ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LA REGRESIÓN EN EL CONTEXTO DE POBLACIONES FINITAS

Carlos Luis Iglesias Patiño
Departamento de Estatística e Investigación Operativa
Universidade de Santiago de Compostela

Tesis Doctoral



USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

El Prof. Dr. Wenceslao González Manteiga, del Departamento de Estatística e Investigación Operativa de la Universidade de Santiago Compostela informa que la memoria titulada:

ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LA REGRESIÓN EN EL CONTEXTO DE POBLACIONES FINITAS

fue realizada bajo su dirección por Don Carlos Luis Iglesias Patiño, estimando que el interesado se encuentra en condiciones de optar al grado de Doctor, por lo que solicita que sea admitida a trámite para su lectura y defensa pública en la Facultade de Matemáticas de la Universidade de Santiago de Compostela.

En Santiago de Compostela, a 1 de febrero de 2014

El director:

Prof. Dr. Wenceslao González Manteiga

El doctorando: Carlos Luis Iglesias Patiño

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Estimación no paramétrica de la regresión en el contexto de poblaciones finitas

(*"Nonparametric estimation of the regression function in the framework of finite populations"*)

por

Carlos Luis Iglesias Patiño

Tesis presentada para optar al grado de Doctor en la Universidad de Santiago de Compostela

Departamento de Estatística e Investigación Operativa
Universidade de Santiago de Compostela
Santiago de Compostela, Galicia (*Spain*)

Director:

Prof. Dr. Wenceslao González Manteiga

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Resumen

Estimación no paramétrica de la regresión en el contexto de poblaciones finitas

C.L. Iglesias Patiño

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Santiago de Compostela
Santiago de Compostela
Tesis doctoral
2014

Se proponen y estudian estimadores para los suavizadores habituales correspondientes a la población finita: regresograma, núcleo y lineal local. Posteriormente también se emplean para estimar la función de regresión subyacente. Los resultados obtenidos se aplican al estudio de la relación entre dos variables relativas al hábitat, en sentido social, de Galicia (rural, urbano y la transición entre éstos).

Abstract

Nonparametric estimation of the regression function in the framework of finite populations

C.L. Iglesias Patiño

Department of Statistics and Operational Research
University of Santiago de Compostela
Santiago de Compostela (Spain)
Doctor dissertation
2014

Regression estimators based on the usual smoothers (regressogram, kernel and local linear), adapted to the finite population setting, are proposed and studied. Later on, they are also used to estimate the underlying regression. The results are applied to study the relation between two variables indicative of the habitat, in a social sense, in Galicia (rural, urban and the transition from one to the other).

Resumo

Estimación non-paramétrica da regresión no contexto de poboacións finitas

C.L. Iglesias Patiño

Departamento de Estatística e Investigación Operativa
Universidade de Santiago de Compostela
Santiago de Compostela
Tese de doutoramento
2014

Propóñense e estúdanse estimadores para os suavizadores habituais correspondentes á poboación finita: regresograma, cerne (núcleo) e linear local. Posteriormente tamén se empregan para estimar a función de regresión subxacente. Os resultados obtidos aplícanse ao estudo da relación entre dúas variábeis relativas ao hábitat, no senso social, de Galicia (rural, urbano e a transición entre estes).

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, consciente o inconscientemente, han colaborado para que se concluyera este trabajo, en particular, al profesor Wenceslao González Manteiga.

Esta memoria ha sido financiada en parte por el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), MTM2008-03010.

Índice general

1. Preliminares **18**

1.1. Introducción 18

1.1.1. Distinción entre población finita y población "infinita" 19

1.1.1.1. Marco 20

1.1.1.2. Censo y muestra 21

1.1.2. Fuentes de aleatoriedad 21

1.1.2.1. Estimación desde dos ópticas 21

1.1.2.2. Introducción a los modelos en muestreo 22

1.1.2.3. Posibles abusos en la utilización de modelos 23

1.1.3. Estudios descriptivos frente a estudios analíticos 24

1.1.4. Parámetros a estimar 25

1.2. No paramétrica y muestreo 26

1.2.1. Desarrollos pioneros en regresión no paramétrica 27

1.2.1.1. Graunt 27

1.2.1.2. Boskovich 28

1.2.1.3. Engel 28

1.2.1.4. Theil-Sen 29

1.2.1.5. Tukey-Cleveland 29

1.2.2. Precursores y fundadores del muestreo 30

1.3. Antecedentes 31

1.3.1. Bellhouse&Stafford(1999) 32

1.3.2. Breidt&Opsomer(2000) 32

1.3.3. Lombardía(2002) 32

1.3.4. Buskirk&Lohr(2005) 33

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

1.3.5. Opsomer&Miller(2005) . . . 33
1.3.6. Harms&Duchesne(2010) . . . 33
1.3.7. Otras referencias relacionadas . . . 34
1.4. Justificación ante aportaciones concurrentes . . . 34

2. Planteamiento del problema **37**
2.1. Motivación . . . 37
2.2. Plan de muestreo . . . 38
2.2.1. Probabilidades de inclusión . . . 40
2.2.1.1. Media y varianza de combinaciones lineales de indicadoras . . . 41
2.2.2. Estimador de Narain-Horvitz-Thompson . . . 43
2.2.2.1. Varianza del estimador HT . . . 43
2.2.2.2. Notaciones de aplicación general . . . 44
2.2.3. Diseños de tamaño fijo . . . 45
2.2.3.1. Fórmula de Yates-Grundy-Sen . . . 45
2.2.4. MASS/R desde la óptica de la $\pi-$estimación . . . 46
2.2.4.1. Estimador de la media y del total . . . 48
2.2.4.2. Estimador de la proporción . . . 50
2.2.5. Consistencia . . . 51
2.3. Tratamiento asintótico . . . 51
2.4. Modelo de regresión o de diseño fijo . . . 53
2.4.1. Diseño regular . . . 53
2.4.2. Modelo de superpoblación . . . 54
2.5. Resultados generales . . . 56
2.5.1. Resultados relativos a los descriptores . . . 56
2.5.1.1. Población finita con dos y tres variables . . . 60
2.5.1.2. Población finita con cuatro variables . . . 65
2.5.1.3. Población finita con cinco variables . . . 67
2.5.2. Resultados generales relativos al plan . . . 74

3. Regresograma **95**
3.1. Definiciones, notaciones y resultados previos . . . 95
3.1.1. Motivación y definición del estimador . . . 95

3.1.1.1. Motivación . . . 96
3.1.1.2. Definición del estimador . . . 99
3.1.2. Notaciones y resultados auxiliares . . . 99
3.2. Estudio del sesgo . . . 103
3.2.1. $p-$Insesgadez asintótica . . . 103
3.2.2. Estudio de la esperanza condicionada . . . 105
3.2.3. Insesgadez aproximada según el diseño fijo . . . 107
3.2.4. Conclusión del sesgo . . . 113
3.3. Estudio de la $p-$varianza . . . 114
3.3.1. Introducción a la $p-$varianza . . . 114
3.3.1.1. Resultados previos . . . 117
3.3.1.2. Estudio de la suma del término principal de la $p-$varianza . . . 127
3.3.2. Estudio de $S^2_{B_{x,h_n}}$ . . . 128
3.4. Estudio de la varianza promedio . . . 131
3.4.1. $\xi-$Esperanza de $\alpha^2_H(x)$ . . . 132
3.4.2. $\xi-$Esperanza de $S^2_{B_{x,h_n}}$ . . . 133
3.4.3. Conclusión de la varianza promedio . . . 138
3.5. $\xi-$Varianza de la $p-$esperanza . . . 140
3.6. Varianza total . . . 142
3.6.1. Revisita a la varianza promedio . . . 142
3.6.2. Conclusión de la varianza . . . 142

4. Estimador de Nadaraya-Watson **147**
4.1. Definiciones, notaciones y resultados previos . . . 147
4.1.1. Motivación y definición del estimador . . . 147
4.1.1.1. Motivación . . . 147
4.1.1.2. Definición del estimador . . . 151
4.1.2. Notaciones y resultados auxiliares . . . 151
4.1.2.1. Aproximaciones de sumas por integrales . . . 152
4.1.2.2. Resultados auxiliares relativos al plan de muestreo . . . 156
4.2. Sesgo según el plan de muestreo . . . 195
4.2.1. Estudio de C . . . 198
4.2.2. Estudio del orden de los demás términos . . . 199

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

4.2.2.1. Estudio de B1 . . . 201
4.2.2.2. Estudio de A . . . 202
4.2.2.3. Expresión alternativa del término dominante . . . 202
4.2.3. Conclusión del sesgo según el plan . . . 203
4.3. Sesgo total . . . 204
4.3.1. $\xi-$Esperanza de los términos dominantes del sesgo según el plan . . . 204
4.3.1.1. $\xi-$Esperanza de B1 + A en caso de núcleo con soporte compacto 204
4.3.1.2. $\xi-$Esperanza de A . . . 206
4.3.1.3. $\xi-$Esperanza de B1+ A . . . 209
4.3.2. Término residual del sesgo . . . 209
4.3.2.1. Tratamiento del máximo . . . 210
4.3.2.2. Resto de términos . . . 212
4.3.3. $\xi-$Esperanza del descriptor . . . 213
4.3.3.1. Caso del núcleo general . . . 214
4.3.3.2. Caso del núcleo simétrico . . . 216
4.3.3.3. Caso del núcleo de soporte compacto . . . 217
4.3.3.4. Caso del núcleo simétrico y de soporte compacto . . . 219
4.3.4. Conclusión del sesgo total . . . 221
4.4. Varianza según el plan de muestreo . . . 223
4.4.1. Sesgo de $\hat{\alpha}_S^2$ según el plan . . . 224
4.4.2. Estudio de $2\alpha_S B_p(\hat{\alpha}_S)$ . . . 240
4.4.3. Cuadrado del sesgo del estimador S según el plan . . . 242
4.4.4. Conclusión de la varianza según el plan . . . 242
4.5. Varianza promedio . . . 255
4.5.1. Núcleo con soporte compacto . . . 255
4.5.2. Núcleo en general . . . 261
4.6. $\xi-$Varianza de la $p-$esperanza . . . 264
4.6.1. $\xi-$Varianza del descriptor . . . 264
4.6.2. $\xi-$Varianza del sesgo según el plan . . . 265
4.6.3. Termino de la covarianza . . . 267
4.6.4. Conclusión . . . 267
4.7. Conclusión de la varianza . . . 268

4.7.1. Núcleo de soporte compacto . . . 268
4.7.2. Núcleo en general . . . 270

5. Suavizador lineal local **272**

5.1. Definiciones, notaciones y resultados previos . . . 272
5.1.1. Notaciones y resultados auxiliares . . . 272
5.1.2. Estadístico de la población finita o descriptor . . . 286
5.1.2.1. Estudio del denominador . . . 287
5.1.2.2. Expresiones alternativas del descriptor . . . 289
5.1.2.3. Estimadores diversos . . . 293
5.2. Estudio del sesgo del estimador L según el plan . . . 355
5.2.1. Segundo sumando, C . . . 355
5.2.2. Sesgo del estimador I según el plan . . . 357
5.2.3. C21 . . . 361
5.2.4. C22 . . . 366
5.2.5. C3 . . . 371
5.2.6. C4 . . . 372
5.2.7. Tratamiento conjunto de C4111 y C311 . . . 377
5.3. Estudio del sesgo promedio del estimador L . . . 382
5.3.1. Sesgo promedio del estimador I . . . 382
5.3.2. Términos adicionales del estimador L . . . 389
5.3.3. Momentos de la diferencia dividida máxima . . . 396
5.3.3.1. $\xi-$Esperanza de la diferencia dividida máxima . . . 396
5.3.3.2. Momento de orden 2 según el diseño . . . 397
5.4. Sesgo total . . . 398
5.4.1. Sesgo del descriptor L . . . 398
5.4.2. Conclusión: sesgo total . . . 402
5.4.2.1. Estimador I . . . 402
5.4.2.2. Estimador L . . . 402
5.5. Estudio de la $p-$varianza . . . 404
5.5.1. Desarrollo para su aproximación . . . 404
5.5.2. $p-$Varianza del estimador I . . . 405
5.5.3. Segundo término de la $p-$varianza . . . 406

5.5.4. Tercer término y conclusión de la $p-$varianza . . . 410
5.6. Estudio de la varianza promedio . . . 411
5.6.1. Resultados auxiliares . . . 411
5.6.2. $\xi-$Varianzas de α_L y de β_L . . . 416
5.6.2.1. $\xi-$Esperanza de α_L . . . 416
5.6.2.2. $\xi-$Varianza de α_L . . . 417
5.6.2.3. $\xi-$Varianza de β_L . . . 418
5.6.3. Varianza promedio del estimador I . . . 420
5.6.4. $\xi-$Esperanza de DII . . . 427
5.6.5. $\xi-$Esperanza de DIII . . . 428
5.7. $\xi-$Varianza de la $p-$esperanza . . . 429
5.7.1. Estimador I . . . 429
5.7.1.1. $\xi-$Varianza del sesgo según el plan . . . 429
5.7.1.2. Conclusión para el estimador I . . . 432
5.7.2. Estimador L . . . 433
5.7.2.1. $\xi-$Varianza de la $p-$esperanza . . . 433
5.7.2.2. $\xi-$Varianza del término extra del sesgo según el plan . . . 434
5.7.2.3. $\xi-$Varianza del resto . . . 435
5.7.2.4. Términos de las covarianzas . . . 435
5.7.2.5. Conclusión general . . . 436
5.7.3. Estudio de la $\xi-$varianza de la diferencia dividida máxima . . . 436
5.8. Varianza total . . . 437
5.8.1. Estimador L . . . 437
5.8.2. Estimador I . . . 438

6. Estudio con datos reales **439**
6.1. Introducción . . . 439
6.2. Descripción de la población finita . . . 441
6.2.1. Universo. Variables estadísticas . . . 441
6.2.2. Marco. Variable previa . . . 441
6.2.2.1. Histograma del marco . . . 443
6.2.2.2. Descriptor PR . . . 445
6.2.3. Población finita . . . 446

6.2.3.1. Diagrama de dispersión . . . 446
6.2.3.2. Descriptor H de la regresión . . . 447
6.3. Estudio de la muestra . . . 451
6.3.1. Histograma de la muestra . . . 451
6.3.2. Estimador PR del relieve . . . 451
6.4. Estimador H de la regresión . . . 452
6.5. Estimador S . . . 454
6.5.1. Sintonización . . . 454
6.5.2. Selección asistida . . . 456
6.5.3. Selección automática . . . 457
6.6. Estimador L . . . 461
6.6.1. Estimador compensatorio . . . 463
6.6.1.1. Revisita a la selección asistida . . . 463
6.6.1.2. Componente alfa . . . 466
6.6.1.3. Componente beta . . . 466
6.6.2. Sintonización . . . 467
6.6.3. Selección asistida . . . 467
6.6.4. Selección automática . . . 469
6.7. Selección por sustitución . . . 472
6.7.1. Estimador H de la regresión . . . 473
6.7.1.1. Local . . . 475
6.7.1.2. Global . . . 476
6.7.2. Estimador S de la regresión . . . 477
6.7.2.1. Local . . . 477
6.7.2.2. Global . . . 479
6.7.3. Estimador L . . . 479
6.7.3.1. Local . . . 479
6.7.3.2. Global . . . 480
6.7.4. Aplicación al caso real . . . 481
6.8. Estudio de simulación . . . 483

7. Epílogo **485**

7.1. Conclusiones generales . . . 485

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

7.1.1. Sesgo y varianza según el plan de muestreo 486
7.1.2. Componentes de la varianza 488
7.1.3. Sesgo y varianza total 488
7.2. Conclusiones prácticas 489
7.3. Extensiones 492
7.3.1. Planes complejos 492
7.3.2. Otras extensiones 492

Presentación

Se está asistiendo a una época de gran desarrollo de la inferencia en poblaciones finitas, basta con comparar los Handbook of Statistics 6 y 29 relativos a muestreo para darse cuenta de ello. El último está editado en dos volúmenes debido a su extensión. Mientras en el primero de estos manuales, Krishnaiah&Rao(1988), apenas aparecían referencias a la no paramétrica, en el segundo, Pfeffermann&Rao(2009), hasta se incluye un capítulo específico, Breidt&Opsomer(2009).

Es decir se ha producido un proceso de convergencia entre el muestreo en poblaciones finitas y la regresión no paramétrica a finales de los noventa y, principalmente, a principios de este siglo XXI. En Wang&Bellhouse(2009), se referencia parte de este proceso.

Antes de esta época discurrían en paralelo, ya existía una inquietud en torno a la relación entre la regresión lineal y el muestreo en poblaciones finitas aunque orientada hacia cantidades que describen la población o a parámetros relacionados con ellas. Para profundizar se puede recurrir al manual Fuller(2009).

Aunque cabría remontarse a Hansen,Hurwitz&Madow(1953) con el estimador de la regresión, es con Särndal,Swensson&Wretman(1992) que se produce un impulso notable en el tema e, incluso, comienza a calar en los organismos públicos productores de estadística. Mientras, la estimación no paramétrica de curvas se va desarrollando paulatinamente tanto en las curvas tratadas como en los métodos empleados y se llega, a mediados de los noventa, a que los polinomios locales comiencen a formar parte del saber convencional. Para un resumen se puede consultar la introducción de Breidt&Opsomer(2009).

La aproximación asistida por el modelo es la más empleada según Wang&Bellhouse(2009), aunque también se desarrolla la basada en el modelo. Dentro de esta última, Rueda&Sánchez-Borrego(2009) presentan un nuevo estimador de la media de la población basado en la regresión polinómica local y, en su introducción, tratan la controversia entre la inferencia basada en el modelo y la basada en el diseño, así como la aproximación asistida por el modelo.

Breidt&Opsomer(2009) también tratan estas dos aproximaciones, basada y asistida, además de diferentes técnicas no paramétricas, diversos campos de aplicación e, incluso, un acercamiento a la estimación de parámetros del modelo. Con respecto a este último punto cabe citar a Harms&Duchesne(2010). Para un estudio más profundo de la inferencia analítica se puede consultar Binder&Roberts(2009), Pfeffermann&Sverchkov(2009) o la obra colectiva Chambers&Skinner(2003).

En esta monografía se estudiarán dos caracteres cuantitativos, designados variables $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, en cada elemento de un universo finito, que se denominará unidad estadística cuando esté perfectamente identificado. Todas las unidades estadísticas junto con su respectivo par de valores de

$\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ constituyen la población finita. Interesa estudiar la relación entre $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$, en concreto, expresar $\mathcal{Y}$ como función de $\mathcal{X}$. Para aproximar esta función se consideran tres estadísticos, el regresograma, el de Nadaraya-Watson y el suavizador lineal local, que constituyen tres parámetros de la población finita que se podrían determinar si se realizase el censo o cualquier operación estadística exhaustiva sobre ella.

Por brevedad, se denominará sobrevisión a la operación estadística. En general, serán desconocidos esos parámetros y para estimarlos la sobrevisión se realizará parcialmente, por muestreo, siguiendo un diseño muestral probabilístico de tamaño fijo.

Se define un estimador para cada uno de estos parámetros de la población finita de forma rigurosa. Para los dos primeros su definición coincide con la ya propuesta en la literatura de regresión no paramétrica estándar. Para el tercero se construye, explicando su génesis, una definición distinta de la de Breidt&Opsomer(2000) que supera el problema de los denominadores nulos de Harms&Duchesne(2010). En esta construcción, se emplea el estimador más natural para el parámetro de la población finita con una extensión para el caso de que los denominadores sean nulos, en línea con las dos definiciones anteriores.

Una de las características de estas definiciones es que son intuitivas y, por tanto, fácilmente explicables a un no especialista en la materia. Se procurará además que se vuelvan operativas, dentro de la filosofía de que lo riguroso desde una visión matemática no está reñido con lo pragmático.

Se estudiarán el sesgo y la varianza según el diseño muestral de los tres estimadores. Este estudio del estimador con relación al parámetro de la población finita correspondiente se realiza dentro del muestreo clásico de poblaciones finitas.

Se aparta de la corriente principal, aproximación basada en el modelo o asistida por él. Vuelve a un muestreo de lo más tradicional tanto en lo que se refiere a la aproximación (inicialmente solo se considera el diseño muestral) como en el método, evita la linealización.

Mediante desarrollos elementales, se intentará expresar el sesgo y la varianza según el diseño muestral como una suma da varios términos. Como las expresiones resultantes tendrán un valor práctico limitado, se intentará dar aproximaciones a partir de ellas.

Para ello se introducirá un marco asintótico habitual en la literatura basado en una secuencia anidada de universos en la que se extrae una muestra de cada universo de la cadena de tal modo que la fracción de muestreo no tenga que considerarse como inapreciable necesariamente.

La variable $\mathcal{X}$ tiene valores fijos, es decir, si la misma unidad apareciera en distintas muestras tomaría el mismo valor de $\mathcal{X}$. Un ejemplo claro de $\mathcal{X}$ fija es aquella en que constituye una variable previa que está o podría estar en el marco. Además $\mathcal{X}$ está contenida en un mismo segmento para todos los universos de la cadena.

Para el tratamiento asintótico, se admite que esta variable obedece a un diseño regular, es decir, si se calcula la función de distribución de $\mathcal{X}$ para cada universo de la cadena, se obtiene una sucesión de funciones de distribución a la que se impone que converja a una función de distribución con derivada que constituye una función de densidad asintótica del diseño suave.

Se estudiará el orden de cada uno de los términos distinguiendo entre unos sumandos dominantes y el resto de sumandos. Este estudio pormenorizado de los sumandos implica tratar con probabilidades de inclusión en la muestra de orden superior a dos lo que conduce a que se acabe por

restringir el diseño a muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento.

También implicará analizar qué condiciones se deben imponer sobre la ventana y la regularidad de la función de densidad asintótica del diseño fijo para que el resto de los sumandos resulten de menor orden de magnitud además de que tenga densidad asintótica no nula, llegando a necesitarse que el diseño regular sea sin repeticiones.

Se acaba por dar unos resultados asintóticos sin emplear la técnica de linealización y el subsiguiente tratamiento de los restos. Se obtienen expresiones aproximadas con restos en forma analítica evitando tratar con órdenes en probabilidad.

Posteriormente, se admite que la variable $\mathcal{Y}$ es una variable aleatoria, que se puede expresar como una función de $\mathcal{X}$, la función de regresión, más una componente estocástica que se modela mediante el producto de una variable aleatoria por otra función de $\mathcal{X}$, cuyo cuadrado corresponde con la función de varianza.

Por tanto, se empleará un modelo de regresión de localización y escala en que se suele imponer hipótesis de regularidad sobre las funciones de regresión y varianza. Resulta bastante general aunque se puedan concebir situaciones que no se ajusten a él.

Cada uno de los tres estimadores puede considerarse como una variable aleatoria que sirva para estimar tanto el parámetro de la población finita correspondiente como el del modelo, la función de regresión. En el primer caso, ya tratado, solo existía una fuente de aleatoriedad, el diseño muestral. En este segundo, dos fuentes, el diseño muestral y el modelo de superpoblación que, a su vez, motiva los parámetros de la población finita.

El tratamiento de estas dos fuentes de aleatoriedad conduce a que habrá que estudiar para el sesgo total, por una parte, el valor medio (según el modelo) de los sumandos heredados del diseño muestral para ver en qué condiciones son de menor orden de magnitud y, por otra, las condiciones que hay que imponer a la variable aleatoria que multiplica a la raíz de la función de varianza para que el resto de los sumandos se puedan considera también de menor orden de magnitud.

Sin la imposición de estas condiciones podrían heredarse del diseño muestral términos que no serían comparables con los habituales en regresión no paramétrica estándar. Además, el estudio del sesgo del parámetro de la población finita con respecto al parámetro del modelo se realiza con técnicas diferentes de las habituales.

También, se obtendrá la varianza promedio como una de las dos componentes de la varianza total, es decir, el valor medio según el modelo de la varianza según el diseño muestral para cada uno de los tres estimadores, de gran interés en muestreo clásico dado que el modelo es poco exigente.

Los tres métodos presentados en esta memoria, uno diferente para cada estimador, permiten entender mejor la naturaleza de los términos, es decir, en qué condiciones los sumandos que introduce el diseño muestral son inapreciables en promedio y por tanto se pueden omitir o despreciar.

La estructura de la memoria es la de una monografía donde prima la autocontención. Sigue un hilo conductor. El criterio para incluir conceptos, definiciones, ejemplos u objetos en general, es que se vayan a emplear en secciones o capítulos posteriores. Incluso las referencias históricas se realizan siguiendo este criterio.

Se proponen nuevos términos (no ralo, modulación, excentricidad...), tanto para conceptos y técnicas ya conocidos (relieve, sesgo promedio, sintonización...) como para procedimientos que se tienen por nuevos; se estandarizan términos ya acuñados o se proponen traducciones. Donde se pudo, se remontó históricamente en las referencias bibliográficas.

Se articula mediante las secuencias lema, resultado, proposición, teorema, corolario, observación y comentarios aunque en las demostraciones excesivamente largas, porque el número de sumandos en el tratamiento antes explicado puede ser grande, se estructuren incluso en subsecciones sucesivas y luego se reúnan en un enunciado final. Se considera que los enunciados rotulados como resultados son conocidos aunque, como no se disponían en el momento de su demostración, se construyó, por tanto puede ser novedosa. En cualquier caso, aportan un valor de recopilación de un material fragmentario y disperso.

Los lemas contienen cuestiones eminentemente técnicas e instrumentales. Las proposiciones y teoremas se tienen por originales en el contexto en que se tratan. Los corolarios se deducen de ellas y corresponden a consecuencias destacables. También se introducen ejemplos como ilustración o casos notables que se emplean con posterioridad.

Las demostraciones largas implican, en algunos casos, recurrir a unas variaciones locales en la tipografía general por claridad y facilidad de la lectura. Como fruto de tantos desarrollos prolijos se obtienen propiedades de los estimadores principales y de otros secundarios, o indicaciones para obtenerlas, y generalizaciones de resultados y comprobaciones de propiedades necesarias o deseables.

Se intenta ser poco restrictivo en las hipótesis y sustituir ciertas técnicas de análisis matemático por otras de índole más estadístico en la marcha de las demostraciones. El discurso resulta elemental en el sentido de permanecer próximo a los elementos no como sinónimo de fácil.

Aunque el tono de la memoria es fundamentalmente matemático, tiene una orientación práctica pero desde una visión más conceptual que computacional. Profundizar en esta última dimensión implicaría una extensión aún más larga con un consumo enorme de recursos (tiempo, espacio tipográfico...). Las matemáticas no solo constituyen un útil para calcular sino que sirven también para reflexionar, en esta situación, una reflexión profunda de corte clásico.

Se divide en siete capítulos. Los dos primeros de carácter introductorio: el primero, más epistemológico y el segundo, más matemático. En los tres siguientes, se estudian sendos estimadores. Los dos últimos tratan un caso práctico y las conclusiones respectivamente.

En los capítulos 3, 4 y 5, se estudian los tres estimadores antes mencionados. El primero basándose en su forma simple, el segundo empleando unas identidades y el tercero introduciendo un estimador tipo oráculo. Comenzarán estudiando el parámetro de la población finita respectivo. Después, se definirá el estimador propuesto. Se estudiará primero según el diseño muestral y después introduciendo el modelo para obtener su sesgo y varianza total.

Como productos de interés, se obtendrán las expresiones para el sesgo y la varianza según el diseño muestral así como la varianza promedio bajo hipótesis débiles dentro del muestreo clásico constituyendo un regreso a la tradición. La estructura concreta de cada uno de estos tres capítulos se resume al comienzo del mismo.

La elección del caso práctico se realizó atendiendo a varios criterios, entre ellos, su interés tanto en Galicia como en estadística pública, su novedad y las características de la variable $\mathcal{X}$. Se

podía considerar claramente como diseño fijo porque estaba disponible previamente, era continua con origen dentro de un segmento y sin duplicidades, a diferencia de muchos microdatos de libre disposición donde las candidatas a variable $\mathcal{X}$ no se pueden considerar dentro de estas características. También resultaba interesante porque $\mathcal{Y}$ era acotada, en concreto, una proporción que toma valores en el segmento [0,1], que conduce a un modelo esencialmente heteroscedástico.

Aunque estará presente en el desarrollo la aplicación práctica en un órgano de las administraciones públicas productor de estadística, incluso algunas decisiones se toman basándose en criterios de estadística pública, sirve como ejemplo de que los resultados de la investigación se pueden utilizar fuera de este ámbito.

Existen varios abordajes del concepto urbano/rural –hábitat en el sentido social– que se pueden consultar en Goerlich&Cantarino(2013) y en Calvo et al(2013). Uno de estos abordajes es el grado de urbanización, que está sufriendo actualmente un proceso de revisión en la línea de Goerlich&Cantarino(2012) de emplear la rejilla cartográfica.

En este caso práctico también se descenderá del nivel municipal en la desagregación geográfica, como recomiendan estos autores, utilizando como unidad geoestadística lo que se denominará parroquia que, por ahora, no constituye ninguna división administrativa sino que es una partición tradicional y estadística.

El universo de parroquias está formado por las entidades colectivas de población, es decir, las parroquias rurales reconocidas en el propio estatuto de autonomía de Galicia aunque sin desarrollo legislativo, más las entidades singulares no incluidas en colectivas. Tiene un tamaño adecuado: grande, pero no enorme, y tratable ($<$4000). Permite obtener una muestra que represente entre el 5 y el 10 % del universo, es decir, una fracción de muestreo real, con un tamaño muestral adecuado.

Goerlich&Cantarino(2012) se plantean la elección de la entidad singular de población como unidad geoestadística pero la rechazan por cuestiones operativas, por no disponer de base cartográfica para todo el estado. Con respecto a la entidad colectiva, la descartan porque su número solo es relevante en Galicia, Asturias y Murcia. Ahora bien, en Galicia esa base está disponible a nivel parroquial.

La población no se distribuye uniformemente sobre el territorio sino que tiende a concentrarse en núcleos de población (Goerlich&Cantarino, 2012). Otra variable disponible en las mismas fuentes que las empleadas para el grado de urbanización es la población en núcleo. Su relativización, la fracción de población en núcleo, constituiría otro intento de abordaje del problema.

Este nuevo abordaje se alinea con la recomendación de las conclusiones de Goerlich&Cantarino(2012) de superar la excesiva preponderancia que la densidad de población tiene en la determinación del hábitat en el sentido social. Por ello, interesa ver cómo explicaría la variable densidad de población la fracción en núcleo de población.

Tras el estudio de este caso práctico se observará que la redundancia entre la fracción y la densidad era menor de lo esperado. Se conjeturaba una relación creciente y resultó que no es monótona a la vista de las estimas obtenidas mediante la regresión no paramétrica.

En este caso se podría considerar una sobrevisión por muestreo porque no están demarcados los contornos para los núcleos de población existentes (Goerlich&Cantarino, 2012) y, en un futuro, podría interesar su determinación, que en el caso de Galicia sería muy gravosa dado su

número.

Desde una visión más estadístico matemática, se introducirá una metodología original de selección de la ventana que aproveche las definiciones rigurosas de los estimadores y se adecúe al muestreo en poblaciones finitas. Algunas de las técnicas empleadas en ella intentarán fomentar el empleo de la regresión no paramétrica tanto con muestras de tamaño reducido como en el proceso de datos de una sobrevisión.

Como prueba de la unidad de la obra, el capítulo 6 cierra el círculo abierto en el capítulo 3. En este último, se obtendrá un parámetro de la población finita estimable que permita el tratamiento de la heteroscedasticidad. Esto conduce a la necesidad de introducir algunos desarrollos matemáticos dentro del caso práctico, entre ellos, la estimación de ese parámetro.

Asimismo, las definiciones del segundo y tercer estimador no solo son rigurosas sino que acaban por tener valor práctico en la selección de la ventana. No se busca optimalidad, prima que el texto sea autocontenido por tanto faltaría analizar su comportamiento frente a competidoras lo que constituye un problema abierto o una extensión.

Otro sería intentar realizar un estudio semejante al del caso práctico empleando la celda de la rejilla cartográfica como unidad geoestadística en lugar de la parroquia cuando los datos estén disponibles, aunque para Galicia, en un futuro cercano requeriría menos esfuerzo y recursos disponer de información socioeconómica y territorial directa a nivel parroquial que a nivel de cuadro de la rejilla.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Notación y abreviaciones

α, A	se refieren a los momentos con respecto al origen. Los subíndices numéricos indican su orden
a.l.	área local
$\alpha_{(\cdot)}^{[Z]}$	descriptor H, S, I o L de $\mathcal{Z}$. Por antonomasia, $\alpha_{(\cdot)}$ corresponde a $\mathcal{Y}$
$B_{x,h}$	celdilla que contiene a x de amplitud h
$C(\cdot)$	cota
$\mathcal{C}^i$	clase i, funciones con $i-$ésima derivada continua
$D(x)$	denominador del descriptor L
$ECMAI$	error cuadrático medio (asintótico (integrado))
f	fracción de muestreo
$f(\cdot)$	función de densidad asintótica o relieve
F	función de distribución asintótica o relieve acumulado
H	como subíndice o aposición, se refiere a histograma, por ejemplo, f_H descriptor histograma de la densidad
h_H	primera ventana, heurística, para los estimadores histograma
hab	habitante
HT	Horvitz-Thompson
I	como subíndice o aposición, se refiere al estimador ideal
$I_{ijklm}, 1_E$	indicadoras de pertenencia a la muestra y a un subconjunto, respectivamente
$I_{ij}^{a)}$	indicadora aumentada
IGE	Instituto Galego de Estatística
INE	Instituto Nacional de Estadística

$k(n)$	número de celdillas
$K_{h_n}(\cdot)$	$1/h_n K\left((\cdot)/h_n\right)$; en algunos casos se abreviará aún más $K_h(\cdot)$ o incluso K_h
L	como subíndice o aposición, se refiere al lineal; en el caso del estimador, se emplea la nueva definición propuesta
$\Lambda(\cdot)$	constante de Lipschitz
$l_{B_{xh}}, L_{B_{xh}}$	extremos inferior y superior de la celdilla
Log10den1	$\log_{10}(Densidad + 1)$
M	se refiere a los momentos con respecto a la media. Los subíndices indican su orden.
$m(\cdot)$	marca de clase
MASS/R	muestreo aleatorio simple sin remplazamiento
MPF	muestreo en poblaciones finitas
N, n	tamaño del universo y de la muestra, respectivamente. N como subíndice se refiere al universo, por ejemplo, θ_N descriptor
$N_{(\cdot)}, n_{(\cdot)}$	número de elementos del universo y de la muestra, respectivamente, por ejemplo $N_{B_{xh}}$ número de elementos del universo con abscisa en la celdilla que contiene a x que se abrevia N_x
n.p.	núcleo de población
NW	Nadaraya-Watson
p	como subíndice o prefijo se refiere al plan de muestreo $p(\cdot)$, por ejemplo, E_p esperanza según el plan, esta $p-$esperanza también se abreviará $\langle\cdot\rangle$
$\pi_{(\cdot)}$	probabilidad de inclusión
$\mathfrak{P}$(U)	partes de U
$\mathcal{P}$	población
$P_{N,x}, P_x$	fracción de elementos cuya abscisa corresponde a la celdilla que contiene a x en el universo y, por abuso del lenguaje, en la superpoblación, respectivamente
p.f.,pp.ff.	población finita, poblaciones finitas
PR	Parzen-Rosenblatt
$r_S^{[Z]}$	numerador del descriptor α_S de $\mathcal{Z}$. Por antonomasia, r_S corresponde a $\mathcal{Y}$
S	como subíndice o aposición, se refiere a núcleo, por ejemplo, $\hat{\alpha}_S$ estimador núcleo de la regresión
$\mathcal{S}$,$\mathcal{S}_\mathcal{D}$	espacio muestral y soporte, respectivamente. Se termina por identificarlos.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

S^2, s^2	cuasivarianza poblacional y muestral, respectivamente
SITGA	Sistema de Información Territorial de Galicia
SLL	suavizador lineal local
U	universo
V$(\cdot)$	variación de
$V_{x,h}$	entorno de centro x y radio h
W_{hi}	seudopesos del estimador L
ξ	como prefijo o subíndice se refiere al modelo de diseño fijo ξ, por ejemplo, VAR_ξ varianza según el diseño
ZDP	zona densamente poblada
ZIP	zona intermedia
ZPP	zona poco poblada
$\widehat{(\cdot)}$	estimador de
$(1+(\cdot))$	multiplicador
$\lvert\cdot\rvert$	valor absoluto; referido a conjuntos, cardinal
$(\cdot)^{(\nu}$	potencia factorial decreciente de ν factores

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Capítulo 1

Preliminares

Todos los modelos son erróneos pero algunos son útiles

Box, Hunter y Hunter

Resumen Se presenta el contexto donde se va a desarrollar la memoria. Se distingue entre población finita e infinita. Se introduce el concepto de marco como representación de la población finita. Se diferencia entre sobrevisión parcial y exhaustiva y se manifiesta la importancia de este segundo tipo para la disposición del marco de muestreo. Se introducen las dos fuentes de aleatoriedad consideradas y las distintas inferencias habituales según estas dos fuentes. También se realiza una digresión sobre los posibles abusos en la utilización de modelos.

Se intenta explicar la diferencia entre estudios analíticos y descriptivos así como los distintos tipos de parámetros a estimar. Luego se trata la relación entre la regresión no paramétrica y el muestreo en poblaciones finitas. Se introducen unas breves notas históricas sobre los pioneros que guardan relación con el resto del contenido de la memoria. Además de estos antecedentes mediatos, se tratan los inmediatos. Por último, se compara con las aportaciones parcialmente concurrentes.

1.1. Introducción

Lo que se presentará a lo largo del texto no sólo tendrá el indudable interés propio del muestreo de poblaciones finitas (MPF) en la estadística pública sino que irá más allá, tanto en la utilización posterior de sus resultados en las ciencias sociales y ambientales como en cualquier otra rama del conocimiento científico donde se quiera estudiar la relación entre dos variables (una explicada y otra explicativa) a partir de datos relativos a una población finita pero que sólo serían completamente conocidos para una parte de ella como sucede, por ejemplo, en las ciencias biosanitarias.

En numerosas ocasiones se podría disponer de información para alguna variable de la población finita ajena a la propia operación por muestreo (censo, registros de diversas índoles jurídicas, sistemas de información...), e interesaría conocer como influye una de ellas en otra que sea objeto de estudio, es decir, que se observe directamente en la propia operación. Téngase en cuenta que incluso podría ser la misma variable en dos fechas diferentes, por ejemplo en el censo y en el momento de realizar la operación por muestreo.

Esta relación entre la variable previa $\mathcal{X}$ y la que se puede obtener a partir de la muestra $\mathcal{Y}$ puede venir establecida por una ley de una disciplina científica –tanto natural como social– o ser formulada como una hipótesis por el propio investigador o bien provenir de una postura más analítica ante una encuesta. Estas afirmaciones en numerosas ocasiones son de naturaleza cualitativa (relación inversa, monótona...) y corresponde al análisis estadístico ajustar o chequear un modelo y, en numerosos casos, proponerlo.

Por consiguiente, desde los primeros conceptos, interesa que la introducción en el estudio científico de un tema sea lo más fácil y clara posible. No puede ser diferente en este caso donde dos de los conceptos más básicos son los de población y muestra. Para comenzar, conviene por tanto distinguir y formalizar dos conceptos muy difundidos en la práctica: población finita y población "infinita".

1.1.1. Distinción entre población finita y población "infinita"

Una de las metas de la Estadística en sus diferentes formas es disponer de datos que sirvan para obtener información con el fin de caracterizar la población que los ha generado. Es decir, su objeto es el estudio numérico de colectivos amplios, donde se desea analizar algún carácter o aspecto de las unidades de cierta naturaleza que componen el colectivo. Estos elementos homogéneos desde cierto punto de vista, incluso de existencia figurada, constituyen la población y son conocidos por unidades poblacionales.

Cuando es posible identificar cada una de las unidades que forman la población asignándoles sendas etiquetas (entendiendo por tal algo que las distinga de las demás), es decir, en el caso de que se pueda conocer el valor de la variable objeto de estudio junto con el elemento que lo presenta se habla de *población finita* (p.f.) y tiene sentido denominar tamaño de la población al número de unidades que la forman, denotado por la letra N.

No obstante, este tamaño puede considerarse infinito o no ser relevante, bien sea porque proviene de alguna situación que puede repetirse indefinidamente o debido a que el tamaño es tan grande que conviene tratarlo como tal, o bien porque no se puede identificar cada unidad; por abuso del lenguaje, se dirá que se está ante una *población infinita*. Quizás sería más adecuado hablar de población sin entrar a considerar plenamente su posible finitud, pero por evidente brevedad y también por tradición se emplea esa denominación, concepto que está íntimamente vinculado al de modelo estocástico, y es el habitual de la inferencia estadística tradicional; precisamente para referirse a ésta, en el contexto de pp.ff., suele utilizarse la siguiente expresión: en poblaciones infinitas.

Existen dos puntos de vista desde los que se puede ver la p.f.:

1. Perspectiva población fija 'fixed population': con cada unidad de la población está asociada

una constante real desconocida pero fija, el valor de la variable objeto de estudio (bajo la hipótesis de que no hay errores ajenos al muestreo).

2. Perspectiva (población) estocástica: con cada unidad de la población está asociada una variable aleatoria para la que se especifica una estructura probabilística, el valor real asociado con una unidad de la población se trata como el resultado de esta variable aleatoria.

Las diferencias conceptuales entre ambos puntos de vista son importantes. De una manera resumida, los argumentos esgrimidos por la primera perspectiva son que al realizar el análisis, la población ya está fija, no es el resultado de un proceso aleatorio. Desde la segunda perspectiva, la población finita es la realización en el momento de estudio de un determinado modelo que describe un mecanismo o proceso en el mundo real. En esta memoria, se considerarán ambas perspectivas.

La perspectiva de población fija adolece de una especie de realismo ingenuo, quizás con un exceso de concreción y cierta visión fatalista del mundo o de la naturaleza, visión heredada del determinismo imperante en el siglo XIX pero que, dado lo intuitivo de la misma, tiene una justificación histórica clara. Sin embargo, toda esta crítica se ve suavizada notablemente si se introduce el concepto de superpoblación como límite analítico de pp.ff.. De hecho conviene tener presente que no siempre son totalmente equivalentes los términos superpoblación y población infinita como se verá a lo largo de la memoria donde se busca una suerte de síntesis entre los dos puntos de vista.

1.1.1.1. Marco

Sean N unidades u_1,..., u_N; a N, conocido, se le denomina *tamaño de la población* y a 1, 2,..., N, *etiquetas* identificativas. Las unidades de un universo finito se dicen que son *identificables* si se pueden etiquetar de 1 a N y la etiqueta de cada unidad es conocida. Se hablará de u_i como la unidad i y de ahí viene denotar, abusando del lenguaje, $U = \{1, 2, \ldots, N\}$ al identificar la unidad con su etiqueta y en concreto con $i = 1, 2, \ldots, N$. Este conjunto estándar de etiquetas puede denominarse *lista*.

Junto con la lista, se podría disponer de información complementaria. Por tanto el *marco* en este caso sería $\{(i, x_i) : i = 1, \ldots, N\}$ entendido como el conjunto de unidades a partir del cual se selecciona de forma efectiva la muestra.

Cada una de las unidades lleva asociada además $Y_i = Y(u_i)$, llamada *observación*. En sentido abstracto, Y_i denota el valor que $\mathcal{Y}$ toma en la unidad dada i. Y_1, Y_2, ..., Y_N son los valores de una variable real $\mathcal{Y}$ objeto de estudio que inicialmente son desconocidos. Esta variable puede considerarse aleatoria o no. En esta memoria, la observación será, en última instancia, la realización particular de una variable aleatoria Y_i.

Se debe registrar no sólo el número Y_i sino también el hecho de que es la unidad i la que ha producido esta medida. Se denota la *observación completa* u observación *etiquetada* o con etiqueta mediante (i, x_i, Y_i) y, en ese caso, se tendría para la población completa $\{(i, x_i, Y_i) : i = 1, \ldots, N\}$. En lo sucesivo, donde no sea necesario, se prescindirá de la etiqueta por simplicidad de notación.

Una de las finalidades de las operaciones exhaustivas es precisamente la creación o actualización del marco. Al realizarse el proceso de etiquetado de las unidades de la población, cada una de

ellas queda identificada.

1.1.1.2. Censo y muestra

Además de las situaciones obvias de poblaciones esencialmente infinitas, poblaciones suficientemente uniformes o bien cuando el proceso de medida o control provoque un deterioro de la unidad, la investigación por muestreo es preferible a la exhaustiva por la ganancia de tiempo y ahorro de recursos, dado que ésta última es más costosa y lenta en su ejecución.

Por consiguiente, conviene aclarar el concepto de muestra. Desde la óptica de poblaciones infinitas, la muestra consiste en la realización de un modelo estocástico, que genera la serie estadística obtenida, un número determinado de veces que coincide con su dimensión. Mientras que desde la perspectiva de la p.f., la muestra es una subcolección de la población es decir, en vez de estudiar toda la población sólo se estudia una parte de ella.

En el caso que se va a tratar se considera a la p.f. como muestra en el sentido de realización de un modelo y, en vez de realizar el censo, se extrae una muestra, entendida ésta en el sentido de pp.ff.. Es decir, en vez de estudiar todas las unidades que integran el marco, se investiga sólo un subconjunto de él.

1.1.2. Fuentes de aleatoriedad

1.1.2.1. Estimación desde dos ópticas

En rigor conviene distinguir, con relación a la inferencia estadística en un sentido más amplio, las siguientes perspectivas:

1. La visión relacionada con la realización de operaciones por muestreo, de pp.ff. reales y efectivas, donde la distribución probabilística sería consecuencia de la aleatorización impuesta por el propio realizador de la operación a las unidades que constituyen la población.
2. La visión según la cual las muestras proceden de poblaciones infinitas que se representan mediante un modelo estocástico previamente especificado, consecuencia de la propia variabilidad impuesta por la naturaleza, entendida esta en un sentido amplio.

Tradicionalmente, los estadísticos dedicados al diseño y ejecución de encuestas en pp.ff. inducían ellos mismos la distribución en el muestreo, a fin de obtener inferencias basadas en los estimadores y en el diseño que previamente hubieran establecido y evitar el sesgo de selección. Es decir, la distribución probabilística sobre la que se basaba la inferencia era consecuencia de la aleatorización impuesta por el propio estadístico a las etiquetas que representan la población.

La aleatorización, en el caso de pp.ff., se impone deliberadamente a las unidades o elementos que la constituyen, plasmadas en el marco. Si además la p.f. se considera como una muestra aleatoria de una población infinita, aparece la aleatoriedad que provee la propia naturaleza.

Es interesante destacar que en numerosas situaciones lo que distingue esencialmente los dos tipos de inferencia no es el cardinal de la población sino el hecho de que las unidades estén identificadas o no.

1.1.2.2. Introducción a los modelos en muestreo

Desde el punto de vista de la p.f. particular, el modelo estocástico que especifica la población infinita, se considera como un modelo de superpoblación –o simplemente superpoblación– porque le da cobertura, formalizando las concepciones y el conocimiento que se tienen sobre aquella. En este contexto, el modelo de superpoblación se entiende que es un intento de caracterizar el modo en que la p.f. –y posiblemente otras como ella– ha devenido.

Teniendo presente los puntos de vista antes mencionados, se consideran habitualmente en relación con las *encuestas* por muestreo, tres aproximaciones según Lombardía,GonzálezManteigaY Prada(2003):

1. Estimación basada en el diseño
2. Estimación basada en el modelo de predicción
3. Estimación asistida por el modelo

La divergencia entre dichas aproximaciones se manifiesta especialmente al tratar de la aleatorización previa a la selección o toma de muestras al azar. En la estimación basada en el diseño –el enfoque tradicional de las encuestas por muestreo– es el propio plan de muestreo quien determina el modo de estimar la variabilidad del muestreo. Mientras que en la perspectiva basada en el modelo de predicción, es este último el que determina la forma de estimar la variabilidad y el diseño no es importante.

Los estadísticos que prefieren basar totalmente las inferencias sobre pp.ff. en modelos de superpoblación presupuestos (aproximación 2) argumentan que la aleatorización en la selección de la muestra es innecesaria y puede no ser deseable excepto, quizás, para evitar polémicas sobre sesgo de selección. Los autores que defienden esta aproximación sostienen que el conocimiento que el estadístico tiene sobre las características de la población en estudio le permite afirmar que el modelo supuesto constituye la fuente de aleatoriedad más importante, ya que describe la citada población. Otros, mientras aceptan un plan de selección de muestreo probabilístico, prefieren basar sus inferencias en el modelo.

Sin embargo, en este tipo de inferencias no importa como se ha realizado el plan de muestreo, ni que el estimador tenga en cuenta el diseño, la inferencia se realiza sobre la base del modelo, y la aleatorización aportada por la naturaleza se considera suficiente. En algunos casos se refleja las probabilidades de inclusión del diseño en el propio modelo, por ejemplo, en la estructura de la heteroscedasticidad.

Por otra parte, la fuente de aleatoriedad en muestreo probabilístico tradicional está en el mecanismo de selección de los elementos de las muestras sobre los que se va a basar la estimación. La aleatorización se introduce en el plan de selección de la muestra y provee la base de la inferencia. La selección aleatoria se introduce para evitar suposiciones innecesarias sobre la población y la muestra. Para los que defienden la visión tradicional basada en el diseño, la estimación predictiva está sujeta a mayores sesgos en la estimación y mayores errores por especificación incorrecta del modelo y, por tanto, la suposición de un modelo puede determinar únicamente el plan de muestreo y el estimador óptimo para ese modelo.

La tercera aproximación puede considerarse como un intento de síntesis de las dos primeras. Consideran el modelado de la población para la construcción de los estimadores pero dentro de la inferencia tradicional basada en el diseño. Las inferencias permanecen basadas en este último y de aquí "robustas" a la mala especificación del modelo. Esta aproximación "modelo-asistida" se trata abundantemente en SÄRNDAL,SWENSSON&WRETMAN(1992).

Los modelos han servido para estudiar propiedades de los estimadores, para compararlos o para analizar en que situaciones estos eran más adecuados que otros posibles competidores. Sin embargo, en algunas ocasiones se echa de menos, dentro de los informes técnicos o en artículos científicos, la validación de las hipótesis formuladas –explícita o implícitamente– en las operaciones estadísticas que se realizan.

Las inferencias dependientes del modelo pueden resultar incluso más atractivas que las inferencias basadas en el muestreo repetido dentro del diseño muestral (también proveen fórmulas para el cálculo de errores de muestreo), pero hay que tener presente siempre que las estrategias que dependen de modelos pueden comportarse pobremente bajo especificaciones incorrectas de los mismos. Para profundizar en este tema resulta muy ilustrativa la introducción de RUEDAYSÁNCHEZ-BORREGO(2009) así como las referencias que incluyen.

Por consiguiente y como resumen, la inferencia se puede basar en la distribución inducida por el plan de muestreo, en la asociada al modelo de superpoblación o bien en ambas, pudiendo dar lugar a situaciones mixtas. La estimación asistida por el modelo, antes mencionada, es un ejemplo. Otra será la que se tratará en lo sucesivo donde se tendrá en cuenta ambas fuentes de aleatoriedad.

1.1.2.3. Posibles abusos en la utilización de modelos

El proceso de selección del modelo y el de verificación final del mismo se consideran como algunas de las principales componentes de la actividad estadística y se ha puesto de manifiesto su importancia en la estimación y en el análisis de los datos de encuestas por muestreo, dado por supuesto, el grado de complejidad necesario para que algunos modelos se puedan considerar como realistas.

En la actualidad los defensores de los modelos desde luego no suponen que las observaciones sean independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), hipótesis que no se sostendría en la mayoría de las pp.ff. con las que se trabaja, sobre todo en el caso de poblaciones humanas en la estadística social. En la aproximación basada en el diseño, para tratar con este tipo de poblaciones se recurre a diseños complejos. Por tanto, el correlato en la metodología basada en modelos es un modelo complejo.

Este proceso de incrementar la complejidad del modelo debe ser moderado, además de por el principio de la "parsimonia", por el hecho de que en numerosos casos se trabaja con muestras tan grandes que pueden conducir a que muchos de los parámetros sean significativos en los contrastes habituales del estadio de simplificación del modelo.

También puede conducir al nihilismo, no hay modelo cierto o bien cualquiera es tan cierto como los demás. Pero, si bien un modelo podría no ser más cierto que otro, puede ser mejor, entendido como que tiene mejores consecuencias; esto sugiere el pragmatismo de Box.

Que el modelo sea cierto es algo que no se puede verificar, pues como mucho se puede someter a una validación interna y externa, esto es, a partir de la propia muestra o de fuentes externas. En esta crítica cuando se valida internamente ¿se puede juzgar la bondad del ajuste del modelo desde una óptica estrictamente verosimilista?, o ¿hay que tener en cuenta ya el propio diseño de la investigación en el caso de que este diseño sea probabilístico?

Hay dos hipótesis en la metodología basada en modelos que hay que tener presentes por la dificultad de su tratamiento. Una es la de independencia, difícil de contrastar, y la otra es la implícita de que la muestra y la *comuestra* (unidades de la población que no están en la muestra) siguen el mismo modelo. Es decir, se está suponiendo que el modelo es válido para las unidades de la p.f. que no han sido elegidas en la muestra. Por consiguiente, uno de los abusos puede consistir en la utilización de modelos sin validar o mal especificados dado que la buena práctica científica conlleva, en pricipio, el empleo de un modelo validado y sometido a permanente revisión.

Otro abuso puede ser que, de forma permanente, se utilicen los modelos como sustitutivo del aumento del tamaño muestral o del necesario incremento de la información estadística de base, entre la que se incluye evidentemente los marcos adecuados, porque se entraría de lleno en la tradicional controversia entre medidas directas e indirectas.

1.1.3. Estudios descriptivos frente a estudios analíticos

Además de proveer un entorno adecuado para el tratamiento de situaciones no abordables desde una aproximación basada en el diseño, que tras este trabajo son menos de las que inicialmente se pensaba, los modelos son de incalculable ayuda para planificar la selección de la muestra, en el proceso de construcción de estimadores de las cantidades de interés y para ensayar la precisión de las estimas.

Sin embargo, hay una situación que cada vez va a ir cobrando más interés en general, y es muy posible que también dentro de la estadística pública, como son los estudios analíticos. Una encuesta se puede emprender con dos propósitos distintos de inferencia en mente: analítico o descriptivo.

En el primer caso se pretende comprender las relaciones que subyacen entre variables de la población. Así, por definición, se necesita la existencia de un modelo de superpoblación para la estimación analítica. Una característica de la inferencia analítica es la de que, aún en el caso de que la población entera estuviera disponible, habría incertidumbre en las estimas de los parámetros del modelo. Por ejemplo, la función de consumo, la relación entre hábitos e incidencia de determinada enfermedad, etc. Según Bellhouse(2000) los términos analítico y descriptivo 'enumerative' fueron acuñados por Deming a comienzos de la década de los 50 del siglo pasado.

El segundo objetivo, y hasta ahora más común, es el descriptivo, o sea, la estimación de valores como el total o la media de las cantidades de la propia población. Tales cantidades se denominan algunas veces "parámetros descriptivos". Como distinción del caso anterior, si la población fuera conocida, no quedaría ninguna incertidumbre acerca del valor del parámetro descriptivo.

No es preciso el primer tipo de estudio cuando únicamente se está interesado en totales, medias o proporciones poblacionales, como ha sucedido en la mayoría de las ocasiones en estadística oficial. Para profundizar en la diferencia puede consultarse Hansen(1987) que trata el tema aunque acabe por referirse fundamentalmente a la inferencia descriptiva. Pero, aun así, en este

contexto, la aproximación analítica puede ser uno de los objetivos o bien en estudios exploratorios o confirmatorios previos a la presentación de las cifras que se van a publicar, o bien puede ser importante para el conocimiento de la distribución de una variable aleatoria o de la relación entre variables aleatorias.

Con este tema está muy relacionada la presentación no convencional de resultados de una encuesta. La solución más universalmente aplicada, hasta ahora, consiste en generar una serie de cuadros estadísticos, con una estructura específica la cual dependerá del tipo de variables (nominales, ordinales, cuantitativas...), que finaliza el proceso de edición o que, sin más preámbulo, suele servir de base inmediata para extraer conclusiones. Esta manera de proceder presenta ciertas ventajas desde el punto de vista operativo sobre otras opciones y, en especial, sobre todas aquellas que exigen una mayor elaboración de los datos individuales de partida (microdatos).

Pero tiene el inconveniente del problema de la creciente aparición de celdillas vacías o con un número muy pequeño de unidades cuando se incrementa el número de variables a "cruzar", con la consiguiente posibilidad de errores de muestreo y sesgos de órdenes superiores a lo admisible e, incluso, problemas de confidencialidad.

Se debe añadir la dificultad para obtener visiones globales y esquemáticas del fenómeno estudiado cuando el número de categorías de las variables que forman una tabla es muy elevado, por lo cual la "visión de conjunto" de los fenómenos puede resultar muy complicada. Dado que el objetivo de un cuadro es aportar información fácilmente legible al nivel de desagregación elegido, en general, la obtención de una visión esquemática no constituye su finalidad principal.

1.1.4. Parámetros a estimar

Con relación a lo que se pretende estimar, el parámetro –vectorial o funcional– también puede ser tanto el de la p.f. como el de la superpoblación, cuando no una combinación de ambos. En esta memoria lo que interesará es estimar la función de regresión en la superpoblación, a través del parámetro correspondiente del censo, el estimador de la función de regresión en la p.f., con lo cual también se obtendrán resultados en el contexto del MPF tradicional.

El empleo de funciones puede ser adecuado para la presentación y el tratamiento de situaciones en las que la explotación ordinaria da lugar a tablas dispersas que implican en el ámbito de la estadística pública que no se pueda realizar una difusión estándar masiva. La solución habitual pasa por recurrir a una difusión a medida, por causa del secreto estadístico o por el inadmisible error de muestreo, con el consiguiente análisis caso a caso. Esta situación se podría paliar muchas veces con la utilización de parámetros funcionales, sobre todo si se dispone de buena información previa o auxiliar.

Por tanto, resumiendo, el proceso de inferencia se puede entender a dos niveles: en la superpoblación o bien en una p.f. fijada, realización del modelo de superpoblación; en este caso se considerarán ambos y en igualdad de condiciones.

1.2. No paramétrica y muestreo

Como decían Cassel,Särndal&Wretman(1977), los problemas teóricos de las encuestas por muestreo no preocuparon durante mucho tiempo a los especialistas en inferencia estadística general, porque consideraban dichas encuestas una actividad de tipo práctico. Por otra parte, los resultados de la teoría de la probabilidad y de la inferencia teórica parecían demasiado abstractos a los estadísticos inmersos en las dificultades de las encuestas por muestreo.

En la actualidad se está produciendo un gran cambio en esa situación, uno de los ejemplos es el proceso de convergencia entre la estadística no paramétrica en el sentido moderno y el MPF. Tradicionalmente se empleaba con abundancia la regresión lineal, técnica muy útil si la respuesta media es lineal. Los datos se consideraban como la realización del modelo $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$ con lo cual el proceso de inferencia seguía siendo el de un parámetro tradicional, vectorial no funcional, tanto si el que interesaba era el de la p.f. como el de la superpoblación. Pero, esta suposición no siempre estaba garantizada, necesitaba validarse.

Se ha utilizado como técnica exploratoria el diagrama de dispersión, bien fuera el correspondiente de un censo u otro tipo de operación exhaustiva, bien el de otra operación por muestreo comparable o el construido a partir de la propia muestra.

También se han empleado las herramientas clásicas de la inferencia en poblaciones infinitas. En este caso, si las posibles evaluaciones ex ante de las hipótesis se hacen a partir de operaciones exhaustivas no ofrecen grandes problemas. Sin embargo, si las evaluaciones se plantean a partir de la misma encuesta realizada en otro periodo anterior de tiempo o de otras investigaciones semejantes previas, en principio habría que tener presente el propio diseño de las mismas, dado que este puede ser complejo.

Por otra parte, comienza a carecer de sentido la objeción, que bien se podría plantear hasta hace poco, del excesivo protagonismo de la linealidad. Sin entrar a discutir las indudables ventajas y la sencillez de esta hipótesis cuando se puede sostener, el desarrollo de técnicas como la regresión no lineal, los modelos lineales generalizados, así como el empleo de métodos no tradicionales de regresión del tipo no paramétrico, unido a la cada vez menos imprescindible, aunque sí deseada, hipótesis de normalidad, trasladan esta objeción a otra órbita, como puede ser el problema ya mencionado de la especificación.

Por tanto, se debe estudiar con detenimiento la formulación de hipótesis más débiles, con lo cual, aunque los resultados serán más pobres que en el caso de las fuertes, se ganará en robustez. Lo que anima las técnicas no paramétricas es precisamente relajar la forma restrictiva de la función de regresión. Además de proveer de una herramienta útil para validar o sugerir una forma paramétrica.

La inferencia no paramétrica no especifica ninguna forma funcional de la regresión por el temor de viciar los resultados con una estructura demasiado injustificada. Esto redunda en una mayor transparencia debido a que aclara el papel de las hipótesis sobre la forma funcional y de las distribuciones subyacentes. Tiene el inconveniente de ser ávida de datos 'data hungry', pero en muchos casos las encuestas por muestreo proveen muestras de gran tamaño. Antes de estudiar el estado de la cuestión y de los antecedentes directos, se hará un breve recorrido por sus albores.

Por último, los defensores del enfoque basado en el modelo de predicción han realizado una crítica al enfoque basado en el diseño que consiste en que la única relación entre las unidades de

la muestra y de la comuestra es que estas últimas podrían haber estado en la muestra de haberse producido otro resultado en el sorteo. Se podría objetar a esta crítica, como ya se ha comentado anteriormente, que en la inferencia basada en el modelo hay también una hipótesis implícita que desempeña un papel similar, consistente en que se puede aplicar el mismo modelo a la muestra y a la comuestra. No estaría de más comprobar esta hipótesis con una submuestra de la comuestra.

1.2.1. Desarrollos pioneros en regresión no paramétrica

En general, se puede decir que los precedentes de la estadística no paramétrica actual dentro de los útiles matemáticos son el cálculo de diferencias finitas, con sus algoritmos relacionados (véase AITKEN), y la aproximación mediante poligonales. El cálculo de diferencias finitas se remonta como mínimo al mismo Newton, con la fórmula de interpolación que lleva su nombre análoga a la de Taylor.

Ya hemos hablado del diagrama de puntos bidimensional, cuanto más ralo es, más próximo se está a la situación de la interpolación en el caso de que los datos no estén sometidos a mucho error o no hayan sufrido mucha perturbación. Cuanto más poblado de puntos esté el diagrama, más nos alejamos de esa situación, se va perdiendo en compatibilidad del problema (en algunos casos por casi sobredeterminación) pero puede ir emergiendo una imagen borrosa de una curva que incluso podría ser más clara en la superpoblación de la cual las observaciones constituyen una muestra, en el caso de la p.f. completa, o una submuestra, en el caso de una parte de la p.f.

Junto con esto se debe tener en cuenta como precedentes e inspiradores más modernos tanto la regularización de funciones en análisis matemático como la interpolación y ajuste mediante splines y la teoría de la señal. Se presentarán a continuación unas pinceladas sobre los precursores de las diferentes técnicas que luego se utilizarán o desarrollarán en la memoria, sin entrar de lleno en los creadores de la disciplina que están abundantemente tratados en la literatura, por ejemplo COLLOMB(1981, 1985), en las referencias bibliográficas de esta memoria o bien en los manuales.

1.2.1.1. Graunt

En 1538 d.C., debido a la preocupación con el decremento en la población inglesa causada por la peste, Enrique VIII había ordenado a los sacerdotes de las parroquias de la Iglesia de Inglaterra mantener un registro de cristianizaciones, matrimonios y muertes. Por 1625, mensualmente e incluso semanalmente, se imprimían y se difundían listas de nacimientos y muertes para la ciudad de Londres.

La necesidad de resumir estas montañas de datos condujo a John Graunt, un mercero de Londres, a presentar un artículo a la Royal Society, en 1661, sobre los 'bills of mortality'. Este trabajo, Natural and Political Observations on the Bills of Mortality, fue publicado como libro en 1662.

Se puede ver en la obra de TAPIA&THOMPSON(1990) una tabla de frecuencias, la típica que se construye previamente a la representación del histograma y a la construcción de una tabla de mortalidad, con las que intenta dar una idea de las probabilidades de que un individuo en Londres muriera en un intervalo de edad determinado. Aunque Graunt realmente no representa gráficamente sus resultados ni normaliza las probabilidades de celda por la longitud del intervalo, además de no tratar adecuadamente la construcción de los intervalos, se puede considerar como

un precursor del histograma.

1.2.1.2. Boskovich

El análisis de Boskovich trataba de estimar la relación lineal entre una trasformación de la latitud x y la longitud de arco y. Puesto que aún no se había introducido la técnica de los mínimos cuadrados y la noción de ajuste óptimo no estaba bien definida, una de sus soluciones fue trazar todas las rectas posibles entre cada par de puntos disponibles, calcular su pendiente respectiva usando la fórmula habitual $b_{ij} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$ y promediar los resultados. Dado que sólo disponía de 5 puntos no fue muy gravoso desde el punto de vista de cálculo. Para N puntos implicaría el cálculo de $\binom{N}{2}$ lo que si resultaría computacionalmente costoso, esta es una de las razones de que esta técnica no pudiera competir con la de mínimos cuadrados que publicaría Legendre casi cincuenta años después.

Boskovich introdujo otra técnica pionera, que influiría en la ya citada de mínimos cuadrados, para combinar observaciones. Desde el punto de vista estadístico se basaba en imponer dos condiciones:

1. que los errores por exceso y por defecto se compensaran y
2. que la suma de los errores en valor absoluto fuera mínima.

La técnica que el autor empleaba era geométrica. Laplace la desenvolvería de modo analítico y a su desarrollo lo denominaría método de situación.

A título anecdótico conviene citar que este autor dálmata también fue precursor de la aplicación de la Estadística en la Física y de la teoría del campo en esta última disciplina.

1.2.1.3. Engel

Ernst Engel (Dresde 1821-Oberlössnitz, Radebeul, cerca de Dresde, 1896) fue un economista y estadígrafo alemán discípulo de Quételet. Desempeñó el cargo de director por entonces de la Oficina de Estadística de Prusia. Estableció, partiendo de la base de los presupuestos familiares belgas, cuatro proposiciones conocidas como leyes de Engel:

1ªley: el gasto destinado a la alimentación aumenta de forma absoluta, aunque disminuye en forma relativa, a medida que crece la renta

2ªley: el porcentaje de los gastos empleados en el vestido permanece prácticamente constante a cualquier nivel de renta.

3ªley: la proporción de gastos destinados a vivienda y menaje se mantiene generalmente constante

4ªley: cuanto más elevada es la renta, mayor es la proporción de gastos diversos de carácter suntuario

Posteriormente, se ha comprobado la validez generalizada de las leyes 1ª y 4ª, pero no de las 2ª y 3ª que, válidas en la época de su formulación, no tienen carácter universal.

Según Härdle&Linton(1998), Engel analizó los datos belgas sobre gastos de los hogares, empleando lo que ahora se denomina regresograma para llegar a la conclusión, que posteriormente sería conocida como ley de Engel, por antonomasia, de que en la relación entre el nivel de renta y los gastos, los destinados a alimentación constituyen una parte tanto mayor cuanto menor sea la renta. Para un estudio más cercano en el tiempo y relativo a la Encuesta de Presupuestos Familiares del Instituto Nacional de Estadística (INE) puede consultarse Cao,Delgado&González-Manteiga(1997)

1.2.1.4. Theil-Sen

Estos autores, sobre todo el segundo, se pueden considerar como un cierto nexo entre la estadística no paramétrica tradicional y la moderna. Son los que comienzan a estudiar, en muchos casos dentro de análisis de corte econométrico, los modelos de regresión con útiles de estadística no paramétrica clásica preocupándose por los problemas de robustez o resistencia.

En concreto, Sen(1968) estudia la utilización de diferentes medidas de localización para el tratamiento de las diferencias divididas. Además según McCord(1964), Sen a finales de la década de los cincuenta y principios de los sesenta del siglo pasado presenta resultados sobre momentos de los estadísticos de orden que contienen como caso particular a la esperanza del máximo. Conviene recordar que la teoría del valor extremo fue inicialmente promovida por las necesidades de los astrónomos de utilizar o rechazar observaciones outlier.

Theil(1950) vuelve sobre la idea de Boscovich, quizás sin ser consciente, la amplía y la introduce en la econometría, todo ello en la época del despegue del enfoque probabilístico dentro de esta disciplina.

1.2.1.5. Tukey-Cleveland

Sin suponer una forma específica previa de la función de regresión, un punto alejado del focal aporta poca información sobre el valor de la función en este punto que se está considerando, por ejemplo $\alpha(x)$. Por tanto, un estimador intuitivo para este valor objetivo es la media móvil local. Una versión mejorada de ésta es el promedio ponderado local.

Por tanto, se puede considerar también como pioneros en las cuestiones no paramétricas a los actuarios que intentaban suavizar sus tasas de mortalidad, morbilidad o siniestralidad con la introducción, entre otros, del procedimiento de medias móviles ponderadas que posteriormente influirían en el análisis de coyuntura de entreguerras e incluso llega a nuestros días a través de diversos filtros y reglas que se emplean en el tratamiento de series temporales. No conviene olvidar que Graunt con su "protohistograma" tenía en mente lo que ahora se denominaría tabla de mortalidad.

La idea de promedio local, que subyace en la media móvil, aparece con claridad en el estimador de Parzen-Rosenblatt y en el de Nadaraya-Watson que conducen a un pionero de la estimación por polinomios locales como es Cleveland(1979) con la lowess, abreviación de 'locally weighted scatter smoothing', o loess de 'local regression' si se prefiere resaltar las connotaciones geológicas

del acrónimo. La preocupación por la visualización que caracteriza a este autor también se puede considerar que tiene como precedente, en lo que se refiere al suavizado, aquel que realizaban los actuarios mediante técnicas gráficas aunque en un contexto restringido.

El avance de los cuatro autores que dan nombre a los estimadores no paramétricos citados, y de otros más, estriba en pasar de una situación en que la variable $\mathcal{X}$ es discreta, o está discretizada, y con pocos datos a otra en que la variable $\mathcal{X}$ es continua y se trabaja con muchos datos.

Tampoco conviene olvidar a Tukey como pionero de la estadística no paramétrica y, por supuesto, del análisis exploratorio de datos, con su aplicación en diferentes campos. En Tukey(1961) se trata el regresograma, incluso se puede considerar como la primera publicación donde se emplea este vocablo, dentro de un contexto más próximo a lo que actualmente se denomina estimación funcional que a posturas más clásicas. En ambos autores hay un predominio del razonamiento geométrico dado su enorme interés por la representación gráfica.

En resumen, como en tantos otros avances de la matemática y de la ciencia es llamativo ver la influencia de la astronomía y geodesia, y de las ciencias sociales cuantitativas (demografía, economía...) en el desarrollo de la estadística no paramétrica moderna, sobre todo, en sus orígenes.

1.2.2. Precursores y fundadores del muestreo

Hansen&Hurwitz(1943) se remontan en sus orígenes a Bernoulli en el caso de muestreo con reemplazamiento y a Poisson en el caso del muestreo estratificado. Laplace(1814) también se puede considerar como uno de los precursores del MPF; además de utilizar la técnica del multiplicador –ya empleada por Lavoisier para estimar la superficie cultivada y la cabaña ganadera (Droesbeke et al, 1987) y que se remonta como mínimo a Graunt y los aritmético-políticos– también realiza un razonamiento probabilístico para determinar un margen de error con el fin de evitar un censo completo de población.

Aparte de estas y otras aportaciones, se suele considerar como pionero a Kiaer con su defensa del método representativo frente al censal en la controversia que se mantenía a finales del siglo XIX en los órganos centrales de estadística. Estas contribuciones se caracterizaban por un tratamiento heurístico, no probabilístico, salvo la de Laplace. Después de Kiaer emergen dos métodos competidores que intentan alcanzar la representatividad: la aleatorización y la selección intencional 'purposive'.

Durante muchos años, para la mayor parte de los estadísticos de encuestas a gran escala, ha prevalecido la aleatorización. En los años 20 del siglo XX con Bowley, más aplicado, y con Chuprov, más teórico, ya se puede hablar de MPF. Aunque se considera como sabiduría convencional desde el artículo de Neyman de 1934, es en la década de los 50 con los manuales de Hansen, Hurwitz y Madow y de Cochran, entre otros, cuando se consolida como tal. También cabe mencionar el concepto de efecto del diseño 'deff' de Kish al final de esa decada y su ulterior influencia.

Para profundizar en esta época se puede consultar Hansen(1987). Desde entonces y hasta finales de la decada de los 70 del siglo pasado, el paradigma dominante fue el MPF basado en el diseño muestral e incluso sigue siéndolo mayoritariamente en los institutos de estadística hasta nuestros días, aunque ya en su forma híbrida de inferencia asistida por el modelo.

No conviene olvidar entre los precursores la figura de Hubback, quien no siendo un estadístico

profesional, influyó notablemente en el desarrollo del muestreo sobre todo en el subcontinente indio, que desde Mahalanobis se puede considerar como uno de los grandes focos que irradian sobre la materia. Para una idea de la importancia en la práctica del legado de este último autor puede consultarse Bailar(2000). Ni tampoco la de Cornfield(1944), con cuyo artificio se avanzó notablemente en la algebrización del MPF.

Aunque casi desde los primeros momentos del desarrollo de la teoría del MPF se han utilizado modelos, por lo menos de un modo implícito –la propia estratificación puede pensarse como una modelización naïf–, siguiendo a Rao(2005) se puede considerar a Cochran(1939) como el introductor del concepto de superpoblación donde realiza un razonamiento basado en el modelo, primero para muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento (en lo sucesivo MASS/R) y después para muestreo estratificado. Incluso se permite realizar una crítica a la teoría basada en la perspectiva de población fija, tanto por la falta, en aquel momento, de flexibilidad para adaptarse matemáticamente a modelos más complejos como desde el punto de vista epistemológico:

> In economic and sociological studies the population at any one time is often coventional [...] owing to the difficulties in defining a member of the population

Curiosamente con posterioridad, este autor escocés sería de los que más desarrollarían la inferencia basada en el diseño dotándola de la flexibilidad requerida, tanto desde su faceta investigadora como docente, si bien nunca abandonó totalmente la posibilidad del empleo de modelos.

Para terminar, con respecto a otros abordajes de la relación entre regresión y MPF, diferentes de los que se presentarán en esta memoria y siempre de una manera resumida, Holt y otros vinculados con la escuela de Southampton (Holt et al, 1980; Nathan&Holt, 1980 y Holt&Scott, 1981) suponen que la p.f. es una muestra aleatoria de una superpoblación de tal manera que las observaciones de las variables dependiente e independientes obedecen el modelo lineal y realizan un tratamiento con técnicas más próximas a la inferencia tradicional, en poblaciones infinitas. Tambíen Pfeffermann(1993) por el tratamiento de los diseños informativos, basándose en la distribución de la muestra.

Frente a ellos, la aproximación de Kish&Frankel(1974) está más cercana a la óptica descriptiva que se concentra en la estimación de los parámetros del censo –el vector de coeficientes estimados por mínimos cuadrados a partir de los valores de la p.f.– la cual no supone ningún modelo explícito y donde la inferencia se basa solamente en la aleatorización. Entre estas dos posturas conviene recordar, entre otros, el artículo seminal de Fuller(1975).

1.3. Antecedentes

Los métodos no paramétricos se han desarrollado con bastante intensidad en los últimos años. El incremento de la potencia de los ordenadores y la disponibilidad de grandes conjuntos de datos transversales (como los de encuestas por muestreo), de datos longitudinales (como las series financieras) e incluso de una combinación de ambos (datos espacio-temporales provenientes de satélites, sensores ...) son, en parte, responsables de su popularidad.

Sin ánimo de querer ser exhaustivo, se tratarán unas aportaciones sobre la aplicación de técnicas no paramétricas en el contexto del MPF que, bien por ser concurrentes parcialmente con el

tema que se va tratar o bien por ser fuente de inspiración del mismo, merecen especial atención. Como ya se ha comentado anteriormente, para una revisión en profundidad se puede recurrir a las referencias bibliográficas, al final de esta memoria, o a las incluidas en cualquiera de estas aportaciones.

1.3.1. Bellhouse&Stafford(1999)

Tratan de la estimación de la función de densidad de una variable de interés en la superpoblación. Consideran dos modos de introducir ésta, el primero como un modelo de superpoblación, semejante al tratado con anterioridad, en el que la p.f. es una muestra aleatoria simple de una población infinita. En el segundo modo, la superpoblación se ve como límite de una secuencia de pp.ff..

Utilizan tres tipos de estimador: el histograma, el núcleo y el que denominan 'prebinning'. Examinan como influye el diseño complejo en el error cuadrático medio en la estimación de la densidad. Y llegan a la conclusión de que no tiene influencia en el sesgo después de la habitual ponderación según las probabilidades de inclusión, pero sí en la varianza, que se puede interpretar como un efecto del diseño.

1.3.2. Breidt&Opsomer(2000)

Tratan del empleo de información auxiliar en la estimación de parámetros de la p.f. correspondientes a la variable de interés; para ello introducen un modelo de superpoblación que describe su relación con la variable auxiliar.

Aportan un abanico de referencias bibliográficas clásicas con diferentes modos de abordar el problema, en línea con lo comentado en una sección anterior; pero con el denominador común, en mayor o menor medida, de emplear modelos lineales y de estar preocupados por el problema de la mala especificación. Además, dan una serie de referencias sobre precedentes en la utilización de modelos no paramétricos, puesto que éstos permiten obviar este problema, al menos para una clase muy amplia de funciones.

El artículo analiza las propiedades de un tipo de estimador de regresión no paramétrico para el total de la variable de interés en la p.f. basado en la suavización mediante polinomios locales, desde un punto de vista asistido por el modelo. En palabras de Wang&Wang(2011), el estimador que proponen generaliza el marco paramétrico en muestreo y mejora la precisión de los estimadores de la sobrevisión inmensamente.

1.3.3. Lombardía(2002)

Trata de la estimación de la función de distribución de una variable de interés en la p.f. objeto de estudio cuando se conoce una variable auxiliar para todos los elementos de la población. Esta inferencia, basada en el modelo de predicción, supone una superpoblación en la que se relaciona la variable de interés con la auxiliar mediante un modelo de regresión lineal y otro no paramétrico.

Se realiza una introducción a la estimación en pp.ff. de la función de distribución, en sus diferentes formas, principalmente, inferencia basada en el diseño, basada en el modelo o asistida por el

modelo. También se presentan numerosos métodos de remuestreo bootstrap en el contexto de pp.ff.. Tras este capítulo de generalidades, se desarrolla un mecanismo de remuestreo bootstrap para aproximar el sesgo y la varianza del error de predicción del estimador paramétrico y no paramétrico de Chambers y Dunstan y se prueba la consistencia de los estimadores bootstrap según el modelo considerado.

1.3.4. Buskirk&Lohr(2005)

Tratan la estimación de la función de densidad mediante un estimador tipo núcleo. Apuntan que se puede extender en otras direcciones como la regresión o la función de distribución, aunque no lo desarrollan expresamente.

Definen el estimador núcleo ponderado de la densidad en el contexto de un diseño muestral estratificado bietápico, diseño particular pero de gran interés práctico. Su forma es igual a uno de los presentados por Bellhouse&Stafford(1999), aunque lo propusieron independientemente y por las mismas fechas.

Estudian las propiedades asintóticas de consistencia y normalidad al establecer condiciones suficientes bajo tres puntos de vista: el basado en el modelo, el basado en el diseño y una combinación de ambos.

1.3.5. Opsomer&Miller(2005)

Tratan la selección de la cantidad de suavizado en el contexto de la estimación asistida por el modelo del total de una p.f.. Emplean un estimador polinomio local de grado arbitrario y reenvían a Breidt&Opsomer(2000) para el estudio de sus propiedades.

El método que proponen se basa en minimizar un tipo de criterio de validación cruzada adecuado a la situación de pp.ff. y al diseño de la encuesta. Es un artículo muy técnico que intenta presentar resultados generales y para ello impone supuestos sobre la población, el diseño, el estimador y sus interacciones.

1.3.6. Harms&Duchesne(2010)

Estos autores tratan ya la estimación de la función de regresión de la superpoblación mediante polinomios locales en un contexto de diseño aleatorio, que correspondería a la generalización del concepto de superpoblación 1 de Bellhouse&Stafford(1999).

Definen el estimador polinomio local en el contexto de un diseño muestral general. En el caso de grado 0 y 1 presentan los estimadores de Nadaraya-Watson y el suavizador lineal local. Aunque advierten del problema de que los denominadores puedan ser nulos, no lo tratan.

Estudian el error cuadrático medio del suavizador local según la combinación del diseño muestral y el modelo de diseño aleatorio, aunque el tratamiento según el diseño muestral es quizás un tanto heurístico.

1.3.7. Otras referencias relacionadas

Conviene citar dos artículos con un propósito más enfocado en la visualización o exploración de los datos: Korn&Graubard(1998) y Bellhouse&Stafford(2001). Podrían incardinarse dentro de la filosofía P1 en términos de Chu&Marron(1991).

Los autores del primer artículo pueden considerarse como precursores o pioneros en la materia. Introducen la regresión polinómica local para suavizar datos de encuestas considerando el diseño muestral aunque no tratan las propiedades teóricas de esta técnica. Para una visión más actual puede consultarse Graubard&Korn(2009). Los firmantes del segundo estudian la estimación de la función de regresión en la superpoblación aunque emplean un estimador diferente. Utilizan la generalización del que denominaban preencasillado 'prebinning' en su artículo de 1999. En esta línea de la visualización, conviene señalar también a Whittaker&Scott(1999).

Otras refencias relacionadas más recientes son, sin ánimo de ser exhaustivo, Opsomer et al.(2007) y el ya citado Wang&Wang(2011) que destacan por su actualidad y valor práctico así como por los tópicos avanzados que tocan: el empleo de modelos aditivos.

También destaca el artículo de Breidt,Claeskens&Opsomer(2005), en relación con Breidt& Opsomer(2000), por el tratamiento del problema de estimación del total de la p.f. mediante otra técnica de regresión no paramétrica, splines penalizados; y relacionado con Lombardía(2002), cabe señalar Johnson,Breidt&Opsomer(2008). En relación con los otros abordajes antes mencionados, conviene citar a Pfeffermann&Sverchkov(1999).

1.4. Justificación ante aportaciones concurrentes

En el presente trabajo se estudian tres estimadores: el regresograma, el estimador de Nadaraya-Watson y el suavizador lineal local. El primero de ellos no se trata habitualmente en la bibliografía, quizás por su falta de suavidad –es un estimador impropio porque para estimar una función continua se emplea una discontinua, y su pobre comportamiento en cuanto al sesgo combinado–. Sin embargo, por una parte, tiene un interés práctico enorme en un instituto de estadística por su carácter intuitivo y proximidad al formato tabular y, por otra, cobrará importancia en el proceso de selección de la ventana.

Los otros dos estimadores se definen de modo distinto a los artículos tratados anteriormente en lo que concierne al problema de que se anule el denominador y los tres se estudian siguiendo un método diferente para cada uno de ellos. Las definiciones de los dos primeros ya han sido introducidas en la literatura. Se les denominará estimadores H, S y L, respectivamente para distinguirlos.

Se obtienen resultados para el diseño muestral que son de directa aplicación en situaciones, como las que se trataban en la literatura clásica de MPF, por ejemplo si la variable $\mathcal{Y}$ esté acotada, o su máximo en valor absoluto crece lentamente. Para la obtención de estos resultados se aplica una técnica diferente a la de linealización empleada por los autores antes citados. Esta nueva técnica conlleva analizar términos que serán despreciables en el caso de que la velocidad de convergencia de la ventana sea lenta.

El razonamiento empleado en el suavizador lineal local no es condicional gracias a una ge-

neralización del concepto de superpoblación 2 de Bellhouse&Stafford(1999) pero esto lleva aparejado que no sea de aplicación general porque implica teóricamente que la variable $\mathcal{X}$ pudiera ser conocida para todas las unidades del universo antes de realizar la encuesta y, a efectos prácticos, que se conozca el valor de esta última variable ex ante para los elementos de la muestra y el valor mínimo y máximo en la p.f. o bien una cotas inferior y superior respectivamente.

Esta situación es habitual en estadística oficial donde se dispone de marcos adecuados. Y no parece muy desventajosa frente a los que tratan diseño aleatorio, porque estos están suponiendo que la distribucion de $\mathcal{X}$ tenga soporte compacto. Esta afirmación en el caso de diseño aleatorio sólo se puede basar en un conocimiento a priori del problema a tratar.

Un logro notable de la memoria desde la óptica de la inferencia no paramétrica consiste en que en un contexto diferente al tratado en la mayoría de la literatura, que además resulta el más fructífero en relación con el MPF clásico, se consigue superar uno de los mayores problemas del suavizador lineal local, el de que sus resultados estén condicionados a la muestra. Lo cual conduce a que con el simple proceso de etiquetado se supere el citado problema.

Este contexto es diferente del tratado por Harms&Duchesne(2010) que generalizan la superpoblación 1. La generalización que se emplea en esta memoria es la más natural para MPF clásico, mientras que la de Harms&Duchesne(2010) es la más natural en superpoblaciones estocásticas. Por todo lo anterior, en lugar de órdenes en probabilidad se obtendrán órdenes convencionales, analíticos. La definición empleada en esta memoria es la más natural en un contexto de estadística oficial. Permite la utilización de los tres estimadores desde un punto de vista práctico. La definición por corrección que introducen Breidt&Opsomer(2000) puede ser difícil de justificar ante un público no especializado.

A diferencia de lo que sucede en la literatura actual que considera al estimador de Nadaraya-Watson como un caso particular del polinomio local ($p = 0$, suavizador constante local) pero que Harms&Duchesne(2010) no tratan explícitamente, en esta memoria se utiliza un método completamente distinto, se estudia de modo pormenorizado el estimador de Nadaraya-Watson y a partir de él se trata el suavizador lineal local. En cierto sentido, se cierra una especie de círculo.

Mientras que las técnicas empleadas en la memoria se basan en propiedades de regularidad de las funciones de regresión y varianza y en propiedades de distribuciones de valores extremos lo que implica funciones de regresión y varianza suaves y familias amplias de distribuciones de la perturbación, pero no cualquier distribución de errores. Los métodos de linealización son adecuados, salvo el posible error, si el denominador nunca se anula, lo cual sucede a efectos prácticos en numerosas ocasiones pero no en esta.

Quizás se podría pensar en utilizar otras técnicas para sobrellevar el problema del denominador no obstante parece preferible utilizar una definición más simple que facilitará la comprensión de las demostraciones, aunque las haga más trabajosas y, sobre todo, que permita su utilización desde un punto de vista práctico.

Las técnicas que se emplean, en lo sucesivo, para circunvalar este problema son soluciones ad hoc para cada uno de los tres estimadores. Aunque muy laboriosas, permiten ver con claridad las situaciones problemáticas que se presentarían en el caso de que únicamente se considerase el diseño muestral.

Como resumen, en esta memoria aunque se trata un problema parcialmente coincidente con los

tratados en los antecedentes, se realiza en un contexto diferente que permite obtener resultados que se consideran nuevos y abordar el problema de un modo totalmente distinto que, aun refiriéndose a una clase de diseños más restringida inicialmente, implica una definición más simple, precisa y rigurosa de los estimadores junto con una metodología matemática elemental que se aparta de la corriente principal, la linealización, y que sustituye, en parte, el análisis matemático por la propia estadística.

Es posible que algunos de los resultados que se van a presentar ayuden a revitalizar el programa de investigación tradicional de MPF que como vimos en las secciones anteriores dio muestras de agotamiento a mediados de los 70 del siglo pasado.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

The enumerative question is how many? The analytic question is why?

W.E. Deming

Resumen Se encuadra el problema en un marco conceptual matemático. Se presentan definiciones (y abreviaciones) del muestreo clásico, es decir, según el diseño muestral y se introduce la terminología que se empleará (plan de muestreo, descriptor...). Se estudia la esperanza y la covarianza de los estimadores de Horvitz-Thompson según el diseño muestral. Luego se restringe a planes de muestreo de tamaño fijo y después se particulariza a muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento.

Se introduce la disposición de universos que, junto con el concepto de diseño regular, permite el tratamiento asintótico según el plan de muestreo y, por último, el modelo de regresión o de diseño fijo que se asumirá. Posteriormente se enuncian y prueban resultados relativos a descriptores y a estimadores según el plan de muestreo que se utilizarán en la secuela.

2.1. Motivación

La perspectiva de superpoblación que se utiliza ve a la p.f. en que se está interesado como la realización de un modelo y considera el siguiente procedimiento estocástico en dos estadios que genera la muestra de n unidades sobre la que se realiza la encuesta:

1. Se genera una gran muestra de tamaño N a partir de un modelo de superpoblación
2. Se extrae una muestra de tamaño $n < N$ a partir de la gran muestra de tamaño N obtenida en el punto anterior

Desde el punto de vista práctico, frente a la virtualidad del estadio 1, el estadio 2 es la sobrevisión por muestreo real, realizada por el encuestador según el diseño muestral especificado p.

El estadístico de encuestas puede estar interesado en dos trasfondos 'backgrounds' estocásticos diferentes, uno que corresponde a la muestra y otro a los parámetros objetivo. Se puede resumir

en el siguiente cuadro, inspirado en el de HARTLEY&SIELKEN(1975) –también disponible en LOMBARDÍA(2002)– pero ligeramente ampliado.

		Parámetros de interés			
		Población finita		Superpoblación	
Procedimiento en el muestreo		Simples	Complejos	Simples	Complejos
Aleatorización	Plan simple		*		
	Plan complejo				
Modelo	Plan simple				*
	Plan complejo				

En algunas de estas posibilidades, el término parámetro (función paramétrica) para la p.f. no es el más adecuado, ya que quizás se definan mejor como estadísticos que resumen la gran muestra de tamaño N generada en el estadio 1. Por ello, se empleará la palabra *descriptor* para referirse a los parámetros de la p.f. –lo que algunos autores denominan parámetro del censo– mientras que se reservará el término *parámetro* para el correspondiente al modelo, es decir el parámetro en el sentido de poblaciones infinitas. Con ello se pretende que el texto sea más claro y que su lectura resulte más fluida.

En este contexto es interesante la cita textual de Barnard, que aparece en el artículo HARTLEY&SIELKEN(1975):

> My limited experience in the use of surveys in the social sciences suggests, indeed, that the superpopulation model is *usually* the appropriate one. One is rarely, for example, concerned with the finite *de facto* population of the U.K. at a given instant of time; one is more concerned with a conceptual population of people like those at present living in the U.K. (las cursivas aparecen tal cual en el citado artículo)

RAO(1999) también afirma que habitualmente los autores se concentran en los parámetros del censo, pero a menudo se está interesado en realizar inferencias sobre los parámetros del modelo de superpoblación que genera la p.f..

Esta memoria aunque tendrá como primer objetivo y principal estudiar la estimación de los descriptores dentro del enfoque tradicional según el diseño muestral, fundamentalmente MASS/R, también intentará como segundo objetivo, pero no menos importante, realizar inferencias sobre un parámetro complejo como consecuencia de los resultados obtenidos inicialmente según el diseño muestral. En el cuadro anterior se señalan con asterisco ambos objetivos.

2.2. Plan de muestreo

Llegado a este punto se utilizará la óptica de identificar muestra con subconjunto. Interesa, en lo sucesivo, ver a la muestra s como un subconjunto no vacío de elementos de U; por tanto $n > 0$ y las unidades seleccionadas serán necesariamente distintas.

El *espacio muestral* es la colección de todas las muestras posibles y se denota por $\mathcal{S}$. Se considera también una función p que asigna a cada muestra la probabilidad de que sea extraída. Habitualmente se refieren al par $\mathcal{D} = (\mathcal{S}, p(\cdot))$ como diseño muestral, pero en lo sucesivo a este par se le denominará *plan de muestreo* para evitar ambigüedades con las expresiones diseño fijo o diseño regular.

Inicialmente, se estudiará el plan de muestreo. Tras calcular el sesgo y la varianza según el plan de muestreo, se considerarán las esperanzas y varianzas según el diseño fijo que se precisen para hallar el sesgo y la varianza totales.

Se debe observar que hay una pequeña diferencia conceptual si se incluyen todas las muestras posibles o simplemente las que tienen una probabilidad estrictamente positiva. En el primer caso conviene introducir los siguientes conceptos

Definiciones.- Al conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \{s : p(s) > 0\}$ se le denomina *soporte* del diseño y la cardinalidad de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ es el tamaño del soporte de $\mathcal{D}$. Un plan de muestreo $\mathcal{D}$ se denomina *uniforme* si p_D es uniforme sobre $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, siendo p_D la restricción de p al soporte; en otro caso es *no-uniforme*. Un plan de muestreo $\mathcal{D}$ se denomina de *tamaño fijo* si $|s| = n$ para toda s en S_D, es decir, todas sus muestras con probabilidad no nula están compuestas por el mismo número n de elementos.

En cualquier caso, es deseable y así se supondrá en lo sucesivo, que toda unidad poblacional esté al menos en una muestra con probabilidad no nula de ser extraída, es decir, el soporte $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ constituye un recubrimiento del conjunto U.

Un plan de muestreo se dice *informativo* si la medida de probabilidad depende de los y-valores, es decir, un plan que utiliza los propios valores observados. Se considerarán planes de muestreo de tamaño fijo n no informativos, principalmente el MASS/R.

Definición.- Un estimador del descriptor θ_N es un estadístico $\widehat{\theta}(s)$ pensado para producir valores que se aproximen a θ_N que esté determinado. Sea $\hat{\theta}(\cdot) : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ estimador y sea $p(\cdot) : \mathcal{S} \to [0,1]$ plan de muestreo que induce una distribución sobre $\hat{\theta}(\mathcal{S})$

$$p_{\hat{\theta}}(\cdot) : \hat{\theta}(\mathcal{S}) \to [0,1]$$
$$p_{\hat{\theta}}(z) = p(\hat{\theta}^{-1}(z)) = \sum_{s \in \mathcal{S}, \hat{\theta}(s)=z} p(s) \quad \forall z \in \hat{\theta}(\mathcal{S})$$

La distribución de $\hat{\theta}(\cdot)$ heredada de $p(\cdot)$ es la distribución del estimador según el plan de muestreo o brevemente *distribución del estimador en el muestreo* de la p.f.

Valor medio o esperanza: Se empleará la siguiente notación $E_p(\cdot)$ para la esperanza según el plan de muestreo que se puede abreviar por $p-$esperanza

$$E_p(\hat{\theta}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s)\hat{\theta}(s).$$

En ocasiones, por comodidad, la acumulación de paréntesis aconseja sustituir la $p-$esperanza por el paréntesis angular, esto es $E_p(\cdot)$ por $\langle \cdot \rangle$. Con $B_p(\cdot)$ se denotará el *sesgo* según el plan de muestreo, es decir

$$B_p(\hat{\theta}) = E_p(\hat{\theta} - \theta_N) = E_p(\hat{\theta}) - \theta_N.$$

Por brevedad, se prescindirá del subíndice del descriptor si no da lugar a ambigüedad. Cuando este sesgo sea nulo se dirá que el estimador es insesgado según el plan de muestreo o $p-$insesgado.

Covarianza: Se empleará la siguiente notación $COV_p(\cdot)$ para la covarianza según el plan de muestreo que se abreviará como $p-$covarianza.

$$COV_p(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \sum_{s \in S} p(s) \left[\left(\hat{\theta}_1(s) - E_p(\hat{\theta}_1) \right) \left(\hat{\theta}_2(s) - E_p(\hat{\theta}_2) \right) \right]$$

cuando $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}$ se tiene la $p-$varianza que se denotará como $VAR_p(\cdot)$ con la siguiente expresión

$$VAR_p(\hat{\theta}) = \sum_{s \in S} p(s) \left(\hat{\theta}(s) - E(\hat{\theta}) \right)^2$$

Se denomina *error cuadrático medio* según el plan a $ECM_p(\widehat{\theta}) = E_p\left[(\widehat{\theta} - \theta)^2\right]$ que se puede descomponer del siguiente modo

Resultado 1

$$ECM_p(\hat{\theta}) = VAR_p(\hat{\theta}) + B_p^2(\hat{\theta})$$

Demostración.-

$$ECM_p(\hat{\theta}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) \left[\hat{\theta}(s) - \theta \right]^2 = \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) \left[\hat{\theta}(s) - E_p(\hat{\theta}) + E_p(\hat{\theta}) - \theta \right]^2 =$$

$$= \sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) \left[\hat{\theta}(s) - E_p(\hat{\theta}) \right]^2 + \left[E_p(\hat{\theta}) - \theta \right]^2$$

porque el doble de la suma del primero por el segundo es nula por la propia definición de $p-$esperanza, con lo cual es igual a $VAR_p(\hat{\theta}) + B_p^2(\hat{\theta})$ Q.E.D.

2.2.1. Probabilidades de inclusión

Salvo una biyección, sea $\{1, \ldots, i, \ldots, N\}$ el conjunto de etiquetas que identifican de modo único los N elementos distintos de un universo U. Sin pérdida de generalidad, sea U$= \{1, \ldots, i, \ldots, N\}$.

Se puede definir, para cualquier subconjunto no vacío $\tilde{s}$ de unidades del universo U, la probabilidad de inclusión del subconjunto, $\pi_{\tilde{s}}$, como la probabilidad de que $\tilde{s}$ esté contenido en la muestra elegida s. En el caso de un subconjunto unitario,

$$\pi_{\{i\}} = \Pr[i \in s] = \sum_{s: i \in s} p(s) = \sum_{s \ni i} p(s)$$

se conoce como la *probabilidad de inclusión simple*, es decir, la probabilidad de que la unidad i del universo U esté en la muestra o, lo que es igual, la suma de las probabilidades de todas las muestras que contienen a i, que se suele denotar por π_i. En el caso de un subconjunto con dos elementos

$$\pi_{\{i,j\}} = \Pr[i \in s, j \in s] = \sum_{i \in s, j \in s} p(s) = \sum_{s \ni i,j} p(s)$$

la *probabilidad de inclusión doble*, es decir, la probabilidad de que las unidades i y j del universo U estén ambas en la muestra o, lo que es igual, la suma de las probabilidades de todas las muestras que contienen simultáneamente a i y a j, que se suele denotar por π_{ij}. De modo totalmente análogo se definen las probabilidades de inclusión triple, cuádruple y quíntuple que se denotarán por π_{ijk}, π_{ijkl} y π_{ijklm}, respectivamente.

Como la unidad k debe estar al menos en una muestra del soporte del plan, debe verificarse que $\pi_k > 0$, $\forall k \in \mathrm{U}$. Cuando el plan verifica esta condición se llama *muestreo probabilístico*. Se dice que el muestreo es *cuantificable* si es probabilístico y $\pi_{kl} > 0, \forall k, l \in \mathrm{U}, k \neq l$.

Se denotará por $I_i = I_{\{i \in s\}}$ la *variable indicadora* de que la unidad i del universo esté incluida en la muestra para todo i de 1 a N, es decir, la indicadora de pertenencia a la muestra. Y por

$$I_i^{a)} = \frac{I_i}{\pi_i}$$

la variable indicadora *aumentada*, en el caso de que $\pi_i > 0$. Esto es, I_k es una variable aleatoria definida sobre el plan de muestreo $(\mathcal{S}, p(\cdot))$ tal que $I_k(s) = 1$ si $k \in s$, e $I_k(s) = 0$, en otro caso, $\Pr\{I_k = 0\} = 1 - \Pr\{I_k = 1\}$ y $\Pr\{I_k = 1\} = \pi_k$ es la probabilidad de inclusión simple con lo cual $I_k \overset{d}{=} Be(\pi_k)$ por tanto $E(I_k) = \pi_k$ y $VAR(I_k) = \pi_k(1 - \pi_k)$.

Del mismo modo, se define la variable indicadora de inclusión doble $I_{kl}(s) = 1$ si $k, l \in s$, e $I_{kl}(s) = 0$, en otro caso. $I_{kl} \overset{d}{=} Be(\pi_{kl})$ donde $\Pr\{I_{kl} = 1\} = \pi_{kl}$. Se denotará por

$$I_{kl}^{a)} = \frac{I_{kl}}{\pi_{kl}}$$

la variable indicadora aumentada, en el caso de que $\pi_{kl} > 0$. Se verifica que $I_{kl} = I_k I_l$, por tanto $\pi_{kl} = \Pr(I_k I_l = 1) = \sum_{k,l \in s} p(s)$ es decir la suma se extiende a todas las muestras que contengan tanto a la unidad k como a la l.

Se suele cometer el abuso de notación $\pi_{ii} = \pi_i$ porque

$$\pi_{ii} = \Pr(I_i^2 = 1) = \Pr(I_i = 1) = \pi_i$$

y entonces

$$COV(I_k, I_l) = E(I_k I_l) - E(I_k)E(I_l) = \pi_{kl} - \pi_k \pi_l := \Delta_{kl},$$

con $\Delta_{kk} = \pi_{kk} - \pi_k \pi_k = \pi_k (1 - \pi_k) = VAR(I_k)$.

Cuando un plan de muestreo $\mathcal{D} = (\mathcal{S}, p(\cdot))$ otorga a todos los elementos del universo la misma probabilidad de inclusión simple se dice que es *autoponderado,* es decir, $\pi_i = \pi_1$.

2.2.1.1. Media y varianza de combinaciones lineales de indicadoras

Resultado 2 *Sean dos combinaciones lineales de indicadoras* $C = \sum_{k=1}^{m} c_k I_k$ *y* $C' = \sum_{l=1}^{m} c'_l I_l$ *entonces*

$$E_p\left[C\right] = \sum_{k=1}^{m} c_k \pi_k$$

$$COV_p\left[C, C'\right] = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l' \, \Delta_{kl}$$

Demostración.-

$$E_p\left[C\right] = \sum_{k=1}^{m} c_k E_p\left[I_k\right] = \sum_{k=1}^{m} c_k \pi_k$$

$$COV_p\left[C, C'\right] = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} COV_p\left[c_k I_k, c_l' I_l\right] = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l' COV_p\left[I_k, I_l\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k c_k' \pi_k (1-\pi_k) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l\neq k} c_k c_l' (\pi_{kl} - \pi_k \pi_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l' (\pi_{kl} - \pi_k \pi_l) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l' \, \Delta_{kl}$$

con el convenio de que $\pi_{kk} = \pi_k$ Q.E.D.

Como consecuencia se obtiene la expresión de la $p-$varianza de una combinación lineal

Corolario 1

$$VAR_p\left[C\right] = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l \, \Delta_{kl}$$

Demostración.-

$$VAR_p\left[C\right] = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l (\pi_{kl} - \pi_k \pi_l) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l \, \Delta_{kl} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k c_k VAR_p\left[I_k\right] + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l\neq k} c_k c_l COV_p\left[I_k, I_l\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \pi_k (1-\pi_k) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l\neq k} c_k c_l (\pi_{kl} - \pi_k \pi_l) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l \, \Delta_{kl}$$

con el mismo convenio de que $\pi_{kk} = \pi_k$ Q.E.D.

Ejemplo 1 *Si un plan de muestreo probabilístico, definido sobre un universo* U *de* N *unidades, es autoponderado y de tamaño fijo* n*, entonces* $\pi_i = n/N, \forall i \in$ U.

Basta considerar $c_k = 1$ y $m = N$ en la igualdad para la $p-$esperanza y tener en cuenta que $\sum_{k=1}^{N} I_k = n$, con probabilidad 1. Por tanto

$$n = \sum_{i=1}^{N} \pi_i = \pi_1 \sum_{i=1}^{N} 1 = \pi_1 N \Rightarrow \pi_1 = \frac{n}{N}$$

y $\pi_i = \pi_1 = n/N$ como se quería comprobar.

Ejemplo 2 *Si un plan de muestreo probabilístico, definido sobre un universo* U *de* N *unidades, es autoponderado y de tamaño fijo* n*, entonces la* $p-$*esperanza de la media muestral es la media poblacional.*

$$E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} Y_k I_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} Y_k \pi_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} Y_k \frac{n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k$$

2.2.2. Estimador de Narain-Horvitz-Thompson

Este estimador fue introducido por Horvitz-Thompson(1952) aunque Rao(2005) reivindica la primacía para Narain. También se conoce en la literatura por el '$\pi-$estimator'. Se abreviará por estimador HT. Cualquier descriptor de la forma

$$\theta(Y) = \sum_{i=1}^{N} a_i Y_i, a_i \in \mathbb{R}$$

admite el siguiente estimador insesgado si $\pi_i > 0, \forall i = 1, \ldots, N$

$$\hat{\theta}_{HT} = \hat{\theta}(s) = \sum_{i=1}^{N} a_i Y_i I_i^{a)},$$

que tiene sentido en cualquier plan de muestreo probabilístico.

Resultado 3 *En un plan de muestreo probabilístico, se verifica que* $\hat{\theta}_{HT}$ *es un estimador* $p-$*insesgado de* $\theta(Y)$

Demostración.- Considérese $m = N$ y $c_k = \frac{a_k}{\pi_k} Y_k$ en el resultado sobre una combinación lineal Q.E.D.

2.2.2.1. Varianza del estimador HT

Resultado 4 *En un plan de muestreo probabilístico, el estimador HT de*

$$\theta(Y) = \sum_{i=1}^{N} a_i Y_i, a_i \in \mathbb{R}$$

tiene por varianza

$$VAR_p\left[\hat{\theta}_{HT}\right] = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Delta_{kl}a_k a_l \frac{Y_k}{\pi_k}\frac{Y_l}{\pi_l}$$

Demostración.- Considérese $m = N$, $c_k = \frac{a_k}{\pi_k}Y_k$ y $c_l = \frac{a_l}{\pi_l}Y_l$ en el resultado sobre combinaciones lineales Q.E.D.

Como abundarán las sumas dobles, incluso de mayor orden, conviene introducir alguna notación de aplicación general.

2.2.2.2. Notaciones de aplicación general

Se denotará la potencia factorial decreciente mediante $G^{(\nu} = G(G-1)\cdots(G-\nu+1)$ si $G, \nu \in \mathbb{N}$, $0 < \nu \leq G$, $G^{(\nu} = 1$ si $\nu = 0$ y $G^{(\nu} = 0$ si $\nu > G$, en este último caso existiría un factor nulo. Por otra parte

$$\binom{G}{\nu} := \frac{G^{(\nu}}{\nu^{(\nu}}$$

por tanto $\binom{G}{\nu} = 0$ si $\nu > G$. En algunas situaciones, para evitar notaciones tediosas, se empleará

$$\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}$$

para abreviar la suma doble excluyendo los elementos "diagonales", es decir aquellos que tienen los dos subíndices iguales, cuando no sea ambiguo se podrá prescindir de $(N^{(2)})$. Se denotará mediante

$$\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}$$

la suma triple que se extiende a todos aquellos elementos con los tres subíndices distintos, excluyendo por tanto los elementos diagonales, es decir aquellos que tienen los tres subíndices iguales así como aquellos que los tienen iguales dos a dos. De igual modo, cuando no resulte ambiguo, se podrá prescindir de $(N^{(3)})$, y así sucesivamente. Esta notación está inspirada en la de ROHATGI(1976) pero adaptándola a esta situación.

Frente a las anteriores, $\sum_{j\neq i}^{N}$ representará la suma simple extendida a todas las etiquetas de la población excepto la i , y $\sum_{k\neq i, k\neq j}^{N}$, la suma simple extendida a todas las etiquetas de la población exceptuando la i y la j.

Por analogía, se denotará $\mathrm{U}^{(\nu} = \{(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)\,|i_k \neq i_l, k \neq l : k, l = 1, \ldots, \nu\}$, cuyo cardinal es $N^{(\nu} = N(N-1)\cdots(N-\nu+1)$. Como ejemplos más utilizados $\mathrm{U}^{(2} = \{(i,j) : i \neq j\}$ y $\mathrm{U}^{(3} = \{(i,j,k) : i \neq j, j \neq k, k \neq i\}$.

2.2.3. Diseños de tamaño fijo

2.2.3.1. Fórmula de Yates-Grundy-Sen

Cuando el plan de muestreo es de tamaño fijo, n, se puede obtener una expresión alternativa más compacta para la varianza que se abreviará por fórmula YGS. Antes de ver esto, se probarán unos resultados previos

Lema 1 *Si $p(\cdot)$ es un plan de muestreo de tamaño fijo, n, se verifica que*

$$VAR_p(I_i) = -\sum_{j\neq i}^{N} COV_p(I_i, I_j)$$

Demostración.- Como

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = n \text{ con probabilidad 1}$$

se verifica que

$$COV_p\left(I_i, \sum_{j=1}^{N} I_j\right) = 0,$$

con lo cual

$$COV_p\left(I_i, I_i\right) + \sum_{j\neq i}^{N} COV_p\left(I_i, I_j\right) = 0$$

y de ahí se obtiene la igualdad Q.E.D.

Resultado 5 *En un plan de muestreo probabilístico de tamaño fijo n, se verifica que*

$$COV_p\left(\sum_{i=1}^{N} a_i Y_i I_i^{a)}, \sum_{i=1}^{N} a_i' x_i I_i^{a)}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{(N^{(2)})} \Delta_{ij}\left(a_i Y_i \frac{1}{\pi_i} - a_j Y_j \frac{1}{\pi_j}\right)\left(a_i' x_i \frac{1}{\pi_i} - a_j' x_j \frac{1}{\pi_j}\right)$$

Demostración.-

$$COV_p\left(\sum_{i=1}^{N} a_i Y_i I_i^{a)}, \sum_{i=1}^{N} a_i' x I_i^{a)}\right)$$

se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{N} a_i Y_i \frac{1}{\pi_i} a_i' x_i \frac{1}{\pi_i} VAR_p(I_i) + \sum_{j\neq i}^{(N^{(2)})} a_i Y_i \frac{1}{\pi_i} a_j' x_j \frac{1}{\pi_j} COV_p(I_i, I_j) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} a_i Y_i a_i' x_i \frac{1}{\pi_i}\frac{1}{\pi_i} \sum_{j\neq i}^{N} COV_p(I_i, I_j) + \sum_{j\neq i}^{(N^{(2)})} a_i Y_i a_j' x_j \frac{1}{\pi_i}\frac{1}{\pi_j} COV_p(I_i, I_j) =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j\neq i}^{(N^{(2)})} \left(a_i Y_i a_i' x_i \frac{1}{\pi_i}\frac{1}{\pi_i} + a_j Y_j a_j' x_j \frac{1}{\pi_j}\frac{1}{\pi_j} \right) COV_p(I_i, I_j) + \sum_{j\neq i}^{(N^{(2)})} a_i Y_i a_j' x_j \frac{1}{\pi_i}\frac{1}{\pi_j} COV_p(I_i, I_j) =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j\neq i}^{(N^{(2)})} \left(a_i Y_i \frac{1}{\pi_i} - a_j Y_j \frac{1}{\pi_j} \right) \left(a_i' x_i \frac{1}{\pi_i} - a_j' x_j \frac{1}{\pi_j} \right) COV_p(I_i, I_j) =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j\neq i}^{(N^{(2)})} \left(a_i Y_i \frac{1}{\pi_i} - a_j Y_j \frac{1}{\pi_j} \right) \left(a_i' x_i \frac{1}{\pi_i} - a_j' x_j \frac{1}{\pi_j} \right) \Delta_{ij}$$

Q.E.D.

Como consecuencia de esta igualdad se obtiene otra expresión para la varianza del estimador HT

Corolario 2 *En un plan de muestreo probabilístico de tamaño fijo, se verifica*

$$VAR_p\left[\hat{\theta}_{HT}\right] = -\frac{1}{2} \sum_{k,l\in \mathrm{U}} \Delta_{kl} \left(a_k Y_k \frac{1}{\pi_k} - a_l Y_l \frac{1}{\pi_l} \right)^2$$

Demostración.- La expresión se obtiene considerando la segunda combinación lineal igual a la primera, es decir, $x_k = Y_k$ y $a_k' = a_k$,$\forall k$ Q.E.D.

2.2.4. MASS/R desde la óptica de la $\pi-$estimación

En el caso de MASS/R, el plan de muestreo es

$$p(\cdot) : \mathcal{S} \to [0,1] \text{ donde } p(s) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \quad (0) \text{ si } |s| = n \quad (\neq n)$$

y $\mathcal{S} = \mathfrak{P}(\mathrm{U})$. Este plan es uniforme y de tamaño fijo n. En general se denotará el muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento con muestras de tamaño n de un universo de N elementos como MASS/R(N, n). El tamaño del soporte es $\binom{N}{n}$.

En lo sucesivo no se considerarán las muestras con probabilidad nula de ser extraídas, esto es, se identificarán el espacio muestral y el soporte del plan de muestreo, o si se prefiere, el estudio

se restringirá a las muestras del soporte. En estas condiciones cabría definir el MASS/R(N,n) como el plan uniforme restringido a los subconjuntos de tamaño n.

Resultado 6 *Sea $\tilde{s} \subset \mathrm{U}$ tal que $|\tilde{s}| = \nu \neq 0$. Sea s una muestra aleatoria simple sin reemplazamiento. Entonces se verifica que*

$$\pi_{\tilde{s}} = \frac{n^{(\nu}}{N^{(\nu}}$$

Demostración.- Si $\nu \leq n$,

$$\pi_{\tilde{s}} = \Pr\left(\tilde{s} \subset s\right) = \frac{\binom{N-\nu}{n-\nu}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{(N-\nu)!}{(n-\nu)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{N(N-1)\cdots(N-\nu+1)} = \frac{n^{(\nu}}{N^{(\nu}}$$

Si $\nu > n$, $\Pr\left(\tilde{s} \subset s\right) = 0$ que coincide con $\frac{n^{(\nu}}{N^{(\nu}} = \frac{0}{N^{(\nu}} = 0$ Q.E.D.

Corolario 3 *En MASS/R(N,n), se verifica para las probabilidades de inclusión que*

$$\pi_i = \frac{n}{N},\ \pi_{ij} = \frac{n^{(2}}{N^{(2}},\ \pi_{ijk} = \frac{n^{(3}}{N^{(3}},\ \pi_{ijkl} = \frac{n^{(4}}{N^{(4} \quad \text{y} \quad \pi_{ijklm} = \frac{n^{(5}}{N^{(5}}$$

Como las probabilidades de inclusión simple y doble son todas estrictamente positivas es un plan de muestreo probabilístico cuantificable. Como las probabilidades de inclusión simple son todas iguales es autoponderado, $\pi_i = \pi_1$ se conoce como *fracción de muestreo* y se suele denotar por f. Más aún, como las probabilidades de inclusión de cada orden superior también son iguales tiene sentido escribir $\pi_{ij} = \pi_{12}$, $\pi_{ijk} = \pi_{123}$, $\pi_{ijkl} = \pi_{1234}$, $\pi_{ijklm} = \pi_{12345}$ y denominarlo *equiprobabilístico*.

Resultado 7 *En MASS/R(N,n), si $i \neq k$,*

$$COV_p\left(I_i; I_k\right) = -\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}$$

Demostración.-

$$COV_p\left(I_i; I_k\right) = E_p\left(I_i I_k\right) - E_p\left(I_i\right) E_p\left(I_k\right) = \pi_{ik} - \pi_i \pi_k =$$

$$= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n}{N}\frac{n}{N} = \frac{n}{N}\left[\frac{n-1}{N-1} - \frac{n}{N}\right] =$$

$$= \frac{n}{N}\left[\frac{N\left(n-1\right) - n\left(N-1\right)}{N\left(N-1\right)}\right] = \frac{n}{N}\left[\frac{n-N}{N\left(N-1\right)}\right] =$$

$$= -\frac{n}{N}\frac{N-n}{N}\frac{1}{N-1} = -\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}$$

Q.E.D.

Resultado 8 *En MASS/R(N, n)*

$$\Delta_{kl} = -\frac{f(1-f)}{N-1} < 0 \text{ para } k \neq l \qquad \Delta_{kk} = f(1-f)$$

Demostración.- Si $k \neq l$,

$$\Delta_{kl} = \pi_{kl} - \pi_k \pi_l = -\frac{f(1-f)}{N-1}$$

Si $k = l$, $\Delta_{kk} = f(1-f)$ Q.E.D.

2.2.4.1. Estimador de la media y del total

Para la media poblacional

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$$

se tiene $a_k = \frac{1}{N}$ y como $\pi_k = \frac{n}{N}$,

$$\widehat{\overline{Y}}_{HT} = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_k I_k^{a)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k \frac{I_k}{\pi_k} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k \frac{I_k}{n/N} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} Y_k I_k$$

que coincide con la media muestral, por tanto se verifica que

Ejemplo 3 *En MASS/R(N, n), el estimador HT de la media poblacional es la media muestral*

Por consiguiente, en MASS/R(N, n), cualquiera que sea $n > 0$, la media muestral es un estimador $p-$insesgado de la media poblacional.

Ejemplo 4 *La varianza del estimador HT de la media poblacional es*

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \Delta_{kl} \frac{Y_k}{N\pi_k} \frac{Y_l}{N\pi_l}$$

que es la particularización para $m = N$ y $c_k = \frac{Y_k}{N\pi_k}$ del resultado general. También se puede obtener un resultado más concreto y conocido en la literatura.

Resultado 9 *En MASS/R(N, n) se verifica que*

$$VAR_p\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{N} Y_k I_k\right) = \frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma_Y^2}{n}$$

Demostración.- Particularizando el resultado de combinaciones lineales de indicadoras a $m = N$ y al caso de MASS/R $c_i = \frac{Y_i}{N\pi_i} = \frac{Y_i}{n}$

$$\frac{1}{n^2}\sum_1^N Y_i^2 \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) + \frac{1}{n^2}\sum\sum_{i\neq k} Y_i Y_k \left(-\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{N-n}{N^2}\sum_1^N Y_i^2 - \frac{1}{n}\frac{N-n}{N^2(N-1)}\sum\sum Y_i Y_k =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{N-n}{N^2} + \frac{N-n}{N^2(N-1)}\right]\sum_1^N Y_i^2 - \frac{1}{n}\frac{N-n}{N^2(N-1)}\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^N Y_i Y_k =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{N-n}{N(N-1)}\sum_1^N Y_i^2 - \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N Y_k =$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N Y_k\right)\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma_Y^2}{n}$$

Q.E.D.

Si se denota por S_Y^2 la cuasivarianza de la variable $\mathcal{Y}$ en la p.f. y se reúnen los resultados anteriores se obtiene la siguiente consecuencia

Corolario 4 *En MASS/R(N,n), la varianza de la media muestral es* $(n^{-1} - N^{-1})S_Y^2$

Demostración.- Si en el resultado anterior, se considera que $N\sigma_Y^2 = (N-1)S_Y^2$ se tiene que

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma_Y^2}{n} = \frac{N-n}{N}\frac{S_Y^2}{n} = \frac{N-n}{nN}S_Y^2$$

Q.E.D.

Se verá a continuación como la fórmula YGS permite calcular la varianza del estimador HT del total, el de simple expansión, que coincide con la anterior multiplicada por N^2

Resultado 10 *En MASS/R(N,n), la varianza del estimador HT del total es*

$$N^2\frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma_Y^2}{n}$$

Demostración.- Basta considerar $a_k = 1$ en el corolario 2 porque el plan es de tamaño fijo

$$VAR_p\left[\frac{N}{n}\sum_{k=1}^{N} Y_k I_k\right] = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Delta_{kl}\left(\frac{Y_k}{\pi_k} - \frac{Y_l}{\pi_l}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}N^2\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\Delta_{kl}\left(\frac{Y_k}{n} - \frac{Y_l}{n}\right)^2 = -\frac{1}{2}N^2\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})} -\frac{f(1-f)}{N-1}\left(\frac{Y_k}{n} - \frac{Y_l}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{N^2}{N(N-1)}\frac{1-f}{n}\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 = \frac{N^3}{N-1}\frac{1-f}{n}\frac{1}{2}\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(Y_k - Y_l)^2 =$$

$$= \frac{N^3}{N-1}\frac{1-f}{n}\sigma_Y^2 = \frac{N^3}{N-1}\frac{N-n}{N}\frac{\sigma_Y^2}{n} = N^2\frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma_Y^2}{n}$$

Q.E.D.

Este resultado coincide con MIRÁS(1985) sin más que expresar σ_Y^2 en función de S_Y^2

$$N\,(N-n)\,\frac{S_Y^2}{n}$$

Observación.- En la demostración aparece la expresión alternativa para la cuasivarianza

$$S_Y^2 = \frac{1}{2N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(Y_k - Y_l)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}(Y_i - Y_j)^2$$

2.2.4.2. Estimador de la proporción

Si se desea estudiar que las unidades del universo posean o no una característica, entonces $Y_i = 1_E(\mathrm{u}_i) = 1_E(i)$, con el habitual abuso de lenguaje, y en este caso la media muestral se reduce a la proporción de la muestra y la varianza poblacional a

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_E^2(i) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_E(i)\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_E(i) - P^2 =$$

$$= P - P^2 = P(1-P) = PQ$$

siendo $P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_E(i)$ la proporción poblacional. Con lo cual la varianza de la proporción muestral en MASS/R es

$$VAR(\hat{p}) = \frac{N-n}{N-1}\frac{PQ}{n}$$

2.2.5. Consistencia

Es bastante natural esperar que cuando el tamaño de la muestra crezca, el estimador debería estar más próximo al descriptor de algún modo que tenga sentido. Es decir, sería deseable que cuando la muestra esté constituida por el universo $s = \mathrm{U}$ entonces $\hat{\theta} = \theta_N$. Si el diseño es de tamaño fijo, se puede considerar la definición de COCHRAN(1977), que llama *consistente* al método que verifica que la estimación se vuelve exactamente igual al valor de la población cuando $n = N$, o sea, cuando se realiza el censo. A esta consistencia se le llamará *consistencia finita* y al estimador $\hat{\theta}$, *finito-consistente* para diferenciarla de la consistencia tradicional.

Para el MASS/R es obvio que

$$\frac{N}{n}\sum_{k=1}^{N} Y_k I_k$$

es un estimador finito-consistente del total, ya que en MASS/R(N, N) es igual a

$$\frac{N}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k I_k = \sum_{k=1}^{N} Y_k$$

porque todas las indicadoras son iguales a 1.

2.3. Tratamiento asintótico

Cuando se investigan propiedades límite de los estimadores, se debe especificar una secuencia de pp.ff. y de muestras de esas poblaciones. Se puede precisar mediante una disposición triangular de pp. ff. indizando n y N con el mismo subíndice. Se va a definir un marco asintótico mediante una secuencia de diseños de tamaño fijo (n_t)

$$(s_t) \leftarrow (\mathrm{U}_t)$$

Sea $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la lista o sucesión de etiquetas que se puede identificar, sin pérdida de generalidad, con $\mathbb{N}$. Sea $(\mathrm{U}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ una secuencia de universos

$$\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{U}_2 \subset \ldots \subset \mathrm{U}_t \subset \ldots$$

de tamaños respectivos $|\mathrm{U}_t| = N_t$ con $0 < N_1 < N_2 < \ldots$ Es decir, U_1 está formado por las primeras N_1 etiquetas, U_2 por las primeras N_2 etiquetas, y así sucesivamente.

Para cada universo U_t, considérese un plan de muestreo $p_t(\cdot)$ que asigna una cierta probabilidad $p_t(s_t)$ a cada posible muestra s_t de elementos de U_t. Sea $\pi_{t_{\tilde{s}}}$ la probabilidad de inclusión determinadas por el plan, por ejemplo, π_{t_k} y $\pi_{t_{kl}}$ $k, l = 1, 2, \ldots, N_t$ las probabilidades de inclusión simple y doble.

Se extrae una muestra s_t de tamaño fijo n_t del universo U_t. Con lo cual, tras su identificación con el soporte, el espacio muestral correspondiente a un universo de tamaño N_t estará formado por todos los subconjuntos de tamaño fijo n_t. Por consiguiente se tiene una secuencia de muestras (s_t) de tamaños respectivos (n_t) donde $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ y $n_t < N_t$. Obsérvese que mientras la

secuencia de universos está anidada, no se dice nada del anidamiento de las muestras. Se supone que cuando $t \to \infty$ ambos $n_t \to \infty$ y $N_t \to \infty$.

Para cada U_t universo, sea θ_{N_t} un descriptor a estimar que en este caso se puede abreviar por θ_t. Sea $\widehat{\theta}_t$ un estimador de θ_t, basado en los y_j observados, es decir, aquellos para los cuales $j \in s_t$. Se dice que el estimador es *asintóticamente* p_t-*insesgado* si $B_{p_t}(\hat{\theta}_t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Ejemplo 5 *El descriptor θ_t puede ser la media de la población*

$$\theta_t = \bar{Y}_{U_t} = \sum_{U_t} \frac{Y_i}{N_t}$$

y $\hat{\theta}_t$ puede ser el estimador HT

$$\hat{\theta}_t = \sum_{U_t} \frac{Y_i}{N_t} I_i^{a)}$$

Conviene recordar como se han tratado situaciones concurrentes con el tema de esta memoria en la literatura. A continuación, se presenta comentada una cita textual de Barnard, incluida en el artículo de Hartley&Sielken(1975),

> If one adopts the superpopulation model, then since a simple random sample [MASS/R] of a simple random sample [en el sentido de pp. infinitas] is itself a simple random sample [en el mismo sentido], the problems of inference can be dealt with along classical lines.

También Rao(1999) afirmaba que si se supone que la p.f. es una m.a.s. de la hipotética superpoblación y la fracción de muestreo general n/N es despreciable, entonces las inferencias de la p.f. permanecen válidas para la superpoblación.

El estadio 1 supone habitualmente que los elementos de la gran muestra son i.i.d. de una superpoblación completamente estocástica, por ejemplo Harms&Duchesne(2010). Es lo análogo a poblaciones infinitas. En esta memoria se utilizará una superpoblación más compleja. No será idénticamente distribuida, sino que variará según un modelo de regresión con diseño fijo.

Además, en general, se supondrá que se verifica la condición de Hansen-Hurwitz-Madow (condición HHM) para el límite de pp.ff., es decir, $n_t \to \infty$ y $N_t \to \infty$ simultáneamente con $n_t \leq qN_t \quad 0 < q < 1$ lo que implica que $f_t = \frac{n_t}{N_t}$ no sea, en principio, despreciable y que, por tanto, esta situación tenga mayor interés que la citada, Rao(1999).

Observación.-

> Bajo la condición HHM, $f_t = \frac{n_t}{N_t} = O(1)$ y es equivalente considerar $O(N_t^{-1})$ o $O(n_t^{-1})$. En la mayoría de las ocasiones, se empleará la segunda expresión.

2.4. Modelo de regresión o de diseño fijo

2.4.1. Diseño regular

Para describir la distribución de los valores de $\mathcal{X}$ asociados a las respectivas etiquetas, se considera en primer lugar, la sucesión de funciones F_{N_t} relativa a los puntos del diseño dada por

$$F_{N_t}(u) = \frac{|\{i : x_{i,N_t} \leq u\}|}{N_t}.$$

Se supone que existe una función de distribución absolutamente continua F en $[a, b]$, o más suave, tal que $F_{N_t}(x) \to F(x)$ cuando $t \to \infty$ uniformemente en $[a, b]$, siendo F_{N_t} la análoga a una función de distribución empírica de la p.f. que se podría disponer del marco correspondiente a U_t.

Con esta notación, los valores de la variable del diseño o variable explicativa $\mathcal{X}$, $\{x_{i,.N_t}\}_{i=1}^{N_t} \subset [a, b]$, podrían estar dispuestos en el marco de modo que

$$a < x_{1,N_t} \leq \ldots \leq x_{N_t,N_t} < b$$

como se considera $\mathcal{X}$ definida en $[a, b]$, $F_{N_t}(a) = 0$ y $F_{N_t}(b) = 1, \forall N_t$. Se puede escribir, por tanto, que $F_{N_t}(x) \to F(x)$ cuando el tamaño de la p.f. crece. A lo largo de esta memoria en los casos que no den lugar a confusión, se prescindirá por simplicidad y brevedad en la notación del subíndice t, que denota el elemento t-ésimo de la secuencia de pp.ff. anidadas.

A continuación se analizan condiciones suficientes para que esto ocurra en diseño fijo. Sea $f(\cdot)$ función continua definida en $[a, b]$, tal que $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$, y la función de distribución límite se puede expresar como $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Definición.- Se dice que los puntos del diseño están *distribuidos de forma regular* con *densidad* $f(x)$, si

$$F(x_i) = \int_a^{x_i} f(t)\mathrm{d}t = \frac{i - 1/2}{N}, \quad i = 1, ..., N.$$

La introducción de una *densidad del diseño* $f(\cdot)$ es un medio conveniente de especificar todos los $x_i, 1 \leq i \leq N$, para cada p.f. dentro de la secuencia. Dado que $f(\cdot)$ es una densidad de carácter analítico y no una verdadera función de densidad de probabilidad se le podría denominar *relieve* para más claridad. Con esta terminología a F y a F_N se les denominaría relieve *acumulado* (en el primer caso sería suave, en el segundo abrupto).

Se puede probar, Ramil(1998), que $\sup_{a \leq u \leq b} |F_N(u) - F(u)| = (1/2)N^{-1}$ y por tanto que la convergencia es uniforme en el segmento.

No es restrictivo suponer $[a, b] = [0, 1]$, un ejemplo de variable $\mathcal{X}$ no-estocástica que está regularmente distribuida con densidad $f = F'$ en $[0, 1]$ es

$$x_i = F^{-1}\left(\frac{i - 1/2}{N}\right), \quad i = 1, ..., N$$

Claramente

$$F_N(u) = \frac{1}{N}\left[NF(u) + 1/2\right]$$

y por tanto

$$\sup_{0\leq u\leq 1} |F_N(u) - F(u)| = \frac{1}{N}1/2 = (1/2)N^{-1}$$

Si se imponen condiciones adicionales al diseño fijo, se podría mejorar el orden $O\left(\frac{1}{N}\right)$ de convergencia, véase RAMIL(1998), pero quizás a costa de perder valor práctico en este contexto de pp.ff..

A la secuencia de valores de la $\mathcal{X}$ en la sucesión de pp.ff. se le denomina *secuencia regular* generada por $f(\cdot)$, en terminología de SACKS&YLVISAKER(1968). La sucesión de pp.ff. se puede ver desde el punto de vista de una secuencia de diseños generados por una densidad asintótica en el intervalo de definición. Es decir, se puede expresar la densidad local de los valores de la $\mathcal{X}$, sin pérdida de generalidad $\{x_i\}_{i=1}^N$ de $[0,1]$, si se especifica una función de relieve del diseño suave.

En concreto, a lo largo de esta memoria el estudio se circunscribirá a puntos con relieve estrictamente positivo, $f(x) > 0$, es decir, con densidad local apreciable.

2.4.2. Modelo de superpoblación

Se considera el siguiente modelo de diseño fijo que pretende ser una generalización del concepto de superpoblación 2 introducido por BELLHOUSE&STAFFORD(1999), $\xi : Y_i = \alpha\left(x_i\right) + \varepsilon_i\sigma(x_i)$ con $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ suficientemente suaves, ε_i son variables aleatorias con media cero, incorreladas, con varianza unitaria y momentos de orden superior finitos. Los valores x_i en la sucesión de pp.ff. constituyen lo que se ha denominado puntos del diseño que están distribuidos de forma regular con densidad $f(x)$ en $[0,1]$, $\{x_i : i = 1,\ldots,N\}$ fijos para cada p.f..

Si se denotan por $E_\xi\left(\cdot\right)$ y $VAR_\xi\left(\cdot\right)$, la esperanza y la varianza según el modelo de diseño fijo, respectivamente, se verifica que $E_\xi(\varepsilon_i) = 0$, $VAR_\xi(\varepsilon_i) = 1$, $E_\xi(\varepsilon_i^k) < \infty$ y además $COV_\xi(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}) = 0$ con $\varepsilon \overset{d}{=} G(u) = P(\varepsilon \leqslant u)$. El orden de los momentos, $k \geq 2$, dependerá de la velocidad de convergencia de la ventana.

Se dice que el estimador es ξ-*insesgado* si $E_\xi\left(\widehat{\theta} - \theta\right) = 0, \quad \forall s$. Se define el error cuadrático medio según el modelo de diseño fijo como $ECM_\xi(\widehat{\theta}) = E_\xi\left[(\widehat{\theta} - \theta)^2\right]$. Si el estimador es $\xi-$insesgado, el ECM según el diseño coincide con la $\xi-$varianza. Como muestra de la aplicación de esta notación tenemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6

$$E_\xi\left(Y_i\right) = \alpha(x_i)$$

$$E_\xi\left(Y_i^2\right) = \alpha^2(x_i) + \sigma^2(x_i)$$

$$VAR_\xi\left(Y_i\right) = E_\xi\left(Y_i^2\right) - E_\xi^2(Y_i) = \alpha^2(x_i) + \sigma^2(x_i) - \alpha^2(x_i) = \sigma^2(x_i)$$

Por la hipótesis de incorrelación se verifica que

Ejemplo 7

$$COV_\xi(Y_i, Y_j) = E_\xi(Y_i Y_j) - E_\xi(Y_i) E_\xi(Y_j) = \alpha(x_i)\alpha(x_j) - \alpha(x_i)\alpha(x_j) = 0$$

Y en el caso particular de homoscedasticidad, $\sigma^2(x_i) = \sigma^2$

Ejemplo 8

$$E_\xi\left(Y_i^2\right) = \alpha^2(x_i) + \sigma^2$$

$$VAR_\xi(Y_i) = E_\xi\left(Y_i^2\right) - E_\xi^2(Y_i) = \alpha^2(x_i) + \sigma^2 - \alpha^2(x_i) = \sigma^2$$

□

A modo de resumen, se van a considerar dos fuentes de aleatoriedad: la que proviene del plan de muestreo y la que proviene del modelo de diseño fijo, que con la variación de $\mathcal{X}$ en $[0, 1]$ constituyen las tres fuentes de variación del problema.

Asociadas a cada etiqueta existen dos variables $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, la primera determinística y de tal modo que cuando se considera su relieve acumulado, o función de distribución, constituyen una secuencia regular generada por $f(x)$; la segunda, aleatoria siguiendo el modelo de superpoblación antes expuesto.

Es decir, se dispone de una p.f. embebida en una secuencia de pp.ff. en la que se consideran dos variables

$$\mathcal{P}_t = \{(i, x_i, Y_i) : i \in \mathrm{U}_t\}$$

una conocida o conocible (parte analítica del modelo de superpoblación) y otra que es función de la primera más una componente aleatoria.

Con esto se superan dos problemas, uno el que achacaba de fatalista a la perspectiva de población fija, al admitir la posibilidad de que se hayan producido otros valores de la segunda variable. Y otro, el de que en numerosas ocasiones resulta artificial suponer que la primera variable es aleatoria.

Y para finalizar, es posible que la cita de Barnard siga teniendo vigencia actualmente en estadística social, aunque convendría matizarla en varios puntos. En primer lugar, en ocasiones el objetivo no es un colectivo tan grande como la población de un estado de tamaño medio o grande como el Reino Unido sino colectivos reducidos para los cuales se dispone de marcos adecuados (titulados en una universidad, plantilla de una gran empresa o grupo de empresas...). En segundo lugar, desde 1973 ha habido un notable avance en los registros de población y lo que en numerosas ocasiones le interesa al público es información coyuntural que se refiera a la población real en un momento concreto.

2.5. Resultados generales

2.5.1. Resultados relativos a los descriptores

Se ha introducido en el Capítulo 1 la p.f. correspondiente al universo U como $\{(i, x_i, Y_i) : 1 \leq i \leq N\}$, siendo (i, x_i, Y_i) la observación etiquetada correspondiente a la $i-$ésima unidad. A lo largo de la memoria será preciso tratar con pp.ff. más generales en las que se estudien varias variables simultáneamente, por ello se generalizará el concepto de p.f..

En esta subsección no se prejuzga el carácter determinístico o estocástico final de la variable concreta, simplemente se emplean x minúsculas por comodidad y tradición. Sea $(\mathcal{I}, \mathfrak{X}) = (\mathcal{I}, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_l) = \{(i, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{il}) : \ i = 1, \ldots, N\}$, una p.f. con l variables. Se denotará por

$$]r_1, r_2, \ldots, r_l[\,(\mathcal{I}, \mathfrak{X}) = \sum_{i=1}^{N} x_{i1}^{r_1} x_{i2}^{r_2}, \ldots, x_{il}^{r_l}$$

Como en lo sucesivo siempre se empleará el mismo conjunto de etiquetas, se abreviará

$$]r_1, r_2, \ldots, r_l[\,(\mathfrak{X}) = \sum_{i=1}^{N} x_{i1}^{r_1} x_{i2}^{r_2}, \ldots, x_{il}^{r_l},$$

entonces se define

$$A_{r_1, r_2, \ldots, r_l}(\mathfrak{X}) = \frac{]r_1, r_2, \ldots, r_l[\,(\mathfrak{X})}{]0, 0, \ldots, 0[\,(\mathfrak{X})}.$$

En algunas situaciones para mejorar la presentación tipográfica, se prescindirá de las comas si no da lugar a confusión. Si se denota por

$$(\mathcal{I}, \dot{\mathfrak{X}}) = \left(\mathcal{I}, \dot{\mathcal{X}}_1, \dot{\mathcal{X}}_2, \ldots, \dot{\mathcal{X}}_l\right) = \{(i, x_{i1} - A_{10\ldots0}, x_{i2} - A_{01\ldots0}, \ldots, x_{il} - A_{00\ldots1}) : \ i = 1, \ldots, N\}$$

la población derivada obtenida tras centrar la población original, se define

$$M_{r_1, r_2, \ldots, r_l}(\mathfrak{X}) = A_{r_1, r_2, \ldots, r_l}(\dot{\mathfrak{X}})$$

Después de introducir esta notación, se está en condiciones de presentar una serie de resultados conocidos, pero poco tratados, para $l = 2$, 3 ó 4 que se emplearán en lo sucesivo

Resultado 11

$$M_{111} = A_{111} - A_{110}A_{001} - A_{101}A_{010} - A_{100}A_{011} + 2A_{100}A_{010}A_{001} \tag{2.1}$$

Demostración.- Por definición

$$M_{111} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_{i1} - A_{100})(x_{i2} - A_{010})(x_{i3} - A_{001})$$

como

$$(x_{i1} - A_{100})(x_{i2} - A_{010})(x_{i3} - A_{001}) = x_{i1}x_{i2}x_{i3} - x_{i1}x_{i2}A_{001} - x_{i1}A_{010}x_{i3} + x_{i1}A_{010}A_{001} +$$

$$-A_{100}x_{i2}x_{i3} + A_{100}x_{i2}A_{001} + A_{100}A_{010}x_{i3} - A_{100}A_{010}A_{001}$$

Si se suma en i y se divide por N, se obtiene

$$M_{111} = A_{111} - A_{110}A_{001} - A_{101}A_{010} + A_{100}A_{010}A_{001} - A_{100}A_{011} +$$

$$+A_{100}A_{010}A_{001} + A_{100}A_{010}A_{001} - A_{100}A_{010}A_{001}$$

Q.E.D.

Corolario 5

$$M_{12} = A_{12} - 2A_{11}A_{01} - A_{10}A_{02} + 2A_{10}A_{01}^2 \tag{2.2}$$

$$M_3 = A_3 - 3A_2A_1 + 2A_1^3$$

Demostración.- Si se considera dos de las tres variables idénticas, se obtiene

$$M_{12} = A_{12} - A_{11}A_{01} - A_{11}A_{01} - A_{10}A_{02} + 2A_{10}A_{01}A_{01} =$$

$$= A_{12} - 2A_{11}A_{01} - A_{10}A_{02} + 2A_{10}A_{01}^2$$

Del mismo modo, si se considera las tres variables idénticas

$$M_3 = A_3 - 2A_2A_1 - A_1A_2 + 2A_1A_1^2 = A_3 - 3A_2A_1 + 2A_1^3$$

Q.E.D.

Resultado 12

$$M_{1111} = A_{1111} - A_{0111}A_{1000} - A_{1011}A_{0100} - A_{1101}A_{0010} - A_{1110}A_{0001} -$$

$$+A_{1001}A_{0100}A_{0010} + A_{0101}A_{1000}A_{0010} + A_{1000}A_{0100}A_{0011} + \tag{2.3}$$

$$+A_{1100}A_{0010}A_{0001} + A_{1010}A_{0100}A_{0001} + A_{1000}A_{0110}A_{0001} - 3A_{1000}A_{0100}A_{0010}A_{0001}$$

Demostración.- Para calcular

$$M_{1111} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{i1} - A_{1000}\right)\left(x_{i2} - A_{0100}\right)\left(x_{i3} - A_{0010}\right)\left(x_{i3} - A_{0001}\right)$$

habrá que estudiar primero cada sumando

$$\left(x_{i1} - A_{1000}\right)\left(x_{i2} - A_{0100}\right)\left(x_{i3} - A_{0010}\right)\left(x_{i4} - A_{0001}\right) =$$

$$= x_{i1}x_{i2}x_{i3}x_{i4} - x_{i1}x_{i2}A_{0010}x_{i4} - x_{i1}A_{0100}x_{i3}x_{i4} + x_{i1}A_{0100}A_{0010}x_{i4} +$$

$$-A_{1000}x_{i2}x_{i3}x_{i4} + A_{1000}x_{i2}A_{0010}x_{i4} + A_{1000}A_{0100}x_{i3}x_{i4} - A_{1000}A_{0100}A_{0010}x_{i4} +$$

$$-x_{i1}x_{i2}x_{i3}A_{0001} + x_{i1}x_{i2}A_{0010}A_{0001} + x_{i1}A_{0100}x_{i3}A_{0001} - x_{i1}A_{0100}A_{0010}A_{0001} +$$

$$+A_{1000}x_{i2}x_{i3}A_{0001} - A_{1000}x_{i2}A_{0010}A_{0001} - A_{1000}A_{0100}x_{i3}A_{0001} + A_{1000}A_{0100}A_{0010}A_{0001}$$

entonces

$$M_{1111} = A_{1111} - A_{1101}A_{0010} - A_{1011}A_{0100} + A_{1001}A_{0100}A_{0010} +$$

$$-A_{1000}A_{0111} + A_{1000}A_{0101}A_{0010} + A_{1000}A_{0100}A_{0011} - A_{1000}A_{0100}A_{0010}A_{0001} +$$

$$-A_{1110}A_{0001} + A_{1100}A_{0010}A_{0001} + A_{1010}A_{0100}A_{0001} - A_{1000}A_{0100}A_{0010}A_{0001} +$$

$$+A_{1000}A_{0110}A_{0001} - A_{1000}A_{0100}A_{0010}A_{0001} - A_{1000}A_{0100}A_{0010}A_{0001} + A_{1000}A_{0100}A_{0010}A_{0001} =$$

$$= A_{1111} - A_{0111}A_{1000} - A_{1011}A_{0100} - A_{1101}A_{0010} - A_{1110}A_{0001} -$$

$$+A_{1001}A_{0100}A_{0010} + A_{0101}A_{1000}A_{0010} + A_{1000}A_{0100}A_{0011}$$

$$+A_{1100}A_{0010}A_{0001} + A_{1010}A_{0100}A_{0001} + A_{1000}A_{0110}A_{0001} - 3A_{1000}A_{0100}A_{0010}A_{0001}$$

Q.E.D.

Corolario 6

$$M_{22} = A_{22} - 2A_{12}A_{10} - 2A_{21}A_{01} + 4A_{11}A_{10}A_{01} + A_{10}^2A_{02} + A_{20}A_{01}^2 - 3A_{10}^2A_{01}^2$$

$$M_{31} = A_{31} - 3A_{21}A_{10} - A_{30}A_{01} + 3A_{11}A_{10}^2 + 3A_{20}A_{10}A_{01} - 3A_{10}^3A_{01}$$

$$M_4 = A_4 - 4A_3A_1 + 6A_2A_1^2 - 3A_1^4$$

Demostración.- Si se consideran dos de las cuatro variables idénticas y las otras dos también idénticas, se obtiene

$$M_{22} = A_{22} - A_{12}A_{10} - A_{12}A_{10} - A_{21}A_{01} - A_{21}A_{01} +$$

$$+A_{11}A_{10}A_{01} + A_{11}A_{10}A_{01} + A_{10}A_{10}A_{02} +$$

$$+A_{20}A_{01}A_{01} + A_{11}A_{10}A_{01} + A_{10}A_{11}A_{01} - 3A_{10}A_{10}A_{01}A_{01} =$$

$$= A_{22} - 2A_{12}A_{10} - 2A_{21}A_{01} + 4A_{11}A_{10}A_{01} + A_{10}^2A_{02} + A_{20}A_{01}^2 - 3A_{10}^2A_{01}^2$$

Si se consideran tres de las cuatro variables idénticas, se obtiene

$$M_{31} = A_{31} - A_{21}A_{10} - A_{21}A_{10} - A_{21}A_{0010} - A_{30}A_{01} -$$

$$+A_{11}A_{10}A_{10} + A_{11}A_{10}A_{10} + A_{10}A_{10}A_{11}$$

$$+A_{20}A_{10}A_{01} + A_{20}A_{10}A_{01} + A_{10}A_{20}A_{01} - 3A_{10}A_{10}A_{10}A_{01} =$$

$$= A_{31} - 3A_{21}A_{10} - A_{30}A_{01} + 3A_{11}A_{10}A_{10} + 3A_{20}A_{10}A_{01} - 3A_{10}^3A_{01}$$

Obsérvese que ambas igualdades conducen a la tercera Q.E.D.

Corolario 7

$$M_{211} = A_{211} - 2A_{111}A_{100} - A_{201}A_{010} - A_{210}A_{001} -$$

$$+2A_{101}A_{100}A_{010} + A_{100}^2A_{011} +$$

$$+A_{200}A_{010}A_{001} + 2A_{110}A_{100}A_{001} -$$

$$-3A_{100}^2A_{010}A_{001}$$

Demostración.-

$$M_{211} = A_{211} - A_{111}A_{100} - A_{111}A_{100} - A_{201}A_{010} - A_{210}A_{001} -$$

$$+A_{101}A_{100}A_{010} + A_{101}A_{100}A_{010} + A_{100}A_{100}A_{011}$$

$$+A_{200}A_{010}A_{001} + A_{110}A_{100}A_{001} + A_{100}A_{110}A_{001} - 3A_{100}A_{100}A_{010}A_{001} =$$

$$= A_{211} - 2A_{111}A_{100} - A_{201}A_{010} - A_{210}A_{001} + 2A_{101}A_{100}A_{010} + A_{100}^2A_{011} +$$

$$+A_{200}A_{010}A_{001} + 2A_{110}A_{100}A_{001} - 3A_{100}^2A_{010}A_{001}$$

Q.E.D.

Intercambiando papeles, se podría obtener las siguientes igualdades que se presentan como ejemplo

Ejemplo 9

$$M_{13} = A_{13} - A_{03}A_{10} - 3A_{12}A_{01} + 3A_{11}A_{01}^2 + 3A_{02}A_{10}A_{01} - 3A_{10}A_{01}^2$$

□

2.5.1.1. Población finita con dos y tres variables

Resultado 13 *Si* $\sum_{i\in \mathrm{U}} x_i = 0$, *entonces*

$$\sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j}\sum x_i z_j = -\sum_{i\in \mathrm{U}} x_i z_i$$

Demostración.-

$$0 = \sum_{i\in \mathrm{U}} x_i \sum_{j\in \mathrm{U}} z_j = \sum_{i\in \mathrm{U}} x_i z_i + \sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j} \sum x_i z_j$$

Q.E.D.

Corolario 8

$$\sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j} \sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq} = -\sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}$$

En una situación general, se puede abusar de la notación y presentar la igualdad anterior de la siguiente forma

$$\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq} = -]0,\ldots,1,\ldots,0,\ldots,1,\ldots,0[\left(\dot{\mathfrak{X}}\right)$$

donde los 1 están respectivamente en los lugares $p-$ésimo y $q-$ésimo y el resto son nulos. En el caso de las dos primeras variables se tiene la siguiente igualdad

Ejemplo 10

$$\sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j} \sum \dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2} = \sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2} = -]1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

□

El corolario anterior se puede generalizar a un número cualquiera de variables del siguiente modo

Lema 2

$$\sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j} \sum \dot{x}_{ip_1}\ldots\dot{x}_{ip_{\nu-1}}\dot{x}_{jp_\nu} = -\sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip_1}\ldots\dot{x}_{ip_\nu}$$

Demostración.- Obsérvese que

$$\sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j} \sum \dot{x}_{ip_1}\ldots\dot{x}_{ip_{\nu-1}}\dot{x}_{jp_\nu} = \sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j} \sum z_i \dot{x}_{jp_\nu}$$

y aplíquese el resultado 13 para obtener la igualdad Q.E.D.

Corolario 9

$$\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr} = -\sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}$$

Ejemplo 11

$$\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{j3} = -]1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

$$\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{j5} = -]1,0,1,0,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

□

Lema 3 *Si* $\sum_{i\in \mathrm{U}} x_i = 0$, *entonces*

$$\sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} x_i z_j z'_k = -\sum_{i\in \mathrm{U}} x_i z_i z'_i -$$

$$-\left(\sum\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} x_i z_i z'_j + \sum\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} x_i z_j z'_i + \sum\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} x_i z_j z'_j\right)$$

Demostración.-

$$0 = \sum_{i\in \mathrm{U}} x_i \sum_{j\in \mathrm{U}} z_j \sum_{k\in \mathrm{U}} z'_k =$$

$$= \sum_{i\in \mathrm{U}} x_i z_i z'_i + \sum\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} x_i z_i z'_j + \sum\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} x_i z_j z'_i + \sum\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} x_i z_j z'_j + \sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} x_i z_j z'_k$$

Q.E.D.

Corolario 10

$$\sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{kr} = 2\sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}$$

Demostración.- La igualdad se obtiene sin más que considerar el lema y el corolario anteriores Q.E.D.

Ejemplo 12

$$\sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{k3} = \sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{k3} = 2\,]1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

□

Esta notación es muy prolija, para facilitar la lectura se va a introducir una notación abreviada, con $\sum_{\mathrm{U}}$ se denotará la suma de monomios homogéneos de grado igual al número de variables que se estén considerando, todos sus factores componentes con el mismo subíndice recorriendo la lista U. Se presentan a continuación algunos casos particulares cuando se considera una, dos y las cinco variables

Ejemplo 13

$$\sum_{\mathrm{U}} = \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip} = 0$$

$$\sum_{\mathrm{U}} = \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}$$

$$\sum_{\mathrm{U}} =]1,1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}}) = \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{i4}\dot{x}_{i5}$$

□

Se denotará mediante $\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}}$ la suma de monomios homogéneos de grado igual al número de variables que se estén considerando, pero con dos subíndices distintos, ambos recorriendo la lista pero excluyendo la posibilidad de que coincidan, es decir $(i,j) \in \mathrm{U}^{(2}$. Se presentan a continuación algunos casos particulares cuando se consideran dos y tres variables

Ejemplo 14

$$\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} = \sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}$$

$$\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} = \sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{ir} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{jr}$$

□

En el caso de cuatro variables, $\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}}$ estará constituido por 7 monomios de dos tipos, $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}$ y $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}$ como se ve en el siguiente ejemplo

Ejemplo 15

$$\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} = \sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt} +$$

$$+ \sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{it} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}$$

$$+ \sum_{i,j\in \mathrm{U}, i\neq j}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{it}$$

□

En el caso de cinco variables, $\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}}$ estará constituido también por dos tipos de monomios $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}$ y $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{jv}$. Del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{jv}$, hay 5 sumandos y del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}$ hay 10 sumandos.

Se denotará mediante $\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}}$ la suma de monomios homogéneos de grado igual al número de variables que se estén considerando, pero con tres subíndices distintos, es decir $(i,j,k) \in \mathrm{U}^{(3}$. Se presentan a continuación algunos casos particulares cuando se consideran tres y cuatro variables

Ejemplo 16

$$\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}} = \sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{kr},$$

$$\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}} = \sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt} + \sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{kt} + \sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{kr}\dot{x}_{it} +$$

$$+ \sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{jp}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{kt} + \sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{jp}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{kr}\dot{x}_{it} + \sum\sum\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{jp}\dot{x}_{kq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it},$$

□

En el caso de cinco variables, $\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}}$ estará constituido por dos tipos de monomios $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv}$ y $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv}$. Del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv}$, habrá 15 sumandos y del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv}$, habrá 10 sumandos.

De modo análogo, se emplearán las siguientes notaciones

$$\sum\overset{4}{\cdots}\sum_{\mathrm{U}^{(4}} \quad \text{y} \quad \sum\overset{5}{\cdots}\sum_{\mathrm{U}^{(5}}.$$

La primera suma estará constituida por monomios del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt}\dot{x}_{lv}$ y la segunda por $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{kr}\dot{x}_{lt}\dot{x}_{mv}$.

Lema 4 *Si el número de variables en la p.f. es k, entonces*

$$\sum\overset{k}{\cdots}\sum_{\mathrm{U}^{(k}} = \sum_{j_1\neq j_2\cdots j_k\neq j_1;\mathrm{U}} \overset{k}{\cdots}\sum x_{j_1 i_1}\ldots x_{j_k i_k}$$

En el caso de que $k = 5$ se tiene que

Ejemplo 17

$$\sum\overset{5}{\cdots}\sum_{\mathrm{U}^{(5}} = \sum_{i\neq j\cdots m\neq i;\mathrm{U}} \overset{5}{\cdots}\sum \dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{k3}\dot{x}_{l4}\dot{x}_{m5}$$

En el caso de que la p.f. esté constituida por las tres primeras variables se tienen las siguientes igualdades

Ejemplo 18

$$\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} = -3]1,1,1[(\dot{\mathfrak{x}})$$

$$\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}} = 2]1,1,1[(\dot{\mathfrak{x}})$$

la primera por los ejemplos 11 y 14 y la segunda por los 12 y 16 □

2.5.1.2. Población finita con cuatro variables

Resultado 14

$$\sum\sum\sum\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{kr}\dot{x}_{lt} = -\sum_{\mathrm{U}} - \sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} - \sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}}$$

Demostración.-

$$0 = \sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\sum_{j\in\mathrm{U}}\dot{x}_{jq}\sum_{k\in\mathrm{U}}\dot{x}_{kr}\sum_{l\in\mathrm{U}}\dot{x}_{lt} =$$

$$= \sum_{\mathrm{U}} + \sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} + \sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}} + \sum\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(4}}$$

y, como se está considerando cuatro variables, por el lema 4

$$\sum\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(4}} = \sum\sum\sum\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{kr}\dot{x}_{lt}$$

Q.E.D.

Resultado 15

$$\sum\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} = \sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\sum_{j\in\mathrm{U}}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} - \sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}$$

Demostración.- Sean $z_i = \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}$ y $z'_j = \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}$. Sustitúyanse en el producto de dos sumas y se obtiene la igualdad Q.E.D.

En el caso de que la p.f. esté constituida por sólo las 4 primeras variables se tiene la siguiente igualdad

Corolario 11

$$\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} = -7\,]1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}}) +$$

$$+\,(]1,1,0,0[\,]0,0,1,1[+]1,0,1,0[\,]0,1,0,1[+]1,0,0,1[\,]0,1,1,0[)\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

Demostración.- Se ha visto en un ejemplo anterior que la suma

$$\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}}$$

está compuesta por 7 sumandos, 4 de un tipo y 3 de otro

$$\sum_{\mathrm{U}^{(2}}\sum = -4\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} - 3\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} +$$

$$+ (]1,1,0,0[]0,0,1,1[+]1,0,1,0[]0,1,0,1[+]1,0,0,1[]0,1,1,0[)\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

sin más que aplicar el resultado anterior y el lema 2 al ejemplo 15 Q.E.D.

En general se tiene la siguiente igualdad

Resultado 16

$$\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt} = 2\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} - \sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\sum_{j\in \mathrm{U}}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}$$

Demostración.- Considérese $z_i = \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}$ en

$$0 = \sum_{i\in \mathrm{U}} z_i \sum_{j\in \mathrm{U}}\dot{x}_{jr}\sum_{k\in \mathrm{U}}\dot{x}_{kt} = \sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt} +$$

$$+\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{it} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} + \sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt} =$$

$$= \sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} - \sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} - \sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}$$

$$-\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} + \sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\sum_{j\in \mathrm{U}}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} + \sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt}$$

y de esta cadena de igualdades se sigue el resultado Q.E.D.

En el caso de que la p.f. esté constituida por sólo las 4 primeras variables se tiene la siguiente igualdad

Corolario 12

$$\sum_{\mathrm{U}^{(3}}\sum\sum = 12\,]1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}}) -$$

$$-2\,(]1,1,0,0[]0,0,1,1[+]1,0,1,0[]0,1,0,1[+]1,0,0,1[]0,1,1,0[)\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

Demostración.- Se ha visto en un ejemplo anterior, el 16, que la suma

$$\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}}$$

está compuesta por 6 sumandos. Cada sumando da lugar a $2\,]1,1,1,1[$ que multiplicado por 6 resulta un total de 12. El otro coeficiente, 2, es el resultado de la aparición de sumandos iguales. Por ejemplo

$$\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\sum \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{j3}\dot{x}_{k4} = 2\,]1,1,1,1[\,-\,]1,1,0,0[\,]0,0,1,1[$$

$$\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\sum \dot{x}_{j1}\dot{x}_{k2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{i4} = 2\,]1,1,1,1[\,-\,]0,0,1,1[\,]1,1,0,0[$$

Q.E.D.

Por el resultado 14 y los corolarios 11 y 12, se verifica

Ejemplo 19

$$\sum\overset{4}{\cdots}\sum_{\mathrm{U}^{(4}} = -6\,]1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+\,(]1,1,0,0[\,]0,0,1,1[+]1,0,1,0[\,]0,1,0,1[+]1,0,0,1[\,]0,1,1,0[)\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

porque

$$\sum\overset{4}{\cdots}\sum_{\mathrm{U}^{(4}} = \sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\sum\sum \dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{k3}\dot{x}_{l4} = (-1+7-12)\,]1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+(-1+2)\,(]1,1,0,0[\,]0,0,1,1[+]1,0,1,0[\,]0,1,0,1[+]1,0,0,1[\,]0,1,1,0[)\,(\dot{\mathfrak{X}})$$

□

2.5.1.3. Población finita con cinco variables

Resultado 17

$$\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq m,m\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\sum\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{kr}\dot{x}_{lt}\dot{x}_{mv} = -\sum_{\mathrm{U}} - \sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} - \sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}} - \sum\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(4}}$$

Demostración.-

$$0=\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\sum_{j\in \mathrm{U}}\dot{x}_{jq}\sum_{k\in \mathrm{U}}\dot{x}_{kr}\sum_{l\in \mathrm{U}}\dot{x}_{lt}\sum_{lm\in \mathrm{U}}\dot{x}_{mv}=$$

$$=\sum_{\mathrm{U}}+\sum_{\mathrm{U}^{(2}}\sum+\sum_{\mathrm{U}^{(3}}\sum\sum+\sum_{\mathrm{U}^{(4}}\sum\sum\sum+\sum_{\mathrm{U}^{(5}}\sum\sum\sum\sum$$

y, como se están considerando cinco variables, por el lema 4

$$\sum_{\mathrm{U}^{(5}}\sum\sum\sum\sum\sum=\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq m,m\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\sum\sum\sum\dot{x}_{ip}\dot{x}_{jq}\dot{x}_{kr}\dot{x}_{lt}\dot{x}_{mv}$$

Q.E.D.

Sumas con 2 subíndices recorriendo el universo Se va a estudiar una serie de igualdades auxiliares que permitirán permutando las variables llegar a los resultados deseados

Lema 5

$$\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}=\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\sum_{j\in \mathrm{U}}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}-\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv}$$

Demostración.-

$$\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}=\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}=$$

$$=\sum_{i\in \mathrm{U}}z_i\dot{x}_{ir}\sum_{j\in \mathrm{U}}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}-\sum_{i\in \mathrm{U}}z_i\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv}=$$

$$=\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\sum_{j\in \mathrm{U}}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv}-\sum_{i\in \mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv}$$

sin más que seguir la demostración del resultado 15 Q.E.D.

En el caso de que la p.f. esté constituida por las cinco variables se tiene la siguiente igualdad

Proposición 1

$$\sum_{\mathrm{U}^{(2}}\sum=-15\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+]1,1,1,0,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,0,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})+]1,1,0,1,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,1,0,1[(\dot{\mathfrak{X}})+\overset{10}{\cdots}+]0,0,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})]1,1,0,0,0[(\dot{\mathfrak{X}})$$

Demostración.- Como se ha comentado anteriormente existen 5 sumandos del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{jv}$. Del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}$ existen 10, cada uno de los cuales da lugar a su vez a dos sumandos, por ejemplo,

$$\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{j4}\dot{x}_{j5} =]1,1,1,0,0[]0,0,0,1,1[-]1,1,1,1,1[$$

$$\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum \dot{x}_{j1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{i4}\dot{x}_{i5} =]0,0,1,1,1[]1,1,0,0,0[-]1,1,1,1,1[$$

Por tanto,

$$\sum_{\mathrm{U}^{(2}}\sum = -5\,]1,1,1,1,1[-10\,]1,1,1,1,1[+]1,1,1,0,0[]0,0,0,1,1[+]1,1,0,1,0[]0,0,1,0,1[+$$

$$+]1,1,0,0,1[]0,0,1,1,0[+]1,0,0,1,1[]0,1,1,0,0[+]1,0,1,1,0[]0,1,0,0,1[+]1,0,1,0,1[]0,1,0,1,0[+$$

$$+]0,1,1,1,0[]1,0,0,0,1[+]0,1,1,0,1[]0,0,0,1,1[+]0,1,1,0,1[]0,0,0,1,1[+]0,0,1,1,1[]1,1,0,0,0[$$

Q.E.D.

Sumas con 3 subíndices recorriendo el universo

Lema 6

$$\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv} = 2\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} - \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}$$

Demostración.- Si se considera $z_i = \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}$ y se aplica el lema 2 y el lema anterior

$$0 = \sum_{i\in\mathrm{U}} z_i \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jt} \sum_{k\in\mathrm{U}} \dot{x}_{kv} = \sum_{i\in\mathrm{U}} z_i\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{it}\dot{x}_{jv} +$$

$$+\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{jt}\dot{x}_{iv} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} + \sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum z_i\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv} =$$

$$= \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} - \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} - \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} -$$

$$+ \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir} \sum_{j\in \mathrm{U}} \dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} - \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} + \sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \sum\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv}$$

Q.E.D.

Ejemplo 20

$$\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \sum\sum\sum \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{j4}\dot{x}_{k5} = 2\,]1,1,1,1,1[\,-\,]1,1,1,0,0[\,]0,0,0,1,1[$$

□

Lema 7

$$\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \sum\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv} = 2\sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} -$$

$$- \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv} \sum_{j\in \mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} - \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv}$$

Demostración.- Por el lema 3, el lema 2 y el lema 5

$$\sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \sum\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv} = \sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \sum\sum\sum z_i z'_j \dot{x}_{kv} = \sum_{i\neq j, j\neq k, k\neq i;\mathrm{U}} \sum\sum\sum \dot{x}_{kv} z_i z'_j =$$

$$= -\sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{iv} z_i z'_i - \left(\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum\sum \dot{x}_{iv} z_i z'_j + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum\sum \dot{x}_{iv} z_j z'_i + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum\sum \dot{x}_{iv} z_j z'_j \right) =$$

$$= -\sum_{i\in \mathrm{U}} z_i z'_i \dot{x}_{iv} - \left(\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum\sum z_i z'_j \dot{x}_{iv} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum\sum z_i z'_j \dot{x}_{jv} - \sum_{i\in \mathrm{U}} z_i z'_i \dot{x}_{iv} \right) =$$

$$= -\left(\sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum\sum z_i z'_j \dot{x}_{iv} + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum\sum z_i z'_j \dot{x}_{jv} \right) =$$

$$= -\left(\sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv} \sum_{j\in \mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} - \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} + \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in \mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} - \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} \right) =$$

$$= 2\sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} - \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv} \sum_{j\in \mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} - \sum_{i\in \mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in \mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}$$

Q.E.D.

Ejemplo 21

$$\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{j3}\dot{x}_{j4}\dot{x}_{k5}=2\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})-]1,1,0,0,1[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,1,1,0[(\dot{\mathfrak{X}})-]1,1,0,0,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})$$

□

Proposición 2 *En el caso de cinco variables, se verifica que*

$$\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}}\sum=50\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})-$$

$$-4\left\{]1,1,1,0,0[]0,0,0,1,1[+]1,1,0,1,0[]0,0,1,0,1[+\overset{10}{\cdots}+]0,0,1,1,1[]1,1,0,0,0[\right\}(\dot{\mathfrak{X}})$$

Demostración.- Como ya se ha comentado, del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv}$, existen 10 sumandos y del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{kv}$ 15 sumandos.

$$10\cdot 2\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})-$$

$$-\left\{]1,1,1,0,0[]0,0,0,1,1[+]1,1,0,1,0[]0,0,1,0,1[+\overset{10}{\cdots}+]0,0,1,1,1[]1,1,0,0,0[\right\}(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+15\cdot 2\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})-$$

$$-3\left\{]1,1,1,0,0[]0,0,0,1,1[+]1,1,0,1,0[]0,0,1,0,1[+\overset{10}{\cdots}+]0,0,1,1,1[]1,1,0,0,0[\right\}(\dot{\mathfrak{X}})$$

Para ver la existencia de triplicados, obsérvese que, por ejemplo, $]1,1,1,0,0[]0,0,0,1,1[$ proviene de tres configuraciones $x_{i1}x_{j2}x_{j3}x_{k4}x_{k5}$, $x_{i1}x_{j2}x_{i3}x_{k4}x_{k5}$ y $x_{i1}x_{i2}x_{j3}x_{k4}x_{k5}$ Q.E.D.

Sumas con 4 subíndices recorriendo el universo

Lema 8

$$\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\sum\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt}\dot{x}_{lv}=$$

$$=\sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\sum_{j\in\mathrm{U}}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}+\sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{it}\sum_{j\in\mathrm{U}}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jv}+\sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv}\sum_{j\in\mathrm{U}}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}+$$

$$+2\sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv}-6\sum_{i\in\mathrm{U}}\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv}$$

Demostración.-

$$\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt}\dot{x}_{lv} = \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U},j\neq i} \dot{x}_{jr} \sum_{k\in\mathrm{U},k\neq i,k\neq j} \dot{x}_{kt} \sum_{l\in\mathrm{U},l\neq i,l\neq j,l\neq k} \dot{x}_{lv} =$$

$$= \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U},j\neq i} \dot{x}_{jr} \sum_{k\in\mathrm{U},k\neq i,k\neq j} \dot{x}_{kt} \left(\sum_{l\in\mathrm{U}} \dot{x}_{lv} - \dot{x}_{iv} - \dot{x}_{jv} - \dot{x}_{kv}\right) =$$

$$= -\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv} \sum_{j\in\mathrm{U},j\neq i} \dot{x}_{jr} \sum_{k\in\mathrm{U},k\neq i,k\neq j} \dot{x}_{kt} -$$

$$-\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U},j\neq i} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jv} \sum_{k\in\mathrm{U},k\neq i,k\neq j} \dot{x}_{kt} -$$

$$-\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U},j\neq i} \dot{x}_{jr} \sum_{k\in\mathrm{U},k\neq i,k\neq j} \dot{x}_{kt}\dot{x}_{kv} = A + B + C$$

Por el lema 6

$$A = -\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt}\dot{x}_{iv} =$$

$$= -2\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} + \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}$$

Por el lema 7

$$B = -\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt}\dot{x}_{jv} =$$

$$= -2\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it} + \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{it} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jv} + \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv}$$

Y para calcular C, por el lema 3 y el lema 2

$$C = -\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U},j\neq i} \dot{x}_{jr} \sum_{k\in\mathrm{U},k\neq i,k\neq j} \dot{x}_{kt}\dot{x}_{kv} = -\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq i;\mathrm{U}}\sum\sum z_i\dot{x}_{jr}z'_k =$$

$$= \sum z_i\dot{x}_{ir}z'_i + \left(\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{ir}z'_j + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{jr}z'_i + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{jr}z'_j\right) =$$

$$= \sum z_i\dot{x}_{ir}z'_i + \left(\sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{ir}z'_j - \sum z_i\dot{x}_{ir}z'_i + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}}\sum z_i\dot{x}_{jr}z'_j\right) =$$

$$= \sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum z_i \dot{x}_{ir} z'_j + \sum_{i\neq j;\mathrm{U}} \sum z_i \dot{x}_{jr} z'_j =$$

$$= \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} - \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} + \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} - \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} =$$

$$= \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jt}\dot{x}_{iv} + \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} - 2\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv}$$

por el lema 5. Reuniendo los tres sumandos

$$A+B+C = \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} - 2\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} +$$

$$+ \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{it} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jv} + \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} - 2\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} +$$

$$+ \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} + \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} - 2\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv} =$$

$$= \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{iv} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt} + \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{it} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jv} +$$

$$+ \sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} + 2\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq} \sum_{j\in\mathrm{U}} \dot{x}_{jr}\dot{x}_{jt}\dot{x}_{jv} - 6\sum_{i\in\mathrm{U}} \dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{ir}\dot{x}_{it}\dot{x}_{iv}$$

Q.E.D.

Proposición 3 *En el caso de cinco variables, se verifica que*

$$\sum\sum\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(4}} = -60\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{x}}) -$$

$$+5\left\{]1,1,1,0,0[(\dot{\mathfrak{x}})]0,0,0,1,1[(\dot{\mathfrak{x}}) +]1,1,0,1,0[(\dot{\mathfrak{x}})]0,0,1,0,1[(\dot{\mathfrak{x}}) + \overset{10}{\cdots} +]0,0,1,1,1[(\dot{\mathfrak{x}})]1,1,0,0,0[(\dot{\mathfrak{x}})\right\}$$

Demostración.- Del tipo $\dot{x}_{ip}\dot{x}_{iq}\dot{x}_{jr}\dot{x}_{kt}\dot{x}_{lv}$ existen 10 sumandos, por tanto

$$\sum\sum\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(4}} = -60\,]1,1,1,1,1[+ 5\,\{]1,1,1,0,0[]0,0,0,1,1[+ \cdots +]0,0,1,1,1[]1,1,0,0,0[\}$$

aplicando el lema anterior, 60 proviene de 10 por 6 y la existencia de quintuplicados. Por ejemplo, $]1,1,1,0,0[]0,0,0,1,1[$ proviene de $\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{j3}\dot{x}_{k4}\dot{x}_{l5}$, de $\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{j1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{k4}\dot{x}_{l5}$, de $\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{k4}\dot{x}_{l5}$ y dos de $\sum_{i\neq j,j\neq k,k\neq l,l\neq i;\mathrm{U}} \dot{x}_{j1}\dot{x}_{k2}\dot{x}_{l3}\dot{x}_{i4}\dot{x}_{i5}$ Q.E.D.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

2.5.2. Resultados generales relativos al plan

Resultado 18 *Se verifica que*

$$\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2 = \left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right) + \theta_2\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right) + \theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)$$

Demostración.-

$$\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2 = \hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\hat{\theta}_2 + \theta_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2 = \left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\hat{\theta}_2 + \theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right) =$$

$$= \left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2 + \theta_2\right) + \theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right) =$$

$$= \left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right) + \theta_2\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right) + \theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)$$

Q.E.D.

A lo largo de esta subsección, sea $\left\{\hat{\theta}_j\right\}_{j=1}^{J}$ un conjunto de estadísticos, tal que cada $\hat{\theta}_j$ es un estimador $p-$insesgado de θ_j.

Corolario 13 *Para $J = 2$, el sesgo de $\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2$ como estimador de $\theta_1\theta_2$ admite la siguiente expresión*

$$B_p\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\right) = COV_p\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$$

Demostración.- Si se toman $p-$esperanzas en el resultado anterior, se obtiene

$$E_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2\right] = E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] + \theta_2 E_p\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right) + \theta_1 E_p\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right) = COV_p\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right)$$

Q.E.D.

Resultado 19 *Para $J = 3$, se verifica que*

$$E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] = \theta_1 COV_p\left[\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3\right] + E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right]$$

Demostración.-

$$E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] = E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1 + \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] =$$

$$= E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]=$$

$$= E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\theta_1 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right]$$

Q.E.D.

Resultado 20 *Para $J=3$, se verifica que*

$$E_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_3\right]=\theta_1\theta_2\theta_3+\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]+\theta_1 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right]+\theta_2 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]$$

Demostración.- Si se desarrolla dentro de la $p-$esperanza

$$E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2-\theta_2+\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3+\theta_3\right)\right]=E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\theta_3\right]+E_p\left[\hat{\theta}_1\theta_2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+E_p\left[\hat{\theta}_1\theta_2\theta_3\right]=$$

$$= E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\theta_3 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+\theta_2 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\theta_1\theta_2\theta_3.$$

Por el resultado anterior, se verifica que

$$E_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_3\right]=\theta_1\theta_2\theta_3+\theta_3 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+\theta_2 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+\theta_1 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right]+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]$$

y de aquí se obtiene la igualdad Q.E.D.

Corolario 14 *Para $J=3$, el sesgo de $\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_3$ como estimador de $\theta_1\theta_2\theta_3$ admite la siguiente expresión*

$$B_p\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_3\right)=\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]+\theta_1 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right]+\theta_2 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]$$

Resultado 21 *Para $J = 4$, se verifica que*

$$E_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right] = \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 + \theta_1\theta_2 COV_p\left[\hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4\right] + \theta_1\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_4\right] + \theta_1\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3\right] +$$

$$+\theta_2\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_4\right] + \theta_2\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_3\right] + \theta_3\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right] +$$

$$+\theta_1 E\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] +$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right]$$

Demostración.- Si se desarrolla dentro de la $p-$esperanza, se obtiene que

$$E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2 + \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3 + \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4 + \theta_4\right)\right] =$$

$$= E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\theta_4\right] +$$

$$+E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\theta_3\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + E_p\left[\hat{\theta}_1\theta_2\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+E_p\left[\hat{\theta}_1\theta_2\theta_3\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + E_p\left[\hat{\theta}_1\theta_2\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\theta_4\right] +$$

$$+E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\theta_3\theta_4\right] + \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 =$$

$$= E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_4 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] +$$

$$+\theta_3 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_2 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+\theta_2\theta_3 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_2\theta_4 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] +$$

$$+\theta_3\theta_4 E_p\left[\hat{\theta}_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] + \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 =$$

$$= \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 + E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1 + \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+\theta_1\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right]+\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+\theta_1\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right]+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_1\theta_2 COV_p\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right]+\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_2\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right]+\theta_2\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right]+\theta_3\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]=$$

$$=\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_1\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right]+\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+\theta_1\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right]+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_1\theta_2 COV_p\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right]+\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$
$$+\theta_2\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right]+\theta_2\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right]+\theta_3\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right],$$

tras aplicar el resultado 19 Q.E.D.

Corolario 15 *Para $J=4$, el sesgo de $\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4$ como estimador de $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$ admite la siguiente expresión*

$$B_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right]=\theta_1\theta_2 COV_p\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right]+\theta_1\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right]+\theta_1\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right]+$$

$$+\theta_2\theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right]+\theta_2\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right]+\theta_3\theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]+$$

$$+\theta_1 E\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]$$

Resultado 22 *Para $J = 4$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 - \theta_3\theta_4\right)\right] =$$

$$= \theta_2\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_3\right) + \theta_2\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_4\right) + \theta_1\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3\right) + \theta_1\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_4\right) +$$

$$+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] +$$
$$+\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right]$$

Demostración.-

$$\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2 = \left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right) + \theta_2\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right) + \theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)$$

$$\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 - \theta_3\theta_4 = \left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_4\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right) + \theta_3\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)$$

$$\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 - \theta_3\theta_4\right) = \theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\theta_3\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\theta_4\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right) +$$

$$+\theta_2\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\theta_3\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_2\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\theta_4\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right) +$$
$$+\theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_2\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) +$$
$$+\theta_3\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_4\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right) +$$
$$+\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) =$$
$$= \theta_1\theta_3\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_1\theta_4\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right) +$$

$$+\theta_2\theta_3\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_2\theta_4\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right) +$$
$$+\theta_1\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_2\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) +$$
$$+\theta_3\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right) + \theta_4\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right) +$$
$$+\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)$$

Si se toma $p-$esperanzas se tiene que

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)\right]=$$

$$=\theta_2\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right)+\theta_2\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right)+\theta_1\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right)+\theta_1\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right)+$$

$$+\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$
$$+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]$$

Q.E.D.

Corolario 16 *Para $J=2$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^2\right]=\theta_2^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_1\right)+2\theta_1\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)+\theta_1^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_2\right)+$$

$$+2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]$$

Demostración.- Considérese en la demostración anterior $\hat{\theta}_3=\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_4=\hat{\theta}_2$, $\theta_3=\theta_1$ y $\theta_4=\theta_2$

$$\theta_1^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2+$$

$$+2\theta_1\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+2\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2$$

y tómense $p-$esperanzas Q.E.D.

Observación.- Se ha obtenido el error cuadrático medio según el plan de $\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2$ como estimador de $\theta_1\theta_2$.

Resultado 23 *Para $J=3$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]=\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right)+\theta_1 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right)+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]$$

Demostración.- Considérese

$$\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)=\theta_1\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)+$$

$$+\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)+\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)$$

y tómense $p-$esperanzas para obtener el resultado Q.E.D.

Resultado 24 *Para $J=2$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^3\right]=\theta_1^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\right]+3\theta_1^2\theta_2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+\theta_2^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\right]+$$

$$+3\theta_1^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\right]+6\theta_1\theta_2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+3\theta_2^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+$$

$$+3\theta_1E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\right]+3\theta_2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\right]$$

Demostración.- Si se multiplica

$$\theta_1^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2+$$

$$+2\theta_1\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+2\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2$$

por

$$\theta_1\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)+\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)$$

se obtiene

$$\theta_1^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+2\theta_1^2\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+\theta_1\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+$$

$$+2\theta_1^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+\theta_1\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+$$

$$+\theta_1^2\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+2\theta_1\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\theta_2^3\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3+$$

$$+2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+2\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+$$

$$+\theta_1^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+$$

$$+2\theta_1\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+2\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3=$$

$$=\theta_1^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+3\theta_1^2\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+3\theta_1\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\theta_2^3\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3$$

$$+3\theta_1^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+6\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+3\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+$$

$$+3\theta_1\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+3\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3$$

Si se toman $p-$esperanzas, se obtiene el resultado Q.E.D.

Resultado 25 *Para $J=4$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)\right]=$$

$$\theta_1^3\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+3\theta_1^2\theta_2\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_2^3\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_1^3\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+3\theta_1^2\theta_2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\theta_2^3\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\cdots$$

Demostración.- Si se multiplica

$$\theta_1^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+3\theta_1^2\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+3\theta_1\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+\theta_2^3\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3$$

$$+3\theta_1^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+6\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+3\theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)+$$

$$+3\theta_1\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3+3\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2+\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3$$

por

$$\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4=\theta_3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)+\theta_4\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)+\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)$$

se obtiene

$$\theta_1^3\theta_3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)+3\theta_1^2\theta_2\theta_3\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_3\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)+\theta_2^3\theta_3\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)+$$

$$+\theta_1^3\theta_4\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)+3\theta_1^2\theta_2\theta_4\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_4\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)+\theta_2^3\theta_4\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)+\cdots$$

Si se toman $p-$esperanzas, se obtiene

$$\theta_1^3\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+3\theta_1^2\theta_2\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_2^3\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_1^3\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+3\theta_1^2\theta_2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\theta_2^3\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]$$

más momentos producto de orden superior a 4, que en las situaciones posteriores en que se emplee este resultado resultarán de un orden de magnitud menor Q.E.D.

Corolario 17 *Para $J = 2$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2\right)^4\right] = \theta_1^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^4\right] + \theta_2^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^4\right] + 4\theta_1^3\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3\right] +$$

$$+6\theta_1^2\theta_2^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] + 4\theta_1\theta_2^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] + \cdots$$

Demostración.- En la demostración anterior, considérese $\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_4 = \hat{\theta}_2$, $\theta_3 = \theta_1$ y $\theta_4 = \theta_2$

$$\theta_1^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^4\right] + 3\theta_1^3\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3\right] +$$

$$+3\theta_1^2\theta_2^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] + \theta_1\theta_2^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] +$$

$$+\theta_1^3\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3\right] + 3\theta_1^2\theta_2^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] +$$

$$+3\theta_1\theta_2^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] + \theta_2^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^4\right] + \cdots$$

Q.E.D.

Resultado 26 *Para $J = 5$, se verifica que*

$$COV_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3\hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5\right] = \theta_2 COV_p\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_5\right] + \theta_1 COV_p\left[\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_5\right] - \theta_4 COV_p\left[\hat{\theta}_3, \hat{\theta}_5\right] - \theta_3 COV_p\left[\hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5\right] +$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5 - \theta_5\right)\right] - E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5 - \theta_5\right)\right] \qquad (2.4)$$

Demostración.-

$$COV_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3\hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5\right] = COV_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_5\right] - COV_p\left[\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5\right] =$$

$$= E_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_5\right] - E_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\right] E_p\left[\hat{\theta}_5\right] - E_p\left[\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\hat{\theta}_5\right] + E_p\left[\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right] E_p\left[\hat{\theta}_5\right] =$$

$$= E_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_5\right] - E_p\left[\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\right]\theta_5 - E_p\left[\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\hat{\theta}_5\right] + E_p\left[\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right]\theta_5 =$$

$$= \theta_1\theta_2\theta_5 + \theta_5 COV_p\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right] + \theta_1 COV_p\left[\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_5\right] + \theta_2 COV_p\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_5\right] +$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]-$$

$$-\theta_3\theta_4\theta_5-\theta_3COV_p\left[\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_5\right]-\theta_4COV_p\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_5\right]-\theta_5COV_p\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right]+$$

$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]-$$

$$-\theta_5COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]-\theta_5E_p\left[\hat{\theta}_1\right]E_p\left[\hat{\theta}_2\right]+\theta_5COV_p\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right]+\theta_5E_p\left[\hat{\theta}_3\right]E_p\left[\hat{\theta}_4\right]=$$

$$=\theta_1\theta_2\theta_5-\theta_3\theta_4\theta_5+\theta_1COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_5\right]+\theta_2COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_5\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]-\theta_3COV_p\left[\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_5\right]-\theta_4COV_p\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_5\right]-$$

$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]-\theta_1\theta_2\theta_5+\theta_3\theta_4\theta_5=$$

$$=\theta_2COV_p\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_5\right]+\theta_1COV_p\left[\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_5\right]-\theta_4COV_p\left[\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_5\right]-\theta_3COV_p\left[\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_5\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]-E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]$$

Q.E.D.

Resultado 27 *Para $J=4$ estimadores insesgados, se verifica que*

$$E_p\left\{\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right)-(\theta_1\theta_2-\theta_3\theta_4)\right]^2\right\}=$$

$$=\theta_2^2VAR_p\left(\hat{\theta}_1\right)+\theta_1^2VAR_p\left(\hat{\theta}_2\right)+\theta_4^2VAR_p\left(\hat{\theta}_3\right)+\theta_3^2VAR_p\left(\hat{\theta}_4\right)+$$

$$+2\theta_1\theta_2COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)+2\theta_3\theta_4COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right)-$$

$$-2\theta_2\theta_4COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right)-2\theta_2\theta_3COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right)-2\theta_1\theta_4COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right)-2\theta_1\theta_3COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right)-$$

$$-2\theta_1E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-2\theta_2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-$$
$$-2\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+$$

$$+2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]-$$

$$-2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]$$

Demostración.-

$$\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)-\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)\right]^2=$$

$$=\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^2+\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^2-2\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)=$$

Si se toman $p-$esperanzas y se considera el resultado 22 y el corolario 16, se tiene

$$E_p\left\{\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right)-\left(\theta_1\theta_2-\theta_3\theta_4\right)\right]^2\right\}=$$

$$=\theta_2^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_1\right)+2\theta_1\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)+\theta_1^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_2\right)+$$

$$+2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+$$

$$+\theta_4^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_3\right)+2\theta_3\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right)+\theta_3^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_4\right)+$$

$$+2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]-$$

$$-2\theta_2\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right)-2\theta_2\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right)-2\theta_1\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right)-2\theta_1\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right)-$$

$$-2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-$$

$$-2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]-$$
$$-2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]=$$

$$=\theta_2^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_1\right)+\theta_1^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_2\right)+\theta_4^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_3\right)+\theta_3^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_4\right)$$

$$+2\theta_1\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)+2\theta_3\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right)-$$

$$-2\theta_2\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right)-2\theta_2\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right)-2\theta_1\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right)-2\theta_1\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right)-$$

$$-2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-$$
$$-2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]-2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+$$

$$+2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]-$$

$$-2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]$$

Q.E.D.

Resultado 28 *Para $J=8$ estimadores insesgados, se verifica que*

$$E_p\left\{\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right)-(\theta_1\theta_2-\theta_3\theta_4)\right]\left[\left(\hat{\theta}_5\hat{\theta}_6-\hat{\theta}_7\hat{\theta}_8\right)-(\theta_5\theta_6-\theta_7\theta_8)\right]\right\}=$$
$$=\theta_2\theta_6 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_5\right)+\theta_2\theta_5 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_6\right)+\theta_1\theta_6 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_5\right)+\theta_1\theta_5 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_6\right)-$$

$$-\theta_2\theta_8 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_7\right)-\theta_2\theta_7 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_8\right)-\theta_1\theta_8 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_7\right)-\theta_1\theta_7 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_8\right)+$$

$$-\theta_4\theta_6 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_5\right)-\theta_4\theta_5 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_6\right)-\theta_3\theta_6 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_5\right)-\theta_3\theta_5 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_6\right)-$$

$$+\theta_4\theta_8 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_7\right)+\theta_4\theta_7 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_8\right)+\theta_3\theta_8 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_7\right)+\theta_3\theta_7 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_8\right)+$$

$$+\theta_5 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+\theta_6 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]+$$
$$+\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]-$$

$$-\theta_7 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-\theta_8 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\right]-$$
$$-\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-$$
$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-$$

$$-\theta_5 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]-\theta_6 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]+$$
$$-\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]-\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+$$
$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+$$

$$+\theta_7 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-\theta_8 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\right]-$$
$$+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]$$

Demostración.-

$$E_p\left\{\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right)-(\theta_1\theta_2-\theta_3\theta_4)\right]\left[\left(\hat{\theta}_5\hat{\theta}_6-\hat{\theta}_7\hat{\theta}_8\right)-(\theta_5\theta_6-\theta_7\theta_8)\right]\right\}=$$

$$=E_p\left\{\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)-\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)\right]\left[\left(\hat{\theta}_5\hat{\theta}_6-\theta_5\theta_6\right)-\left(\hat{\theta}_7\hat{\theta}_8-\theta_7\theta_8\right)\right]\right\}=$$

$$=E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5\hat{\theta}_6-\theta_5\theta_6\right)\right]-E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_7\hat{\theta}_8-\theta_7\theta_8\right)\right]$$

$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5\hat{\theta}_6-\theta_5\theta_6\right)\right]+E_p\left[\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_7\hat{\theta}_8-\theta_7\theta_8\right)\right]=$$

$$=\theta_2\theta_6 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_5\right)+\theta_2\theta_5 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_6\right)+\theta_1\theta_6 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_5\right)+\theta_1\theta_5 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_6\right)-$$

$$-\theta_2\theta_8 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_7\right)-\theta_2\theta_7 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_8\right)-\theta_1\theta_8 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_7\right)-\theta_1\theta_7 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_8\right)+$$

$$-\theta_4\theta_6 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_5\right)-\theta_4\theta_5 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_6\right)-\theta_3\theta_6 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_5\right)-\theta_3\theta_5 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_6\right)-$$

$$+\theta_4\theta_8 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_7\right)+\theta_4\theta_7 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_8\right)+\theta_3\theta_8 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_7\right)+\theta_3\theta_7 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_8\right)+$$

$$+\theta_5 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+\theta_6 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]+$$
$$+\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]-$$

$$-\theta_7 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-\theta_8 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\right]-$$
$$-\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-$$
$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-$$

$$-\theta_5 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]-\theta_6 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\right]+$$
$$-\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]-\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+$$
$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_5-\theta_5\right)\left(\hat{\theta}_6-\theta_6\right)\right]+$$

$$+\theta_7 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]+\theta_8 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\right]-$$
$$+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]+\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]-$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_7-\theta_7\right)\left(\hat{\theta}_8-\theta_8\right)\right]$$

Q.E.D.

Observación.- Si en el resultado inmediato anterior se considera $\hat{\theta}_5 = \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_6 = \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_7 = \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_8 = \hat{\theta}_4$ y $\theta_5 = \theta_1, \theta_6 = \theta_2, \theta_7 = \theta_3, \theta_8 = \theta_4$ se obtiene el resultado precedente

$$\theta_2\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_1\right) + \theta_2\theta_1 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right) + \theta_1\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_1\right) + \theta_1\theta_1 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_2\right) -$$

$$-\theta_2\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right) - \theta_2\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right) - \theta_1\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right) - \theta_1\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right) +$$

$$-\theta_4\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_1\right) - \theta_4\theta_1 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_2\right) - \theta_3\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_1\right) - \theta_3\theta_1 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_2\right) -$$

$$+\theta_4\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_3\right) + \theta_4\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4\right) + \theta_3\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_3\right) + \theta_3\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_4,\hat{\theta}_4\right) +$$

$$+\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right] + \theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\right] +$$
$$+\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right] + \theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right] +$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right] -$$

$$-\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] - \theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right] -$$
$$-\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] - \theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] -$$
$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] -$$

$$-\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right] - \theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\right] +$$
$$-\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right] - \theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right] +$$
$$-E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right] +$$

$$+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] - \theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right] -$$
$$+\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] - \theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] -$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] =$$
$$= \theta_2^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_1\right) + 2\theta_1\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right) + \theta_1^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_2\right) -$$

$$-2\theta_2\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_3\right) - 2\theta_2\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_4\right) - 2\theta_1\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3\right) - 2\theta_1\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_4\right) +$$

$$+\theta_4^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_3\right) + 2\theta_3\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4\right) + \theta_3^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_4\right) +$$

$$+2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] + 2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] +$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] -$$

$$-2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] - 2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] -$$
$$-2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] - 2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] -$$
$$-2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] -$$

$$+2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] + 2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] -$$
$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] =$$

$$= \theta_2^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_1\right) + \theta_1^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_2\right) + \theta_4^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_3\right) + \theta_3^2 VAR_p\left(\hat{\theta}_4\right) +$$

$$+2\theta_1\theta_2 COV_p\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) + 2\theta_3\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4\right) +$$

$$-2\theta_2\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_3\right) - 2\theta_2\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_4\right) - 2\theta_1\theta_4 COV_p\left(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3\right) - 2\theta_1\theta_3 COV_p\left(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_4\right) -$$

$$-2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] - 2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] -$$
$$-2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] - 2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] -$$

$$+2\theta_1 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] + 2\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] +$$

$$+2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] + 2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] + E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] -$$

$$-2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right]$$

Resultado 29 *Si tenemos $J = 4$ estimadores insesgados, se verifica que*

$$E_p\left\{\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3\hat{\theta}_4\right) - (\theta_1\theta_2 - \theta_3\theta_4)\right]^4\right\} =$$

$$= \theta_1^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^4\right] + 4\theta_1^3\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3\right] + \theta_2^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^4\right] +$$

$$+6\theta_1^2\theta_2^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] + 4\theta_1\theta_2^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] +$$

$$+\theta_3^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^4\right] + 4\theta_3^3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^3\right] + \theta_4^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^4\right] +$$

$$+6\theta_3^2\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] + 4\theta_3\theta_4^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^3\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+\theta_1^3\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + 3\theta_1^2\theta_2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_2^3\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+\theta_1^3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] + 3\theta_1^2\theta_2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] +$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] + \theta_2^3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] +$$

$$+\theta_1\theta_3^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^3\right] + 3\theta_1\theta_3^2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] +$$

$$+3\theta_1\theta_3\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_1\theta_4^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^3\right] +$$

$$+\theta_2\theta_3^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^3\right] + 3\theta_2\theta_3^2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] +$$

$$+3\theta_2\theta_3\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_2\theta_4^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^3\right] +$$

$$+\theta_1^2\theta_3^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] + 2\theta_1\theta_2\theta_3^2 E_p\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2 + \theta_2^2\theta_3^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)^2\right] +$$

$$+2\theta_1^2\theta_3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + 4\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + 2\theta_2^2\theta_3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+\theta_1^2\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\right] + 2\theta_1\theta_2\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\right] + \theta_2^2\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)^2\right] + \cdots$$

Demostración.-

$$\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)-\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)\right]^4=$$

$$=\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^4-4\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)+6\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^2-$$

$$-4\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^3+\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^4$$

Si se toman $p-$esperanzas, se obtiene para lo sumandos

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^4\right]=\theta_1^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^4\right]+4\theta_1^3\theta_2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\right]+$$

$$+6\theta_1^2\theta_2^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+4\theta_1\theta_2^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+\theta_2^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^4\right]+\cdots$$

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^4\right]=\theta_3^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^4\right]+4\theta_3^3\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^3\right]+$$

$$+6\theta_3^2\theta_4^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+4\theta_3\theta_4^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_4^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^4\right]+\cdots$$

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)\right]=$$

$$\theta_1^3\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+3\theta_1^2\theta_2\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_2^3\theta_3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_1^3\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+3\theta_1^2\theta_2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\theta_2^3\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\right]+\cdots$$

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^3\right]=$$

$$= \theta_1\theta_3^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^3\right] + 3\theta_1\theta_3^2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right] +$$

$$+3\theta_1\theta_3\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] + \theta_1\theta_4^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^3\right] +$$

$$+\theta_2\theta_3^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^3\right] + 3\theta_2\theta_3^2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right] +$$

$$+3\theta_2\theta_3\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right] + \theta_2\theta_4^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^3\right] + \cdots$$

y para el sumando central

$$6\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^2$$

considérese

$$\theta_1^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2 + 2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right) + \theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2 +$$

$$+2\theta_1\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2 + 2\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right) + \left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2$$

multiplicado por

$$\theta_3^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2 + 2\theta_3\theta_4\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right) + \theta_4^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2 +$$

$$+2\theta_3\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2 + 2\theta_4\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right) + \left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2$$

que es igual a

$$\theta_1^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\theta_3^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2 + 2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\theta_3^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2 + \theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\theta_3^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2 +$$

$$+\theta_1^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2 2\theta_3\theta_4\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right) + 2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)2\theta_3\theta_4\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right) + \theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2 2\theta_3\theta_4\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right) +$$

$$+\theta_1^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\theta_4^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2 + 2\theta_1\theta_2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\theta_4^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2 + \theta_2^2\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\theta_4^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2 + \cdots$$

y si se toman $p-$esperanzas, se obtiene

$$6E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^2\right] =$$

$$= \theta_1^2\theta_3^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+2\theta_1\theta_2\theta_3^2 E_p\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2+\theta_2^2\theta_3^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+$$

$$+2\theta_1^2\theta_3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+4\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+2\theta_2^2\theta_3\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_1^2\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\right]+2\theta_1\theta_2\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\right]+\theta_2^2\theta_4^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\right]$$

más momentos producto de orden superior a 4, que en las situaciones posteriores en que se emplee este resultado resultarán de un orden de magnitud menor Q.E.D.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Capítulo 3

Regresograma

[...] el sentido común no es nada más que una forma de media aritmética que sube o baja según la marea. Previsible por tanto [...]

José Saramago *El hombre duplicado*

Resumen Se define el estimador motivándolo previamente. Se estudia su sesgo según el plan de muestreo y, después, se considera el modelo de diseño fijo para concluir el sesgo total. Luego se calcula la varianza según el plan de muestreo introduciendo un nuevo descriptor suplementario. Para estudiar la varianza total, primero se analiza la esperanza según el modelo de la varianza según el plan, que constituye la varianza promedio. Después, se estudia la varianza según el modelo de la esperanza según el plan de muestreo.

3.1. Definiciones, notaciones y resultados previos

3.1.1. Motivación y definición del estimador

Siguiendo a GonzálezManteiga(1982), el método histograma para la regresión también conocido como regresograma consiste en aproximar la curva $\alpha(x)$ mediante una función escalonada, de una forma similar a lo que ocurre con tal método con respecto a la densidad. De esta forma, si se dispone de una poblacion finita

$$\{(x_1 Y_1), \ldots, (x_N, Y_N)\}$$

se construye una partición del intervalo de definición, sin pérdida de generalidad, $[0, 1]$ y se define $\alpha_H(x)$ como el promedio de los Y_j cuyo concomitante pertenece a B_x, $x_j \in B_x$, siendo B_x, una de las B_i $i = 1, \ldots, k$, $k = k(n)$ de la partición, en concreto, la celdilla 'bin' a la que pertenece x. La longitud de la celdilla es $h_n = \frac{1}{k(n)}$ que, cuando $n \to \infty$, $h_n \to 0$.

3.1.1.1. Motivación

Se presenta a continuación como, desde un punto de vista asintótico, no es necesario considerar dos ventanas diferentes, la correspondiente al descriptor y la correspondiente al estimador. Para ello se estudia el valor absoluto del sesgo del estimador histograma de la densidad a partir de la muestra con relación al descriptor, el histograma en la p.f.. Se abreviará la palabra histograma con su inicial H. Se denotará la función *indicadora* de pertenencia a un conjunto E por $1_E(w)$, esto es, toma el valor $1(0)$ cuando $w \in (\notin)E$, y las ventanas, por h_n y h_N.

Proposición 4 *En un plan de muestreo probabilístico autoponderado y de tamaño fijo n, si $Nh_N \to \infty$, entonces*

$$\left| E_p \left[\frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i) I_i^{a)} \right] - \frac{1}{Nh_N} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_N}}(x_i) \right| = o(1)$$

Demostración.- El estimador histograma a partir de la muestra es

$$\widehat{f}_H(x) = \frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i) I_i^{a)} = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i) I_i$$

El histograma de la p.f. es

$$f_H(x) = \frac{1}{Nh_N} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_N}}(x_i)$$

Considérese

$$\left| E_p \left[\widehat{f}_H(x) \right] - f_H(x) \right| = \left| \frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \frac{1}{Nh_N} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_N}}(x_i) \right| = \left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F_N - \frac{1}{h_N} \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F_N \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F_N - \frac{1}{h_n} \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F + \frac{1}{h_n} \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F - \frac{1}{h_N} \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F + \frac{1}{h_N} \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F - \frac{1}{h_N} \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F_N \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h_n} \left| \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F_N - \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F \right| + \left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F - \frac{1}{h_N} \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F \right| + \frac{1}{h_N} \left| \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F - \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F_N \right| =$$

$$= O\left(\frac{1}{Nh_n} \right) + o(1) + O\left(\frac{1}{Nh_N} \right) = o(1)$$

porque la sucesión de relieves acumulados correspondientes a las pp.ff. converge a un relieve acumulado suave, $F_N \to F$, es decir, las funciones de distribución de las pp.ff., F_N, convergen a la del diseño regular, F, uniformemente y con una "velocidad" que, según Ramil(1998), permite suponer que

$$\frac{1}{h_N} \left| \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F - \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F_N \right| = \frac{1}{h_N} \left| F(L_{x,h_N}) - F(l_{x,h_N}) - (F_N(L_{x,h_N}) - F_N(l_{x,h_N})) \right| =$$

$$= \frac{1}{h_N} \left| F(L_{x,h_N}) - F_N(L_{x,h_N}) + F_N(l_{x,h_N}) - F(l_{x,h_N}) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h_N} \left[\left| F(L_{x,h_N}) - F_N(L_{x,h_N}) \right| + \left| F_N(l_{x,h_N}) - F(l_{x,h_N}) \right| \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{h_N} \left[\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} \right]$$

y además

$$\left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F - \frac{1}{h_N} \int_{B_{x,h_N}} \mathrm{d}F \right| = \left| \frac{1}{h_n} \left(h_n f(x) + h_n o(1) \right) - \frac{1}{h_N} \left(h_N f(x) + h_N o(1) \right) \right| = o(1)$$

Para ver que

$$\int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F = h_n f(x) + h_n o(1),$$

obsérvese que

$$\int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F = \int_{B_{x,h_n}} f(t)\mathrm{d}t = \int_{B_{x,h_n}} \left[f(x) + f(t) - f(x) \right] \mathrm{d}t$$

con lo cual

$$\int_{B_{x,h_n}} f(x)\mathrm{d}t = h_n f(x)$$

$$\int_{B_{x,h_n}} \left[f(t) - f(x) \right] \mathrm{d}t = \left(f(\zeta) - f(x) \right) h_n = o(1) h_n$$

por la continuidad de f, donde $\zeta \in B_{x,h_n}$. Además, como $n < N$ entonces $h_n \geq h_N$ y si $N h_N \to \infty$ también $N h_n \to \infty$ Q.E.D.

Se considera en lo sucesivo la misma ventana dado su similar comportamiento asintótico y porque, de este modo, el estimador que se introducirá será finito-consistente. Y, puesto que en la mayoría de las aplicaciones la ventana se determinará a partir de los datos de la muestra, se denota h_n tanto para el estimador como para el descriptor por cuestiones prácticas. Este último, el descriptor histograma (H) de la regresión, regresograma para la p.f., se puede expresar como

$$\alpha_H(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}{\sum_{r=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_r)} = \frac{\frac{1}{N h_n} \sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}{\frac{1}{N h_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}$$

o también

$$\alpha_H(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\sum_{j=1}^{N} Y_j 1_{B_i}(x_j)}{\sum_{r=1}^{N} 1_{B_i}(x_r)} 1_{B_i}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\sum_{j=1}^{N} Y_j \frac{1_{B_i}(x_j)}{N}}{\sum_{r=1}^{N} \frac{1_{B_i}(x_r)}{N}} 1_{B_i}(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\sum_{i=1}^{k} 1_{B_i}(x) 1_{B_i}(x_j)}{\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} 1_{B_i}(x) 1_{B_i}(x_j)} Y_j.$$

siendo $B_{x,h_n} = (t_{k-1}, t_k] = (l_x, L_x] = \left(l_{B_{x,h_n}}; L_{B_{x,h_n}}\right]$ $\qquad \lambda\left(B_{x,h_n}\right) = h_n = t_k - t_{k-1}$

Por otra parte, para que esté bien definido el descriptor es necesario que el denominador no sea nulo. Para ello se probará primero que su límite es la función de densidad asintótica o relieve.

Resultado 30 *Bajo las condiciones de regularidad del diseño, se verifica que*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ h_n\to 0}} \frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i) = f(x)$$

Demostración.- Se quiere probar que para $N > N_0$

$$\left| \frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - f(x) \right| < \varepsilon$$

considérese

$$\left| \frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F_N(x) - f(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F_N(x) - \frac{1}{h_n} \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F(x) + \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F(x) - f(x) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F_N(x) - \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F(x) \right| + \left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

la primera mayoración se puede realizar por el procedimiento empleado en la proposición anterior y la segunda por el teorema del valor medio del cálculo integral y la continuidad de $f(\cdot)$ dada la regularidad del diseño, basta considerar como N_0 el máximo de los dos Q.E.D.

Observación.- De hecho se puede escribir

$$\left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F_N(x) - \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F(x) \right| + \left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F(x) - f(x) \right| = O\left(\frac{1}{Nh_n}\right) + o(1)$$

y el último infinitésimo se puede refinar suponiendo que F es de clase superior a $\mathcal{C}^1$.

Corolario 18 *Si $f(x) > 0$, a partir de un N_0 en adelante se verifica que*

$$\frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i) > 0$$

Por tanto, si el relieve del diseño fijo es distinto de cero, $f(x) > 0$, a partir de un N_0 en adelante se verifica que el denominador del descriptor regresograma es no nulo y tiene sentido su definición en los puntos de densidad asintótica estrictamente positiva, que son los que se tratarán en lo sucesivo. En terminología de Jennen-Steinmetz&Gasser(1988), los puntos donde el diseño no tiene huecos 'holes'.

3.1.1.2. Definición del estimador

Definición.- Se define el estimador histograma (H) de la regresión como

$$\widehat{\alpha}_H(x) := \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h}}(x_i) I_i^{(a}}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h}}(x_i) I_i^{(a}} \qquad \text{si } \sum_{i=1}^{N} 1_{B_x}(x_i) I_i^{(a} \neq 0, \text{ en caso contrario } \widehat{\alpha}_H(x) := 0$$

Cuando se considera a toda la p.f. como muestra, $\widehat{\alpha}_H(x) = \alpha_H(x)$ por tanto es finito-consistente. Además se verifica tanto la $p-$insesgadez para el numerador como para el denominador en MASS/R como se verá en el siguiente resultado y su consecuencia.

Resultado 31 *En el caso de un plan de muestreo probabilístico autoponderado y de tamaño fijo, se verifica la $p-$insesgadez para el numerador.*

Demostración.-

$$E_p\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i) I_i^{a)}\right] = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i) E_p\left(I_i\right) = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\frac{n}{N} = \sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)$$

Q.E.D.

Corolario 19 *En el caso de un plan de muestreo probabilístico autoponderado y de tamaño fijo, se verifica la $p-$insesgadez para el denominador.*

Demostración.- Considérese la p.f. con $Y_i = 1\ \forall i = 1, \ldots, N$ en el resultado anterior Q.E.D.

Si se simplifica N y se divide numerador y denominador por la ventana, se obtiene que también se puede expresar como

$$\widehat{\alpha}_H(x) = \frac{\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i) I_i}{\hat{f}_H(x)} \qquad \text{si } \hat{f}_H(x) \neq 0, \text{ en caso contrario } \widehat{\alpha}_H(x) = 0.$$

esta definición es la habitual por lo que en numerosos casos el sintagma histograma de la regresión se abreviará por regresograma.

3.1.2. Notaciones y resultados auxiliares

Sea $n_{B_{x,h_n}}$ el número de elementos de la muestra que pertenecen a B_{x,h_n}. Se empleará la notación

$$P_x = P_x(n) = \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F = \int_{B_{x,h_n}} f(t)\mathrm{d}t$$

y $P_{N,x} = N_x/N$, donde $N_x = \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)$ para la que también se podría emplear una segunda notación más coherente, $N_{B_{x,h_n}}$ pero, como aparecerá en numerosas ocasiones y en contextos que recomiendan una notación abreviada, se empleará la primera. $P_{N,x}$ admite la siguiente expresión

$$P_{N,x} = \frac{N_x}{N} = \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F_N(x)$$

Si $f(x) > 0$, $P_x > 0$ porque la integral es positiva por ser el relieve distinto de cero en un entorno de x por su continuidad. En algunos situaciones, habrá que imponer que $N_x > 1$.

Como ejemplo de esta notación, de la propia definición del descriptor, se obtiene la siguiente igualdad donde la suma se extiende a todos los elementos con concomitante en la celdilla B_{x,h_n}

Resultado 32

$$\sum_{j=1}^{N_x} (Y_j - \alpha_H(x)) = 0$$

Demostración.- De la definición

$$\alpha_H(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}$$

se obtiene

$$\sum_{i=1}^{N} \left(Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \alpha_H(x) 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \alpha_H(x)\right) 1_{B_{x,h_n}}(x_i) = 0$$

y de aquí se obtiene la igualdad Q.E.D.

Lema 9 *Cuando* $a_n \to 0, a_n \geq 0, na_n \to \infty$ *se verifica que*

$$(1 - a_n)^n = e^{-na_n}\left[1 + o(1)\right]$$

Demostración.-

$$\lim \frac{(1-a_n)^n}{e^{-na_n}} = \lim \frac{\left((1-a_n)^{1/a_n}\right)^{na_n}}{\left(e^{-1}\right)^{na_n}} = \lim \frac{\left(e^{-1}\right)^{na_n}}{\left(e^{-1}\right)^{na_n}} = 1$$

Q.E.D.

Se puede refinar la demostración de la primera proposición del capítulo y dar un desarrollo asintótico de P_x si se considera que la densidad asintótica del diseño es estrictamente positiva

Resultado 33 *Si $f(x) > 0$, se verifica que*

$$P_x = h_n f(x) \left[1 + o(1)\right] \tag{3.1}$$

Demostración.-

$$\int_{B_{x,h_n}} \left[f(t) - f(x)\right] \mathrm{d}t = \left(f(\zeta) - f(x)\right) h_n = f(x) \left(\frac{f(\zeta)}{f(x)} - 1\right) h_n = h_n f(x) o(1)$$

Por consiguiente, como

$$P_x = \int_{B_{x,h_n}} f(t) \mathrm{d}t = \int_{B_{x,h_n}} \left[f(x) + f(t) - f(x)\right] \mathrm{d}t$$

y

$$\int_{B_{x,h_n}} f(x) \mathrm{d}t = h_n f(x)$$

$$\int_{B_{x,h_n}} \left[f(t) - f(x)\right] \mathrm{d}t = h_n f(x) o(1)$$

se verifica que $P_x = h_n f(x) + h_n f(x) o(1) = h_n f(x) \left[1 + o(1)\right]$ Q.E.D.

Observación.- La hipótesis $f(x) > 0$ se precisa para que el regresograma en la p.f. tenga denominador distinto de cero, al menos a partir de un N. Si se supone más regularidad en $f(\cdot)$ (y por tanto en F), se puede mejorar el orden del infinitésimo, en concreto si $f(x)$ es diferenciable en x

$$\int_{B_{x,h_n}} \left[f(t) - f(x)\right] \mathrm{d}t = \left(f(\zeta) - f(x)\right) h_n = \left[f'(x)(\zeta - x) + o(\zeta - x)\right] h_n =$$

$$= O(h_n^2) + o(h_n^2) = O(h_n^2)$$

porque $|\zeta - x| \leq h_n$. En este caso

$$P_x = h_n f(x) + O(h_n^2) = h_n f(x) \left(1 + O(h_n)\right),$$

$$\left| \frac{1}{h_n} \int_{B_{x h_n}} \mathrm{d}F(x) - f(x) \right| = O\left(h_n\right)$$

y

$$\left| E_p \left[\frac{1}{N h_n} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i) I_i^{a)} \right] - \frac{1}{N h_N} \sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_N}}(x_i) \right| = O\left(\frac{1}{N h_n}\right) + O\left(h_n\right) + O\left(h_N\right) + O\left(\frac{1}{N h_N}\right)$$

Observación.- Bajo la hipótesis de que $nh_n \to \infty$ y la condición HHM

$$\frac{1}{n} = o(P_x) \qquad \frac{1}{N} = o\left(P_x\right)$$

es decir, P_x es un término de orden de magnitud superior a $1/n$ porque

$$nP_x \to \infty \Leftrightarrow \frac{P_x}{1/n} \to \infty$$

Resultado 34 *Se verifica que*

$$|P_{N,x} - P_x| \leq \frac{1}{N}$$

Demostración.- Se tiene que

$$|P_x - P_{N,x}| = \left| \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F - \int_{B_{x,h_n}} \mathrm{d}F_N \right| = \left| \left[F(L_{B_{x,h_n}}) - F(l_{B_{x,h_n}})\right] - \left[F_N(L_{B_{x,h_n}}) - F_N(l_{B_{x,h_n}})\right] \right| =$$

$$= \left|F(L_{B_{x,h_n}}) - F_N(L_{B_{x,h_n}})\right| + \left|F_N(l_{B_{x,h_n}}) - F(l_{B_{x,h_n}})\right| \leq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N}$$

por la condición de diseño fijo, Ramil(1998), siendo $B_{x,h_n} = (l_x, L_x] = \left(l_{B_{x,h_n}}; L_{B_{x,h_n}}\right]$ Q.E.D.

Observación.- De este resultado, se deduce inmediatamente que

$$P_{N,x} - P_x = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Corolario 20 *Bajo la condición HHM, si $f(x) > 0$, se tiene que*

$$P_{N,x} = h_n f(x)\left[1 + o(1)\right] + O(n^{-1})$$

Demostración.-

$$P_{N,x} = P_x + O(N^{-1}) = P_x + O(n^{-1}) = h_n f(x)\left[1 + o(1)\right] + O(n^{-1})$$

Q.E.D.

Observación.- Si además se impone que $nh_n \to \infty$, se tiene que $P_{N,x} = h_n f(x)\left[1 + o(1)\right]$ porque $P_{N,x} = h_n f(x)\left[1 + o(1)\right] + O\left(\frac{h_n}{nh_n}\right)$

3.2. Estudio del sesgo

3.2.1. $p-$Insesgadez asintótica

Se estudiará la insesgadez asintótica según el plan de muestreo MASS/R

Lema 10 *En MASS/R(N,n), se verifica la siguiente desigualdad*

$$p(n_{B_{x,h_n}}=0)<(1-P_{N,x})^n$$

Demostración.- Se tiene que

$$p(n_{B_{x,h_n}}=0)=\frac{\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{(N-N_x)^{(n}}{N^{(n}}=\frac{(N-N_x)\,(N-N_x-1)\cdots(N-N_x-n+1)}{N\,(N-1)\cdots(N-n+1)}=$$

$$=\frac{(N-N_x)}{N}\frac{(N-1-N_x)}{(N-1)}\cdots\frac{(N-n+1-N_x)}{(N-n+1)}<(1-P_{N,x})^n$$

En el caso de que $n>N-N_x$ la probabilidad sería nula, verificándose la desigualdad de modo trivial Q.E.D.

Proposición 5 *Bajo la condición HHM, cuando $h_n\to 0$ y $nh_n\to\infty$ se verifica*

$$(1-P_{N,x})^n=e^{-n\left(P_x+O(n^{-1})\right)}\left[1+o(1)\right]$$

Demostración.- Como $h_n\to 0$, $P_x\to 0$ y $0\le P_{N,x}\le P_x+1/N$, entonces se puede considerar $a_n=P_{N,x}$

$$(1-P_{N,x})^n=e^{-nP_{N,x}}\left[1+o(1)\right]$$

y, sustituyendo $P_{N,x}$ se obtiene el resultado Q.E.D.

Corolario 21 *Bajo la condición HHM, cuando $h_n\to 0$ y $nh_n\to\infty$, se verifica*

$$(1-P_{N,x})^n=O\left(e^{-nP_x}\right)$$

Demostración.- Como

$$|P_{N,x}-P_x|\le\frac{1}{N}$$

y $0\le P_{N,x},P_x\le 1$ entonces

$$P_x-\frac{1}{N}\le P_{N,x}\le P_x+\frac{1}{N}$$

$$-nP_x+\frac{n}{N}\ge -nP_{N,x}\ge -nP_x-\frac{n}{N}$$

$$e^{-nP_x+\frac{n}{N}} \geq e^{-nP_{N,x}} \geq e^{-nP_x-\frac{n}{N}}$$

$$e^{-nP_x}e^{\frac{n}{N}} \geq e^{-nP_{N,x}} \geq e^{-nP_x}e^{-\frac{n}{N}}$$

por la condición HHM, n/N está acotado por tanto también su exponencial. Por consiguiente

$$e^{-nP_{N,x}} = e^{-nP_x}O(1)$$

y

$$(1-P_{N,x})^n = e^{-nP_x}O(1)\left[1+o(1)\right] = O\left(e^{-nP_x}\right)$$

Q.E.D.

Corolario 22 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $h_n \to 0$ y $nh_n \to \infty$, entonces*

$$p(n_{B_{x,h_n}} = 0) = O\left(e^{-nP_x}\right)$$

Demostración.- Ténganse en cuenta tanto el lema como el corolario anteriores Q.E.D.

Observación Como

$$p(n_{B_{x,h_n}} = 0) = \frac{\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N}{n}}$$

se tiene que

$$\frac{\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N}{n}} = O\left(e^{-nP_x}\right)$$

Teorema 1 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$E_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = \alpha_H(x)\left[1 - \ p(n_{B_x}=0)\right]$$

Demostración.- Sea x fijo y sea B_{x,h_n} la celdilla que contiene a x, por definición del estimador se verifica que

$$E_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = \sum_{m=1}^{n} E_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)|n_{B_x}=m\right]p(n_{B_x}=m)$$

y, por consiguiente, que

$$E_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = \sum_{m=1}^{n}\alpha_H(x)\ p(n_{B_x}=m) = \alpha_H(x)\sum_{m=1}^{n}\ p(n_{B_x}=m) =$$

$$= \alpha_H(x)\left[1 - \ p(n_{B_x}=0)\right]$$

Sin más que percatarse de que cuando se condiciona $\widehat{\alpha}_H(x)$, se convierte en una simple media aritmética muestral, cuya esperanza es la media poblacional, $\alpha_H(x)$. Esta última aseveración se tratará en el epígrafe sobre la esperanza condicional Q.E.D.

Corolario 23 *El sesgo del estimador regresograma en MASS/R(N, n) es*

$$B_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = -\alpha_H(x)\ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)$$

Demostración.- Téngase en cuenta que $B_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = E_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] - \alpha_H(x) = -\alpha_H(x)\ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)$ Q.E.D.

Si $\alpha_H(x) > 0$, $\widehat{\alpha}_H(x)$ subestima $\alpha_H(x)$ y si $\alpha_H(x) < 0$, $\widehat{\alpha}_H(x)$ sobreestima $\alpha_H(x)$, en promedio.

Corolario 24 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$B_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = O\left(\max_N |Y_i|\, e^{-nP_x}\right)$$

Demostración.- Por los corolarios anteriores

$$\left|B_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right]\right| = \left|\alpha_H(x)\right|\ p(n_{B_{x,h_n}} = 0) \leq \max_{B_{x,h}} |Y_i|\ p(n_{B_{x,h_n}} = 0) \leq \max_N |Y_i|\, O\left(e^{-nP_x}\right) = O\left(\max_N |Y_i|\, e^{-nP_x}\right)$$

Q.E.D.

De la demostración se deduce también que $\left|B_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right]\right| \leq \max_{B_{x,h}} |Y_i|\, O\left(e^{-nP_x}\right)$.

Ejemplo 22 *Si $\mathcal{Y}$ es acotada, $f(x) > 0$ y $nh_n \to \infty$, $\widehat{\alpha}_H(x)$ es un estimador asintóticamente $p-$insesgado de $\alpha_H(x)$ en MASS/R(N, n).*

Si $\max_N |Y_i| = O\left((nP_x)^{\gamma}\right)$, $f(x) > 0$ y $nh_n \to \infty$, $\widehat{\alpha}_H(x)$ es un estimador asintóticamente $p-$insesgado de $\alpha_H(x)$ en MASS/R(N, n).

Téngase en cuenta que $O\left(e^{-nP_x}\right) \to 0$ por (3.1) y que $(nP_x)^{\gamma} = o\left(e^{nP_x}\right)$.

3.2.2. Estudio de la esperanza condicionada

Primero se va a probar que la restricción a una subpoblación de una muestra aleatoria simple sin reemplazamiento es a su vez una muestra aleatoria simple de dicha subpoblación, por supuesto en el caso de que tenga sentido, es decir que sea no vacía. Por tanto "ser una muestra aleatoria simple sin reemplazamiento" es una propiedad que heredan las subpoblaciones.

Lema 11 *Sea* U *con* $|\mathrm{U}| = N$. *Sea* $s \subset \mathrm{U}$ *muestra aleatoria simple sin reemplazamiento de tamaño* $|s| = n$. *Sea* $\mathrm{U}_d \subset \mathrm{U}$ *un subuniverso con* $|\mathrm{U}_d| = N_d > 0$. *Sea* $s_d = s \cap \mathrm{U}_d \neq \emptyset$ *con* $|s_d| = n_d > 0$. *Entonces* s_d *es una muestra aleatoria simple sin reemplazamiento de* U_d.

Demostración.- Obsérvese que $n_d = |s_d|$ es una variable aleatoria. Se fija un valor de n_d, por ejemplo $n_{0d} \neq 0$. Entonces cualquier subconjunto particular de n_{0d} elementos, entre los $\binom{N_d}{n_{0d}}$ subconjuntos posibles de n_{0d} a partir del subuniverso, ocurrirá exactamente $\binom{N-N_d}{n-n_{0d}}$ veces entre todos los $\binom{N}{n}$ subconjuntos posibles, muestras, de n elementos de la población original. Por tanto, todas las muestras de n_{0d} son igualmente probables.

¿Cada subconjunto de U_d de n_d elementos es una muestra posible? Sí porque todo subconjunto del subuniverso es susceptible de ser ampliado (i.e., extendido) a U, aunque no de forma única, basta añadir elementos de U-U_d hasta completar un subconjunto de tamaño n de U.

Para ver esto con más claridad, sea n_{0d} fijo. Entonces una muestra de la población inicial estaría formada por n_{0d} elementos del subuniverso y por $n - n_{0d}$ del complementario del subuniverso, es decir

$$s = \left\{ u_{i_1}^{(d)}, u_{i_2}^{(d)}, \ldots, u_{i_{n_{0d}}}^{(d)}, u_{i_{n_{0d}+1}}, \ldots, u_n \right\}$$

y se denotará por

$$s_{0d} = \left\{ u_{i_1}^{(d)}, u_{i_2}^{(d)}, \ldots, u_{i_{n_{0d}}}^{(d)} \right\}$$

a los n_{0d} elementos del subuniverso.

El número de muestras que dan lugar a la submuestra s_{0d} es $\binom{N-N_d}{n-n_{0d}}$. El número total de muestras con n_{0d} elementos en U_d es $\binom{N-N_d}{n-n_{0d}} \cdot \binom{N_d}{n_{0d}}$. Por tanto, la probabilidad de la submuestra en cuestión, según la regla de Laplace, es

$$p\left(s_{0d}\right) = \frac{\binom{N-N_d}{n-n_{0d}}}{\binom{N-N_d}{n-n_{0d}} \cdot \binom{N_d}{n_{0d}}} = \frac{1}{\binom{N_d}{n_{0d}}}$$

lo que da lugar a una medida de probabilidad uniforme sobre todos los subconjuntos de tamaño n_{0d} con lo cual se está ante muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento; es decir, para cada tamaño de la submuestra $n_d = 1, ..., n$, MASS/R(N_d, n_d) Q.E.D.

En el caso que se está considerando, dentro de la esperanza condicionada, para cada valor de la condición $n_{B_{x,h}} = m$ se tiene un diseño distinto aunque del mismo tipo, MASS/R, pero la media muestral es un estimador insesgado de la media poblacional sea cual sea el tamaño de la muestra en MASS/R.

Por una parte

$$\sum_{j=1}^{n} 1_{\mathrm{U}_d}(j) = \sum_{i=1}^{N} 1_{\mathrm{U}_d}(i) I_i = n_d$$

y

$$\sum_{i=1}^{N} 1_{\mathrm{U}_d}(i) = N_d$$

en el caso que se está tratando

$$\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i) I_i = n_{B_{x,h_n}}$$

$$\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i) = N_x$$

Por otra parte, cuando se condiciona, las indicadoras de pertenencia a la muestra I_i dejan de estar idénticamente distribuidas

$$\widehat{\alpha}_H(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i) I_i}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i) I_i}$$

de hecho $E_p\left[\widehat{\alpha}_H(x) | n_{B_{x,h_n}} = m\right] = E_{p'}\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right]$ donde $p'(\cdot)$ corresponde a otro diseño en el que en principio $E_{p'}\left[I_i\right] \neq \frac{n}{N}$. Por ejemplo, con ánimo de claridad, supóngase $m = 1$, dado que

$$E_{p'}\left[I_i\right] = \begin{cases} \frac{1}{N_x} & \text{si el elemento } i\text{-ésimo } \in B_{xh_n} \\ \frac{n-1}{N-N_x} & \text{si el elemento } i\text{-ésimo } \notin B_{xh_n} \end{cases}$$

por tanto

$$E_{p'}\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i) E_{p'}\left[I_i\right]}{1} = \sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i) \frac{1}{N_x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{N_x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)}$$

en general para cualquier m hay que pensar que el diseño que resulta de condicionar es un MASS/R pero con distintos "parámetros", en la celdilla B_{x,h_n} MASS/R(N_x, m) y fuera de ella, en su complementario, MASS/R$(N - N_x, n - m)$.

$$E_{p'}\left[I_i\right] = \begin{cases} \frac{m}{N_x} & \text{si el elemento } i\text{-ésimo } \in B_{xh_n} \\ \frac{n-m}{N-N_x} & \text{si el elemento } i\text{-ésimo } \notin B_{xh_n} \end{cases}$$

por tanto

$$E_{p'}\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i) E_{p'}\left[I_i\right]}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i) \frac{m}{N_x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{N_x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)}$$

3.2.3. Insesgadez aproximada según el diseño fijo

Se probará que el sesgo del descriptor regresograma según el diseño fijo es de orden $O(h_n)$ bajo determinadas condiciones de regularidad de α. Para ello se introducirán unos resultados auxiliares

Proposición 6 *Sean $x_l \in [a, b]$ $l = 1, \ldots, L$, sea $g(\cdot)$ una función continua no negativa en $[a, b]$, y sean $w_l > 0$ que verifican $\sum_{l=1}^{L} w_l = 1$ entonces existe $\zeta_c \in [a, b]$ tal que*

$$\left(\sum_{l=1}^{L} g^2(x_l) w_l\right)^{1/2} = g(\zeta_c)$$

Demostración.- Como se verifica que

$$\min_{[a,b]} g(x) \leq \left(\sum_{l=1}^{L} g^2(x_l) w_l \right)^{1/2} \leq \max_{[a,b]} g(x)$$

entonces, si g es continua, existe ζ_c tal que

$$\left(\sum_{l=1}^{L} g^2(x_l) w_l \right)^{1/2} = g(\zeta_c)$$

Q.E.D.

Con una demostración análoga se obtiene la siguiente igualdad que se aplica con profusión

Resultado 35 *Sean $x_l \in [a,b]$ $l = 1, \ldots, L$, sea $g(\cdot)$ una función continua en $[a,b]$, y sean $w_l > 0$ que verifican $\sum_{l=1}^{L} w_l = 1$ entonces existe $\zeta_a \in [a,b]$ tal que*

$$\sum_{l=1}^{L} g(x_l) w_l = g(\zeta_a) \tag{3.2}$$

Ejemplo 23 *Si $\alpha(\cdot)$ es continua*

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha(x_i) 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)} = \alpha(\zeta)$$

con $\zeta \in B_{x,h_n}$

Realmente ζ es un punto intermedio del segmento con extremos el mínimo y el máximo de los $x_i \in B_{x,h_n}$, de ahí que $\zeta \in B_{x,h_n}$

Ejemplo 24

$$\frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} \sigma^2(x_j) = \sigma^2(\zeta')$$

con $\zeta' \in B_{x,h_n}$

A continuación, se mostrará que si la función de regresión es continua, el descriptor es asintóticamente $\xi-$insesgado

Proposición 7 *Sea $\alpha(\cdot)$ continua. Se verifica que*

$$E_\xi \left[\alpha_H(x) \right] = \alpha(x) + o(1)$$

Demostración.- Como

$$E_\xi\left(\alpha_H(x)\right) = E_\xi\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_\xi\left(Y_i\right) 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)}$$

se tiene que la esperanza según el diseño fijo de los términos de error es nula, con lo cual

$$E_\xi\left(\alpha_H(x)\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[\alpha(x_i) + \sigma(x_i) E_\xi\left(\varepsilon_i\right)\right] 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha(x_i) 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)} = \alpha(\zeta) = \alpha(x) + o\left(1\right)$$

con $\zeta \in B_{x,h_n}$ Q.E.D.

Observación.- De la demostración de la proposición, se deduce también que

$$E\left(\hat{\alpha}_H(x)\right) = \frac{\sum_{j=1}^{N_x} \alpha(x_i)}{N_x}\left(1 - \ p(n_{B_x} = 0)\right)$$

Si la función de regresión es más suave se puede refinar el orden del sesgo según el diseño

Proposición 8 *Sea $\alpha(\cdot)$ lipschitziana. Se verifica que*

$$E_\xi\left[\alpha_H(x)\right] = \alpha(x) + O\left(h_n\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left(\alpha_H(x)\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha(x_i) 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[\alpha(x_i) - \alpha\left(x\right) + \alpha\left(x\right)\right] 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[\alpha(x_i) - \alpha\left(x\right)\right] 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)} + \alpha\left(x\right) = \alpha\left(x\right) + O(h_n)$$

porque para $x_i \in B_{x,h_n}$, $\left|\alpha(x_i) - \alpha\left(x\right)\right| \leq \Lambda(\alpha)\left|x_i - x\right| \leq \Lambda(\alpha) h_n$ Q.E.D.

Por tanto, si la función de regresión es lipschitziana $B_\xi\left[\alpha_H(x)\right] = O\left(h_n\right)$. Sea $m\left(B_{xh_n}\right)$ la *marca de clase* de la celdilla, entonces se puede refinar el desarrollo si se impone aún más suavidad

Proposición 9 *Sean $\alpha''(\cdot)$ y $f''(\cdot)$ acotadas. Sea $f(x) > 0$. Si $Nh_n \to \infty$*

$$E_\xi\left[\alpha_H(x)\right] = \alpha(x) + \alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + o\left(h_n\right)$$

Demostración.-

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha\left(x_i\right) 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\alpha(x) + \alpha'(x)(x_i - x) + \frac{1}{2}\alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2\right) 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)} =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)} + \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)} =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{\int_{B_{x,h_n}}(t - x)\, f(t)\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{N}\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)} + \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}$$

Para el resto

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}\right| \leq \frac{\sum_{i=1}^{N}\left|\alpha''(\zeta_i)\right|(x_i - x)^2 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)} \leq \max_N\left|\alpha''(\zeta_i)\right| h_n^2$$

se tiene que es $O\left(h_n^2\right)$. Para ver la aproximación mediante la integral del numerador del segundo sumando

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right) = \sum_{i=1}^{N}(x_i - x)\frac{1_{B_{xh_n}}\left(x_i\right)}{N} = \sum_{x_i \in B_{xh_n}}(x_i - x)\left[F_N\left(x_i + o\right) - F_N\left(x_i - o\right)\right] =$$

$$= \int_{B_{xh_n}}(t - x)\mathrm{d}F_N(t)$$

Con lo cual, como

$$\int_{B_{xh_n}}(t - x)\mathrm{d}F_N(t) + \int_{B_{xh_n}} F_N(t)\mathrm{d}(t - x) = \left(L_{B_{xh_n}} - x\right) F_N\left(L_{B_{xh_n}}\right) - \left(l_{B_{xh_n}} - x\right) F_N\left(l_{B_{xh_n}}\right)$$

$$\int_{B_{xh_n}} (t-x)\mathrm{d}F(t) + \int_{B_{xh_n}} F(t)\mathrm{d}(t-x) = \left(L_{B_{xh_n}} - x\right) F\left(L_{B_{xh_n}}\right) - \left(l_{B_{xh_n}} - x\right) F\left(l_{B_{xh_n}}\right)$$

siendo $l_{B_{xh_n}}$ y $L_{B_{xh_n}}$ el extremo inferior y superior, respectivamente, de B_{xh_n}, restando miembro a miembro, se obtiene

$$\int_{B_{xh_n}} (t-x)\left[\mathrm{d}F_N(t) - \mathrm{d}F(t)\right] + \int_{B_{xh_n}} \left[F_N(t) - F(t)\right]\mathrm{d}(t-x) =$$

$$= \left(L_{B_{xh_n}} - x\right)\left[F_N\left(L_{B_{xh_n}}\right) - F\left(L_{B_{xh_n}}\right)\right] - \left(l_{B_{xh_n}} - x\right)\left[F_N\left(l_{B_{xh_n}}\right) - F\left(l_{B_{xh_n}}\right)\right]$$

por tanto

$$\int_{B_{xh_n}} (t-x)\left[\mathrm{d}F_N(t) - \mathrm{d}F(t)\right] + \int_{B_{xh_n}} \left[F_N(t) - F(t)\right]\mathrm{d}(t-x) = O\left(\frac{h_n}{N}\right)$$

Por otra parte, con un argumento semejante al de NADARAYA(1965)

$$\left|\int_{B_{xh_n}} \left[F_N(t) - F(t)\right]\mathrm{d}(t-x)\right| \leq \sup\left|F_N(t) - F(t)\right| \int_{B_{xh_n}} \left|\mathrm{d}(t-x)\right| = O\left(\frac{h_n}{N}\right)$$

porque la variación de $t-x$ en la celdilla B_{x,h_n} es h_n. Con lo cual

$$\left|\int_{B_{xh_n}} (t-x)\mathrm{d}F_N(t) - \int_{B_{xh_n}} (t-x)\mathrm{d}F(t)\right| = O\left(\frac{h_n}{N}\right)$$

Por otra parte

$$\int_{B_{xh_n}} (t-x)\mathrm{d}F(t) = \int_{B_{x,h_n}} (t-x)\, f(t)\mathrm{d}t = \int_{l-x}^{L-x} uf(x+u)\mathrm{d}u = \int_{l-x}^{L-x} u\left(f(x) + f'(x)u + \frac{1}{2}f''(\zeta)\, u^2\right)\mathrm{d}u =$$

$$= f(x)\int_{l-x}^{L-x} u\mathrm{d}u + f'(x)\int_{l-x}^{L-x} u^2\mathrm{d}u + \frac{1}{2}f''(\zeta)\int_{l-x}^{L-x} u^3\mathrm{d}u$$

Ya que las derivadas están acotadas, el término dominante es el primero

$$f(x)\int_{l-x}^{L-x} u\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{l-x}^{L-x} = \frac{f(x)}{2}\left[\left(L_{B_{xh_n}} - x\right)^2 - \left(l_{B_{xh_n}} - x\right)^2\right] =$$

$$= \frac{f(x)}{2}\left[\left(L_{B_{xh_n}} + l_{B_{xh_n}}\right)\left(L_{B_{xh_n}} - l_{B_{xh_n}}\right) - 2x\left(L_{B_{xh_n}} - l_{B_{xh_n}}\right)\right] =$$

$$= f(x)\left[h_n m\left(B_{xh_n}\right) - h_n x\right] = f(x)h_n\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right],$$

para el segundo sumando se verifica que

$$f'(x)\int_{l-x}^{L-x} u^2 \mathrm{d}u = \frac{f'(x)}{3}\left[\left(L_{B_{xh_n}} - x\right)^3 - \left(l_{B_{xh_n}} - x\right)^3\right] =$$

$$= \frac{f'(x)}{2}\left[\left(L_{B_{xh_n}} - l_{B_{xh_n}}\right)\left((L_{B_{xh_n}} - x)^2 + (L_{B_{xh_n}} - x)(l_{B_{xh_n}} - x) + (l_{B_{xh_n}} - x)^2\right)\right] \leq$$

$$\leq h_n 3h_n^2 = 3h_n^3$$

por tanto

$$\int_{B_{xh_n}} (t-x)\mathrm{d}F(t) = \int_{B_{x,h_n}} (t-x)\, f(t)\mathrm{d}t = f(x)h_n\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + O(h_n^3)$$

además

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i) = h_n \frac{1}{Nh_n}\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i) = h_n \frac{1}{h_n}\int_{B_{xh_n}} \mathrm{d}F_N(t) =$$

$$= h_n\left(f(x) + O\left(\frac{1}{Nh_n}\right) + O(h_n)\right) = f(x)h_n\left(1 + O(h_n) + O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)\right)$$

por las observaciones a los resultados 30 y 33, la regularidad de $f(\cdot)$ y que se está tratando x con relieve positivo, $f(x) > 0$

$$E_\xi\left[\alpha_H(x)\right] = \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{f(x)h_n\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + O\left(h_n^3\right) + O\left(\frac{h_n}{N}\right)}{f(x)h_n\left(1 + O(h_n) + O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)\right)} + O\left(h_n^2\right) =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{f(x)h_n\left[\left(m\left(B_{xh_n}\right) - x\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(h_n^2\right)\right]}{f(x)h_n\left(1 + O(h_n) + O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)\right)} + O\left(h_n^2\right) =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\left[\left(m\left(B_{xh_n}\right) - x\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(h_n^2\right)\right]\left(1 + O(h_n) + O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)\right) + O\left(h_n^2\right) =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) = \alpha(x) + \alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + o\left(h_n\right)$$

porque $Nh_n \to \infty$ Q.E.D.

Observación.- La siguiente igualdad

$$\int_{B_{xh_n}} (t-x)\left[\mathrm{d}F_N(t) - \mathrm{d}F(t)\right] = \int_{B_{xh_n}} \left[F_N(t) - F(t)\right] \mathrm{d}\left[(t-x)\right]$$

se basa en la integración por partes. Se supone que las integrales de Riemann-Stieltjes (RS) anteriores existen. Téngase en cuenta la "ley de reciprocidad" de la integral de RS, Apostol(1977). La existencia de $\int (t-x)\mathrm{d}F(t)$ implica la de $\int F(t)\mathrm{d}\left[(t-x)\right]$ y se verifican las igualdades empleadas con anterioridad

$$\int_{B_{xh_n}} (t-x)\mathrm{d}F_N(t) + \int_{B_{xh_n}} F_N(t)\mathrm{d}(t-x) = \left(L_{B_{xh_n}} - x\right) F_N\left(L_{B_{xh_n}}\right) - \left(l_{B_{xh_n}} - x\right) F_N\left(l_{B_{xh_n}}\right)$$

$$\int_{B_{xh_n}} (t-x)\mathrm{d}F(t) + \int_{B_{xh_n}} F(t)\mathrm{d}(t-x) = \left(L_{B_{xh_n}} - x\right) F\left(L_{B_{xh_n}}\right) - \left(l_{B_{xh_n}} - x\right) F\left(l_{B_{xh_n}}\right)$$

3.2.4. Conclusión del sesgo

Se puede considerar la siguiente descomposición

$$B\left(\hat{\alpha}_H(x)\right) = B_\xi\left(\alpha_H(x)\right) + E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right] \tag{3.3}$$

que simplemente es el resultado de aplicar

$$E_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right) - \alpha(x) = E_\xi\left[\alpha_H(x) + B_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right] - \alpha(x) = E_\xi\left[\alpha_H(x) - \alpha(x)\right] + E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right]$$

Se puede denominar *sesgo promedio* al segundo sumando, $E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right]$, por analogía con la terminología de Cochran(1946).

Por tanto, si α es lipschitziana, $B_\xi\left[\alpha_H(x)\right] = O\left(h_n\right)$ y $B\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = O\left(h_n\right) + O\left(e^{-nP_x}\right)$. Si se supone más suavidad se obtiene el siguiente desarrollo

Corolario 25 *Sean $\alpha''(\cdot)$ y $f''(\cdot)$ acotadas y $f(x) > 0$. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $\exists \gamma > 0$ tal que $n^\gamma P_x^{1+\gamma} \to \infty$, entonces*

$$B\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = \alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + o\left(P_x\right)$$

Demostración.-

$$B\left(\hat{\alpha}_H(x)\right) = B_\xi\left(\alpha_H(x)\right) + E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right] = \alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + o\left(h_n\right) + O\left(e^{-nP_x}\right)$$

porque $B_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = -\alpha_H(x)p(n_{B_x} = 0)$ y por tanto

$$E_\xi B_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = -E_\xi\left(\alpha_H(x)\right) O\left(e^{-nP_x}\right) = -\left(\alpha(x) + o(1)\right) O\left(e^{-nP_x}\right) = O\left(e^{-nP_x}\right)$$

teniendo en cuenta que en el infinitésimo exponencial no hay términos que dependan de la distribución de las perturbaciones en ξ. Por consiguiente,

$$B\left(\hat{\alpha}_H(x)\right) = \alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + o\left(P_x\right) + O\left(e^{-nP_x}\right)$$

en un punto x tal que $f(x) > 0$. Si además $\exists \gamma > 0$ tal que $n^{\gamma} P_x^{1+\gamma} \to \infty$, entonces

$$B\left(\hat{\alpha}_H(x)\right) = \alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + o\left(P_x\right)$$

porque

$$\frac{1}{\left(nP_x\right)^{\gamma}} = \frac{P_x}{n^{\gamma} P_x^{1+\gamma}}$$

y $\left(nP_x\right)^{\gamma} = o\left(e^{nP_x}\right) \quad \forall \gamma > 0$

Q.E.D.

Observación.- En un punto con relieve no nulo, $f(x) > 0$, la condición $n^{\gamma} P_x^{1+\gamma} \to \infty$ se puede considerar equivalente a $nh_n^{1+\epsilon} \to \infty$ donde $\epsilon = \frac{1}{\gamma}$ y el sesgo se puede expresar del siguiente modo

$$B\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = \alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right] + o\left(h_n\right)$$

La condición sobre la ventana, ligeramente más restrictiva que la de Harms&Duchesne(2010), se hereda del plan de muestreo. El término dominante coincide, mutatis mutandis, con el presentado en GonzálezManteiga(1982).

3.3. Estudio de la $p-$varianza

3.3.1. Introducción a la $p-$varianza

Se denotará por $S^2_{B_{x,h_n}}$ el descriptor cuasivarianza de $\mathcal{Y}$ para las unidades de la p.f. con concomitante en la celdilla B_{x,h_n} que se estudiará en la siguiente subsección. Se verifica la siguiente igualdad para la $p-$varianza del estimador regresograma

Teorema 2 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$VAR_p\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right) p\left(n_{B_{x,h_n}} = m\right) +$$

$$+\alpha_H^2(x)\left[1 - p\left(n_{B_{x,h_n}} = 0\right)\right] p\left(n_{B_{x,h_n}} = 0\right)$$

Demostración.-

$$VAR_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = E_p\left[\widehat{\alpha}_H^2(x)\right] - E_p^2\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right]$$

Inicialmente se considerará el momento de segundo orden que por definición del estimador es igual a

$$E_p\left[\widehat{\alpha}_H^2(x)\right] = \sum_{m=1}^{n} E_p\left[\widehat{\alpha}_H^2(x)|n_{B_{x,h_n}} = m\right] p(n_{B_{x,h_n}} = m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left\{VAR_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)|n_{B_{x,h_n}} = m\right] + E_p^2\left[\widehat{\alpha}_H(x)|n_{B_{x,h_n}} = m\right]\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} S^2_{B_{x,h_n}} - \frac{1}{N_x} S^2_{B_{x,h_n}} + \alpha_H^2(x)\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) =$$

$$= S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + \alpha_H^2(x) \sum_{m=1}^{n} p(n_{B_{x,h_n}} = m) =$$

$$= S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + \alpha_H^2(x)\left[1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right]$$

Por tanto

$$VAR_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = E_p\left[\widehat{\alpha}_H^2(x)\right] - E_p^2\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] =$$

$$= S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + \alpha_H^2(x)\left[1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right] - \alpha_H^2(x)\left[1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right]^2 =$$

$$= S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + \alpha_H^2(x)\left[1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0) - \left(1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right)^2\right] =$$

$$= S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + \alpha_H^2(x)\left(1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right) p(n_{B_{x,h_n}} = 0)$$

Q.E.D.

De la demostración del teorema anterior, se obtiene la expresión del sesgo de $\widehat{\alpha}_H^2(x)$ como estimador de $\alpha_H^2(x)$

Corolario 26 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$B_p\left(\hat{\alpha}_H^2(x)\right) = S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) - \alpha_H^2(x) p(n_{B_{x,h_n}} = 0)$$

Proposición 10 *Bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$*

$$\alpha_H^2(x)\left(1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right) p(n_{B_{x,h_n}} = 0) = O\left(\max_{B_{xh_n}} Y_i^2 e^{-nP_x}\right)$$

Demostración.- Teniendo en cuenta que $\alpha_H^2(x)$ está mayorada por $\max_{B_{xh}} Y_i^2$

$$\alpha_H^2(x) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x)}\right]^2 \leq \left[\max_{B_{xh_n}} |Y_i| \frac{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x)}\right]^2 = \left(\max_{B_{xh_n}} |Y_i|\right)^2$$

se verifica que

$$\alpha_H^2(x)\left(1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right) p(n_{B_{x,h_n}} = 0) = \alpha_H^2(x) O\left(e^{-nP_x}\right) = O\left(\max_{B_{xh}} Y_i^2 e^{-nP_x}\right)$$

Q.E.D.

Corolario 27 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$, entonces*

$$VAR_p\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + \max_{B_{xh}} Y_i^2 \, O\left(e^{-nP_x}\right)$$

Demostración.-

$$VAR_p\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + \alpha_H^2(x)\left(1 - \ p(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right) p(n_{B_{x,h_n}} = 0) =$$

$$= S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + \alpha_H^2(x) O\left(e^{-nP_x}\right)$$

Q.E.D.

Observación.- En las condiciones anteriores, una expresión para la $p-$varianza es

$$VAR_p\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = S^2_{B_{x,h_n}} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) + O\left(\max_{N} Y_i^2 e^{-nP_x}\right)$$

porque $\left(\max_{B_{xh}} |Y_i|\right)^2 \leq \max_{N} Y_i^2$. Por otra parte, una interpretación del coeficiente de la cuasivarianza se puede obtener de la siguiente acotación

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m) \leq \frac{1}{1 - p(n_{B_{x,h_n}} = 0)} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}} = m)$$

donde la cota es el promedio de las coeficientes $m^{-1} - N_x^{-1}$. También se puede expresar del siguiente modo

$$\frac{1}{1-p(n_{B_{x,h_n}}=0)}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}p(n_{B_{x,h_n}}=m)-\frac{1}{N_x}.$$

Por tanto, el problema se reduce a estudiar el primer sumando

$$S^2_{B_{x,h_n}}\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right\}p(n_{B_{x,h_n}}=m),$$

y, del segundo, habrá que acotar o calcular la esperanza de $\alpha^2_H(x)$ según el diseño fijo. Por consiguiente, en principio se estudiará la expresión

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right\}p(n_{B_{x,h_n}}=m)$$

3.3.1.1. Resultados previos

Lema 12 *Si $g\neq -1$ entonces*

$$\frac{1}{1+g}=1-g+g\frac{g}{1+g}$$

Resultado 36

$$\frac{1}{1+O(1/n)}=1+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.4}$$

Demostración.- Dado que

$$\frac{1}{1+O(1/n)}\ =1-O(1/n)-o\left(O(1/n)\right)=1-O(1/n)-o\left(1/n\right)=1+O(1/n)$$

basta considerar la igualdad del lema y, abusando del lenguaje, tomar como $g=O(1/n)$ con tal que $g\neq -1$, lo que se verifica a partir de un n en adelante Q.E.D.

Observación.-

Bajo la hipótesis habitual de que $nh_n\to\infty$ y la condición HHM, como se está considerando $f(x)>0$

$$\frac{N_x}{N}=P_{N,x}=P_x+O(N^{-1})$$

$$N_x=NP_{N,x}=N\left(P_x+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=NP_x+O(1)$$

por tanto

$$\frac{1}{N_x}=\frac{1}{NP_{N,x}}=\frac{1}{N\left(P_x+O(1/n)\right)}=\frac{1}{NP_x\left(1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right)}=$$

$$= \frac{1}{NP_x}\left(1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right) = O\left(\frac{1}{nP_x}\right) \Rightarrow \frac{1}{N_x} \to 0$$

Como la condición $f(x) > 0$ es general, no se repetirá en las hipótesis para no recargar la lectura.

Resultado 37 *Si $nh_n \to \infty$, se verifica que*

$$(n+1)\frac{N_x+1}{N+1} = nP_x\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

Demostración.-

$$(n+1)\frac{N_x+1}{N+1} = (n+1)\frac{N_x/N+1/N}{1+1/N} = n\left(1+\frac{1}{n}\right)(P_{Nx}+O(1/N))\,(1-1/N+o(1/N)) =$$

$$= n\left(1+\frac{1}{n}\right)(P_x+O(1/N)+O(1/N))\,(1-1/N+o(1/N)) =$$

$$= nP_x\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right) =$$

$$= nP_x\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)+O\left(\frac{1}{n^2P_x}\right)\right] = nP_x\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

Q.E.D.

Por otra parte

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right\}p(n_{B_{x,h_n}}=m) = \sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right\}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

por la convención del segundo capítulo, $\binom{a}{b} = 0$ si $a < b$, se puede utilizar como recorrido $m \in \{0,1,\ldots,n\}$. Se pasará a estudiar parte de esta suma

Proposición 11 *Bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$, se verifica que*

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{N_x}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{NP_x}\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

Demostración.-

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{N_x} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{N_x} \sum_{m=1}^{n} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \frac{1}{N_x} \left[1 - \Pr(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right] = \frac{1}{N_x} \left[1 + O\left(e^{-nP_x}\right)\right]$$

Con lo cual

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{N_x} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{N_x} \left[1 + O\left(e^{-nP_x}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{NP_x + O(1)} \left[1 + O\left(e^{-nP_x}\right)\right] = \frac{1}{NP_x \left[1 + O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]} \left[1 + O\left(e^{-nP_x}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{NP_x} \left[1 + O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right] \left[1 + O\left(e^{-nP_x}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{NP_x} \left[1 + O\left(\frac{1}{nP_x}\right) + O\left(e^{-nP_x}\right)\right]$$

y, teniendo en cuenta que el término exponencial es de menor orden de magnitud que el inmediato anterior, se prueba el desarrollo Q.E.D.

Observación.- De la demostración también se deduce que en las mismas circunstancias

$$\frac{1}{N_x} \sum_{m=1}^{n} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{N_x} \left[1 - \Pr(n_{B_{x,h_n}} = 0)\right] \leq \frac{1}{N_x}$$

de donde también se podría obtener el desarrollo con la observación al resultado 36, y que

$$\frac{1}{N_x} \sum_{m=1}^{n} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{N_x} \left[1 + O\left(e^{-nP_x}\right)\right]$$

Resultado 38 *Bajo la condición HHM, si* $nh_n \to \infty$

$$\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+1}{n+1}} = O(e^{-nP_x})$$

Demostración.- Si $N - N_x \geq n + 1$

$$\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+1}{n+1}} = \frac{(N-N_x)^{(n+1}}{N^{(n+1}} = \frac{(N-N_x)\,(N-N_x-1)\cdots(N-N_x-n+1)\,(N-N_x-n)}{N\,(N-1)\cdots(N-n+1)\,(N-n)} =$$

$$= \frac{(N-N_x)}{N}\frac{(N-N_x-1)}{(N-1)}\cdots\frac{(N-N_x-n+1)}{(N-n+1)}\frac{(N-N_x-n)}{(N-n)} < (1-P_{N,x})^{n+1}$$

Entonces

$$\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+1}{n+1}} < (1-P_{N,x})^n(1-P_{N,x}) =$$

$$= O\left(e^{-nP_x}\right)\left(1-P_x+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O(e^{-nP_x})$$

Si $N-N_x < n+1$, se verifica trivialmente Q.E.D.

A efector prácticos, esta última condición no se da.

Resultado 39 *Bajo la condición HHM, si* $nh_n \to \infty$

$$(N_x+1)\frac{\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+1}{n+1}} = O(nP_xe^{-nP_x})$$

Demostración.-

$$(N_x+1)\frac{\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+1}{n+1}} = \frac{(N_x+1)(N-N_x)!(n+1)!(N-n)!}{n!(N-N_x-n)!(N+1)!} =$$

$$= \frac{(N_x+1)(N-N_x)!(n+1)(N-n)!}{(N-N_x-n)!(N+1)!} =$$

$$= (n+1)\frac{(N_x+1)(N-N_x)!(N-n)!}{(N+1)(N-N_x-n)!N!} =$$

$$= (n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{(N-N_x)(N-N_x-1)\cdots(N-N_x-n+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \leq$$

$$\leq (n+1)\frac{N_x+1}{N+1}(1-P_{N,x})^n$$

Si se estudia esta última expresión, se obtiene que

$$(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}(1-P_{N,x})^n = (nP_x+O(1))\left(O\left(e^{-nP_x}\right)\right)$$

Q.E.D.

Se estudiará a continuación la siguiente igualdad

Proposición 12 *Se verifica que*

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}} = 1-\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+1}{n+1}}-(N_x+1)\frac{\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+1}{n+1}}$$

Demostración.- La suma se puede expresar del siguiente modo

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}} = \sum_{m'=2}^{n'} \frac{\binom{N'_x}{m'}\binom{N'-N'_x}{n'-m'}}{\binom{N'}{n'}}$$

siendo cada una de las letras con prima igual a la respectiva sin prima aumentada en una unidad

$$\sum_{m'=2}^{n'} \frac{\binom{N'_x}{m'}\binom{N'-N'_x}{n'-m'}}{\binom{N'}{n'}} = \left[1 - \Pr(m'=0) - \Pr(m'=1)\right] =$$

$$= 1 - \frac{\binom{N'-N'_x}{n'}}{\binom{N'}{n'}} - \frac{N'_x\binom{N'-N'_x}{n'-1}}{\binom{N'}{n'}} = 1 - \frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+1}{n+1}} - (N_x+1)\frac{\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+1}{n+1}}$$

Q.E.D.

Ya se está en condiciones de estudiar el siguiente desarrollo asintótico

Corolario 28 *Bajo la condición HHM, se verifica que*

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}} = 1 + O\left(nP_x e^{-nP_x}\right)$$

De modo análogo introduciendo las letras con 2 primas, cada una igual a la respectiva sin prima aumentada en dos unidades, se probaría la siguiente igualdad

Resultado 40 *Se verifica que*

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\binom{N_x+2}{m+2}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+2}{n+2}} = 1 - \frac{\binom{N-N_x}{n+2}}{\binom{N+2}{n+2}} - (N_x+2)\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+2}{n+2}} - \frac{\binom{N_x+2}{2}\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+2}{n+2}}$$

También se introducirán dos igualdades auxiliares

Resultado 41 *Se verifica que*

$$\frac{\binom{N_x}{m}}{\binom{N}{n}} = \frac{m+1}{(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}}{\binom{N+1}{n+1}}$$

para $m = 0, 1, ..., n$

Demostración.- Considérese un m arbitrario, $m = 0, 1, ..., n$, $m \leq N_x$

$$\frac{m+1}{(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}} \frac{\binom{N_x+1}{m+1}}{\binom{N+1}{n+1}} = \frac{m+1}{(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}} \frac{\frac{(N_x+1)N_x!}{(m+1)m!(N_x-m)!}}{\frac{(N+1)N!}{(n+1)n!(N-n)!}} =$$

$$= \frac{\frac{N_x!}{m!(N_x-m)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{\binom{N_x}{m}}{\binom{N}{n}}$$

Si $m > N_x$ entonces $m + 1 > N_x + 1$, se verifica trivialmente porque

$$\binom{N_x}{m} = 0 \text{ y } \binom{N_x+1}{m+1} = 0$$

Q.E.D.

Resultado 42 *Se verifica para* $m = 1, 2, ..., n$ *que*

$$\frac{1}{m+1} \frac{\binom{N_x}{m}}{\binom{N}{n}} = \frac{m+2}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}} \frac{\binom{N_x+2}{m+2}}{\binom{N+2}{n+2}}$$

Demostración.- Si $m \leq N_x$, se desarrollará a partir del segundo miembro para obtener el primero

$$\frac{m+2}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}} \frac{\binom{N_x+2}{m+2}}{\binom{N+2}{n+2}} =$$

$$= \frac{(N+1)(N+2)(m+2)(N_x+2)!(n+2)!(N-n)!}{(n+2)(n+1)(N_x+1)(N_x+2)(m+2)!(N_x-m)!(N+2)!} =$$

$$= \frac{N_x!n!(N-n)!}{(m+1)!(N_x-m)!N!} = \frac{N_x!n!(N-n)!}{(m+1)m!(N_x-m)!N!} =$$

$$= \frac{1}{(m+1)} \frac{N_x!}{m!(N_x-m)!} \frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{1}{m+1} \frac{\binom{N_x}{m}}{\binom{N}{n}}$$

Si $m > N_x$ entonces $m + 2 > N_x + 2$, se verifica trivialmente porque

$$\binom{N_x}{m} = 0 \text{ y } \binom{N_x+2}{m+2} = 0$$

Q.E.D.

Resultado 43 *Bajo la condición HHM, se verifica que*

$$(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2} = (nP_x)^2[1+o(1)]$$

Demostración.-

$$(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}=$$

$$=n^2(1+O(1/n)\,(P_{Nx}+O(1/N))\,(P_{Nx}+O(1/N))\,(1-1/N+o(1/N))\,(1-1/N+o(1/N))=$$

$$=n^2(1+O(1/n))\,(P_x+O(1/N))\,(P_x+O(1/N))\,(1-1/N+o(1/N))\,(1-1/N+o(1/N))=$$

$$=n^2P_x^2\,[1+o(1)]$$

Q.E.D.

Se probará a continuación la siguiente desigualdad

Lema 13 *Se verifica que*

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}\leq$$

$$\leq\frac{3}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}}\left[1-\frac{\binom{N-N_x}{n+2}}{\binom{N+2}{n+2}}-(N_x+2)\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+2}{n+2}}-\frac{\binom{N_x+2}{2}\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+2}{n+2}}\right]$$

Demostración.-

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

se puede expresar, considerando el resultado 42, multiplicando ambos miembros por $\binom{N-N_x}{n-m}/m$ y sumando miembro a miembro, como

$$\frac{1}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}}\sum_{m=1}^{n}\frac{m+2}{m}\frac{\binom{N_x+2}{m+2}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+2}{n+2}}=$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{N_x+2}{m+2}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+2}{n+2}}+\sum_{m=1}^{n}\frac{2}{m}\frac{1}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}}\frac{\binom{N_x+2}{m+2}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+2}{n+2}}=$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{N_x+2}{m+2}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+2}{n+2}}+\sum_{m=1}^{n}\frac{2}{m(m+1)(m+2)}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}}\left[1-\Pr(m''=0)-\Pr(m''=1)-\Pr(m''=2)\right]+\sum_{m=1}^{n}\frac{2}{m(m+1)3}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

siendo $m'' = m + 2$. Por tanto, reuniendo lo anterior

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \frac{1}{m+1} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}} \left[1 - \Pr(m''=0) - \Pr(m''=1) - \Pr(m''=2)\right] + \frac{2}{3} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

con lo cual

$$\frac{1}{3} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \frac{1}{m+1} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$$\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}} \left[1 - \Pr(m''=0) - \Pr(m''=1) - \Pr(m''=2)\right]$$

es decir

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \frac{1}{m+1} \frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$$\leq \frac{3}{(n+2)(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}\frac{N_x+2}{N+2}} \left[1 - \Pr(m''=0) - \Pr(m''=1) - \Pr(m''=2)\right]$$

y por el resultado 40, sin demostración explícita, se obtiene la desigualdad Q.E.D.

Resultado 44 *Bajo la condición HHM, si* $nh_n \to \infty$

$$\frac{\binom{N-N_x}{n+2}}{\binom{N+2}{n+2}} = O(e^{-nP_x})$$

Demostración.-

$$\frac{\binom{N-N_x}{n+2}}{\binom{N+2}{n+2}} = \frac{(N-N_x)^{(n+2}}{(N+2)^{(n+2}} =$$

$$= \frac{(N-N_x)\,(N-N_x-1)\cdots(N-N_x-n+1)\,(N-N_x-n)\,(N-N_x-n-1)}{(N+2)\,(N+1)\,N\,(N-1)\cdots(N-n+1)\,(N-n)} =$$

$$= \frac{(N-N_x)}{N}\frac{(N-N_x-1)}{(N-1)}\cdots\frac{(N-N_x-n+1)}{(N-n+1)}\frac{(N-N_x-n)}{(N+2)}\frac{(N-N_x-n-1)}{(N+1)} <$$

$$< (1-P_{N,x})^{n+2} = (1-P_{N,x})^{n}(1-P_{N,x})^{2} = O(e^{-nP_x})\left(1 - P_x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = O(e^{-nP_x})$$

dado que

$$\frac{(N-N_x-n)}{(N+2)}\frac{(N-N_x-n-1)}{(N+1)} < \frac{(N-N_x-n)}{N}\frac{(N-N_x-n-1)}{N} <$$

$$< \frac{(N-N_x)}{N}\frac{(N-N_x)}{N} = (1-P_{N,x})^2$$

Q.E.D.

Resultado 45 *Bajo la condición HHM, si* $nh_n \to \infty$

$$(N_x+2)\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+2}{n+2}} = O(nP_x e^{-nP_x})$$

Demostración.-

$$(N_x+2)\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+2}{n+2}} = \frac{(N_x+2)\,(N-N_x)!\,(n+2)!\,(N-n)!}{(n+1)!\,(N-N_x-n-1)!(N+2)!} =$$

$$= \frac{(N_x+2)\,(N-N_x)!\,(n+2)\,(N-n)!}{(N-N_x-n-1)!(N+2)!} =$$

$$= (n+2)\,\frac{(N_x+2)\,(N-N_x)!\,(N-n)!}{(N+2)\,(N-N_x-n-1)!\,(N+1)!} =$$

$$= (n+2)\,\frac{N_x+2}{N+2}\frac{(N-N_x)\,(N-N_x-1)\cdots(N-N_x-n)}{(N+1)\,N\,(N-1)\cdots(N-n+1)} =$$

$$= (n+2)\,\frac{N_x+2}{N+2}\frac{(N-N_x)\,(N-N_x-1)\cdots(N-N_x-n+1)\,(N-N_x-n)}{N\,(N-1)\cdots(N-n+1)\,(N+1)} <$$

$$< (n+2)\,\frac{N_x+2}{N+2}(1-P_{N,x})^{n+1} \leq n\left(P_{N,x}+O(N^{-1})\right)(1-P_{N,x})^{n+1} + 2\left(P_{N,x}+O(N^{-1})\right)(1-P_{N,x})^{n+1} = O(nP_x e^{-nP_x})$$

porque el primer sumando es el dominante Q.E.D.

Resultado 46 *Bajo la condición HHM, si* $nh_n \to \infty$

$$\frac{\binom{N_x+2}{2}\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+2}{n+2}} = O\left((nP_x)^2 e^{-nP_x}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{\binom{N_x+2}{2}\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+2}{n+2}} = \frac{(N_x+2)(N_x+1)\,(N-N_x)!\,(n+2)!\,(N-n)!}{2n!\,(N-N_x-n)!(N+2)!} =$$

$$= \frac{(N_x+2)(N_x+1)\,(N-N_x)!\,(n+2)\,(n+1)\,(N-n)!}{2\,(N-N_x-n)!(N+2)!} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(n+2)\,(n+1)\,\frac{(N_x+2)(N_x+1)}{(N+2)(N+1)}\,\frac{(N-N_x)!\,(N-n)!}{(N-N_x-n)!N!} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(n+2)\,(n+1)\,\frac{(N_x+2)(N_x+1)}{(N+2)(N+1)}\,\frac{(N-N_x)\,(N-N_x-1)\cdots(N-N_x-n+1)}{N\,(N-1)\cdots(N-n+1)} <$$

$$< \frac{1}{2}(n+2)(n+1)\frac{(N_x+2)(N_x+1)}{(N+2)(N+1)}(1-P_{N,x})^n \leq O\left(n^2\right)\left(P_{N,x}^2+O(N^{-1})\right)(1-P_{N,x})^n+$$

$$+O(n)\left(P_{N,x}^2+O(N^{-1})\right)(1-P_{N,x})^n+\left(P_{N,x}^2+O(N^{-1})\right)(1-P_{N,x})^n$$

con lo cual es del orden de $O\left((nP_{N,x})^2\right)(1-P_{N,x})^n$, por tanto de orden $(nP_x)^2 e^{-nP_x}$ Q.E.D.

Con lo cual se han probado los siguientes resultados auxiliares

Resultado 47 *Bajo la condición HHM, si* $nh_n \to \infty$

$$\Pr(m''=0) = O\left(e^{-nP_x}\right)$$

$$\Pr(m''=1) = O\left(nP_x e^{-nP_x}\right)$$

$$\Pr(m''=2) = O\left((nP_x)^2 e^{-nP_x}\right)$$

Demostración.- Basta tener en cuenta que

$$\Pr(m''=0) = \frac{\binom{N-N_x}{n+2}}{\binom{N+2}{n+2}}$$

$$\Pr(m''=1) = (N_x+2)\frac{\binom{N-N_x}{n+1}}{\binom{N+2}{n+2}}$$

$$\Pr(m''=2) = \frac{\binom{N_x+2}{2}\binom{N-N_x}{n}}{\binom{N+2}{n+2}}$$

o los casos patológicos en que sean nulos Q.E.D.

Corolario 29 *Bajo la condición HHM, si* $nh_n \to \infty$

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} = O\left(\frac{1}{(nP_x)^2}\right)$$

Demostración.- Ahora bien, por la desigualdad demostrada en el último lema

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

está mayorada por una expresión que se puede desarrollar como

$$\frac{3}{(nP_x)^2(1+o(1))}\left[1-\Pr(m''=0)-\Pr(m''=1)-\Pr(m''=2)\right]$$

El término dominante, el que resulta de considerar el sumando correspondiente al 1, es potencial de orden 2, $O\left(1/(nP_x)^2\right)$ mientras que los tres restantes son exponenciales Q.E.D.

3.3.1.2. Estudio de la suma del término principal de la $p-$varianza

Ya se ha dado una interpretación de esta suma, a continuación de dará un desarrollo asintótico

Proposición 13 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$, se verifica que*

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right\}p(n_{B_{x,h_n}}=m)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{P_x}\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right] \tag{3.5}$$

Demostración.- Se procede a estudiar la expresión

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right\}p(n_{B_{x,h_n}}=m)=\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right\}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}-\frac{1}{N_x}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}\right\}=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{N_x}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$$=A+B$$

Considérese el primer sumando A. Por el resultado 41, multiplicando miembro a miembro por $\binom{N-N_x}{n-m}/m$ y sumando en m, se tiene que

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}=\frac{1}{(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}}\sum_{m=1}^{n}\frac{m+1}{m}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}}+\frac{1}{(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}}+\frac{1}{N_x+1}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)\frac{N_x+1}{N+1}}\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}=$$

$$=\frac{1}{nP_x+O(P_x)}\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}=$$

$$=\frac{1}{nP_x\left(1+O(1/n)\right)}\sum_{m=1}^{n}\frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}}=$$

$$= \frac{1}{nP_x}(1+O(1/n)) \sum_{m=1}^{n} \frac{\binom{N_x+1}{m+1}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N+1}{n+1}} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= A_1 + A_2$$

El segundo subsumando A_2, por el último corolario, se puede expresar como

$$A_2 = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\frac{1}{m+1}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} = O\left(\frac{1}{(nP_x)^2}\right)$$

Por el corolario 28, el primer subsumando es

$$A_1 = \frac{1}{nP_x}\left(1+O(1/n)\right)\left[1+O\left(nP_x e^{-nP_x}\right)\right]$$

con lo cual

$$A = \frac{1}{nP_x}\left(1+O(1/n)\right)\left[1+O\left(nP_x e^{-nP_x}\right)\right] + O\left(\frac{1}{(nP_x)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{nP_x} + O\left(\frac{1}{(nP_x)^2}\right) = \frac{1}{nP_x}\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

y el segundo sumando B es, por una proposición anterior, la 11

$$B = -\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{N_x}\frac{\binom{N_x}{m}\binom{N-N_x}{n-m}}{\binom{N}{n}} = -\frac{1}{NP_x}\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

Por tanto

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right\} p(n_{B_{x,h_n}}=m) = \frac{1}{nP_x}\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right] - \frac{1}{NP_x}\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{nP_x}-\frac{1}{NP_x}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right] = \frac{1}{P_x}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

Q.E.D.

3.3.2. Estudio de $S^2_{B_{x,h_n}}$

Se va a estudiar la cuasivarianza de las Y con concomitante en la celdilla, que se puede expresar de la siguiente forma

Proposición 14 *Si $N_x > 1$, se verifica que*

$$S^2_{B_{x,h_n}} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right) - 1}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]$$

Demostración.- Siempre que $N_x > 1$ se tiene que

$$S^2_{B_{x,h_n}} = \frac{1}{N_x - 1}\sum_{j=1}^{N_x}(Y_j - \alpha_H(x))^2$$

que a su vez es igual a

$$\frac{1}{N_x - 1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(Y_i^2 - 2\alpha_H(x)Y_i + \alpha_H^2(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{N_x - 1}\sum_{i=1}^{N_x} Y_i^2 - 2\frac{1}{N_x - 1}\alpha_H(x)\sum_{i=1}^{N_x} Y_i + \frac{N_x}{N_x - 1}\alpha_H^2(x) =$$

$$= \frac{1}{N_x - 1}\sum_{i=1}^{N_x} Y_i^2 - 2\frac{N_x}{N_x - 1}\alpha_H^2(x) + \frac{N_x}{N_x - 1}\alpha_H^2(x) =$$

$$= \frac{1}{N_x - 1}\sum_{i=1}^{N_x} Y_i^2 - \frac{N_x}{N_x - 1}\alpha_H^2(x) = \frac{1}{N_x - 1}\left(\sum_{i=1}^{N_x} Y_i^2 - N_x\alpha_H^2(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{N_x - 1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(Y_i^2 - \alpha_H^2(x)\right) = \frac{1}{N_x - 1}\left[\sum_{i=1}^{N_x} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N_x} Y_i\right)^2}{N_x}\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right) - 1}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]$$

Q.E.D.

Una expresión alternativa es

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}\right]$$

lo que permite interpretarla como

$$\frac{N_x}{N_x-1}\left[\alpha_H^{[Y^2]}(x) - \alpha_H^2(x)\right]$$

siendo $\alpha_H^{[Y^2]}(x)$ el regresograma correspondiente al cuadrado de la variable $\mathcal{Y}$. Se puede dar otra expresión alternativa en términos de indicadoras

$$S^2_{B_{x,h_n}} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_H(x)\right)^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_H(x)\right)^2 1^2_{B_{x,h_n}}(x_i) =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \alpha_H(x) 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2$$

En este caso, por el resultado 32, se verifica que

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_H(x)\right) 1^2_{B_{x,h_n}}(x_i) = 0$$

Llegado a este punto se puede dar una expresión asintótica de la $p-$varianza. Recúerdese que siempre se está tratando con x tales que $f(x) > 0$

Corolario 30 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$*

$$VAR_p\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{P_x} +$$

$$+ O\left(\frac{\text{máx}_N\, Y_i^2}{\left(nP_x\right)^2}\right)$$

Demostración.- Como

$$S^2_{B_{x,h_n}} = \frac{N_x}{N_x - 1}\sigma^2_{B_{x,h_n}} \leq \frac{N_x}{N_x - 1}\max_{B_{xh}} Y_i^2 = \frac{NP_{N,x}}{NP_{N,x} - 1}\max_{B_{xh}} Y_i^2 = \frac{P_{N,x}}{P_{N,x} - \frac{1}{N}}\max_{B_{xh}} Y_i^2 = O\left(\max_{B_{xh}} Y_i^2\right),$$

se puede aplicar (3.5) y el corolario 27 para obtener el desarrollo

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right) - 1}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]\frac{1}{P_x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right] +$$

$$+ O\left(\max_{B_{xh}} |Y_i|^2 e^{-nP_x}\right)$$

Q.E.D.

Observación.- Para cálculos posteriores puede tener interés que el máximo se considere en la celdilla y no en todo el recorrido de la $\mathcal{X}$. Como caso particular, se tiene el siguiente ejemplo

Ejemplo 25 *En las circunstancias anteriores, si $\mathcal{Y}$ permanece acotada en la p.f., la $p-$varianza se puede expresar como*

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right) - 1}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{P_x} + O\left(\frac{1}{(nP_x)^2}\right)$$

3.4. Estudio de la varianza promedio

Se va a estudiar $E_\xi VAR_p(\hat{\theta})$ que es la esperanza según el diseño fijo de la $p-$varianza y se puede denominar también *varianza promedio* siguiendo a Cochran(1946). El promedio se refiere a todas las pp.ff. generadas a partir del modelo de diseño fijo. Para ello habrá que estudiar la $\xi-$esperanza de

$$VAR_p\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = S^2_{B_{x,h_n}}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{N_x}\right)\Pr\left(n_{B_{x,h_n}} = m\right) + \alpha_H^2(x)\left[1 - \Pr\left(n_{B_{x,h_n}} = 0\right)\right]\Pr\left(n_{B_{x,h_n}} = 0\right)$$

es decir, $E_\xi VAR_p\left[\hat{\alpha}_H(x)\right]$ implica estudiar $E_\xi\left[S^2_{B_{x,h_n}}\right]$ y $E_\xi\left[\alpha_H^2(x)\right]$ dado que los factores correspondientes no dependen del diseño fijo. Ya se ha obtenido una expresión asintótica para la suma

del primer sumando. Con relación al segundo, el término relativo a la $\xi-$esperanza del cuadrado del regresograma en la p.f., al tomar esperanzas bajo el diseño fijo

$$E_\xi\left[\alpha_H^2(x)\right] O\left(e^{-nP_x}\right)$$

es de orden exponencial $O\left(e^{-nP_x}\right)$, porque el término dominante de $E_\xi\left[\alpha_H^2(x)\right]$ es $\alpha^2(x)$, bajo condiciones de suavidad, como se presentará a continuación. Por tanto este factor no explota y este segundo término tiende a cero a mucha mayor velocidad que el primero.

3.4.1. $\xi-$Esperanza de $\alpha_H^2(x)$

La esperanza según el diseño fijo del cuadrado del descriptor regresograma, $\alpha_H^2(x)$, es

Proposición 15

$$E_\xi\left[\alpha_H^2(x)\right] = \frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)}{N_x} + \left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2$$

Demostración.-

$$E_\xi\left[\alpha_H^2(x)\right] = E_\xi\left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right)^2\right\} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2} E_\xi\left\{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{N_x^2} E_\xi\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1^2_{B_{x,h_n}}(x_i) + \sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})} Y_i Y_j 1_{B_{x,h_n}}(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_j)\right] =$$

$$= \frac{1}{N_x^2} E_\xi\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right] + \frac{1}{N_x^2} E_\xi\left[\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})} Y_i Y_j 1_{B_{x,h_n}}(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_j)\right] = I + II$$

El primer sumando es igual a

$$I = \frac{1}{N_x^2} E_\xi\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right] = \frac{1}{N_x^2}\sum_{j=1}^{N_x}\left[\sigma^2(x_j) + \alpha^2(x_j)\right] = \frac{1}{N_x^2}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_j) + \frac{1}{N_x^2}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha^2(x_j)$$

El segundo

$$II = \frac{1}{N_x^2} E_\xi\left[\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})} Y_i Y_j 1_{B_{x,h_n}}(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_j)\right] = \frac{1}{N_x^2}\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})} E_\xi\left(Y_i Y_j\right) 1_{B_{x,h_n}}(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_j) =$$

$$= \frac{1}{N_x^2} \sum_{i \neq j}^{(N^{(2)})} \alpha(x_i)\alpha(x_j) 1_{B_{x,h_n}}(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_j) =$$

$$= \frac{1}{N_x^2} \sum_{i=1}^{N} \alpha(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_i) \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha(x_j) 1_{B_{x,h_n}}(x_j) - \alpha(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_i) \right) =$$

$$= \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N} \alpha(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_i) \frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N} \alpha(x_j) 1_{B_{x,h_n}}(x_j) - \frac{1}{N_x^2} \sum_{i=1}^{N} \alpha^2(x_i) 1_{B_{x,h_n}}(x_i) =$$

$$= \left(\frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} \alpha(x_j) \right)^2 - \frac{1}{N_x^2} \sum_{j=1}^{N_x} \alpha^2(x_j)$$

Q.E.D.

Corolario 31 *Sean $\alpha(\cdot)$ continua y $\sigma(\cdot)$ acotada. Si $nh_n \to \infty$, entonces*

$$E_\xi \left[\alpha_H^2(x) \right] = \alpha^2(x) + o(1)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{N_x^2} \sum_{j=1}^{N_x} \sigma^2(x_j) + \left(\frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} \alpha(x_j) \right)^2 = \frac{1}{N_x} \frac{\sum_{j=1}^{N_x} \sigma^2(x_j)}{N_x} + (\alpha(x) + o(1))^2$$

por el resultado (3.2) y la continuidad de la función de regresión y teniendo en cuenta que $N_x = NP_x + O(1)$ Q.E.D.

Corolario 32 *Sean $\alpha(\cdot)$ continua y $\sigma(\cdot)$ acotada. Si $nh_n \to \infty$ entonces el cuadrado del regresograma es asintóticamente $\xi-$insesgado*

3.4.2. $\xi-$Esperanza de $S^2_{B_{x,h_n}}$

Para el tratamiento de la esperanza de $S^2_{B_{x,h_n}}$ según el diseño fijo se van a probar unos resultados auxiliares

Lema 14 *Sea $\alpha(\cdot)$ continua, si $nh_n \to \infty$ y $N_x > 1$ entonces*

$$\frac{1}{N_x - 1} \sum_{i=1}^{N_x} \alpha^2(x_i) = \alpha^2(x) + o(1)$$

Demostración.- Para probarlo, se aplica la proposición 6 a la función $\alpha(x)$ en $B_{x,h_n} \subset [0,1]$ y se obtiene que

$$\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\alpha^2(x_i) = \alpha^2(\zeta_n) = \alpha^2(x) + o(1)$$

siendo $\zeta_n \in B_{x,h_n}$, que tiende a x cuando $n \to \infty$ y por continuidad $\alpha^2(\zeta_n) \to \alpha^2(x)$. Por otra parte

$$\frac{N_x}{N_x - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{N_x}} \to 1$$

cuando $n \to \infty$ si $nh_n \to \infty$, lo que implica que

$$\frac{N_x}{N_x - 1} = 1 + o(1)$$

reuniendo ambos desarrollos

$$\frac{1}{N_x - 1}\sum_{i=1}^{N_x}\alpha^2(x_i) = \frac{N_x}{N_x - 1}\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\alpha^2(x_i) = \frac{N_x}{N_x - 1}\alpha^2(\zeta_n) = \left(\alpha^2(x) + o(1)\right)(1 + o(1)) = \alpha^2(x) + o(1)$$

si $\alpha(x) \neq 0$. Si $\alpha(x) = 0$

$$\frac{N_x}{N_x - 1}\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\alpha^2(x_i) = \frac{N_x}{N_x - 1}\alpha^2(\zeta_n) = o(1)(1 + o(1)) = o(1)$$

también se verifica Q.E.D.

Lema 15 *Sea $\alpha(\cdot)$ continua, si $nh_n \to \infty$ y $N_x > 1$ entonces*

$$\frac{1}{N_x - 1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i) - \frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2 = o(1)$$

Demostración.- Como

$$\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\alpha^2(x_i) = \alpha^2(\zeta)$$

y

$$\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\alpha(x_i) = \alpha(\zeta')$$

siendo $\zeta, \zeta' \in B_{x,h_n}$, abusando de la notación, entonces

$$\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2=\frac{N_x}{N_x-1}\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2=$$

$$=\frac{N_x}{N_x-1}\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\alpha^2(x_i)-\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]=O(1)\left[\alpha^2(\zeta)-\alpha^2\left(\zeta'\right)\right]=o(1)$$

por continuidad Q.E.D.

Lema 16 *Si $N_x>1$, se verifica que*

$$E_\xi\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2\right]=\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2\right]=\frac{N_x}{N_x-1}E_\xi\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2\right]=$$

$$=\frac{N_x}{N_x-1}E_\xi\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)\varepsilon_i^2-\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2\right]=$$

$$=\frac{N_x}{N_x-1}E_\xi\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)\varepsilon_i^2-\left(\frac{1}{N_x}\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)\varepsilon_i^2+\frac{1}{N_x}\frac{1}{N_x}\sum_{i\neq j}^{N_x^{(2}}\sigma(x_i)\varepsilon_i\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)\right]=\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)$$

Q.E.D.

Observación.- En el caso de homoscedasticidad

$$E_\xi\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2\right]=\sigma^2$$

que también se podría obtener directamente ya que, en este caso, la esperanza según el diseño fijo de la cuasivarianza es la varianza σ^2. O también

$$E_\xi\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\varepsilon_j\right)^2\right]=1$$

Si $\sigma(\cdot)$ es continua, como es positiva, se puede aplicar la proposición 6 y, por tanto,

$$E_\xi\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2\right]=\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)=\sigma^2(\zeta')=\sigma^2(x)+o(1)$$

por el ejemplo 24.

Proposición 16

$$E_\xi\left\{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\left[\sum_{i=1}^{N}Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2$$

Demostración.- Como

$$\alpha_H(x)=\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}Y_i=\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}(\alpha(x_i)+\sigma(x_i)\varepsilon_i)=\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\alpha(x_i)+\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma(x_i)\varepsilon_i$$

se verifica que

$$S^2_{B_{x,h_n}}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_H(x)\right)^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)=$$

$$=\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha(x_i)+\sigma(x_i)\varepsilon_i-\left(\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)1_{B_{x,h_n}}(x_i)+\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N}\sigma(x_i)\varepsilon_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)\right]^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)=$$

$$=\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_j)1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)+\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N}\sigma(x_j)\varepsilon_j 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)\right]^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)=$$

$$=\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_j)1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2+\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N}\sigma(x_j)\varepsilon_j 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2\right]1_{B_{x,h_n}}(x_i)+$$

$$+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N}\left[2\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_j)1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N}\sigma(x_j)\varepsilon_j 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)\right]1_{B_{x,h_n}}(x_i),$$

obsérvese que se puede expresar como

$$\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2+$$

$$+2\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)$$

Con lo cual, si se toman $\xi-$esperanzas se tiene que

$$E_\xi\left[S^2_{B_{x,h_n}}\right]=\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2+E_\xi\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2\right]+$$

$$+2\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)E_\xi\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)=$$

$$E_\xi\left[S^2_{B_{x,h_n}}\right]=\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2+E_\xi\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)^2\right]$$

porque $E_\xi\left(\sigma(x_i)\varepsilon_i-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma(x_j)\varepsilon_j\right)=0$.

Aplicando el último lema, se obtiene la igualdad Q.E.D.

Corolario 33 *Si $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ son continuas, entonces*

$$E_\xi\left\{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\left[\sum_{i=1}^{N}Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]\right\}=\sigma^2(x)+o(1)$$

Demostración.- Por la proposición y el lema 15 Q.E.D.

Si se impone más suavidad en α, por ejemplo la condición de Lipschitz, se puede mejorar el orden de la aproximación

$$E_\xi\left\{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\left[\sum_{i=1}^{N}Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]\right\}=$$

$$= \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i) + \frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i) - \frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i) + \frac{1}{2N_x(N_x-1)}\sum_{i\neq j}^{(N_x^{(2)})}(\alpha(x_i)-\alpha(x_j))^2 = \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i) + O\left(h_n^2\right)$$

porque

$$\frac{1}{N_x(N_x-1)}\sum_{i\neq j}^{(N_x^{(2)})}(\alpha(x_i)-\alpha(x_j))^2 \leq \frac{\Lambda^2(\alpha)}{N_x(N_x-1)}\sum_{i\neq j}^{(N_x^{(2)})}(x_i-x_j)^2 \leq \Lambda^2(\alpha)h_n^2$$

aunque no tenga mucho valor práctico.

Corolario 34 *Bajo homoscedasticidad, si $\alpha(\cdot)$ es continua*

$$E_\xi\left\{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\left[\sum_{i=1}^{N}Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]\right\} = \sigma^2 + o(1)$$

3.4.3. Conclusión de la varianza promedio

Teorema 3 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right] = \left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i) + \frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i) - \frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{N_x^2}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_j) + \left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right]p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)$$

Demostración.- Como

$$VAR_p\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = S^2_{B_{x,h_n}}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$
$$+\alpha_H^2(x)\left[1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right]p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)$$

si se toman $\xi-$esperanzas, se obtiene

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right] = E_\xi\left(S^2_{B_{x,h_n}}\right)\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+E_\xi\left(\alpha_H^2(x)\right)\left[1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right]p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)}{N_x}+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right]p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)$$

Q.E.D.

Corolario 35 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ son acotadas y $nh_n\to\infty$*

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right]=\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[\frac{1}{nP_x}-\frac{1}{NP_x}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

Demostración.-

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right]=\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[\frac{1}{nP_x}-\frac{1}{NP_x}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)}{N_x}+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]O\left(e^{-nP_x}\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[\frac{1}{nP_x}-\frac{1}{NP_x}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

Q.E.D.

Corolario 36 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ son continuas y $nh_n\to\infty$*

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{\sigma^2(x)}{P_x}+o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right] = \left(\sigma^2(x) + o(1)\right)\left[\frac{1}{nP_x} - \frac{1}{NP_x}\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2(x)}{P_x}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right] + o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$$

Q.E.D.

Observación.- Si se realiza el censo, el término dominante se anula. En las mismas condiciones, como se están considerando puntos con $f(x) > 0$, se podría escribir

$$\frac{\sigma^2(x)}{f(x)h_n\left(1 + o(1)\right)}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right] + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{h_n}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Obsérvese también que en el corolario 35 se obtiene una fórmula que no precisa suavidad, simplemente acotación. Podría interesar en situaciones donde la función de regresión presentase alguna discontinuidad de salto.

3.5. $\xi-$Varianza de la $p-$esperanza

Se desea calcular $VAR_\xi\left[E_p\left(\widehat{\alpha}_H(x)\right)\right]$. Si se siguiera el razonamiento de Bellhouse&Stafford(1999) para la densidad, se tendría que $E_p\left(\widehat{\alpha}_H(x)\right)$, cantidad de la p.f. en concreto el descriptor regresograma, sería de orden $O(1/N)$, dado que estos autores sostienen que los cumulantes de tales cantidades son generalmente de ese orden y, por tanto, para poblaciones grandes despreciables. Se verá, sin embargo, que el orden es $O\left((nP_x)^{-1}\right)$. Para ello recuérdese que

$$E_p\left[\widehat{\alpha}_H(x)\right] = \alpha_H(x)\left[1 - \ p(n_{B_x} = 0)\right],$$

y, por tanto, se verifica que

$$VAR_\xi\left[E_p\left(\widehat{\alpha}_H(x)\right)\right] = VAR_\xi\left\{\alpha_H(x)\left[1 - \ p(n_{B_x} = 0)\right]\right\}$$

y como en $1 - \ p(n_{B_x} = 0)$ no hay términos que dependan de ξ, el modelo de diseño fijo, bastará con estudiar la varianza según el diseño fijo del descriptor regresograma

Teorema 4

$$VAR_\xi\left[\alpha_H(x)\right] = \frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)}{N_x}$$

Demostración.- Por la hipótesis de incorrelación, se verifica que

$$VAR_\xi\left(\alpha_H(x)\right) = VAR_\xi\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i 1_{B_{xh_n}}(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{N} VAR_\xi\left(Y_i\right) 1^2_{B_{xh_n}}(x_i)}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) 1^2_{B_{xh_n}}(x_i)}{\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{xh_n}}(x_i)\right)^2} = \frac{\sum_{j=1}^{N_x} \sigma^2(x_i)}{N_x^2} = \frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x} \sigma^2(x_i)}{N_x}$$

Q.E.D.

Corolario 37 *Si $\sigma(\cdot)$ es continua y $nh_n \to \infty$,*

$$VAR_\xi\left[\alpha_H(x)\right] = \frac{\sigma^2(x)}{NP_x} + o\left(\frac{1}{NP_x}\right)$$

Demostración.-

$$VAR_\xi\left(\alpha_H(x)\right) = \frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x} \sigma^2(x_i)}{N_x} = \frac{1}{N_x}\left(\sigma^2(x) + o(1)\right)$$

además si se tiene en cuenta que

$$N_x = NP_{N,x} = N\left(P_x + O(1/N)\right) = NP_x + O(1) = NP_x\left[1 + O\left(\frac{1}{NP_x}\right)\right]$$

$$\frac{1}{N_x} = \frac{1}{NP_x}\left[1 + O\left(\frac{1}{NP_x}\right)\right]$$

se deduce que

$$VAR_\xi\left(\alpha_H(x)\right) = \frac{\sigma^2(x) + o(1)}{NP_x}\left[1 + O\left(\frac{1}{NP_x}\right)\right] = \frac{\sigma^2(x)}{NP_x} + o\left(\frac{1}{NP_x}\right)$$

Q.E.D.

Corolario 38 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $\sigma(\cdot)$ es continua y $nh_n \to \infty$, entonces*

$$VAR_\xi\left[E_p\left(\widehat{\alpha}_H(x)\right)\right] = \frac{\sigma^2(x)}{NP_x} + o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$$

Demostración.-

$$VAR_\xi\left[E_p\left(\widehat{\alpha}_H(x)\right)\right] = \left[1+O\left(e^{-nP_x}\right)\right]^2\left[\frac{\sigma^2(x)}{NP_x}+o\left(\frac{1}{NP_x}\right)\right] = \frac{\sigma^2(x)}{NP_x}+o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$$

Q.E.D.

3.6. Varianza total

3.6.1. Revisita a la varianza promedio

Resultado 48 *Bajo la condición HHM, si $\alpha(\cdot)$ es continua y $nh_n \to \infty$*

$$E_\xi\left[\alpha_H^2(x)\right] = \alpha^2(x)+o(1)$$

Demostración.- Como $E_\xi\left[\alpha_H^2(x)\right] = VAR_\xi\left[\alpha_H(x)\right]+\left(E_\xi\left[\alpha_H(x)\right]\right)^2$, se verifica, por una parte, que

$$VAR_\xi\left[\alpha_H(x)\right] = \frac{\sigma^2(x)}{NP_x}\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]$$

Y, por otra, que $\left(E_\xi\left[\alpha_H(x)\right]\right)^2 = \left(\alpha(x)+o(1)\right)^2 = \alpha^2(x)+o(1)$, con lo cual $E_\xi\left[\alpha_H^2(x)\right] = \alpha^2(x)+o(1)$ Q.E.D.

3.6.2. Conclusión de la varianza

Teorema 5 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$VAR\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\left(1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)$$

Demostración.-

$$VAR\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right]+VAR_\xi\left[E_p\left(\hat{\alpha}_H(x)\right)\right] =$$

$$= E_\xi\left(S^2_{B_{x,h_n}}\right)\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+E_\xi\left(\alpha^2_H(x)\right)\left[1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right]p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)+$$

$$+VAR_\xi\left\{\alpha_H(x)\left[1-\ p(n_{B_x}=0)\right]\right\}=$$

$$=\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{N_x^2}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_j)+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right]p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)+$$

$$+\frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)}{N_x}\left[1-\ p(n_{B_x}=0)\right]^2=$$

$$=\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)-$$

$$-\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\frac{1}{N_x}\sum_{m=1}^{n}p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{N_x^2}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_j)+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right]p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)+$$

$$+\frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)}{N_x}\left[1-\ p(n_{B_x}=0)\right]^2=$$

$$=\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)-$$

$$-\frac{1}{N_x}\frac{\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)}{N_x}\left[1-\ p(n_{B_x}=0)\right]-\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{N_x}p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{N_x^2}\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_j)+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[1-\ p(n_{B_x}=0)\right]p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)+$$

$$+\frac{1}{N_x}\frac{\sum_{j=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)}{N_x}\left[1-\ p(n_{B_x}=0)\right]^2=$$

$$=\left[\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$-\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{N_x}p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\left(1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)$$

Q.E.D.

Corolario 39 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $\sigma(\cdot)$ es continua, $\alpha(\cdot)$, acotada y $nh_n\to\infty$*

$$VAR\left[\hat{\alpha}_H(x)\right]=\frac{\sigma^2(x)}{nP_x}+\left(\frac{1}{nP_x}-\frac{1}{NP_x}\right)\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]+o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$$

Demostración.- Por la demostración de la proposición 13,

$$VAR\left[\hat{\alpha}_H(x)\right]=\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{N_x}\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=m\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\left(1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)=$$

$$= \frac{1}{nP_x}\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]\frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}\sigma^2(x_i)+$$

$$+\left(\frac{1}{nP_x}-\frac{1}{NP_x}\right)\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]+$$

$$+\left(\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\left(1-p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)\right)p\left(n_{B_{x,h_n}}=0\right)$$

y por el ejemplo 24 y la continuidad de $\sigma^2(\cdot)$ es, a su vez, igual a

$$\frac{1}{nP_x}(\sigma^2(x)+o(1))\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]+$$

$$+\left(\frac{1}{nP_x}-\frac{1}{NP_x}\right)\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]\left[1+O\left(\frac{1}{nP_x}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sigma^2(x)}{nP_x}+\left(\frac{1}{nP_x}-\frac{1}{NP_x}\right)\left[\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2\right]+o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$$

Q.E.D.

Cuando se considera más suavidad en la función de regresión, se puede obtener una expresión más en línea con las habituales en regresión no paramétrica.

Corolario 40 *Sean $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ continuas. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$,*

$$VAR\left[\hat{\alpha}_H(x)\right]=\frac{\sigma^2(x)}{nP_x}+o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$$

Demostración.- Por un lema anterior

$$\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N_x}\left(\alpha(x_i)-\frac{1}{N_x}\sum_{j=1}^{N_x}\alpha(x_j)\right)^2=o(1)$$

Q.E.D.

Observación.- Como se está considerando en general que $f(x) > 0$ entonces el resultado anterior se puede expresar del siguiente modo

$$VAR\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] = \frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{1}{nh_n} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

que recuerda el de poblaciones infinitas, véase GonzálezManteiga(1982) en diseño aleatorio. No está en contradicción con el de Bellhouse&Stafford(1999) para la densidad porque estos autores, con un razonamiento excesivamente ligero, solamente consideraron la varianza promedio y esta sí que viene afectada por el plan de muestreo como ya se ha visto con anterioridad.

A la vista de los resultados de la memoria no es imprescindible la continuidad para el tratamiento de la varianza por lo que podría tener interés en el estudio de curvas con discontinuidades de salto. También para las continuas pero con puntos en que no son diferenciables, como las quebradas de la teoría económica o de la fisico-química. Si sólo se considera el plan de muestreo, los resultados obtenidos resultan interesantes porque el regresograma de la p.f. es objeto de estudio en numerosas ocasiones.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Capítulo 4

Estimador de Nadaraya-Watson

Natura non agit per saltum

Resumen Se motiva la definición del estimador. Se tratan resultados auxiliares relativos al plan y aproximaciones de sumas. Se estudia su sesgo desde la óptica clásica y, después, se considera el modelo de diseño fijo para concluir el sesgo total. Luego se estudia la varianza según el plan de muestreo mediante la generalización de los resultados auxiliares. Del mismo modo que en el capítulo anterior, la varianza total se descompone en dos sumandos. Se estudia el primero, la esperanza según el modelo de la varianza según el plan, que constituye la varianza promedio. Con el el estudio del segundo, se concluye la varianza total.

4.1. Definiciones, notaciones y resultados previos

4.1.1. Motivación y definición del estimador

4.1.1.1. Motivación

Interesa estimar según el plan de muestreo el descriptor núcleo de la regresión también conocido como de Nadaraya-Watson (descriptor NW) y, posteriormente, la función de regresión en el contexto de un modelo de diseño fijo. Se empleará S para abreviar núcleo continuando con la notación de Bellhouse&Stafford(1999). Se construye el descriptor NW en un punto con relieve o densidad asintótica no nula $f(x) > 0$, a partir de la p.f. con $0 < x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_i \leq ... \leq x_N < 1$, puntos del diseño, como

$$\alpha_S(x) = \frac{\frac{1}{Nh_n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)}{\frac{1}{Nh_n}\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)} = \frac{\frac{1}{Nh_n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)}{f_S(x)} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x)}$$

siendo $f_S(x)$ el análogo al estimador núcleo de la densidad a partir de la p.f., es decir, el descriptor de Parzen-Rosenblatt (descriptor PR), "estimador" en la p.f. de la densidad límite, y $K_{h_n}(\cdot) =$

$1/h_n K\left(\frac{\cdot}{h_n}\right)$, según la notación empleada en Cao(1990).

Se va a probar que para N grande, está definido este estadístico construido a partir de la p.f. en los puntos donde $f(x) > 0$, es decir, tiene sentido la expresión anterior en los puntos del diseño con relieve positivo.

Resultado 49 *Bajo las condiciones de regularidad del diseño, si $K(\cdot)$ es positivo y de variación acotada, se verifica que*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ h_n\to 0}} \frac{1}{Nh_n}\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) = f(x)$$

Demostración.- Se quiere probar que para $N > N_0$

$$\left|\frac{1}{Nh_n}\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$$

considérese

$$\left|\frac{1}{Nh_n}\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) - f(x)\right| = \left|\int_0^1 K_{h_n}(x-u)\,\mathrm{d}F_N(u) - f(x)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F_N(u) - \int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F(u) + \int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F(u) - f(x)\right| \leq$$

$$= \left|\int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F_N(u) - \int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F(u)\right| + \left|\int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F(u) - f(x)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Para estudiar el primer sumando, por ejemplo, se tendría

$$\left|\int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F(u) - \int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F_N(u)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 [F(t) - F_N(t)]\,\mathrm{d}K_{h_n}(t-x)\right| = \left|\frac{1}{h_n}\int_0^1 [F(t) - F_N(t)]\,\mathrm{d}K\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h_n}\int_0^1 |F(t) - F_N(t)|\left|\mathrm{d}K\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right| \leq \sup|F(t) - F_N(t)|\,\frac{1}{h_n}\int_0^1 \left|\mathrm{d}K\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup|F(t) - F_N(t)|\,\frac{1}{h_n}\mathrm{V}(K)$$

donde V(K) es la variación de K. Por el diseño fijo que se está considerando, $F_N \to F$ a una velocidad de $O(1/N)$. Por tanto, ese sumando se hace menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Para el segundo sumando

$$\int_0^1 K_{h_n}(t-x)\,\mathrm{d}F(t) - f(x) = \int_0^1 \frac{1}{h_n} K\left(\frac{t-x}{h_n}\right) f(t)\mathrm{d}t - f(x) =$$

$$= \int_{-x/h}^{(1-x)/h} \frac{1}{h_n} K(v)\, f(x+vh_n) h_n \mathrm{d}v - f(x) = \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x+vh_n)\mathrm{d}v - f(x)$$

Se tiene que

$$f(x) = f(x)\frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\,\mathrm{d}v}{1-\epsilon_n} = \frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x)\mathrm{d}v}{1-\epsilon_n}$$

siendo

$$1-\epsilon_n = \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\,\mathrm{d}v$$

porque

$$\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x)\mathrm{d}v = f(x)\,(1-\epsilon_n)$$

Por consiguiente

$$\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x+vh_n)\mathrm{d}v - f(x) = \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x+vh_n)\mathrm{d}v - \frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x)\mathrm{d}v}{1-\epsilon_n} =$$

$$= \frac{1-\epsilon_n}{1-\epsilon_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x+vh_n)\mathrm{d}v - \frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x)\mathrm{d}v}{1-\epsilon_n} =$$

$$= \frac{1}{1-\epsilon_n}\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x+vh_n)\mathrm{d}v - \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x)\mathrm{d}v\right) - \frac{\epsilon_n}{1-\epsilon_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x+vh_n)\mathrm{d}v$$

para el primer sumando se tiene que

$$\left|\frac{1}{1-\epsilon_n}\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x+vh_n)\mathrm{d}v - \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\, f(x)\mathrm{d}v\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-\epsilon_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\,|f(x+vh_n) - f(x)|\,\mathrm{d}v \leq \frac{\varepsilon}{4(1-\epsilon_n)}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\,\mathrm{d}v \leq \frac{\varepsilon(1-\epsilon_n)}{4(1-\epsilon_n)} = \frac{\varepsilon}{4}$$

para el segundo, teniendo en cuenta otra vez que $f(\cdot)$ es $u-$continua, la integral está acotada y ϵ_n tiende a cero, por tanto, se puede hacer tan pequeño como se quiera de tal modo que, tras ajustar epsilons, su suma sea, a su vez, menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Si el núcleo es de soporte compacto, en concreto $[-1,1]$, y el relieve o densidad asintótica es más regular, a partir de un n en adelante, la última integral será igual a

$$\int_{-1}^{1} K(v) f(x+vh_n)\mathrm{d}v = \int_{-1}^{1} K(v) \left[f(x) + f'(x)vh_n + \frac{1}{2}f''(\zeta)v^2h_n^2 \right] \mathrm{d}v =$$

$$= f(x) + f'(x)h_n \int_{-1}^{1} vK(v)\,\mathrm{d}v + \frac{1}{2}f''(\zeta)h_n^2 \int_{-1}^{1} v^2K(v)\,\mathrm{d}v$$

siendo ζ un punto intermedio entre x y $x+vh_n$. Si además es simétrico

$$\int_{-1}^{1} K(v) f(x+vh_n)\mathrm{d}v = f(x) + \frac{1}{2}f''(\zeta)h_n^2 \int_{-1}^{1} v^2K(v)\,\mathrm{d}v$$

Q.E.D.

De hecho el primer sumando es $O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)$ y el segundo, simplemente $o(1)$, o bien, $O(h_n)$ u $O(h_n^2)$, según las condiciones de regularidad de $f(\cdot)$ y su acotación, de la compacidad del soporte del núcleo y de su simetría.

Corolario 41 *Si $f(x) > 0$ y $K(\cdot)$ es positivo y de variación acotada, a partir de un N_0 en adelante se verifica que*

$$\frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) > 0$$

Se supone que $f(x)$, la derivada de la función de distribución límite del diseño fijo, es distinta de cero, $f(x) > 0$, por tanto a partir de un N_0' en adelante se verifica que $\frac{1}{Nh_n} \sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i-x}{h_n}\right) \neq 0$. Con lo cual tiene sentido, es decir, para N grande está definido el descriptor en los puntos donde $f(x) > 0$.

Por consiguiente, en lo sucesivo, se considerarán núcleos positivos y de variación acotada, en concreto funciones de densidad de variación acotada. Por otra parte, de la propia definición del descriptor, se obtiene la siguiente igualdad

Resultado 50

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \alpha_S(x)) K_{h_n}(x_i - x) = 0 \tag{4.1}$$

Demostración.- De la definición

$$\alpha_S(x) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x)}$$

se obtiene

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(Y_i K_h(x_i - x) - \alpha_S(x) K_h(x_i - x)\right) = 0$$

y de aquí, sacando factor común, el resultado Q.E.D.

4.1.1.2. Definición del estimador

Definición.- En MASS/R(N, n), se define el estimador S del descriptor núcleo de la regresión como

$$\widehat{\alpha}_S(x) := \frac{\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) I_i}{\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) I_i} \quad \text{si } \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) I_i \neq 0, \text{ en caso contrario } \widehat{\alpha}_S(x) := 0$$

4.1.2. Notaciones y resultados auxiliares

También se puede denotar el estimador como

$$\widehat{\alpha}_S(x) = \frac{\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) I_i}{\widehat{f_S}(x)} \quad \text{si } \widehat{f_S}(x) \neq 0, \text{ en caso contrario } \widehat{\alpha}_S(x) = 0,$$

donde el denominador es

$$\widehat{f_S}(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) I_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x)\, I_i,$$

y se podrá emplear una notación análoga a la de Cao,Delgado&GonzalezManteiga(1997) para referirse al numerador

$$\hat{r}_S(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) I_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\, I_i.$$

Por consiguiente, el estimador tomará la siguiente expresión

$$\widehat{\alpha}_S(x) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x) I_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x) I_i}$$

en el caso de que $\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x) I_i \neq 0$, en caso contrario $\widehat{\alpha}_S(x) = 0$. Es decir, coincide con el que se obtendría por el método de analogía, o sustitución, extendido de modo natural para el caso en que no esté definido.

Resultado 51 *En MASS/R(N, n), se verifica la p−insesgadez para el numerador.*

Demostración.- Por los resultados del capítulo 2

$$E_p\left[\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) I_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x) E_p(I_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\frac{n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)$$

Q.E.D.

Corolario 42 *En MASS/R(N, n), se verifica la p−insesgadez para el denominador.*

Demostración.- Considérese la p.f. con $Y_i = 1\ , \forall i = 1, \ldots, N$ en el resultado anterior Q.E.D.

4.1.2.1. Aproximaciones de sumas por integrales

Proposición 17 *Supóngase que* $(t-x)^r K\left(\frac{t-x}{h_n}\right)$ *es de variación acotada en* $[0,1]$*, y que* $f(\cdot)$ *es una función suficientemente regular. Si cuando* $N \to \infty, h_n \to 0$ *de tal modo que* $Nh_n \to \infty$*, entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^r K_h(x_i - x) = f(x) h_n^r \int_{-x/h}^{(1-x)/h} v^r K(v)\,\mathrm{d}v + O(h_n^{r+1}) + O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)$$

Demostración.- Análoga a una que se presentará en una proposición posterior Q.E.D.

Como caso particular, se tiene el siguiente desarrollo

Corolario 43 *Si* $K\left(\frac{t-x}{h_n}\right)$ *es de variación acotada en* $[0,1]$ *y* $f(\cdot)$ *es una función suficientemente regular y* $Nh_n \to \infty$*, entonces*

$$f_S(x) = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}(x_i - x) = f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v + O(h_n) + O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)$$

Demostración.- Considérese $r = 0$ en la proposición anterior Q.E.D.

Proposición 18 *Supóngase que* $(t-x)^r K^2\left(\frac{t-x}{h_n}\right)$ *es de variación acotada en* $[0,1]$*, y que* $f(\cdot)$ *es una función suficientemente regular. Si cuando* $N \to \infty, h_n \to 0$ *de tal modo que* $Nh_n^2 \to \infty$*, entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^r K_h^2(x_i - x) = f(x)h_n^{r-1}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} v^r K^2(v)\,\mathrm{d}v + O(h_n^r) + O\left(\frac{1}{Nh_n^2}\right)$$

Como caso particular, se tiene el siguiente desarrollo

Corolario 44 *Si* $K^2\left(\frac{t-x}{h_n}\right)$ *es de variación acotada en* $[0,1]$*,* $f(\cdot)$ *es una función suficientemente regular y* $Nh_n^2 \to \infty$*, entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}^2(x_i - x) = \frac{f(x)}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O(1)$$

Demostración.- Considérese $r = 0$ en la proposición anterior Q.E.D.

Proposición 19 *Supóngase que* $(t-x)^r K^3\left(\frac{t-x}{h_n}\right)$ *es de variación acotada en* $[0,1]$*, y que* $f(\cdot)$ *es una función suficientemente regular. Si cuando* $N \to \infty, h_n \to 0$ *de tal modo que* $Nh_n^3 \to \infty$*, entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^r K_h^3(x_i - x) = f(x)h_n^{r-2}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} v^r K^3(v)\,\mathrm{d}v + O(h_n^{r-1}) + O\left(\frac{1}{Nh_n^3}\right)$$

Además, se tiene el siguiente desarrollo

Corolario 45 *Supóngase que* $K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)$ *es de variación acotada en* $[0,1]$*, y que* $f(\cdot)$ *es una función suficientemente regular. Si cuando* $N \to \infty, h_n \to 0$ *de tal modo que* $Nh_n^2 \to \infty$*, entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_h^s(x_i - x) = f(x)h_n^{-s+1}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^s(v)\,\mathrm{d}v + O(h_n^{-s+2})$$

Demostración.- Para el caso de que $s = 3$, considérese $r = 0$ en la proposición anterior

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}^3(x_i - x) = \frac{f(x)}{h_n^2}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^3(v)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{h_n}\right) + O\left(\frac{1}{h_n N h_n^2}\right) = \frac{f(x)}{h_n^2}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^3(v)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

de igual modo

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_h^s(x_i-x) = f(x)h_n^{-s+1}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^s(v)\,\mathrm{d}v + O(h_n^{-s+2}) + O\left(\frac{1}{h_n^{s-2}Nh_n^2}\right)$$

en general Q.E.D.

Observación.- Así mismo, si $Nh_n^s \to \infty$ se tiene la siguiente acotación asintótica

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^r K_h^s(x_i-x) = O(h_n^{r-s+1}) + O\left(\frac{1}{Nh_n^s}\right) = O\left(h_n^{r-s+1} + \frac{1}{Nh_n^s}\right)$$

que dependiendo de los valores de r y s se puede simplificar. En particular, si $r=0$ se verifica que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K^s(x_i-x) = O\left(\frac{1}{h_n^{s-1}} + \frac{1}{Nh_n^s}\right) = O\left(\frac{1}{h_n^{s-1}} + \frac{1}{h_n^{s-1}Nh_n}\right)$$

que será $O(h_n^{-s+1})$ con solo suponer $Nh_n \to \infty$.

Si se imponen al núcleo las condiciones habituales de simetría y compacidad del soporte, los resultados se simplifican y se pueden condensar en la proposición que se presenta a continuación denotando $\alpha_r\left(K^t\right) = \int_{-1}^{1} v^r K^t(v)\mathrm{d}v$. Además, como en general, se va a trabajar bajo la condición HHM, se puede substituir la N por n dentro de la notación de Landau-Bachmann, en las condiciones relacionadas con la velocidad de convergencia de la ventana.

Proposición 20 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Supóngase que para $x \in (0,1)$, $(t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)$ es de variación acotada en $[0,1]$ como función de t, para $s=1,2,3$, y que $f(\cdot)$ es una función suficientemente regular con $f(x)$ y $f'(x)$ no nulas. Si cuando $n\to\infty, h_n \to 0$ de tal modo que $nh_n^s \to \infty$, entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^r K_h^s(x_i-x) = \begin{cases} f(x)h_n^{r-s+1}\alpha_r(K^s) + O\left(h_n^{r-s+3}\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^s}\right) & si \quad r=\dot{2} \\ f'(x)h_n^{r-s+2}\alpha_{r+1}(K^s) + O\left(h_n^{r-s+4}\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^s}\right) & si \quad r\neq\dot{2} \end{cases}$$

para $r=0,...,s-1$.

Demostración.- Para ver esto hay que observar que

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}(x_i-x)^r K^s\left(\frac{x_i-x}{h_n}\right) = \sum_{1}^{N}(x_i-x)^r K^s\left(\frac{x_i-x}{h_n}\right)\left[F_N(x_i+o) - F_N(x_i-o)\right] =$$

$$= \sum_{1}^{N}(x_i-x)^r K^s\left(\frac{x_i-x}{h_n}\right)\left[F_N(x_i) - F_N(x_i^-)\right] = \int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F_N(t)$$

Con lo cual

$$\left|\int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F_N(t) - \int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F(t)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)[\mathrm{d}F_N(t) - \mathrm{d}F(t)]\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 [F_N(t) - F(t)]\,\mathrm{d}\left\{(t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right\}\right| \leq$$

$$\leq \sup|F_N(t) - F(t)| \int_0^1 \left|\mathrm{d}\left\{(t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right\}\right| \to 0$$

en el caso concreto de diseño fijo a una velocidad de $O(1/N)$, como se ha visto en el segundo capítulo cuando se introdujo el diseño regular, por tanto

$$\frac{1}{N}\sum_1^N (x_i - x)^r K^s\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) = \int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F(t) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

si se divide por h_n^s se obtiene

$$\frac{1}{Nh_n^s}\sum_1^N (x_i - x)^r K^s\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) = \frac{1}{h_n^s}\int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F(t) + O\left(\frac{1}{Nh_n^s}\right)$$

con lo cual

$$\frac{1}{N}\sum_1^N (x_i - x)^r K_{h_n}^s(x_i - x) = \frac{1}{h_n^s}\int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F(t) + O\left(\frac{1}{Nh_n^s}\right)$$

Además

$$\int_0^1 (t-x)^r \frac{1}{h_n^s} K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right) f(t)\mathrm{d}t = \int_{-x/h}^{(1-x)/h} \frac{1}{h_n^s} h_n^r v^r K^s(v)\, f(x + vh_n) h_n \mathrm{d}v$$

Si el núcleo es de soporte compacto, en concreto $[-1, 1]$, la última integral será igual, a partir de un n en adelante, a

$$h_n^{r-s+1}\int_{-1}^1 v^r K^s(v)\, f(x + vh_n)\mathrm{d}v =$$

$$= h_n^{r-s+1}\int_{-1}^1 v^r K^s(v)\left[f(x) + f'(x)vh_n + \frac{1}{2}f''(\zeta)v^2 h_n^2\right]\mathrm{d}v$$

siendo ζ un punto intermedio entre x y $x + vh_n$. Si el núcleo es simétrico, será igual a

$$\begin{cases} f(x)h_n^{r-s+1}\alpha_r(K^s) + O\left(h_n^{r-s+3}\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^s}\right) & \text{si} \quad r = \dot{2} \\ f'(x)h_n^{r-s+2}\alpha_{r+1}(K^s) + O\left(h_n^{r-s+4}\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^s}\right) & \text{si} \quad r \neq \dot{2} \end{cases}$$

Q.E.D.

Observación.- La siguiente igualdad

$$\left|\int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\left[\mathrm{d}F_N(t)-\mathrm{d}F(t)\right]\right| = \left|\int_0^1 \left[F_N(t)-F(t)\right]\mathrm{d}\left[(t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right]\right|$$

se basa en la integración por partes. Se supone que las integrales de Riemann-Stieltjes (RS) anteriores existen. Téngase en cuenta la "ley de reciprocidad" de la integral de RS, Apostol(1977). La existencia de

$$\int (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F(t)$$

implica la de

$$\int F(t)\mathrm{d}\left[(t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right]$$

y se verifican las siguientes igualdades

$$\int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F(t) + \int_0^1 F(t)\mathrm{d}\left[(t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right] =$$

$$= (1-x)^r K^s\left(\frac{1-x}{h_n}\right)F(1) - (0-x)^r K^s\left(\frac{0-x}{h_n}\right)F(0)$$

$$\int_0^1 (t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\mathrm{d}F_N(t) + \int_0^1 F_N(t)\mathrm{d}\left[(t-x)^r K^s\left(\frac{t-x}{h_n}\right)\right] =$$

$$= (1-x)^r K^s\left(\frac{1-x}{h_n}\right)F_N(1) - (0-x)^r K^s\left(\frac{0-x}{h_n}\right)F_N(0)$$

Se halla la diferencia miembro a miembro, se extrae factor común y se tiene en cuenta que $F(1)=F_N(1)=1$ y $F(0)=F_N(0)=0$.

4.1.2.2. Resultados auxiliares relativos al plan de muestreo

Resultado 52 *Se verifica en MASS/R(N, n) que*

$$E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i-x)\, I_i\cdot\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}^2(x_i-x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i-x)\,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N K_{h_n}(x_k-x)\right]$$

Demostración.- Dado que

$$E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i\right]=$$

$$=E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\right]=$$

$$=E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\right]=$$

$$=E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\right]=$$

$$=COV_p\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i;\frac{1}{n}\sum_{1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)I_k\right)=\frac{1}{n^2}COV_p\left(\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i;\sum_{1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)I_k\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)K_{h_n}\left(x_i-x\right)\Delta_{ii}+\frac{1}{n^2}\sum\sum_{i\neq k}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)K_{h_n}\left(x_k-x\right)\Delta_{ik}$$

Por tanto particularizando al caso de MASS/R

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}^2\left(x_i-x\right)\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)+$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum\sum_{i\neq k}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)K_{h_n}\left(x_k-x\right)\left(-\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N^2}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N^2(N-1)}\sum\sum_{i\neq k}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)K_{h_n}\left(x_k-x\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{N-n}{N^2}+\frac{N-n}{N^2(N-1)}\right]\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N^2(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)K_{h_n}\left(x_k-x\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N(N-1)}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}^2\left(x_i-x\right)\right]-\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)\right]$$

sacando factor común se obtiene el resultado Q.E.D.

Como consecuencia de la demostración se puede obtener el siguiente corolario

Corolario 46 *Se verifica en MASS/R*(N,n) *que*

$$COV_p\left[\widehat{f_S}(x),\widehat{r_S}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)\right] \quad (4.2)$$

Corolario 47 *Se verifica en MASS/R*(N,n) *que*

$$COV_p\left[\widehat{f_S}(x),\widehat{f_S}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)\right]$$

Demostración.- Considérese $Y_i=1,\ \forall i$ en el corolario anterior Q.E.D.

La igualdad anterior también se puede expresar del modo que se recoge en el siguiente ejemplo

Ejemplo 26 *Se verifica en MASS/R*(N,n) *que*

$$E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)^2\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)\right]$$

Resultado 53 *Bajo la condición HHM, si* $nh_n^2\to\infty$ *entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)\right]^2=f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K^2(v)\mathrm{d}v+O(1)$$

Demostración.- Obsérvese que el primer sumando de

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)\right]^2$$

es igual a

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}^2\left(x_i-x\right)=\frac{1}{Nh_n^2}\sum_{1}^{N}K^2\left(\frac{x_i-x}{h_n}\right)=f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K^2(v)\mathrm{d}v+O(1)$$

Por la hipótesis, el segundo sumando es el cuadrado de

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)=f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v+O(h_n)$$

es decir

$$f_S^2(x) = \left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)\right]^2 = f^2(x)\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v\right]^2 + O(h_n)$$

Por tanto

$$\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i - x) - \left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)\right]^2 =$$

$$= f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v - f^2(x)\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v\right)^2 + O(1) + O(h_n) =$$

$$= f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O(1)$$

Q.E.D.

Observación.- En las circunstancias anteriores también se puede escribir

$$\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i - x) - \left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)\right]^2 = O\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

Corolario 48 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$ se verifica que*

$$E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x) - f_S(x)\right)^2\right] = f(x)\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{nh_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Observación.- En las circunstancias anteriores también se puede escribir

$$E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x) - f_S(x)\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Resultado 54 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x) - f_S(x)\right)^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i - x)\, I_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2\left(Y_i K_{h_n}(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right)\right]$$

Demostración.- Para un plan de muestreo de tamaño fijo

$$E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\,I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\right]=$$

$$=E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}(x_i-x)\,I_i-\frac{n}{n}f_S(x)\right)^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\,I_i-\frac{n}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\right]=$$

$$=E_p\left[\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)I_i\right)^2\sum_{j=1}^{N}\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)I_j\right]=$$

$$=E_p\left[\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2I_i^2+\sum_{i\neq j}^{(N)}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)I_iI_j\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{j=1}^{N}\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)I_j\right]=$$

$$=\frac{1}{n^3}E_p\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)I_i^3+\right.$$

$$\left.+\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)I_i^2I_j\right\}+$$

$$+\frac{1}{n^3}E_p\left\{2\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left[\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)I_iI_j^2\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{n^3}E_p\left\{\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}\left[\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(Y_kK_{h_n}(x_k-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)I_iI_jI_k\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)E_p\left[I_i^3\right]\right\}+$$

$$+\sum_{i\neq j}^{(N)}\left\{\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)^2\left(Y_jK_{h_n}\left(x_j-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\right\}E_p\left[I_i^2I_j\right]+$$

$$+\frac{1}{n^3}2\sum_{i\neq j}^{(N)}\{\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}\left(x_j-x\right)-f_S(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Y_jK_{h_n}\left(x_j-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)E_p\left[I_iI_j^2\right]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{n^3}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\{\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Y_kK_{h_n}\left(x_k-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)E_p\left[I_iI_jI_k\right]\Big\}=$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\pi_i\right\}+$$

$$+\sum_{i\neq j}^{(N)}\left\{\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)^2\left(Y_jK_{h_n}\left(x_j-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\right\}\pi_{ij}+$$

$$+\frac{1}{n^3}2\sum_{i\neq j}^{(N)}\{\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}\left(x_j-x\right)-f_S(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Y_jK_{h_n}\left(x_j-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\pi_{ij}\Big\}+$$

$$+\frac{1}{n^3}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\{\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Y_kK_{h_n}\left(x_k-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\pi_{ijk}\Big\}$$

Particularizando al plan de muestreo que estamos considerando MASS/R

$$\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\frac{n}{N}\right\}+$$

$$+\frac{1}{n^3}\sum_{i\neq j}^{(N)}\left\{\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\right\}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}+$$

$$+\frac{1}{n^3}2\sum_{i\neq j}^{(N)}\{\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{1}{n^3}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\{\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Y_kK_{h_n}(x_k-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\frac{1}{N}\right\}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\left\{\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\right\}\frac{(n-1)}{N(N-1)}+$$

$$+2\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\{\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\frac{(n-1)}{N(N-1)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\sum_{k\neq jk\neq i}^{N}\{\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(Y_kK_{h_n}(x_k-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\frac{(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\Bigg\}$$

Se considerará cada sumando por separado, sin tener en cuenta el factor común $\frac{1}{n^2}$, para luego reunirlos. El primero ya tiene la expresión que se busca

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)$$

el segundo

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\frac{n-1}{N(N-1)}=$$

$$=\frac{n-1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{j=1}^{N}\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)-\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\right]=$$

$$=-\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)$$

ya que

$$\sum_{j=1}^{N}\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)=0$$

El tercero

$$2\sum_{j\neq i}^{(N)}\{(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x))\cdot$$

$$\cdot\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\frac{(n-1)}{N(N-1)}\Bigg\}$$

proviene de

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x))\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)+$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x))\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)$$

Se comenzará con el primer subsumando

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x))\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)=$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right) \left(Y_i K_{h_n}(x_i - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right) \sum_{j \neq i}^{N} \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right)$$

la última suma es igual a

$$\sum_{j=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) - \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right) = 0 - \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)$$

Por tanto el primer subsumando es igual a

$$- \sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 \left(Y_i K_{h_n}(x_i - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right)$$

En lo referente al segundo subsumando

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right) \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) \left(Y_j K_{h_n}(x_j - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right) \sum_{j \neq i}^{N} \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) \left(Y_j K_{h_n}(x_j - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right)$$

la segunda suma es igual a

$$\sum_{j=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) \left(Y_j K_{h_n}(x_j - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right) -$$

$$- \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right) \left(Y_i K_{h_n}(x_i - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right)$$

con lo cual el segundo subsumando sería la suma de los siguientes sub-subsumandos, el primero

$$\sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right) \sum_{j=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) \left(Y_j K_{h_n}(x_j - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right)$$

que es nulo, porque el primer factor vale cero, y el segundo sub-subsumando

$$- \sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 \left(Y_i K_{h_n}(x_i - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right)$$

con lo cual el resultado final es que este tercer término ("sumando") es igual, dado los signos menos, a

$$-2 \sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 \left(Y_i K_{h_n}(x_i - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right)$$

y, por último, el cuarto

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\sum_{k\neq jk\neq i}^{N}\{(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))\,(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x))\cdot$$

$$\cdot\left(Y_kK_{h_n}(x_k-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\frac{(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\Bigg\}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\{(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))\,(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x))$$

$$\cdot\Bigg[\sum_{k=1}^{N}\left(Y_kK_{h_n}(x_k-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)-$$

$$-\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)-\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\Bigg]\Bigg\}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\{(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))\,(K_{h_n}(x_j-x)-f_S(x))\cdot$$

$$\cdot\Bigg[-\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)-\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\Bigg]\Bigg\}$$

que será igual, por lo visto en los cálculos del tercer sumando, a

$$2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)$$

con lo que se obtiene

$$2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\right]$$

Reuniéndolos en la igualdad principal

$$\frac{1}{n^2}\left[1-\frac{n-1}{N-1}-2\frac{n-1}{N-1}+2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)\right]$$

Como

$$1-3\frac{n-1}{N-1}+2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}=\frac{N^2-3nN+2n^2}{(N-1)\,(N-2)}=\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)\,(N-2)}$$

se tiene que

$$E_p\left[\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)\,(N-2)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\right]$$

Q.E.D.

Con una demostración totalmente simétrica, intercambiando los papeles, se probaría el resultado siguiente

Resultado 55 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)^2\right]$$

Obsérvese que los dos resultados anteriores conducen a la siguiente igualdad, que se podría deducir de los resultados, sin demostración, de Thompson(1997)

Corolario 49 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}(x_i-x)I_i-f_S(x)\right)^3\right]=\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^3$$

Demostración.- Considérese en cualquiera de los dos resultados anteriores como p.f. aquella con $Y_i=1,\ \forall i=1,\ldots,N$ Q.E.D

Observación.- Los resultados inmediatamente anteriores implican que si la muestra supera en tamaño a la mitad de la población, el coeficiente resulta negativo. Y en el caso concreto de que $N = \dot{2}$ y el tamaño de la muestra sea la mitad $n = N/2$, se anula al igual que cuando se realiza el censo. A efectos prácticos, puede que no tengan mucha incidencia dado que no se suele trabajar con muestras tan grandes, excepto en la situación de muestreo estratificado cuando en alguno de los estratos de tamaño reducido se realiza MASS/R.

Resultado 56 *Si $nh_n^2 \to \infty$, se verifica que*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^3 = O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^3$$

será igual a

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^3(x_i - x) - 3\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^2(x_i - x)f_S(x) + 3\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}(x_i - x)f_S^2(x) - f_S^3(x) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^3(x_i - x) - 3f_S(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^2(x_i - x) + 2f_S^3(x) = A - B + C$$

$$A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^3(x_i - x) = \frac{f(x)}{h_n^2}\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K^3(v)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

Los demás sumandos son, por una parte

$$B = 3f_S(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^2(x_i - x) = 3\left[f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v + O\left(h_n\right)\right]\left[\frac{f(x)}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K^2(v)\mathrm{d}v + O\left(1\right)\right] = O\left(\frac{1}{h_n}\right),$$

y por otra parte

$$C = 2f_S^3(x) = 2\left[f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)dv + O\left(h_n\right)\right]^3 = O(1)$$

Q.E.D.

Corolario 50 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM y* $nh_n^2 \to \infty$*, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x)I_i - f_S(x)\right)^3\right] = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)$$

Tras estos resultados que se podrían denominar de orden 3, se probará un resultado de orden 4

Resultado 57 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)I_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2 + N - 6nN + 6n^2}{(N-2)(N-3)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^3\left(Y_i K_{h_n}(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j K_{h_n}(x_j - x)\right)\right] +$$

$$+3\frac{1}{n^3}N\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)\left(Y_i K_{h_n}(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j K_{h_n}(x_j - x)\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2\right]$$

Demostración.- Para un plan de muestreo de tamaño fijo

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)I_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right)\right] =$$

$$= E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x)I_i - \frac{n}{n}f_S(x)\right)^3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)I_i - \frac{n}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right)\right] =$$

$$= E_p\left\{\frac{1}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)I_i\right)^3\left[\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j K_h(x_j - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right)I_j\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^4} E_p \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x) \right) I_i \right)^3 \left[\sum_{j=1}^{N} \left(Y_j K_h(x_j - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \right) I_j \right] \right\}$$

Haciendo cuentas dentro de la $p-$esperanza

$$\sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x) \right)^3 I_i^3 \left[\sum_{j=1}^{N} \left(Y_j K_h(x_j - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \right) I_j \right] +$$

$$+3 \sum_{i \neq j}^{(N^{(2)})} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x) \right)^2 I_i^2 \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x) \right) I_j \left[\sum_{k=1}^{N} \left(Y_k K_h(x_k - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \right) I_k \right] +$$

$$+ \left[\sum_{i \neq j \neq k}^{(N^{(3)})} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x) \right) I_i \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x) \right) I_j \left(K_{h_n}(x_k - x) - f_S(x) \right) I_k \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{l=1}^{N} \left(Y_l K_h(x_l - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \right) I_l \right] = A + 3B + C$$

El primero será igual a

$$A = \sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x) \right)^3 \left(Y_i K_h(x_i - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \right) I_i^4 +$$

$$+ \sum_{i \neq j}^{(N)} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x) \right)^3 I_i^3 \left(Y_j K_h(x_j - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \right) I_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x) \right)^3 \left(Y_i K_h(x_i - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \right) I_i +$$

$$+ \sum_{i \neq j}^{(N)} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x) \right)^3 \left(Y_j K_h(x_j - x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \right) I_i I_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(K_{hi} - f_S \right)^3 \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \right) I_i +$$

$$+ \sum_{i \neq j}^{(N)} \left(K_{hi} - f_S \right)^3 \left(Y_j K_{hj} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \right) I_i I_j = A_1 + A_2$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Con respecto a B se tiene que

$$B = \sum_{i\neq j}^{(N)} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 \left(Y_i K_h(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right) I_i^3 \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) I_j +$$

$$+ \sum_{i\neq j}^{(N)} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 I_i^2 \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) \left(Y_j K_h(x_j - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right) I_j^2 +$$

$$+ \left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 I_i^2 \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) I_j \left(Y_k K_h(x_k - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right) I_k\right] =$$

$$= \sum_{i\neq j}^{(N)} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 \left(Y_i K_h(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right) \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) I_j I_j +$$

$$+ \sum_{i\neq j}^{(N)} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) \left(Y_j K_h(x_j - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right) I_i I_j +$$

$$+ \left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} \left(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)\right)^2 \left(K_{h_n}(x_j - x) - f_S(x)\right) \left(Y_k K_h(x_k - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right) I_i I_j I_k\right]$$

abreviando

$$\sum_{i\neq j}^{(N)} \left(K_{hi} - f_S\right)^2 \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}\right) \left(K_{hj} - f_S\right) I_j I_j +$$

$$+ \sum_{i\neq j}^{(N)} \left(K_{hi} - f_S\right)^2 \left(K_{hj} - f_S\right) \left(Y_j K_{hj} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}\right) I_i I_j +$$

$$+ \left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} \left(K_{hi} - f_S\right)^2 \left(K_{hj} - f_S\right) \left(Y_k K_{hk} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}\right) I_i I_j I_k\right] = B_1 + B_2 + B_3$$

Y el último será igual, abreviando, a

$$C = \left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})} \left(K_{hi} - f_S\right) \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}\right) I_i^2 \left(K_{hj} - f_S\right) I_j \left(K_{hk} - f_S\right) I_k\right] +$$

$$+\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}(K_{hi}-f_S)I_i\,(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)I_j^2\,(K_{hk}-f_S)\,I_k\right]+$$

$$+\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}(K_{hi}-f_S)I_i\,(K_{hj}-f_S)\,I_j\,(K_{hk}-f_S)\left(Y_kK_{hk}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)I_k^2\right]+$$

$$+\left[\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N^{(4)})}(K_{hi}-f_S)I_i\,(K_{hj}-f_S)\,I_j\,(K_{hk}-f_S)\,I_k\left(Y_lK_{hl}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)I_l\right]=$$

$$=\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}(K_{hi}-f_S)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)(K_{hj}-f_S)\,(K_{hk}-f_S)\,I_iI_jI_k\right]+$$

$$+\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}(K_{hi}-f_S)\,(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)(K_{hk}-f_S)\,I_iI_jI_k\right]+$$

$$+\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}(K_{hi}-f_S)\,(K_{hj}-f_S)\,(K_{hk}-f_S)\left(Y_kK_{hk}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)I_iI_jI_k\right]+$$

$$+\left[\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N)}(K_{hi}-f_S)\,(K_{hj}-f_S)\,(K_{hk}-f_S)\left(Y_lK_{hl}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)I_iI_jI_kI_l\right]=$$

$$=C_1+C_2+C_3+C_4$$

Entonces $E_p\,(A+3B+C)$ será igual a

$$E_p\,[A_1+A_2+3\,(B_1+B_2+B_3)+C_1+C_2+C_3+C_4]$$

Por linealidad, habrá que calcular cada una de las siguientes $p-$esperanzas en MASS/R(N,n)

$$E_p\,(A_1)=\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^3\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)E_p\,(I_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^3\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\pi_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^3\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\frac{n}{N}=$$

$$= n\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)$$

$$E_p\left(A_2\right)=\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)E_p\left(I_iI_j\right)=$$

$$=\sum_{i\neq j}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\pi_{ij}=$$

$$=\sum_{i\neq j}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\sum_{j\neq i}^{N}\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left[\sum_{j=1}^{N}\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)-\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\right]=$$

$$= -n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)$$

$$E_p\left(B_1\right)=\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)E_p\left(I_jI_j\right)=$$

$$=\sum_{i\neq j}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\pi_{ij}=$$

$$=\sum_{i\neq j}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\sum_{j\neq i}^{N}(K_{hj}-f_S)=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left[\sum_{j=1}^{N}(K_{hj}-f_S)-(K_{hi}-f_S)\right]=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left[-(K_{hi}-f_S)\right]=$$

$$= -n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^3\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)$$

$$E_p(B_2)=\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}(K_{hi}-f_S)^2(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)E_p(I_iI_j)=$$

$$=\sum_{i\neq j}^{(N)}(K_{hi}-f_S)^2(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\pi_{ij}=$$

$$=\sum_{i\neq j}^{(N)}(K_{hi}-f_S)^2(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\neq j}^{N}(K_{hi}-f_S)^2(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\sum_{i\neq j}^{N}(K_{hi}-f_S)^2=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2-(K_{hj}-f_S)^2\right]=$$

$$= n\frac{n-1}{N-1}N\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(K_{hj}-f_S)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2\right]-$$

$$-n\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(K_{hj}-f_S)^3\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)$$

$$E_p\left(B_3\right)=\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\left(K_{hj}-f_S\right)\left(Y_kK_{hk}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)E_p\left(I_iI_jI_k\right)\right]=$$

$$=\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\left(K_{hj}-f_S\right)\left(Y_kK_{hk}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\pi_{ijk}\right]=$$

$$=\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\left(K_{hj}-f_S\right)\left(Y_kK_{hk}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\right]=$$

$$=n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\left[\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\left(K_{hj}-f_S\right)\sum_{k\neq i,k\neq j}\left(Y_kK_{hk}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\right]$$

que, en notación casi taquigráfica, es igual a

$$n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}^2k_{hj}\left[\sum_{k=1}^{N}y_{hk}-y_{hi}-y_{hj}\right]=$$

$$=n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}^2k_{hj}\left[-y_{hi}-y_{hj}\right]=$$

$$=-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}^2y_{hi}k_{hj}-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}^2k_{hj}y_{hj}=$$

$$=-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2y_{hi}\sum_{j\neq i}^{N}k_{hj}$$

$$-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}y_{hj}\sum_{i\neq j}^{N}k_{hi}^2=$$

$$=-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2y_{hi}\left[\sum_{j=1}^{N}k_{hj}-k_{hi}\right]-$$

$$-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}y_{hj}\left[\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2-k_{hj}^2\right]=$$

$$= n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^{3}y_{hi}-$$

$$-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}y_{hj}\left[\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^{2}-k_{hj}^{2}\right]=$$

$$= n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^{3}y_{hi}-$$

$$-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}y_{hj}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^{2}+n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}^{3}y_{hj}=$$

$$= n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^{3}y_{hi}-$$

$$-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}y_{hj}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^{2}+n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}^{3}y_{hj}=$$

$$= 2n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^{3}y_{hi}-n\frac{N(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}y_{hj}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^{2}=$$

$$= 2n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^3\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)-$$

$$-n\frac{N(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2$$

$$E_p\left(C_1\right)=\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(K_{hk}-f_S\right)E_p\left(I_iI_jI_k\right)\right]=$$

$$=\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(K_{hk}-f_S\right)\pi_{ijk}\right]=$$

$$=\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(K_{hk}-f_S\right)\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\right]=$$

$$= n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\left[\sum_{i\neq j}^{(N)}(K_{hi}-f_S)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)(K_{hj}-f_S)\sum_{k\neq i,k\neq j}(K_{hk}-f_S)\right]$$

En notación casi taquigráfica se puede expresar como

$$n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\left[\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}y_{hi}k_{hj}\sum_{k\neq i,k\neq j}k_{hk}\right]=$$

$$= n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}y_{hi}k_{hj}\left[\sum_{k\neq i,k\neq j}k_{hk}-k_{hi}-k_{hj}\right]=$$

$$= n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}y_{hi}k_{hj}\left[-k_{hi}-k_{hj}\right]=$$

$$= -n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}^2y_{hi}k_{hj}-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}y_{hi}k_{hj}^2$$

El primer sumando coincide con el primero de la siguiente expresión correspondiente al desarrollo del término anterior $E_p\left(B_3\right)$, y los segundos sumandos también, salvo los índices mudos

$$-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}^2y_{hi}k_{hj}-n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}^2k_{hj}y_{hj}$$

Por tanto

$$E_p\left(C_1\right)=2n\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)-$$

$$-n\frac{N(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^2$$

Análogamente

$$E_p\left(C_2\right)=\left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hk}-f_S\right)E_p\left(I_iI_jI_k\right)\right]=$$

$$= \left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} (K_{hi} - f_S)(K_{hj} - f_S) \left(Y_j K_{hj} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \right) (K_{hk} - f_S) \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \right] =$$

$$= 2n \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{hi} - f_S)^3 \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Y_j K_{hj} \right) -$$

$$-n \frac{N(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{hi} - f_S) \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Y_j K_{hj} \right) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{hi} - f_S)^2$$

Análogamente, también

$$E_p(C_3) = \left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})} (K_{hi} - f_S)(K_{hj} - f_S)(K_{hk} - f_S) \left(Y_k K_{hk} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \right) E_p(I_i I_j I_k) \right] =$$

$$+ \left[\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} (K_{hi} - f_S)(K_{hj} - f_S)(K_{hk} - f_S) \left(Y_k K_{hk} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \right) \frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} \right] =$$

$$= 2n \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{hi} - f_S)^3 \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Y_j K_{hj} \right) -$$

$$-n \frac{N(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{hi} - f_S) \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Y_j K_{hj} \right) \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{hi} - f_S)^2$$

$$E_p(C_4) = \left[\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N^{(4)})} (K_{hi} - f_S)(K_{hj} - f_S)(K_{hk} - f_S) \left(Y_l K_{hl} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \right) E_p(I_i I_j I_k I_l) \right] =$$

$$= \left[\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N)} (K_{hi} - f_S)(K_{hj} - f_S)(K_{hk} - f_S) \left(Y_l K_{hl} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \right) \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \right] =$$

$$= n \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}.$$

$$\cdot\frac{1}{N}\left[\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(K_{hk}-f_S\right)\sum\nolimits_{l\neq i,l\neq j,l\neq k}\left(Y_lK_{hl}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\right]=$$

$$=n\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\ \frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(K_{hk}-f_S\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{l=1}^{N}\left(Y_lK_{hl}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)-\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)-\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)-\left(Y_kK_{hk}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\right]=$$

$$=n\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\ \frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(K_{hk}-f_S\right)\cdot$$

$$\cdot\left[-\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)-\left(Y_jK_{hj}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)-\left(Y_kK_{hk}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\right]=$$

$$=-3n\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\ \frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(K_{hk}-f_S\right)=$$

$$=-3n\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\ \frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hj}-f_S\right)\left(K_{hk}-f_S\right)=$$

$$=-6n\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^3\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)$$

$$+3n\frac{N(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^2$$

Todos los términos anteriores habrá que reunirlos en la expresión

$$E_p\left[A_1+A_2+3\left(B_1+B_2+B_3\right)+C_1+C_2+C_3+C_4\right]=$$

$$=E_p\left[A_1\right]+E_p\left[A_2+3B_1\right]+3E_p\left[B_2\right]+E_p\left[3B_3+\left(C_1+C_2+C_3\right)\right]+E_p\left[C_4\right]=$$

$$= E_p\left[A_1\right] + 4E_p\left[B_1\right] + 3E_p\left[B_2\right] + 6E_p\left[B_3\right] + E_p\left[C_4\right]$$

Con lo cual el coeficiente de

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi} - f_S\right)^3\left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j K_{hj}\right)$$

salvo la n, será

$$1 - 7\frac{n-1}{N-1} + 12\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} - 6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} =$$

$$= 1 - 7\frac{n-1}{N-1} + 6\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\left(2 - \frac{n-3}{N-3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{n-1}{N-1}\left[7 - 6\frac{n-2}{N-2}\left(\frac{2N-n-3}{N-3}\right)\right] =$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}$$

Y con respecto a

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi} - f_S\right)\left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j K_{hj}\right)\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi} - f_S\right)^2$$

su coeficiente, salvo n, será

$$3\frac{n-1}{N-1}N - 6\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N + 3\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}N =$$

$$= 3\frac{n-1}{N-1}N\left[1 - 2\frac{n-2}{N-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{(N-2)(N-3)}\right] =$$

$$= 3\frac{n-1}{N-1}N\left[1 - \frac{n-2}{N-2}\left(2 - \frac{n-3}{N-3}\right)\right] =$$

$$= 3\frac{n-1}{N-1}N\frac{N^2-2nN-N+n+n^2}{(N-2)(N-3)} = 3N\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]$$

Para finalizar, si se tiene en cuenta n y $\frac{1}{n^4}$, se llega a que hay que multiplicar las expresiones anteriores por el factor $\frac{1}{n^3}$, con lo que se obtiene el resultado Q.E.D.

A continuación, se prueba otro resultado del mismo orden

Resultado 58 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\left[N\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)^2\right]+$$

$$+2\frac{1}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\left[N\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)\right]^2$$

Demostración.-

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right]=$$

$$E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}(x_i-x)I_i-\frac{n}{n}f_S(x)\right)^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)I_i-\frac{n}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right]=$$

$$=E_p\left\{\frac{1}{n^4}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)I_i\right]^2\left[\sum_{j=1}^{N}\left(Y_jK_{h_n}(x_j-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)I_j\right]^2\right\}$$

Abreviando, lo anterior se puede expresar como

$$\frac{1}{n^4}E_p\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2 I_i^2+\sum_{i\neq j}^{(N)}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)I_iI_j\right]\cdot\right.$$

$$\left.\left[\sum_{k=1}^{N}\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 I_k^2+\sum_{k\neq l}^{(N)}\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_lK_{h,l}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_kI_l\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{n^4}E_p\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 I_i^4+\right.$$

$$+\sum_{k\neq i}^{(N^{(2)})}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 I_i^2I_k^2+$$

$$+\sum_{i\neq l}^{(N^{(2)})}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_lK_{h,l}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_i^3I_l+$$

$$+\sum_{i\neq k}^{(N^{(2)})}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_i^3I_k+$$

$$+\sum_{j\neq k}^{(N^{(2)})}\left(K_{h,k}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 I_jI_k^3+$$

$$+\sum_{i\neq k}^{(N^{(2)})}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,k}-f_S\right)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 I_iI_k^3+$$

$$+\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_jK_{h,j}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_i^2I_j^2+$$

$$+\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)\left(Y_jK_{h,j}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_j^2I_j^2+$$

$$+\sum_{i\neq k\neq l}^{(N^{(3)})}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_lK_{h,l}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_i^2I_kI_l+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}(K_{h,i}-f_S)(K_{h,j}-f_S)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 I_iI_jI_k^2+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq l}^{(N^{(3)})}(K_{h,i}-f_S)(K_{h,j}-f_S)\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_lK_{h,l}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_i^2I_jI_l+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}(K_{h,i}-f_S)(K_{h,j}-f_S)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_i^2I_jI_k+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}(K_{h,i}-f_S)(K_{h,j}-f_S)\left(Y_jK_{h,j}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_lK_{h,l}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_iI_j^2I_l+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq k}^{(N^{(3)})}(K_{h,i}-f_S)(K_{h,j}-f_S)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_jK_{h,j}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_iI_j^2I_k+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N^{(4)})}(K_{h,i}-f_S)(K_{h,j}-f_S)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_lK_{h,l}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)I_iI_jI_kI_l\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{n^4}\Bigg\{\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2E_p\left[I_i^4\right]+$$

$$+\sum_{i\neq k}^{(N)}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2E_p\left[I_i^2I_k^2\right]+$$

$$+2\sum_{i\neq k}^{(N)}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)E_p\left[I_i^3I_k\right]+$$

$$+2\sum_{i\neq k}^{(N)}(K_{h,i}-f_S)(K_{h,k}-f_S)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2E_p\left[I_iI_k^3\right]+$$

$$+2\sum_{i\neq j}^{(N)}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_jK_{h,j}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)E_p\left[I_i^2I_j^2\right]+$$

$$+\sum_{i\neq k\neq l}^{(N)}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_lK_{h,l}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)E_p\left[I_i^2I_kI_l\right]+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2E_p\left[I_iI_jI_k^2\right]+$$

$$+2\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)E_p\left[I_i^2I_jI_k\right]+$$

$$+2\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h.i}\right)\left(Y_jK_{h,j}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)E_p\left[I_iI_j^2I_k\right]+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N)}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(K_{h,j}-f_S\right)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\left(Y_lK_{h,l}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)E_p\left[I_iI_jI_kI_l\right]\Bigg\}$$

Con una notación casi taquigráfica, la expresión anterior es igual en MASS/R(N,n) a

$$\frac{1}{n^4}\left\{\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2\frac{n}{N}+\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2q_{hk}^2\frac{n(n-1)}{N(N-1)}+2\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2q_{hi}q_{hk}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}+\right.$$

$$+2\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hk}q_{hk}^2\frac{n(n-1)}{N(N-1)}+2\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hj}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}+$$

$$+\sum_{i\neq k\neq l}^{(N)}k_{hi}^2q_{hk}q_{hl}\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}+\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hk}^2\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}+$$

$$+2\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hk}\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}+2\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hj}q_{hk}\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}+$$

$$+\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N)} k_{hi}k_{hj}q_{hk}q_{hl}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)}\Bigg\} =$$

$$=\frac{1}{n^3}\Bigg\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2+\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2q_{hk}^2+2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2q_{hi}q_{hk}$$

$$+2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hk}q_{hk}^2+2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hj}+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k\neq l}^{(N)}k_{hi}^2q_{hk}q_{hl}+\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hk}^2+$$

$$+2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hk}+2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hj}q_{hk}+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hk}q_{hl}\Bigg\}$$

Se procederá a estudiar a continuación cada uno de los sumandos, salvo el factor común $\frac{1}{n^3}$.

El primero

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)\right)^2$$

El segundo

$$\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2q_{hk}^2=\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\neq i}^{N}k_{hi}^2q_{hk}^2=\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2\sum_{k\neq i}^{N}q_{hk}^2=$$

$$=\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2\left[\sum_{k=1}^{N}q_{hk}^2-q_{hi}^2\right]=\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2\sum_{k=1}^{N}q_{hk}^2-\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2\right]=$$

$$=\frac{n-1}{N-1}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}q_{hk}^2-\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2=$$

$$= \frac{n-1}{N-1} N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{h,i} - f_S)^2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(Y_i K_{h,i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h,i} \right)^2 -$$

$$- \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{h,i} - f_S)^2 \left(Y_i K_{h,i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h,i} \right)^2$$

El tercero

$$2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i \neq k}^{(N)} k_{hi}^2 q_{hi} q_{hk} = 2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2 q_{hi} \sum_{k \neq i}^{N} q_{hk} =$$

$$= 2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2 q_{hi} \left[\sum_{k=1}^{N} q_{hk} - q_{hi} \right] = 2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2 q_{hi} \sum_{k=1}^{N} q_{hk} - \sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2 q_{hi}^2 \right] =$$

$$= 2 \frac{n-1}{N-1} N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2 q_{hi} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} q_{hk} - 2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2 q_{hi}^2 =$$

$$= 2 \frac{n-1}{N-1} N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{h,i} - f_S)^2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(Y_i K_{h,i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h,i} \right) -$$

$$-2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{h,i} - f_S)^2 \left(Y_i K_{h,i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h,i} \right)^2 =$$

$$= -2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (K_{h,i} - f_S)^2 \left(Y_i K_{h,i} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h,i} \right)^2$$

El cuarto

$$2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i \neq k}^{(N)} k_{hi} k_{hk} q_{hk}^2 = 2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_{hi} \sum_{k \neq i}^{N} k_{hk} q_{hk}^2 =$$

$$= 2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_{hi} \left[\sum_{k=1}^{N} k_{hk} q_{hk}^2 - k_{hi} q_{hi}^2 \right] = 2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} k_{hi} \sum_{k=1}^{N} k_{hk} q_{hk}^2 - \sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2 q_{hi}^2 \right] =$$

$$= 2 \frac{n-1}{N-1} N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_{hi} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k_{hk} q_{hk}^2 - 2 \frac{n-1}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2 q_{hi}^2 =$$

$$= 2\frac{n-1}{N-1}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(K_{h,k}-f_S)\left(Y_kK_{h,k}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 -$$

$$-2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 =$$

$$= -2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2$$

El quinto

$$2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hj} = 2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}q_{hi}\sum_{j\neq i}^{N}k_{hj}q_{hj} =$$

$$= 2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}q_{hi}\left[\sum_{j=1}^{N}k_{hj}q_{hj}-k_{hi}q_{hi}\right] = 2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}k_{hi}q_{hi}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}q_{hj}-\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2\right] =$$

$$= 2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}q_{hi}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}q_{hj} - 2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2 =$$

$$= 2\frac{n-1}{N-1}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}q_{hi}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}k_{hj}q_{hj} - 2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2 =$$

$$= 2\frac{n-1}{N-1}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)\left(Y_kK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)\left(Y_kK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right) -$$

$$-2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 =$$

$$= 2\frac{n-1}{N-1}N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)\left(Y_kK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\right]^2 -$$

$$-2\frac{n-1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2$$

El sexto

$$\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k\neq l}^{(N)}k_{hi}^2 q_{hk}q_{hl}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2 q_{hk}\sum_{l\neq k,l\neq i}^{N}q_{hl}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2 q_{hk}\left[\sum_{l=1}^{N}q_{hl}-q_{hi}-q_{hk}\right]=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2 q_{hk}\sum_{l=1}^{N}q_{hl}-$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2 q_{hi}q_{hk}-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2 q_{hk}^2=$$

$$=-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2 q_{hi}q_{hk}-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N)}k_{hi}^2 q_{hk}^2$$

que por lo ya calculado con anterioridad en los sumandos tercero y segundo respectivamente es igual a

$$\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2=$$

$$=2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2$$

El séptimo

$$\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} k_{hi}k_{hj}q_{hk}^2 =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)} k_{hi}k_{hj}\sum_{k\neq i.k\neq j}^{N} q_{hk}^2 =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)} k_{hi}k_{hj}\left[\sum_{k=1}^{N} q_{hk}^2 - q_{hi}^2 - q_{hj}^2\right] =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)} k_{hi}k_{hj}\sum_{k=1}^{N} q_{hk}^2 -$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)} k_{hi}q_{hi}^2k_{hj} - \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)} k_{hi}k_{hj}q_{hj}^2 =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} q_{hk}^2\sum_{i=1}^{N} k_{hi}\sum_{j\neq i}^{N} k_{hj} -$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_{hi}q_{hi}^2\sum_{j\neq i}^{N} k_{hj} -$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_{hi}\sum_{j\neq i}^{N} k_{hj}q_{hj}^2 =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} q_{hk}^2\sum_{i=1}^{N} k_{hi}\left[\sum_{j=1}^{N} k_{hj} - k_{hi}\right]$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_{hi}q_{hi}^2\left[\sum_{j=1}^{N} k_{hj} - k_{hi}\right] -$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_{hi}\left[\sum_{j=1}^{N} k_{hj}q_{hj}^2 - k_{hi}q_{hi}^2\right] =$$

$$= -\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_{hi}^2\sum_{k=1}^{N} q_{hk}^2 -$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2+\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_{hi}^2q_{hi}^2=$$

$$=-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2+$$

$$+2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2$$

El octavo

$$2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hk}=$$

$$=2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}q_{hi}k_{hj}\sum_{k\neq i,k\neq j}^{N}q_{hk}=$$

$$=2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}q_{hi}k_{hj}\left[\sum_{k=1}^{N}q_{hk}-q_{hi}-q_{hj}\right]=$$

$$=-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}q_{hi}^2k_{hj}-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}q_{hi}k_{hj}q_{hj}=$$

$$=-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hk}q_{hk}^2-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hj}$$

que por lo ya calculado con anterioridad en los sumandos cuarto y quinto, respectivamente, es igual a

$$2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2+$$

$$+2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h,i}-f_S\right)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2-$$

$$-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h,i}-f_S\right)\left(Y_kK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\right]^2=$$

$$= 4\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 +$$

$$-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)\left(Y_kK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\right]^2$$

El noveno, por analogía con el anterior

$$2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hj}q_{hk} =$$

$$= 2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hj}\sum_{k\neq i,k\neq j}^{N}q_{hk} =$$

$$= 2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hj}\left[\sum_{k=1}^{N}q_{hk}-q_{hi}-q_{hj}\right] =$$

$$= -2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hj} - 2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hj}^2$$

que por lo ya calculado con anterioridad es igual a

$$4\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 +$$

$$-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)\left(Y_kK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\right]^2$$

Por último, el décimo

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k\neq l}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hk}q_{hl} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hk}\sum_{l\neq i,l\neq j,l\neq k}^{N}q_{hl} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)}k_{hi}k_{hj}q_{hk}\left[\sum_{l=1}^{N}q_{hl}-q_{hi}-q_{hj}-q_{hk}\right] =$$

$$= -\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hk} -$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} k_{hi}k_{hj}q_{hj}q_{hk} -$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} k_{hi}k_{hj}q_{hk}^2 =$$

$$= -2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} k_{hi}k_{hj}q_{hi}q_{hk} +$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j\neq k}^{(N)} k_{hi}k_{hj}q_{hk}^2$$

que por lo ya calculado con anterioridad en los sumandos octavo y séptimo, respectivamente, es igual a

$$-4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 +$$

$$+2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)\left(Y_kK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\right]^2 +$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 -$$

$$-2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 =$$

$$= -6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2 +$$

$$+2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}N\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)\left(Y_kK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)\right]^2 +$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{h,i}-f_S)^2\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(Y_iK_{h,i}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h,i}\right)^2$$

Por consiguiente, el coeficiente de

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)^2\right]+$$

será

$$1-\frac{n-1}{N-1}-2\frac{n-1}{N-1}-2\frac{n-1}{N-1}-2\frac{n-1}{N-1}+2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}+2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}+$$

$$+4\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}+4\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}-6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}=$$

$$=1-7\frac{n-1}{N-1}+12\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}-6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}$$

El de

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)\right]^2$$

será

$$2\frac{n-1}{N-1}N-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N-2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N+2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}N=$$

$$=2\frac{N(n-1)}{N-1}\left[1-2\frac{n-2}{N-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{(N-2)(N-3)}\right]=$$

$$=2\frac{N(n-1)}{N-1}\frac{N^2-N-2nN+n+n^2}{(N-2)(N-3)}=2\frac{N(n-1)}{N-1}\frac{(N-n)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\left[2N\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]$$

Y el coeficiente de

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)^2$$

será

$$\frac{n-1}{N-1}N-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N-\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}N=$$

$$=\frac{N(n-1)}{N-1}\left[1-2\frac{n-2}{N-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{(N-2)(N-3)}\right]=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\left[N\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]$$

Q.E.D.

Obsérvese que los dos resultados anteriores conducen a la siguiente igualdad

Corolario 51 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}(x_i-x)I_i-f_S(x)\right)^4\right]=\frac{1}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^4+$$

$$+3\frac{N}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\right]^2$$

Demostración.- Considérese en cualquiera de los dos resultados anteriores la p.f. con $Y_i = 1,\ \forall i=1,\ldots,N$ Q.E.D.

Por tanto, para estudiar el comportamiento asintótico de ambos sumandos

$$\frac{1}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}B+3\frac{N}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]A^2$$

hay que estudiar el de A y B. Para A, se sabe que $A=O\left((h_n)^{-1}\right)$, dado que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2=\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)\right]^2=O\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

con lo cual su cuadrado es $A^2=O\left(h_n^{-2}\right)$, además se debe tener en cuenta que, por la condición HHM, la N "controla" a una n del cubo del denominador, quedando reducida a un orden cuadrático, y por tanto el sumando correspondiente será $O\left((nh_n)^{-2}\right)$.

Por consiguiente, falta por estudiar B, que va a resultar de menor orden de magnitud como se muestra a continuación

Resultado 59 *Si $nh_n^2 \to \infty$, se verifica que*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^4 = O\left(\frac{1}{h_n^3}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^4$$

será igual a

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^4(x_i-x)-4\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^3(x_i-x)f_S(x)+$$

$$+6\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^2(x_i-x)f_S^2(x)-4\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}(x_i-x)f_S^3(x)+f_S^4(x)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^4(x_i-x)-4\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^3(x_i-x)f_S(x)+$$

$$+6\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^2(x_i-x)f_S^2(x)-3f_S^4(x)=B_1-B_2+B_3-B_4$$

El primer sumando

$$B_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^4(x_i-x)=\frac{f(x)}{h_n^3}\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K^4(v)dv+O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)$$

Los demás sumandos son, por una parte

$$B_2=4f_S(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^3(x_i-x)=4\left[f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v+O\left(h_n\right)\right]\left[\frac{f(x)}{h_n^2}\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K^3(v)\mathrm{d}v+O\left(\frac{1}{h_n}\right)\right]=O\left(\frac{1}{h_n^2}\right),$$

y por otra parte

$$B_3=6f_S^2(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^2(x_i-x)=6\left[f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v+O\left(h_n\right)\right]^2\left[\frac{f(x)}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K^2(v)\mathrm{d}v+O\left(1\right)\right]=O\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

$$B_4 = 3f_S^4(x) = 3\left[f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v + O\left(h_n\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]^4 = O(1)$$

Q.E.D.

Corolario 52 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM y* $nh_n^2 \to \infty$

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^4\right] = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)$$

Por último ya se está en condiciones de estudiar la siguiente acotación asintótica

Corolario 53 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM y* $nh_n^2 \to \infty$

$$E_p\left[\left|\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right|^3\right] = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

Demostración.- Por la desigualdad de Lyapunov, Gnedenko(1975)

$$E_p\left[\left|\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right|^3\right] \leq \left\{E_p\left[\left|\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right|^4\right]\right\}^{3/4} = \left[O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)\right]^{3/4} = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

Q.E.D.

4.2. Sesgo según el plan de muestreo

No se utilizará la habitual técnica de linealización para el cálculo del sesgo y de la varianza según el plan porque cuando se emplean núcleos de soporte compacto el denominador de la expresión del suavizador NW sería nulo en numerosas muestras. A continuación se presenta un ejemplo muy sencillo que ilustra los problemas que acarrearía esta técnica.

Sea θ un parámetro a estimar y sea $\hat{\theta}$ su estimador $p-$insesgado, se puede considerar el siguiente desarrollo

$$\frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\left(\hat{\theta} - \theta\right) + \frac{1}{\theta^3}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 - \cdots$$

si para el cálculo de momentos se aplica indiscriminadamente el truncamiento puede llegarse a paradojas, por ejemplo

$$E_p\left(\frac{1}{\hat{\theta}}\right) \approx \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}E_p\left(\hat{\theta} - \theta\right) = \frac{1}{\theta}$$

o bien

$$E_p\left(\frac{1}{\hat{\theta}}\right) \approx \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}E_p\left(\hat{\theta}-\theta\right) + \frac{1}{\theta^3}E_p\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] = \frac{1}{\theta}\left[1 + \frac{VAR_p\left(\hat{\theta}\right)}{E_p^2\left(\hat{\theta}\right)}\right]$$

donde la fracción del multiplicador es la varianza relativa del estimador, es decir, el cuadrado de su coeficiente de variación.

La aproximación carece de sentido en cualquier población finita que pueda dar lugar a una muestra tal que $\hat{\theta}=0$ porque existiría una probabilidad no nula de que $\hat{\theta}$ valga cero por tanto no existe la esperanza de su inverso. Por ejemplo, sea U= $\{1,2,3,4,5\}$ y sea $\mathcal{P}=\{(1,0),(2,0),(3,1),(4,1),(5,2)\}$ considérese muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento con muestras de tamaño 2. Bajo este plan, la esperanza de la media muestral es la media poblacional, 4/5. La esperanza del inverso de la media muestral no puede ser aproximadamente igual a 5/4 porque ni tan siquiera existe.

Si se trata con núcleos de soporte no compacto no existe, en principio, el problema de que no esté definido el estimador pero puede subsistir otro problema, el de que no se pueda acotar el resto del desarrollo de Taylor subyacente en la técnica de linealización, por lo que el empleo de esta técnica en estas circunstancias puede ser un poco aventurado.

Obsérvese que, en un desarrollo de segundo orden con resto de orden 3,

$$\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2}\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right) - \frac{\theta_1}{\theta_2^2}\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right) + \frac{\theta_1}{\theta_2^3}\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2 - \frac{1}{\theta_2^2}\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right) -$$
$$-\frac{\theta_1'}{(\theta_2')^4}\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3 + \frac{1}{(\theta_2')^3}\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2,$$

donde (θ_1',θ_2') es un punto intermedio del segmento entre (θ_1,θ_2) y $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$, los denominadores de los dos últimos sumandos podrían ser tan pequeños como se considere.

El método de linealización se basa en la regularidad y acotación de la función de transformación que no se verifica en un entorno de los puntos en que se anula el denominador. El término correspondiente al último sumando del desarrollo de Taylor no ofrece problemas con la metodología que se va a a emplear en esta memoria porque tendrá como denominador al descriptor PR que ya se ha visto que no se anula en un punto con relieve positivo, $f(x)>0$, a partir de un N por el corolario 41.

Por todo lo anterior, para el estudio del sesgo se recurrirá a la siguiente identidad

Resultado 60 *Se verifica que*

$$\hat{\alpha}_S(x) = \frac{1}{\hat{f}_S^3(x)}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i-x) I_i\left(3\hat{f}_S(x)\left(f_S(x)-\hat{f}_S(x)\right)+\hat{f}_S^2(x)\right)+\hat{\alpha}_S(x)\left(f_S(x)-\hat{f}_S(x)\right)^3\right]$$

Demostración.- En el caso de que $\hat{f}_S(x)>0$, con la notación de Cao,Delgado&González Manteiga(1997)

$$\frac{1}{f_S^3(x)}\Big[3f_S^2(x)\hat{r}_S(x) - 3f_S(x)\hat{f}_S(x)\hat{r}_S(x) + \hat{r}_S(x)\hat{f}_S^2(x) + \hat{\alpha}_S(x)f_S^3(x) -$$

$$-3\hat{\alpha}_S(x)f_S^2(x)\hat{f}_S(x) + 3\hat{\alpha}_S(x)f_S(x)\hat{f_S}^2(x) - \hat{\alpha}_S(x)\hat{f}_S^3(x)\Big] =$$

$$= \frac{1}{f^3(x)}\Big[3\hat{r}_S(x)f_S^2(x) - 3\hat{r}_S(x)f_S(x)\hat{f}_S(x) + \hat{r}_S(x)\hat{f}_S^2(x) + \hat{\alpha}_S(x)f_S^3(x) -$$

$$-3\hat{r}_S(x)f_S^2(x) + 3\hat{r}_S(x)f_S(x)\hat{f}_S(x) - \hat{r}_S(x)\hat{f}_S^2(x)\Big] =$$

$$= \frac{1}{f_S^3(x)}\hat{\alpha}_S(x)f_S^3(x) = \hat{\alpha}_S(x)$$

Cuando $\hat{f}_S(x) = 0$, se verifica tambien la identidad porque en este caso $\hat{r}_S(x) = 0$ y $\hat{\alpha}_S(x) = 0$, por definición Q.E.D

Como además

$$3f_S(x)(f_S(x) - \hat{f}_S(x)) + \hat{f}_S^2(x) = 3f_S^2(x) - 3f_S(x)\hat{f}_S(x) + \hat{f}_S^2(x) =$$

$$= f_S^2(x) + f_S^2(x) - f_S(x)\hat{f}_S(x) + f_S^2(x) - 2f_S(x)\hat{f}_S(x) + \hat{f}_S^2(x) =$$

$$= f_S^2(x) + f_S(x)(f_S(x) - \hat{f}_S(x)) + (f_S(x) - \hat{f}_S(x))^2,$$

$\hat{\alpha}_S(x)$ se puede expresar del siguiente modo

$$\hat{\alpha}_S(x) = \frac{\hat{r}_S(x)}{f_S^3(x)}\left(f_S^2(x) - f_S(x)(\hat{f}_S(x) - f_S(x)) + (\hat{f}_S(x) - f_S(x))^2\right) + \hat{\alpha}_S(x)\left(f_S(x) - \hat{f}_S(x)\right)^3 =$$

$$= \frac{\hat{r}_S(x)}{f_S^3(x)}\left(f_S^2(x) - f_S(x)(\hat{f}_S(x) - f_S(x))\right) + \frac{r_S(x) + \hat{r}_S(x) - r_S(x)}{f_S^3(x)}\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^2 +$$

$$+\hat{\alpha}_S(x)\left(f_S(x) - \hat{f}_S(x)\right)^3$$

por consiguiente, el sesgo según el plan de muestreo admite la siguiente descomposición

$$B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \alpha_S(x) = -\frac{1}{f_S^2(x)}E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i - x)I_i\right] +$$

$$+\frac{1}{f_S^2(x)}\alpha_S(x)E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{f_S^3(x)}E_p\left[\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{f_S^3(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\right].$$

En el caso particular de que el plan de muestreo sea MASS/R(N,n), por los resultados de la sección anterior esta expresión es igual a

$$B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)=-\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)\right]+$$

$$+\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}^2\left(x_i-x\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{f_S^3(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\right]$$

Esto es

$$B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)=E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)-\alpha_S(x)=A+B_1+B_2+C$$

4.2.1. Estudio de C

Para analizar el sumando

$$-\frac{1}{f_S^3(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S(x)\left(\widehat{fs}(x)-f_S(x)\right)^3\right],$$

se considerará el valor absoluto de la esperanza que se puede mayorar del siguiente modo

$$\left|E_p\left[\hat{\alpha}_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\right]\right|\leq E_p\left[\left|\hat{\alpha}_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\right|\right]\leq$$

$$\left(\leq \max_{V_{x,h}}|Y_i|\,E_p\left[\left|\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\right|\right]\right)\leq \max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|\,E_p\left[\left|\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right|^3\right]$$

porque si el denominador es cero, $\widehat{\alpha}_S(x)$ es cero, por tanto trivialmente acotado; en los casos en que no es nulo el denominador

$$|\widehat{\alpha}_S(x)| = \left| \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x) I_i}{\widehat{f_S}(x)} \right| \left(\leq \max_{V_{x,h}} |Y_i| \right) \leq \max_{i=1,\ldots,N} |Y_i| .$$

El máximo de los valores absolutos de $\mathcal{Y}$ se puede sacar de la $p-$esperanza por ser un descriptor. Las desigualdades intermedias entre paréntesis corresponden al caso de que el núcleo sea de soporte compacto y, en ese caso, V_{x,h_n} sería el entorno, centrado en x, que determinaría la banda cuya anchura es el doble de la ventana. Con lo cual

$$|C| \leq \frac{1}{f_S^3(x)} \max_{i=1,\ldots,N} |Y_i| \, E_p \left[\left| \hat{f}_S(x) - f_S(x) \right|^3 \right] = \frac{1}{f_S^3(x)} \max_{i=1,\ldots,N} |Y_i| \, O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}} \right) = O\left(\frac{\max_{i=1,\ldots,N} |Y_i|}{(nh_n)^{3/2}} \right)$$

Como resumen, si la $\mathcal{Y}$ está uniformemente acotada por $C(Y) = \max_N |Y_i|$, $|\widehat{\alpha}_S(x)| < C(Y)$, entonces $C = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$. Esta condición se presentará en alguna de las situaciones del desarrollo posterior de la memoria, incluso se dará algo más fuerte que consiste en que $\mathcal{Y}$ esté dominada por un infinitésimo, en concreto $O(h_n)$.

Aunque $\{|Y_i|\}_{i=1}^N$ no esté acotada, si $\max_N |Y_i|$ crece a una velocidad adecuada, por ejemplo a $o\left((nh_n)^{1/2}\right)$, también tiene valor práctico dentro de la inferencia basada en el plan de muestreo porque este término es de menor orden de magnitud que A y B, bajo la hipótesis de que $nh_n^2 \to \infty$, como se verá a continuación.

4.2.2. Estudio del orden de los demás términos

B2 Para

$$B_2 = \frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(K_{hi} - f_S)^2\left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_j K_{hj}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}(K_{hi} - f_S)^2\right] -$$

$$-\frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_j K_{hj}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(K_{hi} - f_S)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}(K_{hi} - f_S)^2\right] -$$

$$-\frac{1}{f_S^2}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\alpha_S(x)\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(K_{hi} - f_S)^2\right] = B_{21} - B_{22}$$

donde

$$|B_{21}| \leq \frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 K_{hi}^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^4\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^4\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|\, O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{1}{h_n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|}{(nh_n)^2}\right) \Rightarrow$$

$$B_{21} = o\left(\frac{\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

$$|B_{22}| \leq \frac{1}{f_S^2}\frac{1}{n^2}O(1)\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|\, O\left(\frac{1}{h_n}\right) = O\left(\frac{\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|}{n^2 h_n}\right) \Rightarrow$$

$$B_{22} = o\left(\frac{\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

B1 En lo que respecta a B_1

$$|B_1| = \frac{|\alpha_S(x)|}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right] \leq$$

$$\leq \frac{\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right] =$$

$$= \max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|\, O\left(\frac{1}{nh_n}\right) = O\left(\frac{\max_{i=1,\ldots,N}|Y_i|}{nh_n}\right)$$

A Por último,

$$A = -\frac{1}{f_S^2}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)\left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_j K_{hj}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{f_S^2}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}\left(K_{hi}-f_S\right)\right],$$

con lo que

$$|A| \leq \frac{1}{f_S^2}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 K_{hi}^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)^2\right)^{1/2} = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\max_N |Y_i|\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2\right)^{1/2} O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right) =$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\max_N |Y_i|\, O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right) = O\left(\frac{\max_N |Y_i|}{nh_n}\right)$$

Resumen

$$A = O\left(\frac{\max_N |Y_i|}{nh_n}\right), B_1 = O\left(\frac{\max_N |Y_i|}{nh_n}\right), C = O\left(\frac{\max_N |Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

y

$$B_2 = o\left(\frac{\max_{i=1,\ldots,N} |Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right).$$

Obsérvese que si no se desarrollara tanto y se considerara los términos de primer orden en el desarrollo de Taylor, pero sin truncar es decir con resto de orden 2, si $\max_N |Y_i|$ no está acotado se podría llegar a un orden de magnitud de A y B_1 mayor que $(nh_n)^{-1}$ que podría no ser comparable con el término convencional del sesgo de orden h_n^2 ni tan siquiera con $nh_n^3 \to \infty$.

4.2.2.1. Estudio de B1

Ya se ha visto que

$$B_1 = \frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}^2\left(x_i-x\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

cuyo término dominante es

$$\frac{1}{nh_n} f(x)\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v$$

4.2.2.2. Estudio de A

Como

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} Y_i K_{h_n}^2 (x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} Y_i K_{h_n} (x_i - x) \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} K_{h_n} (x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}^2 (x_i - x) - f_S(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n} (x_i - x) = A_1^* - A_2^*$$

Se puede acotar cada uno de los sumandos

$$|A_1^*| \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |Y_i| K_{h_n}^2 (x_i - x) = \max_N |Y_i| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}^2 (x_i - x)$$

cuyo término dominante es

$$\max_N |Y_i| f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v$$

y

$$|A_2^*| \leq f_S(x) \max_N |Y_i| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n} (x_i - x)$$

cuyo término dominante es

$$\max_N |Y_i| f^2(x)\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v\right)^2$$

Por tanto

$$|A| \leq \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(|A_1^*| + |A_2^*|\right)$$

y $A = O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$. Por consiguiente, los términos dominantes del sesgo según el plan de muestreo son A y B_1, A tiene signo negativo.

Observación.- En general, si $\max_N |Y_i| = o(nh_n)$, el estimador es asintóticamente $p-$insesgado.

4.2.2.3. Expresión alternativa del término dominante

Si se sustituye en $B_1 + A$, se tiene la siguiente expresión

$$B_1 + A = \frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)} E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^2\right] - \frac{1}{f_S^2(x)} E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) I_i\right] =$$

$$= \frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)} COV_p\left[\hat{f}_S(x); \hat{f}_S(x)\right] - \frac{1}{f_S^2(x)} COV_p\left[\hat{f}_S(x), \hat{r}_S(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\left[\alpha_S(x) COV_p\left(\hat{f}_S(x); \hat{f}_S(x)\right) - COV_p\left(\hat{f}_S(x); \hat{r}_S(x)\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{f_S^2(x)}\left[COV_p\left(\hat{f}_S(x); \hat{r}_S(x) - \alpha_S(x)\hat{f}_S(x)\right)\right]$$

como

$$\hat{r}_S(x) - \alpha_S(x)\hat{f}_S(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x) I_i - \alpha_S(x)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} K(x_i - x) I_i =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \alpha_S(x)) K_{h_n}(x_i - x) I_i$$

si en la expresión (4.2) de la covarianza se considera $Y_i - \alpha_S(x)$ en lugar de Y_i, y se tiene en cuenta que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \alpha_S(x)) K_{h_n}(x_i - x) = 0,$$

por (4.1), se verifica que

$$B_1 + A = -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \alpha_S(x)) K_{h_n}^2(x_i - x)\right]$$

4.2.3. Conclusión del sesgo según el plan

Reuniendo los resultados de los epígrafes anteriores, se ha probado el siguiente teorema

Teorema 6 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$*

$$B_p\left(\widehat{\alpha_S(x)}\right) = -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \alpha_S(x)) K_{h_n}^2(x_i - x)\right] + O\left(\frac{\max\limits_{i=1,\ldots,N} |Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right) \quad (4.3)$$

Observación.- En la hipótesis habitual en la literatura de MPF, aunque algo restrictiva, de que $\mathcal{Y}$ esté acotada, el sesgo es

$$B_p\left(\widehat{\alpha_S(x)}\right) = -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \alpha_S(x)) K_{h_n}^2(x_i - x)\right] + O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

por tanto el resto que se heredaría del tratamiento del plan de muestreo no sería comparable con el término principal del sesgo bajo la hipótesis $nh_n \to \infty$, habría que imponer una velocidad de convergencia más lenta.

4.3. Sesgo total

Análogamente a (3.3), se verifica que

$$B\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = E_\xi\left[\alpha_S(x) + B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] - \alpha(x) = B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) + E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right]$$

Para el estudio del sesgo promedio se calcularán las esperanzas según el diseño de los términos dominantes y del resto. Posteriormente, se estudiará el sesgo según el diseño; para ello se calcula la $\xi-$esperanza del descriptor bajo diferentes hipótesis y, por último, se reunirán todos estos resultados previos.

4.3.1. $\xi-$Esperanza de los términos dominantes del sesgo según el plan

4.3.1.1. $\xi-$Esperanza de B1 + A en caso de núcleo con soporte compacto

$$E_\xi(A) = -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}^2(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i - x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N K_{h_n}(x_k - x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_1^N \alpha(x_i) K_{h_n}^2(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \alpha(x_i) K_{h_n}(x_i - x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N K_{h_n}(x_k - x)\right]$$

Como

$$\frac{1}{N}\sum_1^N \alpha(x_i) K_{h_n}^2(x_i - x) = \frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i - x)\frac{\sum_1^N \alpha(x_i) K_{h_n}^2(x_i - x)}{\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i - x)} = \alpha(\zeta)\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i - x)$$

$$\frac{1}{N}\sum_1^N \alpha(x_i) K_{h_n}(x_i - x) = \frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)\frac{\sum_1^N \alpha(x_i) K_{h_n}(x_i - x)}{\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)} = \alpha(\zeta^*)\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)$$

con $\zeta, \zeta^* \in V_{x,h_n}$, se verifica que, si α continua y $nh_n \to \infty$,

$$E_\xi(A) = -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\alpha(\zeta)\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i - x) - \alpha(\zeta^*)\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N K_{h_n}(x_k - x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\alpha(\zeta)\left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right] -$$

$$-\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\alpha(\zeta)-\alpha(\zeta^*)\right)\left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\alpha(x)+o(1)\right)\left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right] - \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\alpha(\zeta)-\alpha(\zeta^*)\right) =$$

$$= -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\alpha(x)+o(1)\right)\left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right] + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

y también que

$$E_\xi(B_1) = \frac{E_\xi(\alpha_S(x))}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right]$$

con lo cual

$$E_\xi(B_1+A) = \frac{[E_\xi(\alpha_S(x))-\alpha(x)]}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right] + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) =$$

$$= B_\xi(\alpha_S(x))\,O\left(\frac{1}{nh_n}\right) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Es decir, en la situación que se está tratando, núcleo de soporte compacto, con suponer continuidad de la función de regresión la esperanza según el diseño del término dominante introducido por el plan de muestreo es igual a un sumando despreciable frente al sesgo tradicional más un sumando que también tiende a cero porque $nh_n \to \infty$. Obsérvese que si el núcleo es constante, por ejemplo la ventana móvil, el primer sumando de esta esperanza es nulo.

Del mismo modo, si se supone que α es lipschitziana, sumando y restando $\alpha(x)$ a $\alpha(\zeta)$

$$E_\xi(A) = -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\alpha(x)+O(h_n)\right)\left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right] + O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

con lo cual

$$E_\xi(B_1+A) = \frac{[E_\xi(\alpha_S(x))-\alpha(x)]}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i-x) - \left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) O\left(\frac{1}{nh_n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

4.3.1.2. $\xi-$Esperanza de A

En este epígrafe se refina el resultado anterior, aun suponiendo núcleos en general, cuando se impone más suavidad en la función de regresión.

Resultado 61 *Bajo la condición HHM, si $\alpha''(\cdot)$ es acotada y $nh_n^2 \to \infty$ entonces*

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}^2\left(x_i - x\right)\right] = \alpha(x) f(x) \frac{1}{h_n} \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O(1)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}^2\left(x_i - x\right)\right] = \frac{1}{N}\sum_1^N E_\xi\left(Y_i\right) K_{h_n}^2\left(x_i - x\right) = \frac{1}{N}\sum_1^N \alpha\left(x_i\right) K_{h_n}^2\left(x_i - x\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_1^N \left(\alpha(x) + \alpha'(x)(x_i - x) + \frac{1}{2}\alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2\right) K_{h_n}^2\left(x_i - x\right)$$

en ζ_i un punto intermedio entre x_i y x, que será igual a

$$\alpha(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_{h_n}^2\left(x_i - x\right) + \alpha'(x)\frac{1}{N}\sum_1^N \left(x_i - x\right) K_{h_n}^2\left(x_i - x\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_1^N \alpha''(\zeta_i)\left(x_i - x\right)^2 K_{h_n}^2\left(x_i - x\right) =$$

$$= \alpha(x) f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O(1) + \alpha'(x) f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h} vK^2(v)\mathrm{d}v + O(h_n) + O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_1^N \alpha''(\zeta_i)\left(x_i - x\right)^2 K_{h_n}^2\left(x_i - x\right) =$$

$$= \alpha(x) f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O(1)$$

porque el último sumando puede tratarse del siguiente modo

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_1^N \alpha''(\zeta_i)\left(x_i - x\right)^2 K_{h_n}^2\left(x_i - x\right)\right| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_1^N \left|\alpha''(\zeta_i)\right|\left(x_i - x\right)^2 K_{h_n}^2\left(x_i - x\right) \leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha'')}{2}\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}(x_i-x)^2 K_{h_n}^2(x_i-x) = \frac{C(\alpha'')}{2}\left[h_n \int_{-x/h}^{(1-x)/h} v^2K^2(v)\mathrm{d}v + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right)\right]$$

donde $C(\alpha'')$ es la cota de la segunda derivada Q.E.D.

Resultado 62 *Bajo la condición HHM, si $\alpha''(\cdot)$ es acotada y $nh_n^2 \to \infty$ entonces*

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i-x)\right] = \alpha(x)f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v + O(h_n)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i-x)\right] = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} E_\xi(Y_i) K_{h_n}(x_i-x) = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\alpha(x_i)K_{h_n}(x_i-x) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\left(\alpha(x)+\alpha'(x)(x_i-x)+\frac{1}{2}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2\right)K_{h_n}(x_i-x)$$

en ζ_i un punto intermedio entre x_i y x, que será igual a

$$\alpha(x)\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}K_{h_n}(x_i-x)+\alpha'(x)\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}(x_i-x)K_{h_n}(x_i-x)+\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{h_n}(x_i-x) =$$

$$= \alpha(x)f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v+O(h_n)+\alpha'(x)f(x)h_n\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v+O(h_n^2)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{h_n}(x_i-x) =$$

$$= \alpha(x)f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v+O(h_n)$$

porque el último sumando puede tratarse de modo semejante a la demostración del resultado anterior y se llega a que

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{h_n}(x_i-x)\right| \leq C(\alpha'')\left[O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]$$

Q.E.D.

Corolario 54 *Bajo la condición HHM, si $\alpha''(\cdot)$ es acotada y $nh_n^2 \to \infty$ entonces*

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}^2(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}(x_i - x)\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)\right] =$$

$$= \alpha(x)f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O(1)$$

Observación.- En las circunstancias anteriores, se puede escribir

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}^2(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}(x_i - x)\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)\right] = O\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

Observación.- El corolario anterior puede considerarse como una generalización del resultado

$$\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i - x) - \left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i - x)\right]^2 = f(x)\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O(1)$$

porque este último desarrollo se obtiene del corolario considerando $Y_i = 1, \forall i$, esto es, constante e igual a la unidad, es decir, $\alpha(x) = 1$ con perturbación aleatoria nula.

Por todo lo anterior, si $nh_n^2 \to \infty$ y α'' es acotada, bajo la condición HHM, se verifica que

$$E_\xi(A) = -\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i K_{h_n}^2(x_i - x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i - x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N K_{h_n}(x_k - x)\right] =$$

$$= -\frac{\alpha(x)f(x)}{\left[f(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v + O(h_n) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]^2}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{h_n}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\frac{\alpha(x)f(x)}{f^2(x)\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v\right]^2(1 + o(1))}\frac{1}{nh_n}\frac{N-n}{N-1}\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{nh_n}\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha(x)\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v}{f(x)\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v\right]^2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

porque se está suponiendo que $f(x) > 0$.

4.3.1.3. $\xi-$Esperanza de B1+ A

Como en el epígrafe anterior, si se supone suavidad aunque se consideren núcleos en general se verifica que

$$B_1 = \frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left[f(x) \frac{1}{h_n} \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v) \mathrm{d}v + O(1) \right] = \frac{\alpha_S(x) f(x)}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{h_n} \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v) \mathrm{d}v + O(1) \right]$$

Por consiguiente, si $nh_n^2 \to \infty$, bajo la condición HHM, se verifica que

$$E_\xi [B_1] = \frac{1}{nh_n} \frac{N-n}{N-1} \frac{E_\xi (\alpha_S(x)) \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v) \mathrm{d}v}{f(x) \left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v) \mathrm{d}v \right]^2} + E_\xi (\alpha_S(x)) O\left(\frac{1}{n}\right)$$

y

$$E_\xi [B_1 + A] = \frac{1}{nh_n} \frac{N-n}{N-1} \frac{[E_\xi (\alpha_S(x)) - \alpha(x)] \int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v) \mathrm{d}v}{f(x) \left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v) \mathrm{d}v \right]^2} + E_\xi (\alpha_S(x)) O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.4}$$

4.3.2. Término residual del sesgo

Para analizar la siguiente expresión

$$-E_\xi \left\{ \frac{1}{f_S^3(x)} E_p \left[\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n} (x_i - x) I_i}{\widehat{f_S}(x)} \left(\widehat{f_S}(x) - f_S(x) \right)^3 \right] \right\},$$

se considerará su valor absoluto, por tanto habrá que estudiar

$$\left| E_p \left[\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n} (x_i - x) I_i}{\hat{f}_S(x)} \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^3 \right] \right|$$

ya que el primer factor, el inverso del cubo del descriptor PR es positivo. Esta última expresión es menor o igual que

$$E_p \left[\left| \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n} (x_i - x) I_i}{\hat{f}_S(x)} \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^3 \right| \right] \leq \left(\max_{V_{x,h}} |Y_i| \, E_p \left[\left| \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^3 \right| \right] \leq \right)$$

$$\left(\leq \max_{V_{x,h}} |Y_i|\, E_p\left[\left|\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right|^3\right]\right) \leq \max_{i=1,\ldots,N} |Y_i|\, E_p\left[\left|\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right|^3\right]$$

los paréntesis solo en caso de que el soporte del núcleo sea compacto.

4.3.2.1. Tratamiento del máximo

Ese máximo se puede mayorar por el máximo del valor absoluto de la parte sistemática α más el máximo del valor absoluto del término de error, es decir, como

$$Y_i = \alpha(x_i) + \varepsilon_i \sigma(x_i)$$

donde $E(\varepsilon_i) = 0$ y $VAR(\varepsilon_i) = 1$, entonces

$$\max_{V_{xh_n}} |Y_i| \leq \max_{V_{xh_n}} |\alpha(x_i)| + \max_{V_{xh_n}} |\varepsilon_i| \max_{V_{xh_n}} \sigma(x_i)$$

o en general

$$\max_{i=1,\ldots,N} |Y_i| \leq \max_{i=1,\ldots,N} |\alpha(x_i)| + \max_{i=1,\ldots,N} |\varepsilon_i| \max_{i=1,\ldots,N} \sigma(x_i)$$

y ahora bastaría considerar que como estamos en un compacto, sin pérdida de generalidad $[0,1]$, se alcanza el máximo de α y de σ, porque se está suponiendo suficiente suavidad. Si no, habría que imponer que σ sea acotada.

En el caso particular de que la $\mathcal{Y}$ esté uniformemente acotada por $C(Y)$ entonces $|\widehat{\alpha}_S(x)| < C(Y)$.

$$\left| E_\xi \left\{ \frac{1}{f_S^3(x)} E_p \left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x) I_i}{\widehat{f_S}(x)} \left(\widehat{f_S}(x) - f_S(x)\right)^3 \right] \right\} \right| \leq C(Y) O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

En esencia, es la hipótesis que consideraban Breidt&Opsomer(2000) de que los errores estén dentro de un intervalo compacto.

En otro caso, se puede aplicar el lema 2 de Collomb(1977) considerando como $Z_i = |\varepsilon_i|$, lo que da lugar a que

$$E_\xi\left[\max_N |\varepsilon_i|\right] = O\left(\log_k N\right)^{1/\gamma}$$

bajo determinadas hipótesis. Por tanto, habrá que imponer condiciones análogas a las que supone este autor francés

$$\frac{(Nh_n)^{3/2}}{N^\omega} \to \infty$$

o bien

$$\frac{(Nh_n)^{3/2}}{(\log_k N)^\omega} \to \infty$$

Es decir, en determinadas condiciones la esperanza del máximo crece según una escala de potencias o de logaritmos iterados.

En el caso de potencias, el exponente depende inversamente de la existencia de momentos, por ejemplo, momentos de orden 4 de ε_i. Bahndorff-Nielsen(1963) probó un resultado, que atribuye a Robbins, aplicable a variables no negativas e identicamente distribuidas, por tanto a $|\varepsilon_i|$, que concluye que si $E\left|\varepsilon_i\right|^r < \infty$ para algún $r \geq 1$, entonces $N^{-1/r} E\left(\max_N \left|\varepsilon_i\right|\right) \to 0$. Es decir, que si $|\varepsilon_i|$ tiene momentos de orden elevado, la esperanza del máximo crece lentamente. Una versión semejante en probabilidad se utiliza en Stute&GonzalezManteiga(1990).

A modo de ejemplo, bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$ y ε_i tiene momento de orden 4

$$E_\xi\left[\max_N \left|\varepsilon_i\right|\right] O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right) = E_\xi\left[\max_N \left|\varepsilon_i\right|\right] O\left(\frac{1}{n^{1/4} n^{5/4} h_n^{6/4}}\right) =$$

$$= o\left(\frac{1}{n^{5/4} h_n^{6/4}}\right) = o\left(\frac{1}{n n^{1/4} h_n h_n^{2/4}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n \left(nh_n^2\right)^{1/4}}\right)$$

o bien

$$E_\xi\left[\max_N \left|\varepsilon_i\right|\right] O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{5/4} h_n^{6/4}}\right) = o\left(\frac{h_n}{n^{5/4} h_n^{10/4}}\right) = o\left(\frac{h_n}{\left(nh_n^2\right)^{5/4}}\right)$$

Si además $nh_n^3 \to \infty$,

$$E_\xi\left[\max_N \left|\varepsilon_i\right|\right] O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{5/4} h_n^{6/4}}\right) = o\left(\frac{h_n^2}{n^{5/4} h_n^{14/4}}\right) = o\left(\frac{h_n^2}{nh_n^3 n^{1/4} h_n^{2/4}}\right) = o\left(\frac{h_n^2}{nh_n^3 (nh_n^2)^{1/4}}\right)$$

Si K es de soporte compacto, se puede considerar $E_\xi\left[\max_{V_{x,h_n}} \left|\varepsilon_i\right|\right]$ en lugar de $E_\xi\left[\max_N \left|\varepsilon_i\right|\right]$.

En el caso del empleo del desarrollo de Taylor con términos hasta el resto de orden tres, el sesgo del estimador NW implicaría el tratamiento de la esperanza del siguiente sumando del desarrollo

$$-\frac{\theta_1'}{\left(\theta_2'\right)^4}\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3,$$

donde (θ_1', θ_2') es un punto intermedio entre $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ y (θ_1, θ_2), que en general no está acotado en la situación que se está tratando, donde el denominador podría tomar valores tan próximos a cero como se desee. Mientras que con el método expuesto, el término análogo conduce a órdenes del tipo

$$O\left(\frac{1}{n^{3/2-\varepsilon} h_n^{3/2}}\right),$$

abusando de la notación.

Obsérvese que si no se desarrollara tanto y se considerara los términos de primer orden en el desarrollo de Taylor, es decir con el resto de orden dos, se llegaría a un orden de magnitud del

tipo, abusando de la notación,

$$O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}h_n}\right)$$

que implicaría, para que fuesen despreciables frente al término habitual del sesgo de orden h_n^2, una velocidad de convergencia más lenta que $nh_n^3 \to \infty$ lo que quizás sea bastante restrictivo para Nadaraya-Watson.

4.3.2.2. Resto de términos

No se considerará el resto de términos de menor orden de magnitud porque su esperanza según el diseño fijo sería a su vez de menor orden de magnitud. Como ejemplo, se presenta a continuación el segundo sumando del segundo término

Ejemplo 27

$$E_\xi E_p\left[\frac{1}{f_S^3(x)}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i-x)\,I_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i-x)\right)\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)$$

Como

$$E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^3(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i-x)\,I_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i-x)\right)\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{f_S^3(x)}E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(Y_i K_{h_n}(x_i-x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i-x)\right)\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\right]$$

habrá que estudiar

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(Y_i K_{h_n}(x_i-x) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N Y_j K_{h_n}(x_j-x)\right)\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\right] =$$

$$= E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i K_{h_n}(x_i-x)\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N Y_j K_{h_n}(x_j-x)\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E_\xi(Y_i)\,K_{h_n}(x_i-x)\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N E_\xi(Y_j)\,K_{h_n}(x_j-x)\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \alpha(x_i)K_{h_n}(x_i-x)\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \alpha(x_j)K_{h_n}(x_j-x)\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2 = I+II$$

Para I, si $\alpha(\cdot)$ es acotada, se verifica que

$$|I| \leq \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha^2(x_i)K_{h_n}^2\left(x_i-x\right)\right)^{1/2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)^4\right)^{1/2} = O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{h_n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)$$

y para II, si $\alpha(\cdot)$ es acotada $II = O(1)O\left(\frac{1}{h_n}\right) = O\left(\frac{1}{h_n}\right)$, por tanto

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-f_S(x)\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)$$

y

$$E_\xi E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\right)\left(\widehat{f_S}(x)-f_S(x)\right)^2\right] = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)$$

que si $nh_n^2 \to \infty$ resultará despreciable frente al término habitual de orden h_n^2. Si solo se impone $nh_n \to \infty$, no son comparables □

En el caso de que se empleara el desarrollo de Taylor, el sesgo del estimador NW implicaría el tratamiento de la esperanza del siguiente sumando del desarrollo

$$\frac{1}{(\theta_2')^3}\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2,$$

donde (θ_1', θ_2') es un punto intermedio entre $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ y (θ_1, θ_2), que en general no está acotado en la situación que se está tratando, donde el denominador podría tomar valores tan próximos a cero como se desee. Con el método de esta memoria, el término análogo resulta cuadrático como se acaba de mostrar.

4.3.3. $\xi-$Esperanza del descriptor

Se va a tratar la esperanza del descriptor NW según el diseño fijo. En caso de que el núcleo sea de soporte compacto, si α es continua

$$E_\xi\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha\left(x_i\right)K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}} = \alpha\left(\zeta\right) = \alpha\left(x\right)+o(1)$$

si se supone que es lipschitziana

$$E_\xi\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha\left(x\right)+\alpha\left(x_i\right)-\alpha\left(x\right)\right)K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}} =$$

$$= \alpha(x) + \frac{\sum_{i=1}^{N} (\alpha(x_i) - \alpha(x)) K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N} K_{hi}} = \alpha(x) + O(h_n)$$

porque

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{N} (\alpha(x_i) - \alpha(x)) K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N} K_{hi}} \right| \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} |\alpha(x_i) - \alpha(x)| K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N} K_{hi}} \leq \Lambda(\alpha) \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - x| K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N} K_{hi}} \leq \Lambda(\alpha) h_n$$

En general, si se supone más suavidad en α

$$E_\xi(\alpha_S(x)) = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_\xi(Y_i) K_h(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha(x_i) K_h(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\alpha(x) + \alpha'(x)(x_i - x) + \frac{1}{2}\alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2\right) K_h(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x)} =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x) \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x)} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2 K_h(x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x)}$$

4.3.3.1. Caso del núcleo general

Conviene recordar que siempre se está considerando un punto con $f(x) > 0$

Resultado 63 *Si $\alpha''(\cdot)$ es acotada y $nh_n^2 \to \infty$*

$$E_\xi(\alpha_S(x)) = \alpha(x) + \alpha'(x) h_n \frac{\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h} vK(v)dv\right)}{\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)dv\right)} + O\left(h_n^2 + \frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right)=\alpha(x)+\alpha'(x)\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h(x_i-x)}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h(x_i-x)}=$$

$$=\alpha(x)+\alpha'(x)\frac{f(x)h_n\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v\right)+O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x)\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v\right)+O\left(h_n\right)}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}=$$

$$=\alpha(x)+\alpha'(x)h_n\frac{f(x)\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v\right)+O\left(h_n\right)+O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right)}{f(x)\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v\right)+O\left(h_n\right)}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}=$$

$$=\alpha(x)+\alpha'(x)h_n\frac{f(x)\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v\right)}{f(x)\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v\right)}\left[1+O\left(h_n\right)+O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right)\right]\left(1+O\left(h_n\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}$$

si $\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v\neq 0$, y es igual a

$$\alpha(x)+\alpha'(x)h_n\frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v}{\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v}+O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

porque el resto puede tratarse del siguiente modo

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}\right|\leq\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\alpha''(\zeta_i)\right|(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}\leq$$

$$\leq \frac{1}{2}C(\alpha'')\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h(x_i-x)} =$$

$$= \frac{1}{2}C(\alpha'')\frac{f(x)h_n^2\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}v^2K(v)\mathrm{d}v\right)+O\left(h_n^3\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x)\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v\right)+O\left(h_n\right)} = O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Si $\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v=0$, también se verifica el desarrollo Q.E.D.

Observación.- En estas circunstancias también se podría escribir

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right)=\alpha(x)+\alpha'(x)\frac{h_n\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v\right)}{\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v\right)}+o\left(h_n\right)$$

o incluso

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right)=\alpha(x)+O\left(h_n\right)$$

y en el caso de que la velocidad de convergencia de la ventana sea más lenta, $nh_n^3\to\infty$

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right)=\alpha(x)+\alpha'(x)h_n\frac{\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}vK(v)\mathrm{d}v\right)}{\left(\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)\mathrm{d}v\right)}+O\left(h_n^2\right)$$

4.3.3.2. Caso del núcleo simétrico

Corolario 55 *Sea $K(\cdot)$ simétrico. Supóngase que existan las integrales impropias, si $\alpha''(\cdot)$ es acotada y $nh_n^3\to\infty$*

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right)=\alpha(x)+o\left(h_n\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right)=\alpha(x)+\alpha'(x)\frac{f(x)h_n\left(\int_{-\infty}^{\infty}vK(v)\mathrm{d}v+o(1)\right)+O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}K(v)\mathrm{d}v+o(1)\right)+O\left(h_n\right)}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h(x_i-x)} =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{h_n o(1) + O\left(h_n^2\right)}{(1+o(1)) + O\left(h_n\right)} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2 K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)} =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{o(h_n) + O\left(h_n^2\right)}{(1+o(1))} + O\left(h_n^2\right) = \alpha(x) + o\left(h_n\right)$$

Q.E.D.

4.3.3.3. Caso del núcleo de soporte compacto

Corolario 56 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ es acotada y $nh_n^3 \to \infty$*

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right) = \alpha(x) + \alpha'(x)h_n\alpha_1(K) + O\left(h_n^2\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right) = \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{f(x)h_n\alpha_1\left(K\right) + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x)\alpha_0\left(K\right) + O\left(h_n\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)} + O\left(h_n^2\right) =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)h_n\frac{\alpha_1\left(K\right) + O\left(h_n\right)}{1+O(h_n)} + O\left(h_n^2\right) =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)h_n\alpha_1\left(K\right)\left(1+O\left(h_n\right)\right)\left(1+O\left(h_n\right)\right) + O\left(h_n^2\right)$$

si $\alpha_1(K) \neq 0$, y es igual a

$$\alpha(x) + \alpha'(x)h_n\alpha_1\left(K\right) + O\left(h_n^2\right)$$

Si $\alpha_1(K) = 0$, también se verifica el desarrollo Q.E.D.

Si se impone una condición más restrictiva a la función de regresión, por ejemplo que sea de clase 2, $\mathcal{C}^2$, se puede refinar el resultado como se presenta a continuación

Corolario 57 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ es continua y $nh_n^3 \to \infty$*

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right) = \alpha(x) + \alpha'(x)h_n\alpha_1(K) + \frac{1}{2}\alpha''(x)\alpha_2\left(K\right)h_n^2 + o\left(h_n^2\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right)=\alpha(x)+\alpha'(x)\frac{f(x)h_n\alpha_1\left(K\right)+O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x)\alpha_0\left(K\right)+O\left(h_n\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}$$

El último sumando se puede tratar del siguiente modo

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}=\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha''\left(x\right)+\alpha''(\zeta_i)-\alpha''\left(x\right)\right)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha''\left(x\right)\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha''(\zeta_i)-\alpha''\left(x\right)\right)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha''\left(x\right)\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha''(\zeta_i)-\alpha''\left(x\right)\right)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}$$

El primer subsumando se puede desarrollar

$$\frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{f(x)\alpha_2\left(K\right)h_n^2+O\left(h_n^3\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x)\alpha_0\left(K\right)+O\left(h_n\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}=\frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{\alpha_2\left(K\right)h_n^2+O\left(h_n^3\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{1+o(1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha''(x)\alpha_2\left(K\right)h_n^2\frac{1+O\left(h_n\right)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)}{1+o(1)}=\frac{1}{2}\alpha''(x)\alpha_2\left(K\right)h_n^2\left(1+o(1)\right)$$

si $\alpha_2(K)\neq 0$ que se verifica si K no es degenerado. Para el segundo subsumando

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha''(\zeta_i)-\alpha''\left(x\right)\right)(x_i-x)^2K_h\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\underset{V_{x,h}}{\max}\left|\alpha''\left(\zeta_i\right)-\alpha''\left(x\right)\right|\left(x_i-x\right)^2K_{h_n}\left(x_i-x\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h\left(x_i-x\right)}=$$

$$\leq \frac{1}{2}\underset{V_{x,h}}{\text{máx}}\left|\alpha''(\zeta_i)-\alpha''(x)\right|\frac{\frac{1}{N}\sum_1^N (x_i-x)^2 K_{h_n}(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_h(x_i-x)} = \frac{1}{2}o(1)\frac{\frac{1}{N}\sum_1^N (x_i-x)^2 K_{h_n}(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_h(x_i-x)}$$

si $\alpha''(\cdot)$ es continua, porque se están considerando núcleos positivos. Por consiguiente, despreciable frente al sumando anterior Q.E.D.

4.3.3.4. Caso del núcleo simétrico y de soporte compacto

Corolario 58 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ es continua y $nh_n^3 \to \infty$*

$$E_\xi(\alpha_S(x)) = \alpha(x) + \frac{h_n^2}{2}\alpha_2(K)\left(\alpha''(x) + 2\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}\right) + o\left(h_n^2\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi(\alpha_S(x)) = \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (x_i-x)K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_h(x_i-x)} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2 K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_h(x_i-x)}$$

Por una parte, si $f'(x) \neq 0$,

$$\alpha'(x)\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (x_i-x)K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_h(x_i-x)} = \alpha'(x)\frac{f'(x)h_n^2\alpha_2(K) + O\left(h_n^4\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x) + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)} =$$

$$= \frac{\alpha'(x)f'(x)h_n^2\alpha_2(K)}{f(x)}\frac{1 + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)}{1 + O\left(h_n^2\right)} =$$

$$= \frac{\alpha'(x)f'(x)h_n^2\alpha_2(K)}{f(x)}\left[1 + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right],$$

si $f'(x) = 0$, se estaría en el desarrollo anterior y, por otra, el resto puede tratarse del siguiente modo

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2 K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_h(x_i-x)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(\alpha''(x) + \alpha''(\zeta_i) - \alpha''(x)\right)(x_i-x)^2 K_h(x_i-x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_h(x_i-x)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha''(x) (x_i - x)^2 K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\alpha''(\zeta_i) - \alpha''(x)) (x_i - x)^2 K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)}$$

Como el núcleo es simétrico y de soporte compacto, se tiene para el primero

$$\frac{1}{2}\alpha''(x) \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)} = \frac{1}{2}\alpha''(x) \frac{f(x) h_n^2 \alpha_2 (K) + O\left(h_n^4\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x) + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha''(x) \frac{f(x) h_n^2 \alpha_2 (K) \left[1 + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]}{f(x) \left[1 + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha''(x) h_n^2 \alpha_2 (K) \left[1 + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right] [1 + o(1)] =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha''(x) h_n^2 \alpha_2 (K) \left[1 + O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]$$

Y para el segundo

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\alpha''(\zeta_i) - \alpha''(x)) (x_i - x)^2 K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \max_{V_{x,h}} |\alpha''(\zeta_i) - \alpha''(x)| (x_i - x)^2 K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)} =$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{V_{x,h}} \left|\alpha''(\zeta_i) - \alpha''(x)\right| \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)} = o(1) \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)}$$

por tanto despreciable frente al sumando anterior del desarrollo si $\alpha''(x) \neq 0$. Por consiguiente

$$E_\xi (\alpha_S(x)) = \alpha(x) + \alpha'(x) \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha''(\zeta_i) (x_i - x)^2 K_h (x_i - x)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h (x_i - x)} =$$

$$= \alpha(x)+\frac{\alpha'(x)f'(x)h_n^2\alpha_2(K)}{f(x)}\left[1+O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]+\frac{1}{2}\alpha''(x)\,h_n^2\alpha_2(K)\left[1+O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]=$$

$$= \alpha(x)+\left(\frac{\alpha'(x)f'(x)h_n^2\alpha_2(K)}{f(x)}+\frac{1}{2}\frac{\alpha''(x)f(x)h_n^2\alpha_2(K)}{f(x)}\right)\left[1+O\left(h_n^2\right)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]=$$

$$= \alpha(x)+h_n^2\alpha_2(K)\left(\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}+\frac{1}{2}\alpha''(x)\right)+O\left(h_n^4\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$= \alpha(x)+\frac{1}{2}h_n^2\alpha_2(K)\left(\alpha''(x)+2\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}\right)+O\left(h_n^4\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$= \alpha(x)+\frac{1}{2}h_n^2\alpha_2(K)\left(\alpha''(x)+2\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}\right)+o\left(h_n^2\right)$$

Si $\alpha''(x)=0$, también se verifica el desarrollo Q.E.D.

Observación.- Este desarrollo conduce a la habitual expresión del sesgo, por ejemplo Jennen-Steinmetz&Gasser(1988)

$$B_\xi(\alpha_S(x)) = \frac{h_n^2}{2}\alpha_2(K)\left(\alpha''(x)+2\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}\right)+o\left(h_n^2\right)$$

4.3.4. Conclusión del sesgo total

En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si el núcleo es de soporte compacto y α continua, entonces

$$B(\hat{\alpha}_S(x)) = B_\xi(\alpha_S(x))+E_\xi B_p(\hat{\alpha}_S(x)) = B_\xi(\alpha_S(x))+E_\xi(B_1+A)+E_\xi\left[\max_{V_{x,h_n}}|\varepsilon_i|\right]O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

como

$$E_\xi(B_1+A) = \frac{[E_\xi(\alpha_S(x))-\alpha(x)]}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}^2(x_i-x)-\left(\frac{1}{N}\sum_1^N K_{h_n}(x_i-x)\right)^2\right]+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

si ε_i tiene momento de orden 4 y $nh_n^2\to\infty$,

$$E_\xi\left[\max_{iN}|\varepsilon_i|\right]O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

entonces el sesgo total es igual a

$$B\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) + \frac{B_\xi\left(\alpha_S(x)\right)}{f_S^2(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_1^N K_{h_n}^2 \left(x_i - x\right) - \left(\frac{1}{N} \sum_1^N K_{h_n}\left(x_i - x\right) \right)^2 \right] + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

en resumen,

$$B\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right] + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

que tiende a 0. Si se impone además que α sea lipschitziana, en las mismas hipótesis de que ε_i tenga momento de orden 4 y $nh_n^2 \to \infty$,

$$B\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) = O(h_n)$$

En caso general, pero con más suavidad, por (4.4)

$$B\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) + E_\xi B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) \left[1 + \frac{1}{nh_n} \frac{N-n}{N-1} \frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v}{f(x)\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v\right]^2}\right] +$$

$$+ E_\xi\left(\alpha_S(x)\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) + E_\xi\left[\max_{V_{x,h_n}} |\varepsilon_i|\right] O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)$$

que da lugar al siguiente desarrollo

Teorema 7 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $\alpha''(\cdot)$ es continua, ε_i tiene momento de orden 4 y $nh_n^3 \to \infty$*

$$B\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = \frac{h_n^2}{2} \alpha_2\left(K\right) \left(\alpha''(x) + 2\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}\right) \left[1 + \frac{1}{nh_n} \frac{N-n}{N-1} \frac{\alpha_0\left(K^2\right)}{f(x)}\right] + o(h_n^2)$$

Demostración.- Como

$$1 + \frac{1}{nh_n} \frac{N-n}{N-1} \frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v}{f(x)\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v\right]^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{nh_n} \frac{N-n}{N-1} \frac{\alpha_0\left(K^2\right)}{f(x)} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) = o(h_n^2)$$

$$E_\xi\left[\max_{V_{x,h_n}} |\varepsilon_i|\right] O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right) = o(h_n^2)$$

$$B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) = \frac{h_n^2}{2}\alpha_2\left(K\right)\left(\alpha''(x) + 2\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}\right) + o\left(h_n^2\right),$$

se obtiene el desarrollo Q.E.D

Este resultado recuerda, salvo el multiplicador relacionado con el contexto de pp.ff., los resultados de Fan(1992), en diseño aleatorio, y Jennen-Steinmetz&Gasser(1988), en diseño fijo. Obsérvese que el segundo sumando del multiplicador es siempre positivo, por tanto para muestras "finitas" puede tener influencia aunque leve.

4.4. Varianza según el plan de muestreo

Resultado 64 *La p−varianza se puede descomponer en* $VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = t_1 - t_2 - t_3$, *donde* $t_1 = E_p\left(\hat{\alpha}_S^2(x)\right) - \alpha_S^2(x)$, $t_2 = 2\alpha_S(x)\left[E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \alpha_S(x)\right]$ *y* $t_3 = \left[E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \alpha_S(x)\right]^2$

Demostración.-

$$t_1 - t_2 - t_3 = E_p\left(\hat{\alpha}_S^2(x)\right) - \alpha_S^2(x) - 2\alpha_S(x)\left[E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \alpha_S(x)\right] - \left[E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \alpha_S(x)\right]^2 =$$

$$= E_p\left(\hat{\alpha_S}^2(x)\right) - \alpha_S^2(x) - 2\left\{\alpha_S(x)\left[E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \alpha_S(x)\right]\right\} -$$

$$-\left[E_p^2\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - 2E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\alpha_S(x) + \alpha_S^2(x)\right] =$$

$$= E_p\left(\hat{\alpha}^2(x)\right) - \alpha_S^2(x) - 2\left(\alpha_S(x)\right)E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) + 2\alpha_S^2(x) -$$

$$-\left[E_p^2\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] + 2E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\left(\alpha_S(x)\right) - \alpha_S^2(x) =$$

$$= E_p\left(\hat{\alpha}^2(x)\right) - 2\alpha_S(x)E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - E_p^2\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) + 2\alpha_S(x)E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) =$$

$$= E_p\left(\hat{\alpha}_S^2(x)\right) - E_p^2\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)$$

Q.E.D.

Observación.- $t_1 = B_p\left(\hat{\alpha}_S^2\right)$ si se considera a $\hat{\alpha}_S^2(x)$ como estimador de $\alpha_S^2(x)$, $t_2 = 2\alpha_S B_p\left(\hat{\alpha}_S\right)$ y $t_3 = B_p^2\left(\hat{\alpha}_S\right)$ si se considera a $\hat{\alpha}_S(x)$ como estimador de $\alpha_S(x)$. Por ello también se podría haber aplicado la igualdad probada en el segundo capítulo en el resultado 18 para demostrar la descomposición anterior.

4.4.1. Sesgo de $\hat{\alpha}_S^2$ según el plan

Se verifica la siguiente igualdad

Resultado 65

$$\hat{\alpha}_S^2(x) = \frac{1}{f_S^6(x)} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x) I_i \right)^2 \left(3f_S^2(x) \left(f_S^2(x) - \hat{f}_S^2(x) \right) + \hat{f}_S^4(x) \right) + \hat{\alpha}_S^2(x) \left(f_S^2(x) - \hat{f}_S^2(x) \right)^3 \right]$$

Demostración.- En el caso de que $\hat{f}_S(x) > 0$,

$$\frac{1}{f_S^6} \left[3f_S^4 \hat{r}_S^2 - 3f_S^2 \hat{f}_S^2 \hat{r}_S^2 + \hat{r}_S^2 \hat{f}_S^4 + \hat{\alpha}_S^2 f_S^6 - 3\hat{\alpha}_S^2 f_S^4 \hat{f}_S^2 + 3\hat{\alpha}_S^2 f_S^2 \hat{f}_S^4 - \hat{\alpha}_S^2 \hat{f}_S^6 \right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^6} \left[3f_S^4 \hat{r}_S^2 - 3f_S^2 \hat{f}_S^2 \hat{r}_S^2 + \hat{r}_S^2 \hat{f}_S^4 + \hat{\alpha}_S^2 f_S^6 - 3\hat{r}_S^2 f_S^4 + 3\hat{r}_S^2 f_S^2 \hat{f}_S^2 - \hat{r}_S^2 \hat{f}_S^4 \right] = \frac{1}{f_S^6} \hat{\alpha}_S^2 f_S^6$$

Cuando $\hat{f}_S(x) = 0$, tambien se verifica porque $\hat{r}_S(x) = 0$ y $\hat{\alpha}_S(x) = 0$, por definición Q.E.D.

Por otra parte también se verifica la siguiente igualdad

Resultado 66

$$3f_S^2(x) \left(f_S^2(x) - \hat{f}_S^2(x) \right) + \hat{f}_S^4(x) =$$

$$= f_S^4(x) - f_S^2(x)(\hat{f}_S(x) - f_S(x))^2 - 2f_S^3(x)(\hat{f}_S(x) - f_S(x)) + \left(f_S^2(x) - \hat{f}_S^2(x) \right)^2$$

Demostración.- Por una parte se tiene que

$$f_S^4(x) - f_S^2(x)(\hat{f}_S(x) - f_S(x))^2 - 2f_S^3(x)(\hat{f}_S(x) - f_S(x)) + \left(f_S^2(x) - \hat{f}_S^2(x) \right)^2,$$

en notación casi taquigráfica, es igual a

$$f_S^4 - f_S^2(\hat{f}_S - f_S)^2 - 2f_S^3(\hat{f}_S - f_S) + (\hat{f}_S{}^2 - f_S^2)^2 =$$

$$= f_S^4 - f_S^2 \hat{f}_S^2 + 2f_S^3 \hat{f}_S - f_S^4 - 2f_S^3 \hat{f}_S + 2f_S^4 + (\hat{f}_S^2 - f_S^2)^2 =$$

$$= 2f_S^4 - f_S^2 \hat{f}_S^2 + (\hat{f}_S^2 - f_S^2)^2 =$$

$$= 2f_S^4 - f_S^2 \hat{f}_S^2 + \hat{f}_S^4 - 2\hat{f}_S^2 f_S^2 + f_S^4 = 3f_S^4(x) - 3f_S^2(x)\hat{f}_S^2(x) + \hat{f}_S^4(x)$$

Y, por otra, que

$$3f_S^2(x)\left(f_S^2(x)-\hat{f}_S^2(x)\right)+\hat{f}_S^4(x)=3f_S^4(x)-3f_S^2(x)\hat{f}_S^2(x)+\hat{f}_S^4(x)$$

Q.E.D.

Se estudiará a continuación t_1, que por los resultados anteriores admite la siguiente descomposición

Lema 17

$$t_1=t_{11}-t_{12}+t_{13}-t_{14}$$

donde

$$t_{11}=\frac{1}{f_S^2(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)I_i\right)^2\right]-\alpha_S^2(x)$$

$$t_{12}=\frac{1}{f_S^4(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)I_i\right)^2(\hat{f}_S(x)-f_S(x))^2\right]+$$

$$+2\frac{1}{f_S^3(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)I_i\right)^2(\hat{f}_S(x)-f_S(x))\right]$$

$$t_{13}=\frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{h_n}(x_i-x)I_i\right)^2\left(f_S^2(x)-\hat{f}_S^2(x)\right)^2\right]$$

y

$$t_{14}=\frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^2(x)\left(f_S^2(x)-\hat{f}_S^2(x)\right)^3\right].$$

A la vista de los términos de la descomposición anterior será necesario generalizar algunos de los resultados obtenidos en la sección del sesgo según el plan. Sea

$$]r_1,\widehat{r_2,\ldots},r_l[\,(\mathfrak{X})=\sum_{i=1}^{N}x_{i1}^{r_1}x_{i2}^{r_2},\ldots,x_{il}^{r_l}I_i^{a)},$$

el estimador HT de

$$]r_1,r_2,\ldots,r_l[\,(\mathfrak{X})=\sum_{i=1}^{N}x_{i1}^{r_1}x_{i2}^{r_2},\ldots,x_{il}^{r_l}$$

en un plan de muestreo probabilístico, se puede construir un estimador de $A_{r_1,r_2,\ldots,r_l}$ mediante

$$\widehat{A}_{r_1,r_2,\ldots,r_l} = \frac{]r_1, \widehat{r_2, \ldots}, r_l[\,(\mathfrak{X})}{]0,0,\ldots,0[\,(\mathfrak{X})}$$

porque el denominador es conocido dado que se ha supuesto que se dispone de un marco perfecto.

Lema 18 *Si $p(\cdot)$ es un plan de muestreo probabilístico autoponderado y de tamaño fijo, entonces*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_i^{a)} = 1$$

Demostración.- Por uno de los primeros ejemplos, la probabilidad de inclusión simple es n/N

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_i^{a)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_i \frac{N}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} I_i = 1$$

Q.E.D.

Resultado 67 *Sea $\mathfrak{X}$ p.f. con $l = 3$. En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\widehat{A}_{1,0,0} - A_{1,0,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,1,0} - A_{0,1,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,0,1} - A_{0,0,1}\right)\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{M_{111}(\mathfrak{X})}{n^2}$$

Demostración.- Como MASS/R es equiprobabilístico se puede emplear $\pi_1, \pi_{12}, \pi_{123}$ para referirse a las probabilidades de inclusión simple, doble y triple, respectivamente. Por el lema, se puede expresar el primer factor de la siguiente forma

$$\widehat{A}_{1,0,0} - A_{1,0,0} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i1} I_i^{a)} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_{1,0,0} I_i^{a)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(x_{i1} - A_{1,0,0}\right) I_i^{a)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1} I_i^{a)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1} I_i$$

del mismo modo se podrían expresar los restantes factores, por tanto

$$E_p\left[\left(\widehat{A}_{1,0,0} - A_{1,0,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,1,0} - A_{0,1,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,0,1} - A_{0,0,1}\right)\right] = E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i2} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i3} I_i\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3} E_p\left[\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3} I_i + \sum_{i\neq j}^{(N^2)} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{j3} I_i I_j + \sum_{i\neq j}^{(N^2)} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{i3} I_i I_j + \sum_{i\neq j}^{(N^2)} \dot{x}_{j1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3} I_i I_j + \sum_{i\neq j\neq k}^{(N^3)} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{j3} I_i I_j I_k\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\pi_1 + \sum_{i\neq j}^{(N^2)}\dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{j3}\pi_{12} + \sum_{i\neq j}^{(N^2)}\dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{i3}\pi_{12} + \sum_{i\neq j}^{(N^2)}\dot{x}_{j1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\pi_{12} + \sum_{i\neq j\neq k}^{(N^3)}\dot{x}_{i1}\dot{x}_{j2}\dot{x}_{k3}\pi_{123}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\pi_1\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3} + \pi_{12}\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} + \pi_{123}\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}}\right] = \frac{1}{n^3}\left(\pi_1 - 3\pi_{12} + 2\pi_{123}\right)]1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}}) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[1 - 3\frac{n-1}{N-1} + 2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\right]\frac{1}{N}\,]1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}}) = \frac{1}{n^2}\frac{N^2-3nN+2n^2}{(N-1)\,(N-2)}M_{1,1,1}(\mathfrak{X})$$

por el ejemplo 18 Q.E.D.

Resultado 68 *Sea $\mathfrak{X}$ p.f. con $l = 4$. En MASS/R(N,n) se verifica que*

$$E_p\left[\left(\widehat{A}_{1,0,0,0} - A_{1,0,0,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,1,0,0} - A_{0,1,0,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,0,1,0} - A_{0,0,1,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,0,0,1} - A_{0,0,0,1}\right)\right] =$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\frac{M_{1111}(\mathfrak{X})}{n^3} +$$

$$+\frac{N-n}{N-1}\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\frac{N}{n^3}\left[M_{1100}(\mathfrak{X})M_{0011}(\mathfrak{X}) + M_{1010}(\mathfrak{X})M_{0101}(\mathfrak{X}) + M_{1001}(\mathfrak{X})M_{0110}(\mathfrak{X})\right]$$

Demostración.- Dado que MASS/R es equiprobabilístico, se puede emplear $\pi_1, \pi_{12}, \pi_{123}, \pi_{1234}$ como probabilidades de inclusión de los diferentes órdenes. Por el lema, se puede expresar el primer factor de la siguiente forma

$$\widehat{A}_{1,0,0,0} - A_{1,0,0,0} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i1}I_i^{a)} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}A_{1,0,0,0}I_i^{a)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{i1} - A_{1,0,0,0}\right)I_i^{a)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i1}I_i^{a)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i1}I_i$$

del mismo modo se podrían expresar los restantes factores, por tanto

$$E_p\left[\left(\widehat{A}_{1,0,0,0} - A_{1,0,0,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,1,0,0} - A_{0,1,0,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,0,1,0} - A_{0,0,1,0}\right)\left(\widehat{A}_{0,0,0,1} - A_{0,0,0,1}\right)\right] =$$

$$= E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i1}I_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i2}I_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i3}I_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i4}I_i\right] =$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\pi_1\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{i4} + \pi_{12}\sum\sum_{\mathrm{U}^{(2}} + \pi_{123}\sum\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}} + \pi_{1234}\sum\overset{4}{\cdots}\sum_{\mathrm{U}^{(4}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^4}\left(\pi_1 - 7\pi_{12} + 12\pi_{123} - 6\pi_{1234}\right)]1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{x}})+$$

$$+\frac{1}{n^4}\left(\pi_{12} - 2\pi_{123} + \pi_{1234}\right)(]1,1,0,0[\,]0,0,1,1[+]1,0,1,0[\,]0,1,0,1[+]1,0,0,1[\,]0,1,1,0[)\,(\dot{\mathfrak{x}}) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1 - 7\frac{n-1}{N-1} + 12\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} - 6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\right)\frac{]1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{x}})}{N}+$$

$$+\frac{1}{n^3}\left(\frac{n-1}{N-1}N - 2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}N + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}N\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{N}\frac{1}{N}(]1,1,0,0[\,]0,0,1,1[+]1,0,1,0[\,]0,1,0,1[+]1,0,0,1[\,]0,1,1,0[)\,(\dot{\mathfrak{x}}) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1 - 7\frac{n-1}{N-1} + 12\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} - 6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\right)M_{1,1,1,1}(\mathfrak{X})+$$

$$+\frac{N}{n^3}\left(\frac{n-1}{N-1} - 2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\right)\left(M_{1,1,0,0}M_{0,0,1,1} + M_{1,0,1,0}M_{0,1,0,1} + M_{1,0,0,1}M_{0,1,1,0}\right)(\mathfrak{X})$$

por los corolarios 11 y 12 y el ejemplo 19. Para el paréntesis del coeficiente de $M_{1,1,1,1}$, salvo n^{-3}

$$1 - 7\frac{n-1}{N-1} + 12\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} - 6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} =$$

$$= 1 - 7\frac{n-1}{N-1} + 6\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\left(2 - \frac{n-3}{N-3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{n-1}{N-1}\left[7 - 6\frac{n-2}{N-2}\left(\frac{2N-n-3}{N-3}\right)\right] =$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}$$

y para el del coeficiente de los productos circulantes, salvo n^{-3}

$$N\left(\frac{n-1}{N-1} - 2\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\right) = \frac{N(n-1)}{N-1}\left[1 - 2\frac{n-2}{N-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{(N-2)(N-3)}\right] =$$

$$= \frac{N(n-1)}{N-1}\left[1 - \frac{n-2}{N-2}\left(2 - \frac{n-3}{N-3}\right)\right] = \frac{N(n-1)}{N-1}\frac{N^2-2nN-N+n+n^2}{(N-2)(N-3)} =$$

$$= \frac{N(N-n)}{N-1}\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}$$

de donde se obtiene la igualdad Q.E.D.

Lema 19 *Si $nh_n^2 \to \infty$, se verifica que*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - f_S(x)\right]^k = O\left(\frac{1}{h_n^{k-1}}\right)$$

Demostración.-

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - f_S(x)\right]^k\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|K_h\left(x_i - x\right) - f_S(x)\right|^k \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2^k \text{máx}\left\{K_h^k\left(x_i - x\right), f_S^k(x)\right\} \leq$$

$$\leq 2^k \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h^k\left(x_i - x\right) + f_S^k(x)\right] = 2^k \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_h^k\left(x_i - x\right) + 2^k f_S^k(x) = O\left(\frac{1}{h_n^{k-1}}\right)$$

Q.E.D.

Lema 20 *Si $nh_n^2 \to \infty$, se verifica que*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i K_h\left(x_i - x\right) - r_S(x)\right]^{2k} = O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^{2k}}{h_n^{2k-1}}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|Y_i K_h\left(x_i - x\right) - r_S(x)\right|^{2k} \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2^{2k} \text{máx}\left\{Y_i^{2k} K_h^{2k}\left(x_i - x\right), r_S^{2k}(x)\right\} \leq$$

$$\leq 2^{2k}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i^{2k} K_h^{2k}\left(x_i - x\right) + r_S^{2k}(x)\right] = 2^{2k}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^{2k} K_h^{2k}\left(x_i - x\right) + 2^{2k} r_S^{2k}(x) = \max_N\left|Y_i\right|^{2k} O\left(\frac{1}{h_n^{2k-1}}\right)$$

Q.E.D.

Resultado 69 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$*

$$\left|\hat{r}_S(x) - r_S(x)\right| = O\left(\max_N\left|Y_i\right|\left(\frac{n}{h_n}\right)^{1/2}\right)$$

Demostración.- Por la generalización de la desigualdad de Gumbel, que se probará de modo más general en el siguiente capítulo, se verifica para el caso particular de $r = 1$, $s = 0$ y $t = 1$ que

$$|\hat{r}_S(x) - r_S(x)| \leq \left(\frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i K_h (x_i - x) - r_S(x) \right]^2 \right)^{1/2} = \underset{N}{\text{máx}} |Y_i| \, O(n^{1/2}) O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}} \right)$$

por el lema anterior Q.E.D.

Observación.- Si se considera la p.f. en que $Y_i = 1$ para todo i, entonces

$$\left| \hat{f}_S(x) - f_S(x) \right| = O\left(\left(\frac{n}{h_n} \right)^{1/2} \right)$$

Si se impone una velocidad de convergencia de la ventana lenta, se obtiene una expresión aproximada del sesgo del cuadrado del estimador NW como estimador del cuadrado del descriptor NW. Posteriormente se verá que se puede relajar esta hipótesis.

Proposición 21 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3 \to \infty$*

$$B_p\left(\hat{\alpha}_S^2(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)} VAR_p\left(\hat{r}_S(x)\right) + 3\frac{\alpha_S^2(x)}{f_S^2(x)} VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right) - 4\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)} COV_p\left(\hat{r}_S(x), \hat{f}_S(x)\right) +$$

$$+ O\left(\frac{\text{máx}_i |Y_i|^2}{n^{3/2} h_n^{5/2}} \right)$$

Demostración.-

t11

$$t_{11} = E_p\left[\frac{\hat{r}_S^2(x)}{f_S^2(x)}\right] - \alpha_S^2(x) = E_p\left[\frac{\hat{r}_S^2(x)}{f_S^2(x)}\right] - \frac{r_S^2(x)}{f_S^2(x)} = \frac{1}{f_S^2(x)} \left\{ E_p\left[\hat{r}_S^2(x)\right] - E_p^2\left[\hat{r}_S(x)\right] \right\} = \frac{VAR_p\left[\hat{r}_S(x)\right]}{f_S^2(x)}$$

t12

$$t_{12} = \frac{1}{f_S^4(x)} E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^2 \right] + 2\frac{1}{f_S^3(x)} E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right) \right] = t_{121} + t_{122}$$

t121

$$t_{121} = \frac{1}{f_S^4(x)} E_p \left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x) + r_S(x) \right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)} E_p \left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x) \right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right] +$$

$$+2 \frac{1}{f_S^4(x)} E_p \left[r_S(x) \left(\hat{r}_S(x) - r_S(x) \right) \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{f_S^4(x)} E_p \left[\left(r_S(x) \right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)} E_p \left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x) \right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right] +$$

$$+2 \frac{r_S(x)}{f_S^4(x)} E_p \left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x) \right) \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{\left(r_S(x) \right)^2}{f_S^4(x)} E_p \left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)} E_p \left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x) \right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right] +$$

$$+2 \frac{\alpha_S(x)}{f_S^3(x)} E_p \left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x) \right) \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{\left(\alpha_S(x) \right)^2}{f_S^2(x)} E_p \left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right] = t_{1211} + t_{1212} + t_{1213}$$

t1211 t_{1211} es de menor orden de magnitud, según el resultado 58 y los resultados para los descriptores, por una parte

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_j K_{hj} \right)^2 \left(K_{hi} - f_S \right)^2 \right| \leq \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_j K_{hj} \right)^4 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(K_{hi} - f_S \right)^4 \right]^{1/2}$$

$$= O\left(\frac{\text{máx}_i \left| Y_i \right|^2}{h_n^{3/2}} \right) O\left(\frac{1}{h_n^{3/2}} \right) = O\left(\frac{\text{máx}_i \left| Y_i \right|^2}{h_n^3} \right)$$

que, a su vez, con $\frac{1}{n^3}$ se convierte en despreciable. Por otra parte

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2+$$

$$+2\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)(K_{hi}-f_S)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2+$$

$$+2\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)(K_{hi}-f_S)\right]^2=$$

$$=O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{h_n}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)+O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{h_n^2}\right)$$

porque

$$\left|\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)\right]\right|\leq\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2\right]^{1/2}=$$

$$=O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|}{h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right)=O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|}{h_n}\right)$$

Entonces

$$t_{1211}=O(1)O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{n^3h_n^3}\right)+O(1)O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{n^2h_n^2}\right)=$$

$$=O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^3}\right)+O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^2}\right)=O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^2}\right)$$

t1212 Por el resultado 54, se verifica que

$$\left|\frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^2\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)\right]\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{f_S^3}\frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi}-f_S)^4\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_jK_{hj}\right)^2\right]^{1/2}=$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{h_n^{3/2}}\right) O\left(\frac{\text{máx}_i\,|Y_i|}{h_n^{1/2}}\right) = O\left(\frac{\text{máx}_i\,|Y_i|}{(nh_n)^2}\right)$$

t1213 Este sumando forma parte del término dominante

$$\frac{(\alpha_S(x))^2}{f_S^2(x)} E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^2\right] = O\left(\frac{\text{máx}_i\,|Y_i|^2}{nh_n}\right)$$

t122

$$t_{122} = 2\frac{1}{f_S^3(x)} E_p\left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x) + r_S(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] =$$

$$= 2\frac{1}{f_S^3(x)} E_p\left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] +$$

$$+2\frac{1}{f_S^3(x)} E_p\left[2r_S(x)\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x)\right)\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] +$$

$$+2\frac{1}{f_S^3(x)} E_p\left[\left(r_S(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] =$$

$$= 2\frac{1}{f_S^3(x)} E_p\left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] +$$

$$+4\frac{r_S(x)}{f_S^3(x)} E_p\left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x)\right)\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] +$$

$$+2\frac{\left(r_S(x)\right)^2}{f_S^3(x)} E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] =$$

$$= 2\frac{1}{f_S^3(x)} E_p\left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] +$$

$$+4\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)} E_p\left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x)\right)\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] + 0 = t_{1221} + t_{1222}$$

t1221 Por un resultado anterior sin demostración explícita, el 55, se verifica que

$$E_p\left[\left(\hat{r}_S(x) - r_S(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right] = E_p\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) I_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)^2\right]$$

y

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)^2 = O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{h_n^2}\right)$$

por consiguiente

$$t_{1221} = \frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{h_n^2}\right) = O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^2}\right)$$

t1222 Forma parte del término dominante

t13

$$t_{13} = \frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)\right)^2\left(f_S^2(x)-\hat{f}_S^2(x)\right)^2\right] = \frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)\right)^2\left(\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2+2f_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)-r_S(x)+r_S(x)\right)^2\left(\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2+2f_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)-r_S(x)+r_S(x)\right)^2\left(\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^4+4\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3+4f_S^2\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right)\right] =$$

$$= t_{1311}+t_{1312}+t_{1313}+t_{1321}+t_{1322}+t_{1323}+t_{1331}+t_{1332}+t_{1333}$$

t1311 Bajo la condición HHM

$$t_{1311} = \frac{1}{f_S^6}E_p\left[\left(\hat{r}_S-r_S\right)^2\left(\hat{f}_S-f_S\right)^4\right] = O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

porque

$$\left|\frac{1}{f_S^6}E_p\left[\left(\hat{r}_S-r_S\right)^2\left(\hat{f}_S-f_S\right)^4\right]\right| \leq \frac{1}{f_S^6}E_p^{1/2}\left[\left(\hat{r}_S-r_S\right)^4\right]E_p^{1/2}\left[\left(\hat{f}_S-f_S\right)^8\right] \leq$$

$$\leq \left[\max_N\left|Y_i\right|^4 O\left(\frac{1}{n^3h_n^3}\right)+\left(\max_N\left|Y_i\right|^2 O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right)^2\right]^{1/2} O\left(\frac{1}{n^{4/2}h_n^{4/2}}\right) = O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

y los resultados de David et al(1966) aseguran que

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S - f_S\right)^8\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^8 O\left(\frac{1}{n^7}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^6 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^2 O\left(\frac{1}{n^6}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^5 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^3 O\left(\frac{1}{n^6}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^4\right)^2 O\left(\frac{1}{n^6}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^4 \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^2\right)^2 O\left(\frac{1}{n^6}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^3\right)^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^2 O\left(\frac{1}{n^6}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[K_h\left(x_i - x\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^2\right)^4 O\left(\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{h_n^7}\right)O\left(\frac{1}{n^7}\right)+O\left(\frac{1}{h_n^5}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(\frac{1}{n^6}\right)+O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)O\left(\frac{1}{n^6}\right)+O\left(\frac{1}{h_n^6}\right)O\left(\frac{1}{n^6}\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(\frac{1}{n^5}\right)+O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\frac{1}{n^4}\right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^4}\right)$$

t1312

$$\left|\frac{4}{f_S^6}E_p\left[\left(\hat{r}_S - r_S\right)^2\left(\hat{f}_S - f_S\right)^3\right]\right| = \left|\frac{4}{f_S^6}E_p\left[\left(\hat{r}_S - r_S\right)^2\left(\hat{f}_S - f_S\right)^2\left(\hat{f}_S - f_S\right)\right]\right| \leq$$

$$\leq \frac{4}{f_S^6}E_p\left[\left(\hat{r}_S - r_S\right)^2\left(\hat{f}_S - f_S\right)^2\left|\hat{f}_S - f_S\right|\right] \leq \frac{4}{f_S^6}O\left(n^{1/2}\right)O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right)E_p\left[\left(\hat{r}_S - r_S\right)^2\left(\hat{f}_S - f_S\right)^2\right] \leq$$

$$\leq O\left(\frac{n^{1/2}}{h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{\left(nh_n\right)^2}\right) = O\left(\frac{\text{máx}_i\left|Y_i\right|^2}{n^{3/2}h_n^{5/2}}\right)$$

por la desigualdad generalizada de Gumbel aplicada a $\left|\hat{f}_S - f_S\right|$, resultando despreciable respecto al principal, bajo la hipótesis $nh_n^3 \to \infty$

t1313

$$\frac{4}{f_S^4}E_p\left[(\hat{r}_S-r_S)^2\left(\hat{f}_S-f_S\right)^2\right]=\frac{4}{f_S^4}O\left(\frac{\text{máx}_i\,|Y_i|^2}{(nh_n)^2}\right)$$

porque la $p-$esperanza ya está tratada en t121

t1321

$$\left|2\frac{r_S}{f_S^6}E_p\left[(\hat{r}_S-r_S)\left(\hat{f}_S-f_S\right)^4\right]\right|=\left|2\frac{\alpha_S}{f_S^5}E_p\left[(\hat{r}_S-r_S)\left(\hat{f}_S-f_S\right)^4\right]\right|\leq$$

$$\leq 2\frac{|\alpha_S|}{f_S^5}E_p\left[|\hat{r}_S-r_S|\left(\hat{f}_S-f_S\right)^4\right]=O\left(\max_i|Y_i|\right)O\left(n^{1/2}\right)O\left(\frac{\text{máx}_i\,|Y_i|}{h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)=$$

$$=O\left(\frac{\text{máx}_i\,|Y_i|^2}{n^{3/2}h_n^{5/2}}\right)$$

por la desigualdad generalizada de Gumbel aplicada a $|\hat{r}_S-r_S|$, resultando despreciable respecto al principal bajo la hipótesis $nh_n^3\to\infty$

t1322 Para estudiar el orden de

$$8\frac{r_S}{f_S^6}E_p\left[(\hat{r}_S-r_S)\left(\hat{f}_S-f_S\right)^3\right]$$

se tratará

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^N Y_iK_h(x_i-x)I_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_iK_h(x_i-x)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^3\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)\right]+$$

$$+3\frac{N}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\right]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)\left(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N Y_jK_{h_n}(x_j-x)\right)\right]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x)\right)^2\right]$$

Para el primer sumando, que es de orden 4

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_jK_{hj}\right)(K_{hi}-f_S)^3$$

el término predominante va a ser

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^4,$$

porque es igual a

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_j K_{hj}\right)\left(K_{hi}^3 - 3K_{hi}^2 f_S + 3K_{hi} f_S^2 - f_S^3\right),$$

que en valor absoluto es menor que

$$\max_i |Y_i| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{hi}^4 = O\left(\frac{\max_i |Y_i|}{h_n^3}\right)$$

Para el segundo es

$$3\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_j K_{hj}\right)(K_{hi} - f_S)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K_{hi} - f_S)^2 +$$

$$= O\left(\frac{\max_N |Y_i|}{h_n}\right) O\left(\frac{1}{h_n}\right) = O\left(\frac{\max_N |Y_i|}{h_n^2}\right)$$

Por tanto

$$t_{1322} = O\left(\frac{\max_i |Y_i|^2}{(nh_n)^2}\right)$$

t1323

$$8\frac{r_S}{f_S^6} E_p\left[(\hat{r}_S - r_S)\left(\hat{f}_S - f_S\right)^2\right] = 8\frac{\alpha_S}{f_S^5} O\left(\frac{\max_i |Y_i|}{(nh_n)^2}\right) = O\left(\frac{\max_i |Y_i|^2}{(nh_n)^2}\right)$$

t1331

$$\frac{1}{f_S^6} E_p\left[r_S^2\left(\hat{f}_S - f_S\right)^4\right] = \frac{r_S^2}{f_S^6} E_p\left[\left(\hat{f}_S - f_S\right)^4\right] = \frac{\alpha_S^2}{f_S^4} E_p\left[\left(\hat{f}_S - f_S\right)^4\right] =$$

$$= O\left(\max_i |Y_i|^2\right) O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right) = O\left(\frac{\max_i |Y_i|^2}{(nh_n)^2}\right)$$

t1332

$$\frac{4}{f_S^6}E_p\left[r_S^2\left(\hat{f}_S-f_S\right)^3\right]=\frac{r_S^2}{f_S^6}E_p\left[\left(\hat{f}_S-f_S\right)^3\right]=\frac{\alpha_S^2}{f_S^4}E_p\left[\left(\hat{f}_S-f_S\right)^3\right]=$$

$$=O\left(\max_i|Y_i|^2\right)O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)=O\left(\frac{\max_i|Y_i|^2}{(nh_n)^2}\right)$$

t1333

$$t_{1333}=\frac{1}{f_S^6}E_p\left[(r_S(x))^2\,4f_S^2\left(\hat{f}_S-f_S\right)^2\right]=$$

$$=4\frac{r_S^2(x)}{f_S^4}E_p\left[\left(\hat{f}_S-f_S\right)^2\right]=4\frac{(\alpha_S(x))^2}{f_S^2}E_p\left[\left(\hat{f}_S-f_S\right)^2\right]$$

formará parte del término dominante

t14

$$t_{14}=\frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^2(x)\left(f_S^2(x)-\hat{f}_S^2(x)\right)^3\right]=$$

$$=\frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^2(x)\left(\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2+2f_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\right)^3\right]=$$

$$=\frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^2(x)\left(\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^6+3\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^4 2f_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^2(x)\left(3\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2 4f_S^2(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2+8f_S^3(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^2(x)\left(\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^6+6f_S(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^5\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{f_S^6(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^2(x)\left(12f_S^2(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^4+8f_S^3(x)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\right)\right]=$$

$$=t_{141}+t_{142}+t_{143}+t_{144}$$

t141 Según David et al(1966)

$$|t_{141}|\leq\frac{\max_i|Y_i|^2}{f_S^6}E_p\left[\left(\hat{f}_S-f_S\right)^6\right]=\max_i|Y_i|^2\,O\left(\frac{1}{(nh_n)^3}\right)$$

t142

$$|t_{142}| \leq \frac{\text{máx}_i |Y_i|^2}{f_S^5} E_p \left[\left| \hat{f} - f \right| \left(\hat{f} - f \right)^4 \right] = \max_i |Y_i|^2 \, O\left(\left(\frac{n}{h_n} \right)^{1/2} \right) E_p \left[\left(\hat{f} - f \right)^4 \right] =$$

$$= \max_i |Y_i|^2 \, O\left(\frac{1}{n^{3/2} h_n^{5/2}} \right)$$

t143

$$|t_{143}| \leq \max_i |Y_i|^2 \, O\left(\frac{1}{(nh_n)^2} \right)$$

t144

$$|t_{144}| \leq \max_i |Y_i|^2 \, O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}} \right)$$

Por consiguiente, los términos dominantes de $t_1 = t_{11} - t_{12} + t_{13} - t_{14}$ son

$$t_1 = t_{11} - t_{12} + t_{13} - t_{14} = \frac{1}{f_S^2} VAR_p(\hat{r}_S) - \frac{\alpha_S^2}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{f}_S\right) - 4\frac{\alpha_S}{f_S^2} COV\left(\hat{r}_S, \hat{f}_S\right) + 4\frac{\alpha_S^2}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{f}_S\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2} VAR_p(\hat{r}_S) - \frac{\alpha_S^2}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{f}_S\right) - 4\frac{\alpha_S}{f_S^2} COV\left(\hat{r}_S, \hat{f}_S\right) + 4\frac{\alpha_S^2}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{f}_S\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} VAR_p(\hat{r}_S(x)) + 3\frac{\alpha_S^2(x)}{f_S^2(x)} VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right) - 4\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)} COV\left(\hat{r}_S(x), \hat{f}_S(x)\right)$$

Q.E.D.

Observación.- Se mostrará a continuación que de la demostración se obtiene también el sesgo de $(\hat{r}_S/f_S)^2$ como estimador de $(r_S/f_S)^2$. El estimador dentro del cuadrado, que es insesgado, puede tener sentido práctico si se dispone de la $\mathcal{X}$ completa en el marco.

Resultado 70

$$VAR_p[\hat{r}_S(x)] = O\left(\frac{\text{máx}_i |Y_i|^2}{nh_n} \right)$$

Demostración.- Se verifica que

$$VAR_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i\right]\leq\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i^2K_h^2(x_i-x)\leq\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\max_{i=1,\ldots,N}Y_i^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)=$$

$$=O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(1\right)O\left(\max_{i=1,\ldots,N}Y_i^2\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)=O\left(\frac{\max_{i=1,\ldots,N}Y_i^2}{nh_n}\right)$$

Q.E.D.

Si $\max_N Y_i^2=O\left(h_n^{-1}\right)$ con la hipótesis $nh_n^2\to\infty$ o $\max_N Y_i^2=O\left(h_n^{-2}\right)$ con la hipótesis $nh_n^3\to\infty$, se tendría que la $p-$varianza del numerador tendería a cero. Por tanto, $\left(\hat{r}_S/f_S\right)^2$ sería asintóticamente $p-$insesgado.

Corolario 59 *El sesgo de* $\left(\hat{r}_S/f_S\right)^2$ *como estimador de* $\left(r_S/f_S\right)^2$ *es*

$$B_p\left[\left(\frac{\hat{r}_S(x)}{f_S(x)}\right)^2\right]=O\left(\frac{\max_i|Y_i|^2}{nh_n}\right)$$

Demostración.-

$$B_p\left[\left(\frac{\hat{r}_S(x)}{f_S(x)}\right)^2\right]=\frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left[\hat{r}_S(x)\right]=O\left(\frac{\max_i|Y_i|^2}{nh_n}\right)$$

Q.E.D.

El error cuadrático medio según el plan de muestreo de este estimador se obtiene del corolario 16 con $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_2=\hat{r}_S$.

4.4.2. Estudio de $2\alpha_S B_p\left(\hat{\alpha}_S\right)$

Proposición 22 *Si* $nh_n^2\to\infty$

$$2\alpha_S(x)B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)=2\frac{\alpha_S^2(x)}{f_S^2(x)}VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right)-2\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)}COV_p\left(\hat{r}_S(x),\hat{f}_S(x)\right)+O\left(\frac{\max|Y_i|^2}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)$$

Demostración.-

$$t_2=2\alpha_S(x)\left[E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)-\alpha_S(x)\right]=$$

$$=2\alpha_S(x)\left[\frac{-1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i-x)+O\left(\max|Y_i|\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)\right]=$$

$$= -2\alpha_S(x)\left[\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\alpha_S(x)K_{hi}\right)K_{hi}\right]+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)=$$

$$= -2\alpha_S\left[\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-r_S+\alpha_Sf_S-\alpha_SK_{hi}\right)K_{hi}\right]+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)=$$

$$= -2\alpha_S\left[\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-r_S-\alpha_S\left(K_{hi}-f_S\right)\right)K_{hi}\right]+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)=$$

$$= -2\alpha_S\left[\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-r_S\right)K_{hi}\right]+$$

$$+2\alpha_S\left[\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_S\left(K_{hi}-f_S\right)\right)K_{hi}\right]+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)=$$

$$= -2\frac{1}{f_S^2}\alpha_S\left[\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-r_S\right)K_{hi}\right]+$$

$$+2\frac{1}{f_S^2}\alpha_S^2\left[\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-f_S\right)K_{hi}\right]+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)=$$

$$= -2\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)}E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)-r_S(x)\right)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\right]+$$

$$+2\frac{\alpha_S^2(x)}{f_S^2(x)}E_p\left[\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right]+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)=$$

$$= 2\frac{\alpha_S^2(x)}{f_S^2(x)}VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right)-2\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)}COV_p\left(\hat{r}_S(x),\hat{f}_S(x)\right)+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)$$

Q.E.D.

Con lo cual t_2 da lugar a términos dominantes pero hay que tener en cuenta su signo negativo.

4.4.3. Cuadrado del sesgo del estimador S según el plan

Este término t_3 resultará de menor orden de magnitud como cabría esperar.

Proposición 23 *Si* $nh_n^2 \to \infty$

$$B_p^2\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = \frac{1}{f_S^4(x)}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)^2 \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i - x)\right)^2 + O\left(\max|Y_i|^2 \frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right)$$

Demostración.-

$$t_3 = \left[E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \alpha_S(x)\right]^2 = \left[\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i - x) + O\left(\max|Y_i|\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)^2 \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i - x)\right)^2 + O\left(\max|Y_i|^2 \frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right) +$$

$$+ O\left(\max|Y_i|^2 \frac{1}{(nh_n)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)^2 \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i - x)\right)^2 + O\left(\max|Y_i|^2 \frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right)$$

porque

$$\left|\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i - x)\right| \leq \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|Y_i - \alpha_S(x)\right|K_h^2(x_i - x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}2\max_i|Y_i|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i - x) = O\left(\frac{\max_i|Y_i|}{nh_n}\right)$$

Q.E.D.

4.4.4. Conclusión de la varianza según el plan

Primera expresión de la $p-$varianza

Corolario 60 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si* $nh_n^3 \to \infty$

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)} VAR_p\left(\hat{r}_S(x)\right) + \frac{\alpha_S^2(x)}{f_S^2(x)} VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right) - 2\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)} COV\left(\hat{r}_S(x), \hat{f}_S(x)\right) +$$

$$+O\left(\frac{\max |Y_i|^2}{n^{3/2} h_n^{5/2}}\right)$$

Demostración.- Para resumir, los términos dominantes están en

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{r}_S\right) + 3\frac{\alpha_S^2}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{f}_S\right) - 4\frac{\alpha_S}{f_S^2} COV\left(\hat{r}_S, \hat{f}_S\right) - 2\frac{\alpha_S^2}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{f}_S\right) + 2\frac{\alpha_S}{f_S^2} COV_p\left(\hat{r}_S, \hat{f}_S\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{r}_S\right) + \frac{\alpha_S^2}{f_S^2} VAR_p\left(\hat{f}_S\right) - 2\frac{\alpha_S}{f_S^2} COV\left(\hat{r}_S, \hat{f}_S\right)$$

y, por consiguiente, si $nh_n^3 \to \infty$

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)} VAR_p\left(\hat{r}_S(x)\right) + \frac{\alpha_S^2(x)}{f_S^2(x)} VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right) - 2\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)} COV\left(\hat{r}_S(x), \hat{f}_S(x)\right) +$$

$$+O\left(\max |Y_i|^2 \frac{1}{n^{3/2} h_n^{5/2}}\right)$$

Q.E.D.

Este desarrollo adolece de un término residual poco refinado debido al tratamiento de t_{1312}, t_{1321} y t_{142}, los cuales se podrían denominar términos de orden 5. Un resultado general permitirá refinarlo, para ello se introduce la siguiente notación abreviada

$$\delta_{i_j} \in \{0, 1\} \qquad \nabla = \left\{ (\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_5}) : \sum_{j=1}^{5} \delta_{i_j} = 3 \right\}$$

que permitirá tratar de un modo más sintético la siguiente proposición

Proposición 24 *Sea* $\mathfrak{X}$ *p.f. con* $l = 5$. *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\widehat{A}_{10000} - A_{10000}\right)\left(\widehat{A}_{01000} - A_{01000}\right)\left(\widehat{A}_{00100} - A_{00100}\right)\left(\widehat{A}_{00010} - A_{00010}\right)\left(\widehat{A}_{00001} - A_{00001}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\left(1 - \frac{(n-1)^{(4}}{(N-1)^{(4}}\right) - 15\frac{n-1}{N-1}\left(1 - \frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right) + 50\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\left(1 - \frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right) - 60\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{N-n}{N-4}\right] M_{11111}(\mathfrak{X}) +$$

$$+ \frac{N}{n^4}\frac{n-1}{N-1}\left[\left(1 - \frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right) - 4\frac{n-2}{N-2}\left(1 - \frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right) + 5\frac{(n-2)(n-3)}{(N-2)(N-3)}\frac{N-n}{N-4}\right]\left(\sum_{\nabla} M_{\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_5}}(\mathfrak{X}) M_{1-\delta_{i_1}, 1-\delta_{i_2}, \ldots, 1-\delta_{i_5}}(\mathfrak{X})\right)$$

Demostración.- Dado que MASS/R es equiprobabilístico, se puede emplear $\pi_1, \pi_{12}, \pi_{123}, \pi_{1234}$ y π_{12345} como probabilidades de inclusión de los diferentes órdenes y, por el lema, se puede expresar el primer factor

$$\widehat{A}_{1,0,0,0,0} - A_{1,0,0,0,0} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i1} I_i^{a)} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_{1,0,0,0,0} I_i^{a)} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(x_{i1} - A_{1,0,0,0,0}\right) I_i^{a)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1} I_i^{a)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1} I_i$$

del mismo modo se podrían expresar los restantes factores, por tanto

$$E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i2} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i3} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i4} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i5} I_i\right] =$$

$$= \frac{1}{n^5}\left[\pi_1 \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{i4}\dot{x}_{i5} + \pi_{12}\sum_{\mathrm{U}^{(2}}\sum + \pi_{123}\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}}\sum + \pi_{1234}\sum\cdots\sum_{\mathrm{U}^{(4} } + \pi_{12345}\sum\cdots\sum_{\mathrm{U}^{(5}}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^5}\left[\left(\pi_1 - \pi_{12345}\right)\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1}\dot{x}_{i2}\dot{x}_{i3}\dot{x}_{i4}\dot{x}_{i5}\right] +$$

$$+\frac{1}{n^5}\left[\left(\pi_{12} - \pi_{12345}\right)\sum_{\mathrm{U}^{(2}}\sum + \left(\pi_{123} - \pi_{12345}\right)\sum\sum_{\mathrm{U}^{(3}}\sum + \left(\pi_{1234} - \pi_{12345}\right)\sum\cdots\sum_{\mathrm{U}^{(4}}\right]$$

Se puede denotar

$$]1,1,1,0,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,0,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})+]1,1,0,1,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,1,0,1[(\dot{\mathfrak{X}})+\overset{10}{\cdots}+]0,0,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})]1,1,0,0,0[(\dot{\mathfrak{X}})$$

como

$$\left(\sum_{\nabla}]\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_5}[\,]1-\delta_{i_1}, 1-\delta_{i_2}, \ldots, 1-\delta_{i_5}[\right)(\dot{\mathfrak{X}})$$

con lo cual

$$E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i1} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i2} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i3} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i4} I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_{i5} I_i\right] =$$

$$= \frac{\pi_1 - \pi_{12345}}{n^5}\,]1,1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+\frac{\pi_{12} - \pi_{12345}}{n^5}\left[-15\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}}) + \left(\sum_{\nabla}]\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_5}[\,]1-\delta_{i_1}, 1-\delta_{i_2}, \ldots, 1-\delta_{i_5}[\right)(\dot{\mathfrak{X}})\right] +$$

$$+\frac{\pi_{123}-\pi_{12345}}{n^5}\left[50\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})-4\left(\sum_{\nabla}]\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}[\,]1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}[\right)(\dot{\mathfrak{X}})\right]+$$

$$+\frac{\pi_{1234}-\pi_{12345}}{n^5}\left[-60\,]1,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})+5\left(\sum_{\nabla}]\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}[\,]1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}[\right)(\dot{\mathfrak{X}})\right]$$

por los resultados relativos a descriptores del segundo capítulo. Y será igual a

$$\frac{1}{n^5}\left[(\pi_1-\pi_{12345})-15\,(\pi_{12}-\pi_{12345})+50\,(\pi_{123}-\pi_{12345})-60\,(\pi_{1234}-\pi_{12345})\right]]1,1,1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+\frac{1}{n^5}\left[(\pi_{12}-\pi_{12345})-4\,(\pi_{123}-\pi_{12345})+5\,(\pi_{1234}-\pi_{12345})\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{\nabla}]\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}[\,]1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}[\right)(\dot{\mathfrak{X}})$$

pero

$$\pi_1-\pi_{12345}=\frac{n}{N}-\frac{n^{(5}}{N^{(5}}=\frac{n}{N}\left(1-\frac{(n-1)^{(4}}{(N-1)^{(4}}\right)$$

$$\pi_{12}-\pi_{12345}=\frac{n^{(2}}{N^{(2}}-\frac{n^{(5}}{N^{(5}}=\frac{n^{(2}}{N^{(2}}\left(1-\frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right)$$

$$\pi_{123}-\pi_{12345}=\frac{n^{(3}}{N^{(3}}-\frac{n^{(5}}{N^{(5}}=\frac{n^{(3}}{N^{(3}}\left(1-\frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right)$$

$$\pi_{1234}-\pi_{12345}=\frac{n^{(4}}{N^{(4}}-\frac{n^{(5}}{N^{(5}}=\frac{n^{(4}}{N^{(4}}\left(1-\frac{n-4}{N-4}\right)=\frac{n^{(4}}{N^{(4}}\frac{N-n}{N-4}$$

Por consiguiente

$$E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i1}I_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i2}I_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i3}I_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i4}I_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i5}I_i\right]=$$

$$=\frac{1}{n^5}\frac{n}{N}\left[\left(1-\frac{(n-1)^{(4}}{(N-1)^{(4}}\right)-15\frac{n-1}{N-1}\left(1-\frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right)\right]]1,1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+\frac{1}{n^5}\frac{n}{N}\left[50\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\left(1-\frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right)-60\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{N-n}{N-4}\right]]1,1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+\frac{1}{n^5}\frac{n}{N}\left[\frac{n-1}{N-1}\left(1-\frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right)-4\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\left(1-\frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right)+5\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{N-n}{N-4}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{\nabla}]\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}[\,]1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}[\right)(\dot{\mathfrak{X}})=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[\left(1-\frac{(n-1)^{(4}}{(N-1)^{(4}}\right)-15\frac{n-1}{N-1}\left(1-\frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right)\right]\frac{1}{N}\,]1,1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+\frac{1}{n^4}\left[50\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\left(1-\frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right)-60\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{N-n}{N-4}\right]\frac{1}{N}\,]1,1,1,1,1[\,(\dot{\mathfrak{X}})+$$

$$+\frac{1}{n^4}\frac{N(n-1)}{N-1}\left[\left(1-\frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right)-4\frac{n-2}{N-2}\left(1-\frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right)+5\frac{(n-2)(n-3)}{(N-2)(N-3)}\frac{N-n}{N-4}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{\nabla}\frac{1}{N}\,]\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}[\,\frac{1}{N}\,]1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}[\right)(\dot{\mathfrak{X}})=$$

$$=\frac{1}{n^4}\left[\left(1-\frac{(n-1)^{(4}}{(N-1)^{(4}}\right)-15\frac{n-1}{N-1}\left(1-\frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right)\right]M_{11111}(\mathfrak{X})+$$

$$+\frac{1}{n^4}\left[50\frac{(n-1)(n-2)}{(N-1)(N-2)}\left(1-\frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right)-60\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{N-n}{N-4}\right]M_{11111}(\mathfrak{X})+$$

$$+\frac{N}{n^4}\frac{n-1}{N-1}\left[\left(1-\frac{(n-2)^{(3}}{(N-2)^{(3}}\right)-4\frac{n-2}{N-2}\left(1-\frac{(n-3)^{(2}}{(N-3)^{(2}}\right)+5\frac{(n-2)(n-3)}{(N-2)(N-3)}\frac{N-n}{N-4}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{\nabla}M_{\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}}(\mathfrak{X})M_{1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}}(\mathfrak{X})\right)$$

Q.E.D.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Observación.- El segundo término predominará ya que es de orden n^{-3} bajo la condición HHM, mientras que el primero es de orden n^{-4}. Se podría extender esta demostración al caso de seis variables aunque sería mucho más tediosa dado que aparecerían sumas de productos de tres términos además de las sumas de productos de dos términos que ya han aparecido para cuatro y cinco variables. Esta situación provocaría que al final del desarrollo se tendrían tres sumandos. El primero de orden n^{-5}, un segundo correspondiente a sumas de productos dobles de orden n^{-4} y un tercero con sumas de productos triples de orden n^{-3}. Este último predominaría y de ahí que el orden en n de la esperanza análoga para seis variables sería -3, igual que la de cinco variables. Situación que recuerda la de tres y cuatro variables donde ambas son de orden n^{-2}.

Corolario 61 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^5\right]=\frac{N}{n^5}\left[\pi_1-15\pi_{12}+50\pi_{123}-60\pi_{1234}+24\pi_{12345}\right]M_5+$$

$$+\frac{N^2}{n^5}\left[10\pi_{12}-40\pi_{123}+50\pi_{1234}-20\pi_{12345}\right]M_3M_2$$

Demostración.- De la demostración de la proposición anterior, particularizándola a este caso, se obtiene que

$$E_p\left[\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^5\right]=$$

$$=\frac{N}{n^5}\left[(\pi_1-\pi_{12345})-15\,(\pi_{12}-\pi_{12345})+50\,(\pi_{123}-\pi_{12345})-60\,(\pi_{1234}-\pi_{12345})\right]M_5+$$

$$+\frac{N^2}{n^5}\left[(\pi_{12}-\pi_{12345})-4\,(\pi_{123}-\pi_{12345})+5\,(\pi_{1234}-\pi_{12345})\right]\sum_{\nabla}M_3M_2=$$

$$=\frac{N}{n^5}\left[\pi_1-15\pi_{12}+50\pi_{123}-60\pi_{1234}+24\pi_{12345}\right]M_5+$$

$$+\frac{N^2}{n^5}\left[10\pi_{12}-40\pi_{123}+50\pi_{1234}-20\pi_{12345}\right]M_3M_2$$

Q.E.D.

Observación.- Este resultado coincide con el incluido en la tabla de David et al(1966).

Ya se está en condiciones de tratar con más precisión los términos de la subsección anterior que faltaban por refinar. Para t_{142}, considérese el siguiente ejemplo

Ejemplo 28

$$t_{142} = \frac{6}{f_S^5(x)} E_p \left[\hat{\alpha}_S^2(x) \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^5 \right] = O\left(\frac{1}{(nh_n)^3} \right)$$

$$t_{142} = \frac{6}{f_S^5(x)} E_p \left[\hat{\alpha}_S^2(x) \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^5 \right] = \frac{6}{f_S^5(x)} E_p \left[\hat{\alpha}^2(x) \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^3 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^2 \right]$$

por tanto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|t_{142}| \leq \max_N |Y_i|^2 \frac{6}{f_S^5(x)} E_p^{1/2} \left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^6 \right] E_p^{1/2} \left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^4 \right] =$$

$$= \max_N |Y_i|^2 O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}} \right) O\left(\frac{1}{nh_n} \right) = O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{(nh_n)^{5/2}} \right)$$

por la observación a la proposición o bien aplicando los resultados de David et al(1966).

□

Para el tratamiento más ajustado de t_{1312}, hay que considerar otra consecuencia de la proposición

Corolario 62 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, se verifica que*

$$E_p \left[(\hat{r}_S(x) - r_S(x))^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^3 \right] = O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{(nh_n)^3} \right)$$

Demostración.- Para tratar

$$E_p \left[(\hat{r}_S(x) - r_S(x))^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right)^3 \right]$$

considérese la p.f.

$$(\mathcal{I}, \mathfrak{X}) = \{ (i, Y_i K_h(x_i - x), Y_i K_h(x_i - x), K_h(x_i - x), K_h(x_i - x), K_h(x_i - x)) : \ i = 1, \ldots, N \}.$$

En este caso, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el lema 20

$$M_{11111}(\mathfrak{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))^2 (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^3 =$$

$$= O\left(\max_N |Y_i|^2 \frac{1}{h_n^{3/2}} \right) O\left(\frac{1}{h_n^{5/2}} \right) = O\left(\max_N |Y_i|^2 \frac{1}{h_n^4} \right)$$

y

$$]1,1,1,0,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,0,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})+]1,1,0,1,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,1,0,1[(\dot{\mathfrak{X}})+\overset{10}{\cdots}+]0,0,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})]1,1,0,0,0[(\dot{\mathfrak{X}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))^2 (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) \sum_{i=1}^{N} (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))^2 (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) \sum_{i=1}^{N} (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))^2 (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) \sum_{i=1}^{N} (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^3 =$$

$$= 3 \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))^2 (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) \sum_{i=1}^{N} (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 +$$

$$+ 6 \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^3$$

por tanto

$$\sum_{\nabla} M_{\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_5}} M_{1-\delta_{i_1}, 1-\delta_{i_2}, \ldots, 1-\delta_{i_5}} = O\left(\max_N |Y_i|^2 \frac{1}{h_n^{3/2}} \right) O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}} \right) O\left(\frac{1}{h_n} \right) +$$

$$+O\left(\max_N |Y_i| \frac{1}{h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{1}{h_n^{3/2}}\right) O\left(\max_N |Y_i| \frac{1}{h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right) +$$

$$+O\left(\max_N |Y_i|^2 \frac{1}{h_n}\right) O\left(\frac{1}{h_n^2}\right) = O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{h_n^3}\right)$$

Por consiguiente, en esta situación

$$\frac{1}{n^4} O(1) M_{11111} + \frac{N}{n^4} O(1) \sum_{\nabla} M_{\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}} M_{1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^4}\right) O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{h_n^4}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{h_n^3}\right) = O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

Q.E.D.

Para el tratamiento más ajustado de t_{1321}, hay que considerar otra consecuencia de la proposición

Corolario 63

$$E_p\left[(\hat{r}_S(x) - r_S(x))\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^4\right] = O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

Demostración.- Para tratar

$$E_p\left[(\hat{r}_S(x) - r_S(x))\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^4\right]$$

considérese la p.f.

$$(\mathcal{I}, \mathfrak{X}) = \{(i, Y_i K_h(x_i - x), K_h(x_i - x), K_h(x_i - x), K_h(x_i - x), K_h(x_i - x)) : \ i = 1, \ldots, N\}.$$

En este caso, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el lema 20

$$M_{11111}(\mathfrak{X}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^4 =$$

$$= O\left(\max_N |Y_i| \frac{1}{h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{1}{h_n^{7/2}}\right) = O\left(\max_N |Y_i| \frac{1}{h_n^4}\right)$$

y

$$]1,1,1,0,0,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,0,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})+]1,1,0,1,1,0[(\dot{\mathfrak{X}})]0,0,1,0,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})+\overset{10}{\cdots}+]0,0,1,1,1,1[(\dot{\mathfrak{X}})]1,1,0,0,0,0[(\dot{\mathfrak{X}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (Y_i K_{h_n}(x_i - x) - r_S(x))(K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 \sum_{i=1}^{N} (K_{h_n}(x_i - x) - f_S(x))^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))\,(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^3=$$

$$=9\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(Y_iK_{h_n}(x_i-x)-r_S(x))\,(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))\sum_{i=1}^{N}(K_{h_n}(x_i-x)-f_S(x))^3$$

por tanto

$$\sum_{\nabla}M_{\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}}M_{1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}}=O\left(\max_N|Y_i|\,\frac{1}{h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{h_n^{3/2}}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)+$$

$$+O\left(\max_N|Y_i|\,\frac{1}{h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)=O\left(\frac{\max_N|Y_i|^2}{h_n^3}\right)$$

Por consiguiente, en esta situación

$$\frac{1}{n^4}O(1)M_{11111}+\frac{N}{n^4}O(1)\sum_{\nabla}M_{\delta_{i_1},\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_5}}M_{1-\delta_{i_1},1-\delta_{i_2},\ldots,1-\delta_{i_5}}=$$

$$=O\left(\frac{1}{n^4}\right)O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^2}{h_n^4}\right)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^2}{h_n^3}\right)=O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

Q.E.D.

Ejemplo 29

$$t_{1312}=\frac{4}{f_S^6(x)}E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)-r_S(x)\right)^2\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^3\right]=O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

$$t_{1321}=\frac{4}{f_S^6(x)}E_p\left[\left(\hat{r}_S(x)-r_S(x)\right)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^4\right]=O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

□

Con este ejemplo ya se pueden determinar los órdenes de t_{1312} y t_{1321} con más precisión. En relación con los términos dominantes se verifica la siguiente igualdad

Proposición 25

$$\frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i-\alpha_S(x)\hat{f}_S(x)\right]=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\left[VAR_p\left(\hat{r}_S(x)\right)+\alpha_S^2(x)VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right)-2\alpha_S(x)COV_p\left(\hat{r}_S(x),\hat{f}_S(x)\right)\right]$$

Demostración.-

$$\frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i-\alpha_S(x)\hat{f}_S(x)\right]=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i-\left(\alpha_S(x)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}K_h(x_i-x)I_i\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_h(x_i-x)-\alpha_S(x)K_h(x_i-x)\right)I_i\right]$$

Aplicando el conocido resultado 9 del segundo capítulo, la expresión anterior será igual, abreviando, a

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_iK_{hi}-\alpha_SK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\alpha_SK_{hi}\right)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}-\left(\alpha_SK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_SK_{hi}\right)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_SK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_SK_{hi}\right)^2-$$

$$-2\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(\alpha_SK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_SK_{hi}\right)=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\alpha_S^2\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}\right)^2-$$

$$-\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\alpha_S\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}\right)$$

Se tiene por otra parte que

$$\frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left(\hat{r}_S(x)\right)=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)^2,$$

$$\frac{\alpha_S^2(x)}{f_S^2(x)}VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right)=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\alpha_S^2\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}\right)^2$$

y

$$2\frac{\alpha_S(x)}{f_S^2(x)}COV\left(\hat{r}_S(x),\hat{f}_S(x)\right)=\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\alpha_S\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}\right)\left(K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}\right)$$

Q.E.D.

Con esta última igualdad se ha probado que el término dominante de la varianza del estimador NW es siempre no negativo –como sería deseable para una expresión aproximada de una varianza– por ser, a su vez, la varianza de una variable aleatoria.

Expresión alternativa de la $p-$varianza De todo lo anterior se obtiene la siguiente expresión para la $p-$varianza

Corolario 64 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$*

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)^2 K_h^2(x_i-x)\right] + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|^2}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

Demostración.- Con relación al término dominante de la $VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)$, del corolario 60, de la proposición anterior y de su demostración, se obtiene que

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\left[VAR_p\left(\hat{r}_S(x)\right) + \alpha_S^2(x)VAR_p\left(\hat{f}_S(x)\right) - 2\alpha_S(x)COV_p\left(\hat{r}_S(x),\hat{f}_S(x)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i - \alpha_S(x)\hat{f}_S(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_h(x_i-x)I_i - \left(\alpha_S(x)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}K_h(x_i-x)I_i\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}VAR_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_h(x_i-x) - \alpha_S(x)K_h(x_i-x)\right)I_i\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_iK_h(x_i-x) - \alpha_S(x)K_h(x_i-x)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)^2K_h^2(x_i-x)\right]$$

por (4.1). Con relación al resto, los términos t_{1312}, t_{1321} y t_{142} verifican que

$$t_{142} = O\left(\frac{\text{máx}_N\,|Y_i|^2}{(nh_n)^{5/2}}\right)$$

por el ejemplo 28 y

$$t_{1312} = O\left(\frac{\text{máx}_N |Y_i|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

$$t_{1321} = O\left(\frac{\text{máx}_N |Y_i|^2}{(nh_n)^3}\right)$$

por el ejemplo 29, por tanto de menor orden de magnitud que

$$O\left(\frac{\text{máx}_N |Y_i|^2}{(nh_n)^{3/2}}\right),$$

heredado de t_{144} o del resto de la proposición 22, y su tratamiento únicamente precisa $nh_n^2 \to \infty$ como el resto de las componentes de t_1 Q.E.D.

4.5. Varianza promedio

4.5.1. Núcleo con soporte compacto

Teorema 8 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Sea ε_i tal que $E_\xi \varepsilon_i^8 < \infty$. Sean $\alpha(\cdot)$ continua y $\sigma(\cdot)$ acotada. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$*

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] = E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)^2 K_h^2(x_i-x)\right]\right\} + E_\xi\left[\text{máx}\,|Y_i|^2\right] O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

La esperanza del término principal de la $p-$varianza

$$E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)^2 K_h^2(x_i-x)\right]\right\} = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)^2 K_h^2(x_i-x)\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i^2 - 2\alpha_S(x)Y_i + \alpha_S^2(x)\right)K_h^2(x_i-x)\right] =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(E_\xi\left[Y_i^2\right] - 2E_\xi\left[\alpha_S(x)Y_i\right] + E_\xi\left[\alpha_S^2(x)\right]\right)K_h^2(x_i-x) =$$

$$= I + II + III$$

Término I

$$I = \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_\xi \left[Y_i^2 \right] K_h^2(x_i - x) = \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma^2(x_i) + \alpha^2(x_i) \right) K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^2(x_i - x) + \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha^2(x_i) K_h^2(x_i - x)$$

Como el núcleo es de soporte compacto, el segundo sumando es igual a

$$\frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha^2(x_i) K_h^2(x_i - x) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x)}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha^2(x_i) K_h^2(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x)}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \alpha^2(\zeta) = \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x) h_n} \left(1 + O(h_n)\right) \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\alpha^2(x) + o(1) \right)$$

$$= \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x) h_n} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\alpha^2(x) + o(1) \right) = \frac{\alpha^2(x)}{f(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{\alpha_0(K^2)}{n h_n} + o\left(\frac{1}{n h_n} \right)$$

porque

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi} \right)^2} = \frac{f(x) \frac{1}{h_n} \alpha_0(K^2) \left[1 + O(h_n) \right]}{\left(f(x) \alpha_0(K) + O(h_n) \right)^2} = \frac{\alpha_0(K^2) \left[1 + O(h_n) \right]}{f(x) h_n \left(1 + O(h_n) \right)^2} = \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x) h_n} \left(1 + O(h_n) \right)$$

Término II

$$II = -\frac{2}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_\xi \left[\alpha_S(x) Y_i \right] K_h^2(x_i - x) =$$

$$= -\frac{2}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_\xi \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{Y_k K_h(x_k - x)}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k - x)} Y_i \right] K_h^2(x_i - x) =$$

$$= -\frac{2}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k - x)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} E_\xi \left[Y_k K_h(x_k - x) Y_i \right] K_h^2(x_i - x) =$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$= -\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k-x)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_\xi\left[Y_k Y_i\right] K_h(x_k-x)K_h^2(x_i-x) =$$

$$= -\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k-x)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha^2(x_i)+\sigma^2(x_i)\right) K_h^3(x_i-x) -$$

$$-\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k-x)}\frac{1}{N}\sum_{k\neq i}^{(N^{(2)})}\alpha(x_k)\alpha(x_i)K_h(x_k-x)K_h^2(x_i-x) =$$

$$= -\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k-x)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha^2(x_i)+\sigma^2(x_i)\right) K_h^3(x_i-x) -$$

$$-\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k-x)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_k)\alpha(x_i)K_h(x_k-x)K_h^2(x_i-x)+$$

$$+\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k-x)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha^2(x_i)K_h^3(x_i-x) =$$

$$= -\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k-x)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^3(x_i-x) -$$

$$-\frac{2}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sum_{k=1}^{N} K_h(x_k-x)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_i)K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_k)K_h(x_k-x) =$$

$$= -\frac{2}{f_S^3(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^3(x_i-x) -$$

$$-\frac{2}{f_S^3(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_i)K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_k)K_h(x_k-x) =$$

Para estudiar el orden de

$$-\frac{2}{f_S^3(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^3(x_i-x),$$

téngase en cuenta que

$$\left|\frac{2}{f_S^3(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^3(x_i-x)\right| \leq \frac{2}{f_S^3(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\operatorname{máx}\sigma^2(x_i)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^3(x_i-x) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)$$

que es de orden de magnitud inferior a

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)$$

obtenido en I. Con respecto al otro sumando

$$-\frac{2}{f_S^3(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_i)K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_k)K_h(x_k-x) =$$

$$= -2\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h(x_k-x)}{f_S^3(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_i)K_h^2(x_i-x)}{\sum_{k=1}^{N}K_h^2(x_i-x)}\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_k)K_h(x_k-x)}{\sum_{i=1}^{N}K_h(x_k-x)} =$$

$$= -2\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_h^2(x_i-x)}{f_S^2(x)}\left(\alpha(x)+o(1)\right)\left(\alpha(x)+o(1)\right) =$$

$$= -2\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\left(1+O(h_n)\right)\left(\alpha^2(x)+o(1)\right) =$$

$$= -2\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\left(\alpha^2(x)+o(1)\right) =$$

$$= -2\frac{\alpha^2(x)}{f(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Término III

$$III = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_\xi\left[\alpha_S^2(x)\right]K_h^2(x_i-x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(VAR_\xi\left[\alpha_S(x)\right]+E_\xi^2\left[\alpha_S(x)\right]\right)K_h^2(x_i-x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{f_S^2(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sigma^2(x_k) K_{hk}^2 + \frac{1}{f_S^2(x)} E_\xi^2 \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Y_k K_{hk} \right] \right) K_h^2(x_i - x)$$

Como

$$\frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{f_S^2(x)} E_\xi^2 \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Y_k K_{hk} \right] \right) K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(E_\xi \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Y_k K_{hk} \right] \right)^2 K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} E_\xi \left[Y_k \right] K_{hk} \right)^2 K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha(x_k) K_{hk} \right)^2 K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha(x_k) K_{hk} \right)^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\alpha(\zeta) \right)^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\alpha(x) + o(1) \right)^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\alpha^2(x) + o(1) \right) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\alpha^2(x) + o(1) \right) \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x) h_n} \left(1 + O(h_n) \right) =$$

$$= \frac{\alpha^2(x)}{f(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{\alpha_0(K^2)}{n h_n} + o\left(\frac{1}{n h_n} \right)$$

y el otro sumando

$$\frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x) \left(\frac{1}{f_S^2(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sigma^2(x_k) K_{hk}^2 \right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sigma^2(x_k)K_{hk}^2$$

bajo la condición HHM, es de orden de magnitud inferior a

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)$$

Resto Como

$$E_\xi\left[\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\right] = E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\left(\alpha(x_i)+\sigma(x_i)\varepsilon_i\right)^2\right] = E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\left(\alpha^2(x_i)+2\alpha(x_i)\sigma(x_i)\varepsilon_i+\sigma^2(x_i)\varepsilon_i^2\right)\right] \leq$$

$$\leq E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\left(\alpha^2(x_i)\right)+2\max_{V_{x,h}}|\alpha(x_i)\sigma(x_i)\varepsilon_i|+\max_{V_{x,h}}\left(\sigma^2(x_i)\varepsilon_i^2\right)\right] \leq$$

$$\leq \max_{V_{x,h}}\left(\alpha^2(x_i)\right)+2\max_{V_{x,h}}|\alpha(x_i)\sigma(x_i)|\,E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}|\varepsilon_i|\right]+\max_{V_{x,h}}\sigma^2(x_i)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right]$$

se verifica que

$$E_\xi\left[\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\right]O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) = \left[O(1)+O(1)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}|\varepsilon_i|\right]+O(1)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right]\right]O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right]$$

Si existe momento de orden 8 para la perturbación aleatoria,

$$O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)E_\xi\left(\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right) = o\left(\frac{n^{1/4}}{n^{3/2}h_n^{3/2}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_nn^{1/4}h_n^{1/2}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n(nh_n^2)^{1/4}}\right)$$

el resto es de orden de magnitud menor Q.E.D.

Obsérvese que si sólo se supone la existencia de varianza de la perturbación aleatoria, $E_\xi\left[\max|\varepsilon_i|^2\right]$ podría crecer a una velocidad $o(n)$ con lo que el resto, de orden $o\left(\frac{1}{(nh_n^3)^{1/2}}\right)$, podría ser de mayor orden de magnitud que el término principal, que es $O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$. Por tanto es necesario que ε_i tengan momentos de suficiente orden.

Corolario 65 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Sea ε_i tal que $E_\xi\varepsilon_i^8<\infty$. Sean $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ continuas. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2\to\infty$*

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2\left(x_i\right)K_{h_n}^2(x_i-x)=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}K_{h_n}^2(x_i-x)}{f_S^2(x)}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\sigma^2\left(x_i\right)K_{h_n}^2(x_i-x)}{\sum\limits_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)}=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{\frac{f(x)}{h_n}\alpha_0(K^2)\left(1+O(h_n)\right)}{f^2(x)\left(1+O(h_n)\right)}\left(\sigma^2\left(x\right)+o(1)\right)=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\alpha_0(K^2)\frac{\left(1+O(h_n)\right)\left(\sigma^2\left(x\right)+o(1)\right)}{h_nf(x)}=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}\frac{\sigma^2\left(x\right)}{f(x)}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Q.E.D.

4.5.2. Núcleo en general

Se tratará en general, sin suponer compacidad del soporte del núcleo pero imponiendo una velocidad de convergencia de la ventana más lenta

Teorema 9 *Sea ε_i tal que $E_\xi\varepsilon_i^8<\infty$. Sean $\alpha'(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ acotadas. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3\to\infty$*

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right]=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Demostración.-

Término I En el segundo sumando de este término en la demostración del teorema anterior, considérese inicialmente

$$\alpha(x_i)=\alpha(x)+\alpha'(\zeta_i)(x_i-x)$$

$$\alpha^2(x_i)=\alpha^2(x)+2\alpha(x)\alpha'(\zeta_i)(x_i-x)+\left(\alpha'(\zeta_i)\right)^2(x_i-x)^2$$

Se verifica que

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha^2(x)+2\alpha(x)\alpha'(\zeta_i)(x_i-x)+\left(\alpha'(\zeta_i)\right)^2(x_i-x)^2\right]K_h^2(x_i-x)=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\alpha^2(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^2+2\alpha(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha'(\zeta_i)(x_i-x)K_{hi}^2+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha'(\zeta_i)\right)^2(x_i-x)^2K_{hi}^2\right]=$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left[\alpha^2(x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x) + \text{máx} \left| \alpha'(\zeta_i) \right| O(1) + \text{máx} \left| \alpha'(\zeta_i) \right|^2 O(h_n) \right] =$$

$$= \frac{\alpha^2(x)}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

si $\alpha'(\cdot)$ está acotada porque, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se verifica que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |x_i - x| K_{hi}^2 \leq \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |x_i - x|^2 K_{hi}^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2 \right)^{1/2} = O\left(h_n^{1/2}\right) O\left(\frac{1}{h_n^{1/2}}\right) = O(1)$$

Término II Si se considera este término de la demostración de la proposición anterior

$$-\frac{2}{f_S^3(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^3(x_i - x) -$$

$$-\frac{2}{f_S^3(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha(x_i) K_h^2(x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha(x_k) K_h(x_k - x)$$

hay que estudiar el segundo término ya que el primero es de menor orden de magnitud que el que va a predominar

$$-\frac{2}{f_S^3(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left[\alpha(x) + \alpha'(\zeta_i)(x_i - x) \right] K_h^2(x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\alpha(x) + \alpha'(\zeta_k)(x_k - x) \right] K_h(x_k - x) =$$

$$= -\frac{2\alpha^2(x)}{f_S^3(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} K_h^2(x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h(x_k - x) -$$

$$-\frac{2\alpha(x)}{f_S^3(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha'(\zeta_i)(x_i - x) K_h^2(x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h(x_k - x) -$$

$$-\frac{2\alpha(x)}{f_S^3(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} K_h^2(x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha'(\zeta_k)(x_k - x) K_h(x_k - x) -$$

$$-\frac{2\alpha(x)}{f_S^3(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha'(\zeta_i)(x_i - x) K_h^2(x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha'(\zeta_k)(x_k - x) K_h(x_k - x) =$$

$$= -\frac{2\alpha^2(x)}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_h^2(x_i-x)+O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(1\right)O(1)-O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(h_n\right)-O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(1\right)O\left(h_n\right)$$

$$= -\frac{2\alpha^2(x)}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_h^2(x_i-x)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

porque, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se verifica que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x_i-x\right|K_{hi} \leq \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2K_{hi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}\right)^{1/2} = O\left(h_n\right)O\left(1\right) = O\left(h_n\right)$$

Por consiguiente

$$II = -2\frac{\alpha(x)}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_h^2(x_i-x)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Término III

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{f_S^2(x)}E_\xi^2\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}Y_kK_{hk}\right]\right)K_h^2(x_i-x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^4(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\alpha(x)+\alpha'(\zeta_k)(x_k-x)\right]K_{hk}\right)^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x) =$$

$$= \frac{\alpha^2(x)}{f_S^4(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_{hk}\right)^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)+\frac{1}{f_S^4(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha'(\zeta_k)(x_k-x)K_{hk}\right)^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x) =$$

$$= \frac{\alpha^2(x)}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)+O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(h_n\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2(x)}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Q.E.D.

Observación.- La velocidad $nh_n^3 \to \infty$ también se emplea para refinar el sesgo.

4.6. $\xi-$Varianza de la $p-$esperanza

Se quiere estudiar la varianza según el diseño fijo de la esperanza según el plan de muestreo, es decir

$$VAR_\xi E_p\left[\hat{\alpha}_S(x)\right] = VAR_\xi\left[\alpha_S(x) + B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] =$$

$$= VAR_\xi\left[\alpha_S(x)\right] + VAR_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] + COV_\xi\left[\alpha_S(x), B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right]$$

4.6.1. $\xi-$Varianza del descriptor

Se desea calcular la varianza según el diseño del primer sumando para ello conviene recordar que para el diseño se ha impuesto que $E_\xi \varepsilon_i = 0$ y $E_\xi \varepsilon_i^2 = 1$

Proposición 26

$$VAR_\xi\left[\alpha_S(x)\right] = \frac{1}{N f_S^2(x)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2\left(x_i\right) K_{h_n}^2(x_i - x)$$

Demostración.-

$$VAR_\xi\left[\alpha_S(x)\right] = VAR_\xi\left[\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x)}\right] = \frac{VAR_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{h_n}(x_i - x)\right]}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x)\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} VAR_\xi\left(Y_i\right) K_{h_n}^2(x_i - x)}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x)\right)^2} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma^2\left(x_i\right) K_{h_n}^2(x_i - x)}{N\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x)\right)^2} = \frac{1}{N f_S^2(x)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2\left(x_i\right) K_{h_n}^2(x_i - x)$$

Q.E.D.

Obsérvese que, bajo la condición HHM, se puede escribir como

$$VAR_\xi\left[\alpha_S(x)\right] = O\left(\frac{1}{n h_n}\right)$$

si σ es acotada, y resultará el sumando dominante.

4.6.2. $\xi-$Varianza del sesgo según el plan

Proposición 27 *Sean $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ acotadas. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$ entonces*

$$VAR_\xi \left[B_p \left(\hat{\alpha}_S(x) \right) \right] = o\left(\frac{1}{nh_n} \right)$$

Demostración.- Como

$$B_p\left(\widehat{\alpha_S(x)}\right) = -\frac{1}{f_S^2(x)} \frac{1}{n} \left\{ \frac{N-n}{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \alpha_S(x) \right) K_{h_n}^2 (x_i - x) \right] \right\} + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}} \right)$$

entonces

$$VAR_\xi \left\{ \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \alpha_S(x) \right) K_{hi}^2 \right\} = \left(\frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \right)^2 VAR_\xi \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2 - \alpha_S(x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2 \right\} =$$

$$= \left(\frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \right)^2 \left[VAR_\xi \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2 \right) + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2 \right)^2 VAR_\xi \left(\alpha_S(x) \right) - 2 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2 \right) COV_\xi \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2, \alpha_S(x) \right) \right]$$

Si se estudia cada sumando se obtiene para el primero

$$\left(\frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \right)^2 \left[VAR_\xi \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2 \right) \right] \leq \left(\frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \right)^2 E_\xi \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2 \right)^2 \right] \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2} \right) O\left(\frac{1}{h_n^2} \right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2} \right)$$

porque

$$E_\xi \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2 \right)^2 \right] = E_\xi \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h^2 (x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Y_k K_h^2 (x_k - x) \right] =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{N} E_\xi \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i Y_k K_h^2 (x_i - x) K_h^2 (x_k - x) \right] =$$

$$= \frac{2}{f_S(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} E_\xi \left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 K_h^4 (x_i - x) + \sum_{k \neq i}^{(N^{(2)})} Y_i K_h^2 (x_i - x) Y_k K_h^2 (x_k - x) \right] =$$

$$= \frac{2}{f_S(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha^2(x_i) + \sigma^2(x_i) \right) K_h^4(x_i - x) -$$

$$+ \frac{2}{f_S(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{k \neq i}^{(N^{(2)})} \alpha(x_k)\alpha(x_i) K_h^2(x_k - x) K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{2}{f_S(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha^2(x_i) + \sigma^2(x_i) \right) K_h^4(x_i - x) +$$

$$+ \frac{2}{f_S(x)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha(x_i) K_h^2(x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha(x_k) K_h^2(x_k - x) -$$

$$- \frac{2}{f_S(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha^2(x_i) K_h^4(x_i - x) =$$

$$= \frac{2}{f_S(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^4(x_i - x) +$$

$$+ \frac{2}{f_S(x)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha(x_i) K_h^2(x_i - x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha(x_k) K_h^2(x_k - x) =$$

$$= O\left(\frac{1}{n h_n^3} \right) + O\left(\frac{1}{h_n} \right) O\left(\frac{1}{h_n} \right)$$

El segundo

$$\left(\frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2 \right)^2 VAR_\xi \left(\alpha_S(x) \right)$$

es despreciable frente a $VAR_\xi \left(\alpha_S(x) \right)$. Y el tercero

$$2 \left(\frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \right)^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2 \left| COV_\xi \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2, \alpha_S(x) \right) \right| \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2} \right) O\left(\frac{1}{h_n} \right) VAR_\xi^{1/2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2 \right) VAR_\xi^{1/2} \left(\alpha_S(x) \right) \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2} \right) O\left(\frac{1}{h_n} \right) E_\xi^{1/2} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi}^2 \right)^2 \right] VAR_\xi^{1/2} \left(\alpha_S(x) \right) \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{h_n}\right) O\left(\frac{1}{h_n}\right) O\left(\frac{1}{(nh_n)^{1/2}}\right) \leq O\left(\frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right)$$

Por consiguiente

$$VAR_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] = \frac{1}{f_S^4(x)} VAR_\xi\left\{\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_S(x)\right)K_{hi}^2\right\} + VAR_\xi\left[\text{máx}\,|Y_i| O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{f_S^2(x)} COV_\xi\left[\text{máx}\,|Y_i| O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right), B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] \leq O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right) + O\left(\frac{E_\xi\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)}{(nh_n)^3}\right) + \left(O\left(\frac{E_\xi\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)}{(nh_n)^3}\right) O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)\right)^{1/2}$$

que como solo se está suponiendo la condición general del diseño $E_\xi \varepsilon_i^2 = 1$

$$O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right) + o\left(\frac{n}{(nh_n)^3}\right) + \left(o\left(\frac{n}{(nh_n)^3}\right) O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2 h_n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^2 h_n^{5/2}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n nh_n^{3/2}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Q.E.D.

4.6.3. Termino de la covarianza

$$COV_\xi\left[\alpha_S(x), B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right] \leq VAR_\xi^{1/2}\left(\alpha_S(x)\right) VAR_\xi^{1/2}\left(B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right)\right) = \left[O\left(\frac{1}{nh_n}\right) o\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]^{1/2} = o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

4.6.4. Conclusión

Resumiendo esta sección, se obtiene el siguiente desarrollo

Corolario 66 *Sean $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ acotadas. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$*

$$VAR_\xi E_p\left[\hat{\alpha}_S(x)\right] = \frac{1}{N f_S^2(x)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2\left(x_i\right)K_{h_n}^2(x_i - x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

y si se supone suavidad en la raiz cuadrada de la función de varianza

Corolario 67 *Sean $\alpha(\cdot)$ acotada y $\sigma(\cdot)$ continua. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$*

$$VAR_{\xi}E_p\left[\hat{\alpha}_S(x)\right] = \frac{\sigma^2(x)}{Nh_n f(x)} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{Nf_S^2(x)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_{h_n}^2(x_i-x) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{h_n}^2(x_i-x)\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_{h_n}^2(x_i-x)}{Nf_S^2(x)\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)} =$$

$$= \frac{\frac{f(x)}{h_n}\alpha_0(K^2)\left(1+O(h_n)\right)}{Nf^2(x)\left(1+O(h_n)\right)}\left(\sigma^2(x)+o(1)\right) = \frac{\alpha_0(K^2)\left(1+O(h_n)\right)\left(\sigma^2(x)+o(1)\right)}{Nh_nf(x)} =$$

$$= \frac{\alpha_0(K^2)}{Nh_n}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Q.E.D.

4.7. Conclusión de la varianza

4.7.1. Núcleo de soporte compacto

La varianza total para esta situación admite el siguiente desarrollo

Teorema 10 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Sea ε_i tal que $E_{\xi}\varepsilon_i^8 < \infty$. Sean $\alpha(\cdot)$ continua y $\sigma(\cdot)$ acotada. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$ entonces*

$$VAR\left[\hat{\alpha}_S(x)\right] = \frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.-

$$VAR\left[\hat{\alpha}_S(x)\right] = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x) + \frac{1}{Nf_S^2(x)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_{h_n}^2(x_i-x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}+\frac{1}{N}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \left(\frac{(N-n)N + (N-1)n}{N(N-1)n} \right) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^2(x_i - x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \left(\frac{N^2 - nN + Nn - n}{N(N-1)n} \right) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^2(x_i - x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N^2 - n}{N^2 - N} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^2(x_i - x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) =$$

$$= \frac{1 - \frac{f}{N}}{1 - \frac{1}{N}} \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^2(x_i - x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Q.E.D.

Obsérvese que como $f \leq 1$,

$$\frac{1 - \frac{f}{N}}{1 - \frac{1}{N}} \geq 1$$

dándose la igualdad cuando $f = 1$, es decir, cuando se realiza el censo.

Corolario 68 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Sea ε_i tal que $E_\xi \varepsilon_i^8 < \infty$. Sean $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ continuas. En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$*

$$VAR\left[\hat{\alpha}_S(x)\right] = \frac{1 - \frac{f}{N}}{1 - \frac{1}{N}} \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{f_S^2(x)} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^2(x_i - x) = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{h_n}^2(x_i - x)}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x) \right)^2} \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_{h_n}^2(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{N} K_{h_n}^2(x_i - x)} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{h_n}^2(x_i - x)}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x) \right)^2} \sigma^2(\zeta) = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{h_n}^2(x_i - x)}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x) \right)^2} \left(\sigma^2(x) + o(1) \right)$$

como

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi}^2}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{hi} \right)^2} = \frac{f(x) \frac{1}{h_n} \alpha_0(K^2) \left[1 + O(h_n)\right]}{\left(f(x)\alpha_0(K) + O(h_n)\right)^2} = \frac{\alpha_0(K^2) \left[1 + O(h_n)\right]}{f(x) h_n \alpha_0^2(K) \left(1 + O(h_n)\right)^2} = \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x) h_n} \left(1 + O(h_n)\right)$$

entonces

$$VAR\left[\hat{\alpha}_S(x)\right] = \frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}\frac{1}{nh_n}\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)}\left(1+O(h_n)\right)\left(\sigma^2\left(x\right)+o(1)\right)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$=\frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}\frac{\sigma^2\left(x\right)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Q.E.D.

Salvo el coeficiente relacionado con el contexto de pp.ff., el término dominante es igual al que presentan Fan(1992), en diseño aleatorio, y Jennen-Steinmetz&Gasser(1988), en diseño fijo para el caso de homoscedasticidad.

4.7.2. Núcleo en general

Con una demostración totalmente análoga se puede probar el siguiente desarrollo si se impone una velocidad de convergencia de la ventana más lenta

Proposición 28 *Sea ε_i tal que $E_\xi\varepsilon_i^8<\infty$. Sean $\alpha'(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ acotadas. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3\to\infty$ entonces*

$$VAR\left[\hat{\alpha}_S(x)\right]=\frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Y si se impone más suavidad en σ se obtiene el siguiente corolario

Corolario 69 *Sea ε_i tal que $E_\xi\varepsilon_i^8<\infty$. Sean $\alpha'(\cdot)$ acotada y $\sigma(\cdot)$ lipschitziana. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3\to\infty$ entonces*

$$VAR\left[\alpha_S(x)\right]=\frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}\frac{1}{nh_n}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K^2(v)dv}{\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h}K(v)dv\right]^2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma^2(x)+\sigma^2\left(x_i\right)-\sigma^2(x)\right)K_h^2(x_i-x)=$$

$$=\frac{\sigma^2(x)}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)+\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma^2\left(x_i\right)-\sigma^2(x)\right)K_h^2(x_i-x)=$$

$$= \frac{\sigma^2(x)}{f_S^2(x)} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sigma^2(x)}{n} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{h_n}^2(x_i - x)}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_{h_n}(x_i - x)\right)^2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

porque, se verifica que

$$\sigma^2(x_i) - \sigma^2(x) = (\sigma(x_i) + \sigma(x))\,(\sigma(x_i) - \sigma(x))$$

y

$$\left|\sigma^2(x_i) - \sigma^2(x)\right| = |\sigma(x_i) + \sigma(x)|\,|\sigma(x_i) - \sigma(x)| \leq 2 \max_i \sigma(x_i) \Lambda(\sigma)\,|x_i - x|$$

por tanto

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma^2(x_i) - \sigma^2(x)\right) K_h^2(x_i - x)\right| \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left|\sigma^2(x_i) - \sigma^2(x)\right| K_h^2(x_i - x) \leq 2C(\sigma)\Lambda(\sigma) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |x_i - x|\, K_h^2(x_i - x) = O(1)$$

Por consiguiente

$$VAR\left[\alpha_S(x)\right] = \frac{1 - \frac{f}{N}}{1 - \frac{1}{N}} \frac{1}{nh_n} \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \frac{\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v + O(h_n)\right]}{\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v + O(h_n)\right]^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1 - \frac{f}{N}}{1 - \frac{1}{N}} \frac{1}{nh_n} \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \frac{\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K^2(v)\mathrm{d}v}{\left[\int_{-x/h}^{(1-x)/h} K(v)\mathrm{d}v\right]^2} \left[1 + O(h_n)\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

porque se está suponiendo que $nh_n^3 \to \infty$ Q.E.D.

El término dominante es semejante, salvo el coeficiente debido a las pp.ff., al presentado por Faraldo et al(1984) en el contexto de diseño aleatorio.

Capítulo 5

Suavizador lineal local

[...] cuán necesario es para todos los hombres que aspiren al verdadero conocimiento examinar las definiciones de autores precedentes [...]

HOBBES *Leviatán*

Resumen Después de introducir una notación adecuada y unos resultados auxiliares, se estudia el suavizador lineal local para la población finita, en especial su denominador, y sus expresiones alternativas. Se define el estimador y también se dan expresiones alternativas que motivan la introducción de un cuarto estimador.

Se estudian los sesgos según el plan de muestreo de ambos estimadores mediante la prueba de unas proposiciones relativas al plan de nuestreo. Tras considerar el modelo, se concluye el sesgo total.

Se estudia la varianza según el plan de muestreo de ambos estimadores. Posteriormente se considera el modelo, se obtiene la varianza promedio después de probar unas proposiciones relativas al modelo y se concluye la varianza total.

5.1. Definiciones, notaciones y resultados previos

Se está interesado en estimar según el plan de muestreo el descriptor suavizador lineal local (SLL) y, posteriormente, la función de regresión en el contexto de un modelo de diseño fijo no ralo. Primero se estudiará el descriptor SLL en un punto con relieve o densidad asintótica no nula $f(x) > 0$, construido a partir de la p.f. con $0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_N < 1$, puntos del diseño. Para ello se introducirán previamente una serie de útiles.

5.1.1. Notaciones y resultados auxiliares

Resultado 71 *En MASS/R*(N, n)

$$E_p\left[\hat{A}_{10}\left(\hat{A}_{01}-A_{01}\right)\right]=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i1}\dot{x}_{i2}$$

Demostración.-

$$E_p\left[\hat{A}_{10}\left(\hat{A}_{01}-A_{01}\right)\right]=E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}x_{i1}I_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\dot{x}_{i2}I_i\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N}x_{i1}\dot{x}_{i2}\pi_1+\sum_{i\neq j}^{(N^2)}x_{i1}\dot{x}_{j2}\pi_{12}\right]=\frac{1}{n^2}\left[\pi_1\sum_{i=1}^{N}x_{i1}\dot{x}_{i2}-\pi_{12}\sum_{i=1}^{N}x_{i1}\dot{x}_{i2}\right]=$$

$$=\frac{\pi_1-\pi_{12}}{n^2}\sum_{i=1}^{N}x_{i1}\dot{x}_{i2}=\frac{1}{n^2}\frac{n}{N}\left[1-\frac{n-1}{N-1}\right]\sum_{i=1}^{N}x_{i1}\dot{x}_{i2}=\frac{1}{n}\frac{N-1-n+1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{i1}\dot{x}_{i2}$$

teniendo en cuenta los resultados sobre descriptores del segundo capítulo Q.E.D.

Ejemplo 30 *En MASS/R(N, n), si* $A_{01}=0$ *entonces*

$$E_p\left[\hat{A}_{10}\hat{A}_{01}\right]=\frac{N-n}{N-1}\frac{A_{11}}{n}$$

□

Notación.- En el caso particular de la siguiente p.f.

$$(\mathcal{I},\mathfrak{X})=(\mathcal{I},\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\mathcal{X}_3)=\{(i,Y_i,x_i-x,K_h(x_i-x)):\ i=1,\ldots,N\},$$

se denotará el descriptor resultante $]r,s,t[\,(\mathfrak{X})$ por $S_{N,r,s,t}$, es decir

$$S_{N,r,s,t}=\sum_{i=1}^{N}Y_i^r\,(x_i-x)^sK_h^t(x_i-x).$$

En el caso de la muestra, por analogía, se denotará

$$S_{n,r,s,t}=\sum_{j=1}^{n}Y_j^r\,(x_j-x)^sK_h^t(x_j-x).$$

Del resultado anterior, se obtiene como caso particular la siguiente igualdad, que ya se había obtenido directamente en el capítulo anterior

Ejemplo 31

$$E_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}Y_iK_{h_n}\left(x_i-x\right)\left(K_{h_n}\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)\right)\right]$$

□

También se pueden obtener otras nuevas como la siguiente que se empleará con posterioridad

Ejemplo 32

$$E\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right]=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}\left(x_i-x\right)\left(K_{hi}\left(x_i-x\right)-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_{h_n}\left(x_k-x\right)\right)\right]$$

□

Sea $\hat{S}_{N,r,s,t}=\sum_{i=1}^{N}Y_i^r\left(x_i-x\right)^sK_h^t(x_i-x)I_i^{a)}$ el estimador HT de $S_{N,r,s,t}$ en un plan de muestreo probabilístico, que en el caso de MASS/R(N,n) es

$$\hat{S}_{N,r,s,t}=\sum_{i=1}^{N}Y_i^r\left(x_i-x\right)^sK_h^t(x_i-x)I_i^{a)}=\sum_{i=1}^{N}Y_i^r\left(x_i-x\right)^sK_h^t(x_i-x)\frac{N}{n}I_i=$$

$$=\frac{N}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j^r\left(x_j-x\right)^sK_h^t(x_j-x)=\frac{N}{n}S_{n,r,s,t}$$

Resultado 72 *En un plan de muestreo probabilístico, se verifica que*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,r,s,t}\right]=S_{N,r,s,t}$$

Demostración.- La igualdad se obtiene de aplicar los resultados del segundo capítulo Q.E.D.

Ejemplo 33 *En MASS/R(N,n), para $r,s,t=0,1,2...$*

$$E_p\left[\frac{N}{n}S_{n,r,s,t}\right]=S_{N,r,s,t}$$

$$E_p\left[\frac{1}{n}S_{n,r,s,t}\right]=\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}$$

□

Proposición 29 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Si $Nh_n^2 \to \infty$, se verifica que*

$$\left|\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right| \leq \max|Y_i|^r\, O\left(h_n^{s-t+1}\right)$$

Demostración.-

$$\left|\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right| = \left|\frac{S_{N,r,s,t}}{S_{N,0,0,t}}\right| \frac{1}{N}S_{N,0,0,t} \leq \max|Y_i|^r \frac{\sum_{i=1}^{N}|x_i-x|^s K_{hi}^t}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^t} O\left(\frac{1}{h_n^{t-1}}\right) = \max|Y_i|^r\, O(h_n^s) O\left(\frac{1}{h_n^{t-1}}\right)$$

porque, como el núcleo es de soporte compacto, sin pérdida de generalidad $[-1,1]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{N}|x_i-x|^s K_{hi}^t = \sum_{\{i:|x_i-x|\leq h\}}|x_i-x|^s K_{hi}^t$$

y

$$\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^t = \sum_{\{i:|x_i-x|\leq h\}}K_{hi}^t$$

ya que si $|x_i-x|>h_n$ entonces $K_{hi}=h_n^{-1}K\left((x_i-x)/h_n\right)=0$. Con lo cual

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}|x_i-x|^s K_{hi}^t}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^t} = \frac{\sum_{\{i:|x_i-x|\leq h\}}|x_i-x|^s K_{hi}^t}{\sum_{\{i:|x_i-x|\leq h\}}K_{hi}^t} \leq h_n^s$$

Q.E.D.

De la proposición, se deduce la siguiente acotación asintótica

Ejemplo 34 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Bajo la condición HHM, si $\alpha(\cdot)$ es lipschitziana y $nh_n^2 \to \infty$, entonces*

$$E_\xi\left[-\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i-x)\right] = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

porque

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i-x)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha(x_i)-E_\xi\alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i-x) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha(x_i)-\alpha\left(\zeta\right)\right)K_{hi}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha(x_i)-\alpha\left(x\right)+\alpha\left(x\right)-\alpha\left(\zeta\right)\right)K_{hi}^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha(x_i)-\alpha\left(x\right)\right)K_{hi}^2\right] + \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha\left(x\right)-\alpha\left(\zeta\right)\right)K_{hi}^2\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha(x_i)-\alpha\left(x\right)\right)K_{hi}^2\right] + \left(\alpha\left(\zeta\right)-\alpha\left(x\right)\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^2\right]$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left|E_\xi\left[-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i-x)\right]\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{n}\left(\Lambda(\alpha)O\left(1\right)+\Lambda(\alpha)O(h_n)O\left(\frac{1}{h_n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

□

La siguiente desigualdad está estrechamente relacionada con la de Gumbel(1954) aunque la refina ligeramente

Resultado 73

$$\max_N\left|Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right| \leq \left(\frac{N-1}{N}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]^2\right)^{1/2}$$

Demostración.- Se verifica que

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]^2 = 0$$

que se puede expresar como

$$\left[\left(Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)+\sum_{j\neq i}^{N}\left(Y_j^r\left(x_j-x\right)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]^2 = 0$$

y desarrollando se obtiene que

$$0 = \left(Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2 +$$

$$+2\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\sum_{j\neq i}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)+$$

$$+\left[\sum_{j\neq i}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]^2=$$

$$=\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2+\left[\sum_{j\neq i}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]^2+$$

$$+2\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\left[-\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]$$

Por tanto

$$\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2=\left[\sum_{j\neq i}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]^2$$

y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$\left[\sum_{j\neq i}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]^2\leq(N-1)\sum_{j\neq i}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2=$$

$$=(N-1)\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2-(N-1)\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2$$

Por consiguiente

$$\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2\leq$$

$$\leq(N-1)\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2-(N-1)\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2$$

y

$$N\left(Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2 \leq (N-1)\sum_{j=1}^{N}\left(Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)^2$$

Con lo cual

$$\left|Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right| = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]^2\right)^{1/2}$$

que se verifica $\forall i=1,2,\ldots,N$ por tanto, también para el máximo Q.E.D.

Si se considera en el resultado anterior $r=0$, $s=0$ y $t=1$, y $r=0$, $s=1$ y $t=1$, respectivamente, se obtienen las siguientes desigualdades

Ejemplo 35

$$\max_N |K_h(x_i-x)-f_S(x)| \leq \left(\frac{N-1}{N}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{N}[K_h(x_i-x)-f_S(x)]^2\right)^{1/2}$$

□

Ejemplo 36

$$\max_N \left|(x_i-x)K_h(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right| \leq \left(\frac{N-1}{N}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i-x)K_h(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]^2\right)^{1/2}$$

□

La desigualdad obtenida en el resultado se puede generalizar del modo que se presenta a continuación y que para los casos $r=0$, $s=0$,$t=1$ y $r=1$, $s=0$, $t=1$ ya se han empleado en el capítulo anterior.

Corolario 70 *En un plan de muestreo probabilístico autoponderado y de tamaño fijo, se verifica que*

$$\left|\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right| \leq \left(\frac{N-1}{N}\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]^2\right)^{1/2}$$

Demostración.- Por ser el plan de muestreo autoponderado y de tamaño fijo, se puede aplicar el lema 18

$$\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t} - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)\right] I_i^{a)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)\right] I_i$$

Con lo cual

$$\left|\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t} - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)\right] I_i\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left|Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Y_j^r\,(x_j-x)^s K_h^t(x_j-x)\right| I_i \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\max_{N}\left|Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x) - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right| I_i =$$

$$= \max_{N}\left|Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x) - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} I_i =$$

$$= \max_{N}\left|Y_i^r\,(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x) - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right|$$

y, aplicando el resultado anterior, se llega a la desigualdad Q.E.D.

Resultado 74 *Se verifica que*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,r,s,t}\hat{S}_{N,r',s',t'}\right] = S_{N,r,s,t}S_{N,r',s',t'} + COV_p\left[\hat{S}_{N,r,s,t}, \hat{S}_{N,r',s',t'}\right]$$

Proposición 30 *En MASS/R*(N,n)

$$COV_p\left[\hat{S}_{N,r,s,t}, \hat{S}_{N,r',s',t'}\right] = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[NS_{N,r+r',s+s',t+t'} - S_{N,r,s,t}, S_{N,r',s',t'}\right]$$

Demostración.-

$$COV_p\left[\hat{S}_{N,r,s,t},\hat{S}_{N,r',s',t'}\right]=COV_p\left[\sum_{i=1}^{N}Y_i^r\,(x_i-x)^s\,K_i^t\,(x_i-x)\,I_i^{a)},\sum_{i=1}^{N}Y_i^{r'}\,(x_i-x)^{s'}\,K_i^{t'}\,(x_i-x)\,I_i^{a)}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}Y_i^{r+r'}\,(x_i-x)^{s+s'}\,K_i^{t+t'}\,(x_i-x)\,VAR_p\left[I_i^{a)}\right]+$$

$$+\sum_{i\neq j}^{(N)}Y_i^r\,(x_i-x)^s\,K_i^t\,(x_i-x)\,Y_j^{r'}\,(x_j-x)^{s'}\,K_j^{t'}\,(x_j-x)COV_p\left[I_i^{a)},I_j^{a)}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}Y_i^{r+r'}\,(x_i-x)^{s+s'}\,K_i^{t+t'}\,(x_i-x)\,\frac{VAR_p\left[I_i\right]}{\pi_i^2}+$$

$$+\sum_{i\neq j}^{(N)}Y_i^r\,(x_i-x)^s\,K_i^t\,(x_i-x)\,Y_j^{r'}\,(x_j-x)^{s'}\,K_j^{t'}\,(x_j-x)\frac{COV_p\left[I_i,I_j\right]}{\pi_i\pi_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}Y_i^{r+r'}\,(x_i-x)^{s+s'}\,K_i^{t+t'}\,(x_i-x)\,\frac{\pi_i\,(1-\pi_i)}{\pi_i^2}+$$

$$+\sum_{i\neq j}^{(N)}Y_i^r\,(x_i-x)^s\,K_i^t\,(x_i-x)\,Y_j^{r'}\,(x_j-x)^{s'}\,K_j^{t'}\,(x_j-x)\frac{\pi_{ij}-\pi_i\pi_j}{\pi_i\pi_j}$$

Para el caso de MASS/R

$$\left(\frac{N}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{N}Y_i^{r+r'}\,(x_i-x)^{s+s'}\,K_i^{t+t'}\,(x_i-x)\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)+$$

$$+\left(\frac{N}{n}\right)^2\sum_{i\neq j}^{(N)}Y_i^r\,(x_i-x)^s\,K_i^t\,(x_i-x)\,Y_j^{r'}\,(x_j-x)^{s'}\,K_j^{t'}\,(x_j-x)\left(-\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\right)=$$

$$=\frac{(N-n)}{n}\sum_{i=1}^{N}Y_i^{r+r'}\,(x_i-x)^{s+s'}\,K_i^{t+t'}\,(x_i-x)-$$

$$-\frac{(N-n)}{n(N-1)}\sum_{i\neq j}^{(N)}Y_i^r\,(x_i-x)^s\,K_i^t\,(x_i-x)\,Y_j^{r'}\,(x_j-x)^{s'}\,K_j^{t'}\,(x_j-x)=$$

$$= \frac{N-n}{n}\left[1+\frac{1}{N-1}\right]\sum_{i=1}^{N} Y_i^{r+r'}\left(x_i-x\right)^{s+s'} K_i^{t+t'}\left(x_i-x\right) -$$

$$-\frac{N-n}{n}\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Y_i^{r}\left(x_i-x\right)^{s} K_i^{t}\left(x_i-x\right) Y_j^{r'}\left(x_j-x\right)^{s'} K_j^{t'}\left(x_j-x\right) =$$

$$= \frac{N}{n}\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N} Y_i^{r+r'}\left(x_i-x\right)^{s+s'} K_i^{t+t'}\left(x_i-x\right) -$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\sum_{i=1}^{N} Y_i^{r}\left(x_i-x\right)^{s} K_i^{t}\left(x_i-x\right)\sum_{j=1}^{N} Y_j^{r'}\left(x_j-x\right)^{s'} K_j^{t'}\left(x_j-x\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1} N S_{N,r+r',s+s',t+t'} - \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1} S_{N,r,s,t} S_{N,r',s',t'} =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[N S_{N,r+r',s+s',t+t'} - S_{N,r,s,t} S_{N,r',s',t'}\right]$$

Q.E.D.

En MASS/R(N,n), se obtienen como caso particular las siguientes igualdades, que ya se habían obtenido directamente en el capítulo anterior.

Ejemplo 37

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1};\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h^2\left(x_i-x\right) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h\left(x_i-x\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_h\left(x_i-x\right)\right]$$

$$VAR_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 K_h^2\left(x_i-x\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h\left(x_i-x\right)\right)^2\right]$$

$$VAR_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_h^2\left(x_i-x\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_h\left(x_i-x\right)\right)^2\right]$$

□

También se pueden obtener otras nuevas como la siguiente que se empleará en lo sucesivo

Ejemplo 38

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right) K_h^2\left(x_i-x\right) - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1}\frac{1}{N} S_{N,0,0,1}\right]$$

Como consecuencia de la proposición y el resultado se obtiene la siguiente igualdad

Corolario 71 *En MASS/R(N, n) se verifica que*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,r,s,t}\hat{S}_{N,r',s',t'}\right] = S_{N,r,s,t}S_{N,r',s',t'} + \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[NS_{N,r+r',s+s',t+t'} - S_{N,r,s,t}, S_{N,r',s',t'}\right] \quad (5.1)$$

Ejemplo 39 *En MASS/R(N, n) se verifica que*

$$E_p\left[\frac{1}{n}S_{n,r,s,t}\frac{1}{n}S_{n,r',s',t'}\right] = \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\frac{1}{N}S_{N,r',s',t'} + \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}S_{N,r+r',s+s',t+t'} - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\frac{1}{N}S_{N,r',s',t'}\right]$$

□

Ejemplo 40 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3 \to \infty$ se verifica que*

$$VAR_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right] = O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

porque

$$VAR_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2 K_h^2(x_i - x) - \left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\right]$$

y

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2 K_h^2(x_i - x) - \left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2 = O(h_n)$$

□

Resultado 75 *Bajo la condición HHM, si $K(\cdot)$ es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^2 \to \infty$, se verifica que*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)K_h^2(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} = O\left(h_n + \frac{1}{nh_n^2}\right)$$

Demostración.- Téngase en cuenta que el cuadrado también es simétrico por serlo el núcleo

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)K_h^2(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} =$$

$$= O(h_n) + O\left(h_n^3\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right) + \left[O\left(h_n^2\right) + O\left(h_n^4\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]O(1) = O(h_n) + O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right)$$

Q.E.D.

Observación.- En las condiciones anteriores, si $nh_n^3 \to \infty$, el resultado anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)\,K_h^2(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} = O(h_n)$$

Corolario 72 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $K(\cdot)$ es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3 \to \infty$, se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}; \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] = O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

Resultado 76 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^3\right] = \frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{n^2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - x)\,K_h(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]^3$$

Demostración.- Considérese la p.f.

$$(\mathcal{I}, \mathfrak{X}) = \{(i, (x_i - x)\,K_h(x_i - x), (x_i - x)\,K_h(x_i - x), (x_i - x)\,K_h(x_i - x)) :\ i = 1, \ldots, N\}$$

en el resultado 67 Q.E.D.

Lema 21 *Se verifica que*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - x)\,K_h(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]^{2k} \leq 2^{2k}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,2k,2k} + \left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^{2k}\right]$$

Demostración.-

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - x)\,K_h(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]^{2k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2^{2k}\text{máx}\left\{(x_i - x)^{2k}\,K_h^{2k}(x_i - x), \left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^{2k}\right\} \leq$$

$$\leq 2^{2k}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - x)^{2k}\,K_h^{2k}(x_i - x) + \left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^{2k}\right] =$$

$$= 2^{2k}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^{2k}\,K_h^{2k}(x_i - x) + 2^{2k}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^{2k} =$$

$$= 2^{2k}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,2k,2k} + \left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^{2k}\right]$$

Q.E.D.

Ejemplo 41 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Si $Nh_n^2 \to \infty$*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - x)\,K_h\,(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]^2 = O\,(h_n)$$

y

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - x)\,K_h\,(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]^4 = O\,(h_n)$$

porque $\frac{1}{N}S_{N,0,4,4} = O(h_n)$ por la proposición 29 □

Resultado 77 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto, bajo la condición HHM, si $nh_n^3 \to \infty$, se verifica que*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - x)\,K_h\,(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]^3 = O\left(h_n^2 + \frac{1}{nh_n^3}\right)$$

Demostración.-

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - x)\,K_h\,(x_i - x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]^3 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^3\,K_h^3\,(x_i - x) - 3\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2\,K_h^2\,(x_i - x) + \cdots =$$

$$= O\left(h_n^2\right) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right) + O\left(h_n^2\right)O\,(h_n) + \cdots$$

más términos de menor orden de magnitud Q.E.D.

Corolario 73 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3 \to \infty$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^3\right] = O\left(\frac{h_n^2}{n^2} + \frac{1}{(nh_n)^3}\right)$$

Observación.- Si $nh_n^5 = O(1)$, ambos infinitésimos resultan del mismo orden y se puede abreviar

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^3\right] = O\left(\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Por otra parte, si no se impusiera simetría del núcleo,

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^3\right] = O\left(\frac{h_n}{n^2}\right)$$

que resulta de menor orden de magnitud que $O\left(1/(nh_n)^{3/2}\right)$.

Resultado 78 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^4\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((x_i-x)\,K_{h_n}(x_i-x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^4 +$$

$$+3\frac{N}{n^3}\frac{N-n}{N-1}\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((x_i-x)\,K_{h_n}(x_i-x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\right]^2$$

Demostración.- Considérese la p.f.

$(\mathcal{I}, \mathfrak{X}) = \{(i, (x_i-x)\,K_h\,(x_i-x)\,, (x_i-x)\,K_h\,(x_i-x)\,, (x_i-x)\,K_h\,(x_i-x)\,, (x_i-x)\,K_h\,(x_i-x)) :\ i = 1, \ldots, N\}$

en el resultado 68 y obsérvese que los productos circulantes valen en este caso

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((x_i-x)\,K_{h_n}(x_i-x) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\right]^2$$

de donde se obtiene la igualdad Q.E.D.

Corolario 74 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^4\right] = O\left(\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

5.1.2. Estadístico de la población finita o descriptor

Para introducir el descriptor SLL habrá que considerar $\hat{\beta}_0(x)$ que se obtiene como

$$\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = \arg\min_{\beta_0\beta_1} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \beta_0(x) - \beta_1(x)(x_i - x)\right)^2 \frac{1}{h_n} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)$$

o simplificando la notación

$$\min_{\beta_0\beta_1} \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1(x_i - x)\right]^2 K_h\left(x_i - x\right).$$

Para ello se consideran las derivadas parciales con respecto a cada uno de los β y se igualan a cero

$$-2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1(x_i - x)\right] K_h\left(x_i - x\right) = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1(x_i - x)\right] \left(x_i - x\right) K_h\left(x_i - x\right) = 0$$

con lo cual

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h\left(x_i - x\right) - \beta_0 \sum_{i=1}^{N} K_h\left(x_i - x\right) - \beta_1 \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - x\right) K_h\left(x_i - x\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i \left(x_i - x\right) K_h\left(x_i - x\right) - \beta_0 \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - x\right) K_h\left(x_i - x\right) - \beta_1 \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - x\right)^2 K_h\left(x_i - x\right) = 0$$

o también

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h\left(x_i - x\right) = \beta_0 \sum_{i=1}^{N} K_h\left(x_i - x\right) + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - x\right) K_h\left(x_i - x\right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i \left(x_i - x\right) K_h\left(x_i - x\right) = \beta_0 \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - x\right) K_h\left(x_i - x\right) + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - x\right)^2 K_h\left(x_i - x\right)$$

es decir

$$S_{N,1,0,1} = \beta_0 S_{N,0,0,1} + \beta_1 S_{N,0,1,1}$$
$$S_{N,1,1,1} = \beta_0 S_{N,0,1,1} + \beta_1 S_{N,0,2,1}$$

Aplicando la regla de Cramer se obtiene que $\hat{\beta}_0(x) = \frac{D_0}{D}$ donde

$$D_0 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x) \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i (x_i - x) K_h(x_i - x) & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h(x_i - x) \end{vmatrix}$$

y

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x) & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x) \\ \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x) & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h(x_i - x) \end{vmatrix}$$

Tras realizar los cálculos, resulta que

$$B_0(x) := \hat{\beta}_0(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i K_h(x_i - x) \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x) \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h(x_i - x) - \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x)\right]^2} -$$

$$- \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i (x_i - x) K_h(x_i - x) \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x) \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h(x_i - x) - \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x)\right]^2}.$$

También se puede abreviar, por claridad y por facilidad en la mecanografía, mediante

$$B_0(x) = \hat{\beta}_0(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} - \sum_{i=1}^{N} Y_i (x_i - x) K_{hi} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N} K_{hi} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} - \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi}\right]^2} =$$

$$= \frac{S_{N,1,0,1} S_{N,0,2,1} - S_{N,1,1,1} S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1} S_{N,0,2,1} - S_{N,0,1,1}^2}.$$

5.1.2.1. Estudio del denominador

Se prueba a continuación que el denominador $D = D(x) = S_{N,0,2,1} S_{N,0,0,1} - S_{N,0,1,1}^2$ es no negativo y se anula en los casos de que no haya elemento alguno del diseño, sólo haya uno o bien haya repeticiones en él.

Resultado 79 *Se verifica que* $D(x) \geq 0$

Demostración.- Como se están considerando núcleos positivos

$$S^2_{N,0,1,1} = \left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)K_h(x_i - x)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} K_h^{1/2}(x_i - x)(x_i - x)K_h^{1/2}(x_i - x)\right]^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2 K_h(x_i - x)\sum_{i=1}^{N} K_h(x_i - x) = S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1}$$

entonces $S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1} - S^2_{N,0,1,1} \geq 0$ Q.E.D.

Las posibilidades de que se anule $D(x)$ son:

1. Sólo hay un punto con concomitante dentro de la ventana, entonces

$$S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1} - S^2_{N,0,1,1} = (x_i - x)^2 K_h(x_i - x)K_h(x_i - x) - ((x_i - x)K_h(x_i - x))^2 = 0$$

2. La segunda situación es que exista la siguiente proporcionalidad

$$\frac{(x_i - x)K_h^{1/2}(x_i - x)}{K_h^{1/2}(x_i - x)} = \frac{(x_k - x)K_h^{1/2}(x_k - x)}{K_h^{1/2}(x_k - x)} \quad i \neq k$$

   si $K_h(x_i - x) \neq 0$ y $K_h(x_k - x) \neq 0$, en cuyo caso

$$(x_i - x) = (x_k - x) \quad i \neq k$$

   es decir $x_i = x_k, \quad i \neq k$. Esta situación no se da en diseño fijo sin repeticiones.

3. La tercera posibilidad es que $K_h(x_i - x) = 0 \quad i = 1, \ldots, N$. Esto no es posible, a partir de un N_0, en un punto de densidad positiva, $f(x) > 0$.

Dado el tipo de diseño que se estaba suponiendo hasta ahora, en un punto de densidad positiva sólo se puede dar la situación de que exista un único elemento. Por tanto, para que tenga sentido el descriptor habrá que imponer que no se verifica esto último. Francisco(2001) referencia un inconveniente de esta técnica, tomado de Seifert&Gasser(1996), relacionado con esta posibilidad:

> la varianza condicional de este estimador se va a infinito cuando en el entorno del punto donde se realiza el promedio ponderado [sic] no hay al menos $p + 3$ datos [en esta memoria correspondería 4]; incluso con este número de datos no se puede asegurar que dicha varianza esté acotada. Es decir, con diseños con pocos datos o datos agrupados en ciertas zonas del diseño, la varianza del estimador se hace muy grande.

Como en este capítulo se emplearán núcleos de soporte compacto y, fundamentalmente, simétricos, el diseño debe garantizar la existencia de 2 o más puntos dentro de la ventana, es decir, el diseño no puede ser *ralo*. En esta situación concreta, el resultado anterior también asegura que el hessiano del problema de minimización sea mayor que cero, con lo cual el punto estacionario

es realmente un mínimo. Si se consideran las segundas derivadas parciales con respecto a las β, se obtiene el hessiano

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} K(x_i - x) & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x) \\ \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x) & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h(x_i - x) \end{vmatrix} = S_{N,0,2,1} S_{N,0,0,1} - S_{N,0,1,1}^2$$

En resumen, circunscribiéndose a esa clase –amplia pero no general– de diseños regulares que garantizan que el denominador sea estrictamente positivo, el descriptor SLL, que se denotará por α_L, será $\alpha_L(x) = \hat{\beta}_0(x) = B_0(x)$.

5.1.2.2. Expresiones alternativas del descriptor

La expresión de $B_0(x)$ admite formas alternativas, por ejemplo, la de suavizador lineal

Resultado 80

$$B_0(x) = \sum_{i=1}^{N} Y_i w_i(x, h_n)$$

Demostración.-

$$B_0(x) = \hat{\beta}_0(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} \left[\sum_{j=1}^{N} (x_j - x)^2 K_{hj} - (x_i - x) \sum_{j=1}^{N} (x_j - x) K_{hj} \right]}{\sum_{i=1}^{N} K_{hi} \left[\sum_{j=1}^{N} (x_j - x)^2 K_{hj} - (x_i - x) \sum_{j=1}^{N} (x_j - x) K_{hj} \right]}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i W_i(x)}{\sum_{i=1}^{N} W_i(x)} = \sum_{i=1}^{N} Y_i \frac{W_i(x)}{\sum_{i=1}^{N} W_i(x)} = \sum_{i=1}^{N} Y_i w_i(x, h_n)$$

o por simplificar la notación

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i W_i}{\sum_{i=1}^{N} W_i} = \sum_{i=1}^{N} Y_i \frac{W_i}{\sum_{i=1}^{N} W_i}$$

siendo

$$W_i = K_{hi} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} - (x_i - x) K_{hi} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} = K_{hi} \left[S_{N,0,2,1} - (x_i - x) S_{N,0,1,1} \right]$$

Q.E.D.

Aunque los $w_i(x,h)$ suman la unidad pueden tomar valores positivos o negativos, sin embargo hay una propiedad muy interesante de estos coeficientes en relación con el sesgo que se presenta a continuación

Resultado 81

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)\,w_i(x,h_n)=0$$

Demostración.- Considérese que $\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)\,W_i = S_{N,0,1,1}S_{N,0,2,1}-S_{N,0,2,1}S_{N,0,1,1}$ Q.E.D.

Cuando el núcleo es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3\to\infty$, otra forma alternativa de expresar el descriptor SLL es

$$\hat{\beta}_0(x)=B_0(x)=\frac{S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1}-S_{N,1,1,1}S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}-S_{N,0,1,1}^2}=$$

$$=\frac{S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,2,1}}\frac{S_{N,1,0,1}-\frac{S_{N,1,1,1}S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}}{S_{N,0,0,1}-\frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,2,1}}}=\frac{S_{N,1,0,1}-S_{N,1,1,1}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}}{S_{N,0,0,1}\left(1-\frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1}}\right)}=$$

$$=\frac{S_{N,1,0,1}-S_{N,1,1,1}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}}{S_{N,0,0,1}}\left(1-\frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1}}+o\left(\frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1}}\right)\right)=$$

$$=\frac{S_{N,1,0,1}-S_{N,1,1,1}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}}{S_{N,0,0,1}}\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=\left(\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}-\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)$$

porque

$$\frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1}}<1,$$

salvo en los casos patológicos, que no se están considerando. Obsérvese que

$$1-\frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1}}+o\left(\frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1}}\right)$$

no es aleatorio según el diseño fijo.

Por otra parte, si se denota $N(x)=S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}-S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}$ y se define $\beta_L(x):=\frac{N(x)}{D(x)}$, se verifica la siguiente acotación asintótica

Proposición 31 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Bajo la condición HHM, si $nh_n^3\to\infty$, entonces* $|\beta_L(x)|\leq O\left(\text{máx}_{V_{x,h}}|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right)$

Demostración.- Para el denominador se verifica que si el núcleo es de soporte compacto

$$\frac{1}{N^2}\left(S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}-S_{N,0,1,1}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}=$$

$$=\left[h_n^0f(x)\alpha_0(K)+O(h_n)+O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)\right]\left[h_n^2f(x)\alpha_2(K)+O(h_n^3)+O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)\right]-$$

$$-\left[h_nf(x)\alpha_1(K)+O(h_n^2)+O\left(\frac{1}{Nh_n}\right)\right]^2=$$

$$=\left[f(x)\alpha_0(K)+O(h_n)\right]\left[h_n^2f(x)\alpha_2(K)+O(h_n^3)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]-$$

$$-\left[h_nf(x)\alpha_1(K)+O(h_n^2)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]^2=h_n^2f^2(x)\left(\alpha_2(K)-\alpha_1^2(K)\right)+O(h_n^3)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Y para el numerador

$$\frac{1}{N^2}\left|S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}-S_{N,1,0,1}S_{N,0,1,1}\right|\leq\left|\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right|+\left|\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right|\left|\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right|+\left|\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right|\left|\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right|\leq$$

$$\leq O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n^{1-1+1}\right)O\left(1\right)+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)O\left(h_n\right)=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right),$$

por tanto

$$\left|\beta_L(x)\right|\leq\frac{O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)}{Ch_n^2\left(1+o(1)\right)}=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\frac{1}{h_n}\right),$$

bajo la hipótesis de que $nh_n^3\to\infty$ Q.E.D.

Observación.- De la demostración se deduce que, si $nh_n^3 \to \infty$ y el núcleo es de soporte compacto, el denominador del descriptor es asintóticamente equivalente a

$$h_n^2 f^2(x)\left(\alpha_2(K) - \alpha_1^2(K)\right)$$

y que

$$\frac{1}{D(x)} = O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)$$

de modo análogo a (3.4).

Si se define $\alpha_S^{[X-x]}(x) := \frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N0,0,1}}$, se verifica la siguiente igualdad

Proposición 32

$$\alpha_L(x) = \alpha_S(x) - \beta_L(x)\alpha_S^{[X-x]}(x)$$

Demostración.-

$$\alpha_L(x) = \frac{S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1} - S_{N,1,1,1}S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} - S_{N,0,1,1}^2} = \frac{\frac{S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1} - S_{N,1,1,1}S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}^2}}{\frac{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} - S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,0,1}^2}} =$$

$$= \frac{\frac{S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}^2} - \frac{S_{N,1,1,1}S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}^2}}{\frac{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}^2} - \frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,0,1}^2}} = \frac{\frac{S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,1,1,1}S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,0,1}}}{\frac{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,0,1}}} =$$

$$= \frac{\frac{S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,1,1,1}S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,0,1}}}{\frac{S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,0,1}^2}}$$

Por otro lado

$$\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1} - S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1} - S_{N,0,1,1}^2}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} =$$

$$= \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{\frac{S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1} - S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}^2}}{\frac{S_{N,0,2,1}S_{N,0,0,1} - S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,0,1}^2}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} =$$

$$= \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}}{\frac{S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,0,1}^2}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} =$$

$$= \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\left(\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\right)^2}{\frac{S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,0,1,1}^2}{S_{N,0,0,1}^2}} =$$

$$= \frac{\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S^2_{N,0,1,1}}{S^2_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} + \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\left(\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\right)^2}{\frac{S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S^2_{N,0,1,1}}{S^2_{N,0,0,1}}} =$$

$$= \frac{\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}}{\frac{S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S^2_{N,0,1,1}}{S^2_{N,0,0,1}}}$$

de donde se obtiene la igualdad Q.E.D.

Observación.- De la demostración se deduce que $S_{N,1,0,1} - \alpha_L(x)S_{N,0,0,1} - \beta_L(x)S_{N,0,1,1} = 0$ y, por tanto,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right)K_h(x_i - x) = 0. \tag{5.2}$$

La igualdad de la proposición permite, por una parte, ver al descriptor de la siguiente forma $\alpha_L(x) = \alpha_S^{[Y-\beta(X-x)]}(x)$. Y, por otra, acotarlo asintóticamente.

Corolario 75 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Bajo la condición HHM, si $nh_n^3 \to \infty$, entonces $\alpha_L(x) = O\left(\text{máx}_{V_{x,h}}|Y_i|\right)$*

Demostración.-

$$|\alpha_L(x)| \leq |\alpha_S(x)| + |\beta_L(x)|\left|\alpha_S^{[X-x]}(x)\right| \leq \text{máx}\,|Y_i| + \text{máx}\,|Y_i| O\left(\frac{1}{h_n}\right)h_n =$$

$$= \text{máx}\,|Y_i| + \text{máx}\,|Y_i| O\left(1\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)$$

Q.E.D.

5.1.2.3. Estimadores diversos

Dado que sólo se conoce los elementos de una muestra probabilística,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \beta_0(x) - \beta_1(x)(x_i - x)\right)^2\frac{1}{h_n}K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)$$

se estima mediante

$$\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \beta_0(x) - \beta_1(x)(x_i - x)\right)^2\frac{1}{h_n}K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)\frac{I_i}{\pi_i},$$

como $\hat{\beta}_0(x) = B_0(x)$ y $\hat{\beta}_1(x) = B_1(x)$ no se pueden calcular, se procede a minimizar la siguiente expresión

$$\min_{B_0 B_1} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - B_0(x) - B_1(x)(x_i - x))^2 \frac{1}{h_n} K\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right) \frac{I_i}{\pi_i},$$

o simplificando la notación

$$\min_{B_0 B_1} \sum_{i=1}^{N} [Y_i - B_0 - B_1(x_i - x)]^2 K_h (x_i - x) \frac{I_i}{\pi_i}$$

Para ello se consideran las derivadas parciales con respecto a cada uno de los B

$$\sum_{i=1}^{N} [Y_i - B_0 - B_1(x_i - x)] K_h (x_i - x) \frac{I_i}{\pi_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} [Y_i - B_0 - B_1(x_i - x)] (x_i - x) K_h (x_i - x) \frac{I_i}{\pi_i} = 0$$

con lo cual,

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} I_i^{a)} = B_0 \sum_{i=1}^{N} K_{hi} I_i^{a)} + B_1 \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} = B_0 \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} + B_1 \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)}$$

Aplicando la regla de Cramer, se obtiene que $\hat{B}_0(x) = \frac{D_0^*}{D^*}$ donde

$$D_0^* = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} I_i^{a)} & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)} \end{vmatrix}$$

y

$$D^* = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} K_{hi} I_i^{a)} & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \\ \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)} \end{vmatrix} \neq 0$$

por tanto

$$\hat{B}_0(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)} - \sum_{i=1}^{N} Y_i (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)}}{\sum_{i=1}^{N} K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)} - \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)}\right]^2} =$$

$$= \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}},$$

estimador de $B_0(x)$ siempre que el denominador no sea nulo, de ahí la notación.

Observación.- Formalmente, coincide con el estimador que se obtendría mediante el procedimiento de sustitución de totales.

Estudio del denominador

Resultado 82 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1} \geq 0.$$

Demostración.- Análoga al resultado para la p.f. Q.E.D.

En caso de que el denominador sea estrictamente positivo el hessiano

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} K(x_i - x) I_i^{a)} & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x) I_i^{a)} \\ \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_h(x_i - x) I_i^{a)} & \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_h(x_i - x) I_i^{a)} \end{vmatrix} = \hat{S}_{N,0,2,1}\hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}$$

es mayor que 0, por tanto, se está en presencia de un mínimo.

Estudio del numerador Las posibilidades de que se anule el denominador son:

1. Sólo hay un punto de la muestra con concomitante dentro de la ventana, entonces

$$\hat{S}_{N,0,2,1}\hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1} = (x_i - x)^2 K_h(x_i - x) I_i^{a)} K_h(x_i - x) I_i^{a)} - \left((x_i - x) K_h(x_i - x) I_i^{a)}\right)^2 = 0$$

2. La segunda situación es que exista la siguiente proporcionalidad

$$\frac{(x_i - x)\left(K_h(x_i - x) I_i^{a)}\right)^{1/2}}{\left(K_h(x_i - x) I_i^{a)}\right)^{1/2}} = \frac{(x_k - x)\left(K_h(x_k - x) I_k^{a)}\right)^{1/2}}{\left(K_h(x_k - x) I_k^{a)}\right)^{1/2}} \quad i \neq k$$

si $K_h(x_i - x) \neq 0$ y $K_h(x_k - x) \neq 0$, en cuyo caso

$$(x_i - x) = (x_k - x) \quad i \neq k$$

es decir $x_i = x_k, \quad i \neq k$. Esta situación no se da en diseño fijo sin repeticiones.

3. La tercera posibilidad es que $K_h(x_k - x)I_k^{a)} = 0 \quad k = 1, \ldots, N$

En cualquiera de los dos casos patológicos, 1 y 3, también se anularía el numerador. En el tercer caso es evidente y en el primero

$$\hat{S}_{N,1,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,1,1} = Y_i K_{hi} I_i^{a)} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)} - Y_i (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} = 0$$

Expresión alternativa También se puede expresar como suavizador lineal

$$\hat{B}_0(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i \left[K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)} - (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \right]}{\sum_{i=1}^{N} \left[K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)} - (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \right]} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i W_{i,s}(x)}{\sum_{i=1}^{N} W_{i,s}(x)}$$

o simplificando la notación

$$\hat{B}_0(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i W_i(s)}{\sum_{i=1}^{N} W_i(s)} = \sum_{i=1}^{N} Y_i w_i(x, h_n, s)$$

siendo los coeficientes

$$W_i(s) = K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x)^2 K_{hi} I_i^{a)} - (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)}$$

Ejemplo 42 *En MASS/R*(N, n)

$$W_i(s) = K_h (x_i - x) \frac{I_i}{\pi_i} \left[\hat{S}_{N,0,2,1} - (x_i - x) \hat{S}_{N,0,1,1} \right] = \frac{N}{n} K_h (x_i - x) \left[\hat{S}_{N,0,2,1} - (x_i - x) \hat{S}_{N,0,1,1} \right] I_i$$

siendo

$$\hat{S}_{N,r,s,t} = \sum_{i=1}^{N} Y_i^r (x_i - x)^s K_h^t (x_i - x) I_i^{a)} = \sum_{i=1}^{N} Y_i^r (x_i - x)^s K_h^t (x_i - x) \frac{N}{n} I_i =$$

$$= \frac{N}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j^r \, (x_j - x)^s K_h^t(x_j - x) = \frac{N}{n} S_{n,r,s,t}$$

y

$$\hat{B}_0(x) = \frac{S_{n,1,0,1} S_{n,0,2,1} - S_{n,1,1,1} S_{n,0,1,1}}{S_{n,0,0,1} S_{n,0,2,1} - S_{n,0,1,1}^2}$$

□

Este suavizador coincide con el analógico. También admite la siguiente expresión

$$\hat{B}_0(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j K_{hj} \left[S_{n,0,2,1} - (x_j - x) \, S_{n,0,1,1} \right]}{\sum_{j=1}^{n} K_{hj} \left[S_{n,0,2,1} - (x_j - x) \, S_{n,0,1,1} \right]}.$$

Observación.- En los casos singulares de que $n = 1$ o bien de que sólo existe un j tal que $K_{hj} \neq 0$, se tiene que

$$W_j(s) = K_{hj} I_j^{a)} \left[(x_j - x)^2 K_{hj} I_j^{a)} \right] - \left[(x_j - x) K_{hj} I_j^{a)} \right] (x_j - x) K_{hj} I_j^{a)} = K_{hj}^2 (x_j - x)^2 I_j^{a)} - K_{hj}^2 (x_j - x)^2 I_j^{a)} = 0,$$

que sería una de las situaciones patológicas genuinas en que se anula el denominador. Además, si existe un único elemento dentro de la ventana, $D^* = 0$ porque la segunda columna es igual a la primera multiplicada por $(x_i - x)$. El primer caso, $n = 1$, es una situación que carece de sentido práctico porque $n \to \infty$.

Definición del estimador El estimador $\hat{\alpha}_L(x)$ se define fragmentariamente. Como $\widehat{\alpha_L}(x) := \hat{B}_0(x)$ si hay varios elementos de la muestra dentro de la ventana. En caso contrario, se distinguirán dos situaciones. Si hay exactamente uno, por ejemplo (Y_j, x_j), $\widehat{\alpha_L}(x) := Y_j$ para mantener la analogía con la forma de seudomedia ponderada. Si no hay ningún elemento $\widehat{\alpha_L}(x) := 0$, para mantener la analogía con los estimadores de capítulos anteriores.

En el caso de emplear núcleos de soporte compacto, el estimador de Harms&Duchesne(2010) no está definido puesto que su denominador se anula en numerosos casos: cuando la muestra es vacía –posibilidad que se da porque estos autores consideran planes de muestreo muy generales– o cuando no siendo vacía, ningún elemento de la covariable se encuentra dentro de la ventana o sólo se encuentra un único elemento para el caso del suavizador lineal local. De lo que se sigue que entonces no es un estimador.

Como estos autores consideran la posibilidad de polinomios de grado arbitrario, aunque no la tratan matemáticamente, esta patología se presenta en más situaciones, por lo que parece que no se puede obviar este problema, de hecho Breidt&Opsomer(2000) lo tratan introduciendo una corrección que conduce a un estimador diferente de $\widehat{\alpha_L}$ en el caso de grado 1.

BREIDT&OPSOMER(2000) hablan del mismo problema, pero más general, necesitan $p+1$ observaciones dentro del soporte del núcleo para poder resolver el sistema de ecuaciones normales

> No es un problema en la práctica, porque se puede evitar, basta con seleccionar una ventana que sea suficientemente grande para hacer que la matriz sea invertible [...] Sin embargo esta situación no puede ser excluida teóricamente en tanto en cuanto la ventana se considera fija para una población dada.

Estos autores consideran un estimador muestral ajustado que garantiza su existencia para cualquier muestra. El estimador que proponen está emparentado con la regresión contraída 'ridge'. También hablan de la solución de utilizar núcleos de soporte no compacto (aunque esto tiene el problema del término residual). Además apuntan que

> [...] en la práctica, sin embargo, se ha visto que tales núcleos incrementan la complejidad computacional del ajuste polinomial local y dan lugar a ajustes menos satisfactorios comparados con los obtenidos con núcleos con soporte compacto.

Como se ve, Breidt y Opsomer se preocupan por el problema de que la matriz sea invertible. En el caso de HARMS&DUCHESNE(2010) se trataría de la inversión de una matriz que proviene del producto de matrices de dimensión aleatoria –aunque en el artículo no quede siempre claro este extremo, quizás por una errata, al indicar en la p. 116 $\mathbf{Z}_s(x)$ $n \times (p+1)$ en lugar de $n_s \times (p+1)$– lo que indudablemente agrava el problema teórico y el práctico de la inestabilidad numérica.

De hecho HARMS&DUCHESNE(2010) acaban por suponer que es invertible lo que desde luego reduce el campo de aplicabilidad de los resultados obtenidos dado que esta hipótesis no siempre se verifica, ni tan siquiera en MASS/R. Obsérvese que si como solución se considerara solo las muestras que no anulan el denominador ya no se estaría ante MASS/R, sino ante otro tipo de diseño que además dependería de la variable $\mathcal{X}$.

$p-$Insesgadez asintótica del denominador Se quiere estudiar la $p-$esperanza de la expresión $\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}$, es decir,

$$E_p\left[\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}\right] = E_p\left[\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}\right] - E_p\left[\hat{S}^2_{N,0,1,1}\right]$$

Resultado 83 *En MASS/R(N,n)*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}\right] = S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} + \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[NS_{N,0,2,2} - S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}\right]$$

Demostración.- Se obtiene la igualdad sin más que considerar $r=0, s=0, t=1$ y $r'=0, s'=2, t'=1$ en (5.1) Q.E.D.

Ejemplo 43 *En MASS/R(N,n) se verifica que*

$$E_p\left[\frac{1}{n}S_{n,0,0,1}\frac{1}{n}S_{n,0,2,1}\right]=\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]$$

□

Ejemplo 44 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si* $nh_n^3\to\infty$

$$E_p\left[\frac{1}{n}S_{n,0,0,1}\frac{1}{n}S_{n,0,2,1}\right]=\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}+O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

□

Resultado 84 *En MASS/R(N, n)*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,0,1,1}\hat{S}_{N,0,1,1}\right]=S_{N,0,1,1}S_{N,0,1,1}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[NS_{N,0,2,2}-S_{N,0,1,1}S_{N,0,1,1}\right]$$

Demostración.- Se obtiene la igualdad sin más que considerar $r=0,s=1,t=1$ y $r=0,s=1,t=1$ en (5.1) Q.E.D.

Ejemplo 45 *En MASS/R(N, n)*

$$E_p\left[\frac{1}{n^2}S_{n,0,1,1}^2\right]=\frac{1}{N^2}S_{N,0,1,1}^2+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-\frac{1}{N^2}S_{N,0,1,1}^2\right]$$

□

Corolario 76 *En MASS/R(N, n)*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}-\hat{S}_{N,0,1,1}^2\right]=S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}-S_{N,0,1,1}^2-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}-S_{N,0,1,1}^2\right]$$

Demostración.- Al considerar la diferencia miembro a miembro de las dos igualdades de los dos últimos resultados, obsérvese que el primer sumando del paréntesis angular coincide en ambos Q.E.D.

Corolario 77 *En MASS/R(N, n)*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}-\hat{S}_{N,0,1,1}^2\right]=\left(S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}-S_{N,0,1,1}^2\right)\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Observación.- El valor esperado del denominador es asintóticamente equivalente al descriptor correspondiente. Además, bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$, sería un estimador asintóticamente $p-$insesgado de $D(x)$

$$B_p\left[\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}\right] = \left(S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} - S^2_{N,0,1,1}\right) O\left(\frac{1}{n}\right)$$

De ahí que una buena notación será $\hat{D}(x) = \hat{S}_{N,0,2,1}\hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}$ y, por analogía, también se denotará $\hat{N}(x) = \hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}_{N,0,1,1}\hat{S}_{N,1,0,1}$

Ejemplo 46 *En MASS/R*(N,n)

$$E_p\left[\frac{1}{n}S_{n,0,0,1}\frac{1}{n}S_{n,0,2,1} - \frac{1}{n}S^2_{n,0,1,1}\right] = \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1} - \frac{1}{N}S^2_{N,0,1,1} -$$
$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1} - \frac{1}{N}S^2_{N,0,1,1}\right]$$

□

Ejemplo 47 *En MASS/R*(N,n)

$$E_p\left[\frac{1}{n}S_{n,0,0,1}\frac{1}{n}S_{n,0,2,1} - \frac{1}{n}S^2_{n,0,1,1}\right] = \left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1} - \frac{1}{N}S^2_{N,0,1,1}\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

□

$\hat{B}_0(x)$ admite la siguiente descomposición o expresión alternativa.

Proposición 33

$$\hat{B}_0(x) = \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{N}(x)}{\hat{D}(x)}\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}$$

Demostración.-

$$\hat{B}_0(x) = \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}} = \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}}{\frac{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}} =$$

$$= \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}}{\frac{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}} = \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,0,1}}}{\frac{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,0,1}}} =$$

$$= \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,0,1}\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}\hat{S}_{N,0,0,1}}}{\frac{\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}}$$

Por otro lado

$$\frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{N}(x)}{\hat{D}(x)}\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} = \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}_{N,0,1,1}\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}}{\frac{\hat{S}_{N,0,2,1}\hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}}\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} =$$

$$= \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}}{\frac{\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}}\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} = \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\left(\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\right)^2}{\frac{\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}} =$$

$$= \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,1,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} + \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\left(\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\right)^2}{\frac{\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}} =$$

$$= \frac{\frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,1,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}}{\frac{\hat{S}_{N,0,2,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}^2_{N,0,1,1}}{\hat{S}^2_{N,0,0,1}}}$$

Q.E.D.

Si se define $\hat{\beta}_L(x) := \frac{\hat{N}(x)}{\hat{D}(x)}$ y $\hat{\beta}_L := 0$ cuando el denominador sea nulo, se tiene que $\widehat{\alpha_L}(x) = \widehat{\alpha_S}(x) - \hat{\beta}_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)$ donde $\widehat{\alpha}_S(x) = \frac{\hat{S}_{N,1,0,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}$ y $\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) = \frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}}$ si $\hat{S}_{N,0,0,1} \neq 0$, y ambos nulos si $\hat{S}_{N,0,0,1} = 0$.

$p-$Insesgadez asintótica de $\hat{N}(x)$ Se quiere estudiar la $p-$esperanza de $\hat{N}(x) = \hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}_{N,0,1,1}\hat{S}_{N,1,0,1}$. Por tanto, para su tratamiento en el caso de MASS/R es interesante las siguientes igualdades que se demuestran de modo análogo a otras anteriores

Resultado 85 *En MASS/R(N,n)*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] = S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1} + \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[NS_{N,1,1,2} - S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}\right]$$

$$E_p\left[\hat{S}_{N,0,1,1}\hat{S}_{N,1,0,1}\right] = S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1} + \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[NS_{N,1,1,2} - S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}\right]$$

Demostración.- Basta considerar $r=1,s=1,t=1$ y $r'=0,s'=0,t=1$ y $r=0,s=1,t=1$ y $r'=1,s'=0,t=1$ respectivamente en (5.1) Q.E.D.

Corolario 78 *En MASS/R(N, n)*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,0,1}-\hat{S}_{N,0,1,1}\hat{S}_{N,1,0,1}\right]=S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}-S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}-S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}\right]$$

Corolario 79 *En MASS/R(N, n),*

$$E_p\left[\hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,0,1}-\hat{S}_{N,0,1,1}\hat{S}_{N,1,0,1}\right]=\left(S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}-S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Corolario 80

$$B_p\left[\hat{S}_{N,1,1,1}\hat{S}_{N,0,0,1}-\hat{S}_{N,0,1,1}\hat{S}_{N,1,0,1}\right]=\left(S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}-S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}\right)O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Observación.- El valor esperado del numerador es asintóticamente equivalente al descriptor correspondiente. Además, bajo la condición HHM, será un estimador asintóticamente $p-$insesgado de $N(x)$ si $nh_n\to\infty$ y el máximo se comporta adecuadamente, de ahí la notación empleada.

Lema 22

$$\frac{\hat{N}(x)}{\hat{D}(x)}=\frac{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(Y_i-Y_j\right)\left(x_i-x_j\right)K_{hi}K_{hj}I_i^{a)}I_j^{a)}}{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(x_i-x_j\right)^2K_{hi}K_{hj}I_i^{a)}I_j^{a)}}$$

Demostración.-

$$\frac{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(Y_i-Y_j\right)\left(x_i-x_j\right)K_{hi}K_{hj}I_i^{a)}I_j^{a)}}{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(x_i-x_j\right)^2K_{hi}K_{hj}I_i^{a)}I_j^{a)}}=\frac{\frac{1}{2}\sum\sum\left(Y_i-Y_j\right)\left(x_i-x_j\right)K_{hi}K_{hj}I_i^{a)}I_j^{a)}}{\frac{1}{2}\sum\sum\left(x_i-x_j\right)^2K_{hi}K_{hj}I_i^{a)}I_j^{a)}}$$

El numerador es igual a

$$\frac{1}{2}\sum\sum\left(Y_i-Y_j\right)\left(x_i-x-x_j+x\right)K_{hi}K_{hj}I_i^{a)}I_j^{a)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum\sum\left(Y_i(x_i-x)-Y_i(x_j-x)-Y_j(x_i-x)+Y_j(x_j-x)\right)K_{hi}K_{hj}I_i^{a)}I_j^{a)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum Y_i(x_i-x)K_{hi}I_i^{a)}\sum K_{hj}I_j^{a)}+\sum K_{hi}I_i^{a)}\sum Y_j(x_j-x)K_{hj}I_j^{a)}\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sum Y_iK_{hi}I_i^{a)}\sum\left(x_j-x\right)K_{hj}I_j^{a)}+\sum(x_i-x)K_{hi}I_i^{a)}\sum Y_jK_{hj}I_j^{a)}\right]=$$

$$= \sum Y_i (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \sum K_{hj} I_j^{a)} - \sum Y_i K_{hi} I_i^{a)} \sum (x_j - x) K_{hj} I_j^{a)} =$$

$$= \sum Y_i (x_i - x) K_{hi} I_i^{a)} \sum K_{hj} I_j^{a)} - \sum Y_i K_{hi} I_i^{a)} \sum (x_j - x) K_{hj} I_j^{a)} =$$

$$= \hat{S}_{N,1,1,1} \hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}_{N,1,0,1} \hat{S}_{N,0,1,1}$$

y para el denominador, considérese $Y_i = x_i - x$ e $Y_j = x_j - x$

$$\frac{1}{2} \sum \sum (x_i - x_j)^2 K_{hi} K_{hj} I_i^{a)} I_j^{a)} = \hat{S}_{N,0,2,1} \hat{S}_{N,0,0,1} - \hat{S}_{N,0,1,1} \hat{S}_{N,0,1,1}$$

Q.E.D.

Proposición 34 *En MASS/R(N, n)*

$$\left| \hat{\beta}_L(x) \right| \leq \max_{i \neq j : V_{xh}} \left| \frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j} \right|$$

Demostración.- Si el denominador no se anula

$$\left| \hat{\beta}_L(x) \right| = \left| \frac{\hat{N}(x)}{\hat{D}(x)} \right| = \left| \frac{\sum_{i \neq j}^{(N^{(2)})} \frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j} (x_i - x_j)^2 K_{hi} K_{hj} I_i I_j}{\sum_{i \neq j}^{(N^{(2)})} (x_i - x_j)^2 K_{hi} K_{hj} I_i I_j} \right| \leq \max_{i \neq j : V_{xh}} \left| \frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j} \right|$$

si el denominador es nulo, $\left| \hat{\beta}_L(x) \right| = 0$, por tanto también se verifica la desigualdad Q.E.D.

De un modo totalmente análogo, se probaría que

$$|\beta_L(x)| \leq \max_{i \neq j : V_{xh}} \left| \frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j} \right|$$

Resultado 86 *En MASS/R(N, n), si $K(\cdot)$ es de soporte compacto, entonces*

$$\left| \frac{\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1}} - \frac{\frac{1}{N} S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1}} \right| = O(h_n)$$

Demostración.-

$$\left| \frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{\hat{S}_{N,0,0,1}} \right| \leq h_n \quad \text{y} \quad \left| \frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} \right| \leq h_n$$

Q.E.D.

Resultados sobre momentos del numerador y denominador

Lema 23 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r+1,s+1,t+1}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r+1,s,t+1}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_{hi}^t-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_{hi}^t-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\right\}$$

Demostración.- Si se considera en el resultado (2.4), los siguientes estimadores

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1},\hat{\theta}_2=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1},\hat{\theta}_3=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1},\hat{\theta}_4=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1},\hat{\theta}_5=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t},$$

se obtiene que

$$COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t};\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right)=$$

$$=\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1},\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}\right]+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1},\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}\right]-$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1},\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}\right]-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1},\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]-$$

$$-E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]$$

que será igual a

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,r+1,s+1,t+1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)+$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)-$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)-$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,r+1,s,t+1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_{hi}^t-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_{hi}^t-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r+1,s+1,t+1}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r+1,s,t+1}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_{hi}^t-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_{hi}^t-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\right\}$$

Q.E.D.

Proposición 35 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right).$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)+$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}\right)\right]$$

Demostración.- Aplicando el lema anterior para $r=0$, $s=0$ y $t=1$, se obtiene

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^2\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+$$
$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^2\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}$$

Como se verá a continuación, los últimos sumandos se pueden desarrollar aplicando (2.1) y (2.2)

$$M_{12}=A_{12}-2A_{11}A_{01}-A_{10}A_{02}+2A_{10}A_{01}^2$$

$$M_{111}=A_{111}-A_{110}A_{001}-A_{101}A_{010}-A_{100}A_{011}+2A_{100}A_{010}A_{001}.$$

Por tanto, en este caso concreto,

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]^2\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}$$

será igual a

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}$$

multiplicado por la diferencia

$$\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,3}-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S^2_{N,0,0,1}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,3}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)$$

es decir

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\left(I-II\right).$$

Por tanto

$$I-II=-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}-$$
$$+\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}=$$

$$=-\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}+$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}=$$

$$=-\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)-$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}\right)$$

que si se multiplica por

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}$$

se obtiene que

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)+$$

$$+2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}\right)\Bigg]$$

Q.E.D.

Corolario 81 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n\to\infty$ se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)+$$

$$+2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^2}\right)$$

Demostración.- Por la proposición anterior

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\Bigg[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)+$$

$$+2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left[O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)O\left(1\right)-O\left(1\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+\left(O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)-O\left(h_n\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right)\right)+\left(O\left(h_n\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)O(1)-O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O(1)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)\right)$$

Por consiguiente

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)+$$
$$\left.+2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}\right)\right]+$$
$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^2}\right)$$

Q.E.D.

Observación.- Los monomios, homogéneos en cada subíndice, que son producto de dos S son de mayor orden de magnitud que los formados por tres. Y de la demostración se deduce que en las mismas circunstancias, bajo la condición HHM, si el núcleo es de soporte compacto y $nh_n\to\infty$, también se puede escribir

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)+$$
$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)$$

o bien que

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{N}(x)\right]=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n}\right)$$

Proposición 36 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,2,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}\right)+$$
$$\left.+2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right]$$

Demostración.- En este caso según el lema 23

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r+1,s+1,t+1}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r+1,s,t+1}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_{hi}^t-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[Y_i^r\left(x_i-x\right)^s K_{hi}^t-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,2,1,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]\right\}$$

Como se verá a continuación, los últimos sumandos se pueden desarrollar aplicando (2.1) y (2.2) que resultan igual a

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}$$

multiplicado por la diferencia

$$\left(\frac{1}{N}S_{N,2,1,3}-\frac{1}{N}S_{N,2,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{N}S_{N,2,1,3}-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}+2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)$$

es decir

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\left(I-II\right).$$

Además

$$I-II=-\frac{1}{N}S_{N,2,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}+$$
$$+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,1,0,1}=$$
$$=-\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,2,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}\right)+$$
$$+2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N^2}S^2_{N,1,0,1}\right)=$$

que si se multiplica por

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}$$

da lugar a que

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,2,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}\right)+$$
$$\left.+2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right]$$

Q.E.D.

Corolario 82 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$, se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1};\hat{N}(x)\right] = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,2,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right) +$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}\right) +$$

$$+2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{n^2}\right)$$

Observación.- De la demostración se deduce que en las mismas circunstancias

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1};\hat{N}(x)\right] = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,2,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right) +$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{h_n}{n}\right)$$

o bien

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1};\hat{N}(x)\right] = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{n}\right)$$

Proposición 37 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\hat{N}(x)\right] = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1 - \frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right) +\right.$$

$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right) +$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Demostración.- En este caso según el lema

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]^2\right\}$$

Como se verá a continuación, los últimos sumandos se pueden desarrollar aplicando (2.1) y (2.2)

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_i\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right]\left[K_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[Y_iK_{hi}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]\left[\left(x_i-x\right)K_{hi}-S_{N,0,1,1}\right]^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\left(I-II\right).$$

Por una parte

$$I=\frac{1}{N}S_{N,1,2,3}-\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}$$

Por otra

$$II=\frac{1}{N}S_{N,1,2,3}-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2$$

Por tanto

$$I - II = -\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} -$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2} + 2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} +$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2} + 2\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} - 2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2 =$$

$$= -\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right) +$$

$$-\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right) +$$

$$-2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)$$

que si se multiplica por

$$\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2} = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}$$

se obtiene que

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}; \hat{N}(x)\right] = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1 - \frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right) +\right.$$

$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right) +$$

$$\left.+2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]$$

Q.E.D.

Corolario 83 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM si $nh_n \to \infty$ se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}; \hat{N}(x)\right] = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right) +$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)+$$

$$+2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n^2}\right)$$

Observación.- De la demostración se deduce que en las mismas circunstancias

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n^2}{n}\right)$$

Si el núcleo es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3\to\infty$,

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\hat{N}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n^2}{n}\right)$$

o bien

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\hat{N}(x)\right]=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)$$

Se intentará ser más breve en el tratamiento de los resultados relativos al denominador

Lema 24 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t};\hat{D}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+2,t+1}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}\right)-\right.$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1}\right)-$$

$$\left.-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]$$

Demostración.- Si se considera en (2.4), los siguientes estimadores

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}, \hat{\theta}_2 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{\theta}_3 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \hat{\theta}_4 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \hat{\theta}_5 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}$$

se obtiene que

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}; \hat{D}(x)\right] = COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}; \frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}\right] + \frac{1}{N}S_{N,0,2,1}COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}\right] -$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t}\right] +$$

$$+E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t} - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right] -$$

$$-E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,r,s,t} - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,r,s+2,t+1} - \frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right) -$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right) +$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[(x_i-x)^2 K_{hi} - \frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right]\left[K_{hi} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right]\left[Y_i^r (x_i-x)^s K_{hi}^t - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\left[(x_i-x)K_{hi} - S_{N,0,1,1}\right]^2\left[Y_i^r (x_i-x)^s K_{hi}^t - \frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+2,t+1} + \frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}\right) -$$

$$-2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right) -$$

$$-2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right) +$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{N}\left(S_{N,r,s+2,t+2}-S_{N,0,2,2}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}-S_{N,r,s+2,t+1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}+2S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{N}\left(S_{N,r,s+2,t+2}-2S_{N,r,s+1,t+1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}S_{N,0,2,2}+2S_{N,r,s,t}\frac{1}{N}S^2_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+2,t+1}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}\right)-$$

$$-2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)-$$

$$-2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)+$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+2,t+1}-\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}+2\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1}+2\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\frac{1}{N}S^2_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+2,t+1}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t+1}\right)+\right.$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)-$$

$$\left.-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s+1,t+1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,r,s,t}\right)\right]$$

Q.E.D.

Proposición 38 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1};\hat{D}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$

$$\cdot \left[\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,1,2,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,2} \right) - \right.$$

$$-2 \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} \right) -$$

$$\left. -2 \left(\frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right) \right]$$

Demostración.- Si se considera $r = 1$, $s = 0$ y $t = 1$ en el lema anterior, se obtiene

$$COV_p \left[\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,0,1}; \hat{D}(x) \right] = \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(1 - \frac{1}{n} \frac{N-2n}{N-2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,1,2,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,2} \right) - \right.$$

$$-2 \left(\frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right) -$$

$$\left. -2 \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right) \right]$$

Q.E.D.

Observación.- También se deduce, bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$, que

$$COV_p \left[\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,0,1}; \hat{D}(x) \right] = \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,1,2,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,2} \right)$$

$$-2 \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} \right) + O \left(\text{máx} \, |Y_i| \, \frac{h_n^2}{n} \right)$$

o bien

$$COV_p \left[\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,0,1}; \hat{D}(x) \right] = O \left(\text{máx} \, |Y_i| \, \frac{h_n}{n} \right)$$

Proposición 39 *En MASS/R(N, n), se verifica que*

$$COV_p \left[\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1}; \hat{D}(x) \right] = \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(1 - \frac{1}{n} \frac{N-2n}{N-2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} \right) - \right.$$

$$-2 \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) -$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\Bigg]$$

Demostración.- Si se considera $r=0$, $s=1$ y $t=1$ en el lema 24

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\hat{D}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)-\right.$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)-$$

$$\left.-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]$$

Q.E.D.

Observación.- También se deduce, bajo la condición HHM, si el núcleo es de soporte compacto y $nh_n\to\infty$, que

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\hat{D}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)$$

$$-2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+O\left(\frac{h_n^3}{n}\right)$$

o bien, si el núcleo es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^5=O(1)$

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1};\hat{D}(x)\right]=O\left(\frac{h_n^3}{n}\right)$$

Proposición 40 *En MASS/R(N,n), se verifica que*

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{D}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)-\right.$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)-$$

$$\left.-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right]$$

Demostración.- Si se considera $r=0$, $s=0$ y $t=1$ en el lema 24

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{D}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{1}{n}\frac{N-2n}{N-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)-\right.$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)-$$

$$\left.-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right]$$

Q.E.D.

Observación.- También se deduce, bajo la condición HHM, si el núcleo es de soporte compacto y $nh_n\to\infty$, que

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{D}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n^2}{n}\right)$$

Si el núcleo es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3\to\infty$

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{D}(x)\right]=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n^2}{n}\right)$$

También se puede escribir

$$COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1};\hat{D}(x)\right]=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)$$

Proposición 41 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2\to\infty$,*

$$E_p\left[\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^2\right]=O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|^2\,h_n}{n}\right)$$

Demostración.- Si se considera en el resultado 27 los siguientes estimadores

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}, \hat{\theta}_2 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{\theta}_3 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \hat{\theta}_4 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}$$

se obtiene que

$$E_p\left\{\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right) - \left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}VAR_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}\right) + \frac{1}{N^2}S^2_{N,1,1,1}VAR_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) +$$

$$+\frac{1}{N^2}S^2_{N,1,0,1}VAR_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) + \frac{1}{N^2}S^2_{N,0,1,1}VAR_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right) +$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) + 2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right) +$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) - 2\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right) -$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) - 2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right) -$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right] -$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right] -$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right] -$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right] +$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\right] +$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right] +$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\right]+$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\right]-$$

$$-2E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{N^2}S^2_{N,0,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,2,2,2}-\frac{1}{N}S^2_{N,1,1,1}\right)+\frac{1}{N}S^2_{N,1,1,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S^2_{N,0,0,1}\right)+$$

$$+\frac{1}{N^2}S^2_{N,1,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-\frac{1}{N}S^2_{N,0,1,1}\right)+\frac{1}{N}S^2_{N,0,1,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}-\frac{1}{N}S^2_{N,1,0,1}\right)+$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)+$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,2,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]+$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\right]+$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right]+$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\right]+$$

$$+2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\right]+$$

$$+E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\right]-$$

$$-2E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right],$$

que será igual a

$$\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

multiplicado por los de orden dos, varianzas y covarianzas

$$O(1)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2 h_n\right)+O(1)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2 h_n^2\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2 h_n^2\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2 h_n^2\right)O\left(1\right)$$

$$+O\left(\max|Y_i|^2\right)O\left(h_n\right)+O\left(\max|Y_i|^2\right)O\left(h_n^2\right)+$$

$$+O\left(h_n^2\right)O\left(\max|Y_i|^2\frac{1}{h_n}\right)+O\left(h_n^2\right)O\left(\max|Y_i|^2\right)+$$

$$+O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O(1)O\left(\max|Y_i|\right)+O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O(1)O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)+$$
$$+O\left(h_n\right)O\left(\max|Y_i|\right)O\left(\max|Y_i|\right)+O\left(h_n\right)O\left(\max|Y_i|\right)O\left(h_n\right)O\left(\max|Y_i|\right)+$$

$$+O(1)O\left(\max|Y_i|\right)O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)+O(1)O\left(\max|Y_i|\right)O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O\left(h_n\right)+$$

$$+O(1)O\left(h_n\right)O\left(\max|Y_i|^2\right)+O(1)O\left(h_n\right)O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O\left(\max|Y_i|\right)+$$

$$+O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O\left(\max|Y_i|\right)O(1)+O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O\left(\max|Y_i|\right)O(1)O\left(h_n\right)+$$

$$+O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O\left(h_n\right)O\left(\max|Y_i|\frac{1}{h_n}\right)+O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O\left(h_n\right)O(1)O\left(\max|Y_i|\right)=$$

$$=O\left(\max|Y_i|^2\,h_n\right)$$

Obsérvese que los segundos sumandos, los que tienen un S más, son de menor orden de magnitud que el primero correspondiente.

También habrá que sumar los de orden tres y cuatro que van a ser de menor orden de magnitud, porque para el tratamiento de los términos de orden tres habrá que considerar

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{1}{n^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

y para los de orden cuatro

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\frac{1}{n^3}=O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\frac{N}{n^3}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Como ejemplo de orden tres

$$\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]=$$

$$= \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \frac{N-n}{N-1} \frac{N-2n}{N-2} \frac{M_{111}}{n^2}$$

donde, por (2.1) M_{111} en este caso es igual a

$$M_{111} = \frac{1}{N} S_{N,1,1,3} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,2} \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} + 2 \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i| \frac{1}{h_n}\right) + O(1) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i| \frac{1}{h_n}\right) O\left(h_n\right) + O(1) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) + O(1) O\left(h_n\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i| \frac{1}{h_n}\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|\, h_n\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i| \frac{1}{h_n}\right)$$

el primero, $\frac{1}{N} S_{N,1,1,3}$, predomina y los binarios predominan sobre el ternario. Por consiguiente

$$\frac{1}{N} S_{N,1,1,1} E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right) \right] =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\, h_n\right) O(1) O(1) O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i| \frac{1}{h_n}\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2 \frac{1}{n^2}\right)$$

Otro ejemplo de término de orden tres

$$2 \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{N-n}{N-1} \frac{N-2n}{N-2} \frac{M_{12}}{n^2}$$

donde, por (2.2) M_{12} en este caso es igual a

$$M_{12} = \frac{1}{N} S_{N,2,2,3} - 2 \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,2,2,2} + 2 \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \right)^2 =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\, h_n\right) + O(1) O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\, h_n\right) + O\left(1\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\, h_n^2\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)$$

el primero, $\frac{1}{N} S_{N,2,2,3}$, predomina y los binarios predominan sobre el ternario. Por consiguiente

$$2 \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \right)^2 \right] =$$

$$= O(1)O(1)O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{n^2}\right)$$

Y, para el tratamiento de los términos de orden cuatro, por ejemplo

$$E_p\left[\left(\tfrac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\tfrac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\tfrac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\tfrac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\tfrac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\tfrac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\tfrac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\tfrac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right] =$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\frac{M_{1111}(\mathfrak{X})}{n^3}+$$

$$+\frac{N-n}{N-1}\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\frac{N}{n^3}\left[M_{1100}(\mathfrak{X})M_{0011}(\mathfrak{X})+M_{1010}(\mathfrak{X})M_{0101}(\mathfrak{X})+M_{1001}(\mathfrak{X})M_{0110}(\mathfrak{X})\right]$$

donde, por (2.3), M_{1111} en este caso es igual a

$$M_{1111} = \frac{1}{N}S_{N,2,2,4}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,3}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,2,2,3}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,2,1,3}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,2,3}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}+$$
$$+\frac{1}{N}S_{N,2,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+$$
$$+\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}+\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}+$$
$$+3\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1} =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{h_n}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right) O(1)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{h_n}\right) O\left(h_n\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right) O(1)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right) O\left(h_n\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right) O(1) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) O\left(h_n\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right) O\left(1\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right) O(1) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+$$
$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right) O(1) O\left(h_n\right) O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{h_n}\right)$$

el primero, $\frac{1}{N}S_{N,2,2,4}$, predomina sobre los binarios y estos sobre los ternarios y estos últimos, a su vez, sobre el cuaternario.

M_{1100}, en este caso, es igual a

$$M_{1100} = A_{1100} - A_{1000}A_{0100} = \frac{1}{N}S_{N,1,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) - O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right) O(1) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)$$

y M_{0011}

$$M_{0011} = A_{0011} - A_{0010}A_{0001} = \frac{1}{N}S_{N,1,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1} =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) - O\left(h_n\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)$$

por tanto

$$M_{1100}M_{0011} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)$$

Para otro de estos productos circulantes

$$M_{1010} = A_{1010} - A_{1000}A_{0010} = \frac{1}{N}S_{N,1,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right) - O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O(h_n) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)$$

$$M_{0101} = A_{0101} - A_{0100}A_{0001} = \frac{1}{N}S_{N,1,0,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1} =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right) - O(1)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right)$$

por tanto

$$M_{1010}M_{0101} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)$$

Por consiguiente

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right] =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{nh_nn^2}\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{n^2}\right)$$

Y para otro término de orden cuatro, por ejemplo,

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\frac{M_{22}(\mathfrak{X})}{n^3} +$$

$$+\frac{N-n}{N-1}\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\frac{N}{n^3}\left[M_{20}(\mathfrak{X})M_{02}(\mathfrak{X}) + 2M_{11}(\mathfrak{X})M_{11}(\mathfrak{X})\right]$$

Para el primer término, téngase en cuenta que el término dominante de M_{22} es

$$A_{22} = \frac{1}{N} S_{N,2,2,4} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2 \frac{1}{h_n}\right)$$

y para el segundo, los respectivos términos dominantes son

$$A_{20}A_{02} = \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \frac{1}{N} S_{N,2,0,2} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)$$

y

$$A_{11}^2 = \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)$$

Por consiguiente

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2 \left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\right] =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2 \frac{1}{nh_n n^2}\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2 \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2 \frac{1}{n^2}\right)$$

Como cabría esperar, el término multiplicado por $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ es de menor orden de magnitud que el multiplicado por $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Q.E.D.

Observación.- En los términos del tipo $\frac{1}{N} S_{N,p_1+p_2,q_1+q_2,r_1+r_2} - \frac{1}{N} S_{N,p_1,q_1,r_1} \frac{1}{N} S_{N,p_2,q_2,r_2}$ predomina el primer sumando. En los del tipo

$$\frac{1}{N} S_{N,p_1+p_2+p_3,q_1+q_2+q_3,r_1+r_2+r_3} \pm \cdots \pm \frac{1}{N} S_{N,p_1,q_1,r_1} \frac{1}{N} S_{N,p_2,q_2,r_2} \frac{1}{N} S_{N,p_3,q_3,r_3}$$

también predomina el primero. Al igual que en los del tipo

$$\frac{1}{N} S_{N,p_1+p_2+p_3+p_4,q_1+q_2+q_3+q_4,r_1+r_2+r_3+r_4} \pm \cdots \pm \frac{1}{N} S_{N,p_1,q_1,r_1} \frac{1}{N} S_{N,p_2,q_2,r_2} \frac{1}{N} S_{N,p_3,q_3,r_3} \frac{1}{N} S_{N,p_4,q_4,r_4}$$

Obsérvese que todos los monomios sumandos son homogéneos en cada subíndice r, s y t. En esta situación cuantos más S compongan el monomio, menor será su orden de magnitud. El unitario predomina sobre los binarios, estos sobre los ternarios, y estos últimos, a su vez, predominan sobre los cuaternarios.

Proposición 42 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$,*

$$E_p\left[\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right] = O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|\, h_n^2}{n}\right)$$

Demostración.- Si se consideran los siguientes estimadores en el resultado 28 de 8 estimadores

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}, \hat{\theta}_2 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{\theta}_3 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \hat{\theta}_4 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}$$

$$\hat{\theta}_5 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}, \hat{\theta}_6 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{\theta}_7 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \hat{\theta}_8 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}$$

se obtiene que

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}\right) + \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}\right) + \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) -$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}\right) - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) -$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}\right) + \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}\right) + \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) +$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) -$$

$$-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) + \cdots$$

que será igual a $\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}$ multiplicado por

$$\frac{1}{N}S^2_{N,0,0,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,3,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right) + \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right) +$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right) + \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,2} - \left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\right) -$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right) - 2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right) + \cdots$$

los términos de mayor orden de magnitud, por una observación anterior, serán igual a $\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}$ multiplicado por

$$\frac{1}{N}S^2_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}$$

que resulta igual $O\left(\frac{1}{n}\right)$ multiplicado por

$$O(1)O\left(\max|Y_i|\,h_n^2\right)+O(1)O\left(h_n^2\right)O\left(\max|Y_i|\right)+$$

$$+O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O(1)O\left(h_n\right)+O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O\left(h_n^2\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)+$$

$$+O\left(\max|Y_i|\right)O\left(h_n\right)O\left(h_n\right)+O\left(h_n\right)O\left(h_n\right)O\left(\max|Y_i|\right)$$

es decir

$$O\left(\max|Y_i|\,\frac{h_n^2}{n}\right)$$

Los de orden tres y cuatro son de menor orden de magnitud por el factor $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ o por los factores $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$y $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, respectivamente, como ya se ha visto en la demostración de la proposición anterior

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1},\hat{\theta}_2=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1},\hat{\theta}_3=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1},\hat{\theta}_4=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}$$

$$\hat{\theta}_5=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1},\hat{\theta}_6=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1},\hat{\theta}_7=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1},\hat{\theta}_8=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}$$

Para el tratamiento de los términos de orden tres, por ejemplo

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{M_{111}}{n^2}$$

con

$$M_{111}=\frac{1}{N}S_{N,1,3,3}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,3,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N0,2,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N0,2,1}=$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)O(h_n^2)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n^2\right)O\left(1\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O(h_n)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O(1)O\left(h_n\right) =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)$$

donde, como en situaciones anteriores, el primero $\frac{1}{N}S_{N,1,3,3}$ es el dominante y los binarios predominan sobre el ternario. Por tanto

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\right] =$$

$$= O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right) = O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|\,h_n}{n^2}\right)$$

que es de menor orden de magnitud que

$$O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n^2}{n}\right)$$

y otro ejemplo de orden tres

$$\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{N-n}{N-1}\frac{N-2n}{N-2}\frac{M_{111}}{n^2}$$

con

$$M_{111} = \frac{1}{N}S_{N,1,2,3}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N0,1,2}+2\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N0,1,1} =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)O(h_n)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O\left(1\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O(1)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O(1)O\left(h_n\right) =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)$$

$$\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right] =$$

$$= O(h_n)O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) = O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|\,h_n}{n^2}\right)$$

Para el tratamiento de los términos de orden cuatro, por ejemplo

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\frac{M_{1111}(\mathfrak{X})}{n^3}+$$

$$+\frac{N-n}{N-1}\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\frac{N}{n^3}\left[M_{1100}(\mathfrak{X})M_{0011}(\mathfrak{X})+M_{1010}(\mathfrak{X})M_{0101}(\mathfrak{X})+M_{1001}(\mathfrak{X})M_{0110}(\mathfrak{X})\right]$$

los de mayor orden de magnitud serán los correspondientes al segundo término. M_{1100}, en este caso, es igual a

$$M_{1100}=A_{1100}-A_{1000}A_{0100}=\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}=$$

$$=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)-O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)O(1)=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)$$

y M_{0011}

$$M_{0011}=A_{0011}-A_{0010}A_{0001}=\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}=$$

$$=O\left(h_n\right)-O\left(h_n\right)O\left(h_n\right)=O\left(h_n\right)$$

por tanto

$$M_{1100}M_{0011}=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)$$

Para otro de estos productos circulantes

$$M_{1010}=A_{1010}-A_{1000}A_{0010}=\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}=$$

$$=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)-O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)O(h_n)=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)$$

$$M_{0101}=A_{0101}-A_{0100}A_{0001}=\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}=$$

$$=O\left(1\right)-O(1)O\left(h_n\right)=O\left(1\right)$$

por tanto

$$M_{1010}M_{0101}=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)$$

Por consiguiente

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n^2}\right)$$

y para otro ejemplo de orden cuatro

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}-\frac{1}{N}S_{N,02,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right]=$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{N^2+N-6nN+6n^2}{(N-2)(N-3)}\frac{M_{1111}(\mathfrak{X})}{n^3}+$$

$$+\frac{N-n}{N-1}\frac{(n-1)(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}\frac{N}{n^3}\left[M_{1100}(\mathfrak{X})M_{0011}(\mathfrak{X})+M_{1010}(\mathfrak{X})M_{0101}(\mathfrak{X})+M_{1001}(\mathfrak{X})M_{0110}(\mathfrak{X})\right]$$

los de mayor orden de magnitud serán los correspondientes al segundo término. M_{1100}, en este caso, es igual a

$$M_{1100}=A_{1100}-A_{1000}A_{0100}=\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}=$$

$$=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)-O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O(1)=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)$$

y M_{0011}

$$M_{0011}=A_{0011}-A_{0010}A_{0001}=\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}=$$

$$=O\left(h_n\right)-O\left(h_n^2\right)O\left(1\right)=O\left(h_n\right)$$

por tanto

$$M_{1100}M_{0011}=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)$$

Para otro de estos productos circulantes

$$M_{1010}=A_{1010}-A_{1000}A_{0010}=\frac{1}{N}S_{N,1,3,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}=$$

$$=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n^2\right)-O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O(h_n^2)=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n^2\right)$$

$$M_{0101}=A_{0101}-A_{0100}A_{0001}=\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}=$$

$$=O\left(\frac{1}{h_n}\right)-O(1)O\left(1\right)=O\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

por tanto

$$M_{1010}M_{0101} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)$$

Por consiguiente

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1} - \frac{1}{N}S_{N,02,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right] =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n^2}\right)$$

Q.E.D.

Corolario 84 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$,*

$$E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] = O\left(\frac{h_n^3}{n}\right)$$

Demostración.- Si en el resultado anterior se considera como $Y_i = x_i - x$, se obtiene que $\hat{N}(x)$ se convierte en $\hat{D}(x)$ y que $N(x)$ en $D(x)$ porque, por ejemplo,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}, \hat{\theta}_2 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{\theta}_3 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \hat{\theta}_4 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1},$$

y $\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 = \hat{D}(x)$. Por la proposición anterior, se verifica que

$$E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] = \underset{V_{x,h_n}}{\text{máx}}\,|x_i - x|\,O\left(\frac{h_n^2}{n}\right) = O\left(\frac{h_n^3}{n}\right)$$

Q.E.D.

Proposición 43 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$, se verifica que*

$$E_p\left[\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^4\right] = O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|^4\,h_n^2}{n^2}\right)$$

Demostración.- Por el resultado 29 del capítulo 2, habrá que calcular, para cada una de las cinco esperanzas, los términos de mayor orden

I

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)^4\right]=\theta_1^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^4\right]+4\theta_1^3\theta_2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^3\right]+$$

$$+6\theta_1^2\theta_2^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^2\right]+4\theta_1\theta_2^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\right]+$$

$$+\theta_2^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^4\right]+\cdots$$

Si se considera en estos términos los siguientes estimadores

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1},\hat{\theta}_2=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1},\hat{\theta}_3=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1},\hat{\theta}_4=\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1},$$

se obtiene que para

$$E_p\left\{\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right)\right]^4\right\}$$

los sumandos de orden $(4,0)$ y $(0,4)$ son, por una parte,

$$\theta_2^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^4\right]=\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^4E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^4\right]$$

cuyo subsumando de mayor orden, como se ha visto en demostraciones y observaciones anteriores, es

$$\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^4M_{20}^2O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^4\left(A_{20}-A_{10}^2\right)^2O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^4\left[\frac{1}{N}S_{N,2,2,2}-\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\right]^2O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2h_n\right)-\left(O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)\right)^2\right]^2=$$

$$=O\left(\frac{\text{máx}^4\left|Y_i\right|h_n^2}{n^2}\right)$$

Por otra parte, el de orden $(0,4)$ es

$$\theta_1^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)^4\right]=\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^4E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^4\right]$$

cuyo término de mayor orden de magnitud es

$$\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^4 M_{02}^2 O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^4 O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,2} - \left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\right]^2 =$$

$$= \left(O\left(\text{máx}\left|Y_i\right| h_n\right)\right)^4 O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[O\left(\frac{1}{h_n}\right) - \left(O\left(1\right)\right)^2\right]^2 =$$

$$= O\left(\frac{\text{máx}^4\left|Y_i\right| h_n^2}{n^2}\right)$$

El sumando $(2,2)$ es del mismo orden de magnitud

$$6\theta_1^2\theta_2^2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] = 6E_p\left[\theta_1^2\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\theta_2^2\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\right] \leq$$

$$= 6E_p^{1/2}\left[\theta_2^4\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^4\right]E_p^{1/2}\left[\theta_1^4\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^4\right] \leq$$

$$= O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|^2 h_n}{n}\right)O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|^2 h_n}{n}\right) = O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|^4 h_n^2}{n^2}\right)$$

El sumando $(3,1)$

$$4\theta_1\theta_2^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)\right] =$$

$$= 4\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3 E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right] =$$

$$= 4\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3\left[C_1\frac{M_{31}}{n^3} + C_2 O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(M_{20}M_{11} + M_{20}M_{11} + M_{11}M_{20}\right)\right] =$$

$$= 4\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3\left[C_1\frac{M_{31}}{n^3} + 3C_2 O\left(\frac{1}{n^2}\right)M_{20}M_{11}\right]$$

con $C_1 = O(1)$ y $C_2 = O(1)$ bajo la condición HHM. En el caso de M_{31}, el sumando que predomina es

$$\frac{1}{N}S_{N,3,3,4} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^3\right)$$

Para ver esto, obsérvese que en los casos posibles que se puedan presentar se verifica que, si los órdenes respectivos de los componentes son p_1, q_1, r_1 y p_2, q_2, r_2, se tendría para A_{31} el siguiente orden $3p_1 + p_2, 3q_1 + q_2, 3r_1 + r_2$ con lo cual su orden de magnitud sería

$$O\left(\text{máx}\,|Y_i|^{3p_1+p_2}\, h_n^{3(q_1-r_1)+(q_2-r_2)+1}\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^{3p_1+p_2}\, h_n^{3q_1+q_2-(3r+r_2)+1}\right)$$

En los demás términos, donde puede haber 2 o más factores, el orden será

$$O\left(\text{máx}\,|Y_i|^{3p_1+p_2}\, h_n^{3q_1+q_2-(3r+r_2)+\phi}\right)$$

siendo ϕ el número de factores, ya que se suma una unidad por cada factor. Obsérvese que los demás monomios de M_{31} son homogéneos en cada subíndice de orden $3p_1 + p_2, 3q_1 + q_2, 3r_1 + r_2$ y, por supuesto, de orden global $3p_1 + p_2 + 3q_1 + q_2 + 3r_1 + r_2 = 3\,(p_1 + q_1 + r_1) + p_2 + q_2 + r_2$. Entonces

$$C_1\frac{M_{13}}{n^3} = O(1)O\left(\frac{1}{n^3}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^3\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^3\,\frac{1}{n^3}\right)$$

Para el segundo término

$$M_{20}M_{11} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\, h_n\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^3\, h_n\right)$$

$$C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)M_{20}M_{11} = O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^3\, h_n\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n^2}\right)$$

Por consiguiente

$$4\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3 E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\right] =$$

$$= 4\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3\left[C_1\frac{M_{31}}{n^3} + 3C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)M_{20}M_{11}\right] =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|\, h_n\right)O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^3\, h_n\right) = O\left(\frac{\text{máx}^4\,|Y_i|\, h_n^2}{n^2}\right)$$

Si se estudia el otro sumando del mismo tipo, el $(1,3)$

$$4\theta_1^3\theta_2 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3\right] =$$

$$= 4\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3 \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3\right] =$$

$$= 4\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3 \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\left[C_1\frac{M_{13}}{n^3}+C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)(M_{11}M_{02}+M_{11}M_{02}+M_{02}M_{11})\right] =$$

$$= 4\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3 \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\left[C_1\frac{M_{13}}{n^3}+3C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)M_{02}M_{11}\right]$$

En este caso el término dominante de M_{13} es

$$\frac{1}{N}S_{N,1,1,4} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n^2}\right)$$

$$C_1\frac{M_{13}}{n^3} = O(1)O\left(\frac{1}{n^3}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n^2}\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^3h_n^2}\right)$$

Para el segundo término

$$M_{02}M_{11} = O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right)$$

$$C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)M_{02}M_{11} = O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^2h_n}\right)$$

Por consiguiente

$$4\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3 \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3\right] =$$

$$= \left[O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)\right]^3 O(1)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^2h_n}\right) = O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|^4\,h_n^2}{n^2}\right)$$

V El quinto término se trataría de un modo análogo

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^4\right] = \theta_3^4E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^4\right]+4\theta_3^3\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^3\right]+$$

$$+6\theta_3^2\theta_4^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+4\theta_3\theta_4^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+$$

$$+\theta_4^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^4\right]+\cdots$$

el término de orden $(4,0)$

$$\theta_4^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^4\right]=\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^4 E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^4\right]$$

cuyo término de mayor orden de magnitud es

$$\left(O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)\right)^4 O\left(\frac{h_n^2}{n^2}\right)=O\left(\frac{\text{máx}^4\left|Y_i\right|h_n^2}{n^2}\right)$$

El otro término de orden $(0,4)$

$$\theta_3^4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^4\right]=\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^4 E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^4\right]$$

cuyo término de mayor orden de magnitud es

$$\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^4 M_{02}^2 O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^4 O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[\frac{1}{N}S_{N,2,0,2}-\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\right]^2=$$

$$=\left(O\left(h_n\right)\right)^4 O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[\text{máx}\left|Y_i\right|^2 O\left(\frac{1}{h_n}\right)-\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)^2\right]^2=O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|^4 h_n^2}{n^2}\right)$$

El término $(2,2)$ también es del mismo orden de magnitud por la desigualdad de Cauchy-Schwarz
Los sumandos $(3,1)$ y $(1,3)$ también son del mismo orden de magnitud, por ejemplo

$$4\theta_3\theta_4^3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^3\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]=$$

$$=4\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^3 E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^3\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]=$$

$$=4\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^3\left[C_1\frac{M_{31}}{n^3}+3C_2 O\left(\frac{1}{n^2}\right)M_{20}M_{11}\right]$$

Para el primer término

$$C_1\frac{M_{31}}{n^3}=O(1)O\left(\frac{1}{n^3}\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\frac{1}{n^3}\right)$$

Para el segundo

$$C_2 O\left(\frac{1}{n^2}\right) M_{20} M_{11} = O(1) O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\max |Y_i| h_n\right) = O\left(\max |Y_i| \frac{h_n}{n^2}\right)$$

Por consiguiente

$$4\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,0,1}\right)^3 E_p \left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1}\right)^3 \left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,1}\right)\right] =$$

$$= O\left(h_n\right) O\left(\max |Y_i|^3\right) O\left(\max |Y_i| \frac{h_n}{n^2}\right) = O\left(\frac{\max |Y_i|^4 h_n^2}{n^2}\right)$$

III El término III no está tratado, pero se puede acotar asíntóticamente mediante

$$6E_p \left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2\right)^2 \left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 - \theta_3\theta_4\right)^2\right] \leq 6E_p^{1/2} \left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2\right)^4\right] E_p^{1/2} \left[\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 - \theta_3\theta_4\right)^4\right] =$$

$$= O\left(\max |Y_i|^4 \frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

II Por un resultado del capítulo 2, los términos dominantes de II son

$$E_p \left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \theta_1\theta_2\right)^3 \left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 - \theta_3\theta_4\right)\right] =$$

$$= \theta_1^3\theta_3 E_p \left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3 \left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + 3\theta_1^2\theta_2\theta_3 E_p \left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right) \left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2 \left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_3 E_p \left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2 \left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right) \left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] + \theta_2^3\theta_3 E_p \left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3 \left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] +$$

$$+\theta_1^3\theta_4 E_p \left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^3 \left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] + 3\theta_1^2\theta_2\theta_4 E_p \left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right) \left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2 \left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] +$$

$$+3\theta_1\theta_2^2\theta_4 E_p \left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2 \left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right) \left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] + \theta_2^3\theta_4 E_p \left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3 \left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] + \cdots$$

Uno de sus sumandos de orden $(3,1)$ verifica

$$\theta_2^3\theta_3 E_p \left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^3 \left(\hat{\theta}_4 - \theta_4\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3 \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]$$

donde

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right] = C_1\frac{M_{31}}{n^3} + 3C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)M_{20}M_{11}$$

El sumando dominante del primer término es

$$\frac{1}{N}S_{N,4,3,4} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^4\right)$$

y el del segundo

$$M_{20} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,h_n\right)$$

$$M_{11} = \frac{1}{N}S_{N,2,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1} = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right) + O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,h_n\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right) =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)$$

Por tanto

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right] =$$

$$= O(1)O\left(\frac{1}{n^3}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^4\right) + O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^4\,h_n\right) =$$

$$= O\left(\text{máx}\,|Y_i|^4\,\frac{h_n}{n^2}\right)$$

y por consiguiente

$$\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^3 \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^3\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right] =$$

$$= O(1)O\left(h_n\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^4\,\frac{h_n}{n^2}\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|^4\,\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Los otros sumandos $(3,1)$ cruzados también verifican que son del mismo orden de magnitud

Con respecto a los sumandos en que intervienen tres factores, por ejemplo, el $(2,1,0,1)$

$$3\theta_1\theta_2^2\theta_3 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)^2\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]=$$

$$=3\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\cdot$$

$$\cdot E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]$$

donde

$$E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]=$$

$$=C_1\frac{M_{211}}{n^3}+C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(M_{200}M_{011}+M_{110}M_{101}+M_{101}M_{110}\right)=$$

$$=C_1\frac{M_{211}}{n^3}+C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(M_{200}M_{011}+2M_{110}M_{101}\right)$$

Para el primer término, el sumando que predomina en M_{211} es

$$\frac{1}{N}S_{N,3,2,4}=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^3\frac{1}{h_n}\right)$$

Para ver esto obsérvese que en los casos posibles que se puedan presentar, se verifica que si los órdenes respectivos de los componentes son p_1,q_1,r_1, p_2,q_2,r_2 y p_3,q_3,r_3, se tendría para A_{211} el siguiente orden $2p_1+p_2+p_3, 2q_1+q_2+q_3, 2r_1+r_2+r_3$ con lo cual su orden de magnitud sería

$$O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^{2p_1+p_2+p_3}h_n^{2(q_1-r_1)+(q_2-r_2)+(q_3-r_3)+1}\right)=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^{2p_1+p_2+p_3}h_n^{2q_1+q_2+q_3-(2r_1+r_2+r_3)+1}\right)$$

En los demás términos, donde puede haber 2 o más factores, el orden será

$$O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^{2p_1+p_2+p_3}h_n^{2q_1+q_2+q_3-(2r_1+r_2+r_3)+\phi}\right)$$

siendo ϕ el número de factores, ya que se suma una unidad por cada factor.

En el segundo término

$$M_{200}=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2h_n\right)$$

$$M_{011}=\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\frac{1}{h_n}\right)$$

$$M_{110} = \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} = O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)$$

$$M_{101} = \frac{1}{N} S_{N,2,1,2} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} = O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\right)$$

Por tanto

$$E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1}\right)^2 \left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,1}\right)\right] =$$

$$= O(1)O\left(\frac{1}{n^3}\right) O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^3 \frac{1}{h_n}\right) + O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^3\right) = O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^3 \frac{1}{n^2}\right)$$

Por consiguiente

$$3\frac{1}{N} S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1}\right)^2 \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \cdot$$

$$\cdot E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1}\right)^2 \left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,1}\right)\right] =$$

$$= O\left(\text{máx}\left|Y_i\right| h_n\right) O(1) O\left(h_n\right) O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^3 \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2 \frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Para el sumando del mismo tipo, el $(1,2,1,0)$

$$3\theta_1^2\theta_2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2\right)^2\left(\hat{\theta}_3 - \theta_3\right)\right] =$$

$$= 3\left(\frac{1}{N} S_{N,1,1,1}\right)^2 \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \cdot$$

$$\cdot E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1}\right)^2 \left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1}\right)\right]$$

donde

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1}\right)^2 \left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1}\right)\right] =$$

$$= C_1 \frac{M_{211}}{n^3} + C_2 O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(M_{200}M_{011} + M_{110}M_{101} + M_{101}M_{110}\right) =$$

$$= C_1 \frac{M_{211}}{n^3} + C_2 O\left(\frac{1}{n^2}\right)(M_{200}M_{011} + 2M_{110}M_{101})$$

$$= O(1)O\left(\frac{1}{n^3}\right) O\left(\max|Y_i|\frac{1}{h_n}\right) + O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\max|Y_i|\right) = O\left(\max|Y_i|\,\frac{1}{n^2}\right)$$

Por consiguiente

$$3\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2 \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\cdot$$

$$\cdot E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]$$

$$= O\left(\max|Y_i|^2 h_n^2\right) O(1) O\left(\max|Y_i|\right) O\left(\max|Y_i|\,\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\max|Y_i|^4\,\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Para el sumando $(2,1,1,0)$ habrá que calcular la siguiente esperanza

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,01,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right] =$$

$$= O(1)O\left(\max|Y_i|^2\right) O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(O\left(\max|Y_i|^2 h_n\right) O(1) + O\left(\max|Y_i| h_n\right) O\left(\max|Y_i|\right)\right) =$$

$$= O\left(\max|Y_i|^2\,\frac{h_n}{n^2}\right)$$

y, por tanto,

$$3\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\cdot$$

$$\cdot E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right] =$$

$$= O\left(\max|Y_i| h_n\right) O(1) O\left(\max|Y_i|\right) O\left(\max|Y_i|^2\,\frac{h_n}{n^2}\right) = O\left(\max|Y_i|^4\,\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Para el último sumando de este tipo es el $(1,2,0,1)$ que también es del mismo orden habrá que acotar asintóticamente la esperanza

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]=$$

$$=O(1)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{h_n^2}\right)O\left(\frac{1}{n^3}\right)+O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right)\right)=$$

$$=O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{n^2h_n}\right)$$

y, por tanto,

$$3\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\cdot$$

$$\cdot E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]=$$

$$=\left(O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,h_n^2\right)\right)O(1)O\left(\text{máx}\,|Y_i|\right)O\left(h_n\right)O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{1}{n^2h_n}\right)=O\left(\text{máx}\,|Y_i|^2\,\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

IV

$$E_p\left[\left(\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2-\theta_1\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4-\theta_3\theta_4\right)^3\right]=$$

$$=\theta_1\theta_3^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^3\right]+3\theta_1\theta_3^2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+$$

$$+3\theta_1\theta_3\theta_4^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_1\theta_4^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^3\right]+$$

$$+\theta_2\theta_3^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^3\right]+3\theta_2\theta_3^2\theta_4E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]+$$

$$+3\theta_2\theta_3\theta_4^2E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^2\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)\right]+\theta_2\theta_4^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)^3\right]+\cdots$$

se trataría de modo análogo al II. Por ejemplo, uno de sus sumandos $(1,3)$ cruzado verifica

$$\theta_2\theta_3^3E_p\left[\left(\hat{\theta}_1-\theta_1\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^3\right]=$$

$$= \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^3 E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right)^3 \right]$$

donde

$$E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right)^3 \right] = C_1 \frac{M_{13}}{n^3} + 3C_2 O\left(\frac{1}{n^2} \right) M_{02} M_{11}$$

El sumando principal de M_{13} es

$$A_{13} = \frac{1}{N} S_{N,4,1,4} = O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^4 \frac{1}{h_n^2} \right)$$

y

$$M_{02} = O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^2 \frac{1}{h_n} \right)$$

$$M_{11} = \frac{1}{N} S_{N,2,1,2} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} = O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^2 \right) + O\left(\text{máx} \left| Y_i \right| h_n \right) O\left(\text{máx} \left| Y_i \right| \right) = O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^2 \right)$$

Por tanto

$$E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right)^3 \right] =$$

$$= O(1) O\left(\frac{1}{n^3} \right) O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^4 \frac{1}{h_n^2} \right) + O(1) O\left(\frac{1}{n^2} \right) O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^4 \frac{1}{h_n} \right) =$$

$$= O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^4 \frac{1}{n^2 h_n} \right)$$

y por consiguiente

$$\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^3 E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right)^3 \right] =$$

$$= O(1) O\left(h_n^3 \right) O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^4 \frac{1}{n^2 h_n} \right) = O\left(\text{máx} \left| Y_i \right|^4 \frac{h_n^2}{n^2} \right)$$

Otro sumando $(1,3)$ cruzado es del mismo orden

$$\theta_1 \theta_4^3 E_p \left[\left(\hat{\theta}_2 - \theta_2 \right) \left(\hat{\theta}_3 - \theta_3 \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right)^3 E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^3 \right]$$

donde

$$E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^3 \right] = C_1 \frac{M_{13}}{n^3} + 3C_2 O\left(\frac{1}{n^2} \right) M_{11} M_{02}$$

el sumando principal de M_{13} es

$$\frac{1}{N} S_{N,0,3,4} = O(1)$$

por otra parte

$$M_{02} = \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} - \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^2 = O(h_n)$$

y

$$M_{11} = \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} = O(1) + O(1) O(h_n) = O(1)$$

Por tanto

$$E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^3 \right] =$$

$$= O(1) O\left(\frac{1}{n^3} \right) O(1) + O(1) O\left(\frac{1}{n^2} \right) O(h_n) O(1) = O\left(\frac{h_n}{n^2} \right)$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right)^3 E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^3 \right] =$$

$$= O\left(\max |Y_i| \, h_n \right) O\left(\max |Y_i|^3 \right) O\left(\frac{h_n}{n^2} \right) = O\left(\max |Y_i|^4 \frac{h_n^2}{n^2} \right),$$

Otro sumando $(1,3)$ cruzado es

$$\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,0,1} \right)^3 E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,1,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^3 \right] =$$

$$= O(1) \left(O\left(\max |Y_i| \right) \right)^3 O\left(\max |Y_i| \frac{h_n^2}{n^2} \right) = O\left(\max |Y_i|^4 \frac{h_n^2}{n^2} \right),$$

Otro sumando $(1,3)$ cruzado es

$$\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^3 E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^3\right]=$$

$$=O\left(\max|Y_i|\,h_n\right)O\left(h_n^3\right)O\left(\max|Y_i|^3\frac{1}{n^2h_n^2}\right)=O\left(\max|Y_i|^4\frac{h_n^2}{n^2}\right),$$

Como ejemplo de los sumandos del tipo $(0,1,1,2)$

$$3\theta_1\theta_3^2\theta_4 E_p\left[\left(\hat{\theta}_2-\theta_2\right)\left(\hat{\theta}_3-\theta_3\right)\left(\hat{\theta}_4-\theta_4\right)^2\right]=$$

$$=3\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\cdot$$

$$\cdot E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]$$

donde

$$E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$=C_1\frac{M_{211}}{n^3}+C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(M_{200}M_{011}+M_{110}M_{101}+M_{101}M_{110}\right)=$$

$$=C_1\frac{M_{211}}{n^3}+C_2O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(M_{200}M_{011}+2M_{110}M_{101}\right)$$

$$M_{211}=\frac{1}{N}S_{N,2,1,4}=O\left(\max|Y_i|^2\frac{1}{h_n^2}\right)$$

$$M_{200}=O\left(\max|Y_i|^2\frac{1}{h_n}\right)$$

$$M_{011}=\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}=O\left(1\right)$$

$$M_{110}=\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}=O\left(\max|Y_i|\frac{1}{h_n}\right)$$

$$M_{101}=\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}=O\left(\max|Y_i|\right)$$

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$=O(1)O\left(\frac{1}{n^3}\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{h_n^2}\right)+O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{h_n}\right)O(1)+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\frac{1}{h_n}\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)\right]=$$

$$=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{n^2h_n}\right)$$

Por consiguiente

$$3\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\cdot$$

$$\cdot E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)O\left(h_n^2\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\frac{1}{n^2h_n}\right)=$$

$$=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^4\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Para otro sumando del mismo tipo, el $(1,0,2,1)$

$$E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)\right]=$$

$$=O(1)O\left(\frac{1}{n^3}\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\right)+O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left[O\left(h_n\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\right)+O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)\right]=$$

$$=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\frac{h_n}{n^2}\right)$$

Por consiguiente

$$3\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\cdot$$

$$\cdot E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]$$

$$=O(1)O\left(h_n\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\frac{h_n}{n^2}\right)=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^4\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Para otro sumandos, el $(0,1,2,1)$

$$3\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\cdot$$

$$\cdot E\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,01,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$=\left(O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|h_n\right)\right)O\left(h_n\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^2\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^4\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Y el último sumando de este tipo, el $(1,0,2,1)$

$$3\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\cdot$$

$$\cdot E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right)^2\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\right]=$$

$$=O(1)O\left(h_n^2\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^3\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|^4\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Q.E.D.

Corolario 85 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2\to\infty$*

$$E_p\left[\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right]=O\left(\frac{h_n^6}{n^2}\right)$$

Demostración.- Si en el resultado anterior se considera $Y_i = x_i - x$, se obtiene que $\hat{N}(x)$ se convierte en $\hat{D}(x)$ y que $N(x)$ en $D(x)$ porque, por ejemplo,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,2,1}, \hat{\theta}_2 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{\theta}_3 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}, \hat{\theta}_4 = \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1},$$

y $\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3\hat{\theta}_4 = \hat{D}(x)$. Por la proposición anterior, se verifica que

$$E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^4\right] = \max_{V_{x,h_n}} |x_i - x|^4 \, O\left(\frac{h_n^2}{n^2}\right) = O\left(\frac{h_n^6}{n^2}\right)$$

Q.E.D.

Para el estudio de la proposición posterior, emplearemos la siguiente identidad

Lema 25 *Si, por definición,* $\frac{v}{u} := 0$ *cuando* $u = 0$ *y* $v = 0$*, entonces se verifica*

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{U}\left[v - \frac{v}{u}(u - U)\right]$$

que como caso particular da lugar a la siguiente igualdad que se empleará a continuación

Ejemplo 48

$$\hat{\beta}_L(x) = \frac{1}{D(x)}\left[\hat{N}(x) - \hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]$$

o a esta otra que se empleará con posterioridad

Ejemplo 49

$$\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) = \frac{1}{f_S(x)}\left[\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right]$$

Proposición 44 *Sea* $K(\cdot)$ *de soporte compacto. En MASS/R*(N, n)*, bajo la condición HHM, si* $nh_n^2 \to \infty$

$$E_p\left[\left(\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x)\right)^2\right] = O\left(\frac{\max |Y_i|^2}{nh_n^3}\right)$$

Demostración.- Por el ejemplo 48

$$\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) = \frac{\hat{N}(x)}{D(x)} - \beta_L(x) - \left[\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]$$

si se eleva al cuadrado

$$\left(\hat{\beta}_L(x)-\beta_L(x)\right)^2=\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)}-\beta_L(x)-\left[\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]\right)^2\leq$$

$$\leq 2\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)}-\beta_L(x)\right)^2+2\left(\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right)^2$$

entonces

$$E_p\left[\left(\hat{\beta}_L(x)-\beta_L(x)\right)^2\right]\leq 2E_p\left[\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)}-\beta_L(x)\right)^2\right]+2E_p\left[\left(\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right)^2\right]=$$

$$=2\frac{1}{D^2(x)}E_p\left[\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^2\right]+2\frac{1}{D^2(x)}E_p\left\{\left[\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]^2\right\}=E_I+E_{II}$$

Por la proposición 41 y por la observación posterior a la acotación asintótica de β_L

$$E_I=O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|^2\,h_n}{n}\right)=O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|^2}{nh_n^3}\right)$$

Para E_{II} se tiene que

$$E_{II}=2\frac{1}{D^2(x)}E_p\left\{\left[\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]^2\right\}=$$

$$=\frac{2}{D^2(x)}E_p\left\{\left[\frac{1}{D(x)}\left(\hat{N}(x)-\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]^2\right\}=$$

$$=\frac{2}{D^2(x)}E_p\left[\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)}\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)-\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right)^2\right]\leq$$

$$\leq\frac{4}{D^2(x)}E_p\left[\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)}\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right)^2\right]+\frac{4}{D^2(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right)^2\right]$$

$$=\frac{4}{D^2(x)}E_p\left[A^2+B^2\right]$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Para el primer sumando

$$\frac{4}{D^2(x)}E_p\left[A^2\right] = \frac{1}{D^4(x)}E_p\left[\left(\hat{N}(x) - N(x) + N(x)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] \leq$$

$$\leq \frac{8}{D^4(x)}E_p\left[\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] + 8\frac{N^2(x)}{D^4(x)}E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] =$$

$$= E_{II,1} + E_{II,2}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la proposición 43 y el corolario 85

$$E_{II,1} = O\left(\frac{1}{h_n^8}\right)O\left(\max|Y_i|^2\frac{h_n}{n}\right)O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{h_n^8}\right)O\left(\max|Y_i|^2\frac{h_n^4}{n^2}\right) = O\left(\max|Y_i|^2\frac{1}{n^2h_n^4}\right) = O\left(\max|Y_i|^2\frac{1}{nh_n^3nh_n}\right)$$

y por la proposición 31 y el corolario 84

$$E_{II,2} = O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\frac{\max|Y_i|^2}{h_n^2}\right)O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) = O\left(\max|Y_i|^2\frac{1}{nh_n^3}\right)$$

Por tanto $E_{II,2}$ predomina sobre $E_{II,1}$. Con respecto al sumando restante

$$E_{II,3} = \frac{1}{D^2(x)}E_p\left[B^2\right] = \frac{1}{D^4(x)}E_p\left[\left(\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{D^4(x)}E_p\left[\left(\max_{V_{x,h_n}}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^4\right] \leq$$

$$= \frac{1}{D^4(x)}\left(\max_{V_{x,h_n}}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|\right)^2 E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^4\right] \leq$$

$$= O\left(\frac{1}{h_n^8}\right)\left(\max_{V_{x,h_n}}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|\right)^2 O\left(\frac{h_n^6}{n^2}\right) = O\left(\max_{V_{x,h_n}}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2\frac{1}{(nh_n)^2}\right)$$

Por otra parte

$$E_{II,2} = \max_{V_{x,h_n}}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2 O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) = O\left(\max_{V_{x,h_n}}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2\frac{1}{nh_n}\right)$$

$E_{II,2}$ predomina sobre el sumando anterior, $E_{II,3}$ Q.E.D.

5.2. Estudio del sesgo del estimador L según el plan

El estudio del sesgo según el plan de $\hat{\alpha}_L(x)$ tampoco empleará el desarrollo de Taylor sino que se basará en que la p-esperanza admite la siguiente expresión

$$E_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right) = E_p\left[\hat{\alpha}_S(x) - \hat{\beta}_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] = E_p\left[\hat{\alpha}_S(x)\right] - E_p\left[\hat{\beta}_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] = A - C$$

5.2.1. Segundo sumando, C

Para el estudio de este sumando se necesitará previamente la siguiente identidad

Lema 26 *Si, por definición,* $\frac{v}{u} := 0$ *cuando* $u = 0$ *y* $v = 0$*, entonces se verifica*

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{U^2}\left[(2U - u)\, v + \frac{v}{u}\,(u - U)^2\right]$$

que como caso particular da lugar a la siguiente igualdad que se empleará a continuación

Ejemplo 50

$$\hat{\beta}_L(x) = \frac{1}{D^2(x)}\left[\left(2D(x) - \hat{D}(x)\right)\hat{N}(x) + \hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right]$$

□

o a otra que se empleará con posterioridad

Ejemplo 51

$$\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) = \frac{1}{S^2_{N,0,0,1}}\left[\left(2S_{N,0,0,1} - \hat{S}_{N,0,0,1}\right)\hat{S}_{N,0,1,1} + \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}\right)^2\right]$$

□

C admite la siguiente descomposición

Proposición 45

$$E_p\left[\hat{\beta}_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] = C_1 + C_{21} - C_{22} - C_3 + C_4$$

con

$$C_1 = \beta_L(x) E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right]$$

$$C_{21} = \frac{1}{D(x)} E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right],\ C_{22} = \frac{\beta_L(x)}{D(x)} E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]$$

$$C_3 = \frac{1}{D^2(x)} E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]$$

$$C_4 = \frac{1}{D^2(x)} E_p\left[\hat{\beta}_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right]$$

Demostración.-

$$C = E_p\left[\hat{\beta}_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] = E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\frac{1}{D^2(x)}\left(\left(2D(x) - \hat{D}(x)\right)\hat{N}(x) + \hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right)\right] =$$

$$= E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\frac{1}{D^2(x)}\left(\left(D(x) + D(x) - \hat{D}(x)\right)\left(N(x) + \hat{N}(x) - N(x)\right) + \hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right)\right] =$$

$$= C_1 + C_{21} - C_{22} - C_3 + C_4$$

teniendo en cuenta que, por definición, $\beta_L(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ Q.E.D.

Por tanto, el sesgo según el plan se puede desarrollar del siguiente modo

Corolario 86

$$B_p\left(\widehat{\alpha_L}(x)\right) = E_p\left[\hat{\alpha}_S(x) - \beta_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) - \left(\alpha_S(x) - \beta_L(x)\alpha_S^{[X-x]}(x)\right)\right] - (C_{21} - C_{22} - C_3 + C_4)$$

Demostración.- Como $E_p\left(\widehat{\alpha_L}(x)\right) = A - (C_1 + C_{21} - C_{22} - C_3 + C_4)$, se tiene que

$$B_p\left(\widehat{\alpha_L}(x)\right) = E_p\left(\widehat{\alpha_L}(x)\right) - \alpha_L(x) = A - C_1 - \alpha_L(x) - (C_{21} - C_{22} - C_3 + C_4) =$$

$$= E_p\left[\hat{\alpha}_S(x) - \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\right] - \beta_L(x) E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) - \frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\right] - (C_{21} - C_{22} - C_3 + C_4)$$

dado que $C_1 = \beta_L(x) E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right]$ y α_L también se puede expresar como

$$\alpha_L(x) = \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}} - \beta_L(x)\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}$$

Q.E.D.

A la vista de este último desarrollo, conviene introducir el estimador I, $\hat{\alpha}_I = \hat{\alpha}_S - \beta_L \hat{\alpha}_S^{[X-x]}$. Este estimador tiene un carácter ideal debido a que precisa conocer β_L que es un descriptor, un estadístico de la p.f.. Su valor práctico es reducido, podría emplearse en una operación por muestreo simultánea con el censo. También podría servir para realizarla inmediatamente después del censo o de la explotación completa del marco.

5.2.2. Sesgo del estimador I según el plan

Para estudiar el sesgo de $\hat{\alpha}_I$ como estimador de α_L, considérese la siguiente expresión

$$A - C_1 - \alpha_L(x) = E_p\left[\hat{\alpha}_S(x) - \alpha_S(x)\right] - \beta_L(x) E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) - \alpha_S^{[X-x]}(x)\right] =$$

$$= E_p\left[\hat{\alpha}_S(x) - \beta_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) - \left(\alpha_S(x) - \beta_L(x)\alpha_S^{[X-x]}(x)\right)\right] = E_p\left[\hat{\alpha}_I(x) - \alpha_L(x)\right] = B_p\left[\hat{\alpha}_I(x)\right]$$

Proposición 46 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3 \to \infty$*

$$B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) = \frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}; \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \alpha_L(x)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \beta_L(x)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

Demostración.-

$$B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left[COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) - COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right)\right] + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left[COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right)\right] + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

$$B_p\left(\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left[COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right) - COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right)\right] + O\left(\frac{h_n}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) + O\left(\frac{h_n}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

Dado que $|\beta_L(x)| \leq O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{h_n}\right)$, se tiene que

$$B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \beta_L(x) B_p\left(\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left[COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right)\right] + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right) -$$

$$-\beta_L(x)\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left[COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right)\right] + \beta_L(x)O\left(\frac{h_n}{(nh_n)^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left[COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}\right)\right] + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right) -$$

$$-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left[COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \beta_L(x)\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \beta_L(x)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right)\right] + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left[COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \alpha_L(x)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \beta_L(x)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right)\right)\right] + O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

Por otro lado

$$B_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \beta_L(x)B_p\left(\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right) = E_p\left(\hat{\alpha}_S(x) - \alpha_S(x)\right) - \beta_L(x)E_p\left(\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) - \alpha_S^{[X-x]}(x)\right) =$$

$$= E_p\left(\hat{\alpha}_S(x)\right) - \alpha_S(x) - \beta_L(x)E_p\left(\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right) + \beta_L(x)\alpha_S^{[X-x]}(x) =$$

$$= E_p\left(\hat{\alpha}_S(x) - \beta_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right) - \left(\alpha_S(x) - \beta_L(x)\alpha_S^{[X-x]}(x)\right) = B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)$$

Q.E.D.

Lema 27 *En MASS/R(N,n), si $A_{11} = 0$ entonces*

$$E_p\left(\hat{A}_{10}\hat{A}_{11}\right) = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}A_{21}$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Demostración.-

$$E_p\left[\hat{A}_{10}\hat{A}_{11}\right] = E_p\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_{i1}I_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_{i1}x_{i2}I_i\right] = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} x_{i1}^2 x_{i2}\pi_1 + \sum_{i\neq j}^{(N^2)} x_{i1}x_{j1}x_{j2}\pi_{12}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} x_{i1}^2 x_{i2}\pi_1 + \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_{i1}x_{j1}x_{j2} - \sum_{i=1}^{N} x_{i1}^2 x_{i2}\right)\pi_{12}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\pi_1 - \pi_{12}\right)\sum_{i=1}^{N} x_{i1}^2 x_{i2} + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_{i1}\sum_{j=1}^{N} x_{j1}x_{j2}\right)\pi_{12} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{n}{N}\left[1 - \frac{n-1}{N-1}\right]\sum_{i=1}^{N} x_{i1}^2 x_{i2} + \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} x_{i1}\sum_{j=1}^{N} x_{j1}x_{j2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{N-1-n+1}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i1}^2 x_{i2} = \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i1}^2 x_{i2}$$

Q.E.D.

Proposición 47 *En MASS/R(N, n)*

$$\frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}; \frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1} - \alpha_L(x)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \beta_L(x)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)(x_i - x)\right)K_h^2(x_i - x)$$

Demostración.-

$$\frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2} COV_p\left[\frac{1}{N}\left(\hat{S}_{N,1,0,1} - \beta_L\hat{S}_{N,0,1,1} - \alpha_L\hat{S}_{N,0,0,1}\right), \frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] =$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2} E_p\left[\frac{1}{N}\left(\hat{S}_{N,1,0,1} - \beta_L\hat{S}_{N,0,1,1} - \alpha_L\hat{S}_{N,0,0,1}\right)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2} E_p\left[\frac{1}{N}\left(\hat{S}_{N,1,0,1} - \beta_L\hat{S}_{N,0,1,1} - \alpha_L\hat{S}_{N,0,0,1}\right)\right] E_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] =$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2} E_p\left[\frac{1}{N}\left(\hat{S}_{N,1,0,1} - \beta_L\hat{S}_{N,0,1,1} - \alpha_L\hat{S}_{N,0,0,1}\right)\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right] =$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2$$

donde la última igualdad es el resultado de aplicar el lema a la población $(\mathcal{I},\mathfrak{X})=(\mathcal{I},\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)=\{(i,K_{hi},(Y_i-\alpha_L-\beta_L(x_i-x))):\ i=1,\ldots,N\}$ y (5.2) Q.E.D.

Corolario 87 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si* $nh_n^2\to\infty$

$$B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)=\frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2+O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right) \tag{5.3}$$

Demostración.- Combínese las dos proposiciones anteriores Q.E.D.

Se puede acotar asintóticamente el término dominante de este estimador

Corolario 88 *Sea* $K(\cdot)$ *de soporte compacto. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si* $nh_n^2\to\infty$ *se verifica que*

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2=O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{nh_n}\right)$$

Demostración.- Se tiene que

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2=O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{nh_n}\right)$$

porque

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}^2=O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{nh_n}\right)$$

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\alpha_L\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^2=O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(\text{máx}\left|Y_i\right|\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)=O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{nh_n}\right)$$

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\beta_L\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}^2=O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{h_n}\right)O(1)=O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{nh_n}\right),$$

por la proposición 31 y el corolario 75 Q.E.D.

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Observación.- El término dominante del sesgo se puede ver del siguiente modo

$$\frac{-1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(Y_i-\beta_L(x_i-x))-\alpha_L(x)\right]K_{hi}^2$$

lo que entronca con que el sesgo de $\hat{\alpha}_I(x)$ se podría obtener directamente de la expresión (4.3) teniendo en cuenta que $\hat{\alpha}_I(x)=\hat{\alpha}_S^{[Y-\beta_L(X-x)]}(x)$ y que $\alpha_L(x)=\alpha_S^{[Y-\beta_L(X-x)]}(x)$, o también, de un modo más heurístico, como

$$E_p\left[\hat{S}_{N,1,0,1}-\beta_L\hat{S}_{N,0,1,1}\right]=S_{N,1,0,1}-\beta_L S_{N,0,1,1}=\alpha_L S_{N,0,0,1}$$

y $E_p\left[\hat{S}_{N,0,0,1}\right]=S_{N,0,0,1}$, se tiene que

$$E_p\left[\hat{S}_{N,1,0,1}-\beta_L\hat{S}_{N,0,1,1}\right]=\alpha_L E_p\left[\hat{S}_{N,0,0,1}\right]$$

por tanto, teniendo en cuenta lo anterior, en MASS/R(N,n) se podría determinar el término dominante del sesgo del siguiente modo

$$B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)\cong\frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\left\{COV_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,1,0,1}-\beta_L\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\right),\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right]-\alpha_L COV_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1},\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right]\right\}=$$

$$=\frac{-1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}COV_p\left[\frac{1}{N}\left(\hat{S}_{N,1,0,1}-\beta_L\hat{S}_{N,0,1,1}-\alpha_L\hat{S}_{N,0,0,1}\right),\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}\right]$$

5.2.3. C21

Proposición 48 *En MASS/R(N,n), si $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3\to\infty$*

$$C_{21}=\frac{1}{D(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+$$

$$+\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)+$$

$$-\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)+$$

$$+O\left(\max|Y_i|\left(\frac{h_n}{n}+\frac{\max|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right)$$

Demostración.- Por el ejemplo 51

$$\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) = \frac{1}{S_{N,0,0,1}^2}\left[\left(2S_{N,0,0,1} - \hat{S}_{N,0,0,1}\right)\hat{S}_{N,0,1,1} + \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{S_{N,0,0,1}^2}\left\{\left[S_{N,0,0,1} - \left(\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}\right)\right]\hat{S}_{N,0,1,1} + \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\left(\frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\right) + \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\right)^2$$

por tanto, sustituyendo en la expresión

$$C_{21} = \frac{1}{D(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right],$$

admite la siguiente descomposición

$$C_{21} = \frac{1}{D(x)}E_p\left[\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right] - \frac{1}{D(x)}E_p\left(\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{D(x)}E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\right)^2\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right] = C_{21I} - C_{21II} + C_{21III}$$

C21I

$$C_{21I} = \frac{1}{D(x)}E_p\left[\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right] = \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}E_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right]$$

que se puede tratar del siguiente modo

$$C_{21I} = \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1} + \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\right] +$$

$$+\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}E_p\left(\hat{N}(x) - N(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}; \hat{N}(x)\right) + \frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} E_p\Big(\hat{N}(x) - N(x)\Big) = C_{21I1} + C_{21I2}$$

Para el primer sumando se verifica que

$$C_{21I1} = \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}; \hat{N}(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right) +$$

$$+2\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)$$

$$+ \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,2,2} - \frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} \frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right) +$$

$$+ O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)$$

Para el segundo, como

$$E_p\left(\hat{N}(x) - N(x)\right) = N(x)O\left(\frac{1}{n}\right)$$

se verifica

$$C_{21I2} = \frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} E_p\left(\hat{N}(x) - N(x)\right) = \frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)} N(x)O\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_S^{[X-x]}(x)\beta_L(x)O\left(\frac{1}{n}\right)$$

que, como el núcleo es simétrico y $nh_n^3 \to \infty$

$$C_{21I2} = O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|\,h_n}{n}\right)$$

C21II

$$C_{21II} = \frac{1}{D(x)} E_p \left(\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} \frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}} \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 D(x)} E_p \left[\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 D(x)} \left\langle \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} + \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 D(x)} E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right] +$$

$$+ \frac{\frac{1}{N} S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 D(x)} E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 D(x)} E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right] +$$

$$+ \frac{\frac{1}{N} S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 D(x)} COV_p \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{N}(x) \right)$$

El segundo sumando se trata a partir de una proposición previa. El primero se puede acotar asintóticamente del siguiente modo, teniendo en cuenta la simetría del núcleo y que $nh_n^3 \to \infty$,

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 D(x)} = O\left(\frac{1}{h_n^2} \right)$$

y

$$\left| E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right) \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right] \right| \leq$$

$$\leq E_p^{1/2} \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 \right] E_p^{1/2} \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^2 \left(\hat{N}(x) - N(x) \right)^2 \right] \leq$$

$$\leq E_p^{1/2} \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 \right] E_p^{1/4} \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right)^4 \right] E_p^{1/4} \left[\left(\hat{N}(x) - N(x) \right)^4 \right] =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{1/2} h_n^{1/2}} \right) O\left(\frac{h_n^{1/2}}{n^{1/2}} \right) O\left(\frac{\text{máx} \left| Y_i \right| h_n^{1/2}}{n^{1/2}} \right) = O\left(\text{máx} \left| Y_i \right| \frac{h_n^{1/2}}{n^{3/2}} \right)$$

por tanto

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)} E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)\right]=$$

$$=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^{3/2}h_n^{3/2}}\right)=O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

El segundo sumando, que es el dominante,

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1},\hat{N}(x)\right)$$

será igual a

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)}$$

multiplicado por

$$\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)+$$

$$+2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S^2_{N,0,0,1}\right)$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^2}\right)$$

por consiguiente

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1},\hat{N}(x)\right)=$$

$$=\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

C21III

$$|C_{21III}| = \left| \frac{1}{D(x)} E_p \left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) \left(\frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}} \right)^2 \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right] \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{D(x) \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2} \right| E_p \left| \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{D(x) \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2} \right| h_n E_p \left| \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 \left(\hat{N}(x) - N(x) \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{D(x) \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2} \right| h_n E_p^{1/2} \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^4 \right] E_p^{1/2} \left[\left(\hat{N}(x) - N(x) \right)^2 \right] =$$

$$\leq O\left(\frac{1}{h_n^2} \right) O(1) O\left(h_n \right) O\left(\frac{1}{n h_n} \right) O\left(\frac{\text{máx} \left| Y_i \right| h_n^{1/2}}{n^{1/2}} \right) = O\left(\frac{\text{máx} \left| Y_i \right|}{(n h_n)^{3/2}} \right)$$

Q.E.D.

Observación.- Si nh_n^5 estuviera acotado, es decir $nh_n^5 = O(1)$, los dos restos serían del mismo orden

$$O\left(\frac{\max \left| Y_i \right|}{(n h_n)^{3/2}} \right) = O\left(\frac{\max \left| Y_i \right| h_n}{n n^{1/2} h_n^{5/2}} \right) = O\left(\max \left| Y_i \right| \frac{h_n}{n} \frac{1}{(n h_n^5)^{1/2}} \right)$$

5.2.4. C22

Proposición 49 *En MASS/R(N, n), si $K(\cdot)$ es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3 \to \infty$*

$$C_{22} = \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} \right) -$$

$$-2 \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) -$$

$$- \frac{\beta_L(x) \frac{1}{N} S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \right)^2 D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,2} \right) +$$

$$+ O\left(\text{máx} \left| Y_i \right| \left(\frac{h_n}{n} + \frac{\text{máx} \left| Y_i \right|}{(n h_n)^{3/2}} \right) \right)$$

Demostración.-

$$C_{22} = \beta_L(x) E_p \left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) \frac{\hat{D}(x) - D(x)}{D(x)} \right]$$

Como

$$\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) = \frac{1}{S_{N,0,0,1}^2} \left[\left(2S_{N,0,0,1} - \hat{S}_{N,0,0,1} \right) \hat{S}_{N,0,1,1} + \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) \left(\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} \left(\frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}} \right) + \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) \left(\frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}} \right)^2$$

si se sustituye se obtiene la siguiente descomposición

$$C_{22} = \beta_L(x) E_p \left(\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} \frac{\hat{D}(x) - D(x)}{D(x)} \right) - \beta_L E_p \left(\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} \frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}} \frac{\hat{D}(x) - D(x)}{D(x)} \right) +$$

$$+\beta_L(x) E_p \left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) \left(\frac{\hat{S}_{N,0,0,1} - S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}} \right)^2 \frac{\hat{D}(x) - D(x)}{D(x)} \right] = C_{22I} - C_{22II} + C_{22III}$$

C22I

$$C_{22I} = \beta_L(x) E_p \left(\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}} \frac{\hat{D}(x) - D(x)}{D(x)} \right) = \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} E_p \left[\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} \left(\hat{D}(x) - D(x) \right) \right] =$$

$$= \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} E_p \left[\left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \right) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right) \right] +$$

$$+ \frac{\beta_L(x) \frac{1}{N} S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} E_p \left[\left(\hat{D}(x) - D(x) \right) \right] = C_{22I1} + C_{22I2}$$

El primer sumando verifica

$$C_{22I1} = \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} COV_p \left(\frac{1}{N} \hat{S}_{N,0,1,1}; \hat{D}(x) \right) =$$

$$= \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} \right) - \right.$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)-$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}O\left(\frac{h_n^3}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)-$$

$$-2\frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)$$

Como

$$E_p\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)=D(x)O\left(\frac{1}{n}\right),$$

el segundo sumando

$$C_{22I2}=\frac{\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}E_p\left[\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]=\alpha_S^{[X-x]}(x)\beta_L(x)O\left(\frac{1}{n}\right)$$

que como el núcleo es simétrico y $nh_n^3\to\infty$,

$$C_{22I2}=O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|\,h_n}{n}\right)$$

C22II

$$C_{22II}=\beta_L(x)E_p\left(\frac{\hat{S}_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{\hat{S}_{N,0,0,1}-S_{N,0,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{\hat{D}(x)-D(x)}{D(x)}\right)=$$

$$=\frac{\beta_L(x)}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2D(x)}E_p\left[\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]=$$

$$=\frac{\beta_L(x)}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2D(x)}\left\langle\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right\rangle=$$

$$=\frac{\beta_L(x)}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2D(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]+$$

$$+\frac{\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2D(x)}E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]=$$

$$= \frac{\beta_L(x)}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)} E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right] +$$

$$+ \frac{\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{D}(x)\right) = C_{22II1} + C_{22II2}$$

el segundo sumando se trata a partir de una proposición previa. El primero se puede acotar asintóticamente del siguiente modo

$$C_{22II1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)} = O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)$$

$$\left|E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]\right| \leq$$

$$\leq E_p^{1/2}\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\right] E_p^{1/2}\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] \leq$$

$$\leq E_p^{1/2}\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\right] E_p^{1/4}\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^4\right] E_p^{1/4}\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^4\right] =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{h_n^{1/2}}{n^{1/2}}\right) O\left(\frac{h_n^{3/2}}{n^{1/2}}\right) = O\left(\frac{h_n^{3/2}}{n^{3/2}}\right)$$

por tanto

$$\frac{\beta_L(x)}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)} E_p\left[\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,1,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1} - \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right] =$$

$$= O\left(\frac{\max|Y_i|}{h_n^3}\right) O\left(\frac{h_n^{3/2}}{n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{\max|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

El segundo sumando, que es el dominante,

$$C_{22II2} = \frac{\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)} COV_p\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}, \hat{D}(x)\right)$$

será igual a

$$\frac{\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)}$$

multiplicado por

$$\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)$$

$$-2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)-$$

$$-2\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)+O\left(\frac{h_n}{n^2}\right)$$

por consiguiente

$$C_{22II2}=\frac{\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2 D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)$$

C22III

$$|C_{22III}|=\left|\beta_L(x)E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}}\right)^2\frac{\hat{D}(x)-D(x)}{D(x)}\right]\right|=$$

$$=\left|\frac{\beta_L(x)}{D(x)\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\right|\left|E_p\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\beta_L(x)}{D(x)\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\right|E_p\left|\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\beta_L(x)}{D(x)\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\right|h_nE_p\left|\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\beta_L(x)}{D(x)\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\right|h_nE_p^{1/2}\left(\frac{1}{N}\hat{S}_{N,0,0,1}-\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^4E_p^{1/2}\left[\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right]=$$

$$\leq\text{máx}\,|Y_i|\,O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)O(1)O\left(h_n\right)O\left(\frac{1}{nh_n}\right)O\left(\frac{h_n^{3/2}}{n^{1/2}}\right)=$$

$$= \text{máx}\,|Y_i|\, O\left(\frac{1}{h_n^{3/2} n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

Q.E.D.

5.2.5. C3

$$C_3 = \frac{1}{D^2(x)}\left\langle \frac{1}{f_S(x)}\left[\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - \frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right]\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{D^2(x)}\left\langle \frac{1}{f_S(x)}\hat{r}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{D^2(x)}\left\langle \frac{1}{f_S(x)}\left[\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right]\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{D^2(x)}\left\langle \frac{1}{f_S(x)}\left(r_S^{[X-x]}(x) + \hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x)\right)\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{D^2(x)}\left\langle \frac{1}{f_S(x)}\left[\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right]\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right\rangle =$$

$$= C_{31} - C_{32} = C_{311} + C_{312} - C_{32}$$

C311

$$C_{311} = \frac{1}{D^2(x)}\frac{r_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\left\langle \left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right\rangle$$

$$= O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) O\left(h_n^2\right) O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|\, h_n^2}{n}\right) = O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n}\right)$$

C312

$$C_{312} = \frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left\langle \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x)\right)\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right\rangle$$

$$|C_{312}| \leq \frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left\langle \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right\rangle^{1/2}\left\langle \left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right\rangle^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left\langle\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^4\right\rangle^{1/4}\left\langle\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right\rangle^{1/4}=$$

$$=O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\left(\frac{h_n}{n}\right)^{1/2}\right)O\left(\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|^4\,h_n^2}{n^2}\frac{h_n^6}{n^2}\right)^{1/4}\right)=$$

$$=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^{3/2}h_n^{3/2}}\right)=O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

C32

$$C_{32}=\frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left\langle\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right\rangle$$

$$|C_{32}|\leq\frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left\langle\left|\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right|\right\rangle\leq$$

$$\leq\frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left\langle\left|\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\right|\left|\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right|\left|\hat{N}(x)-N(x)\right|\left|\hat{D}(x)-D(x)\right|\right\rangle\leq$$

$$\leq\frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}h_n\left\langle\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^4\right\rangle^{1/4}\left\langle\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right\rangle^{1/4}=$$

$$=O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(h_n\right)O\left(\left(\frac{1}{nh_n}\right)^{1/2}\right)O\left(\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|^4\,h_n^2}{n^2}\frac{h_n^6}{n^2}\right)^{1/4}\right)=$$

$$=O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n^{3/2}h_n^{3/2}}\right)=O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

5.2.6. C4

$$C_4=\frac{1}{D^2(x)}\left\langle\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{D^2(x)}\left\langle\frac{1}{f_S(x)}\left[\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\right]\left[\beta_L(x)+\hat{\beta}_L(x)-\beta_L(x)\right]\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle=$$

$$=C_{411}+C_{412}-C_{421}-C_{422}$$

C411

$$C_{411} = \frac{1}{f_S(x)} \frac{1}{D^2(x)} \left\langle \hat{r}_S^{[X-x]}(x) \beta_L(x) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{f_S(x)} \frac{\beta_L(x)}{D^2(x)} \left\langle \hat{r}_S^{[X-x]}(x) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{f_S(x)} \frac{\beta_L(x)}{D^2(x)} \left\langle \left(r_S^{([X-x]}(x) + \hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) \right) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{f_S(x)} \frac{\beta_L(x)}{D^2(x)} r_S^{[X-x]}(x) \left\langle \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{f_S(x)} \frac{\beta_L(x)}{D^2(x)} \left\langle \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) \right) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle = C_{4111} + C_{4112}$$

$$C_{4111} = O(1) O\left(\frac{1}{h_n^4} \right) O\left(\frac{\text{máx} |Y_i|}{h_n} \right) O\left(h_n^2 \right) O\left(\frac{h_n^3}{n} \right) = O\left(\frac{\text{máx} |Y_i|}{n} \right)$$

$$|C_{4112}| = \left| \frac{1}{f_S(x)} \frac{\beta_L(x)}{D^2(x)} \left\langle \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) \right) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\beta_L(x)|}{D^2(x)} \left\langle \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) \right)^2 \right\rangle^{1/2} \left\langle \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^4 \right\rangle^{1/2} =$$

$$= O(1) O\left(\frac{1}{h_n^4} \right) \text{máx} |Y_i| O\left(\frac{1}{h_n} \right) O\left(\frac{h_n^{1/2}}{n^{1/2}} \right) O\left(\frac{h_n^{6/2}}{n^{2/2}} \right) =$$

$$= O\left(\frac{\text{máx} |Y_i|}{h_n^5} \right) O\left(\frac{h_n^{7/2}}{n^{3/2}} \right) = O\left(\text{máx} |Y_i| \frac{1}{n^{3/2} h_n^{3/2}} \right) = O\left(\frac{\text{máx} |Y_i|}{(n h_n)^{3/2}} \right)$$

C412

$$C_{412} = \frac{1}{f_S(x)} \frac{1}{D^2(x)} \left\langle \hat{r}_S^{[X-x]}(x) \left[\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right] \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle = C_{4121} + C_{4122}$$

$$C_{4121} = \frac{1}{f_S(x)} \frac{1}{D^2(x)} \left\langle r_S^{[X-x]}(x) \left[\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right] \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{r_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)} \left\langle \left[\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right] \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle$$

$$|C_{4121}| = \frac{1}{f_S(x)} \frac{\left| r_S^{[X-x]}(x) \right|}{D^2(x)} \left| \left\langle \left[\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right] \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S(x)} \frac{\left| r_S^{[X-x]}(x) \right|}{D^2(x)} \left\langle \left[\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right]^2 \right\rangle^{1/2} \left\langle \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^4 \right\rangle^{1/2} \leq$$

$$= O(1) O\left(\frac{1}{h_n^4} \right) O\left(h_n^2 \right) O\left(\left(\frac{\max |Y_i|^2}{n h_n^3} \right)^{1/2} \right) O\left(\left(\frac{h_n^6}{n^2} \right)^{1/2} \right) = O\left(\frac{1}{h_n^2} \right) O\left(\max |Y_i| \frac{h_n^{3/2}}{n^{3/2}} \right) =$$

$$= O\left(\max |Y_i| \frac{1}{n^{3/2} h_n^{3/2}} \right) = O\left(\frac{\max |Y_i|}{(n h_n)^{3/2}} \right)$$

$$C_{4122} = \frac{1}{f_S(x)} \frac{1}{D^2(x)} \left\langle \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) \right) \left(\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle$$

$$|C_{4122}| = \frac{1}{f_S(x)} \frac{1}{D^2(x)} \left| \left\langle \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) \right) \left(\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{D^2(x)} \left| \hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) \right| \left\langle \left| \hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right| \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S(x)} \frac{1}{D^2(x)} \left| \hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) \right| \left\langle \left(\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x) \right)^2 \right\rangle^{1/2} \left\langle \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^4 \right\rangle^{1/2} \leq$$

$$= O(1) O\left(\frac{1}{h_n^4} \right) O\left(h_n \right) O\left(\left(\frac{\max |Y_i|^2}{n h_n^3} \right)^{1/2} \right) O\left(\left(\frac{h_n^6}{n^2} \right)^{1/2} \right) = O\left(\frac{1}{h_n^3} \right) O\left(\max |Y_i| \frac{h_n^{3/2}}{n^{3/2}} \right) =$$

$$= O\left(\max |Y_i| \frac{1}{n^{3/2} h_n^{3/2}} \right) = O\left(\frac{\max |Y_i|}{(n h_n)^{3/2}} \right)$$

C421

$$C_{421} = \frac{1}{D^2(x)} \frac{\beta_L(x)}{f_S(x)} \left\langle \frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)} \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x) \right) \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle$$

$$|C_{421}| \leq \frac{1}{f_S(x)} \frac{1}{D^2(x)} |\beta_L(x)| \left\langle \left| \frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)} \right| \left| \hat{f}_S(x) - f_S(x) \right| \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S(x)} \frac{1}{D^2(x)} |\beta_L(x)| h_n \left\langle \left| \hat{f}_S(x) - f_S(x) \right| \left(\hat{D}(x) - D(x) \right)^2 \right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left|\beta_L(x)\right| h_n \left\langle \left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right\rangle^{1/2} \left\langle \left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right\rangle^{1/2} =$$

$$= O(1)O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{h_n}\right) O\left(h_n\right) O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) = O\left(\text{máx}\left|Y_i\right| \frac{1}{h_n^4}\right) O\left(\frac{h_n^{5/2}}{n^{3/2}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{n^{3/2}h_n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

C422

$$C_{422} = \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S(x)}\left\langle \frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\left(\hat{\beta}_L(x)-\beta_L(x)\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S(x)}\left\langle \frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S(x)}\beta_L(x)\left\langle \frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle = C_{422I}+C_{422II}$$

por una parte

$$\left|C_{422II}\right| \leq \frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left|\beta_L(x)\right|\left\langle \left|\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\right|\left|\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right|\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left|\beta_L(x)\right| h_n \left\langle \left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right\rangle^{1/2} \left\langle \left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right\rangle^{1/2} \leq$$

$$= O(1)O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) O\left(\text{máx}\left|Y_i\right| \frac{1}{h_n}\right) O\left(h_n\right) O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) =$$

$$= O\left(\text{máx}\left|Y_i\right| \frac{1}{h_n^4}\right) O\left(\frac{h_n^{5/2}}{n^{3/2}}\right) =$$

$$= O\left(\text{máx}\left|Y_i\right| \frac{1}{n^{3/2}h_n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{\text{máx}\left|Y_i\right|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

y por otra

$$\left|C_{422II}\right| \leq \frac{1}{f_S(x)}\frac{1}{D^2(x)}\left|\beta_L(x)\right| h_n \left\langle \left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right\rangle^{1/2} \left\langle \left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right\rangle^{1/2} \leq$$

$$= O(1)O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|\right) O\left(h_n\right) O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right) O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) =$$

$$= O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right| \frac{1}{h_n^3}\right) O\left(\frac{h_n^{5/2}}{n^{3/2}}\right) =$$

$$= O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right| \frac{1}{n^{3/2}h_n^{1/2}}\right)$$

que va predominar sobre C_{422I12}. El otro sumando es igual a

$$C_{422I} = \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\left\langle\left[\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - \frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\right]\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right\rangle =$$

$$\frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\left\langle\hat{r}_S^{[X-x]}(x)\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\left\langle\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{\hat{f}_S(x)}\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^2\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right\rangle = C_{422I1} - C_{422I2}$$

El segundo se puede acotar asintóticamente del siguiente modo

$$|C_{422I2}| \leq h_n \max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right| \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\left\langle\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right\rangle \leq$$

$$\leq h_n \max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right| \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\left\langle\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^4\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^4\right\rangle^{1/2} \leq$$

$$\leq h_n \max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right| O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) O(1) O\left(\frac{1}{nh_n}\right) O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) =$$

$$= \max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right| O\left(\frac{1}{n^2h_n}\right) = O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right| \frac{1}{n^2h_n}\right)$$

Por lo que respecta al primer sumando

$$C_{422I1} = \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\left\langle\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x) + r_S^{[X-x]}(x)\right)\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\left\langle\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x)\right)\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{D^2(x)}\frac{r_S^{[X-x]}(x)}{f_S^2(x)}\left\langle\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle = C_{422I11}+C_{422I12}$$

$$|C_{422I11}| \leq \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\left\langle\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)\right)\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\left\langle\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right\rangle^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\left\langle\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)\right)^4\right\rangle^{1/4}\left\langle\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^4\right\rangle^{1/4}\left\langle\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right\rangle^{1/2} \leq$$

$$\leq \max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right| O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O(1)O\left(\frac{h_n^{1/2}}{n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) =$$

$$= \max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right| O\left(\frac{1}{n^2h_n}\right) = O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\frac{1}{n^2h_n}\right)$$

$$|C_{422I12}| \leq \frac{1}{D^2(x)}\frac{\left|r_S^{[X-x]}(x)\right|}{f_S^2(x)}\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\left\langle\left|\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right|\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle \leq$$

$$\leq \max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\frac{1}{D^2(x)}\frac{\left|r_S^{[X-x]}(x)\right|}{f_S^2(x)}\left\langle\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^4\right\rangle^{1/2} =$$

$$= \max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right| O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O(h_n^2)O(1)O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) =$$

$$= \max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right| O\left(\frac{h_n^{1/2}}{n^{3/2}}\right) = O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\frac{h_n^{1/2}}{n^{3/2}}\right)$$

Este último término predomina sobre C_{422I11} y C_{422I2}.

5.2.7. Tratamiento conjunto de C4111 y C311

Se van a reunir el término correspondiente a

$$C_{311} = \frac{1}{D^2(x)}\frac{r_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\left\langle\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right\rangle,$$

cuyo paréntesis angular, que simboliza una $p-$esperanza, es igual a $\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}$ por

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\frac{1}{N}S_{N,1,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\cdots,$$

donde los puntos suspensivos abrevian sumandos de menor orden de magnitud, y el correspondiente a

$$C_{4111}=\frac{r_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\frac{\beta_L(x)}{D^2(x)}\left\langle\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle,$$

cuyo paréntesis angular, que también simboliza una $p-$esperanza, es igual a $\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}$ por

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\frac{1}{N}S_{N,0,4,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\cdots$$

por las demostraciones de la proposición 42 y de su corolario, el 84. Por tanto, considerando ambos

$$C_{311}-C_{4111}=\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\left\{\left\langle\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right\rangle-\beta_L(x)\left\langle\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\right\rangle\right\}$$

van a dar lugar a $\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}$ por términos como

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,3,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2}\right)+$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+$$

$$+\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}-$$

$$-2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}-$$

$$-2\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+\cdots$$

Tras estos desarrollos, se está en condiciones de establecer la siguiente afirmación

Teorema 11 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $K(\cdot)$ es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3\to\infty$*

$$B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=\frac{-1}{D(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)+$$

$$+\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)+$$

$$+\frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)-$$

$$-2\frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)-$$

$$-\frac{\beta_L(x)\alpha_S^{[X-x]}(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)+$$

$$+\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,3,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right]+$$

$$+\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right]-$$

$$-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\left(\frac{h_n}{n}+\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right)$$

Demostración.- Por los epígrafes anteriores, se verifica que

$$C_{21}-C_{22}-C_3+C_4=$$

$$=[(C_{21I1}+C_{21I2})-(C_{21II1}+C_{21II2})+C_{21III}]-[(C_{22I1}+C_{22I2})-(C_{22II1}+C_{22II2})+C_{22III}]-$$

$$-[(C_{311}+C_{312})-C_{32}]+[(C_{4111}+C_{4112})+C_{412}-C_{421}-C_{422}]=$$

$$=C_{21I1}-C_{21II1}-C_{22I1}+C_{22II2}-(C_{311}-C_{4111})+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)+O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

que, de un modo más explícito, es igual a

$$\frac{1}{D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S^{[X-x]}(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+$$

$$+\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)+$$

$$-\frac{\alpha_S^{[X-x]}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)+O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)+O\left(\frac{\text{máx}\,|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

$$-\frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)+$$

$$+2\frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)+$$

$$+\frac{\beta_L(x)\alpha_S^{[X-x]}(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)-$$

$$+O\left(\max|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)+O\left(\frac{\max|Y_i|}{(nh_n)^{3/2}}\right)-$$

$$-\frac{\alpha_S^{[X-x]}}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,3,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2}\right)\right]-$$

$$-\frac{\alpha_S^{[X-x]}}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right]-$$

$$-\frac{\alpha_S^{[X-x]}}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right]-$$

$$-\frac{\alpha_S^{[X-x]}}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right]+$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{h_n}{n}\right)$$

y, teniendo en cuenta que $B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)-(C_{21}-C_{22}-C_3+C_4)$, se obtiene la expresión Q.E.D.

También se puede abreviar como un desarrollo con menos términos del siguiente modo

Corolario 89 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $K(\cdot)$ es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3\to\infty$*

$$B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=\frac{-1}{D(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)-$$

$$-\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_h^2(x_i-x)+ \tag{5.4}$$

$$+O\left(\text{máx}\,|Y_i|\,\frac{1}{n}\right)$$

5.3. Estudio del sesgo promedio del estimador L

Antes de estudiar la expresión $E_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_L(x) - \alpha_L(x)\right)$, se introducirá el siguiente desarrollo asintótico

Lema 28 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ está acotada y $nh_n^3 \to \infty$, entonces*

$$E_\xi\left(\alpha_L(x)\right) = \alpha(x) + O\left(h_n^2\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left(\alpha_L(x)\right) = \frac{\sum_{i=1}^N E_\xi\left(Y_i\right) W_{hi}}{\sum_{i=1}^N W_{hi}} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha\left(x_i\right) W_{hi}}{\sum_{i=1}^N W_{hi}} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\alpha(x) + \alpha'(x)(x_i - x) + \frac{1}{2}\alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2\right) W_{hi}}{\sum_{i=1}^N W_{hi}} =$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (x_i - x) W_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N W_{hi}} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2 W_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N W_{hi}}$$

que será igual, por la propiedad de los seudopesos, a

$$\alpha(x) + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N \alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2 W_{hi}}{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N W_{hi}} = \alpha(x) + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N \alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2 K_{hi}\left[\sum_{j=1}^N (x_j - x)^2 K_{hj} - (x_i - x)\sum_{j=1}^N (x_j - x) K_{hj}\right]}{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N W_{hi}} =$$

$$= \alpha(x) + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^2 K_{hi}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N (x_j - x)^2 K_{hj} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \alpha''(\zeta_i)(x_i - x)^3 K_{hi}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N (x_j - x) K_{hj}}{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N W_{hi}} =$$

$$= \alpha(x) + \frac{1}{2} O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)\left[O\left(h_n^2\right) O\left(h_n^2\right) + O\left(h_n^3\right) O\left(h_n\right)\right] = \alpha(x) + O\left(h_n^2\right)$$

porque la segunda derivada de la función de regresión está acotada Q.E.D.

5.3.1. Sesgo promedio del estimador I

Proposición 50 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ está acotada y $nh_n^3 \to \infty$, entonces*

$$E_\xi\left(\beta_L(x)\right) = \alpha'(x) + O(h_n)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left(\beta_L(x)\right) = \alpha'(x) + \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^3 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K_{hj}}{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}W_{hi}} - \frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_j-x\right)K_{hj}}{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}W_{hi}}\right] =$$

$$= \alpha'(x) + \left[O\left(h_n^3\right)O\left(\frac{1}{h_n^2}\right) + O\left(h_n^2\right)O\left(h_n\right)O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)\right] = \alpha'(x) + O(h_n)$$

Para ver esto hay que tener en cuenta que

$$\alpha(x_j) = \alpha(x) + \alpha'(x)\left(x_j-x\right) + \frac{1}{2}\alpha''(\varsigma_j)\left(x_j-x\right)^2$$

$$\alpha(x_k) = \alpha(x) + \alpha'(x)\left(x_k-x\right) + \frac{1}{2}\alpha''(\varsigma_i)\left(x_k-x\right)^2$$

y, restando miembro a miembro,

$$\alpha(x_j) - \alpha(x_k) = \alpha'(x)\left(x_j-x_k\right) + \frac{1}{2}\left[\alpha''(\varsigma_i)\left(x_j-x\right)^2 - \alpha''(\varsigma_j)\left(x_k-x\right)^2\right]$$

El primer sumando va a dar lugar a $\alpha'(x)$. Para el segundo

$$\frac{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\alpha''(\varsigma_j)\left(x_j-x\right)^2 - \alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2\right]\left(x_j-x_k\right)K_{hj}K_{hk}}{\sum_{i=1}^{N}W_{hi}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\alpha''(\varsigma_j)\left(x_j-x\right)^2 - \alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2\right]\left(\left(x_j-x\right)-\left(x_k-x\right)\right)K_{hj}K_{hk}}{\sum_{i=1}^{N}W_{hi}} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^3 K_{hk}K_{hj}}{\sum_{i=1}^{N}W_{hi}} - \frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2\left(x_j-x\right)K_{hk}K_{hj}}{\sum_{i=1}^{N}W_{hi}}$$

que multiplicando y dividiendo por $\frac{1}{N^2}$ permite acotarlo asintóticamente

Q.E.D.

Observación.- El desarrollo anterior permite su acotación, $E_\xi\left(\beta_L(x)\right) = O(1)$, a la que también se puede llegar imponiendo una condición más débil, que α sea lipschitziana

$$E_\xi\left(\beta_L(x)\right) = \frac{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})} E_\xi\left(Y_i - Y_j\right)\left(x_i - x_j\right) K_{hi}K_{hj}}{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(x_i - x_j\right)^2 K_{hi}K_{hj}} = \frac{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(\alpha(x_i) - \alpha(x_j)\right)\left(x_i - x_j\right) K_{hi}K_{hj}}{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(x_i - x_j\right)^2 K_{hi}K_{hj}}$$

por tanto

$$\left|E_\xi\left(\beta_L(x)\right)\right| \leq \frac{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left|\alpha(x_i) - \alpha(x_j)\right|\left|x_i - x_j\right| K_{hi}K_{hj}}{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(x_i - x_j\right)^2 K_{hi}K_{hj}} \leq \frac{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\Lambda(\alpha)\left|x_i - x_j\right|\left|x_i - x_j\right| K_{hi}K_{hj}}{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(x_i - x_j\right)^2 K_{hi}K_{hj}} =$$

$$= \Lambda(\alpha)\frac{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(x_i - x_j\right)^2 K_{hi}K_{hj}}{\sum_{i\neq j}^{(N^{(2)})}\left(x_i - x_j\right)^2 K_{hi}K_{hj}} = \Lambda(\alpha)$$

A continuación se estudiará la esperanza del término principal del sesgo del estimador I según el diseño, término que comparte con el estimador L

Proposición 51 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ está acotada y $nh_n^3 \to \infty$, entonces*

$$E_\xi\left[\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right)K_{hi}^2\right] = O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

Demostración.- Primero se probará que

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right)K_{hi}^2\right] = O\left(h_n\right)$$

para ello considérese que

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right)K_{hi}^2\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_\xi\left(Y_i - \alpha_L - \beta_L\left(x_i - x\right)\right)K_{hi}^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[E_\xi\left(Y_i\right) - E_\xi\left(\alpha_L(x)\right) - E_\xi\left(\beta_L(x)(x_i - x)\right)\right]K_{hi}^2$$

y

1.
$$E_\xi\left(Y_i\right) = \alpha(x_i) = \alpha(x) + \alpha'(x)\left(x_i - x\right) + \frac{1}{2}\alpha''(\varsigma_i)\left(x_i - x\right)^2,$$

2.

$$E_\xi\left(\alpha_L(x)\right) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha\left(x_k\right) W_{hk}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \left(\alpha(x) + \alpha'(x)\left(x_k - x\right) + \frac{1}{2}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^2\right) W_{hk}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}} =$$

$$= \alpha(x) + \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{N} \left(\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^2\right) W_{hk}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}}$$

3.

$$E_\xi\left[\beta_L\left(x_i - x\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x_i - x\right)\left[\frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^3 K_{hk} \sum_{j=1}^{N} K_{hj}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}} - \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^2 K_{hk} \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - x\right) K_{hj}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}}\right]$$

porque

$$E_\xi\left[\beta_L\left(x_i - x\right)\right] = \left(x_i - x\right) E_\xi\left(\beta_L\right),$$

y

$$E_\xi\left(\beta_L\right) = \alpha'(x) + \frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^3 K_{hk} \sum_{j=1}^{N} K_{hj}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}} - \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^2 K_{hk} \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - x\right) K_{hj}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}}\right]$$

Tras simplificar $\alpha(x)$ e $\alpha'(x)\left(x_i - x\right)$, se tiene que

$$E_\xi\left(Y_i\right) - E_\xi\alpha_L - E_\xi\left(\beta_L\left(x_i - x\right)\right) = \frac{1}{2}\alpha''(\varsigma_i)\left(x_i - x\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{N} \left(\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^2\right) W_{hk}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(x_i - x\right)\left[\frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^3 K_{hk} \sum_{j=1}^{N} K_{hj}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}} - \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha''(\varsigma_k)\left(x_k - x\right)^2 K_{hk} \sum_{j=1}^{N} \left(x_j - x\right) K_{hj}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}}\right]$$

Al sumar en i, para el primer sumando se tiene que

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

$$\left|\frac{1}{N}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha''\left(\varsigma_i\right)\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2\right|\leq\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\alpha''\left(\varsigma_i\right)\right|\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left|C\left(\alpha''\right)\right|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2=O\left(h_n\right)$$

y dará lugar a

$$\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''\left(\varsigma_i\right)\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2=O(h_n)$$

si la segunda derivada está acotada. Para los siguientes sumandos se puede multiplicar y dividir por N^2 por tanto el numerador del segundo sumando será, salvo una constante, -1/2,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''\left(\varsigma_k\right)\left(x_k-x\right)^2K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_j-x\right)^2K_{hj}-$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''\left(\varsigma_k\right)\left(x_k-x\right)^3K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_j-x\right)K_{hj}=$$

$$=O(h_n^2)O(h_n^2)-O(h_n^3)O(h_n)=O(h_n^4)$$

y para el tercero

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''\left(\varsigma_k\right)\left(x_k-x\right)^3K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K_{hj}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}^2-$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_j-x\right)K_{hj}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}^2=$$

$$=O(h_n^3)O(1)O(1)-O(h_n^2)O(h_n)O(1)=O(h_n^3)$$

Por la observación posterior a la proposición 31, el denominador admite la expresión

$$\frac{1}{f^2(x)\left(\alpha_2\left(K\right)-\alpha_1^2\left(K\right)\right)h_n^2}\left(1+o(1)\right)$$

Reuniendo los sumandos se tiene que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[E_\xi\left(Y_i\right)-E_\xi\left(\alpha_L\right)-E_\xi\left(\beta_L(x_i-x)\right)\right]K_{hi}^2=O\left(h_n\right)+O\left(h_n^2\right)+O\left(h_n^2\right)=O\left(h_n\right)$$

Por consiguiente, si en la expresión

$$\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2,$$

se toman esperanzas según el diseño, se obtiene que

$$E_\xi\left[\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2\right]=O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

Q.E.D.

El resultado anterior se puede refinar del siguiente modo

$$\alpha(x_i)=\alpha(x)+\alpha'(x)(x_i-x)+\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2$$

por tanto

$$\alpha(x_i)-\alpha'(x)(x_i-x)=\alpha(x)+\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2$$

Por consiguiente

$$E_\xi\left[Y_i-\beta_L(x)(x_i-x)\right]=\alpha(x_i)-E_\xi\left(\beta_L(x)\right)\left(x_i-x\right)=\alpha(x_i)-\alpha'(x)(x_i-x)-A(x_i-x)$$

porque

$$E_\xi\left(\beta_L(x)\right)=\alpha'(x)+A$$

siendo

$$A=\frac{\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^3K_{hk}\sum_{j=1}^{N}K_{hj}}{2\sum_{k=1}^{N}W_{hk}}-\frac{\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2K_{hk}\sum_{j=1}^{N}\left(x_j-x\right)K_{hj}}{2\sum_{k=1}^{N}W_{hk}}$$

que no depende de i, por la demostración de la proposición anterior. Es decir

$$E_\xi\left[Y_i-\beta_L(x)(x_i-x)\right]=\alpha(x)+\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2-A(x_i-x)$$

Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ está acotada y $nh_n^3\to\infty$, entonces para calcular

$$E_\xi\left[-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2+O\left(\frac{\underset{V_{x,h_n}}{\text{máx}}\left|Y_i\right|}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right]$$

se verifica para el primer término

$$E_\xi\left[-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2\right]=$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\beta_L\left(x_i-x\right)-\alpha_L\right)K_{hi}^2\right]=$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{E_\xi\left[Y_i-\beta_L\left(x_i-x\right)-\alpha_L\right]\right\}K_{hi}^2=$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\alpha(x)+\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2-A(x_i-x)-E_\xi\left(\alpha_L(x)\right)\right\}K_{hi}^2=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{E_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\alpha(x)-\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2+A(x_i-x)\right\}K_{hi}^2=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\left\{\left[E_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\alpha(x)\right]\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^2-\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{hi}^2+A\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)K_{hi}^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\left\{B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)S_{N,0,0,2}-\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{hi}^2+AS_{N,0,1,2}\right\}=$$

$$=\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{hi}^2+O\left(\frac{1}{n}\right)O(h_n^2)=$$

$$=\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{hi}^2+O\left(\frac{h_n^2}{n}\right)\quad(5.5)$$

por tanto

$$E_\xi\left[-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2+O\left(\frac{\underset{V_{x,h_n}}{\text{máx}}\left|Y_i\right|}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{hi}^2+O\left(\frac{E\left(\underset{V_{x,h_n}}{\text{máx}}\left|\varepsilon_i\right|\right)}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

es decir, el sesgo promedio del estimador I es

$$E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)\right]=\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{hi}^2+O\left(\frac{E\left(\underset{V_{x,h_n}}{\text{máx}}\,|\varepsilon_i|\right)}{(nh_n)^{3/2}}\right) \tag{5.6}$$

Si además se supone que α'' sea continua como Jennen-Steinmetz&Gasser(1988), se obtiene la siguiente expresión

$$E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)\right]=\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\alpha''(x)+o\left(\frac{h_n}{n}\right)+O\left(\frac{E\left(\underset{V_{x,h_n}}{\text{máx}}\,|\varepsilon_i|\right)}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

5.3.2. Términos adicionales del estimador L

En el epígrafe anterior ya se ha tratado un término que comparte con el estimador I. Por lo que respecta a los otros términos, al tomar esperanzas según el diseño en el otro término dominante

$$\frac{-1}{D(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)$$

se necesita calcular

$$E_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha\left(x_k\right)\left(x_k-x\right)^2K_{hk}^2=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha(x)+\alpha'(x)\left(x_k-x\right)+\frac{1}{2}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2\right)\left(x_k-x\right)^2K_{hk}^2=$$

$$=\alpha(x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)^2K_{hk}^2+\alpha'(x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)^3K_{hk}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^4\right)K_{hk}^2=$$

$$=\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^4K_{hk}^2=$$

$$=\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+O\left(h_n^3\right)$$

si la segunda derivada de la función objetivo está acotada porque el núcleo es de soporte compacto. Por tanto, se obtiene que

$$\frac{-1}{D(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}E_\xi\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right]=$$

$$= \frac{-1}{D(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\alpha(x) \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} + \alpha'(x) \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} + O\left(h_n^3\right) - E_\xi\left(\alpha_S(x)\right) \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) =$$

$$= \frac{-1}{D(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(-B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} + \alpha'(x) \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} + O\left(h_n^3\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{D(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} - \alpha'(x) \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} \right) + O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

Por una parte, obsérvese que con la notación de este capítulo

$$E_\xi\left(\alpha_S(x)\right) = \alpha(x) + \alpha'(x) \frac{\frac{1}{N} S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1}} + O\left(h_n^2\right) = \alpha(x) + \alpha'(x) \alpha_S^{[X-x]}(x) + O\left(h_n^2\right)$$

entonces, si K es simétrico y de soporte compacto y $nh_n^3 \to \infty$ entonces $B_\xi\left(\alpha_S(x)\right) = O\left(h_n^2\right)$

Y, por otra,

$$\frac{1}{D(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \alpha'(x) \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} = O\left(\frac{1}{h_n^2}\right) O\left(\frac{1}{n}\right) \left(O(h_n^3) + O(h_n^5) + O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right) \right) = O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right)$$

por tanto,

$$E_\xi\left[\frac{-1}{D(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,2,2} - \alpha_S(x) \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) \right] = O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right)$$

Este sumando, que introduce el plan de muestreo, resultará despreciable frente al habitual del sesgo según el diseño si $nh_n^3 \to \infty$, pero no es comparable si solo se impone $nh_n \to \infty$.

Al tomar esperanzas según el diseño en los otros sumandos del teorema 9

$$\frac{-1}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} - \frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} \right) +$$

$$+ \frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,1,1,2} + \frac{1}{N} S_{N,1,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,2} \right) +$$

$$+ \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} \right) -$$

$$-2 \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) -$$

$$- \frac{\beta_L(x) \alpha_S^{[X-x]}(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,2} \right) +$$

$$+\alpha_S^{[X-x]}(x)\frac{1}{D^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\left(\frac{1}{N}S_{N,1,3,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2}\right)\right]+$$

$$+\alpha_S^{[X-x]}(x)\frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right]+$$

$$+\alpha_S^{[X-x]}(x)\frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right]+$$

$$+\alpha_S^{[X-x]}(x)\frac{1}{D^2(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}-\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right]+$$

$$+O\left(\max|Y_i|\left(\frac{h_n}{n}+\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right)$$

se tiene que calcular

$$E_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha\left(x_k\right)\left(x_k-x\right)K_{hk}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha(x)+\alpha'(x)\left(x_k-x\right)+\frac{1}{2}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2\right)\left(x_k-x\right)K_{hk}=$$

$$=\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}+\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^3K_{hk}=$$

$$=\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}+O(h_n^3)$$

si la segunda derivada está acotada.

$$E_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha\left(x_k\right)\left(x_k-x\right)K_{hk}^2=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha(x)+\alpha'(x)\left(x_k-x\right)+\frac{1}{2}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^2\right)\left(x_k-x\right)K_{hk}^2=$$

$$=\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+\frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\left(x_k-x\right)^3K_{hk}^2=$$

$$=\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+O(h_n^2)$$

si la segunda derivada está acotada. Por tanto

$$E_\xi\left[\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[E_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}E_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}+O(h_n^3)\right)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+O(h_n^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left[\left(\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}+O(h_n^3)\right)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\left(\alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}+O(h_n^2)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\alpha'(x)\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+O\left(\frac{h_n^3}{n}\right)=O\left(\frac{h_n^3}{n}\right)$$

porque el núcleo es simétrico y de soporte compacto. Por consiguiente

$$E_\xi\left[\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}-\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right)\right]=O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

Y al tomar esperanzas según el diseño en los otros sumandos, por ejemplo, en el siguiente

$$\frac{\alpha_S^{[X-x]}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)$$

donde ya están calculadas las esperanzas que se necesitan, entonces

$$E_\xi\left[\frac{\alpha_S^{[X-x]}}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}+\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)\right]=O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

También hay que tratar

$$E_\xi\left[\frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)\right]=$$

$$=\frac{E_\xi\left[\beta_L(x)\right]}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}D(x)}\frac{1}{n}\frac{N-n}{N-1}\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,3,2}+\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)=$$

$$= \frac{\alpha'(x) + O(h_n)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,3,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} \right) = O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n^2)^2} \right)$$

si el núcleo es simétrico y de soporte compacto

$$E_\xi \left[2 \frac{\beta_L(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) \right] = 2 \frac{E_\xi \left[\beta_L(x) \right]}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) =$$

$$= 2 \frac{\alpha'(x) + O(h_n)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,1,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) = O\left(\frac{h_n}{n} \right)$$

También si el núcleo es simétrico y de soporte compacto

$$E_\xi \left[\frac{\beta_L(x) \alpha_S^{[X-x]}(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,2} \right) \right] =$$

$$= \frac{E_\xi \left[\beta_L(x) \right] \alpha_S^{[X-x]}(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,2} \right) =$$

$$= \frac{\left(\alpha'(x) + O(h_n) \right) \alpha_S^{[X-x]}(x)}{\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} D(x)} \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left(\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} + \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,2} \right) = O\left(\frac{h_n}{n} \right)$$

Los otros términos van a implicar estudiar

$$\frac{1}{N} S_{N,0,0,1}^2 E_\xi \left(\frac{1}{N} S_{N,1,3,2} - \beta_L(x) \frac{1}{N} S_{N,0,4,2} \right)$$

$$\frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} E_\xi \left(\frac{1}{N} S_{N,1,1,2} - \beta_L(x) \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right)$$

$$E_\xi \left(\frac{1}{N} S_{N,1,1,1} - \beta_L(x) \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \right) \frac{1}{N} S_{N,0,0,1} \frac{1}{N} S_{N,0,2,2}$$

$$E_\xi \left(\frac{1}{N} S_{N,1,1,1} - \beta_L(x) \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \right) \frac{1}{N} S_{N,0,2,1} \frac{1}{N} S_{N,0,0,2}$$

como

$$E_\xi \left(\frac{1}{N} S_{N,1,3,2} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \alpha\left(x_k\right) \left(x_k - x\right)^3 K_{hk}^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha(x) + \alpha'(x) \left(x_k - x\right) + \frac{1}{2} \alpha''(\varsigma_k) \left(x_k - x\right)^2 \right) \left(x_k - x\right)^3 K_{hk}^2 =$$

$$= \alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,3,2} + \alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2} + \frac{1}{2}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha''(\varsigma_k)\,(x_k - x)^5 K_{hk}^2 =$$

$$= \alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,3,2} + \alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2} + O(h_n^4)$$

se tiene que

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\left(\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,3,2} + \alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2} + O(h_n^4) - \left(\alpha'(x) + O(h_n)\right)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\left(\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,3,2} + \alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2} + O(h_n^4) - \alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,4,2} + O(h_n^4)\right) =$$

$$= \alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}^2\frac{1}{N}S_{N,0,3,2} + O(h_n^4)$$

Obsérvese que con el coeficiente

$$\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n},$$

este término, cuando el núcleo es de soporte compacto y, en general no simétrico, es de orden $O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$. Si el núcleo es simétrico, este término es de orden $O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh^2)^2}\right)$. Para el siguiente término

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}E_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,2} - \beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\left(\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2} + \alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2} + O(h_n^2) - \left(\alpha'(x) + O(h_n)\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right) =$$

$$= \alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2} + O(h_n^4)$$

Obsérvese que con el coeficiente

$$\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n},$$

este término es, en general, de orden $O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$. Si el núcleo es simétrico, este término es de orden $O\left(\frac{h_n}{n}\right)$. Para el siguiente término

$$E_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1} - \beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2} =$$

$$= \left(\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} + \alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1} + O(h_n^3) - \left(\alpha'(x) + O(h_n)\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2} =$$

$$= \alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,2} + O(h_n^4)$$

Obsérvese que con el coeficiente

$$\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n},$$

este término es, en general, de orden $O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$. Si el núcleo es simétrico, este término es de orden $O\left(\frac{h_n}{n}\right)$. Para el siguiente término

$$E_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,1,1} - \beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2} =$$

$$= \left(\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} + \alpha'(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1} + O(h_n^3) - \left(\alpha'(x) + O(h_n)\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2} =$$

$$= \alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,2} + O(h_n^4)$$

Obsérvese que con el coeficiente

$$\frac{\alpha_S^{[X-x]}(x)}{D^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n},$$

este término es, en general, de orden $\frac{1}{nh_n}$. Si el núcleo es simétrico, este término es de orden $O\left(\frac{h_n}{n}\right)$.

Por consiguiente, si el núcleo es simétrico y de soporte compacto, los términos que introduce el plan de muestreo a través del sesgo promedio son de orden $O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right)$. Por tanto, de menor orden de magnitud que el término que introducirá el sesgo según el diseño si $nh_n^3 \to \infty$.

Falta tratar la $\xi-$esperanza del resto según el plan que, cuando σ es acotada, es igual a

$$E_\xi\left[O\left(\max|Y_i|\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right)\right] = E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}|\alpha(x_i)|\right]O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) + E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}|\varepsilon_i|\,\sigma(x_i)\right]O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

y así, todos los términos adicionales suponen la siguiente contribución

$$O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right) + C(\alpha)O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) + C(\sigma)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}|\varepsilon_i|\right]O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) =$$

$$= O\left(E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}|\varepsilon_i|\right]\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right)$$

obteniéndose que, por (5.5)

$$E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)\right] = \frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right) + O\left(E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}|\varepsilon_i|\right]\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right) \quad (5.7)$$

En el caso particular de que la perturbación esté acotada

$$E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)\right] = \frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right) + O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}} + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right)$$

y si además $nh_n^5 = O(1)$

$$E_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)\right] = \frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right) + O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

Para finalizar, obsérvese que, sin la hipótesis de simetría del núcleo, podrían aparecer términos de orden $O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$ que resultarían despreciables bajo la hipótesis que se está imponiendo, $nh_n^3 \to \infty$, pero que no lo serían bajo la menos restrictiva de $nh_n \to \infty$.

5.3.3. Momentos de la diferencia dividida máxima

5.3.3.1. $\xi-$Esperanza de la diferencia dividida máxima

Se debe estudiar la existencia de la esperanza del cociente de diferencias

$$E_\xi\left(\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|\right)$$

el máximo se extiende a todos los elementos diferentes incluidos dentro del entorno de x. Se pude acotar del siguiente modo

$$E_\xi\left(\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|\right) = E_\xi\left(\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\alpha(x_i) - \alpha(x_j)}{x_i - x_j} + \frac{\varepsilon_i\sigma(x_i) - \varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i - x_j}\right|\right) \leq$$

$$\leq E_\xi\left(\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\alpha(x_i) - \alpha(x_j)}{x_i - x_j}\right| + \max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\varepsilon_i\sigma(x_i) - \varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i - x_j}\right|\right)$$

pero

$$\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\alpha(x_i) - \alpha(x_j)}{x_i - x_j}\right| = \max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\alpha'(\zeta_{ij})(x_i - x_j)}{x_i - x_j}\right| = \max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\alpha'(\zeta_{ij})\right|$$

y

$$\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\varepsilon_i\sigma(x_i) - \varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i - x_j}\right| = \max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\varepsilon_i\sigma(x_i) - \varepsilon_j\sigma(x_i) + \varepsilon_j\sigma(x_i) - \varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i - x_j}\right| =$$

$$= \max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\sigma(x_i)\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{x_i - x_j} + \varepsilon_j\frac{\sigma(x_i) - \sigma(x_j)}{x_i - x_j}\right| \leqq \max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\sigma(x_i)\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{x_i - x_j}\right| + \max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\varepsilon_j\frac{\sigma(x_i) - \sigma(x_j)}{x_i - x_j}\right|$$

$$\leqq C(\sigma) \max_{i\neq j:V_{xh}} \left|\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{x_i-x_j}\right| + C' \max_{i\neq j:V_{xh}} |\varepsilon_j|$$

con C' la diferencia dividida máxima, $\max_{i\neq j:V_{xh}} \left|\frac{\sigma(x_i)-\sigma(x_j)}{x_i-x_j}\right|$, para una σ suficientemente suave, por ejemplo, lipschitziana $C' \leq \Lambda(\sigma)$. Sea $\delta = \min_{1\leq i<j\leq N} |x_i - x_j|$, entonces

$$\max_{i\neq j:V_{xh}} \left|\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{x_i-x_j}\right| \leqq \frac{1}{\delta} \max_{i\neq j:V_{xh}} |\varepsilon_i-\varepsilon_j| \leqq \frac{1}{\delta} \max_{i\neq j:V_{xh}} (|\varepsilon_i|+|\varepsilon_j|) \leqq \frac{2}{\delta} \max_i |\varepsilon_i|$$

Por otra parte si tomamos esperanzas bajo el diseño fijo

$$E_\xi\left[\max_{i\neq j:V_{xh}} \left|\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{x_i-x_j}\right|\right] \leqq \frac{2}{\delta} E_\xi\left[\max_i |\varepsilon_i|\right] = \frac{2}{\delta}\int |u|\, \mathrm{d}G^N(u) =$$

$$= \frac{2}{\delta} N \int |u|\, G^{N-1} \mathrm{d}G(u) \leqq \frac{2}{\delta} N E_\xi |\varepsilon| < \infty$$

teniendo en cuenta que $E_\xi |\varepsilon| < \infty$ porque $E_\xi |\varepsilon| < E_\xi^{1/2}\left(\varepsilon^2\right) = 1$ por hipótesis sobre el diseño fijo.

5.3.3.2. Momento de orden 2 según el diseño

Como

$$E_\xi\left[\left(\max_{i\neq j:V_{xh}} \left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\right)^2\right] = E_\xi\left[\max_{i\neq j:V_{xh}} \left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|^2\right]$$

habrá que tratar esta $\xi-$esperanza

$$E_\xi\left[\max_{i\neq j:V_{xh}} \left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|^2\right] = E_\xi\left[\max_{i\neq j:V_{xh}} \left|\frac{\alpha(x_i)-\alpha(x_j)}{x_i-x_j} + \frac{\varepsilon_i\sigma(x_i)-\varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i-x_j}\right|^2\right] =$$

$$= E_\xi\left[\max_{i\neq j:V_{xh}} \left(\frac{\alpha(x_i)-\alpha(x_j)}{x_i-x_j} + \frac{\varepsilon_i\sigma(x_i)-\varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i-x_j}\right)^2\right] \leq$$

$$\leq E_\xi\left\{\max_{i\neq j:V_{xh}} \left[2\left(\frac{\alpha(x_i)-\alpha(x_j)}{x_i-x_j}\right)^2 + 2\left(\frac{\varepsilon_i\sigma(x_i)-\varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i-x_j}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= 2E_\xi\left\{\max_{i\neq j:V_{xh}} \left[\left(\frac{\alpha(x_i)-\alpha(x_j)}{x_i-x_j}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_i\sigma(x_i)-\varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i-x_j}\right)^2\right]\right\} \leq$$

$$\leq 2E_\xi\left\{\max_{i\neq j:V_{xh}} \left(\frac{\alpha(x_i)-\alpha(x_j)}{x_i-x_j}\right)^2 + \max_{i\neq j:V_{xh}} \left(\frac{\varepsilon_i\sigma(x_i)-\varepsilon_j\sigma(x_j)}{x_i-x_j}\right)^2\right\}$$

pero

$$\max_{i\neq j:V_{xh}}\left(\frac{\alpha\left(x_i\right)-\alpha\left(x_j\right)}{x_i-x_j}\right)^2\leq\Lambda^2(\alpha)$$

si α es lipschitziana y

$$\max_{i\neq j:V_{xh}}\left(\frac{\varepsilon_i\sigma\left(x_i\right)-\varepsilon_j\sigma\left(x_j\right)}{x_i-x_j}\right)^2=\max_{i\neq j:V_{xh}}\left(\frac{\varepsilon_i\sigma\left(x_i\right)-\varepsilon_j\sigma\left(x_i\right)+\varepsilon_j\sigma\left(x_i\right)-\varepsilon_j\sigma\left(x_j\right)}{x_i-x_j}\right)^2=$$

$$=\max_{i\neq j:V_{xh}}\left(\sigma\left(x_i\right)\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{x_i-x_j}+\varepsilon_j\frac{\sigma\left(x_i\right)-\sigma\left(x_j\right)}{x_i-x_j}\right)^2\leqq 2\max_{i\neq j:V_{xh}}\left(\sigma\left(x_i\right)\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{x_i-x_j}\right)^2+2\max_{i\neq j:V_{xh}}\left(\varepsilon_j\frac{\sigma\left(x_i\right)-\sigma\left(x_j\right)}{x_i-x_j}\right)^2\leq$$

$$\leqq 2\left(C^2(\sigma)\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{x_i-x_j}\right|^2+\Lambda^2(\sigma)\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\varepsilon_j\right|^2\right)$$

con $\Lambda(\alpha)$ y $\Lambda(\sigma)$ las constantes de Lipschitz de las funciones α y σ, respectivamente. Sea $\delta=\min_{1\leq i<j\leq N}\left|x_i-x_j\right|$, entonces

$$\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{x_i-x_j}\right|^2\leqq\frac{1}{\delta^2}\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\varepsilon_i-\varepsilon_j\right|^2\leqq\frac{2}{\delta^2}\max_{i\neq j:V_{xh}}\left(\left|\varepsilon_i\right|^2+\left|\varepsilon_j\right|^2\right)\leqq\frac{4}{\delta^2}\max_i\left|\varepsilon_i\right|^2$$

Por otra parte si tomamos esperanzas según el diseño fijo

$$E_\xi\left[\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{x_i-x_j}\right|^2\right]\leqq\frac{4}{\delta^2}E_\xi\left[\max_i\varepsilon_i^2\right]=\frac{4}{\delta^2}\int u^2\mathrm{d}G^N(u)=$$

$$=\frac{4}{\delta^2}N\int u^2G^{N-1}\mathrm{d}G(u)\leq\frac{4}{\delta^2}NE_\xi\varepsilon^2<\infty$$

teniendo en cuenta que $E_\xi\varepsilon^2<\infty$ porque $E_\xi\left(\varepsilon^2\right)=1$ por hipótesis sobre el diseño fijo.

5.4. Sesgo total

5.4.1. Sesgo del descriptor L

Se puede dar una acotación asintótica del sesgo según el diseño del descriptor suavizador lineal local del siguiente modo:

Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ está acotada, entonces $B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)=O\left(h_n^2\right)$ porque

$$E_\xi\left(\alpha_L(x)\right)=E_\xi\left(\alpha_S^{[Y-\beta(X-x)]}(x)\right)=\frac{\sum_{i=1}^N E_\xi\left[Y_i-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]K_{hi}}{\sum_{i=1}^N K_{hi}}=\frac{\sum_{i=1}^N\alpha\left(x_i\right)K_{hi}}{\sum_{i=1}^N K_{hi}}-E_\xi\left(\beta_L(x)\right)\frac{\sum_{i=1}^N\left(x_i-x\right)K_{hi}}{\sum_{i=1}^N K_{hi}}=$$

$$= \alpha(x) + \alpha'(x)\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}} - (\alpha'(x) + O(h_n))\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}} =$$

$$= \alpha(x) + \frac{1}{2}C(\alpha'')\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}} - O(h_n)\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)K_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}} = \alpha(x) + O(h_n^2)$$

siendo $C(\alpha'') = \text{máx}_N\,|\alpha''(\zeta_i)|$.

También se podría haber demostrado directamente mediante el lema 28. Si se supone más suavidad en la función de regresión, es decir que su segunda derivada sea continua, se puede refinar este resultado imponiendo que el núcleo sea simétrico

Proposición 52 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Si $\alpha''(\cdot)$ es continua y $nh_n^3 \to \infty$, entonces*

$$B_\xi(\alpha_L(x)) = \frac{h_n^2}{2}\alpha''(x)\,\alpha_2(K) + o\left(h_n^2\right)$$

Demostración.-

$$E_\xi(\alpha_L(x)) - \alpha(x) = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2W_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}W_{hi}} = \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha''(x) + \alpha''(\varsigma_i) - \alpha''(x)\right)(x_i-x)^2W_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}W_{hi}} =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2W_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}W_{hi}} + \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha''(\varsigma_i) - \alpha''(x)\right)(x_i-x)^2W_{hi}}{\sum_{i=1}^{N}W_{hi}} = A + B$$

Como

$$W_{hi} = K_{hi}\left[\sum_{j=1}^{N}(x_i-x)^2K_{hj} - (x_i-x)\sum_{j=1}^{N}(x_j-x)K_{hj}\right]$$

se tiene para el primero

$$A = \frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^2W_{hk}}{\sum_{k=1}^{N}W_{hk}} = \frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^2K_{hk}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2K_{hi} - (x_k-x)\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)K_{hi}\right]}{\sum_{k=1}^{N}K_{hk}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2K_{hi} - (x_k-x)\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)K_{hi}\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^2 K_{hk}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2 K_{hi} - \sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^3 K_{hk}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x) K_{hi}}{\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2 K_{hi} - \sum_{k=1}^{N}(x_k-x) K_{hk}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x) K_{hi}} =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^2 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2 K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^3 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x) K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2 K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x) K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x) K_{hi}}$$

cuyo denominador verifica

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_{hi}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2 K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x) K_{hi}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x) K_{hi} =$$

$$= \left[f(x)\alpha_0(K) + O(h_n^2) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]\left[h_n^2 f(x)\alpha_2(K) + O(h_n^3) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right] -$$

$$- \left[h_n^2 f'(x)\alpha_2(K) + O(h_n^4) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]^2 =$$

$$= h_n^2 f^2(x)\alpha_2(K) + O(h_n^3) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right) = h_n^2 f^2(x)\alpha_2(K)\left(1+o(1)\right)$$

Por tanto, se obtiene que

$$A = \frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^2 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2 K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^3 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x) K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2 K_{hi} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x) K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x) K_{hi}} = A_1 - A_2$$

con

$$A_1 = \frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{\left[f(x)h_n^2\alpha_2(K) + O\left(h_n^4\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]^2}{h_n^2 f^2(x)\alpha_2(K)\left(1+o(1)\right)}$$

y

$$A_2 = \frac{1}{2}\alpha''(x)\frac{O\left(h_n^3\right)\left[f'(x)h_n^2\alpha_2(K) + O\left(h_n^4\right) + O\left(\frac{1}{nh_n}\right)\right]}{h_n^2 f^2(x)\alpha_2(K)\left(1+o(1)\right)}$$

debido a la compacidad y la simetría, por consiguiente

$$A = \frac{1}{2}\alpha''(x)\, h_n^2\alpha_2(K)\left(1+o(1)\right)$$

Para el segundo

$$B = \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha''\left(\varsigma_k\right)-\alpha''\left(x\right)\right)\left(x_k-x\right)^2 W_{hk}}{\sum_{k=1}^{N} W_{hk}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha''\left(\varsigma_k\right)-\alpha''\left(x\right)\right)\left(x_k-x\right)^2 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha''\left(\varsigma_k\right)-\alpha''\left(x\right)\right)\left(x_k-x\right)^3 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}} = B_1 - B_2$$

El primero está acotado por

$$|B_1| = \frac{1}{2}\frac{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha''\left(\varsigma_k\right)-\alpha''\left(x\right)\right)\left(x_k-x\right)^2 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}\right|}{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|\alpha''\left(\varsigma_k\right)-\alpha''\left(x\right)\right|\left(x_k-x\right)^2 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\operatorname*{máx}_{V_{xh}}\left(\left|\alpha''\left(\varsigma_k\right)-\alpha''\left(x\right)\right|\right)\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)^2 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}} =$$

$$= o(1)\frac{1}{2}\alpha''\left(x\right)h_n^2\left(1+o(1)\right) = o(h_n^2)$$

por el desarrollo de A_1 y la continuidad de α''. Falta por estudiar B_2

$$B_2 = -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha''\left(\varsigma_k\right)-\alpha''\left(x\right)\right)\left(x_k-x\right)^3 K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}}{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 K_{hi}-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)K_{hk}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)K_{hi}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\underset{V_{xh}}{\max}\left(\left|\alpha''\left(\varsigma_k\right)-\alpha''\left(x\right)\right|\right)O\left(h_n^3\right)O\left(h_n^2\right)}{f^2(x)h_n^2\alpha_2\left(K\right)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)} = o\left(h_n^3\right)$$

bajo la misma hipótesis de continuidad de la segunda derivada. Resumiendo

$$E_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\alpha(x) = \frac{h_n^2}{2}\alpha''\left(x\right)\alpha_2\left(K\right)+o\left(h_n^2\right)$$

Q.E.D.

5.4.2. Conclusión: sesgo total

5.4.2.1. Estimador I

Si se supone que $K(\cdot)$ es simétrico y de soporte compacto, que α'' está acotada, $E_\xi\varepsilon_i^4<\infty$ y $nh_n^3\to\infty$ por (5.6)

$$B\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) = E_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_I(x)-\alpha_L(x)\right)+E_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-\alpha(x) = B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)+\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)-$$

$$-\frac{1}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha''(\zeta_i)(x_i-x)^2K_{hi}^2+O\left(E_\xi\left[\underset{V_{x,h}}{\max}\left|\varepsilon_i\right|\right]\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) =$$

$$= B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)\left[1+\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right]+O\left(\frac{h_n}{n}\right)+O\left(E_\xi\left[\underset{V_{x,h}}{\max}\left|\varepsilon_i\right|\right]\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right)$$

y se verifica que

$$B\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) = B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)\left[1+\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right]+o\left(h_n^2\right)$$

porque

$$E_\xi\left[\max\left|Y_i\right|\right]O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) = o(n^{1/4})O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{5/4}h_n^{6/4}}\right) = o\left(\frac{h_n^2}{n^{5/4}h_n^{14/4}}\right) = o\left(\frac{h_n^2}{nh_n^3n^{1/4}h_n^{2/4}}\right)$$

y se supone que $nh_n^3\to\infty$.

5.4.2.2. Estimador L

Si se impone que α'' sea continua, además de que σ sea lipschitziana se obtiene el siguiente desarrollo para el sesgo total del estimador L

Corolario 90 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Sea ε_i tal que $E_\xi \varepsilon_i^4 < \infty$. Sean $\alpha''(\cdot)$ continua y $\sigma(\cdot)$ lipschitziana. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3 \to \infty$*

$$B\left(\hat{\alpha}_L(x)\right) = \frac{h_n^2}{2}\alpha''\left(x\right)\alpha_2\left(K\right)\left[1 + \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{nh_n}\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)}\right] + o\left(h_n^2\right)$$

Demostración.- Por (5.7)

$$B\left(\hat{\alpha}_L(x) - \alpha(x)\right) = E_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_L(x) - \alpha_L(x)\right) + E_\xi\left(\alpha_L(x)\right) - \alpha(x) =$$

$$= B_\xi\left(\alpha_L(x)\right)\left[1 + \frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right] + O\left(E_\xi\left[\underset{V_{x,h}}{\text{máx}}\left|\varepsilon_i\right|\right]\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right)$$

El cociente del multiplicador admite la siguiente expresión

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\frac{1}{N^2}S_{N,0,0,1}^2} = \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\left(1 + O(h_n)\right) \tag{5.8}$$

porque

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\frac{1}{N^2}S_{N,0,0,1}^2} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_{hi}^2}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_{hi}\right)^2} = \frac{f(x)\frac{1}{h_n}\alpha_0(K^2)\left[1 + O(h_n)\right]}{\left(f(x)\alpha_0(K)\left[1 + O(h_n^2)\right]\right)^2} =$$

$$= \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\left(1 + O(h_n)\right)\left(1 + O(h_n^2)\right) = \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\left(1 + O(h_n)\right)$$

Falta por tratar, en el resto de (5.7),

$$E_\xi\left[\underset{V_{x,h}}{\text{máx}}\left|\varepsilon_i\right|\right]O\left(\frac{h_n}{n}\right) = O\left(\frac{h_n}{n}\right)o\left(n^{1/4}\right) = o\left(\frac{h_n}{n^{3/4}}\right) = o\left(\frac{h_n^2}{n^{3/4}h_n}\right) = o\left(\frac{h_n^2}{n^{1/4}(nh_n^2)^{1/2}}\right)$$

porque también $nh_n^2 \to \infty$ y

$$\frac{1}{(nh_n^2)^2} = \frac{h_n^2}{n^2h_n^6} = \frac{h_n^2}{(nh_n^3)^2}$$

La otra forma del resto ya ha sido tratada en el epígrafe anterior, del sesgo promedio del estimador I. Con lo cual

$$O\left(E_\xi\left[\underset{V_{x,h}}{\text{máx}}\left|\varepsilon_i\right|\right]\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) + \frac{1}{(nh_n^2)^2}\right) = o\left(h_n^2\right)$$

Q.E.D.

Si se relaja la hipótesis sobre el orden de los momentos de la perturbación dejándola en 2, entonces

$$E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}|\varepsilon_i|\right]O\left(\frac{h_n}{n}\right)=O\left(\frac{h_n}{n}\right)o\left(n^{1/2}\right)=o\left(\frac{h_n}{n^{1/2}}\right)$$

y

$$E_\xi\left[\max|Y_i|\right]O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)=o\left(\frac{1}{nh_n^{3/2}}\right),$$

se puede tratar si se impone que $nh_n^5=O(1)$ porque

$$o\left(\frac{1}{nh_n^{3/2}}\right)=o\left(\frac{h_n}{nh_n^{5/2}}\right)=o\left(\frac{h_n}{n^{1/2}n^{1/2}h_n^{5/2}}\right)$$

y, en ambos casos, debido a que

$$o\left(\frac{h_n}{n^{1/2}}\right)=o\left(\frac{h_n^2}{(nh_n^2)^{1/2}}\right).$$

Surge cierta incompatibilidad entre imponer velocidad $nh_n\to\infty$ y la mera existencia de momento de orden 2. O se impone una velocidad más lenta o se incrementa el orden de los momentos.

La velocidad de convergencia de la ventana debe ser lenta, en general más lenta que la que imponen explícitamente alguno de los artículos tratados, Harms&Duchesne(2010). Si sólo se impone la condición $nh_n\to\infty$, aun en el caso de que $\mathcal{Y}$ esté acotada, aparecerían términos debidos al plan de muestreo del tipo $O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$.

En cualquier caso, mediante el método que se ha seguido se ha detectado el término

$$\frac{-1}{D(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)$$

aunque en promedio resulta despreciable.

5.5. Estudio de la $p-$varianza

5.5.1. Desarrollo para su aproximación

Como

$$\hat\alpha_L(x)=\hat\alpha_S(x)-\hat\beta_L(x)\hat\alpha_S^{[X-x]}(x)=\hat\alpha_S(x)-\beta_L(x)\hat\alpha_S^{[X-x]}(x)+\beta_L(x)\hat\alpha_S^{[X-x]}(x)-\hat\beta_L(x)\hat\alpha_S^{[X-x]}(x)=$$

$$=\hat\alpha_I(x)+\left(\beta_L(x)-\hat\beta_L(x)\right)\hat\alpha_S^{[X-x]}(x)$$

se verifica que

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right) = VAR_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) + VAR_p\left[\left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] +$$

$$+2COV_p\left[\hat{\alpha}_I(x); \left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] = D_I + D_{II} + 2D_{III}$$

5.5.2. $p-$Varianza del estimador I

El sumando D_I es la varianza del estimador I, $\hat{\alpha}_I$, según el plan de muestreo

Teorema 12 *En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^2 \to \infty$*

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right]^2 K_{hi}^2 + \max_{V_{xh}}|Y_i|^2\, O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

Demostración.- Como $VAR_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) = VAR_p\left(\hat{\alpha}_S^{[Y-\beta_L(X-x)]}(x)\right)$ se verifica que

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(Y_iK_{hi} - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)K_{hi}\right) - \frac{r_S(x) - \beta_L(x)r_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}K_{hi}\right]^2 +$$

$$+\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\, O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(Y_iK_{hi} - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)K_{hi}\right) - \alpha_L(x)K_{hi}\right]^2 + \max_{V_{xh}}|Y_i|^2\, O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right]^2 K_{hi}^2 + \max_{V_{xh}}|Y_i|^2\, O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

porque

$$Y_i - \beta_L(x)\left(x_i - x\right) = Y_i - O\left(\frac{\max_{V_{xh}}|Y_i|}{h_n}\right)O\left(h_n\right) = Y_i - O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|\right) = O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|\right)$$

y

$$\frac{r_S(x) - \beta_L(x)r_S^{[X-x]}(x) - \alpha_L(x)f_S(x) + \alpha_L(x)f_S(x)}{f_S(x)} = 0 + \frac{\alpha_L(x)f_S(x)}{f_S(x)} = \alpha_L(x)$$

por (5.2) Q.E.D.

Corolario 91 *En MASS/R, bajo la condición HHM, si* $nh_n^2 \to \infty$

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right]^2 K_{hi}^2 + O\left(\frac{\text{máx}_N\left|Y_i\right|^2}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)$$

Observación.- Cabe esperar que, si α es diferenciable en x, $Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)$ tendrá una variación menor que $Y_i - \alpha_S(x)$ porque en aquel se está aproximando localmente mediante una recta y en este, por una constante. Además, como en el caso del sesgo, el término dominante de la $p-$varianza también se puede ver como

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(Y_i - \beta_L(x)(x_i - x)\right) - \alpha_L(x)\right]^2 K_h^2(x_i - x)$$

5.5.3. Segundo término de la $p-$varianza

$$D_{II} = VAR_p\left[\left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] \leq E_p\left\{\left[\left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right]^2\right\}$$

Como, por el ejemplo 48, se verifica

$$\left(\hat{\beta}_L(x) - \beta_L(x)\right)^2 = \left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)} - \beta_L(x) - \left[\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]\right)^2 \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)} - \beta_L(x)\right)^2 + 2\left[\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]^2$$

entonces, por el ejemplo 49, se obtiene

$$\left(\left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right)^2 = \left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)^2\left(\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)} - \hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{\hat{f}_S(x) - f_S(x)}{f_S(x)}\right)\right)^2 \leq$$

$$\leq \left\{2\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)} - \beta_L(x)\right)^2 + 2\left[\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]^2\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{2\left[\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\right]^2 + 2\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{\hat{f}_S(x) - f_S(x)}{f_S(x)}\right)\right]^2\right\} =$$

$$= 2\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)} - \beta_L(x)\right)^2 2\left[\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]^2 2\left[\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\right]^2 +$$

$$+2\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)}-\beta_L(x)\right)^2 2\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{\hat{f}_S(x)-f_S(x)}{f_S(x)}\right)\right]^2+$$

$$+2\left[\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)\right]^2 2\left[\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\left(\frac{\hat{f}_S(x)-f_S(x)}{f_S(x)}\right)\right]^2$$

Por consiguiente, su $p-$esperanza va a ser menor o igual que

$$D_{II,1}+D_{II,2}+D_{II,3}+D_{II,4}$$

DII,1

$$D_{II,1}=4E_p\left[\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)}-\beta_L(x)\right)^2\left(\frac{r_S^{[X-x]}(x)+\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\right)^2\right]=$$

$$=4E_p\left[\frac{1}{D^2(x)}\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^2\left(\frac{r_S^{[X-x]}(x)+\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\right)^2\right]=$$

$$=4\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^2\left(r_S^{[X-x]}(x)+\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right]\leq$$

$$\leq 8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^2\left(r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right]+$$

$$+8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^2\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right]=$$

$$=8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2\left(r_S^{[X-x]}(x)\right)^2 E_p\left[\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^2\right]+$$

$$+8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p^{1/2}\left[\left(\hat{N}(x)-N(x)\right)^4\right]E_p^{1/2}\left[\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x)-r_S^{[X-x]}(x)\right)^4\right]=$$

$$=O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O(1)O\left(h_n^4\right)O\left(\frac{\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|^2 h_n}{n}\right)+O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O(1)O\left(\left(\frac{\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|^4 h_n^2}{n^2}\right)^{1/2}\right)O\left(\left(\frac{h_n^2}{n^2}\right)^{1/2}\right)=$$

$$=O\left(\frac{\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|^2 h_n}{n}\right)+O\left(\frac{\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|^2}{(nh_n)^2}\right)=O\left(\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|^2\frac{h_n}{n}\right)$$

si $nh_n^3\to\infty$.

DII,2

$$D_{II,2} = 4\left[\frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right]^2\left[\frac{\hat{r}_S^{[X-x]}(x)}{f_S(x)}\right]^2 \leq$$

$$\leq 8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right)^2\left(r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right] +$$

$$+8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right)^2\left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right] = D_{II,21} + D_{II,22}$$

$$D_{II,21} = 8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2\left(r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)} - \frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2$$

por el ejemplo 48, entones

$$E_p\left[\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)} - \frac{1}{D(x)}\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] \leq$$

$$\leq 2E_p\left[\left(\frac{\hat{N}(x)}{D(x)}\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] + 2\frac{1}{D^2(x)}E_p\left[\left(\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right]$$

$$\leq 4E_p\left[\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] + 4\frac{1}{D^2(x)}E_p\left[\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] + 2\frac{1}{D^2(x)}E_p\left[\hat{\beta}_L^2(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^4\right] \leq$$

$$\leq 4\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] + 4\frac{1}{D^2(x)}E_p\left[\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^2\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] + 2\frac{1}{D^2(x)}E_p\left[\hat{\beta}_L^2(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^4\right] \leq$$

$$= O\left(\frac{\max\limits_{V_{xh}}|Y_i|^2}{h_n^2}\right)O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) + O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\frac{\max\limits_{V_{xh}}|Y_i|^2 h_n}{n}\right)O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) + O\left(\frac{1}{h_n^4}\right)O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2\right)O\left(\frac{h_n^6}{n^2}\right) =$$

$$= O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\frac{h_n}{n}\right) + O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2\frac{h_n^2}{n^2}\right) =$$

$$= O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\frac{h_n}{n}\right) + O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2\frac{h_n^2}{n^2}\right)$$

Por otra parte

$$4\left(\frac{N(x)}{D(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] \leq \max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2 E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2\right] =$$

$$= O\left(\max_{i\neq j, V_{x,h}} \left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2 \frac{h_n^3}{n}\right) = O\left(\max_{i\neq j, V_{x,h}} \left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2 \frac{h_n^2 n h_n}{n^2}\right)$$

por tanto, el primer sumando predomina sobre el tercero.

Con respecto al segundo término

$$D_{II,22} = 8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{\beta}_L(x)\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)\right)^2 \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right]$$

$$|D_{II,22}| = 8\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 \max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2 E_p\left[\left(\hat{D}(x) - D(x)\right)^2 \left(\hat{r}_S^{[X-x]}(x) - r_S^{[X-x]}(x)\right)^2\right] =$$

$$= O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2\right) O\left(\left(\frac{h_n^6}{n^2}\right)^{1/2}\right) O\left(\left(\frac{h_n^2}{n^2}\right)^{1/2}\right) =$$

$$= O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2 \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i - Y_j}{x_i - x_j}\right|^2 \frac{h_n^3}{n n h_n^3}\right)$$

que también está dominado por el primer sumando de $D_{II,21}$ bajo la hipótesis de que $nh_n^3 \to \infty$.

DII,3

$$D_{II,3} = E_p\left[\frac{1}{D^2(x)}\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^2 \left(\hat{\alpha}_S^{(X-x}(x)\right)^2 \left(\frac{\hat{f}_S(x) - f_S(x)}{f_S(x)}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{D^2(x)} E_p\left[\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^2 \left(\hat{\alpha}_S^{(X-x}(x)\right)^2 \left(\frac{\hat{f}_S(x) - f_S(x)}{f_S(x)}\right)^2\right] \leq$$

$$\leq \frac{h_n^2}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p\left[\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^2 \left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^2\right] \leq$$

$$\leq \frac{h_n^2}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p^{1/2}\left[\left(\hat{N}(x) - N(x)\right)^4\right] E_p^{1/2}\left[\left(\hat{f}_S(x) - f_S(x)\right)^4\right] \leq$$

$$= O\left(\frac{1}{h_n^2}\right) O(1) O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2 h_n}{n}\right) O\left(\frac{1}{n h_n}\right) = O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{n^2 h_n^2}\right) = O\left(\frac{\max_N |Y_i|^2}{(n h_n)^2}\right)$$

DII,4

$$D_{II,4} = 4\frac{1}{D^2(x)}\left(\frac{1}{f_S(x)}\right)^2 E_p\left[\hat{\beta}_L^2(x)\left(\hat{D}(x)-D(x)\right)^2\left(\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right)^2\left(\hat{f}_S(x)-f_S(x)\right)^2\right] \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|^2\right) O\left(h_n^2\right) O\left(\frac{h_n^3}{n}\right) O\left(\frac{1}{nh_n}\right) =$$

$$= O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|^2 \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\max_{i,j}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|^2 \frac{h_n^3}{nnh_n^3}\right)$$

Como resumen $D_{II} = O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2 \frac{h_n}{n}\right)$. Si se impone la condición $nh_n^5 = O(1)$, resulta del mismo orden que el resto de D_I ya que $O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2 \frac{h_n}{n}\right)$ y $O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2 \frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$ son infinitésimos comparables.

5.5.4. Tercer término y conclusión de la $p-$varianza

$$|D_{III}| = 2\left|COV_p\left[\hat{\alpha}_S(x)-\beta_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x); \left(\beta_L(x)-\hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right]\right| \leq$$

$$\leq VAR_p^{1/2}\left[\hat{\alpha}_S(x)-\beta_L(x)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] VAR_p^{1/2}\left[\left(\beta_L(x)-\hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] =$$

$$= O\left(\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2 \frac{1}{nh_n}\right)^{1/2}\right) O\left(\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2 \frac{h_n}{n}\right)^{1/2}\right) = O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Por consiguiente, se ha demostrado la siguiente afirmación

Proposición 53 *En MASS/R, bajo la condición HHM, si* $nh_n^3 \to \infty$

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]^2 K_{hi}^2 + O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\frac{1}{n}\right)$$

Demostración.-

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right) = D_I + D_{II} + D_{III} = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]^2 K_{hi}^2 +$$

$$+O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right) + O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\frac{h_n}{n}\right) + O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]^2 K_{hi}^2 + O\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\frac{1}{n}\right)$$

Q.E.D.

Observación.- En las mismas circunstancias, también se puede escribir

$$VAR_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right]^2 K_{hi}^2 + O\left(\frac{\max\limits_{N}|Y_i|^2}{n}\right)$$

5.6. Estudio de la varianza promedio

5.6.1. Resultados auxiliares

Como

$$\alpha_L(x) = \hat{\beta}_0(x) = B_0(x) = \left(\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}} - \frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)\left(1 + O\left(h_n^2\right)\right)$$

si el núcleo es simétrico y de soporte compacto, y $nh_n^3 \to \infty$, conviene estudiar las siguientes expresiones, casos particulares de un resultado del capítulo anterior que se presentan como ejemplos

Ejemplo 52 *Siempre que $f'(x) \neq 0$, ya que se están tratando puntos con $f(x) > 0$*

$$\frac{1}{N}S_{N,0,1,1} = f'(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1 + O(h_n^2) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]$$

$$\frac{1}{N}S_{N,0,2,1} = f(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1 + O(h_n) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]$$

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} = f(x)\alpha_0(K)\left[1 + O(h_n^2)\right] = f(x)\left[1 + O(h_n^2)\right]$$

Ejemplo 53 *Si $f'(x) \neq 0$, entonces*

$$\left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}\right)^2 = f'^2(x)h_n^4\alpha_2^2(K)\left[1 + O(h_n^2) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]$$

Por otra parte, también se verifica que

Ejemplo 54

$$\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} = f^2(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1 + O(h_n) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]$$

porque

$$\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1} = f(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]f(x)\left[1+O(h_n^2)\right] =$$

$$= f^2(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]$$

□

Ejemplo 55

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}} = O(1)$$

porque si $f'(x) \neq 0$

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}} = \frac{f'(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1+O(h_n^2)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]}{f(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]} =$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)}\left[1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right] = O(1)$$

y si $f'(x) = 0$, entonces

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}} = \frac{O(h_n^4)+O\left(\frac{1}{nh_n}\right)}{f(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]} = \frac{O(h_n^2)\left[O(h_n^2)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]}{f(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]} = O(1)$$

□

Ejemplo 56

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\frac{1}{N^2}S_{N,0,2,1}^2} = \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n^5\alpha_2^2(K)}\left(1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right)$$

porque

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\frac{1}{N^2}S_{N,0,2,1}^2} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_{hi}^2}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (x_i-x)^2 K_{hi}\right)^2} = \frac{f(x)\frac{1}{h_n}\alpha_0(K^2)\left[1+O(h_n)\right]}{\left(f(x)h_n^2\alpha_2(K)\left[1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]\right)^2} =$$

$$= \frac{\alpha_0(K^2)\left[1+O(h_n)\right]}{f(x)h_n^5\alpha_2^2(K)\left[1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right]} = \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n^5\alpha_2^2(K)}\left(1+O(h_n)+O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right)$$

□

Ejemplo 57

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,3}}{\frac{1}{N^3}S^3_{N,0,0,1}} = \frac{\alpha_0(K^3)}{f^2(x)h_n^2}\left(1+O(h_n)\right)$$

porque

$$\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,3}}{\frac{1}{N^3}S^3_{N,0,0,1}} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_{hi}^3}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K_{hi}\right)^3} = \frac{f(x)\frac{1}{h_n^2}\alpha_0(K^3)\left[1+O(h_n)\right]}{\left(f(x)\alpha_0(K)\left[1+O(h_n^2)\right]\right)^3} =$$

$$= \frac{\alpha_0(K^3)}{f^2(x)h_n^2}\left(1+O(h_n)\right)\left(1+O(h_n^2)\right) = \frac{\alpha_0(K^3)}{f^2(x)h_n^2}\left(1+O(h_n)\right)$$

□

Para desarrollos posteriores, conviene disponer también de los siguientes útiles

Lema 29 *Se verifica que*

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right] = \frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \alpha(x_k)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \alpha(x_i)(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)$$

Demostración.-

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right] = E_\xi\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N Y_k(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{N}E_\xi\left[\sum_{k=1}^N\sum_{i=1}^N Y_iY_k(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{N}E_\xi\left[\sum_{i=1}^N Y_i^2(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x) + \sum_{i\neq k}^{(N^{(2)})} Y_i(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)Y_k(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(\alpha^2(x_i)+\sigma^2(x_i)\right)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)+$$

$$+\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i\neq k}^{(N^{(2)})}\alpha(x_i)(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)\alpha(x_k)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)=$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha^2(x_i)+\sigma^2(x_i)\right)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_k)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)-$$

$$-\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)=$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_k)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)$$

Q.E.D.

Proposición 54 *Sea $K(\cdot)$ de soporte compacto. Bajo la condición HHM, si $\alpha(\cdot)$ es continua, $\sigma(\cdot)$, acotada y $nh_n^2\to\infty$*

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right]=\left(\alpha^2(x)+o(1)\right)O(h_n^{s+s'-(t+t')+2})$$

Demostración.- Por el lema

$$E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right]=\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_k)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)(x_i-x)^s K_h^t(x_i-x)=$$

$$=\frac{1}{N}S_{N,0,0,t+t'}\frac{1}{N}\frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)}{\sum_{i=1}^{N}K_h^{t+t'}(x_i-x)}+$$

$$+\frac{1}{N}S_{N,0,0,t'}\frac{\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_k)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)}{\sum_{k=1}^{N}K_h^{t'}(x_k-x)}\frac{1}{N}S_{N,0,0,t}\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)(x_i-x)^{s}K_h^{t}(x_i-x)}{\sum_{i=1}^{N}K_h^{t}(x_i-x)}=$$

$$=O\left(\frac{1}{nh_n^{t+t'-1}}\right)O(h_n^{s+s'})+O\left(\frac{1}{h_n^{t'-1}}\right)(\alpha(x)+o(1))\,O(h_n^{s'})O\left(\frac{1}{h_n^{t-1}}\right)(\alpha(x)+o(1))\,O(h_n^{s})$$

porque

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)}{\sum_{i=1}^{N}K_h^{t+t'}(x_i-x)}\right|\leq C(\sigma^2)\frac{\sum_{i=1}^{N}|x_i-x|^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)}{\sum_{i=1}^{N}K_h^{t+t'}(x_i-x)}=$$

$$=C(\sigma^2)\,|\zeta-x|^{s+s'}=O(h_n^{s+s'})$$

siendo $C(\sigma^2)=\text{máx}_N\,\sigma^2\,(x_i)$ Q.E.D.

Corolario 92 *Se verifica que*

$$COV_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right]=\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)$$

Demostración.-

$$COV_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right]=E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right]-E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\right]E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_k)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)(x_i-x)^{s}K_h^{t}(x_i-x)-$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_k)(x_k-x)^{s'}K_h^{t'}(x_k-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)(x_i-x)^{s}K_h^{t}(x_i-x)=$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)$$

por el lema anterior Q.E.D.

Observación.- En las hipótesis de la proposición, se verifica

$$COV_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right]=O\left(\frac{h_n^{s+s'-(t+t')+1}}{n}\right)$$

porque

$$\left|\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)\right|\leq C(\sigma^2)O\left(\frac{1}{nh_n^{t+t'-1}}\right)O(h_n^{s+s'})=O\left(\frac{h_n^{s+s'-t-t'+1}}{n}\right)$$

Si se impone además que $\sigma(\cdot)$ sea continua,

$$COV_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,s,t}\frac{1}{N}S_{N,1,s',t'}\right]=\left(\sigma^2(x)+o(1)\right)O\left(\frac{h_n^{s+s'-(t+t')+1}}{n}\right)$$

porque

$$\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)(x_i-x)^{s+s'}K_h^{t+t'}(x_i-x)=O\left(\frac{1}{nh_n^{t+t'-1}}\right)\left(\sigma^2(x)+o(1)\right)O(h_n^{s+s'})=$$

$$=\left(\sigma^2(x)+o(1)\right)O\left(\frac{h_n^{s+s'-t-t'+1}}{n}\right)$$

5.6.2. $\xi-$Varianzas de α_L y de β_L

Llegado a este punto, se considerará en lo sucesivo que el núcleo, además de ser de soporte compacto, es simétrico.

5.6.2.1. $\xi-$Esperanza de α_L

Aunque resulte redundante, se estudiará la esperanza de α_L según el diseño cuando solo se supone que la función de regresión sea lipschitziana

$$E_\xi\left(\alpha_L(x)\right)=E_\xi\left[\left(\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}-\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=$$

$$=E_\xi\left[\left(\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}-\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=$$

$$=E_\xi\left[\left(\alpha_S(x)-\alpha_S^{[Y(X-x)]}(x)\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)$$

si $nh_n^3\to\infty$. Por otra parte

$$E_\xi\left(\alpha_S^{[Y(X-x)]}(x)\right)=\frac{\sum_{i=1}^N\alpha\left(x_i\right)\left(x_i-x\right)K_{hi}}{\sum_{i=1}^N K_{hi}}=\alpha\left(\zeta\right)\left(\zeta-x\right)=\left(\alpha\left(x\right)+O(h_n)\right)O(h_n)=O(h_n)$$

donde $\zeta\in V_{x,h_n}$, y por el ejemplo 55 se llega a que

$$E_\xi\left(\alpha_L(x)\right)=\left[\alpha\left(x\right)+O(h_n)\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=\alpha\left(x\right)+O(h_n)$$

5.6.2.2. $\xi-$Varianza de α_L

Con esta técnica también se puede aproximar la varianza del descriptor L según el diseño

Proposición 55 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Bajo la condición HHM, si $\alpha(\cdot)$ es continua, $\sigma(\cdot)$, acotada y $nh_n^3\to\infty$*

$$VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)=VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Demostración.-

$$VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)=\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left[VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)+\left(\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)^2VAR_\xi\left(\alpha_S^{[Y(X-x)]}(x)\right)-2\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}COV_\xi\left(\alpha_S(x),\alpha_S^{[Y(X-x)]}(x)\right)\right]$$

Se verá que $VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)$ es el término dominante, para ello considérese primero

$$VAR_\xi\left(\alpha_S^{[Y(X-x)]}\right)=\frac{\sum_{i=1}^N\sigma^2\left(x_i\right)\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2}{\left(\sum_{i=1}^N K_{hi}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^N K_{hi}^2\sum_{i=1}^N\sigma^2\left(x_i\right)\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2}{\sum_{i=1}^N K_{hi}^2\left(\sum_{i=1}^N K_{hi}\right)^2}\leq$$

$$\leq\frac{\sum_{i=1}^N K_{hi}^2}{\left(\sum_{i=1}^N K_{hi}\right)^2}\frac{C(\sigma^2)\sum_{i=1}^N\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2}{\sum_{i=1}^N K_{hi}^2}=\frac{C(\sigma^2)}{N}\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}\frac{S_{N,0,2,2}}{S_{N,0,0,2}}$$

siendo $C(\sigma^2)=\text{máx}_N\ \sigma^2\left(x_i\right)$, por (5.8)

$$\frac{C(\sigma^2)}{N}\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}\right)^2}=\frac{C(\sigma^2)\alpha_0(K^2)}{f(x)Nh_n}\left(1+O(h_n)\right)$$

y

$$\left|\frac{S_{N,0,2,2}}{S_{N,0,0,2}}\right| \leq h_n^2$$

por tanto

$$VAR_\xi\left(\alpha_S^{[Y(X-x)]}\right) = O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

bajo la condición HHM, entonces

$$\left(\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)^2 VAR_\xi\left(\alpha_S^{[Y(X-x)]}(x)\right) = O(1)O\left(\frac{h_n}{n}\right) = O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

El término del doble de la covarianza se puede acotar mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$2COV_\xi\left(\alpha_S(x), \alpha_S^{[Y(X-x)]}(x)\right) \leq 2VAR_\xi^{1/2}\left(\alpha_S(x)\right) VAR_\xi^{1/2}\left(\alpha_S^{[Y(X-x)]}(x)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

por tanto

$$2\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}} COV_\xi\left(\alpha_S(x), \alpha_S^{[Y(X-x)]}(x)\right) = O(1)O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

y, en definitiva,

$$VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right) = \left[VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left(1 + O\left(h_n^2\right)\right) = VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Q.E.D.

La varianza del descriptor suavizador lineal local es igual a la del descriptor NW excepto en un término a lo sumo de orden n^{-1}.

5.6.2.3. $\xi-$Varianza de β_L

Por otra parte, también se puede acotar asintóticamente la varianza de β_L según el diseño

Proposición 56 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Bajo la condición HHM, si $\alpha(\cdot)$ es continua, $\sigma(\cdot)$, acotada y $nh_n^3 \to \infty$*

$$VAR_\xi\left(\beta_L(x)\right) = O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)$$

Demostración.- Como

$$\alpha_L(x) = \frac{S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1} - S_{N,1,1,1}S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} - S_{N,0,1,1}^2}$$

y

$$\beta_L(x) = \frac{S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1} - S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} - S^2_{N,0,1,1}}$$

se verifica que $\alpha_L(x)S_{N,0,1,1} + \beta_L(x)S_{N,0,2,1}$ es igual a

$$\frac{S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1}S_{N,0,1,1} - S_{N,1,1,1}S^2_{N,0,1,1} + S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} - S_{N,0,1,1}S_{N,1,0,1}S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} - S^2_{N,0,1,1}} =$$

$$= \frac{-S_{N,1,1,1}S^2_{N,0,1,1} + S_{N,1,1,1}S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1}}{S_{N,0,0,1}S_{N,0,2,1} - S^2_{N,0,1,1}} = S_{N,1,1,1}$$

por tanto

$$S_{N,1,1,1} = \alpha_L(x)S_{N,0,1,1} + \beta_L(x)S_{N,0,2,1} \Rightarrow \beta_L(x) = \frac{S_{N,1,1,1} - \alpha_L(x)S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}} \tag{5.9}$$

entonces

$$VAR_\xi\left(\beta_L(x)\right) = VAR_\xi\left[\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right] + VAR_\xi\left[\frac{\alpha_L(x)S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right] - 2COV_\xi\left[\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,2,1}}, \frac{\alpha_L(x)S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{S^2_{N,0,2,1}}VAR_\xi\left(S_{N,1,1,1}\right) + \left(\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)^2 VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right) - 2\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}COV_\xi\left[\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,2,1}}, \alpha_L(x)\right]$$

Si se considera el primer sumando

$$\frac{VAR_\xi\left(S_{N,1,1,1}\right)}{S^2_{N,0,2,1}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma^2\left(x_i\right)\left(x_i - x\right)^2 K^2_{hi}}{\left(\sum_{i=1}^N \left(x_i - x\right)^2 K_{hi}\right)^2} = \frac{1}{N}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N K^2_{hi}}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(x_i - x\right)^2 K_{hi}\right)^2}\frac{\sum_{i=1}^N \sigma^2\left(x_i\right)\left(x_i - x\right)^2 K^2_{hi}}{\sum_{i=1}^N K^2_{hi}} =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}}{\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\right)^2}\frac{\sum_{i=1}^N \sigma^2\left(x_i\right)\left(x_i - x\right)^2 K^2_{hi}}{\sum_{i=1}^N K^2_{hi}}$$

que por un ejemplo anterior, el 56, resulta

$$\frac{VAR_\xi\left(S_{N,1,1,1}\right)}{S^2_{N,0,2,1}} = \frac{1}{N}\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n^5\alpha_2^2(K)}\left(1 + O(h_n) + O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)\right)\frac{\sum_{i=1}^N \sigma^2\left(x_i\right)\left(x_i - x\right)^2 K^2_{hi}}{\sum_{i=1}^N K^2_{hi}} = O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)$$

Por la proposición anterior y otro de los ejemplos, el 55, el segundo sumando admite la acotación asintótica

$$\left(\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)^2 VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right) = O(1)O\left(\frac{1}{nh_n}\right) = O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

y, por último,

$$2COV_\xi\left[\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,2,1}},\frac{\alpha_L(x)S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right]\leq VAR_\xi^{1/2}\left[\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right]VAR_\xi^{1/2}\left[\frac{\alpha_L(x)S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right]=O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right)$$

con lo que

$$-2\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}COV_\xi\left[\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,2,1}},\alpha_L(x)\right]=O(1)O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right)$$

y el primer sumando resulta dominante Q.E.D..

5.6.3. Varianza promedio del estimador I

La $\xi-$esperanza de la $p-$varianza del estimador $\hat{\alpha}_I$ admite el siguiente desarrollo

Proposición 57 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Sean $\alpha(\cdot)$ lipschitziana y $\sigma(\cdot)$ acotada. Sea ε_i tal que $E_\xi\varepsilon_i^6<\infty$. En MASS/R$(N,n)$, bajo la condición HHM, si $nh_n^3\to\infty$*

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)\right]=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.- Para estudiar la $\xi-$esperanza de

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]^2K_{hi}^2+\max_{V_{xh}}\left|Y_i\right|^2O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right),$$

como

$$\left[Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]^2=$$

$$=Y_i^2+\alpha_L^2(x)+\beta_L^2(x)\left(x_i-x\right)^2-2Y_i\alpha_L(x)-2Y_i\beta_L(x)\left(x_i-x\right)+2\alpha_L(x)\beta_L(x)\left(x_i-x\right)$$

entonces

$$E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]^2K_{hi}^2+\max_{V_{xh}}\left|Y_i\right|^2O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)\right\}=$$

$$=V_1+V_2+V_3-V_4-V_5+V_6+R$$

se verá a continuación que V_1, V_2 y V_4 resultarán dominantes.

V1 Ya está estudiado en el capítulo anterior

$$V_1 = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_\xi\left[Y_i^2\right]K_h^2(x_i-x) = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma^2(x_i)+\alpha^2(x_i)\right)K_h^2(x_i-x) =$$

$$= \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x) + \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha^2(x_i)K_h^2(x_i-x)$$

Para estudiar el segundo sumando y términos posteriores obsérvese que

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{\left(f(x)\alpha_0(K)+O(h_n)\right)^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{f^2(x)\left(1+O(h_n)\right)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{f^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(1+O(h_n)\right).$$

Como el núcleo es de soporte compacto

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha^2(x_i)K_h^2(x_i-x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha^2(x_i)K_h^2(x_i-x)}{\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)} =$$

$$= \alpha^2(\zeta)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x) = \frac{f(x)\alpha_0(K^2)}{h_n}\left(1+O(h_n)\right)\left(\alpha^2(x)+o(1)\right)$$

que dará lugar a

$$\alpha^2(x)f(x)\frac{\alpha_0(K^2)}{h_n} + o\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

por tanto, resumiendo

$$V_1 = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x) + \frac{\alpha^2(x)}{f(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

V2 Para estudiar

$$V_2 = E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_L^2(x)K_{hi}^2\right\}$$

hay que determinar el término que predomina. Como

$$E_\xi\left\{\alpha_L^2(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^2\right\}=E_\xi\left(\alpha_L^2(x)\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_{hi}^2=\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\left[VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)+E_\xi^2\left(\alpha_L(x)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\left[VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)+E_\xi^2\left(\alpha_L(x)\right)\right]=O\left(\frac{1}{h_n}\right)\left(O\left(\frac{1}{nh_n}\right)+\alpha^2(x)+O(h_n)\right)=O\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

su término dominante es

$$\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}E_\xi^2\left(\alpha_L(x)\right)=\frac{f(x)\alpha_0(K^2)}{h_n}\left(1+O(h_n)\right)\left(\alpha^2\left(x\right)+O(h_n)\right)=\alpha^2(x)f(x)\frac{\alpha_0(K^2)}{h_n}+o\left(\frac{1}{h_n}\right)$$

Por tanto, resumiendo

$$V_2=\frac{\alpha^2(x)}{f(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

V3 Para el tercero

$$E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]^2K_{hi}^2\right\}$$

hay que estudiar

$$E_\xi\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\beta_L^2(x)\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2\right\}=E_\xi\left\{\beta_L^2(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2K_{hi}^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\left\{VAR_\xi\left(\beta_L(x)\right)+E_\xi^2\left(\beta_L(x)\right)\right\}=O(h_n)\left[O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right)+O(1)\right],$$

por la observación a la proposición 50, cuyo término dominante es

$$\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}E_\xi^2\left(\beta_L(x)\right)=O(h_n)$$

que es de menor orden de magnitud que los anteriores. Con esto se terminan los sumandos correspondientes a los cuadrados.

V4 Se continúa con el primero de los dobles productos

$$E\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2Y_i\alpha_L(x)K_{hi}^2\right\}$$

teniendo en cuenta que el núcleo es simétrico además de soporte compacto

$$E_\xi\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2Y_i\alpha_L(x)K_{hi}^2\right\}=2E_\xi\left\{\alpha_L(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_iK_{hi}^2\right\}=$$

$$=2E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\left(\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}-\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=$$

$$=2E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)-2E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)$$

Para comenzar

$$\frac{2}{f_S^3(x)}E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}\right]=\frac{2}{f_S^3(x)}\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^3(x_i-x)+$$

$$+\frac{2}{f_S^3(x)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_i)K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_k)K_h(x_k-x)$$

por el lema 29. Como el núcleo es de soporte compacto, y teniendo en cuenta un ejemplo anterior, el 57, del comienzo de esta sección

$$\frac{2}{f_S^3(x)}\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^3(x_i-x)=2\frac{1}{N}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^3(x_i-x)}{f_S^3(x)}\frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^3(x_i-x)}{\sum_{i=1}^{N}K_h^3(x_i-x)}=$$

$$=2\frac{1}{N}\frac{\alpha_0(K^3)}{f^2(x)h_n^2}\left(1+O(h_n)\right)\left(\sigma^2(x)+o(1)\right)=2\frac{1}{N}\frac{\alpha_0(K^3)}{f^2(x)h_n^2}\left(\sigma^2(x)+o(1)\right)$$

que va a ser de orden inferior porque está multiplicado por $\frac{1}{N}$, como ya se ha visto en el capítulo anterior. Con respecto al otro sumando

$$\frac{2}{f_S(x)}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_i)K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_k)K_h(x_k-x)=$$

$$=2\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}K_h(x_k-x)}{f_S^2(x)}\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)K_h^2(x_i-x)}{\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)}\frac{\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_k)K_h(x_k-x)}{\sum_{k=1}^{N}K_h(x_k-x)}=$$

$$=2\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}K_h^2(x_i-x)}{f_S^2(x)}\left(\alpha(x)+o(1)\right)\left(\alpha(x)+o(1)\right)=2\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\left(\alpha^2(x)+o(1)\right)$$

que multiplicado por $\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}$ resulta dominante. Para el sumando que falta, se aplicará la proposición 54

$$-2E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=$$

$$=\frac{-2}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}}\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=$$

$$=\frac{-2}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}}\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\left(\alpha^2(x)+o(1)\right)O(h^{1-3+2})\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=O(1)$$

Por consiguiente,

$$V_4=2\frac{\alpha^2(x)}{f(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

V5 El segundo sumando de los dobles productos es

$$E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[2Y_i\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]K_{hi}^2\right\}$$

que da lugar a

$$E_\xi\left\{2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i\beta_L(x)\left(x_i-x\right)K_{hi}^2\right\}=2E_\xi\left[\beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right]=$$

$$=2E_\xi\left[\frac{S_{N,1,1,1}-\alpha_L(x)S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right]=$$

$$=2\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right]-2E_\xi\left[\alpha_L(x)\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right]$$

por (5.9). El segundo sumando es igual a

$$-2\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}E_\xi\left[\left(\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}-\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=$$

$$=-2\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}E_\xi\left[\frac{S_{N,1,0,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)+$$

$$+2\left(\frac{S_{N,0,1,1}}{S_{N,0,2,1}}\right)^2E_\xi\left[\frac{S_{N,1,1,1}}{S_{N,0,0,1}}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=$$

$$=-2\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}}E_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,0,1}S_{N,1,1,2}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)+$$

$$+2\left(\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\right)^2\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,0,1}}E_\xi\left[S_{N,1,1,1}\frac{1}{N}S_{N,1,1,2}\right]\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=$$

$$=O(1)\left(\alpha^2(x)+o(1)\right)O(h_n^{0+1-1-2+2})\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)+$$

$$+O(1)\left(\alpha^2(x)+o(1)\right)O\left(h_n^{1+1-1-2+2}\right)\left(1+O\left(h_n^2\right)\right)=O(1)$$

por la proposición 54. Para el primero, se obtiene

$$2\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha(x_i)\left(x_i-x\right)K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\alpha(x_k)\left(x_k-x\right)K_h(x_k-x)=$$

$$=2\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha(x)+\alpha(x_i)-\alpha(x)\right)\left(x_i-x\right)K_h^2(x_i-x)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha(x)+\alpha(x_k)-\alpha(x)\right)\left(x_k-x\right)K_h(x_k-x)=$$

$$=2\frac{1}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\left[\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha(x_i)-\alpha(x)\right)\left(x_i-x\right)K_h^2(x_i-x)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\alpha(x_k)-\alpha(x)\right)\left(x_k-x\right)K_h(x_k-x)\right]=$$

$$=2\frac{\alpha^2(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}+T_1+T_2+T_3$$

donde

$$2\frac{\alpha^2(x)}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}=O(h_n),$$

$$|T_1|\leq 2\left|\alpha(x)\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\right|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|\alpha(x_k)-\alpha(x)\right|\left|x_k-x\right|K_h(x_k-x)\leq$$

$$\leq 2\left|\alpha(x)\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\right|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Lambda(\alpha)\left|x_k-x\right|\left|x_k-x\right|K_h(x_k-x)=$$

$$=2\left|\alpha(x)\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\right|\Lambda(\alpha)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k-x\right)^2K_h(x_k-x)=$$

$$= 2\left|\alpha(x)\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\right|\Lambda(\alpha)\frac{1}{N}S_{N,0,2,1} = 2\Lambda(\alpha)\left|\alpha(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right| = O(h_n),$$

porque el núcleo es simétrico y $nh_n^3 \to \infty$

$$|T_2| \leq 2\left|\alpha(x)\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\right|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\alpha(x_i)-\alpha(x)|\,|x_i-x|\,K_h^2(x_i-x) \leq$$

$$\leq 2\left|\alpha(x)\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\right|\Lambda(\alpha)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^2\,K_h^2(x_k-x) =$$

$$= 2\left|\alpha(x)\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,1,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\right|\Lambda(\alpha)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2} = O(h_n)$$

y

$$|T_3| \leq \frac{2}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\alpha(x_i)-\alpha(x)|\,|x_i-x|\,K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|\alpha(x_k)-\alpha(x)|\,|x_k-x|\,K_h(x_k-x)\right] \leq$$

$$\leq \frac{2\Lambda^2(\alpha)}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)^2\,K_h^2(x_i-x)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x)^2\,K_h(x_k-x)\right] = 2\Lambda^2(\alpha)\frac{\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}}{\frac{1}{N}S_{N,0,2,1}} = O(h_n)$$

V6 El último sumando es

$$E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_L(x)\beta_L(x)\,(x_i-x)\right]K_{hi}^2\right\}$$

que da lugar a

$$2E_\xi\left\{\alpha_L(x)\beta_L(x)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)\,K_{hi}^2\right\} = 2E_\xi\left[\alpha_L(x)\beta_L(x)\right]\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-x)\,K_{hi}^2 = O\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

porque

$$E_\xi\left(\alpha_L(x)\beta_L(x)\right) \leq E_\xi^{1/2}\left(\alpha_L^2(x)\right)E_\xi^{1/2}\left(\beta_L^2(x)\right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{(nh_n^3)^{1/2}}\right) = O\left(\frac{1}{nh_n^2}\right)$$

y el núcleo es simétrico, con lo cual es de menor orden de magnitud. En resumen,

$$E_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right]^2K_{hi}^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+$$

$$+\frac{\alpha^2(x)\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)+$$

$$+\frac{\alpha^2\left(x\right)\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)+$$

$$+O\left(\frac{h_n}{n}\right)-2\frac{\alpha^2(x))\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\right)-O\left(\frac{1}{n^2h_n}\right)=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

R Para el tratamiento del resto téngase en cuenta que

$$E_\xi\left\{\max_{V_{xh}}\left|Y_i\right|^2O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)\right\}=O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\left(\alpha(x_i)+\sigma(x_i)\varepsilon_i\right)^2\right]=$$

$$=O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\left(\alpha^2(x_i)+2\alpha(x_i)\sigma(x_i)\varepsilon_i+\sigma^2(x_i)\varepsilon_i^2\right)\right]=O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right]$$

que si se supone la existencia de momentos de orden 6 de ε_i

$$O\left(\frac{1}{\left(nh_n\right)^{3/2}}\right)E_\xi\left[\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right]=o\left(\frac{n^{1/3}}{nh_nn^{1/2}h_n^{1/2}}\right)=o\left(\frac{1}{nh_nn^{1/6}h_n^{3/6}}\right)$$

que resulta de menor orden de magnitud porque $nh_n^3\to\infty$ Q.E.D.

5.6.4. $\xi-$Esperanza de DII

Suponiendo que σ es lipschitziana para el tratamiento de $D_{II,2}$, $D_{II,4}$ y D_{III}, se verifica que

$$E_\xi VAR_p\left[\left(\beta_L(x)-\hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right]=E_\xi\left(\max_{V_{xh}}\left|Y_i\right|^2\right)O\left(\frac{h_n}{n}\right)$$

Si ε_i tiene momentos de orden 6,

$$O\left(\frac{h_n}{n}\right) E_\xi\left[\max_{V_{x,h}} \varepsilon_i^2\right] = o\left(\frac{h_n n^{1/3}}{n}\right) = o\left(\frac{n^{1/3}h_n^2}{nh_n}\right) = o\left(\frac{(nh_n^6)^{1/3}}{nh_n}\right)$$

que resulta de menor orden de magnitud si $nh_n^5 = O(1)$. Si solo se supusiera la existencia de momento de orden 2, resultaría $o(h_n)$ que podría acabar por ser dominante frente al habitual $O(h_n^2)$.

5.6.5. $\xi-$Esperanza de DIII

La esperanza según el diseño fijo de la covarianza según el plan de muestreo se puede tratar del siguiente modo

$$\left|E_\xi COV_p\left[\hat{\alpha}_I(x); \left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right]\right| \leq E_\xi\left|COV_p\left[\hat{\alpha}_I(x); \left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right]\right| \leq$$

$$\leq E_\xi\left\{VAR_p^{1/2}\left[\hat{\alpha}_I(x)\right] VAR_p^{1/2}\left[\left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right]\right\} \leq E_\xi^{1/2} VAR_p\left[\hat{\alpha}_I(x)\right] E_\xi^{1/2} VAR_p\left[\left(\beta_L(x) - \hat{\beta}_L(x)\right)\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)\right] \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{(nh_n)^{1/2}}\right) E_\xi^{1/2}\left(\max_{V_{xh}} |Y_i|^2\right) O\left(\frac{h_n^{1/2}}{n^{1/2}}\right) = E_\xi^{1/2}\left(\max_{V_{xh}} |Y_i|^2\right) O\left(\frac{1}{n}\right)$$

si σ es lipschitziana.

Si además la perturbación tiene momentos de orden 6,

$$O\left(\frac{1}{n}\right) E_\xi^{1/2}\left[\max_{V_{x,h}} \varepsilon_i^2\right] = o\left(\frac{n^{1/6}}{n}\right) = o\left(\frac{n^{1/6}h_n}{nh_n}\right) = o\left(\frac{(nh_n^6)^{1/6}}{nh_n}\right)$$

resulta de menor orden de magnitud si $nh_n^5 = O(1)$.

Teorema 13 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Sea ε_i tal que $E_\xi \varepsilon_i^6 < \infty$. Sean $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ lipschitzianas. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^5 = O(1)$, se verifica que*

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)\right] = \frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.- Por la proposición anterior

$$E_\xi\left[VAR_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)\right] = \frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \sigma^2(x_i)K_h^2(x_i - x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

entonces

$$\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \sigma^2(x_i)K_h^2(x_i - x) = \frac{\sum_{i=1}^N K_h^2(x_i - x)}{\sum_{i=1}^N K_h^2(x_i - x)}\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \sigma^2(x_i)K_h^2(x_i - x) =$$

$$= \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_h^2(x_i - x)}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\sigma^2(x) + o(1)\right) = \frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\left(1 + O(h_n)\right)\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\sigma^2(x) + o(1)\right) =$$

$$= \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)h_n}\sigma^2(x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

por (5.8) Q.E.D.

5.7. $\xi-$Varianza de la $p-$esperanza

5.7.1. Estimador I

5.7.1.1. $\xi-$Varianza del sesgo según el plan

Teniendo en cuenta (5.3), para el término principal del sesgo del estimador $\hat{\alpha}_I(x)$ según el plan de muestreo se verifica que

$$VAR_\xi\left\{\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_L - \beta_L\left(x_i - x\right)\right)K_{hi}^2\right\} =$$

$$= \left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 VAR_\xi\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)\left(x_i - x\right)\right)K_{hi}^2\right\} =$$

$$= \left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 VAR_\xi\left\{\frac{1}{N}S_{N,1,0,2} - \alpha_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,0,2} - \beta_L(x)\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2\left[VAR_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right) + \left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)^2 VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right) + \left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)^2 VAR_\xi\left(\beta_L(x)\right)\right] -$$

$$-2\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2\left[\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}COV_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}, \alpha_L(x)\right) + \frac{1}{N}S_{N,0,1,2}COV_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}, \beta_L(x)\right)\right] +$$

$$+2\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}COV_\xi\left(\alpha_L(x), \beta_L(x)\right)$$

Si se estudia cada sumando, se obtiene para el primero por la proposición 54, bajo la condición HHM, si K de soporte compacto, α continua y σ acotada

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 VAR_\xi\left[\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right] \leq \left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 E_\xi\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)^2\right] \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\alpha^2(x)+o(1)\right)O\left(\frac{1}{h_n^2}\right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)$$

para el segundo,

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\right)^2 VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\frac{1}{h_n^2}\right)\left[VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = O\left(\frac{1}{(nh_n)^3}\right)$$

y el tercero

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\right)^2 VAR_\xi\left[\beta_L(x)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right)O(1)O\left(\frac{1}{nh_n^3}\right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^3}\right)$$

Para el primer sumando de las covarianzas

$$2\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{N}S_{N,0,0,2}\left|COV_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2},\alpha_L(x)\right)\right| \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)VAR_\xi^{1/2}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)VAR_\xi^{1/2}\left(\alpha_L(x)\right) \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)E_\xi^{1/2}\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)^2\right]VAR_\xi^{1/2}\left(\alpha_L(x)\right) \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(\frac{1}{(nh_n)^{1/2}}\right) \leq O\left(\frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right)$$

para el segundo,

$$2\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{N}S_{N,0,1,2}\left|COV_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2},\beta_L(x)\right)\right| \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(1\right)VAR_\xi^{1/2}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)VAR_\xi^{1/2}\left(\beta_L(x)\right) \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(1\right)E_\xi^{1/2}\left[\left(\frac{1}{N}S_{N,1,0,2}\right)^2\right]VAR_\xi^{1/2}\left(\beta_L(x)\right) \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)O\left(\frac{1}{h_n}\right)O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{3/2}}\right) \leq O\left(\frac{1}{n^{5/2}h_n^{5/2}}\right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right)$$

aunque se pueden refinar si se impone simetría y $nh_n^3 \to \infty$,

$$2\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} \left| COV_\xi \left(\frac{1}{N} S_{N,1,0,2}, \beta_L(x) \right) \right| \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(h_n\right) VAR_\xi^{1/2} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,0,2} \right) VAR_\xi^{1/2} \left(\beta_L(x) \right) \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(h_n\right) O\left(\frac{1}{n^{1/2} h_n^{3/2}} \right) O\left(\frac{1}{n^{1/2} h_n^{3/2}} \right) \leq O\left(\frac{1}{n^3 h_n^2} \right)$$

y, por último, para el tercero

$$2\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{N} S_{N,0,0,2} \frac{1}{N} S_{N,0,1,2} \left| COV_\xi \left(\alpha_L(x), \beta_L(x) \right) \right| \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{h_n} \right) VAR_\xi^{1/2} \left(\alpha_L(x) \right) VAR_\xi^{1/2} \left(\beta_L(x) \right) \leq$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{h_n} \right) O\left(\frac{1}{(nh_n)^{1/2}} \right) O\left(\frac{1}{n^{1/2} h_n^{3/2}} \right) \leq O\left(\frac{1}{(nh_n)^3} \right)$$

por consiguiente

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2 VAR_\xi \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \alpha_L - \beta_L \left(x_i - x \right) \right) K_{hi}^2 \right\} = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2} \right)$$

En resumen,

$$VAR_\xi \left\{ \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \alpha_L - \beta_L \left(x_i - x \right) \right) K_{hi}^2 \right\} = O\left(\frac{1}{(nh_n)^2} \right)$$

Por otra parte, para el resto

$$VAR_\xi \left[\max_{V_{xh}} |Y_i| \, O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}} \right) \right] \leq E_\xi \left[\left(\max_{V_{xh}} |Y_i| \, O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}} \right) \right)^2 \right] = O\left(\frac{1}{(nh_n)^3} \right) E_\xi \left(\max_{V_{xh}} |Y_i|^2 \right)$$

Si existe momento de orden 6 de la perturbación, como

$$O\left(\frac{1}{(nh_n)^3} \right) E_\xi \left(\max_{V_{x,h}} \varepsilon_i^2 \right) = o\left(\frac{n^{1/3}}{n^3 h_n^3} \right) = o\left(\frac{1}{nh_n n^{5/3} h_n^2} \right) = o\left(\frac{1}{nh_n (n^5 h_n^6)^{1/3}} \right)$$

y

$$O\left(\frac{1}{(nh_n)^3}\right)E_\xi\left(\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right)=o\left(\frac{n^{1/3}}{n^3h_n^3}\right)=o\left(\frac{1}{n(nh_n^2)(nh_n^{3/2})^{2/3}}\right)$$

resulta de menor orden de magnitud si $nh_n^3\to\infty$.

Para finalizar, por lo que respecta al sumando correspondiente a la covarianza

$$COV_\xi\left[\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2;\max_{V_{xh}}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right]\leq$$

$$\leq VAR_\xi^{1/2}\left[\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2\right]VAR_\xi^{1/2}\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{nh_n}\right)O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)E_\xi^{1/2}\left(\max_{V_{xh}}|Y_i|^2\right)$$

Si tiene momentos de orden 6, como

$$O\left(\frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right)E_\xi^{1/2}\left(\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right)=o\left(\frac{n^{1/6}}{n^{5/2}h_n^{5/2}}\right)=o\left(\frac{1}{nh_nn^{4/3}h_n^{3/2}}\right)=o\left(\frac{1}{nh_n(n^4h_n^{9/2})^{1/3}}\right)$$

y

$$O\left(\frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right)E_\xi^{1/2}\left(\max_{V_{x,h}}\varepsilon_i^2\right)=o\left(\frac{n^{1/6}}{n^{5/2}h_n^{5/2}}\right)=o\left(\frac{1}{n(nh_n^2)(nh_n^{9/6})^{1/3}}\right)$$

resulta de menor orden de magnitud si $nh_n^3\to\infty$.

5.7.1.2. Conclusión para el estimador I

$$VAR_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)=VAR_\xi\left(\alpha_L(x)+B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)\right)=$$

$$=VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)+VAR_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)\right]+2COV_\xi\left[\alpha_L(x);B_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)\right]=$$

$$=VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)+VAR_\xi\left\{\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2\right\}+VAR_\xi\left[\max_{V_{xh}}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right]-$$

$$-2COV_\xi\left[\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2;\max_{V_{xh}}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right]-$$

$$-2COV_\xi\left\{\alpha_L(x),\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2\right\}+2COV_\xi\left[\alpha_L(x),\underset{V_{xh}}{\max}\left|Y_i\right|O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right]=$$

$$=VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)+O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)=VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

porque

$$COV_\xi\left[\alpha_L(x),\underset{V_{xh}}{\max}\left|Y_i\right|O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)\right]\leq VAR^{1/2}\left(\alpha_L(x)\right)E_p^{1/2}\left(\underset{V_{xh}}{\max}\left|Y_i\right|^2\right)O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)o(n^{1/6})=o\left(\frac{1}{n(nh_n^3)^{1/2}(nh_n^{3/2})^{1/3}}\right)$$

y

$$2COV_\xi\left\{\alpha_L(x),\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2\right\}=$$

$$=O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{nh_n}\right)=O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$$

y los otros sumandos son conocidos del epígrafe anterior, por tanto, si K simétrico y de soporte compacto, α continua, σ acotada y $nh_n^3\to\infty$

$$VAR_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_I(x)\right)=VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)=VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

por la proposición 55, cuyo término dominante es conocido del capítulo anterior.

5.7.2. Estimador L

5.7.2.1. $\xi-$Varianza de la $p-$esperanza

Por (5.4), en MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, cuando el núcleo es simétrico y de soporte compacto, se verifica que

$$VAR_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=VAR_\xi\left[\alpha_L(x)+B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)\right]=$$

$$=VAR_\xi\left[\alpha_L(x)\right]+VAR_\xi\left[B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)\right]+2COV_\xi\left[\alpha_L(x),B_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)\right]=$$

$$=VAR_\xi\left[\alpha_L(x)\right]+\left(\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2VAR_\xi\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2\right\}+$$

$$+\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{D^2(x)}VAR_\xi\left\{\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right\}+VAR_\xi\left[\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right]-$$

$$+2\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{f_S^2}\frac{1}{D(x)}COV_\xi\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2;\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right\}$$

$$+2\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}COV_\xi\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L-\beta_L\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2;\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{D(x)}COV_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S\frac{1}{N}S_{N,0,2,2};\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-$$

$$-2\frac{1}{f_S^2}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}COV_\xi\left\{\alpha_L(x),\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)K_{hi}^2\right\}-$$

$$-2\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{D(x)}COV_\xi\left\{\alpha_L(x),\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right\}+$$

$$+2COV_\xi\left[\alpha_L(x),\underset{V_{xh}}{\max}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

El término que se supone que va a predominar admite el siguiente desarrollo

$$VAR_\xi\left(\alpha_L(x)\right)=VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

para ver esto, obsérvese que algunos de los sumandos ya han sido tratados para el estimador I. A continuación se estudiarán los no tratados

5.7.2.2. $\xi-$Varianza del término extra del sesgo según el plan

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{D^2(x)}VAR_\xi\left\{\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right\}=$$

$$=\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{D^2(x)}\left\{VAR_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}\right)+\left(\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)^2VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)\right\}-$$

$$-2\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{D^2(x)}\left\{\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}COV_\xi\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2},\alpha_S(x)\right)\right\}=$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) \left\{ O\left(\frac{h_n}{n}\right) + O\left(h_n^2\right) O\left(\frac{1}{nh_n}\right) - O\left(h_n\right) O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left(\frac{1}{h_n^4}\right) O\left(\frac{h_n}{n}\right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^3}\right)$$

En resumen

$$VAR_\xi \left\{ \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{D(x)} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,2,2} - \alpha_S \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) \right\} = O\left(\frac{1}{(nh_n)^3}\right)$$

5.7.2.3. $\xi-$Varianza del resto

Si σ es lipschitziana

$$VAR_\xi \left[\underset{V_{xh}}{\max} |Y_i| \, O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \leq E_\xi \left[\left(\underset{V_{xh}}{\max} |Y_i| \, O\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 \right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right) E_\xi \left(\underset{V_{xh}}{\max} |Y_i|^2 \right)$$

Si tiene momentos de orden 6, como

$$O\left(\frac{1}{n^2}\right) E_\xi \left(\underset{V_{x,h}}{\max} \varepsilon_i^2 \right) = o\left(\frac{n^{1/3}}{n^2}\right) = o\left(\frac{h_n}{nh_n n^{2/3}}\right)$$

que resulta de menor orden de magnitud.

5.7.2.4. Términos de las covarianzas

El primer término verifica

$$2COV_\xi \left\{ \frac{1}{f_S^2} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \alpha_L - \beta_L \left(x_i - x\right)\right) K_{hi}^2; \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{D(x)} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{N} S_{N,1,2,2} - \alpha_S \frac{1}{N} S_{N,0,2,2} \right) \right\} =$$

$$= O\left(\frac{1}{nh_n}\right) O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{5/2}}\right) = O\left(\frac{1}{nn^{3/2}h_n^{5/2}}\right),$$

el segundo,

$$2COV_\xi \left\{ \frac{1}{f_S^2} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \alpha_L - \beta_L \left(x_i - x\right)\right) K_{hi}^2; \underset{V_{xh}}{\max} |Y_i| \, O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} =$$

$$= O\left(\frac{1}{nh_n}\right) o\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}h_n}\right) = o\left(\frac{1}{nn^{1/2}h_n}\right)$$

y el tercero

$$2COV_\xi\left\{\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{D(x)}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right);\max_{V_{xh}}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=$$

$$=O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)o\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)=o\left(\frac{1}{n^2h_n^{3/2}}\right)=o\left(\frac{1}{nnh_n^{3/2}}\right)$$

El cuarto de ellos ya ha sido tratado y resulta $O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$. El quinto verifica

$$2COV_\xi\left\{\alpha_L(x),\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{D(x)}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)\right\}=O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right)O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)=O\left(\frac{1}{(nh_n)^2}\right)$$

y también $O\left(\frac{1}{nnh_n^2}\right)$y el sexto término, si σ es lipschitziana

$$2COV_\xi\left[\alpha_L(x),\max_{V_{xh}}|Y_i|\,O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_n^{1/2}}\right)o\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)=o\left(\frac{1}{nh_n^{1/2}n^{2/6}}\right)=o\left(\frac{1}{n(n^2h_n^3)^{1/6}}\right)$$

5.7.2.5. Conclusión general

Teorema 14 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Sea ε_i tal que $E_\xi\varepsilon_i^6<\infty$. Sean $\alpha(\cdot)$ continua y $\sigma(\cdot)$ lipschitziana. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^3\to\infty$ se verifica*

$$VAR_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{Nh_n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.- Si $nh_n^3\to\infty$

$$VAR_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=VAR_\xi\left(\alpha_S(x)\right)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{Nh_n}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

5.7.3. Estudio de la $\xi-$varianza de la diferencia dividida máxima

Se debe estudiar la existencia de la varianza del cociente de diferencias máximo

$$VAR_\xi\left(\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\right),$$

el máximo se extiende a todos los elementos diferentes incluidos dentro del entorno de x. Se pude acotar del siguiente modo

$$VAR_{\xi}\left(\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\right)\leq E_{\xi}\left[\left(\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|\right)^2\right]=E_{\xi}\left[\max_{i\neq j:V_{xh}}\left|\frac{Y_i-Y_j}{x_i-x_j}\right|^2\right]$$

que ya ha sido tratado en la subsección 5.3.3.

5.8. Varianza total

5.8.1. Estimador L

Teorema 15 *Sea $K(\cdot)$ simétrico y de soporte compacto. Sea ε_i tal que $E_{\xi}\varepsilon_i^6<\infty$. Sean $\alpha(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ lipschitzianas. En MASS/R(N,n), bajo la condición HHM, si $nh_n^5=O(1)$ se verifica*

$$VAR\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}\frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

Demostración.- Si $\sigma(\cdot)$ es lipschitziana

$$VAR\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=E_{\xi}VAR_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)+VAR_{\xi}E_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)=E_{\xi}VAR_p\left(\hat{\alpha}_L(x)\right)+VAR_{\xi}\left(\alpha_S(x)\right)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)+\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\left(\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}+\frac{n}{N}\frac{1}{n}\right)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\left(\frac{N(N-n)+n(N-1)}{N(N-1)}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\left(\frac{NN-Nn+nN-n}{N(N-1)}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\left(\frac{N^2-n}{N^2-N}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{f_S^2(x)}\frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}\frac{1}{n}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2(x_i)K_h^2(x_i-x)+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)=$$

$$= \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n} \frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

por (5.8) Q.E.D.

Desde el punto de vista asintótico, se llega a las mismas expresiones que HARMS&DUCHESNE(2010) para MASS/R(N,n), siempre y cuando se imponga la existencia de momentos de la perturbación y la suavidad de σ.

Se vislumbra que en el caso de que la distribución subyacente en el modelo tenga problemas de falta de momentos podrían no verificarse los resultados obtenidos, aunque éstos son de aplicación a una clase suficientemente amplia. Lo anterior justifica el estudio detallado de los restos en los desarrollos originados por el plan de muestreo. Precisamente lo que se deduce de esta memoria es que las técnicas tratadas son muy vulnerables a determinados tipos de distribuciones con colas pesadas.

La velocidad de convergencia de la ventana que hay que imponer es lenta. Si solo se supone $nh_n \to \infty$, como hacen HARMS&DUCHESNE(2010), pueden existir términos con origen en el plan de muestreo que podrían no ser despreciables.

Además, en muestras "finitas", empleando el típico abuso del lenguaje de los económetras, la expresión que se obtiene para la varianza en MASS/R es ligeramente superior a la tradicional en poblaciones infinitas.

5.8.2. Estimador I

Bajo las hipótesis del teorema anterior aunque relajando que σ sea continua y $nh_n^3 \to \infty$

$$VAR\left(\hat{\alpha}_I(x)\right) = \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{N-n}{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^2(x_i - x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{f_S^2(x)} \frac{1}{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma^2(x_i) K_h^2(x_i - x) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n} \frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}} + o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$$

también por (5.8).

Capítulo 6

Estudio con datos reales

[...] el sentido común es demasiado común para ser realmente sentido, en el fondo no es más que un capítulo de la estadística, y el más vulgarizado de todos [...]

José Saramago *El hombre duplicado*

Resumen Se estudia la variable previa $\mathcal{X}$ mediante los descriptores histograma y de Parzen-Rosenblatt. Tambien se representa y comenta la población finita mediante el diagrama de dispersión y el regresograma.

Después se extrae una muestra aleatoria simple sin reemplazamiento y se estudia. Tras dar una estima de la función de densidad asintótica del diseño fijo, se calculan los estimadores del regresograma y asociado. Posteriormente se pasa al estimador de Nadaraya-Watson propuesto. La selección de la ventana se realiza primero de forma manual y luego de dos formas, asistida y automática que se refinan a su vez mediante una solución del compromiso.

Antes de pasar al estimador lineal local, se motiva la selección asistida del estimador de Nadaraya-Watson en términos del lineal local. Posteriormente se introduce la selección asistida para este tercer estimador.

Se trata también la selección de tipo 'plug-in'. Como en el caso práctico no se puede suponer homoscedasticidad, se resuelve este problema recurriendo a estimar la función de varianza mediante un estimador sencillo, el asociado al regresograma, basado en el descriptor que apareció en el capítulo correspondiente al regresograma. Salvado este escollo, se procede a aproximar las ventanas para los tres estimadores de dos modos, local y global. Por último se realiza un breve estudio de simulación mediante dos técnicas de muestreo de la comuestra de la muestra aleatoria simple original.

6.1. Introducción

El tratamiento de lo urbano como factor en las estadísticas sociales públicas europeas se realiza a través de la variable nuclear grado de urbanización. Este carácter ordinal clasifica, en España,

a los términos municipales en tres zonas: densamente poblada (ZDP), intermedia (ZIP) y poco poblada (ZPP). Dos son los criterios empleados para realizar la partición de los municipios, uno cuantitativo y otro geográfico.

Primero, se cuantifica la intensidad de la urbanización mediante la discretización de la variable densidad de población y, segundo, se impone la contigüidad de los municipios que forman las componentes conexas de la ZDP y la ZIP. Cada componente conexa resultante en ZDP debe superar un umbral de habitantes (50.000) y debe ser simple en el sentido topológico.

Las componentes conexas de la ZIP son más complicadas de establecer, fundamentalmente, deben estar en el segundo escalón de la discretización y superar el umbral o compartir frontera con una componente de la ZDP. Para los pormenores puede consultarse Eurostat(2007).

El resultado de aplicar este carácter ordinal a los municipios gallegos se consideraba insuficiente para intentar operacionalizar el concepto de urbano/rural en la comunidad autónoma dado que el asentamiento de la población en Galicia es muy diferente al de la mayoría del resto de España, aunque haya espacios geográficos del estado con un asentamiento similar.

Por ello, se ha realizado una subclasificación armonizada de los municipios gallegos promovida por el Instituto Galego de Estatística (IGE). El resultado es una clasificación anidada en la original: ZDP; ZIP alta, ZIP baja; ZPP alta, ZPP intermedia y ZPP baja. El procedimiento se basa en el empleo de instrumentos ya recogidos en Eurostat(2007), destacando el de la parroquia como unidad estadística local. Para profundizar en esta subestratificación así como en sus consecuencias pueden consultarse IGE(2011) o Calvo et al(2011), respectivamente.

El estudio de este caso real se enmarca dentro de otros posibles tratamientos u operacionalizaciones del concepto urbano/rural. Por ejemplo, una de ellas podría basarse en el concepto de núcleo de población. Otra, emplear la densidad de población como carácter cuantitativo, variable en sentido restringido.

Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), se considera *núcleo de población* (n.p.) a un conjunto de al menos diez edificaciones, que están formando calles, plazas y otras vías urbanas. Por excepción, el número de edificaciones podrá ser inferior a 10, siempre que la población que habita las mismas supere los 50 habitantes. Se incluyen en el n.p. aquellas edificaciones que, estando aisladas, distan menos de 200 metros de los límites exteriores del mencionado conjunto, si bien en la determinación de dicha distancia han de excluirse los terrenos ocupados por instalaciones industriales o comerciales, parques, jardines, zonas deportivas, cementerios, aparcamientos y otros, así como los canales o ríos que puedan ser cruzados por puentes.

Las edificaciones o viviendas de una entidad singular de población que no puedan ser incluidas en el concepto de n.p. se consideran en *diseminado*. Una entidad singular de población puede tener uno o varios núcleos o, incluso, ninguno si toda ella se encuentra en diseminado. Ninguna vivienda puede pertenecer simultáneamente a dos o más núcleos, o a un núcleo y un diseminado.

La determinación precisa de la población que vive en núcleos es notablemente más dispendiosa que la de la densidad de determinado tipo de áreas locales (aa.ll.) y, actualmente, tiene más error (existe la posibilidad de inercia administrativa si no se dispone de los recursos necesarios, falta de determinación precisa de la frontera del territorio que soporta el núcleo frente al diseminado dado que un buen deslinde implica mucho trabajo...). Esto provocaría que en numerosas ocasiones convenga, por razones económicas, extraer una muestra. Esta puede ser aleatoria simple sin reem-

plazamiento siempre que no haya campaña o, aun habiéndola, que se realice una estratificación previa espacial.

6.2. Descripción de la población finita

Por todo lo anterior, interesa estudiar la relación entre la densidad y la aglomeración de la población en el universo que se considere. En este caso, las unidades que lo constituyen son aa.ll. que se han determinado a partir de las entidades colectivas y de las singulares no incluidas en colectivas del nomenclátor del INE para Galicia.

Las variables superficie y población son conocidas previamente para cada a.l. por la información del Sistema de Información Territorial de Galicia (SITGA) y por el Padrón Municipal de Habitantes, respectivamente. A partir de ellas se construye la variable densidad de población que se transformará previamente para constituir la variable regresora.

El regresando será la fracción de población que reside en núcleos como caracterización de la aglomeración de población del a.l.. Resulta evidente que ambas variables están relacionadas con el fenómeno de urbanización, de gran interés tanto en sí mismo como variable de clasificación en las encuestas socioeconómicas, estadísticas medioambientales o sanitarias.

Se está ante una situación ideal en que se dispone de los valores de la variable de interés: la fracción de población que vive en núcleos para la p.f.. No obstante, podrían existir situaciones reales en que se quisiera comprobar el estado de los núcleos de población o bien querer estudiar una variable 'proxy' que también midiera la aglomeración, por ejemplo, basándose en una nueva definición que ayude a operacionalizar el concepto de área local nuclear.

6.2.1. Universo. Variables estadísticas

El universo consta de casi cuatro mil unidades, $N = 3788$. Se presenta en los cuadros 6.1 y 6.2 una breve descripción de las dos variables en el universo de aa.ll. que se consideran en Galicia. Para abreviar, se denominarán *parroquias*, por serlo en su inmensa mayoría. Si se toman los caracteres como simples variables estadísticas, es decir, sin tener en cuenta su posible papel en el modelado se presenta su descripción en el cuadro 6.3.

6.2.2. Marco. Variable previa

La densidad de las parroquias oscila entre un poco menos de 0'3 y casi 27.370 hab/km^2. Más de las tres cuartas partes de ellas no rebasan los 64 y menos de la décima parte supera los 175. El 85 % de las parroquias gallegas no excede la densidad de población media de la Unión Europea, (EU-27: 113'5) y más del 80 % no supera la media española, 90'6, calculadas con la población a 1 de enero de 2009 y la superficie de 2006 (INE, 2010). Su media, 169'7, es mucho mayor que su mediana lo que da una idea de la fuerte asimetría de su distribución.

Lo anterior aconseja transformar la variable densidad antes de realizar la regresión. Para el regresor, se calcula $\log_{10}(\text{Densidad} + 1)$ que se abreviará por *Log10den1*. Esta transformación tiene la ventaja de estar definida para todas las densidades y dar un orden de magnitud con

Percentiles	Densidad
Mínimo	0’284
P5	5’359
P10	8’261
P20	12’48
P25	15’029
P30	17’295
P40	22’252
P50	28’576
P60	36’934
P70	52’271
P75	63’738
P80	82’054
P85	113’575
P90	174’215
P95	337’641
Máximo	27.369’845

Cuadro 6.1: Percentiles de la densidad de población

Percentiles	Fracción en núcleos
P10	0
P20	0’174
P25	0’301
P30	0’4
P40	0’589
P50	0’735
P60	0’862
P70	0’945
P75	0’979
P80	1
P90	1

Cuadro 6.2: Percentiles de la fracción en núcleos

Variables	Densidad	FracnNuc	Log10den1
N	3.788	3.788	3.788
Media	169'652	0'618	1'552
Mediana	28'576	0'735	1'471
Desviación típica	1.144'66	0'373	0'557
Varianza	1.310.254'91	0'139	0'31
Coeficiente de variación	6'747	0'604	0'359
Mínimo	0'284	0	0'109
Máximo	27.369'85	1	4'437
Recorrido	27.369'56	1	4'329
Recorrido intercuartílico	48'71	0'678	0'606

Cuadro 6.3: Descripción de las variables estadísticas

una interpretación sencilla: su parte entera coincide con el número de cifras de la densidad de población menos una unidad. Además no toma valores negativos para las parroquias que tienen densidad inferior a 1 y le asignaría 0 a la parroquia que careciera de población.

Si se tiene en cuenta que, por cuestiones urbanísticas y constructivas, existe un límite en la densidad de población, se considera en este caso que la transformación de la densidad no supera 5 lo que equivale aproximadamente a 100.000 hab/km^2. Es decir, el conjunto inicial del regresor es [0, 5].

Para finalizar, con relación al regresando, casi la mitad de las parroquias tiene más de tres cuartas partes de su población residiendo en núcleos. Más de la décima parte de las parroquias carece de población residiendo en ellos y el 30 % tiene menos del 40 % de su población en núcleos, por el contrario más de la quinta parte tiene toda su población en n.p. .

En resumen, un elemento del marco está constituido por (i, x_i, Y_i) donde i es la etiqueta, imagen del identificador correspondiente del Nomenclátor, $x_i = \log_{10}(\text{Densidad}_i + 1)$ e Y_i, la fracción de población de la parroquia con etiqueta i que reside en núcleos.

6.2.2.1. Histograma del marco

Para disponer de una visión global de la distribución del marco se realizará una descripción gráfica. El histograma de la figura 6.1 constituye un ejemplo de que los resultados por omisión de los paquetes estadísticos, como es R (R Development Core Team, 2010), pueden conducir a conclusiones iniciales diferentes de las que se extraen tras una inspección más reposada, aunque también proveen información valiosa, entre otras, no hay parroquias con x_i que supere 4'5 en el universo.

Si se realiza un histograma con longitud de celdilla unidad, permite una interpretación más fácil y, a su vez, ofrece una imagen de mayor simetría del regresor. De hecho, como se verá en la figura 6.2 este histograma es de lo más informativo y conviene observar que esta representación puede ser de gran utilidad para la difusión. Equivale a lo que se suele denominar *cuadro* o *tabla de recuentos* en estadística pública.

A la vista de este histograma, cerca de 500 parroquias tienen menos de 10 hab/km^2. En torno a

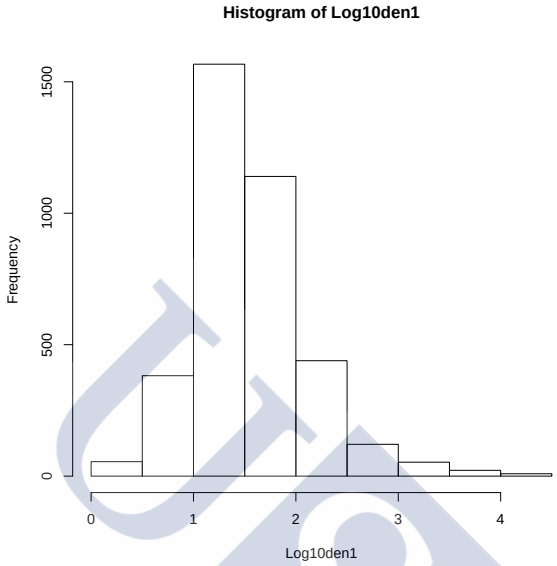


Figura 6.1: Histograma de la transformación de la densidad de población

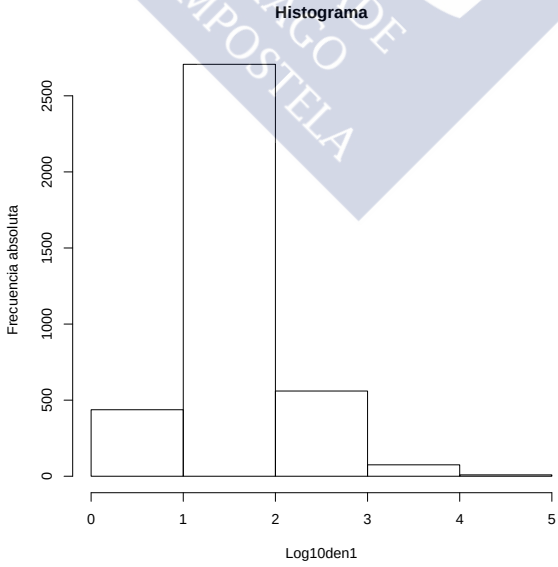


Figura 6.2: Histograma de la transformación de la densidad de población

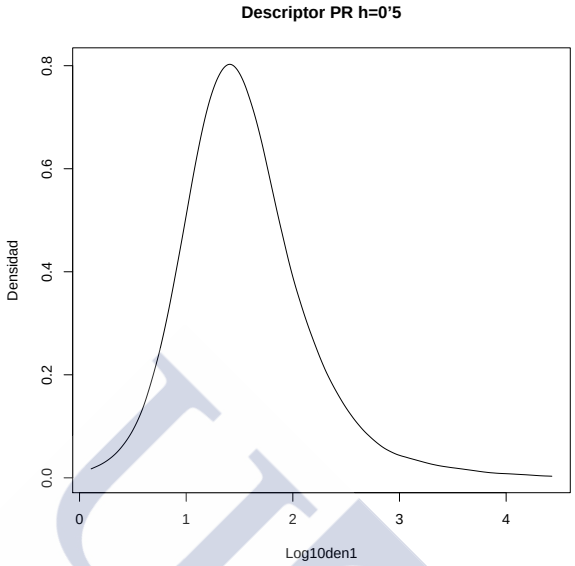


Figura 6.3: Descriptor PR para $h_n = 0'5$

2/3, están entre 10 y 100 hab/km^2. Y entre 100 y 1000, existen algo más de 500, superando el resto los 1000 hab/km^2. Por último, la moda y la mediana se encuentran en el intervalo (1, 2] y, por el anterior histograma, la moda debe estar más próxima a 1. Ambos histogramas reflejan que solo un número muy reducido de parroquias superan los 10.000 hab/km^2.

6.2.2.2. Descriptor PR

Como ejemplo de aproximación suave al relieve se puede calcular el descriptor PR. Para una ventana $h_n = 0'01$, aparecen varias modas locales que se desvanecen al considerar una más amplia, $h_n = 0'1$, para esta ventana aparece una moda global y desaparecen las locales aunque siguen presentándose algunos puntos angulosos.

Se presentan los descriptores PR para $h_n = 0'5$ y $h_n = 1'0$ con núcleo de Epanechnikov en las figuras 6.3 y 6.4, respectivamente. El primero constituye un ejemplo de suavización intermedia y el segundo, con $h_n = 1'0$, un ejemplo de sobresuavización.

Tras estas dos aproximaciones, resulta evidente que el relieve es campaniforme y, como densidad asintótica del diseño fijo, no parece que se aparte mucho de una gaussiana excepto en que resulta más apuntada y está truncada por ambas colas. El truncamiento por la derecha parece inapreciable y el de la izquierda tampoco afecta, desde el punto de vista geométrico, a la forma funcional de esa densidad aunque quizás explique el mayor apuntamiento.

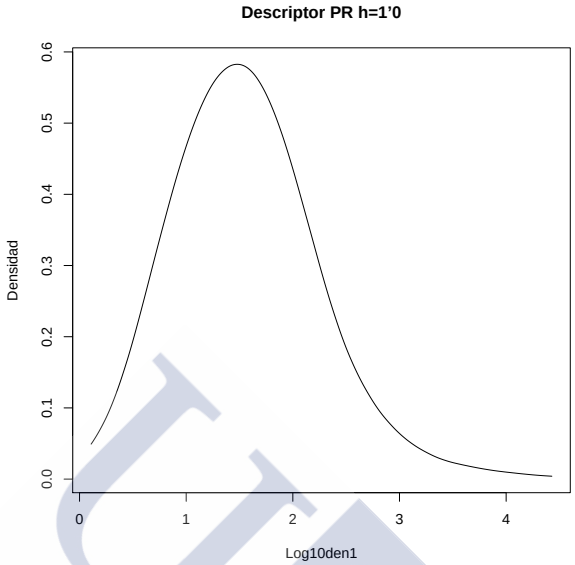


Figura 6.4: Descriptor PR para $h_n = 1$

6.2.3. Población finita

6.2.3.1. Diagrama de dispersión

El diagrama de dispersión de la fracción de habitantes que viven en núcleos frente a la transformación logarítmica de la densidad de población en el universo de parroquias se muestra en la figura 6.5.

Las ordenadas se caracterizan por ser una mezcla de datos que recuerdan, por una parte, a cocientes binomiales y, por otra, a datos de respuesta binaria (0 ó 1). Los ceros se producen en parroquias con densidades inferiores a 1000 hab/km^2, mientras que hay unos puros en parroquias con densidades superiores a esta cantidad pero también con densidades inferiores a 10 hab/km^2, en general, existen para todo tipo de densidades.

En la figura también se muestran, paralelos a los respectivos ejes, los diagramas de caja y bigotes de los dos caracteres como meras variables estadísticas –cuando se proceda a modelar, la $\mathcal{X}$ es una variable de diseño y la $\mathcal{Y}$, una v.a. vectorial–. Obsérvese el recorrido vacío de Log10den1 en el intervalo de más de 4 junto con otros dos más que apenas se vislumbran.

En abscisas, la variable previa que resulta de la transformación de la densidad es ligeramente asimétrica hacia la derecha, a diferencia de la fuerte asimetría de la variable original en el mismo sentido. En ordenadas, la fracción presenta una asimetría en sentido contrario, fruto de que existan muchas más parroquias con fracción superior a 1/2 que inferior.

No se ve una pauta clara en la relación funcional, como mucho a partir de una determinada densidad se percibe la rama superior de una sigmoide creciente pero la columna central de parroquias, con una basa endeble casi inexistente entre 10 y 100 hab/km^2, no favorece la determinación de la forma funcional por simple inspección. Ello conduce a que este problema sea claro candidato

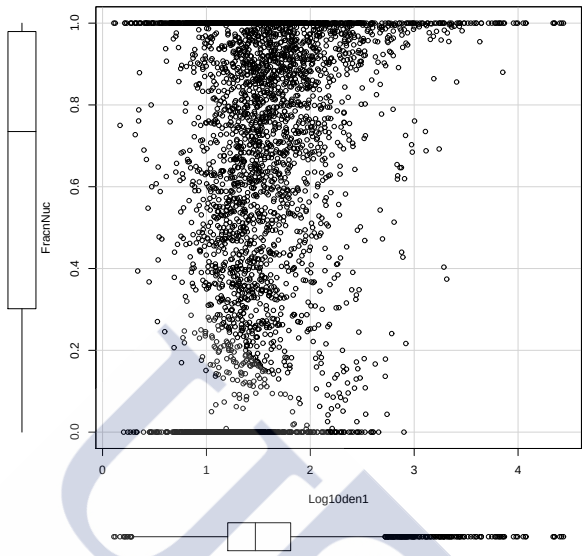


Figura 6.5: Diagrama de dispersión de la población finita

a un estudio no paramétrico de la regresión.

Como resumen, en este gran conjunto de datos se visualiza mal la tendencia. No destaca a simple vista, al menos globalmente. Por eso será interesante obtener un suavizado para resumir gráficamente la relación.

6.2.3.2. Descriptor H de la regresión

Dada la situación excepcional de este caso real, en que se dispone de los valores de la variable $\mathcal{Y}$ para todos los elementos del universo, se puede aprovechar para mostrar cuan interesante puede resultar este descriptor en estadística pública para introducirse en una difusión no convencional sobre todo si se complementa con el descriptor $S^2_{B_{x,h_n}}$.

A simple vista en la figura 6.6, se observa que la fracción promedio de población en núcleos para las parroquias de menos de 10 hab/km^2 es moderadamente superior al 50 %. Entre 10 y 100 hab/km^2 casi alcanza el 60 %. Entre 100 y 1000, supera ligeramente el 70 %. Para las parroquias de más de 1000 hab/km^2, la fracción promedio ya se aproxima al 100 %, alcanzándolo a partir de los 10.000 hab/km^2.

Este regresograma, aunque de fácil interpretación como el histograma homólogo –con el mismo ancho de banda–, presenta la imagen de una relación creciente entre la transformación logarítmica de la densidad y la fracción de población en núcleos, esta última pasa de un poco más de la mitad a alcanzar la unidad a lo largo de los diferentes intervalos de forma monótona.

Es lo que cabría esperar antes de analizar la fracción en núcleos y la densidad de población como indicadores del proceso de urbanización. No obstante, se verá a continuación que la realidad gallega es más compleja.

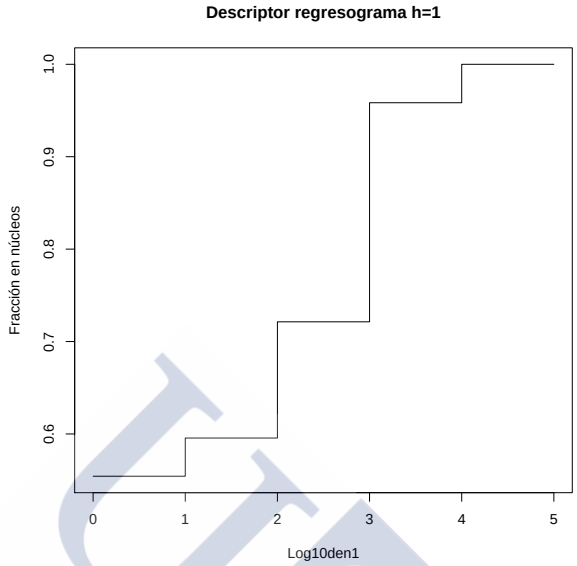


Figura 6.6: Descriptor regresograma para $h_n = 1$

Si se reduce el ancho de banda, por ejemplo, a $h_n = 0'5$ se obtiene una información mucho más rica del fenómeno, la relación deja de ser monótona, con un mínimo en torno a los 10 hab/km^2 y no hay parroquias en la última celdilla, la que tiene por extremo superior los 100.000 hab/km^2, como se había hecho notar en el histograma homólogo. Todo esto se puede observar en la figura 6.7.

A la vista de los dos ejemplos anteriores, se observa que este diagrama es prácticamente equivalente a lo que se suele denominar *cuadro* o *tabla de magnitudes* en estadística pública, como contraposición al cuadro de recuentos antes citado, en este caso, la variable de clasificación sería una de intensidad: la transformación de la densidad de población.

Aprovechando que está disponible la variable $\mathcal{Y}$ de estos datos reales, se puede mostrar la utilidad de otro descriptor como es $S^2_{B_{x,h_n}}$. Para ello se podría calcularlo para las diferentes x con $h_n = 1$ y $h_n = 0'5$.

Estos descriptores funcionan como estimadores de $\sigma^2(x)$ según el modelo si $\sigma(x)$ es continua. Si no lo es, sobreestiman el promedio de las varianzas en las abscisas de la celdilla. Para la primera ventana, el descriptor también es monótono como el regresograma homólogo, aunque decreciente, mientras que para la segunda también se rompe la monotonía.

Donde existe más variabilidad es en las parroquias menos densamente pobladas, y donde menos, en las más pobladas. En cualquiera de ambos casos, resulta patente la existencia de heteroscedasticidad. El máximo que puede tomar este descriptor es ligeramente superior a 0'25 ($0'25N_x/(N_x - 1)$).

Todo lo anterior se podría presentar en un formato tabular como en el cuadro 6.4 de donde se podría extraer alguna información adicional como que las parroquias que superan los 1000 hab/km^2 tienen una media de las fracciones superior al 95 %.

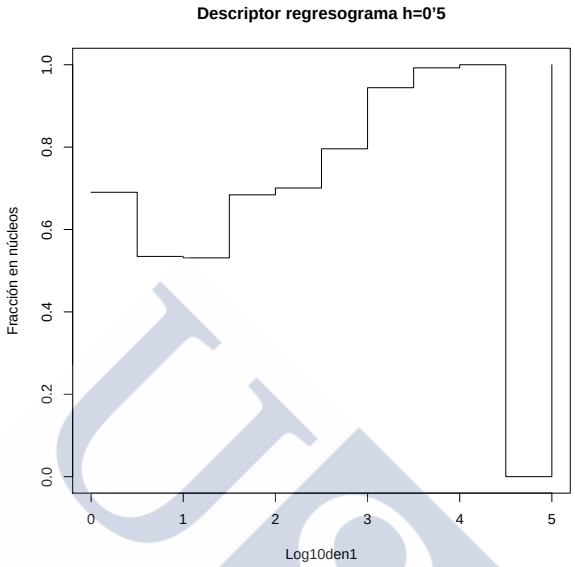


Figura 6.7: Descriptor regresograma para $h_n = 0'5$

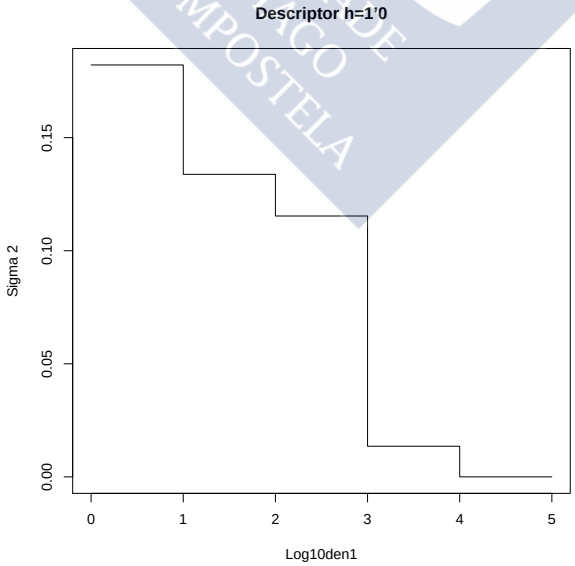


Figura 6.8: Descriptor $S^2_{B_{x,h}}$ para $h_n = 1'0$

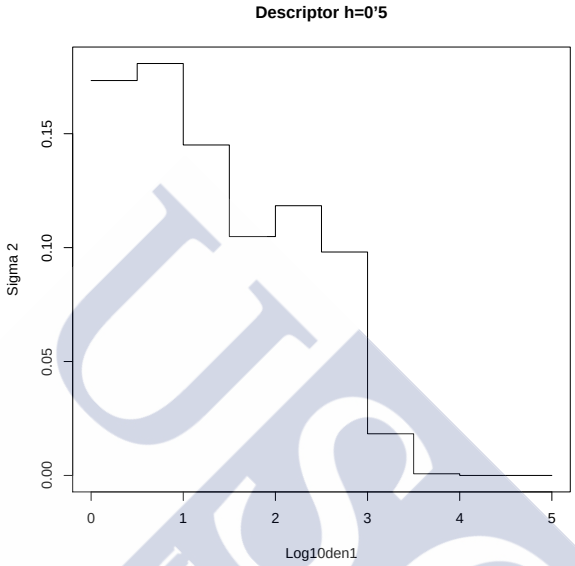


Figura 6.9: Descriptor $S^2_{B_{x,h}}$ para $h_n = 0'5$

Celdilla	N_x	$f_H(x)$	$\alpha_H(x)$	$S^2_{B_{xh}}$
$(0,1]$	437	0'1154	0'5543	0'1821
$(1,2]$	2707	0'7146	0'5956	0'1338
$(2,3]$	560	0'1478	0'7213	0'1154
$(3,4]$	75	0'0198	0'9584	0'0135
$(4,5]$	9	0'0024	1	0

Cuadro 6.4: Descriptores

6.3. Estudio de la muestra

En esta sección y en las sucesivas, se emplearán núcleos de soporte compacto para que resulte más fácil comparar los estimadores.

6.3.1. Histograma de la muestra

Obsérvese que en un caso real diferente de este no se podrían calcular los descriptores anteriores porque se desconocería el valor de $\mathcal{Y}$ para todas las unidades de la p.f.. Por ello, en otro estudio referido a este mismo tema podría ser necesario extraer una muestra. Con ánimo de analizar el método que se seguiría, se ha extraído una muestra aleatoria simple sin reemplazamiento de tamaño $n = 300$. Como se está considerando la fracción de habitantes en núcleos de población, en este caso $\mathcal{Y}$ sería positiva y estaría mayorada por la unidad. En la figura 6.10, se presenta un histograma con ancho de banda unidad.

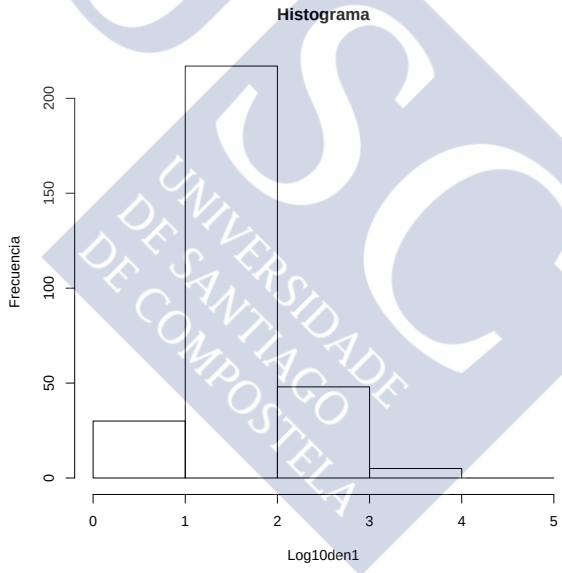


Figura 6.10: Histograma de la muestra

Se observa, en la muestra, que menos de 50 parroquias no superan los 10 hab/km^2, más de 2/3, están entre 10 y 100 hab/km^2. Y entre 100 y 1000, existen algo más de 50, superando el resto los 1000 hab/km^2. No existen en la muestra parroquias de más de 10.000 hab/km^2. Por último, la moda y la mediana también se encuentran en el intervalo (1, 2].

6.3.2. Estimador PR del relieve

Si se considera una ventana reducida comienzan a aparecer modas locales y numerosos puntos angulosos en el estimador. A modo de ejemplo, para $h_n = 0'05$ se tiene la figura 6.11.

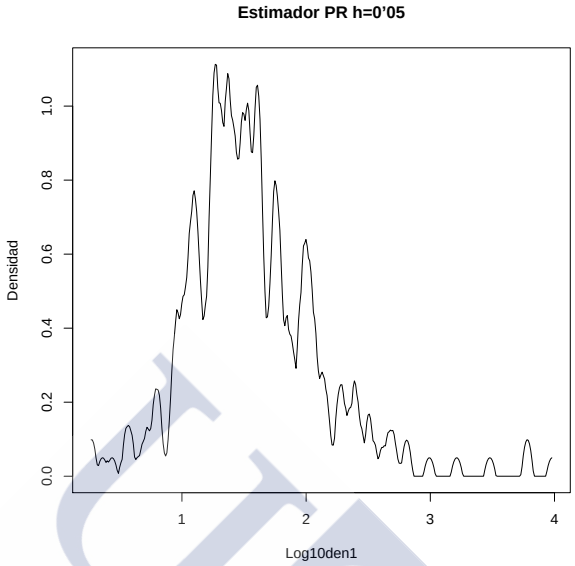


Figura 6.11: Estimador $\hat{f}_S(x)$ para $h_n = 0'05$

Este gráfico, que muestra una marcada infrasuavización y, en principio, parece carecer completamente de valor, puede perfectamente utilizarse, junto con otras técnicas, en el proceso de depuración de la muestra ya que está revelando entornos vacíos, donde el estimador es nulo, que evidentemente deben ser estudiados. Quizás sean sólo efecto de la variabilidad muestral, no obstante podrían reflejar recorridos vacíos dentro del marco, lo que desde luego merecería un estudio más detenido.

6.4. Estimador H de la regresión

A la vista de la figura 6.12 y el cuadro 6.5, se observa que la media de las fracciones de las parroquias menos pobladas (hasta 10 hab/km^2) en la muestra es ligeramente superior al 60 %; entre 10 y 100 hab/km^2, es ligeramente inferior; entre 100 y 1000 supera el 70 % y, por último, entre 1000 y 10.000, alcanza el 100 %.

Se verá en secciones posteriores la razón de que la elección de la banda para este estimador venga mediatizada por la de $\hat{S}^2_{B_{x,h_n}}$. Se considerará $h_H = 1$ como banda piloto porque es necesario un cierto número de puntos muestrales para calcular $\hat{S}^2_{B_{x,h_H}}$ de tal modo que ofrezca una estimación estable de la varianza $\sigma^2(x)$. Para esta ventana, ya aparece una celdilla con solo 5 abscisas muestrales aunque corresponde al tramo próximo a la saturación y en la primera, con 30 unidades, ya se observa una clara subestimación de $S^2_{B_{x,h_H}}$.

Comparando ambas tablas, se observa la proximidad entre el descriptor y el estimador de la varianza en las dos celdillas centrales, donde se encasillan más elementos de la muestra, frente a las dos adyacentes donde la muestra es más reducida. También se puede utilizar el estimador $\hat{S}^2_{B_{x,h_n}}$ para explorar la muestra como se presenta en la figura 6.13. La combinación de ambos

Celdilla	n_x	$\hat{f}_H(x)$	$\hat{\alpha}_H(x)$	$\hat{S}^2_{B_{xh}}$
$(0,1]$	30	0'1000	0'6140	0'1560
$(1,2]$	217	0'7233	0'5926	0'1370
$(2,3]$	48	0'1600	0'7202	0'1139
$(3,4]$	5	0'0167	1	0
$(4,5]$	0	0	0	0

Cuadro 6.5: Estimadores

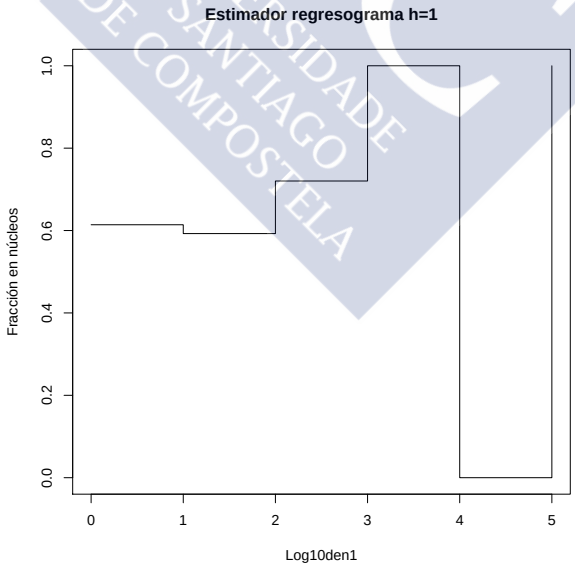


Figura 6.12: Estimador regresograma para $h_n = 1$

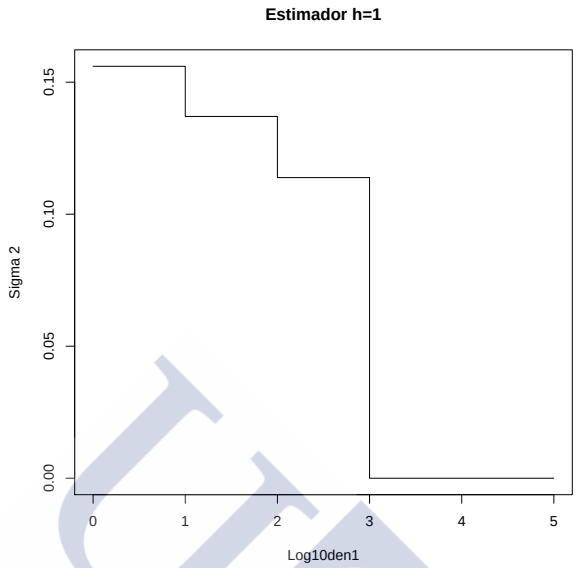


Figura 6.13: Estimador $\hat{S}^2_{B_{x,h_n}}$ para $h_n = 1$

estimadores $\hat{\alpha}_H(x)$ y $\hat{S}^2_{B_{xh}}$ permite realizarla de un modo cómodo. Otro instrumento para esta exploración, el diagrama de dispersión muestral, se puede ver en varios gráficos posteriores junto con diferentes estimas de la función de regresión, por ejemplo, en la figura 6.14.

6.5. Estimador S

6.5.1. Sintonización

Desde el punto de vista explicativo, el proceso paulatino de selección de la ventana, que se puede denominar *sintonización*, es muy ilustrativo y se puede orientar mediante representaciones gráficas y el conocimiento a priori del problema (v.g. facilidad de interpretación, disposición de una variable previa, monotonía, tramos de la función de regresión...).

Frente a que se le pueda objetar cierto grado de subjetividad, se verá mediante este caso real que la sintonización resulta útil en la estadística pública porque ilumina el fenómeno objeto de estudio y origina subproductos con interés propio.

Cuando se supone suavidad en α y se utiliza un suavizador propio, es deseable que la estima resultante también sea suave. La definición del estimador $\hat{\alpha}_S$ implica que, cuando la ventana se reduce, la posibilidad de simas se incrementa, con la consecuencia de que se vuelva abrupto localmente, al igual que la de tramos constantes.

En otras palabras, las definiciones de los suavizadores que se introdujeron en los capítulos anteriores reconocen cuando el tamaño del colectivo es demasiado pequeño localmente para la ventana en cuestión. Un criterio práctico de sintonización consistiría en seleccionar una ventana lo más pequeña posible pero evitando las simas, que podrían, incluso, representar desconexión entre

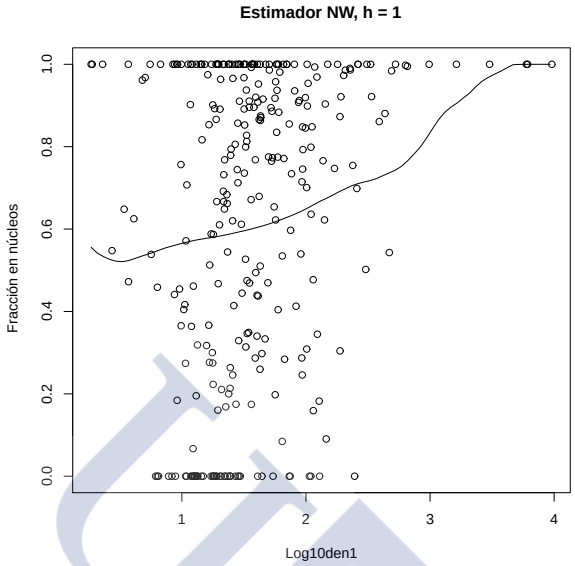


Figura 6.14: Estimador de Nadaraya-Watson de Y para $h_n = 1$

tramos donde el comportamiento de la función de regresión sea diferente. No es el caso de esta muestra.

De otra índole sería evitar los tramos constantes, que constituyen una especie de retorno al suavizador impropio aunque convendría distinguir si los tramos se producen en una región con $f(x) > 0$, en cuyo caso deberían evitarse, o en una donde $f(x)$ pudiera ser nula.

La mencionada figura 6.14 presenta una estima $\hat{\alpha}_S$ de la regresión para $h_n = 1$. Constituye un ejemplo claro de sobresuavizado y, aun así, se manifiesta de modo tenue la falta de monotonía en la relación entre la fracción en núcleos y la transformación de la densidad de población.

Por otra parte, la figura 6.15 muestra un claro ejemplo de infrasuavizado. Además de los puntos angulosos, existen multitud de máximos y mínimos locales y aparecen dos simas debidas a la falta de abscisas. Es decir, reflejan intervalos sin datos donde el estimador acaba anulándose, por definición.

De cualquier forma, se observa que la infrasuavización puede tener una finalidad depurativa de los datos puesto que permite detectar de un modo evidente entornos vacíos. Este es un ejemplo claro de los subproductos antes comentados.

En este caso concreto, ninguna sima se confirma como un recorrido vacío en el descriptor homólogo. Aunque sí aparece uno diferente, un intervalo a partir del cual el diseño es ralo y, en principio, no se puede aplicar directamente los resultados obtenidos para el estimador porque $f(x)$ podría ser nula. Esta situación mostraría que el recorrido de $\mathcal{X}$ presenta desconexiones que podrían significar un tramo donde la curva de regresión se comporta de modo distinto. Es decir, podría estar mostrando subpoblaciones diferenciadas, en este caso la de parroquias muy densamente pobladas y con toda su población en núcleo.

La *modulación* del estimador es el conjunto de operaciones destinadas a conducirlo a un estado

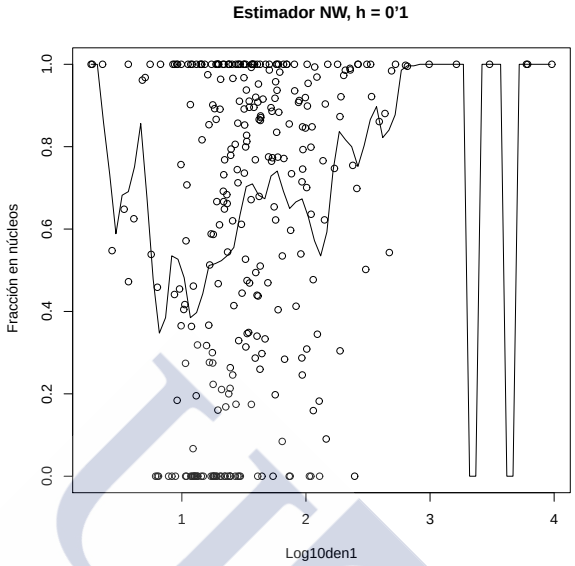


Figura 6.15: Estimador de Nadaraya-Watson de Y para $h_n = 0'1$

conveniente para su empleo. Es decir, que proporcione estimas prescritas, correspondientes a valores dados del parámetro. Para este estimador, consiste en seleccionar una ventana adecuada. Esta modulación puede ser automática o asistida. La opción manual estaría muy relacionada con lo tratado anteriormente en esta sección.

Históricamente han primado los métodos de selección analíticos (vía fórmulas aproximadas tras determinar características asintóticas, algoritmos...) podría ser interesante introducir alguno de carácter sintético, por ejemplo, geométrico. Un gráfico transmite mucha más información, a través de su morfología y tamaños relativos, que una lista de estadísticos resumen.

También primaba la información de la variable de interés en la muestra; decisión lógica cuando solo se dispone de esos valores. No obstante, en numerosas ocasiones como esta, se dispone de una variable previa en el marco para todo el universo, la densidad de población transformada.

Por eso, interesa modular el estimador antes de pasar a utilizarlo. Se introducirán dos técnicas, una asistida geométricamente y otra automática. Ambas persiguen que el estimador resulte, en cierto sentido, equilibrado con relación a la variable previa del marco.

Estas técnicas son válidas tanto para muestras de tamaño grande como reducido, "infinitas" y "finitas". La primera tendrá un marcado carácter sintético y empleará la información disponible en el marco para la muestra y la segunda se extiende a toda la información disponible, muestra y comuestra.

6.5.2. Selección asistida

Sería conveniente proporcionar estimas próximas a valores conocidos previamente para algún ejemplo notable. El estimador $\hat{\alpha}_S$ se modula mediante el modelo $\alpha(x) = x$ con $\sigma(x) = 0$. Para ver como se comporta con esta función (la más sencilla después de la función constante) se puede

emplear solo la propia muestra o todo el universo si está disponible en el marco.

La estima prescrita debería ser el propio valor conocido de x. Pero este suavizador es dependiente del diseño, en concreto a través de $f'(\cdot)$ en la expresión asintótica de su sesgo. Si se considera $\alpha(x) = x$, el sesgo asintótico es $h_n^2\alpha_2(K)$ por la derivada del logaritmo del relieve y el ECM asintótico es

$$\left(\frac{h_n^2}{2}\alpha_2(K)\left(0 + 2\cdot 1\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\right)^2 + 0 = h_n^4\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2\alpha_2^2(K) = h_n^4\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)\right)^2\alpha_2^2(K).$$

Elegir una ventana demasiado estrecha conlleva que se empleen pocas observaciones en el promedio ponderado local, lo que implica que la fracción en núcleos se vea expuesta a la variabilidad muestral, sin embargo afecta en menor medida a la propia Log10den1 cuando se utiliza un núcleo de soporte compacto, porque los valores que puede tomar son muy próximos al punto focal.

Si la banda es demasiado ancha se emplean muchas observaciones en el promedio y las estimas para la fracción en núcleos se sobresuavizan mientras que en las de Log10den1 se manifiesta con claridad que el suavizador es dependiente del diseño.

Nunca puede llegar a reproducir las abscisas de la muestra puesto que, por así decirlo, la propia definición del estimador lo defiende de ventanas excesivamente reducidas, es decir, de incrementar la varianza a costa de casi eliminar el sesgo.

Como ejemplo de este procedimiento semiautomático de selección de la ventana, apoyado geométricamente, considérese $h_n = 0'25$. Se obtiene la estima de la figura 6.16. En este diagrama se percibe que el error sistemático es menor que en el siguiente, donde se emplea una ventana más ancha.

Además, en el segundo de ellos, los errores sistemáticos actúan en un solo sentido mientras que en el primero lo hacen, en ambos sentidos. La diagonal principal actúa como 'benchmark'. Una buena línea de regresión no debería presentar un número muy dispar de valores estimados por exceso y por defecto, ni estos deberían seguir una pauta.

Se podría argumentar que esta técnica tendería a ventanas angostas y, por tanto, a primar la reducción del sesgo a costa del incremento de la varianza. No obstante, por una parte, la varianza en este caso está, hasta cierto punto, controlada porque $\mathcal{Y}$ está acotada y, por otra, la propia definición del estimador no permite una reducción progresiva de la ventana, de tal modo que cuando aparezcan simas se debe ampliar. Con el 'benchmark' diagonal, se presenta un ejemplo de infrasuavizado en la figura 6.18.

Del mismo modo se podría tomar esta decisión, aunque fuera a cambio de una cierta pérdida de optimalidad, si se presentaran tramos constantes porque estaría mostrando pocas abscisas, en concreto 1 para este estimador. Si la variable previa de la comuestra está incluida en el marco, como es este caso, se puede comprobar si los escalones en la figura 6.19 aparecen en el tramo en que se pueda considerar que la densidad del diseño es nula.

6.5.3. Selección automática

La selección asistida se podría traducir aritméticamente, aunque con una pérdida como sucede con todas las traducciones, introduciendo una serie de estadísticos que compararan la $\mathcal{X}$ y la $\mathcal{X}$

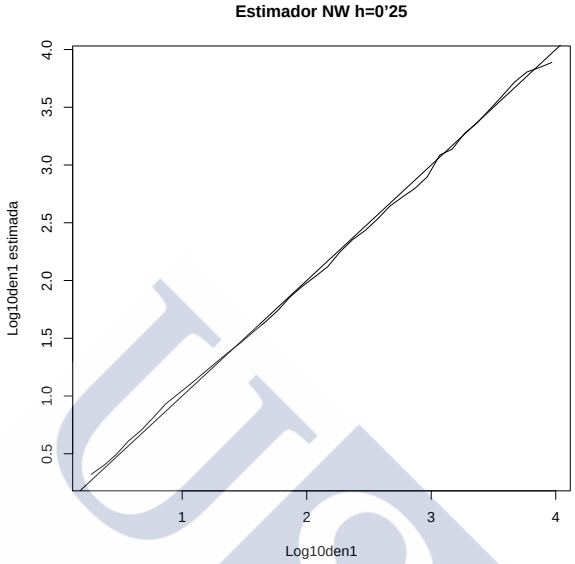


Figura 6.16: Estimador $\alpha_S^{[X]}(x)$ para $h_n = 0'25$

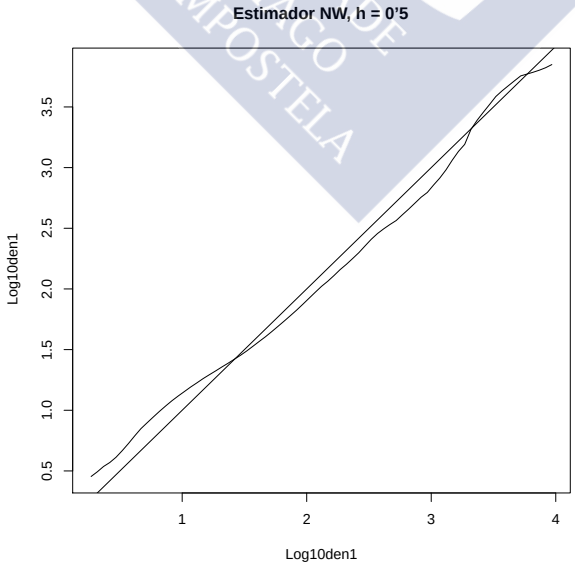


Figura 6.17: Estimador $\alpha_S^{[X]}(x)$ para $h_n = 0'5$

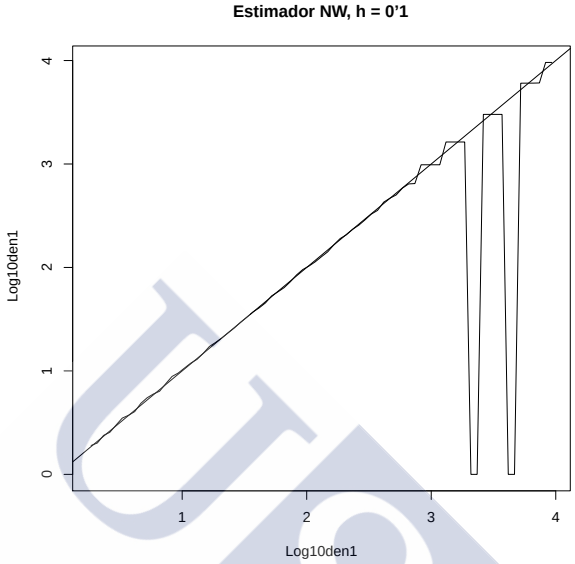


Figura 6.18: Estimador $\alpha_S^{[X]}(x)$ para $h_n = 0'1$

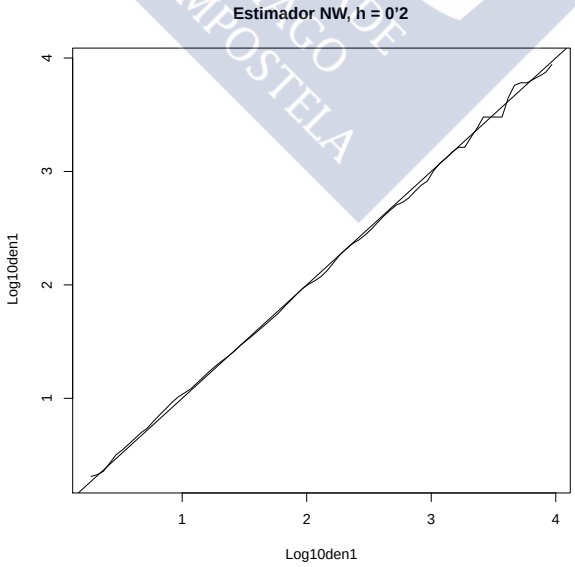


Figura 6.19: Estimador $\alpha_S^{[X]}(x)$ para $h_n = 0'2$

Ventana	SCEx	Coef. correlación
0'1	48'9825	0'7473
0'15	0'1019	0'9994
0'2	0'0709	0'99965
0'25	0'1015	0'99955
0'3	0'1823	0'9992

Cuadro 6.6: Criterios aritméticos malla

Ventana	SCRes	Coef. correlación
0'1	174'8209	0'9211
0'2	1'5800	0'9996
0'225	2'2232	0'9995
0'25	3'1212	0'9994
0'275	4'3178	0'9991

Cuadro 6.7: Criterios aritméticos marco

estimada en una malla regular, por ejemplo de amplitud 0'05, mediante otros criterios menos visuales, aunque más familiares, como una suma de cuadrados moderada o un coeficiente de correlación entre $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ estimada próximo a 1.

Si $\alpha(x) = x$ y $\sigma(x) = 0$ entonces la relación es perfecta y sería deseable que

$$\hat{\alpha}_S^{[X]}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i K_{hi} I_i}{\sum_{i=1}^{N} K_{hi} I_i}$$

fuera igual a x, sin embargo no se verifica esta igualdad en general. Se denominará *excentricidad* a $\hat{\alpha}_S^{[X]}(x) - x$. Como en este capítulo se está considerando núcleos de soporte compacto, la excentricidad es igual a $\tilde{x}_{V_{xh}} - x$ donde $\tilde{x}_{V_{xh}}$ es la media ponderada de las abscisas de la muestra que se encuentran dentro del entorno de x de radio h_n que, en principio, no es necesariamente igual a x.

Estos criterios dependen de los valores de la variable previa en la muestra, en concreto de sus mínimo y máximo. También dependen de la amplitud de la malla. Además, se prescincirá de dos bandas de anchura h_n, una a la derecha del mínimo y otra a la izquierda del máximo para mitigar el posible efecto colas. El resultado de la búsqueda por bisección cuando se emplea la malla de amplitud $0'05$ se presenta en el cuadro 6.6 donde con SCEx se denota la suma de cuadrados de las excentricidades.

Con ánimo de resolver el problema de la discrecionalidad en la elección de la malla y de la dependencia del mínimo y máximo de las abscisas de la muestra, se puede considerar los valores de la variable previa para todos los elementos del universo si se dispone de ellos en el marco, exceptuando también las dos bandas mencionadas. Entonces la SCEx tomaría la forma, en cierto modo, de suma de cuadrados de los residuos (SCRes). En el caso de $h_n = 0'1$, se observa, figura 6.20, una clara infrasuavización. El resultado de la búsqueda dicotómica si se emplea el

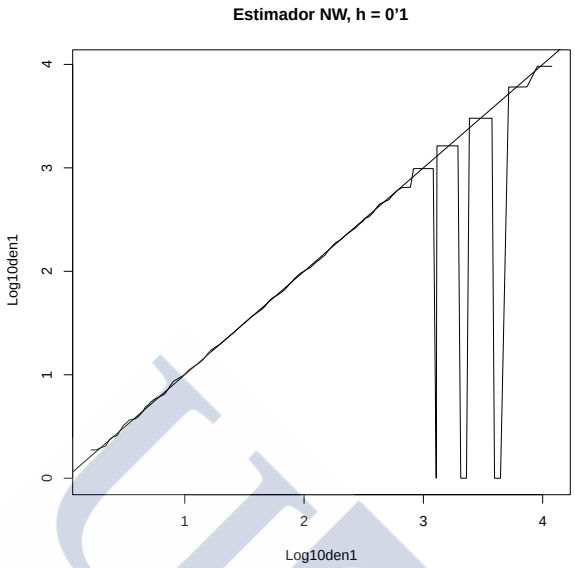


Figura 6.20: Estima de X con todo el marco para $h_n = 0'1$

propio marco completo se presenta en el cuadro 6.7. Se confirma $h_n = 0'2$ como candidata y se denominará ventana *automática*.

Para esta candidata $h_n = 0'2$, obsérvese en la figura 6.21 el efecto colas con los tramos constantes debido a la menor densidad de puntos del diseño que se acentúa en la muestra, por estar en la región de atípicos. Con la malla regular se aprecia mejor por depender, en parte, de ella, véase figura 6.19. Sin embargo, con un coeficiente de correlación casi del mismo orden, $h_n = 0'25$ reduce este problema como se puede ver en la figura 6.22 –donde ya solo se aprecia un pico– o, incluso, una ligeramente mayor como $h_n = 0'275$ como solución de *compromiso*.

Recuérdese que lo que resulta óptimo o admisible para un criterio puede no serlo para otro como es, en este caso, el de la suavidad resultante, sobre todo cuando el criterio es de orden global, como los dos estadísticos que se emplean, SCEx y coeficiente de correlación. Por tanto, pueden existir puntos o regiones donde no sea totalmente recomendable. He aquí una pérdida de la traducción aritmética. También se podría pensar en dividir el problema en dos regiones, y realizar ajustes diferentes aunque esto rebasa el tema que se está investigando.

6.6. Estimador L

El criterio automático es de carácter global. Este criterio asistido visualmente con ayuda del gráfico resulta una síntesis entre la selección global y local. Permite hacerse una idea del ajuste global pero manifestando problemas de suavidad en ciertos puntos o regiones. No obstante, modificar el estimador permite realizar un ajuste local pero basándose ambos en la misma idea, los primeros buscan que $\hat{\alpha}_S$ sea lo más equilibrado posible, ajustando la ventana, y el segundo parte de que no es equilibrado y lo reequilibra en cada punto. De hecho el nuevo estimador obtenido reproduce la variable previa independientemente de la ventana escogida, es decir, resulta

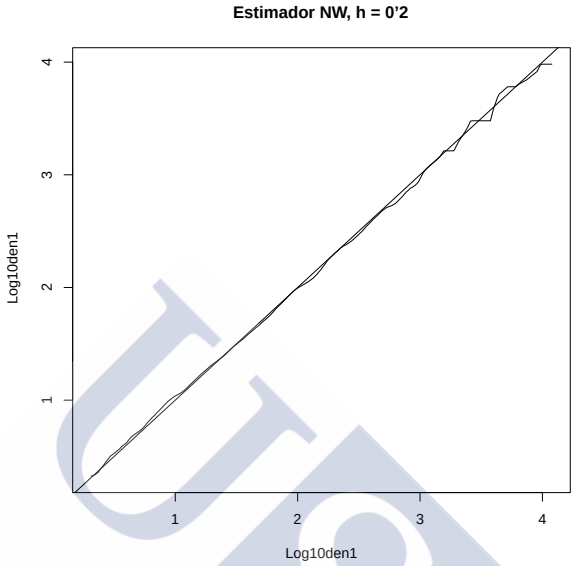


Figura 6.21: Estima de X con todo el marco para $h_n = 0'2$

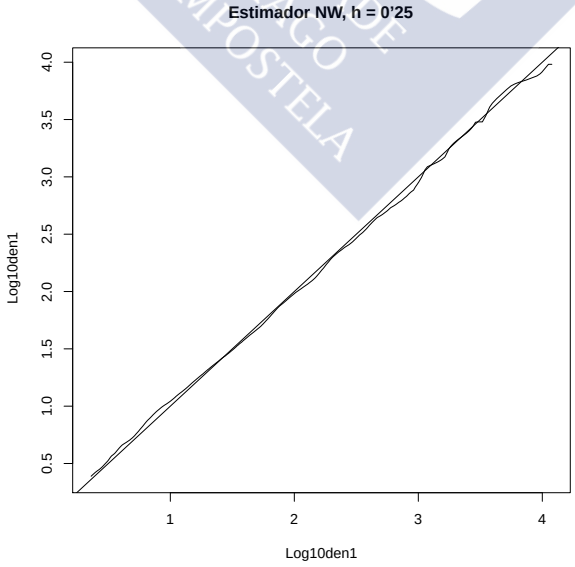


Figura 6.22: Estima de X con todo el marco para $h_n = 0'25$

equilibrado, excepto cuando no exista ningún elemento o sólo exista uno, x_j, en V_{x,h_n}. En este segundo caso, solo la reproduce en el propio x_j.

La excentricidad positiva se produce cuando el estimador $\hat{\alpha}_S$ aplicado a la variable $\mathcal{X}$ aproxima x por exceso. Cuando es negativa, aproxima x por defecto. Si la excentricidad en un punto x es positiva y α es creciente en él, se debería corregir a la baja el estimador $\hat{\alpha}_S(x)$, por el contrario, si α es decreciente, se debería corregir al alza en x. De modo análogo, pero actuando de forma inversa, si la excentricidad es negativa.

La idea consiste en que si la excentricidad es grande y, por ejemplo, positiva, el estimador $\hat{\alpha}_S(x)$ está cometiendo un error sistemático por exceso si α es creciente, debido al efecto del diseño, por ese motivo $\hat{\alpha}_L(x)$ lo corrige a la baja localmente.

El estimador $\hat{\alpha}_S$, aun después de modularlo, ni está equilibrado en todo el conjunto inicial ni tiene en cuenta como varía $\mathcal{Y}$ cuando $\mathcal{X}$ también varía, ni en módulo ni en signo, por ello una solución mejor será considerar localmente esta variación relativa. Existe, pues, otra alternativa a la modulación de $\hat{\alpha}_S$ mediante la ventana, consiste en la corrección local de su desequilibrio.

6.6.1. Estimador compensatorio

Escoger la ventana de tal modo que $\hat{\alpha}_S^{[X]}(x) - x$ sea casi nulo –sin las consabidas simas– es una suerte de ajuste global del estimador. Pero hay otra solución posible de carácter local como es la corrección local. Se va a compensar el desequilibrio de $\hat{\alpha}_S$ estimando la corrección local necesaria, es decir, se reequilibra con respecto a la excentricidad de las abscisas en torno de x, $\tilde{x}_{V_{xh}} - x$ porque se están considerando núcleos de soporte compacto, utilizando un estimador de la variación relativa local de α a partir de la muestra. La compensación es el resultado de multiplicar dos componentes, $\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x)$ y $\hat{\beta}_L(x)$, relacionadas con la excentricidad y la variación relativa, respectivamente.

6.6.1.1. Revisita a la selección asistida

Una de las imperfecciones del estimador S proviene de lo que se ha denominado excentricidad de los puntos del diseño dentro de la ventana, que es otra manifestación de que ese estimador no esté equilibrado, en un sentido funcional, con relación a la variable previa del marco. El criterio gráfico empleado para ajustar $\hat{\alpha}_S$ se puede reforzar mediante su estudio.

Si se quiere estimar la fracción en núcleos para una x concreta, se podría escoger aquella h_n que haga mínima la excentricidad $\arg_{h_n} \min \left|\hat{\alpha}_S^{[X]}(x) - x\right| = \arg_{h_n} \min |\tilde{x}_{V_{xh}} - x|$ porque el núcleo es de soporte compacto. Es decir, se escogería aquella ventana que o bien hiciera equilibrado el estimador o bien, en su defecto, el que diera lugar a un desequilibrio menor.

Este criterio que podría resultar interesante de modo local, si se utilizara de modo global, conduciría a emplear distintas h_n para abscisas diferentes, cuestión que también trasciende el contenido de esta investigación.

La representación gráfica de $\hat{\alpha}_S^{[X]} - x$ permite ver la magnitud y signo de la excentricidad, así como observar tendencias. En la figura 6.23, existen tres puntos en que $\hat{\alpha}_S$ está equilibrado localmente, son aquellos donde coincidiría con la diagonal, $\hat{\alpha}_S^{[X]} = x$. Se observa también dos

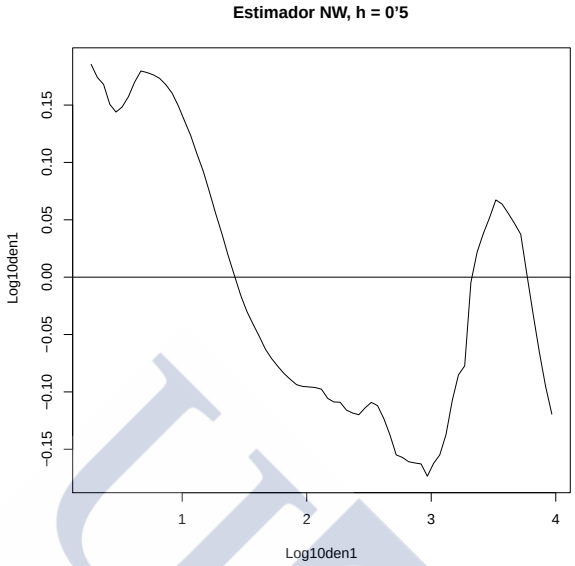


Figura 6.23: Estima de la excentricidad para $h_n = 0'5$

zonas de gran excentricidad de signo contrario es decir, presenta una pauta clara.

El objetivo perseguido consiste en que la técnica no paramétrica capte en lo posible la pauta en los datos originales y se la transfiera a los estimados. La ausencia de una pauta en las excentricidades es un criterio informal que indica que la modulación es adecuada.

Para una ventana menor como en la figura 6.24, la excentricidad se reduce notablemente (en módulo se pasa de 0'15 a 0'05) y comienza a romperse la pauta. Aumentan los puntos de equilibrio local (en concreto, 9).

El criterio gráfico de confrontar con la diagonal principal tiene su paralelo para esta estima en el de comparación con cero. Si en el primero, se debe aproximar lo más posible a la diagonal, en el segundo, debe ser casi nulo. Se ha rotado el 'benchmark' de la recta isogonal al eje de abscisas.

Obsérvese que las sumas de cuadrados SCEx y SCRes no son más que $\left\|\hat{X} - X\right\|_2^2$, el cuadrado de la norma euclídea del vector de excentricidades de las abscisas de la malla o del marco, respectivamente.

Desde el punto de vista geométrico, se observa que la automática $h_n = 0'2$ es una candidata a ventana óptima con este criterio por la figura 6.25, aunque se manifiesta un sospechoso diente de sierra, casi perfecto, al final en la región de poca densidad del diseño y vestigios de él para $h_n = 0'25$. Esto corroboraría la elección más prudente de una ventana ligeramente más amplia $h_n = 0'275$.

Quizás desde la óptica de la estadística pública haya que optar por una solución de compromiso, es decir, una ventana próxima a la posible candidata por selección automática pero redondeada y con un comportamiento geométrico adecuado, sin escalones, que además resulta más acorde para aproximar las derivadas de α.

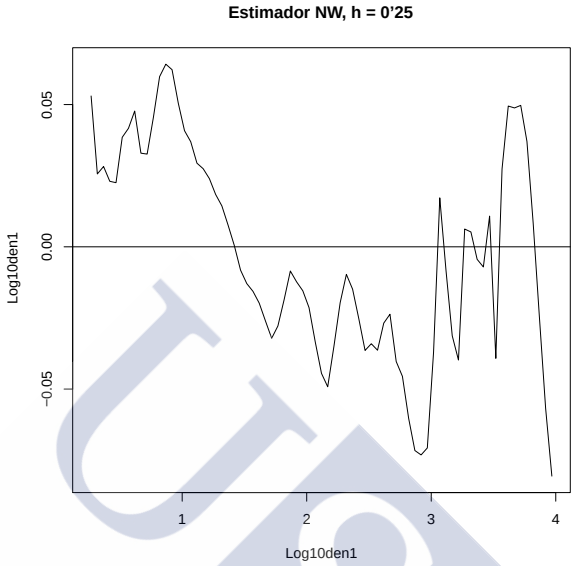


Figura 6.24: Estima de la excentricidad para $h_n = 0'25$

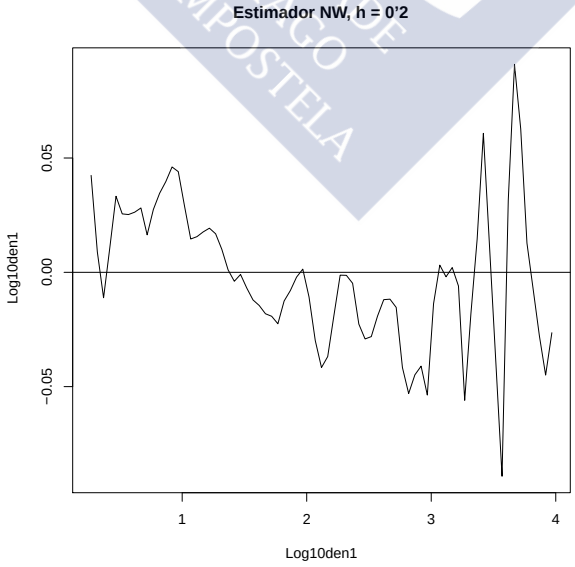


Figura 6.25: Estimador de la excentricidad para $h_n = 0'2$

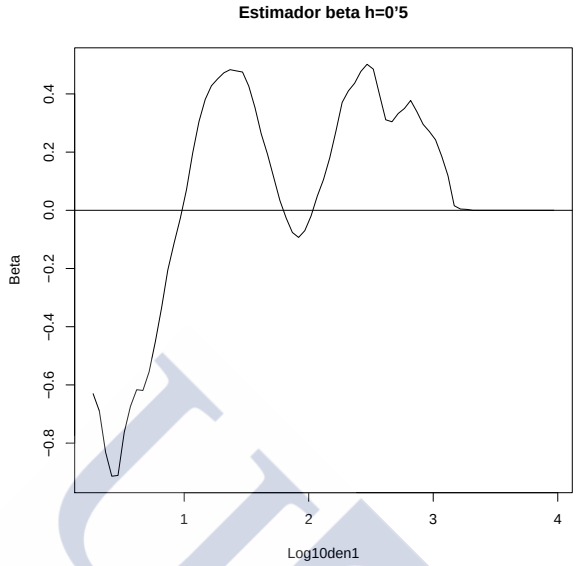


Figura 6.26: Estimador beta de Y para $h_n = 0'5$

6.6.1.2. Componente alfa

Si existe alguna abscisa de la muestra dentro del entorno de x, obsérvese que la excentricidad coincide con la componente

$$\hat{\alpha}_S^{[X-x]}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)K_{hi}I_i}{\sum_{i=1}^{N}K_{hi}I_i},$$

que debería ser casi nula. En caso de que no exista ninguna, no existe compensación. Del mismo modo que tampoco la hay si solo existe una abscisa dentro del entorno de x porque, en esta situación, no se puede estimar la variación relativa en x.

6.6.1.3. Componente beta

Se estimará la variación relativa local a partir de la muestra como promedio de las variaciones relativas por pares. Las ponderaciones dependen de la diferencia con x –como se emplean núcleos simétricos, la distancia– y de la distancia mutua entre las abscisas de cada par. Este estimador constituye en si mismo una medida de suavidad. En un punto estacionario, la variación relativa es muy pequeña por tanto esta componente sería casi nula.

Desde el punto de vista de esta componente de la compensación, se tiene el gráfico de la figura 6.26, con una malla regular para su trazado, que presenta una estima para una ventana intermedia cuyo descriptor homólogo se presenta en la figura 6.27. Obsérvese que, según el estimador, a partir de 3 casi no hay corrección en la estima $\hat{\alpha}_L$ con respecto a $\hat{\alpha}_S$, a diferencia del descriptor.

Lo que podría provocar en este caso particular que, aunque presente escalones, se pueda consi-

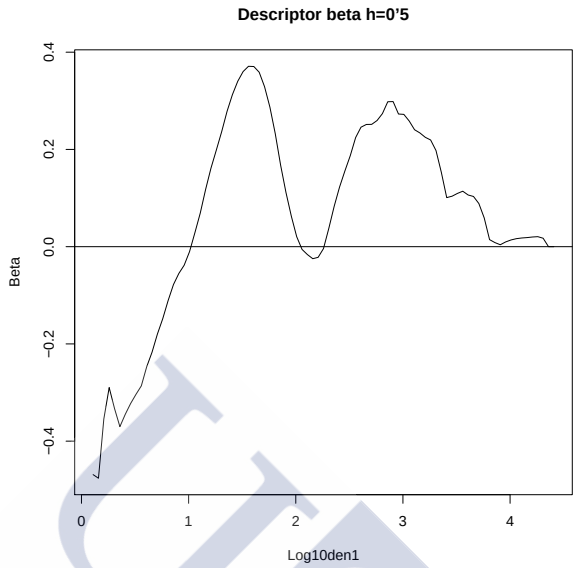


Figura 6.27: Descriptor beta de Y para $h_n = 0'5$

derar $h_n = 0'2$ por coincidir los escalones con el tramo en que la variación relativa en la muestra es nula, no obstante supone una vuelta al NW.

6.6.2. Sintonización

Con el estudio de $\hat{\alpha}_S^{[X-x]}$ y $\hat{\beta}_L$ se puede conocer de modo aproximado donde corrige $\hat{\alpha}_L$ la estima de $\hat{\alpha}_S$. Donde no hay excentricidad no existe corrección, donde existe un punto estacionario, tampoco.

A diferencia del $\hat{\alpha}_S$, la selección de la ventana para $\hat{\alpha}_L$ está mediatizada por la buena especificación del estimador, la estima de la fracción que vive en núcleos no puede rebasar la unidad. Existe un problema de esta índole, fruto del empleo de mínimos cuadrados ponderados locales, al predecir fracciones superiores a la unidad. En el caso de $\hat{\alpha}_{(\cdot)}$ con H o S, no existe tal problema por ser esencialmente un promedio.

Por el conocimiento previo de este estimador, la ventana que resulte del proceso de sintonización debe garantizar que no se produzcan simas pero también que esté bien especificado. En la figura 6.28 se presenta un ejemplo de sobresuavizado que muestra el inequívoco perfil no monótono de la relación entre la fracción en núcleos y la transformación de la densidad de población.

6.6.3. Selección asistida

Dado que $\hat{\beta}_L(x) = 1$ y $\hat{\alpha}_L(x) = x$ cuando $\alpha(x) = x$ y $\sigma(x) = 0$, este ejemplo notable no sirve para modular este estimador $\hat{\alpha}_L$. Más aún, para cualquier muestra aleatoria simple $\hat{\alpha}_L$ ajusta exactamente rectas siempre que existan dos o más abscisas muestrales dentro de cada entorno V_{x,h_n}. Por tanto, hay que buscar otro ejemplo notable para la modulación. Este se consigue con

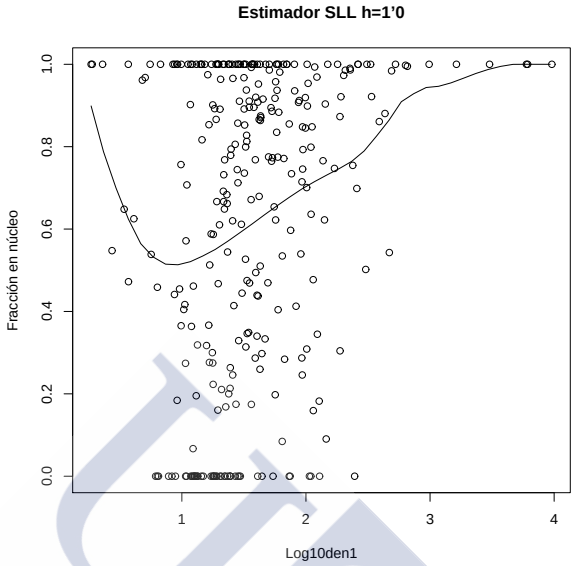


Figura 6.28: Estimador suavizador lineal local para $h_n = 1$

$\alpha(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $\sigma(x) = 0$, en este caso $\hat{\beta}_L(x)$ debería ser igual a x. Para ver esto obsérvese que

$$\left(\frac{x_i^2}{2} - \frac{x_j^2}{2}\right)(x_i - x_j) = \left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)(x_i - x_j)^2$$

Si la ventana es pequeña, $\frac{x_i+x_j}{2} \approx x$, sin embargo si es grande, pueden diferir notablemente.

Por consiguiente, se puede seleccionar h_n para que $\hat{\beta}_L(x)$ esté equilibrado con la cortapisa de que no se anule innecesariamente. Esta elección constituye, desde luego, una candidata a ventana piloto para estimar $\alpha'(x)$ en la expresión aproximada del sesgo de $\hat{\alpha}_H$ y, también, base en la diferenciación numérica para aproximar $\alpha''(x)$.

Si para los puntos x de un intervalo del dominio de $\mathcal{X}$ solo existen dos abscisas muestrales en su entorno, $x_i, x_j \in V_{x,h_n}$ el estimador $\hat{\alpha}_S^{[X]}(x)$ es en principio diferente para los diferentes x de ese intervalo si el núcleo no es constante. Sin embargo, se verifica que $\hat{\beta}_L(x) = \frac{x_i+x_j}{2}$ por eso se pueden producir tramos constantes en determinados contextos.

El ECM asintótico para este modelo es nulo porque $\sigma(x)$ y $\alpha''(x)$ son ambas nulas. Como el SLL se basa en el ajuste de una recta local, si la relación es lineal globalmente, también lo será de modo local, por tanto SLL carece de error.

En resumen, como ya se ha mencionado, interesa modular el estimador antes de pasar a utilizarlo. Se realizará de modo que el estimador $\hat{\beta}_L$ resulte funcionalmente equilibrado con relación a una transformación, muy elemental, de la variable previa, $1/2X^2$, para esta transformación lo deseable sería que $\hat{\beta}_L^{[1/2X^2]}(x) = x$.

Si se considera $h_n = 0'5$ se percibe en la figura 6.29 cierta pauta. Si se reduce la ventana a $h_n = 0'25$, se observa una sima en la figura 6.30. Por consiguiente es necesario aumentar la

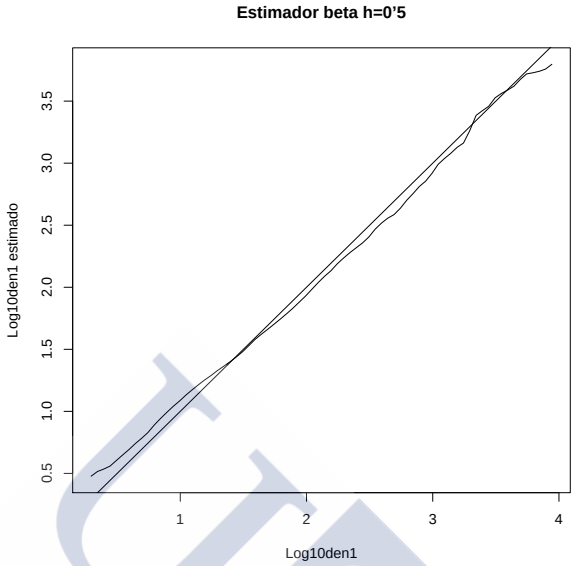


Figura 6.29: Estimador beta de X para $h_n = 0'5$

Ventana	SCEx	Coef. correlación
0'25	12'3212	0'9285
0'3	0'1077	0'9995
0'5	0'4529	0'9987
0'75	1'8174	0'9960

Cuadro 6.8: Criterios aritméticos malla

ventana pero manteniéndola menor que 0'50, por ejemplo, $h_n = 0'30$ se presenta en la figura 6.31.

6.6.4. Selección automática

Con una malla regular de amplitud 0'05, se obtiene el cuadro 6.8. La ventana $h_n = 0'30$ resulta casi la óptima analíticamente pero muestra tramos constantes fruto de regiones de abscisas del marco en que cuando se abre solo caen 2 abscisas muestrales, ver figura 6.31. Por tanto sería una elección más prudente $h_n = 0'35$ o ligeramente mayor porque este estimador se va a utilizar para aproximar α'' y sería conveniente que fuese más suave de lo que se presenta en 0'30 o, incluso, en 0'35.

Si además de los valores de la variable previa para los elementos de la muestra se disponen para todos los elementos de la comuestra, es decir para todo el universo, se obtienen los resultados en el cuadro 6.9. Se confirma $h_n = 0'30$ como automática. Gráficamente se tiene un infrasuavizado para $h_n = 0'25$ en la figura 6.32 y un suavizado competitivo, $h_n = 0'375$, se puede observar en la figura 6.33, que será la elección de compromiso.

Una de las grandes ventajas de las dos técnicas de selección de la ventana que se han introducido

Ventana	SCRes	Coef. correlación
0’25	87’6521	0’9589
0’275	35’1009	0’9838
0’2875	18’7879	0’9916
0’3	2’4129	0’9995
0’3125	2’6638	0’9995

Cuadro 6.9: Criterios aritméticos marco

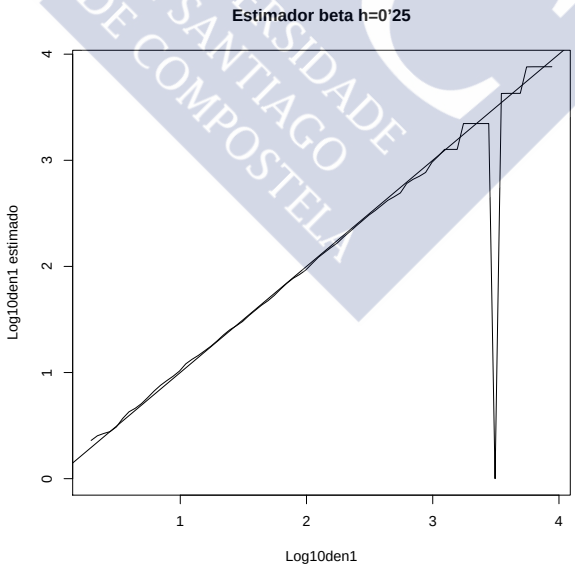


Figura 6.30: Estimador beta de X para $h_n = 0'25$

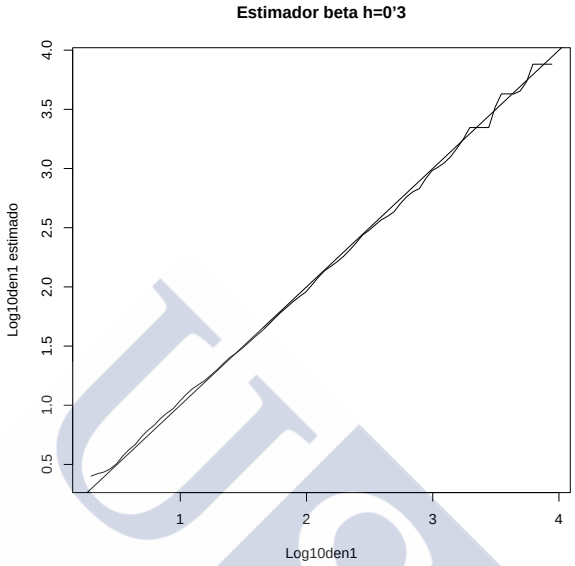


Figura 6.31: Estimador beta de X para $h_n = 0'3$

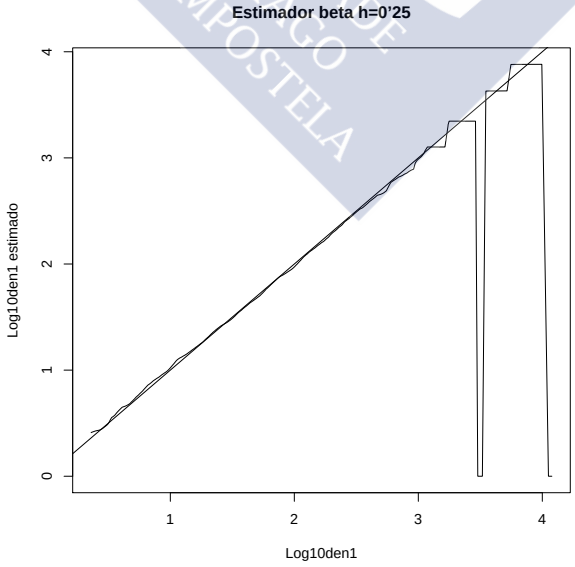


Figura 6.32: Estima de X empleando todo el marco para $h_n = 0'25$

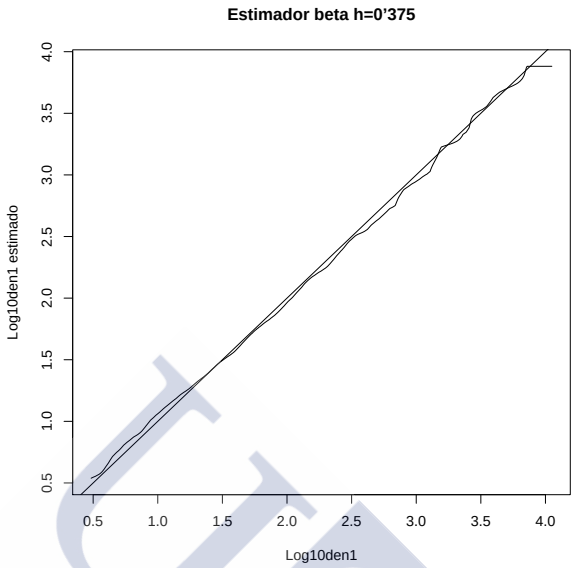


Figura 6.33: Estima de X mediante todo el marco para $h_n = 0'375$

es su carácter anticipado. En el caso de disponer de información en el marco para todo el universo, incluso, se puede elegir la ventana en la fase de planificación de la operación por muestreo y, si solo se dispone de la información de la variable previa para la muestra, antes de realizar los trabajos de campo. Con esto se evitan las sospechas típicas de intrusión del investigador que levantan las técnicas a posteriori.

Otra es que se pueden aplicar a muestras reducidas. Además si se disponen de pocos datos, existen menos problemas de cómputo y se realza la fracción de muestreo en el caso de que la población también sea poco numerosa. Esta situación se puede presentar cuando se realiza un muestreo estratificado con MASS/R en cada estrato, y el carácter empleado en la segmentación se introduce porque se precisa información para cada uno de los estratos por separado.

Estas técnicas cobran especial interés en el caso de que se emplee la regresión no paramétrica en la fase de depuración de la muestra porque en esta situación puede convenir un criterio de selección que no dependa inicialmente de los valores de $\mathcal{Y}$.

6.7. Selección por sustitución

Si se dispone de una muestra de tamaño suficiente, se va a intentar seleccionar la ventana para los estimadores anteriores mediante el método de sustitución 'plug-in', para ello habrá que realizar una serie de aproximaciones y estimaciones con objeto de romper la circularidad que se presenta por los parámetros desconocidos. Si se pudiera suponer homoscedasticidad, se estaría en una situación clásica donde se podría determinar dos ventanas de modo objetivo, las obtenidas de $\hat{\alpha}_S^{[\cdot]}$ y $\hat{\beta}_L^{[\cdot]}$.

Si no se puede suponer homoscedasticidad, como en este caso real, existe otra vía que implicará

tratar con detenimiento el primer estimador porque constituirá la base en que se apoye este tipo de selección para el resto de estimadores.

6.7.1. Estimador H de la regresión

Se introducirán unos resultados previos necesarios para el tratamiento de la selección de la ventana para este estimador

Resultado 87 *En MASS/R(N,n), si $n \geq 2$, s^2 es un estimador $p-$insesgado de S^2*

Demostración.- Ya se ha visto, en el segundo capítulo, que S^2 admite la siguiente expresión

$$S^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2$$

y un estimador $p-$insesgado será

$$\frac{1}{2}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 I_{kl}^{a)}$$

si $\pi_{kl} \neq 0 \quad \forall k,l \quad k \neq l$ porque

$$E_p\left[\frac{1}{2}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 I_{kl}^{a)}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 E_p\left(I_{kl}^{a)}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2$$

Por otra parte

$$\frac{1}{2}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 I_{kl}^{a)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n(n-1)}\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 I_{kl} = \frac{1}{2}\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k\neq l;k,l\in s}\sum(Y_k - Y_l)^2 = s^2$$

Q.E.D.

Como $S^2_{B_{x,h_n}}$ admite la siguiente expresión

$$S^2_{B_{x,h_n}} = \frac{1}{2}\frac{\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 1_{B_{x,h_n}}(x_k)1_{B_{x,h_n}}(x_l)}{N_x(N_x-1)} = \frac{1}{2}\frac{\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 1_{B_{x,h_n}}(x_k)1_{B_{x,h_n}}(x_l)}{\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}1_{B_{x,h_n}}(x_k)1_{B_{x,h_n}}(x_l)}$$

entonces se puede construir un estimador del siguiente modo

$$\hat{S}^2_{B_{x,h_n}} = \frac{1}{2}\frac{\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}(Y_k - Y_l)^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)1_{B_{x,h_n}}(x_j)I_{ij}^{a)}}{\text{máx}\left(\sum_{l\neq k}^{(N^{(2)})}1_{B_{x,h_n}}(x_i)1_{B_{x,h_n}}(x_j)I_{ij}^{a)}, 2\right)}.$$

Conviene recordar que se están considerando abscisas con relieve positivo, $f(x) > 0$.

Proposición 58 *En MASS/R(N, n), bajo la condición HHM, si $nh_n \to \infty$ entonces* $E_p\left(\hat{S}^2_{B_{x,h_n}}\right) = S^2_{B_{x,h}} + O\left(nP_x e^{-nP_x}\right)$

Demostración.- Sea x fijo y sea B_{x,h_n} la celdilla que contiene a x, por definición del estimador se verifica que

$$E_p\left[\hat{S}^2_{B_{x,h_n}}\right] = \sum_{m=2}^{n} E_p\left[s^2_{B_{x,h}} | n_{B_x} = m\right] p(n_{B_x} = m)$$

y, por consiguiente, que

$$E_p\left[\hat{S}^2_{B_{x,h_n}}\right] = \sum_{m=2}^{n} S^2_{B_{x,h}}\, p(n_{B_x} = m) = S^2_{B_{x,h}} \sum_{m=2}^{n} p(n_{B_x} = m) =$$

$$= S^2_{B_{x,h}} \left[1 - p(n_{B_x} = 0) - p(n_{B_x} = 1)\right]$$

sin más que percatarse de que, cuando se condiciona $\hat{S}^2_{B_{x,h_n}}$, se convierte en una simple cuasivarianza muestral $s^2_{B_{x,h}}$, cuya esperanza es la cuasivarianza poblacional, $S^2_{B_{x,h}}$. Falta, por tanto, acotar asintóticamente $p(n_{B_x} = 1)$

$$N_x \frac{\binom{N-N_x}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{N_x\,(N-N_x)!n!\,(N-n)!}{(n-1)!\,(N-N_x-n+1)!N!} = \frac{N_x\,(N-N_x)!n\,(N-n)!}{(N-N_x-n+1)!N!} = n\frac{N_x\,(N-N_x)!\,(N-n)!}{(N-N_x-n+1)!N!} =$$

$$= n\frac{N_x\,(N-N_x)\,(N-N_x-1)\cdots(N-N_x-n+2)}{N\,(N-1)\cdots(N-n+1)} \leq n\frac{N_x}{N}(1-P_{N,x})^{n-1}$$

Si se estudia esta última expresión

$$nP_{N,x}(1-P_{N,x})^{n-1} = nP_{N,x}\frac{1}{1-P_{N,x}}(1-P_{N,x})^n = nP_{N,x}\,(1-P_{N,x}+o(P_{N,x}))\,(1-P_{N,x})^n =$$

$$= (nP_x + O(1))\left(1 - P_x + O\left(\frac{1}{n}\right) + o(P_x) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) O\left(e^{-nP_x}\right) =$$

$$= (nP_x + O(1))\,(1 - P_x + o(P_x))\,O\left(e^{-nP_x}\right) = O\left(nP_x e^{-nP_x}\right)$$

Q.E.D.

$\hat{S}^2_{B_{x,h}}$ es un estimador asintóticamente $p-$insesgado de $S^2_{B_{x,h}}$ si $nh_n \to \infty$ que, a su vez, es un estimador asintóticamente $\xi-$insesgado de $\sigma^2(x)$ si α y σ son continuas, con lo cual provee un posible estimador. También se puede expresar del siguiente modo

$$\hat{S}^2_{B_{x,h_n}} = \frac{1}{\text{máx}\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)I_i, 2\right) - 1} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \hat{\alpha}_H(x)\right)^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)I_i =$$

$$= \frac{1}{\text{máx}\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)I_i, 2\right) - 1} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i - \hat{\alpha}_H(x)\right)^2 1^2_{B_{x,h_n}}(x_i)I_i^2 =$$

$$= \frac{1}{\text{máx}\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{B_{x,h_n}}(x_i)I_i, 2\right) - 1} \sum_{i=1}^{N} \left(Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)I_i - \hat{\alpha}_H(x) 1_{B_{x,h_n}}(x_i)I_i\right)^2$$

6.7.1.1. Local

El término principal del sesgo asintótico es

$$B\left[\alpha_H(x)\right] \approx \alpha'(x)\left[m\left(B_{x,h_n}\right) - x\right]$$

y el de la varianza

$$VAR\left[\hat{\alpha}_H(x)\right] \approx \frac{\sigma^2(x)}{nP_x}$$

Por tanto, el término principal del error cuadrático medio es

$$ECMA(x) = \left[m\left(B_{x,h_n}\right) - x\right]^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 + \frac{\sigma^2(x)}{nP_x}$$

La notación proviene de error cuadrático medio asintótico. El *ECMA* se puede aproximar mediante

$$h_n^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 + \frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh_n}$$

de donde, si se minimiza en h_n, se obtiene

$$2h_n \left(\alpha'(x)\right)^2 - \frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh_n^2} = 0$$

$$2h_n \left(\alpha'(x)\right)^2 = \frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh_n^2}$$

$$h_n^3 = \frac{\sigma^2(x)}{f(x)} \frac{1}{2n\left(\alpha'(x)\right)^2} \Rightarrow h_n = \left(\frac{\sigma^2(x)}{2f(x)\left(\alpha'(x)\right)^2} \frac{1}{n}\right)^{1/3}$$

Se puede estimar $\alpha'(x)$ mediante $\beta_L(x)$ y, en su defecto, con su estimador $\hat{\beta}_L(x)$. Por otra parte para $f(x)$ se puede utilizar una ventana elegida manualmente.

$$f(x) \approx \frac{1}{h_H} \int_{B_{x,h_H}} f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{P_x}{h_H} \approx \frac{P_{N,x}}{h_H} \approx \frac{1}{h_H}\frac{N_x}{N} = f_H(x)$$

esta aproximación sería tanto mejor cuanto más pequeña sea h_H. Obsérvese que en este caso real no es necesario estimar el descriptor f_H ya que se puede utilizar N_x/N del marco. Si fuera necesario, se incurriría en un error aleatorio, que sería mayor cuando se emplearan menos elementos muestrales para estimar esa fracción.

Se puede estimar $\sigma^2(x)$ mediante $\hat{S}^2_{B_{x,h_n}}$ empleando una ventana que garantice un número de abscisas muestrales en la celdilla no muy reducido. Esta estimación será tanto mejor cuanto más grande sea $n_{B_{xh}}$ lo que conlleva que h_H, ventana piloto del regresograma e histograma, no pueda ser muy reducida ($h_H = 1$ en este caso concreto). En resumen

$$h_n \approx \left(\frac{\hat{S}^2_{B_{x,h_H}}}{2f_H(x)\hat{\beta}^2_L(x)} \frac{1}{n} \right)^{1/3}$$

6.7.1.2. Global

También se puede aproximar del siguiente modo

$$[m\left(B_{xh_n}\right) - x]^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 + \frac{\sigma^2(x)}{nP_x} = [m\left(B_{xh_n}\right) - x]^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 + \frac{\sigma^2(x)}{nf(x)h_n\left(1 + o(1)\right)} =$$

$$= [m\left(B_{xh_n}\right) - x]^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 + \frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh_n}\left(1 + o(1)\right) \approx [m\left(B_{xh_n}\right) - x]^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 + \frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh_n}$$

es decir,

$$ECMA(x) \approx [m\left(B_{xh_n}\right) - x]^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 + \frac{\sigma^2(x)}{f(x)nh_n}$$

Se considerará como criterio global

$$ECMAI = \int ECMA(x)\, f(x)\mathrm{d}x = \int \left[E_\xi\left(\alpha_H(x)\right) - \alpha(x)\right]^2 f(x)\mathrm{d}x$$

el *error cuadrático medio asintótico integrado*. Se está dando más importancia al error cuadrático medio asintótico en los puntos con más densidad en las abscisas y además no se tienen en cuenta los puntos con $f(x) = 0$ que no entran dentro de la teoría desarrollada.

Será igual en este estimador a

$$ECMAI = \int [m\left(B_{xh_n}\right) - x]^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{nh_n}\int \sigma^2(x)\mathrm{d}x$$

Para el primer sumando, sin pérdida de generalidad, considérese $[0, h_n]$ e integrando se obtiene

$$\int_0^{h_n} \left[m\left(B_{xh_n}\right) - x\right]^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{h_n} \left(\frac{h_n}{2} - x\right)^2 \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\alpha'(\zeta_1)\right)^2 f(\zeta_1) \int_0^{h_n} \left(\frac{h_n}{2} - x\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\alpha'(\zeta_1)\right)^2 f(\zeta_1) \frac{h_n^3}{12}$$

con $\zeta_1 \in [0, h_n]$ por el teorema generalizado del valor medio ya que $\left(\frac{h_n}{2} - x\right)^2 > 0$ y se supone que α' y $f(\cdot)$ son continuas. Mediante un cambio de variable, las integrales en el resto de celdillas darían un resultado análogo, en concreto

$$\int_{B_l} \left[E_\xi\left(\alpha_H(x)\right) - \alpha(x)\right]^2 f(x)\mathrm{d}x = \left(\alpha'(\zeta_l)\right)^2 f(\zeta_l) \frac{h_n^3}{12} + o(h_n^3)$$

con $\zeta_l \in B_l$, por tanto

$$\int \left[E_\xi\left(\alpha_H(x)\right) - \alpha(x)\right]^2 f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\alpha'(\zeta_l)\right)^2 f(\zeta_l) \frac{h_n^3}{12} =$$

$$= \frac{h_n^2}{12} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\alpha'(\zeta_l)\right)^2 f(\zeta_l) h_n \approx \frac{h_n^2}{12} \int \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

En puro rigor, para la primera y la última celdilla habría que haber considerado $[\text{mín}_N\, x_i, h_n]$ y $[1 - h_n, \text{máx}_N\, x_i]$. Por consiguiente

$$ECMAI \approx \frac{h_n^2}{12} \int \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{nh_n} \int \sigma^2(x)\mathrm{d}x,$$

que, derivando, se minimiza en h_n cuando

$$\frac{h_n}{6} \int \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{nh_n^2} \int \sigma^2(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\frac{h_n}{6} \int \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{nh_n^2} \int \sigma^2(x)\mathrm{d}x$$

$$h_n^3 = \frac{6}{n} \frac{\int \sigma^2(x)\mathrm{d}x}{\int \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x} \Rightarrow h_n = \left(\frac{6}{n} \frac{\int \sigma^2(x)\mathrm{d}x}{\int \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x}\right)^{1/3}$$

6.7.2. Estimador S de la regresión

6.7.2.1. Local

El sesgo asintótico depende inversamente del relieve $f(x)$ y directamente de:

- la ventana h_n
- una característica del núcleo: el momento de orden 2, que se puede considerar, si es simétrico, como la varianza de una v.a. cuya densidad sea el propio núcleo.
- el producto de $\alpha''(x)f(x)$ es decir, la curvatura por el relieve en el punto, salvo una potencia de un multiplicador que depende de $\alpha'(x)$.
- el producto $\alpha'(x)f'(x)$. Por tanto, el sesgo asintótico no es invariante con respecto a $f'(\cdot)$. Existe efecto del diseño. Si el relieve es plano –equidistribución de los puntos del diseño– se anula.

La varianza asintótica depende directamente de:

- la función de varianza
- una característica del núcleo: el momento de orden 0 de su cuadrado.

E inversamente de:

- el tamaño de la muestra
- la ventana h_n
- el relieve: la varianza es menor donde existen más densidad de puntos del diseño. En caso de homoscedasticidad, la varianza es mínima en la moda. De hecho, $nf(x)h_n$ se puede interpretar como un tamaño efectivo medio de muestra local, es decir, aproximadamente el tamaño esperado de muestra en $(x-\frac{h_n}{2}, x+\frac{h_n}{2})$.

Hay que minimizar en h_n la siguiente expresión

$$\frac{h_n^4}{4}\alpha_2^2(K)\left(\alpha''(x)+2\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}\right)^2+\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}=$$

$$=\frac{h_n^4}{4}\frac{1}{f^2(x)}\alpha_2^2(K)\left(\alpha''(x)f(x)+2\alpha'(x)f'(x)\right)^2+\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}$$

Por tanto, derivando con respecto a h_n e igualando a cero

$$\frac{h_n^3}{f^2(x)}\alpha_2^2(K)\left(\alpha''(x)f(x)+2\alpha'(x)f'(x)\right)^2-\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n^2}=0$$

$$\frac{h_n^3}{f^2(x)}\alpha_2^2(K)\left(\alpha''(x)f(x)+2\alpha'(x)f'(x)\right)^2=\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n^2}$$

$$h_n^5=\frac{\sigma^2(x)f(x)}{\left(\alpha''(x)f(x)+2\alpha'(x)f'(x)\right)^2}\frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)}\frac{1}{n}$$

$$h_n = \left(\frac{\sigma^2(x) f(x)}{\left(\alpha''(x) f(x) + 2\alpha'(x) f'(x)\right)^2} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{1}{n} \right)^{1/5}$$

Obsérvese que en el caso notable de que $\alpha(x) = x$ y $\sigma(x) = 0$ se obtiene

$$ECMA(x) = h_n^4 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 \alpha_2^2(K) = h_n^4 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) \right)^2 \alpha_2^2(K)$$

6.7.2.2. Global

Se debe minimizar

$$\frac{h_n^4}{4} \alpha_2^2(K) \int \left(\alpha''(x) + 2 \frac{\alpha'(x) f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x) \mathrm{d}x + \frac{\alpha_0(K^2)}{n h_n} \int \sigma^2(x) \mathrm{d}x$$

Por tanto derivando con respecto a h_n e igualando a cero

$$h_n^3 \alpha_2^2(K) \int \left(\alpha''(x) + 2 \frac{\alpha'(x) f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x) \mathrm{d}x - \frac{\alpha_0(K^2)}{n h_n^2} \int \sigma^2(x) \mathrm{d}x = 0$$

$$h_n^3 \alpha_2^2(K) \int \left(\alpha''(x) + 2 \frac{\alpha'(x) f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x) \mathrm{d}x = \frac{\alpha_0(K^2)}{n h_n^2} \int \sigma^2(x) \mathrm{d}x$$

$$h_n^5 = \frac{1}{n} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\int \sigma^2(x) \mathrm{d}x}{\int \left(\alpha''(x) + 2 \frac{\alpha'(x) f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x) \mathrm{d}x}$$

$$h_n = \left(\frac{1}{n} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\int \sigma^2(x) \mathrm{d}x}{\int \left(\alpha''(x) + 2 \frac{\alpha'(x) f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x) \mathrm{d}x} \right)^{1/5}$$

6.7.3. Estimador L

6.7.3.1. Local

El sesgo asintótico depende directamente de:

- la ventana h_n
- una característica del núcleo: el momento de orden 2 que se puede considerar como su "varianza" si es simétrico.
- el producto de $\alpha''(x)$ por el relieve en el punto. El sesgo es pequeño si $\alpha(x)$ se aproxima a una recta en un entorno de x.

Obsérvese que el sesgo asintótico es invariante con respecto a $f'(x)$, parafraseando a FAN(1992), se adapta al diseño.

La varianza asintótica depende directamente de:

- la función de varianza
- una característica del núcleo: el momento de orden 0 de su cuadrado.

E inversamente del tamaño efectivo medio de muestra local, $nf(x)h_n$

Hay que minimizar en h_n la siguiente expresión

$$\frac{h_n^4}{4}\alpha_2^2(K)\left(\alpha''(x)\right)^2+\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}$$

Por tanto derivando con respecto a h_n e igualando a cero

$$h_n^3\alpha_2^2(K)\left(\alpha''(x)\right)^2-\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n^2}=0$$

$$h_n^3\alpha_2^2(K)\left(\alpha''(x)\right)^2=\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n^2}$$

$$h_n^5=\frac{\sigma^2(x)}{f(x)\left(\alpha''(x)\right)^2}\frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)}\frac{1}{n}$$

$$h_n=\left(\frac{\sigma^2(x)}{\left(\alpha''(x)\right)^2}\frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)}\frac{1}{nf(x)}\right)^{1/5}$$

Obsérvese que cuanta más varianza haya en el punto x más amplia deberá ser la ventana. Mientras que cuantas más abscisas se esperen en torno a x, $nf(x)$, más estrecha será la ventana. Del mismo modo, si α presenta mucha curvatura en x, también será más estrecha.

Obsérvese, también, que en el caso notable de que $\alpha(x)=x$ y $\sigma(x)=0$ se obtiene

$$ECMA=0\Rightarrow ECM\approx 0$$

6.7.3.2. Global

Hay que minimizar en h_n la siguiente expresión

$$\frac{h_n^4}{4}\alpha_2^2(K)\int\left(\alpha''(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}\int\sigma^2(x)\mathrm{d}x$$

Por tanto derivando con respecto a h_n e igualando a cero

$$h_n^3 \alpha_2^2(K) \int \left(\alpha''(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x - \frac{\alpha_0(K^2)}{n h_n^2} \int \sigma^2(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$h_n^3 \alpha_2^2(K) \int \left(\alpha''(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha_0(K^2)}{n h_n^2} \int \sigma^2(x)\mathrm{d}x$$

$$h_n^5 = \frac{1}{n} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\int \sigma^2(x)\mathrm{d}x}{\int \left(\alpha''(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x}$$

$$h_n = \left(\frac{1}{n} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\int \sigma^2(x)\mathrm{d}x}{\int \left(\alpha''(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x} \right)^{1/5}$$

Se puede interpretar $\int \left(\alpha''(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x$ como una medida de oscilación en promedio.

6.7.4. Aplicación al caso real

Para el estimador H de la regresión, el habitual regresograma, la ventana óptima para el criterio global es

$$h_n = \left(\frac{6}{n} \frac{\int \sigma^2(x)\mathrm{d}x}{\int \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x} \right)^{1/3}$$

Para su cálculo efectivo, se realizarían las siguientes aproximaciones

$$\int_{B_{x,h}} \sigma^2(x)\mathrm{d}x \approx S^2_{B_{x,h_H}} h_H$$

y

$$\int_{B_{x,h}} \left(\alpha'(x)\right)^2 f(x)\mathrm{d}x \approx \left(\alpha'(m(B_{xh_H}))\right)^2 f_H(m(B_{xh_H}))h_H$$

por tanto

$$h_n \approx \left(\frac{6}{300} \frac{\sum S^2_{B_{x,h_H}} h_H}{\sum \left(\alpha'(m(B_{xh_H}))\right)^2 f_H(m(B_{xh_H}))h_H} \right)^{1/3}$$

que se estiman mediante

$$\hat{S}^2_{B_{x,h_n}} h_H$$

y

$$\hat{\beta}_L^2(m(B_{xh_H})) \frac{N_x}{N h_H} h_H = \hat{\beta}_L^2(m(B_{xh_H})) \frac{N_x}{N}$$

por consiguiente

$$h \approx \left(\frac{6}{300} \frac{\sum \hat{S}^2_{B_{x,h_H}} h_H}{\sum \hat{\beta}_L^2(m(B_{xh_H})) \frac{N_x}{N}} \right)^{1/3}$$

se ha empleado la misma ventana h_H para aproximar ambas integrales –tanto la del numerador como la del denominador– y, por ello, también para aproximar $f(\cdot)$, e igual a la longitud de la celdilla determinada, en gran parte, por la estimación de $S_{B_{x,h}}$. Para estimar α' mediante $\hat{\beta}_L$ se puede usar otra ventana, por ejemplo la automática, $h_L = 0'30$, que con $h_H = 1$, resulta $h = 0'32$ o la de compomiso $h_L = 0'375$, que con $h_H = 1$, resulta $h = 0'31$.

Para el estimador L,

$$h_n = \left(\frac{1}{n} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\int \sigma^2(x)\mathrm{d}x}{\int (\alpha''(x))^2 f(x)\mathrm{d}x} \right)^{1/5}$$

se realizaría la siguiente aproximación $\alpha''(m(B_{x,h_H})) \approx \frac{\hat{\beta}_L(L_B) - \hat{\beta}_L(l_B)}{h_H}$ además de las aproximaciones mediante f_H y h_H

$$h \approx \left(\frac{1}{300} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\sum \hat{S}^2_{B_{x,h_n}} h_H}{\sum \left(\frac{\hat{\beta}_L(L_B) - \hat{\beta}_L(l_B)}{h_H} \right)^2 f_H(m(B_{xh_H}))h_H} \right)^{1/5} =$$

$$= \left(\frac{1}{300} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\sum \hat{S}^2_{B_{x,h_n}} h_H}{\sum \left(\frac{\hat{\beta}_L(L_B) - \hat{\beta}_L(l_B)}{h_H} \right)^2 \frac{N_x}{N}} \right)^{1/5}$$

Para estimar α'' se puede usar la ventana automática $h_L = 0'30$, que con $h_H = 1$, resulta $h = 0'75$ o la de compomiso $h_L = 0'375$, que con $h_H = 1$, resulta $h = 0'85$.

Para el estimador S,

$$h_n = \left(\frac{1}{n} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\int \sigma^2(x)\mathrm{d}x}{\int \left(\alpha''(x) + 2\alpha'(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 f(x)\mathrm{d}x} \right)^{1/5}$$

se realizaría la aproximación anterior $\alpha''(m(B_{x,h_H})) \approx \frac{\hat{\beta}_L(L_B) - \hat{\beta}_L(l_B)}{h_H}$ y para el cociente del segundo sumando dentro del cuadrado $f(x) \approx f_S(m(B_{x,h_H}))$ y $f'(x) \approx f'_S(m(B_{x,h_H}))$, además de las aproximaciones mediante f_H y h_H, donde se considera como aproximación de la derivada del relieve

$$f'_S(x) = \frac{-1}{nh_S^2} \sum_{i=1}^{N} K' \left(\frac{x_i - x}{h_S} \right)$$

porque para $h_S = \frac{h_H}{2} = 0'50$, f_S es suave tanto para la p.f. como para la muestra –lo que resulta deseable en otras situaciones prácticas en que no se disponga de la variable previa para todos los elementos del marco– además de dar lugar al mismo ancho de banda que la del regresograma que como ya se comentó viene determinado por la estimación de la función de varianza, por

consiguiente

$$h \approx \left(\frac{1}{300} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\sum \hat{S}^2_{B_{x,h_n}} h_H}{\sum \left[\left(\frac{\hat{\beta_L}(L_B) - \hat{\beta_L}(l_B)}{h_H} \right)^2 + 2\hat{\beta}_L^2(m(B_{xh_H})) \frac{f'_S(m(B_{xh_H}))}{f_S(m(B_{xh_H}))} \right]^2 f_H(m(B_{xh_H}))h_H} \right)^{1/5} =$$

$$= \left(\frac{1}{300} \frac{\alpha_0(K^2)}{\alpha_2^2(K)} \frac{\sum \hat{S}^2_{B_{x,h_n}} h_H}{\sum \left[\left(\frac{\hat{\beta_L}(L_B) - \hat{\beta_L}(l_B)}{h_H} \right)^2 + 2\hat{\beta}_L^2(m(B_{xh_H})) \frac{f'_S(m(B_{xh_H}))}{f_S(m(B_{xh_H}))} \right]^2 \frac{N_x}{N}} \right)^{1/5}$$

Para estimar α'' se puede usar la ventana automática $h_L = 0'30$, que con $h_H = 1$ y $h_S = \frac{h_H}{2}$, resulta $h = 0'43$ o la de compomiso $h_L = 0'375$, que con $h_H = 1$y $h_S = \frac{h_H}{2}$, resulta $h = 0'32$.

6.8. Estudio de simulación

Se mostrará a continuación un breve estudio en el que se han utilizado dos técnicas de simulación: una más próxima a las habituales y otra más cercana a las pp.ff.. En la primera, se extrajeron 1000 muestras aleatorias simples sin reemplazamiento de la comuestra y se evaluó, para las ventanas correspondientes, el estadístico de bondad del ajuste

$$\frac{1}{300} \sum_{j=1}^{300} \left(Y_j - \hat{\alpha}_{(\cdot)}(x_j) \right)^2$$

de la suma de cuadrados media de los residuos calculados a partir del modelo ajustado con la muestra aleatoria simple sin reemplazamiento inicial, siendo (x_j, Y_j) los valores de las variables para el elemento $j-$ésimo de la muestra aleatoria simple sin reemplazamiento de la comuestra de la muestra inicial. Estas muestras constituyen un conjunto de réplicas interpenetrantes de la comuestra.

En la segunda técnica, se extrajeron al azar todas las posibles muestras aleatorias simples sin reemplazamiento de la comuestra que no se solapasen, en concreto 11, y se evaluó el mismo estadístico de bondad del ajuste. Tanto la muestra inicial como las réplicas son del mismo tamaño $n = 300$. Se obtuvieron los resultados que se muestran en la tabla 6.10.

Para interpretar los datos del cuadro conviene recordar que el parámetro de suavizado del estimador H, su ancho de banda, es comparable con el doble del parámetro ventana de los estimadores S y L, dado que la banda en estos casos es de anchura $2h_n$ ya que V_{x,h_n} es el entorno de centro x y radio h_n.

El comportamiento de la selección de compromiso y de la de sustitución basada en ella es más adecuado a lo que cabría esperar. El ajuste del estimador mejora en el orden H, S, L (por ejemplo, 0'13530 $>$ 0'13315 $>$ 0'13095) y además la basada en la de compromiso se comporta mejor que su homóloga de compromiso (por ejemplo, 0'13412 $>$ 0'13315 y 0'13160 $>$ 0'13119) dado que en aquella se está empleando información sobre $\mathcal{Y}$ que no se utiliza en esta.

	Parámetros ventana	Clásica	pp.ff.
Por anticipado			
Automática			
S	$h = 0'20$	0'13441	0'13249
L	$h = 0'30$	0'13454	0'13226
Compromiso			
S	$h = 0'275$	0'13412	0'13160
L	$h = 0'375$	0'13368	0'13114
Por sustitución			
Basado en automática			
H	$h = 0'32$	0'13675	0'13514
S	$h = 0'43$	0'13103	0'13166
L	$h = 0'75$	0'13116	0'12942
Basado en compromiso			
H	$h = 0'31$	0'13530	0'13674
S	$h = 0'32$	0'13315	0'13119
L	$h = 0'85$	0'13095	0'12931

Cuadro 6.10: Bondad del ajuste según los diferentes criterios

Capítulo 7

Epílogo

El mejor momento para planificar una investigación es después de haberla hecho

R.A. Fisher

Resumen Se presentan unas conclusiones teóricas generales relativas a los tres estimadores principales y algunos comentarios de los otros introducidos a lo largo de la memoria. Se resume en un cuadro las expresiones del sesgo y la varianza según el plan de muestreo. En otro, se trasladan las componentes de la varianza total y, en un tercer cuadro, se resume el sesgo y la varianza totales.

Además se extraen conclusiones prácticas con reflexiones sobre el empleo de los estimadores y métodos presentados en la memoria en estadística pública, entre otros. Por último, se presentan algunas vías abiertas para estudios posteriores.

7.1. Conclusiones generales

Se han estudiado tres estimadores principales (H, S y L) y algunos más con carácter auxiliar, aunque no exentos de valor práctico, entre ellos el estimador I. Los dos primeros, H y S, se han definido como es habitual en la literatura, por ejemplo GonzalezManteiga(1982), por lo que también se les ha denominado estimador regresograma y estimador NW, respectivamente. Esta definición de S no es mero fruto del rigor matemático sino que tiene consecuencias teóricas y prácticas como se ha visto a lo largo de la memoria.

El estimador L resulta de una nueva definición de estimador del descriptor SLL. Por esta razón se ha mantenido la terminología estimador L y se ha moderado el empleo de estimador SLL e, incluso, por analogía se ha empleado en algunos momentos descriptor L.

Los dos primeros estimadores se pueden interpretar como promedios. El tercero como un cuasi-promedio y el I como una vuelta a la forma de promedio. Conviene percatarse de que $\hat{\alpha}_H(x)$ consiste en una media aritmética simple; $\hat{\alpha}_S(x)$, una media ponderada; $\hat{\alpha}_L(x)$, una seudomedia ponderada y $\hat{\alpha}_I(x)$ es el retorno a una media ponderada. Más aun, el tercero está muy vinculado

con el segundo estimador: el estimador L es igual al SLL muestral, en el caso de que haya dos o más elementos de la muestra en el entorno V_{x,h_n}, y al estimador S, en caso contrario.

La solución que se presenta al problema de que se anule el denominador permite ver una relación más nítida entre el estimador NW y el SLL al introducir una nueva expresión del estimador L, que ofrece una interpretación de rabiosa actualidad en el MPF. El estimador L se puede ver como el S calibrado con respecto a la variable previa. La corrección local que introduce consiste esencialmente en substraerle la excentricidad multiplicada por una estima de la variación relativa local.

El método seguido en esta memoria permite obtener resultados según el plan de muestreo interesantes en si mismos a diferencia de Harms&Duchesne(2010) que en este punto resulta poco informativo. Como consecuencia de la multitud de resultados auxiliares necesarios para las soluciones ad hoc se llegan a tratar algunos estimadores más, según el plan de muestreo, para una finalidad distinta que los anteriormente citados, con carácter meramente ilustrativo.

Como contrapartida, la teoría se desarrolla para x tal que $f(x) > 0$ y, en el estimador L, para un diseño sin repeticiones y que no sea ralo, es decir, que esté garantizada la existencia de dos elementos del universo en el entorno en cuestión. Esta hipótesis es similar a la necesaria para la existencia de $S^2_{B_{xh}}$, esto es, $N_x > 1$. Para este estimador también se impone que σ sea suficientemente regular. Sin la hipótesis de que el relieve no sea nulo carecerían de sentido la expresiones que se presentan en las secciones siguientes.

7.1.1. Sesgo y varianza según el plan de muestreo

En el cuadro 7.1 se presenta una tabla sesgo-varianza según el plan de muestreo. En ella se aprecia a simple vista que, si el máximo de $|Y_i|$ en la p.f. se comporta adecuadamente, el sesgo del estimador H, con respecto a su descriptor, es de menor orden de magnitud que en los otros dos estimadores, teniendo en cuenta que $P_x = \int_{B_{xh}} f(t)\mathrm{d}t = f(x)h_n(1 + o(1))$. Los términos residuales, tanto en el sesgo como en la varianza, del estimador L son menos refinados que los del estimador S. Si se optara en el sesgo por llegar a un resto más fino para el estimador L, implicaría una pluralidad de términos dificilmente interpretables.

En el supuesto de que el máximo de Y_i^2 en la p.f. se comporte adecuadamente, la O del resto en la $p-$varianza del estimador H es cuadrático frente a $3/2$, del estimador S. No obstante, el dominante del estimador L puede ser, en general, menor si α es suficientemente regular para que se puede aproximar localmente por una recta. Con la primera componente del sesgo del estimador L sucede algo similar pero aparece una segunda componente que depende del descriptor NW.

En H, S y L tanto la expresión aproximada del sesgo como la de la varianza vienen multiplicadas por un coeficiente, que se anula cuando se realiza el censo, y dependen de las diferencias $Y_i - \alpha_H(x)$, $Y_i - \alpha_S(x)$ y $Y_i - \alpha_L(x) - \beta_L(x)(x_i - x)$ respectivamente, con la excepción de que el sesgo de H no depende y la particularidad de que el de L también depende de $Y_i - \alpha_S(x)$.

$\hat{\alpha}_{(.)}$	$B_p\left(\hat{\alpha}_{(.)}\right)$	$VAR_p\left(\hat{\alpha}_{(.)}\right)$
H	$O\left(\text{máx}_N \lvert Y_i \rvert e^{-nP_x}\right)$	$S^2_{B_{xh}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{P_x}+$ $+O\left(\frac{\text{máx}_N\lvert Y_i\rvert^2}{(nP_x)^2}\right)$
S	$\frac{-1}{f^2_S(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)K_h^2(x_i-x)\right]+$ $+O\left(\frac{\text{máx}\lvert Y_i\rvert}{(nh_n)^{3/2}}\right)$	$\frac{1}{f^2_S(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)^2K_h^2(x_i-x)\right]+$ $+O\left(\frac{\text{máx}\lvert Y_i\rvert^2}{(nh_n)^{3/2}}\right)$
L	$\frac{-1}{f^2_S(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)(x_i-x)\right)K_h^2(x_i-x)\right]-$ $-\frac{1}{D(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}\right)+O\left(\frac{\text{máx}\lvert Y_i\rvert}{n}\right)$	$\frac{1}{f^2_S(x)}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)\left(x_i-x\right)\right)^2K_{hi}^2\right]+$ $+O\left(\frac{\text{máx}\lvert Y_i\rvert^2}{n}\right)$

Cuadro 7.1: Sesgo-varianza según el plan

Para ver esto, obsérvese que, por una parte,

$$S^2_{B_{xh}}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\left[\sum_{i=1}^{N}Y_i^2 1_{B_{x,h_n}}(x_i)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}Y_i 1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)}\right]=$$

$$=\frac{1}{N_x-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_H(x)\right)^2 1^2_{B_{x,h_n}}(x_i)=\frac{1}{\frac{N_x-1}{N}}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_H(x)\right)^2 1^2_{B_{x,h_n}}(x_i)$$

y por otra,

$$\frac{1}{N}S_{N,1,2,2}-\alpha_S(x)\frac{1}{N}S_{N,0,2,2}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)\left(x_i-x\right)^2K_h^2(x_i-x)$$

además

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N}1_{B_{x,h_n}}(x_i)\right)-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_H(x)\right)1^2_{B_{x,h_n}}(x_i)=0$$

por el resultado 32, igualdad coherente con el hecho de que no exista este término en la expresión del sesgo del estimador H según el plan.

Obsérvese, también, que esas diferencias verifican que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_H(x)\right)1_{B_{x,h_n}}(x_i)=0$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_S(x)\right)K_h(x_i-x)=0$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\alpha_L(x)-\beta_L(x)(x_i-x)\right)K_h(x_i-x)=0$$

La velocidad de convergencia de las ventanas impuesta es $nh_n \to \infty$ para el estimador H, $nh_n^2 \to \infty$ para el S y $nh_n^3 \to \infty$ para el L, bajo la condición HHM.

En la hipótesis habitual en la literatura tradicional de MPF de que $\mathcal{Y}$ esté acotada, los restos $O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right)$ y $O\left(\frac{1}{n}\right)$, que se heredarían del tratamiento según plan de muestreo de los estimadores S y L, no serán comparables con el término principal del sesgo –de orden h_n^2– del cuadro 7.3, bajo la hipótesis $nh_n \to \infty$. Habría que imponer una velocidad de convergencia más lenta.

Por último, para el estudio de los restos se ha tratado con probabilidades de inclusión en la muestra de orden superior a 2. Por este motivo, esta memoria se ha desarrollado principalmente en MASS/R, donde las probabilidades de inclusión triple y de orden superior son todas iguales, es un plan equiprobabilístico, y tienen una forma simple. Sería motivo de un trabajo posterior generalizar a diseños complejos, comenzando por los de tamaño fijo para los que ya se ha dado expresiones iniciales en esta memoria.

7.1.2. Componentes de la varianza

En el cuadro 7.2, la expresión de la varianza promedio $E_\xi VAR_p\left(\hat{\alpha}_{(.)}\right)$ es igual a la correspondiente de poblaciones infinitas multiplicada por un coeficiente, que se anula si se realiza el censo y resulta menor que la unidad excepto en el caso de que la muestra sea de tamaño 1, situación sin sentido práctico y donde no existe diferencia entre con y sin reemplazamiento.

Por tanto, como subproducto se ha calculado la varianza promedio aproximada para los tres estimadores, lo que también tiene interés desde un punto de vista tradicional del MPF, cuya expresión se ve influida por el plan de muestreo.

Obsérvese la analogía entre las expresiones de $VAR_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_S\right)$ y $VAR_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_L\right)$ y las habituales de poblaciones infinitas donde habría que tener en cuenta que la p.f. es, a su vez, una muestra de tamaño N según el modelo de superpoblación.

Para el tratamiento de ambas componentes de la varianza del estimador H se impone que $nh_n \to \infty$. En el estimador S, se impone $nh_n^2 \to \infty$, mientras que el método empleado precisa que $nh_n^5 = O(1)$ para el tratamiento de la varianza promedio del estimador L cuando se emplean núcleos de soporte compacto además de que σ sea lipschitziana.

7.1.3. Sesgo y varianza total

Los términos principales del sesgo de los estimadores S y L según el plan resultan, en promedio, despreciables frente al término principal del sesgo según el diseño, de orden h_n^2. Para el tratamiento de los restos hay que imponer una velocidad de convergencia de la ventana, en general, más lenta que la impuesta para el plan. Como ya se ha mencionado, aun en la hipótesis habitual en la literatura de MPF de que $\mathcal{Y}$ esté acotada, el resto que se heredaría del tratamiento del plan de muestreo no sería comparable con el habitual término principal del sesgo h_n^2 bajo la hipótesis

Estimador	$E_\xi VAR_p\left(\hat{\alpha}_{(\cdot)}\right)$	$VAR_\xi E_p\left(\hat{\alpha}_{(\cdot)}\right)$
H	$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\frac{\sigma^2(x)}{P_x}+$ $+o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$	$\frac{\sigma^2(x)}{NP_x}+$ $+o\left(\frac{1}{nP_x}\right)$
S	$\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}+$ $+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$	$\frac{\alpha_0(K^2)}{Nh_n}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}+$ $+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$
L	$\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}+$ $+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$	$\frac{\alpha_0(K^2)}{Nh_n}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}+$ $+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$

Cuadro 7.2: Componentes de la varianza total

$nh_n \to \infty$, habría que imponer una velocidad de convergencia más lenta

$$O\left(\frac{h_n^2}{n^{3/2}h_n^{7/2}}\right)$$

al menos $n^{3/2}h_n^{7/2} \to \infty$ que se verifica, por ejemplo, si $nh_n^3 \to \infty$. Más aún, en el caso concreto del estimador S, aparece un término cuadrático que, en promedio, no sería comparable con el término principal del sesgo bajo la hipótesis $nh_n \to \infty$, que imponen Harms&Duchesne (2010).

Desde el punto de vista asintótico, el sesgo total no se ve afectado por el plan de muestreo salvo en la velocidad de convergencia de la ventana siempre que ε_i tenga momentos de cierto orden que dependen de la velocidad de la ventana. En esta situación basta con imponer que $nh_n^{1+\varepsilon} \to \infty$ para el estimador H, regresograma; $nh_n^3 \to \infty$ para el estimador S, el de NW, y para el estimador L.

Tampoco la varianza se ve afectada por el plan de muestreo salvo en la velocidad de convergencia de la ventana desde el punto de vista asintótico. Mientras el estimador NW precisa $nh_n^2 \to \infty$ con núcleos de soporte compacto, para $\hat{\alpha}_L(x)$ se impone que el núcleo sea además simétrico y $nh_n^5 = O(1)$. Tanto para el sesgo como la varianza de este último estimador también se impone que la función de varianza sea lipschitziana.

Los coeficientes relacionados con las pp.ff. tienden a 1, no obstante son mayores que la unidad salvo cuando se realiza el censo en cuyo caso coinciden con ella.

7.2. Conclusiones prácticas

Ha quedado patente el interés de las técnicas de regresión no paramétrica en estadística pública, entre otros, en el tratamiento de caracteres que no se pueden catalogar fácilmente como variables continuas o discretas convencionales (la fracción de población residente en núcleos) o también en variables afectadas por una gran error que recomiende su depuración inicial. Este podría estar incluyendo errores ajenos al muestreo.

Estimador	$B\left(\hat{\alpha}_{(.)}\right)$	$VAR\left(\hat{\alpha}_{(.)}\right)$
H	$\alpha'(x)\left[m\left(B_{xh_n}\right)-x\right]+$ $+o\left(h_n\right)$	$\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{1}{nh_n}+$ $+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$
S	$\frac{h_n^2}{2}\alpha_2\left(K\right)\left(\alpha''(x)+2\frac{\alpha'(x)f'(x)}{f(x)}\right)\left[1+\frac{1}{nh_n}\frac{N-n}{N-1}\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)}\right]+$ $+o(h_n^2)$	$\frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}+$ $+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$
L	$\frac{h_n^2}{2}\alpha_2\left(K\right)\alpha''\left(x\right)\left[1+\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{nh_n}\frac{\alpha_0(K^2)}{f(x)}\right]+$ $+o\left(h_n^2\right)$	$\frac{1-\frac{f}{N}}{1-\frac{1}{N}}\frac{\sigma^2(x)}{f(x)}\frac{\alpha_0(K^2)}{nh_n}+$ $+o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$

Cuadro 7.3: Sesgo y varianza totales

En especial, se reivindica el papel del regresograma tanto por su interés en la difusión como en la descripción y análisis exploratorio incluso como germen de un estimador naïf de la función de varianza. Del resto de estimadores, como mínimo, no cabe duda de su interés en la visualización o, incluso, en la preservación de la confidencialidad, lo que en algunas situaciones recomendaría una ventana más amplia que la óptima.

El procedimiento de selección de la ventana ha intentado apartarse inicialmente de las técnicas más convencionales que ya han sido estudiadas en contextos próximos al que se ha investigado en aras a disponer de una ventana más estable en el tiempo, con una determinación de forma objetiva que sirva para muestras de tamaño reducido e, incluso, que se pueda anticipar al conocimiento de la realización muestral –en vez de considerar como casos patológicos la situación en que se anularía el denominador, se obtiene provecho de esta patología–. Una vez conseguido lo anterior, se complementa con una selección por sustitución que permite tratar con realizaciones de muestras relativamente grandes.

También se ha visto que la sintonización no es desdeñable si el tiempo no constituye un recurso muy escaso porque permite profundizar en el conocimiento del fenómeno objeto de estudio, aunque resulta más cómoda la selección con ayuda gráfica. En este caso práctico ha permitido revelar que la relación entre la fracción que reside en núcleos y la densidad de población en Galicia no es monótona como cabría esperar a priori. Además, las técnicas gráficas y automáticas introducidas permiten superar la famosa avidez de datos de la regresión no paramétrica.

Una selección de compromiso orientada fundamentalmente por la asistida o la automática pero con alguna decisión más propia de una selección manual –como redondear la ventana, tener en cuenta si el relieve es apreciable o no ($f(x)>0$ o bien $f(x)=0$) o si se dispone de toda la variable previa en el marco, muestra y comuestra– puede resultar interesante sobre todo si no hay que realizar muchas regresiones en un periodo corto de tiempo.

En estadística pública frente al principio comentado en el primer capítulo del modelo sometido a permanente revisión hay que contraponer los principios de coherencia, comparabilidad y claridad que aconsejan cierta estabilidad en las técnicas empleadas (por ejemplo, mantener la misma banda en el regresograma durante un periodo de tiempo) lo que realza la solución de compromiso.

El principio de coherencia, que tiene como indicador en su dimensión interna que se cumplan las identidades aritméticas, véase INE(2011), entronca directamente con la modulación de los estimadores. Interesa que los estimadores resulten equilibrados al menos de forma aproximada con respecto a la variable previa disponible en el marco.

Si solo se dispone de la variable previa para los elementos de la muestra resulta atractiva la selección asistida por lo visual y por no depender del tamaño muestral. En caso de muestra relativamente grande, también en su aplicación en la selección de la ventana por sustitución. Si se dispone en el marco de la variable previa para todos los elementos del universo destaca la selección automática por su comodidad, independencia del tamaño de la muestra, anticipación y estabilidad.

Conviene, para finalizar estas conclusiones prácticas, reflexionar sobre las diferencias y similitudes en la interpretación de los resultados de una inferencia. En la inferencia paramétrica en poblaciones infinitas, el resultado nos da una estimación de los parámetros de la población infinita, y esto tiene un significado claro si la población queda individualizada por estos parámetros.

En MPF, se estima la media, el total... de la p.f., pero ésta no queda completamente caracterizada. Se trata pues de una mera descripción de la población. De aquí que las sobrevisiones por muestreo se llamen frecuentemente descriptivas, para distinguirlas de los estudios analíticos.

Según Cochran(1977), el objetivo de una encuesta descriptiva es presentar descriptores tales como totales, medias y proporciones para toda la población o para algunas grandes subpoblaciones. En una encuesta analítica, se realizan comparaciones entre varias subpoblaciones. Por ejemplo en el caso real tratado, comparar la aglomeración en parroquias densamente o poco pobladas con las parroquias medianamente pobladas. Para este autor la distinción entre unas y otras no es nítida.

Godambe&Thompson(1986) sostienen que en la utilización analítica de las encuestas por muestreo el objetivo es estimar o bien un parámetro del modelo de superpoblación o bien un descriptor cuya forma se motiva por tal modelo. Esta extensión del concepto de analítico permite abarcar tanto el concepto moderno del que se ha tratado abundantemente en la memoria como el de Cochran, incluso ampararía el estudio de la regresión de Kish&Frankel(1974).

Pero en esta memoria no se han estudiado parámetros escalares o vectoriales sino relaciones funcionales y sus descriptores, que se pueden considerar como verdaderas cuestiones analíticas. La función de regresión y el descriptor asociado así como la función de relieve y su descriptor caracterizan de manera notable a la p.f. y sus partes. Conocer los descriptores del relieve o de la función de regresión en nada se asemeja a conocer cualquier descriptor tradicional de la p.f. (total, media...) sino que va más allá. Por tanto, en esta memoria se está más próximo a la concepción de estudio analítico tradicional que también se incluye en la definición de Godambe&Thompson(1986).

7.3. Extensiones

7.3.1. Planes complejos

Una de las vías de progreso es la generalización del estudio a planes de muestreo complejos. Rao(2005) recuerda que la aplicación de métodos estándar a datos de encuesta sin tener en cuenta el efecto del plan debido a la conglomeración y las diferentes probabilidades de selección puede dar lugar a inferencias erróneas aún en el caso de grandes muestras.

Este mismo autor sostiene que los planes con probabilidades desiguales desempeñan un papel vital en MPF, a pesar de la controversia con Särndal quien defiende que los planes más simples, como el muestreo estratificado, con MASS/R o Bernoulli dentro de cada estrato, junto al estimador GREG deberían reemplazar a las estrategias basadas en planes con probabilidades desiguales sin reemplazamiento.

Los resultados obtenidos en la memoria fundamentalmente son para MASS/R. Es posible que se pueda generalizar de modo sencillo al muestreo por conglomerados de tamaños iguales sin submuestreo, de gran aplicación en cuestiones agrarias y ambientales. La generalización a muestreo estratificado con MASS/R dentro de cada estrato si el número de estratos no varía en la secuencia anidada de universos es inmediata aunque puede dar lugar a problemas relacionados con la especificación mostrando saltos.

Convendría estudiar el caso en que el número de estratos creciera al ir avanzando en esa secuencia. En este plan de muestreo, el tamaño poblacional de los estratos puede ser relativamente pequeño con lo que se podría ver incrementada la varianza total, por ejemplo, correspondería a la idealización de las encuestas económicas dentro de una comunidad autónoma.

El problema de que se anule el denominador se puede producir en más de un estrato si se considera un diseño de muestreo estratificado con MASS/R dentro de cada estrato, sobre todo si la variable de estratificación está relacionada con la $\mathcal{X}$. Esta situación sería interesante desde el punto de vista matemático. Harms&Duchesne(2010) no aportan claridad sobre este asunto a diferencia de Opsomer&Miller(2005), en otro contexto: la estimación del total de la p.f..

No obstante, desde un punto de vista práctico no parece adecuado utilizar para la estratificación tal variable. Cochran(1977) trata el asunto en una situación mucho menos complicada donde se veía que la ganancia no era muy grande. Sería mejor emplear otro tipo de variables o atributos no relacionados con $\mathcal{X}$, cuyo efecto ya está controlado mediante la regresión.

Para avanzar en esta vía convendría consultar también Montanari&Ranalli(2005), McConville(2011) y Lu(2012).

7.3.2. Otras extensiones

Otra vía consiste en extender el estimador del descriptor SLL a la situación en que existan repeticiones de la $\mathcal{X}$. También sería interesante estudiar el incremento del grado del polinomio o del número de variables regresoras. Considerar polinomios de grado 2 permitiría tratar problemas sobre propensiones, costes o ingresos marginales así como velocidades de crecimiento. Cuando se consideran múltiples variables se incrementa la dimensión lo que implica una mayor necesidad, si cabe, de presentación no convencional en la difusión de las operaciones estadísticas públicas.

Como se ha visto la regresión no paramétrica puede desempeñar un nuevo papel en las labores de depuración de una sobrevisión. También podría resultar interesante extender su aplicación a las tareas de imputación. Para profundizar en los temas de datos faltantes y del incremento del número de regresores, convendría consultar Pérez(2003).

Por último, sería extremadamente interesante tratar los contrastes de bondad de ajuste en relación con las técnicas introducidas porque en MPF se utilizan habitualmente modelos paramétricos y no siempre se validan adecuadamente, en algunas ocasiones por no disponer de los útiles adecuados. En este punto serían ilustrativos Ramil(1998) y Alcalá,Cristóbal&González Manteiga(1999).

Referencias bibliográficas

Aitken, A.C. (circa 1955) *Estadística matemática* (versión de la 7ª edición inglesa). Ed. Dossat, Madrid

Alcalá, J.T.; J.A. Cristóbal and W. González Manteiga (1999) "Goodness-of-fit test for linear models based on local polynomials". *Statistics and Probability Letters*, 42, pp. 39-46

Apostol, T. (1977) *Análisis matemático*. 2ª edición. Ed. Reverté, Barcelona

Bailar, B. A. (2000) "The past is prologue". *Survey Methodology*, **26**, 1, pp. 21-30

Barndorff-Nielsen, O. (1963) "On the Limit Behaviour of Extreme Order Statistics". *The Annals of Mathematical Statistics*, **34**, pp. 992-1002

Bellhouse, D.R. (2000) "Survey sampling theory over the twentieth century and its relation to computing technology". *Survey Methodology*, **26**, 1, pp. 11-20

Bellhouse, D.R. and J.E. Stafford (1999) "Density Estimation from Complex Surveys". *Statistica Sinica*, **9**, pp. 407-424

Bellhouse, D.R. and J.E. Stafford (2001) "Local polynomial regression in complex surveys". *Survey methodology*, **27**, pp. 197-203

Binder, D. A. and G. Roberts (2009) "Design- and Model-Based Inference for Model Parameters in Sample Surveys", in *Handbook of Statistics 29B Sample Surveys: Inference and Analysis.* North Holland, Amsterdam, pp. 33-54

Breidt, F.J. and J.D. Opsomer (2000) "Local polynomial regression estimators in survey sampling". *The Annals of Statistics*, **28**, pp. 1026-1053

Breidt, F.J. and Opsomer, J.D. (2009) "Nonparametric and semiparametric estimation in complex surveys", in *Handbook of Statistics 29B Sample Surveys: Inference and Analysis.* North Holland, Amsterdam, pp. 103-120

Breidt, F. J.; G. Claeskens and J. D. Opsomer (2005) "Model-assisted estimation for complex surveys using penalised splines". *Biometrika* **92,** pp. 831-846

Buskirk, T.D. and S.L. Lohr (2005) "Asymptotic properties of kernel density estimation with complex survey data". *Journal of Statistical Planning and Inference*, **128**, pp. 165-190

Calvo, E. et al. (2011) "Caracterización de seis zonas de Galicia con diferente grao de urbanización". *X Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións.* Pontevedra

Calvo, E. et al. (2013) "O grao de urbanización en Galicia: diferenzas socioeconómicas entre

as distintas zonas". *Revista Galega de Economía*, **22**, 2, pp. XX-XX

Cao, R. (1990) *Aplicaciones y nuevos resultados del método bootstrap en la estimación no paramétrica de curvas.* Tesis doctoral. Univ. de Santiago de Compostela, Dpto. de Estatística e I.O.

Cao, R.; M.A. Delgado and W. González Manteiga (1997) "Nonparametric Curve Estimation: An Overview". *Investigaciones económicas*, **21**, 2, pp. 209-252

Cassel, C.M.; C.-E. Särndal and J.H. Wretman (1977) *Foundations of Inference in Survey Sampling.* John Wiley and Sons, New York

Cleveland, W.S. (1979) "Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplot". *Journal of the American Statistical Association*, **74**, pp. 829-836

Chambers, R. L. and C. J. Skinner, eds. (2003) *Analysis of Survey Data.* John Wiley & Sons, Chichester

Chu, C.-K. and J. S. Marron (1991) "Choosing a Kernel Regression Estimator". *Statistical Science*, **6**, 4, pp. 404-436

Cochran, W.G. (1939) "The use of analysis of variance in enumeration by sampling". *Journal of the American Statistical Association*, **34**, pp. 492-510

Cochran, W.G. (1946) "Relative accuracy of systematic and stratified random samples for a certain class of populations". *The Annals of Mathematical Statistics,* **17**, pp. 164-177

Cochran, W.G. (1977) *Técnicas de muestreo* (traducción al castellano de 1980). CECSA, México

Collomb, G. (1977) "Quelques proprietés de la méthode du noyau pour l'estimation non parametrique de la régression en un point fixé". *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, **285**, 4 Série A, pp. 289-292

Collomb, G. (1981) "Estimation non parametrique de la regresion: review bibliographique''. *International Statistical Review,* **49**, pp. 75-93

Collomb, G. (1985) "Non-parametric regression: an up-to-date bibliography''. *Statistics,* **16**, pp. 309-324

Cornfield, J. (1944) "On samples from finite population". *Journal of the American Statistical Association*, **39**, pp. 236-239

David, F.N.; M.G. Kendall and D.E. Barton (1966) *Symmetric functions and allied tables.* Cambridge University Press

Droesbeke, J.-J.; B. Fichet et Ph. Tassi (1987) "La place des sondages en statistique" In *Les sondages*, Droesbeke et al. Economica, Paris

Eurostat (2007) *Task Force on Core Social Variables.* Office for Official Publications of the European Communities. Luxembourg

Fan, J. (1992) "Design-adaptative nonparametric regression". *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 998-1004

Fan, J. (1993) "Local linear regression smoothers and their minimax efficiencies". *The Annals of*

Statistics, **21**, pp. 196-216

Francisco Fernández, M. (2001) *La regresión polinómica local en diseño fijo con observaciones dependientes.* Tesis doctoral. Univ. de Santiago de Compostela, Dpto. de Estatística e I.O.

Fuller, W.A. (1975) "Regression analysis for sample surveys". *Sankhya* C, **37**, 117-132

Fuller, W.A. (2009) *Sampling Statistics.* John Wiley and Sons, New York

Faraldo, P.; J.M. Prada y W. González Manteiga (1984) "Estudio de curvas notables en estadística desde un punto de vista no paramétrico. Parte I y II". *Cuadernos de Bioestadística*, **2**, pp 31-57

Gnedenko, B. (1975) *The Theory of Probability.* Mir Publishers, Moskow

Godambe, V.P. and M.E. Thompson (1986) "Parameters of Superpopulation and Survey Population: Their Relatioships and Estimation". *International Statistical Review*, **54**, pp. 127-138

Goerlich, F.J. e I. Cantarino (2013) "Geodemografía: coberturas del suelo, sistemas de información geográfica y distribución de la población" *Investigaciones Regionales*, **25,** pp. 165-191

Goerlich, F.J. e I. Cantarino (2012) *Una grid de densidad de población para España.* Fundación BBVA, Bilbao

González Manteiga, W. (1982) *Construcción axiomática, consistencias y distribuciones asintóticas de estimadores no paramétricos para funciones de densidad y de regresión.* Tesis doctoral. Univ. de Santiago de Compostela, Dpto. de Estatística e I.O.

Graubard, B.I. and E.L. Korn (2009) "Scatterplots with survey data", in *Handbook of Statistics 29B Sample Surveys: Inference and Analysis.* North Holland, Amsterdam, pp. 397-419

Gumbel, E.J. (1954) "The Maxima of the Mean Largest Value and of the Range". *The Annals of Mathematical Statistics* **25**, pp. 76-84

Hansen, M.H. and W.N. Hurwitz (1943) "On the Theory of Sampling of Finite Populations". *The Annals of Mathematical Statistics,* **14**, pp. 333-362

Hansen, M.H.; W.N., Hurwitz and W.G. Madow (1953) *Sample Survey Methods and Theory.* 2 *Vol.* John Wiley and Sons, New York

Hansen, M.H. (1987) "Some History and Reminiscences on Survey Sampling". *Statistical Science*, **2**, 2, 180-190

Härdle, W. and O. Linton (1994) "Applied Nonparametric Methods". *Handbook of Econometrics*, vol. IV, cap. 38. Elsevier Science

Harms, T. and P. Duchesne (2010) "On kernel nonparametric regression designed for complex survey data". *Metrika*, **72**, pp. 111-138

Hartley, H.O. and R. L., Sielken Jr (1975) "A 'Super-population viewpoint' for finite population sampling". *Biometrika,* **31**, pp. 411-422

Holt, D. and A. Scott (1981) "Regression Analysis Using Survey Data". *The Statistician*, **30**,

pp. 169-178

Holt, D., T.M.F. Smith, and P.D. Winter (1980) "Regression analysis of data from complex surveys". *Journal of the Royal Statistical Society* A, **143**, pp. 474-87

Horvitz, D.G. and D.J. Thompson (1952) "A Generalization of Sampling Without Replacement From a Finite Universe". *Journal of the American Statistical Association*, **47**, pp. 1084-1089

IGE (2011) "Clasificación dos concellos e parroquias segundo o grao de urbanización". Disponible en: <http://www.ige.eu/estatico/pdfs/s3/clasificacions/urbanizacion/NotasMetodoloxicas.pdf> (consulta de 10 de mayo de 2012)

INE (2010) *España en cifras.* Instituto Nacional de Estadística, Madrid

INE (2011) "Código de Buenas Prácticas de las Estadísticas Europeas. Versión de 2011". Adoptado por el Comité del Sistema Estadístico Europeo el 28 de septiembre de 2011. Disponible en: <http://www.ine.es/ine/codigobupr.pdf> (consulta de 10 de mayo de 2012)

Jennen-Steinmetz, C. and T. Gasser (1988) "A Unifying Appoach to Nonparametric Regression Estimation". *Journal of the American Statistical Association*, **83**, pp. 1084-1089

Johnson, A.A.; F.J. Breidt and J.D. Opsomer (2008) "Estimating distribution functions from survey data using nonparametric regression". *Journal of Statistical Theory and Practical.* **2**, 3, pp. 419-431

Kish, L. and M.R. Frankel (1974) "Inference from complex samples". *Journal of the Royal Statistical Society* B, **36**, pp. 1-37

Korn, E.L. and B.I. Graubard (1998) "Scatterplots with survey data". *The American Statistician*, **52**, pp. 58-69

Krishnaiah, P.R. and C.R. Rao (eds.) *Handbook of Statistics 6: Sampling.* North Holland, Amsterdam

Laplace, P.S. (1814) *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (traducción al castellano de 1985). Alianza Editorial, Madrid.

Lombardía Cortiña, M.J. (2002) *El bootstrap en la estimación de la función de distribución en poblaciones finitas.* Tesis doctoral. Univ. de Santiago de Compostela, Dpto. de Estatística e I.O.

Lombardía, M.J.; W. González Manteiga y J.M. Prada (2004) "Una revisión de la estimación de la función de distribución y métodos de remuestreo bootstrap en poblaciones finitas". *Estadística española*, **46**, 155, pp. 149-175

Lu, Y. (2012) "Difference-based variance estimator for nonparametric regression in complex surveys". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **iFirst**, pp. 1-9

McConville, K. (2011) *Improved estimation for complex surveys using modern regression techniques.* Dissertation. Colorado State University

McCord, J.R. (1964) "On asymptotic moments of extreme statistics". *The Annals of Mathematical Statistics,* **35**, pp. 1738-1745

Mirás Amor, J. (1985) *Elementos de muestreo para poblaciones finitas.* Instituto Nacional de Estadística, Madrid

Montanari, G.E. and M.G. Ranalli (2005) "Nonparametric methods in survey sampling", in *New Developments in Classification and Data Analysis*, M. Vichi, P. Monari, S. Mignani, A. Montanari (Eds.). Springer, Berlin.

Nadaraya, E.A. (1964) "On estimating regression''. *Theory of Probability and its Applications* **9**, pp. 141-142

Nathan, G. and D. Holt (1980) "The effect of survey design on regression analysis". *Journal of the Royal Statistical Society B*, **42**, pp. 377-386

Opsomer, J.D. and C.P. Miller (2005) "Selecting the amount of smoothing in nonparametric regression estimation for complex surveys". *Nonparametric Statistics*, **17**, pp. 593-611

Opsomer, J.D.; F.J. Breidt, G.G. Moisen and G. Kauermann (2007) "Model-assisted estimation of forest resources with generalized additive models" (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, **102**, pp. 400-416

Parzen, E. (1962) "On estimation of a probability density function and Mode''. *The Annals of Mathematical Statistics,* **33**, pp. 1065-1076

Pérez González, A. (2003) *Aportaciones a la inferencia no paramétrica de modelos de regresión con respuesta faltante.* Tesis doctoral. Univ. de Santiago de Compostela, Dpto. de Estatística e I.O.

Pfeffermann, D. (1993) "The Role of Sampling Weights When Modeling Survey Data". *International Statistical Review*, **61**, pp. 317-337

Pfeffermann, D. and C.R. Rao (eds.) (2009) *Handbook of Statistics 29B Sample Surveys: Inference and Analysis.* North Holland, Amsterdam

Pfeffermann, D. and M. Sverchkov (1999) "Parametric and Semi-Parametric Estimation of Regression Models Fitted to Survey Data". *Sankhya B*, **61**, 166-186

Pfeffermann, D. and M. Sverchkov (2009) "Inference under Informative Sampling in Sample Surveys", in *Handbook of Statistics 29B Sample Surveys: Inference and Analysis.* North Holland, Amsterdam

R Development Core Team (2010) *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org/.

Rao, J.N.K. (1999) "Some Current Trends in Sample Survey Theory and Methods". *Sankhya*, B, **61**, pp. 1-57

Rao, J.N.K. (2005) "Interplay Between Sample Survey Theory and Practice: An Appraisal". *Survey Methodology,* **31**, 2, pp. 117-138

Ramil Novo, L.A. (1998) *Aportaciones a la teoría de contrastes de bondad de ajuste para modelos de regresión polinómicos.* Tesis doctoral. Univ. de Santiago de Compostela, Dpto. de Estatística e I.O.

Rohatgi, V.K. (1976) *An Introduction to Probability Theory and Mathemetical Statistics.* John Wiley and Sons, New York

Rosenblatt, M. (1956): "Remarks on some nonparametric estimators of a density function''.

The Annals of Mathematical Statistics, **27**, pp. 832-837

Rueda, M. and I.R. Sánchez-Borrego (2009) "A predictive estimation of finite population mean using nonparametric regression". *Computational Statistics*, **24**, pp. 1-14

Sacks, J and D. Ylvisaker (1968) "Designs for Regression Problems with Correlated Errors; Many Parameters". *The Annals of Mathematical Statistics*, **39**, pp. 49-69

Särndal C.-E.; B. Swensson and J.H. Wretman (1992) *Model assisted survey sampling.* Springer Verlag, New York

Seifert, B. and T. Gasser (1996) "Finite Sample Variance of Local Polynomials: Analysis and Solutions". *Journal of the American Statistical Association,* **91**, pp. 267-275

Sen, P.K. (1968) "Estimates of the regression coefficient based on Kendall's tau". *Journal of the American Statistical Association*, **63**, pp. 1379-1389

Stute, W. and W. Gonzalez Manteiga (1990) "Nearest Neighbor Smoothing in Linear Regression". *Journal of Multivariate Analysis,* **34**, pp. 61-74

Tapia, R.A. and J. R. Thompson (1990) *Nonparametric Function Estimation, Modeling, and Simulation.* SIAM, Philadelphia

Theil, H. (1950) "A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis III". *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wettenschappen*

Thompson, M.E. (1997) *Theory of Sample Surveys.* Chapman and Hall, London

Tukey, J. (1961) "Curves As Parameters, and Touch Estimation" *Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, **1**

Wang, L. and S. Wang (2011) "Nonparametric additive model-assited estimation for survey data". *Journal of Multivariate Analysis*, **102**, pp. 1126-1140

Wang, Z. and D.R. Bellhouse (2009) "Semiparametric regression model for complex survey data". *Survey Methodology*, **35**, pp. 247-260

Watson, G.S. (1964) "Smooth regression analysis". *Sankhya A*, **26**, pp. 359-372

Whittaker, G. and D.W. Scott (1999) "Nonparametric regression for analysis of complex surveys and geographic visualization". *Sankhya B*, **61**, pp. 202-227