones propias correspondientes, entonces* $\psi_1(x)$ *y* $\psi_2(x)$ *son linealmente dependientes.*

Demostración. Como $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son soluciones de (5.1), usando (5.5) se tiene que

$$p(x) W(\psi_1, \psi_2)(x) = c \text{ (donde } c \text{ es constante).}$$

Para encontrar el valor de c, basta tener en cuenta que ψ_1 y ψ_2 satisfacen las condiciones de contorno (5.2), y por lo tanto

$$\begin{cases} a_0\psi_1(a) + a_1\psi_1'(a) = 0, \\ a_0\psi_2(a) + a_1\psi_2'(a) = 0, \end{cases}$$

lo que implica $W(\psi_1, \psi_2)(a) = 0$ (ya que $\mid a_0 \mid + \mid a_1 \mid \neq 0$), y por lo tanto, c es cero. Entonces,

$$p(x) W(\psi_1, \psi_2)(x) = 0$$

es decir, ψ_1 y ψ_2 son linealmente independientes. □

Teorema 5.9. *Sean* λ_n, $n \in \mathbb{N}$, *los valores propios del problema regular de Sturm–Liouville* (5.1), (5.2) *y* $\psi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, *las funciones propias correspondientes. Entonces el sistema* $\{\psi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *es ortogonal en* $[a,b]$ *con respecto a la función de peso* $r(x)$.

Demostración. Sean λ_k y λ_l ($k \neq l$) valores propios, y ψ_k, ψ_l las funciones propias asociadas de (5.1), (5.2). Como $\psi_k(x)$ y $\psi_l(x)$ son soluciones de (5.1), se tiene

$$\begin{cases} L[\psi_k] + \lambda_k r(x) \psi_k(x) &= 0, \\ L[\psi_l] + \lambda_l r(x) \psi_l(x) &= 0. \end{cases}$$

Utilizando la fórmula de Green (Corolario 5.7) se obtiene

$$\begin{aligned}(\lambda_l - \lambda_k)\int_a^b r(x)\,\psi_k(x)\,\psi_l(x)\,dx &= \int_a^b (\psi_l L[\psi_k] - \psi_k L[\psi_l])\,dx \\ &= p(x)\left[\psi_l(x)\,\psi_k'(x) - \psi_l'(x)\,\psi_k(x)\right]\Big|_a^b .\end{aligned} \tag{5.7}$$

Dado que ψ_k y ψ_l satisfacen las condiciones (5.2) se sigue que

$$\begin{aligned} a_0\psi_k(a) + a_1\psi_k'(a) = 0, \quad d_0\psi_k(b) + d_1\psi_k'(b) &= 0 \\ a_0\psi_l(a) + a_1\psi_l'(a) = 0, \quad d_0\psi_l(b) + d_1\psi_l'(b) &= 0 \end{aligned}$$

Como $\mid a_0 \mid + \mid a_1 \mid \neq 0$ y $\mid d_0 \mid + \mid d_1 \mid \neq 0$ es necesario que

$$\psi_k(a)\,\psi_l'(a) - \psi_k'(a)\,\psi_l(a) = \psi_k(b)\,\psi_l(b) - \psi_k'(b)\,\psi_l(b) = 0.$$

De la igualdad (5.7) obtenemos

$$(\lambda_l - \lambda_k)\int_a^b r(x)\,\psi_k(x)\,\psi_l(x)\,dx = 0. \tag{5.8}$$

Por otra parte, como $\lambda_l \neq \lambda_k$, se deduce que

$$\int_a^b r(x)\,\psi_k(x)\,\psi_l(x) = 0.$$

□

Corolario 5.10. *Sean λ_1 y λ_2 dos valores propios del problema regular de Sturm–Liouville* (5.1), (5.2) *y $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ las correspondientes funciones propias. Entonces $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son linealmente dependientes si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Demostración. La prueba es consecuencia directa de la igualdad (5.8). □

Teorema 5.11. *Para el problema regular de Sturm-Liouville* (5.1), (5.2) *los valores propios son reales y tienen funciones propias con valores reales .*

Demostración. Sea $\lambda = \zeta + i\eta$ un valor propio complejo y

$$\psi(x) = \mu(x) + i\nu(x)$$

la correspondiente función propia de (5.1), (5.2).
Entonces tenemos

$$\left(p(x)\,(\mu + i\nu)'\right)' + q(x)\,(\mu + i\nu) + (a + ib)\,r(x)\,(\mu + i\nu) = 0$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} L[\mu] + (\zeta\mu(x) - \eta\nu(x))\,r(x) = 0 \\ L[\nu] + (\eta\mu(x) + \zeta\nu(x))\,r(x) = 0 \end{aligned}$$

$$a_0\nu(a) + a_1\mu'(b) = 0, \quad a_0\nu(a) + a_1\mu'(b) = 0. \tag{5.9}$$

De la igualdad (5.6) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = p(x)\left(\nu\mu' - \nu'\mu\right)|_a^b &= \int_a^b (\nu L[\mu] - \mu L[\nu])\,dx \\ &= \int_a^b [-(\zeta\mu(x) - \eta\nu(x))\,r(x) + (\eta\mu(x) + \zeta\nu(x))\,r(x)]\,dx \\ &= \eta\int_a^b \left(\nu^2(x) + \mu^2(x)\right) r(x)\,dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es necesario que $\eta = 0$, es decir, λ es real.
Si ψ no toma valores reales, podemos obtener funciones propias con valores reales correspondientes a λ, sin más que considerar simplemente la parte real e imaginaria de ψ (Por (5.9), como hemos probado que λ es real, tenemos que la parte real y la parte imaginaria de $\psi(x)$ verifican el problema regular de Sturm-Liouville (5.1), (5.2)). □

Veamos ahora un resultado importante sobre la sucesión de valores propios y funciones propias de un caso particular del problema de Sturm-Liouville.

Lema 5.12. *Sean y y z soluciones no triviales de*

$$y'' + q(x)\,y = 0$$

y

$$y'' + p(x)\,y = 0,$$

en donde q y p son funciones positivas continuas, tales que $q(x) > p(x)$. Supongamos que z tiene un número finito o infinito de ceros $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ a la derecha de b_0. Entonces y tiene al menos tantos ceros como z en cada intervalo cerrado $[b_0, b_1]$, y si los ceros sucesivos a la derecha de y a la derecha de b_0 son $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, entonces $a_n < b_n$ para cada n.

Demostración. Por el Teorema2.2 de comparación de Sturm-Liouville 2.2, sabemos que y tiene al menos un cero en cada uno de los intervalos abiertos

$$(b_0, b_1), (b_1, b_2), \ldots (b_{n-1}, b_n),$$

y por lo tanto se obtiene la prueba del enunciado.

Teorema 5.13. *Si $q(x) < 0$, e $y(x)$ es una solución de $y'' + q(x)\,y = 0$, entonces $y(x)$ tiene a lo sumo un cero.*

Demostración. Sea x_0 un cero de $y(x)$, i.e, $y(x_0) = 0$. Como y no es trivial (es decir, no es nula), se obtiene que $y'(x_0) \neq 0$.
Supongamos que $y'(x_0) > 0$, de manera que y es positiva en algún intervalo a la derecha de x_0. Dado que $q(x) < 0$, así que

$$y''(x) = -q(x)\,y(x)$$

es una función positiva en el mismo intervalo considerado. De esto se sigue que $y'(x)$ es una función creciente, y por lo tanto $y(x)$ no puede tener un cero a la derecha de x_0 y, de forma análoga, no tiene ninguno a la izquierda de x_0. Cuando $y'(x_0) > 0$ se aplica el mismo razonamiento, de tal manera que $y(x)$ tiene a lo sumo un cero. $\square$

Teorema 5.14. *Sea q una función continua positiva, si se considera la ecuación diferencial*

$$y'' + \lambda q(x) = 0 \tag{5.10}$$

en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para cada λ fijo, sea $y(x, \lambda)$ la única solución de (5.10) *que satisface las condiciones iniciales $y(a, \lambda)$ e $y'(a, \lambda) = 1$. Entonces existe una sucesión creciente de números reales positivos*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

que tiende a $+\infty$ y tiene la propiedad de que $y(b, \lambda) = 0$, si y sólo si λ es igual a uno de los λ_n. Además, la función $y(x, \lambda_n)$ asociada a λ_n tiene exactamente $n - 1$ ceros en (a, b).

Demostración. A partir del Teorema 5.13, resulta claro que $y(x, \lambda)$ no tiene ceros a la derecha de a, cuando $\lambda \leq 0$. Analizamos el comportamiento de oscilación de $y(x, \lambda)$ conforme λ aumenta.

Como $q(x)$ es continua, entonces existen números reales positivos m y M, tales que en $[a, b]$, se tiene que $0 < m^2 < q(x) < M^2$. Por el teorema 2.2 de comparación sabemos que, $y(x, \lambda)$ oscila con mayor rapidez en $[a, b]$ que las soluciones de

$$y'' + \lambda m^2 y = 0,$$

y menos rápidamente que las soluciones de

$$y'' + \lambda M^2 y = 0.$$

Por la Proposición 2.2.1, cuando λ es positivo y pequeño (tan pequeño que $\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}M} \geq b - a$), la solución $y(x, \lambda)$ no tiene ceros en $[a, b]$ a la derecha de a; y cuando λ aumenta hasta el punto en que $\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}M} \leq b - a$, entonces $y(x, \lambda)$ tiene al menos un cero.

De manera similar, a medida que λ tiende hacia $+\infty$, el número de ceros de $y(x,\lambda)$ en $[a,b]$ tiende a $+\infty$. Por el Teorema 5.12 se sigue que el n-ésimo cero de $y(x,\lambda)$ situado a la derecha de a se disminuye al aumentar λ y que este cero se mueve continuamente. En definitiva, cuando λ parte de cero y tiende a $+\infty$, hay un número infinito de valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ para los que uno de esos ceros de $y(x,\lambda)$ es b, i.e, $y(b,\lambda) = 0$, y sucesivamente, entra al intervalo $[a,b]$, de manera que $y(x,\lambda_n)$ se anula en a y b y tiene $n-1$ ceros en (a,b).
Probamos ahora que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

En efecto, usando las desigualdades (2.9) que, en este caso, quedan como

$$\frac{m\sqrt{\lambda_n}\,(b-a)}{\pi} < n < \frac{M\sqrt{\lambda_n}\,(b-a)}{\pi}$$

equivalente a,

$$\frac{n^2\pi^2}{M^2\,(b-a)^2} < \lambda_n < \frac{n^2\pi^2}{M^2\,(b-a)^2}$$

tomando limite cuando n tiende a $+\infty$ en la desigualdad anterior, se obtiene el resultado. □

Teorema 5.15. *Para el problema regular de Sturm-Liouville* (5.1), (5.2) *existe un número infinito de valores propios* λ_n, $n \in \mathbb{N}$. *Estos valores propios se pueden ordenar como una sucesión creciente monótona* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Además, la función propias $y_n(x)$ *correspondiente al valor propio* λ_n *tiene exactamente* $n-1$ *ceros en el intervalo abierto* (a,b) .

Demostración. Puede verse la demostración de este teorema en [1] o [8]. □

5.2. Desarrollos en términos de funciones propias

Definición 5.16. En el espacio $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ de las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ acotadas y Riemann integrables se define el producto escalar entre dos funciones $f(t)$, $g(t)$ correspondiente a la función peso $r \in \mathbb{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ como:

$$< f, g >= \int_a^b f(t)\, g^*(t)\, r(t)\, dt,$$

donde g^* es la función conjugada de g.

Observación 5.17. Una función $f \in \mathbb{R}_{\mathbb{C}}([a,b])$ tiene la forma $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ y su conjugada es $f(t) = f_1(t) - if_2(t)$. La integral de Riemann de f es:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + i\int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Cuando las funciones f, g son reales su producto escalar $< f, g >$ es simplemente la integral del producto.

Obviamente, para que este producto escalar tenga sentido es necesario que la integral de la definición anterior exista. Esta condición está garantizada si trabajamos en el espacio de funciones

$$\mathcal{L}_r^2([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} / \parallel f \parallel^2 = \int_a^b \mid f(t) \mid^2 r(t) < \infty\}.$$

En realidad la operación $< \cdot, \cdot >$ que acabamos de definir no es estrictamente un producto escalar, lo que falla es que existen funciones $f(x) \neq 0$ en $[a,b]$ que tienen norma nula $\parallel f \parallel = 0$. Para resolver este problema debemos considerar que una función es la función cero si su norma lo es. Igualmente, dos funciones serán iguales si y solo si su diferencia tiene norma cero. El conjunto obtenido a partir de $\mathcal{L}_r^2([a,b])$ mediante estas identificaciones lo denotaremos por $L_r^2([a,b])$ y es un espacio vectorial de dimensión infinita con producto escalar.

En otras palabras, lo que hacemos no es más que considerar clases de equivalencia de funciones: $f \sim g$ siempre que $\parallel f - g \parallel = 0$. El espacio cociente $\dfrac{\mathcal{L}_r^2([a,b])}{\sim}$ es lo que denotamos por $L_r^2([a,b])$. El producto escalar en $L_r^2([a,b])$ dota a este espacio de funciones de una estructura matemática que se conoce con el nombre de espacio de Hilbert.

Definición 5.18. El conjunto de las funciones propias ortogonales de un sistema de Sturm–Liouville se dice completo si cualquier función arbitraria $f \in L_r^2([a,b])$ se puede expresar de forma única como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x),\, x \in [a,b], \tag{5.11}$$

donde la serie converge a $f(x)$ en $L_r^2([a,b])$ y los coeficientes son dados por

$$a_n = \frac{< f(x), y_n(x) >}{< y_n(x), y_n(x) >}, \quad n \in \mathbb{N}$$

En este caso se dice que y_n forma una base ortogonal del espacio $L_r^2([a,b])$.

Si un conjunto ortogonal no es completo siempre puede ser extendido añadiendo nuevos elementos hasta formar una base ortogonal.

Definición 5.19. Una serie de funciones propias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x)$ se dice convergente a $f(x)$ en $L_r^2([a,b])$ si

$$\lim_{n\to\infty} \| f - s_n \| = 0,$$

donde $s_n(x) = \sum_{r=1}^{n} a_r y_r(x)$ es la n-ésima suma parcial de la serie (5.11).
Equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b | f(x) - \sum_{r=1}^{n} a_r y_r(x) |^2 \, r(x)\, dx = 0.$$

Recordamos que, en términos de operadores, la ecuación de Sturm-Liouville se escribe como

$$Ly(x) = -\lambda y(x),$$

donde el operador de Sturm-Liouville L viene dado por

$$L = \frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + \frac{q(x)}{r(x)}.$$

Hemos visto que L es autoadjunto (consecuencia de la fórmula de Green), sus autovalores λ_n son reales y sus autofunciones y_n correspondientes forman un conjunto ortogonal. Además las autofunciones y_n constituyen un conjunto completo de $L_r^2([a,b])$. La demostración se puede encontrar en [5] o [7]. Por lo que, si tenemos una sucesión de funciones ortogonales, podemos usarla para construir desarrollos en serie de amplia clase de funciones del espacio $L_r^2([a,b])$.

Definición 5.20. Se dice que una función $g(x)$ es continua a trozos en $[a,b]$ si podemos dividir en subintervalos $[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \ldots \cup [x_n,b]$ de modo que:
(i) g es continua en cada (x_k, x_{k+1}),
(ii) los limites laterales de g en cada x_k existen y son finitos.

Si $\{y_n(x)\}$ es un sistema ortonormal con respecto de $r(x)$ en $[a,b]$, i.e,

$$\int_a^b y_m(x)\, y_n(x)\, r(x)\, dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Utilizando la teoría de series de Fourier podemos desarrollar una función $f(x)$ continua a trozos en $[a,b]$, en términos de estas funciones; es decir, $f(x)$ tiene la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \tag{5.12}$$

donde $c_1, c_2, c_3, \ldots$ son constantes a determinar.
Tal desarrollo se denomina desarrollo ortogonal, o serie de Fourier generalizada.

Utilizamos que el sistema $y_n(x)$ es ortogonal para determinar las constantes $c_n, n \in \mathbb{N}$. Entonces multiplicamos (5.12) por $y_m(x) r(x)$ e integramos para obtener

$$\int_a^b f(x) y_m(x) r(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b y_n(x) y_m(x) r(x) \, dx,$$

donde hemos supuesto que podemos integrar término a término.
Como el sistema es ortogonal con respecto de $r(x)$, cada integral de lado derecho de la igualdad anterior se anula excepto cuando $n = m$.
Al despejar c_m, teniendo en cuenta que el sistema $\{y_n\}$ es ortonormal, obtenemos para cada $m \in \mathbb{N}$ que

$$c_m = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x) y_m(x) r(x) \, dx}{\int_a^b y_m^2(x) r(x) \, dx} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x) y_m(x) r(x) \, dx}{\| y_m \|^2} = \int_a^b f(x) y_m(x) r(x) \, dx.$$

Por lo tanto si el sistema $\{y_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ es ortonormal con respecto de una función de peso positiva $r(x)$ en $[a, b]$, entonces podemos asociar a cada función continua por partes un desarrollo ortogonal

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x),$$

donde

$$c_n = \int_a^b f(x) y_n(x) r(x) \, dx. \tag{5.13}$$

Las funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales con respecto de $r(x)$ para un problema regular de Sturm-Liouville con valores en la frontera. Por lo tanto podemos usar las funciones propias para formar un sistema ortogonal con respecto de $r(x)$, sin más que normalizar a cada función propia y_n, de modo que

$$\int_a^b y_n^2(x) r(x) \, dx = 1.$$

Ahora veamos algunos teoremas referentes al tipo de convergencia que puede esperarse de una serie de autofunciones de un problema de Sturm-Liouville.

Teorema 5.21. *Si $f \in L_r^2[a, b]$, entonces la serie de Fourier generalizada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

converge en $L_r^2[a, b]$ a f en el intervalo $[a, b]$.

Demostración. Ver [14]. □

Teorema 5.22. *Sea* $\{y_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ *un sistema ortonormal de funciones propias del problema regular de Sturm-Liouville* (5.1) *con valores en la frontera* (5.2).
Sea f *una función continua en* $[a,b]$, *con* f' *continua a trozos en* $[a,b]$. *Si* f *satisface las condiciones en la frontera en* (5.2), *entonces*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{5.14}$$

donde c_n *está dada por* (5.13).
Además, el desarrollo en términos de funciones propios en (5.14) *converge uniformemente en* $[a,b]$.

Demostración. Ver [13]. □

Notemos que este teorema expresa la convergencia uniforme de desarrollos en términos de funciones propias.

Teorema 5.23. *(Convergencia puntual de una serie de Fourier) Si* f *y* f' *son continuas a trozos en* $[-\pi,\pi]$, *entonces para cualquier* $x \in (-\pi,\pi)$, *la serie de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

converge a $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, *donde*

$$f(x^+) := \lim_{h\to 0^+} f(x+h), \quad f(x^-) := \lim_{h\to 0^+} f(x-h)$$

y a_n *y* b_n *están dados por:*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Demostración. Ver [9] y [10]. □

Existen otros resultados relativos a la convergencia puntual de los desarrollos en términos de funciones propias, similares a los resultados para series de Fourier, veamos uno de estos resultados de la convergencia puntual de desarrollos en términos de funciones propias.

Teorema 5.24. *(convergencia puntual) Sea* $\{y_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ *un sistema ortonormal de funciones propias para el problem regular de Sturm-Liouville* (5.1) *con valores en la frontera* (5.2).

Sean f *y* f' *continuas a trozos en* $[a,b]$*. Entonces, para cualquier* x *en* (a,b) *se tiene que la serie de Fourier generalizada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

converge a $\frac{1}{2}\left[f\left(x^{+}\right)+f\left(x^{-}\right)\right]$*, donde* c_n *están dadas por* (5.13)*.*

Demostración. La demostración es análoga al del teorema 5.23 cambiando la base de Hilbert

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n\in\mathbb{N}\right\}$$

por la base de autofunciones $y_n(x)$. □

Observación 5.25. Como es habitual, escribiremos $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$ tanto si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$ converge a $y(x)$ en $L_r^2([a,b])$ como puntualmente, es decir, usaremos el mismo símbolo "$=$" para indicar distintos tipos de convergencia de la serie.

5.2.1. Teorema de la alternativa de Fredholm

Si consideramos la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right]+(q(x)+\mu r(x))\,y(x)=f(x), \quad x\in[a,b], \tag{5.15}$$

junto con las condiciones de contorno regulares (llamados de Robin)

$$\begin{cases} a_1 y(a)+a_2 y'(a)=0, \\ b_1 y(b)+b_2 y'(b)=0. \end{cases} \tag{5.16}$$

donde μ es un parámetro real arbitrario y L viene dado por (1.4). Asumimos que $q,r\in C[a,b]$, $p\in C^1[a,b]$ y $p(x)>0$, $r(x)>0$ en $[a,b]$. El término f se conoce como término fuente. Cuando $f=0$, obtenemos el problema de Sturm-Liouville homogéneo.

La ecuación de Sturm-Liouville no homogénea se expresa en términos de operadores como

$$(L+\mu)\,y(x)=\frac{f(x)}{r(x)}. \tag{5.17}$$

Para el problema no homogéneo (5.15), (5.16) supongamos que la solución y se puede expresar en términos de funciones propias y_n, $n=1,2,\ldots$, del correspondiente problema homogéneo (el de $f=0$) con las condiciones de contorno (5.16), es decir, $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$.

Notemos que que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$ satisface las condiciones de contorno (5.16) ya que cada y_n lo hace.
Si sustituimos la expresión en serie de y en (5.15) obtenemos que

$$\left(p(x)\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)\right]'\right)' + (q(x) + \mu r(x)) \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) = f(x). \tag{5.18}$$

En la demostración del siguiente teorema asumimos que podemos intercambiar las operaciones de suma y diferenciación en la igualdad (5.18), i.e,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\left(p(x) y_n'(x)\right)' + q(x) y_n(x)\right] + \mu r(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) = f(x).$$

Teorema 5.26. *(Teorema de la alternativa de Fredholm)*
Sea $-\lambda_n$ el autovalor n-ésimo del operador L, e y_n su autofunción correspondiente:

$$L\psi_n = -\lambda_n \psi_n. \tag{5.19}$$

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y $\frac{f}{r}$ satisface las hipótesis del teorema 5.24. Entonces se verifica las siguientes propiedades:

(*a*) *Si $\mu \neq \lambda_n$, entonces:*
  1. *El problema homogéneo $(L + \mu) y = 0$ no tiene solución.*
  2. *El problema no homogéneo $(L + \mu) y(x) = \frac{f(x)}{r(x)}$ sí tiene solución única.*

(*b*) *Si $\mu = \lambda_n$, entonces:*
  1. *El problema homogéneo $(L + \lambda_n) y = 0$ tiene la solución y_n.*
  2. *El problema no homogéneo $(L + \lambda_n) y(x) = \frac{f(x)}{r(x)}$ tiene solución si y sólo*

  si y_n es ortogonal al término fuente $\frac{f}{r}$, $< y_n, f/r >= 0$. En este caso la solución no es única pues contiene un múltiplo arbitrario de y_n.

Demostración. Seguiremos la demostración dada en [14].
Expresamos tanto la solución y del problema no homogéneo (5.17) como el término fuente $\frac{f}{r}$, en serie de las autofunciones $\{y_n\}$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x),$$

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n(x).$$

con

$$b_n = \frac{< y_n, f/r >}{\parallel y_n \parallel^2} = \frac{1}{\parallel y_n \parallel^2} \int_a^b y_n(x) f(x) dx. \tag{5.20}$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.17) se obtiene que

$$(L + \mu) \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n(x)$$

o, teniendo en cuenta (5.19),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\mu - \lambda_n) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n,$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [c_n (\mu - \lambda_n) - b_n] y_n = 0.$$

Para que esto se verifique, debe cumplir que cada uno de los coeficientes de y_n se anula y por lo tanto

$$(\mu - \lambda_n) c_n = b_n. \tag{5.21}$$

Distinguimos dos casos al resolver la ecuación anterior:
(a) $\mu \neq \lambda_n$ para todo n, en este caso (5.21) se reduce a

$$c_n = \frac{b_n}{(\mu - \lambda_n)}, \forall n. \tag{5.22}$$

Así que la solución y puede escribirse como

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\mu - \lambda_n} y_n(x)$$

donde los coeficientes b_n están dados por (5.20), i.e,

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\parallel y_n \parallel^2} \frac{\displaystyle\int_a^b y_n(x) f(x)}{(\mu - \lambda_n)} y_n(x).$$

Si el problema fuese homogéneo ($f = 0$), entonces $b_n = 0$ y de (5.22) se obtiene que $c_n = 0$. Esto implica que la solución del problema homogéneo es la solución trivial nula. Es decir, el problema homogéneo

$$(L + \mu) y(x) = 0$$

con $\mu \neq \lambda$ tiene únicamente la solución trivial.

(b) $\mu = \lambda_m$ para un m dado. En este caso usando (5.21) se deduce que

$$(\lambda_m - \lambda_n)\, c_n = b_n. \tag{5.23}$$

Obviamente, en este caso el problema homogéneo $(L+\mu)\, y(x) = (L+\lambda_m)\, y(x) = 0$ sí tiene solución no trivial y ésta es justamente la autofunción y_m: $y(x) = y_m(x)$.

En cuanto al problema no homogéneo distinguimos dos posibilidades:

1. Si $b_m \neq 0$, la ecuación (5.23) para $n = m$ es imposible ya que ningún c_m puede satisfacer la ecuación $0 \cdot c_m = b_m \neq 0$. Concluimos que, en este caso, no existe solución del problema no homogéneo.
2. Si $b_m = 0$, entonces $< y_m, f/r >= 0$, por lo tanto la ecuación (5.23) se reduce a $0 \cdot c_m = 0$, la cual tiene solución para cualquier constante c_m arbitraria. Por tanto, la solución del problema no homogéneo existe,
$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) = \sum_{n \neq m} \frac{b_n}{\lambda_m - \lambda_n} y_n + c_m y_m,$$
pero no es única pues la constante c_m puede tomar cualquier valor. $\square$

Bibliografía

[1] R. P.Agarwal, D. O'Regan: *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer, 2008.

[2] R. Kent Nagle, E. Saff, A. David Snider: *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, Pearson Educación, México, 2005.

[3] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo: *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, Editorial AC, 1992.

[4] J. Sotomayor: *Liçoes de equaçoes diferenciais ordinarias.* Ed. IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 1942.

[5] H. F. Weimberger : *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales con métodos de variable Compleja y de Transformaciones integrales*, Editorial. Reverté, S.A, 1970.

[6] F. Simmons: *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Historicas*, McGRAW-HILL, México, 1972.

[7] N. Young: *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, 1997.

[8] Tyn Myint-U: *Ordinary Differential Equations.* North-Holland, Nueva York, 1978.

[9] Tyn Myint-U: *Partial Diferential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier North Holland, Nueva York, 1980.

[10] N. J. DeLillo: *Advanced Calculus with Applications*, Mcamillan, Nueva York, 1982.

[11] A. Benedek y R. Panzone: *Lecciones sobre métodos y resultados básicos de la teoría de Sturm-Liouville y algunas de sus generalizaciones*, INMABB-CONICET,Universidad nacional del sur-Argentina, BAHIA-BLANCA,Argentina, 1985.

[12] R. Courant y D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, Wiley, Nueva York, 1962.

[13] E. Coddington y N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, Krieger, Nueva York, 1984.

[14] R. P.Agarwal, D. O'Regan: *Ordinary and Partial Differential Equations*, Springer, 2009.