



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Grado

Ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles

Antonio Álvarez López

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Grado

Ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles

Antonio Álvarez López

Julio, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise matemática
Título: Ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles
Breve descripción do contido
En primer lugar, se estudiará la naturaleza y procedencia de las ecuaciones de Euler que rigen la dinámica de fluidos incompresibles, explicando de dónde surgen los términos que la componen y cómo actúan. Además, se examinarán modelos unidimensionales recientes de dichas ecuaciones y se analizarán las interacciones entre los distintos términos que pueden llegar a provocar singularidades en las soluciones.
Recomendacións
La bibliografía más relevante es: 1. James A. Fay, Introduction to fluid mechanics, MIT Press, 1994. 2. Tarek M. Elgindi, In-Jee Jeong, On the effects of advection and vortex stretching, arXiv:1701.04050v2, 2017. 3. Tarek M. Elgindi, Tej-eddine Ghoul, Nader Masmoudi, Stable self-similar blowup for a family of nonlocal transport equations, arXiv:1906.05811v1, 2019
Outras observacións

Índice general

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Preámbulos	1
2. El movimiento de los fluidos: Ecuaciones de Navier-Stokes	5
2.1. Hipótesis básicas	6
2.2. Aproximación al estudio del movimiento	6
2.3. Derivación de las ecuaciones	8
2.3.1. Conservación de la masa	8
2.3.2. Conservación del momento	10
2.4. Formulación de las ecuaciones	12
2.5. El problema del milenio	13
3. Las ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles	15
3.1. Análisis local del campo de velocidades	16
3.2. El criterio de Beale-Kato-Majda	19
3.3. Ecuaciones de la vorticidad	21
4. Modelos unidimensionales	23
4.1. El modelo de Constantin-Lax-Majda (CLM)	23
4.2. El modelo de Okamoto-Sakajo-Wunsch	27
5. Algunos resultados	29
5.1. Teoremas	29
5.2. “Toy model” ilustrativo	31
5.3. Demostraciones de los Teoremas 5.1 y 5.2	32
5.3.1. Estructura	32

5.3.2.	Notación	33
5.3.3.	Soluciones autosimilares del modelo de Constantin-Lax-Majda	34
5.3.4.	Blow-up autosimilar para el caso regular	37
5.3.5.	Blow-up autosimilar para el caso Hölder-continuo	44
A.		53
A.1.	Propiedades de la transformada de Hilbert	53
A.2.	Desigualdades funcionales	56
Bibliografía		57

Resumen

Uno de los objetivos de este trabajo es realizar una introducción de las leyes matemáticas que rigen el campo físico de la dinámica de fluidos, especialmente a través de la presentación y el análisis de las ecuaciones de Navier-Stokes y su versión simplificada, conocida como las ecuaciones de Euler. Para estas últimas, se pretende además exponer ciertas líneas recientes de investigación matemática sobre cuestiones sin resolver que giran en torno a ellas, así como revisar algunos resultados y pruebas de cierta complejidad matemática.

El trabajo comenzará con una introducción histórica a este campo y una reflexión sobre el papel que desempeñan las matemáticas para estudiar la realidad. A continuación, se presentarán formalmente las bases teóricas del área de estudio y se llevará a cabo la derivación clásica de las ecuaciones de Navier-Stokes con la finalidad de comprender el origen y los efectos de cada uno de sus términos. Además, se explicará el problema de existencia y regularidad sobre dichas ecuaciones, que tras varios siglos está todavía abierto.

Las ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles, que dan nombre al trabajo, serán obtenidas a partir de las anteriores como un caso límite. Se llevará a cabo un análisis local de dichas ecuaciones y se introducirá la vorticidad a partir de un resultado que relaciona la existencia de singularidades en las soluciones con este campo vectorial. Se obtendrá un sistema de ecuaciones para la vorticidad y se analizarán sus términos e interacciones entre sí. Para ello se introducen varios modelos unidimensionales que permiten intuir su comportamiento, los cuales están basados en el operador lineal continuo conocido como transformada de Hilbert. Por último, se enunciarán dos resultados sobre la existencia de singularidades en tiempo finito para uno de los modelos. Las demostraciones de ambos resultados serán revisadas, así como expuestas las ideas principales subyacentes.

Abstract

One of the objectives of this work is to introduce the mathematical laws that govern the physical field of fluid dynamics, especially through the presentation and analysis of the Navier-Stokes equations and their simplified version, known as the Euler equations. For the latter, it is also intended to expose certain recent lines of mathematical research on unsolved questions that revolve around them, as well as review some results and tests of a certain mathematical complexity.

The work will begin with a historical introduction to fluid dynamics and a reflection on the role that mathematics plays in studying reality. Next, the theoretical bases of the field of study will be formally presented and the classical derivation of the Navier-Stokes equations will be carried out in order to understand the origin and effects of each of its terms. In addition, the problem of existence and regularity on these equations will be explained, which after several centuries is still open.

The Euler equations of incompressible fluids, which give this work its name, will be obtained from the previous ones as a limit case. A local analysis of these equations will be carried out and the vorticity will be introduced from a result that relates the existence of singularities in the solutions with this vector field. A system of equations for vorticity will be obtained and their terms and interactions with each other will be analyzed. To do this, we introduce several one-dimensional models that allow us to intuit their behavior, which are based on the continuous linear operator known as the Hilbert transform. Finally, two results will be stated on the existence of singularities in finite time for one of the models. Proofs of both results will be reviewed, and the underlying main ideas exposed.

Introducción

La filosofía está escrita en ese grandilocuente libro, que está continuamente abierto a nuestros ojos (lo llamo universo). Pero no se puede descifrar si antes no se comprende el lenguaje y se conocen los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas... sin las cuales andamos a tientas en un oscuro laberinto.

Galileo Galilei (Il Saggiatore, 1618).

La dinámica de fluidos es el campo de la física que estudia el movimiento y la estructura de los fluidos. Constituye una de las disciplinas de la ciencia aplicada que más han sido estudiadas a lo largo de la historia y, pese a ello, todavía mantienen numerosos misterios y problemas abiertos hoy en día. Esto se debe a que las matemáticas que involucran pueden alcanzar una elevada complejidad, y para llegar al conocimiento actual se han necesitado las contribuciones de matemáticos tan famosos y dispersos en el tiempo como Arquímedes de Siracusa, Leonardo Da Vinci, Isaac Newton, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Claude Navier o George Stokes. Vamos a sumergirnos de manera breve en la historia de este campo desde la perspectiva del progreso científico, basándonos en notas históricas extraídas de [20], [2] y [14].

El estudio del comportamiento de los líquidos y gases ha estado presente desde las primeras civilizaciones, aunque tenía un carácter pragmático y rudimentario, con la finalidad esencial de construir embarcaciones o sistemas de irrigación. La civilización griega trajo los primeros grandes avances en esta ciencia, destacando la labor de Arquímedes, quien formuló el principio físico que lleva su nombre con el fin de determinar si la corona del rey Hierón de Siracusa tenía todo el oro que su tesorero decía, según la leyenda. Este principio establece que la fuerza de empuje que sufre un cuerpo sumergido es igual al peso del fluido desplazado. También en esta época nacen las ideas filosóficas de la inmutabilidad de la materia, que sentarían las bases para las leyes de conservación que conocemos hoy en día.

Durante la Edad Media se produjeron mejoras en el diseño y construcción de embarcaciones y canales, pero no es hasta el Renacimiento cuando, de la mano de Leonardo da

Vinci, comienza el estudio analítico con la derivación de la ley de conservación de la masa, así como el enfoque matemático adecuado. Sin embargo, fueron los siglos XVII y XVIII los que vivieron la revolución científica de este campo. Galileo Galilei, junto con sus discípulos Castelli y Torricelli, explicaron numerosos fenómenos relacionados con el movimiento de los fluidos. Blaise Pascal llevó a cabo importantes estudios acerca del equilibrio en líquidos y gases y trajo a la luz grandes invenciones como la presa hidráulica o la jeringuilla. En 1687, Isaac Newton revoluciona la ciencia postulando sus leyes del movimiento, que suponen la base para toda la física de los siglos posteriores y, en particular, de la dinámica de fluidos. La segunda ley, que iguala la variación en la cantidad de movimiento de un cuerpo a la resultante de las fuerzas exteriores que sobre él actúan, será utilizada en prácticamente la totalidad de los modelos físicos. Además, a Newton se le debe el análisis de los fluidos lineales o newtonianos, que veremos más adelante y que incluyen la mayoría de líquidos y gases comunes. También es autor de estudios acerca del movimiento de las olas.

Otra de las figuras más relevantes de este período fue Daniel Bernoulli, quien en 1738 publica su libro *Hydrodynamica* en el que trata la mecánica de fluidos, introduce el concepto de la presión hidrodinámica y estudia la idea de la conservación de la energía. Leonhard Euler fue el primer científico que le dio a este campo un tratamiento en el marco de las ecuaciones diferenciales. Euler describió matemáticamente el comportamiento de los fluidos perfectos (no viscosos) e incompresibles, esto es, en los que los volúmenes del fluido se conservan en el tiempo. Las limitaciones del modelo de Euler fueron puestas de manifiesto por D'Alembert, quien expuso la paradoja de que un cuerpo sumergido en un fluido sin viscosidad no se vería sometido a fuerzas de rozamiento ni, consecuentemente, a un arrastre. Según esa teoría, un barco flotaría en el agua, pero en cambio los aviones no volarían. D'Alembert continuó con el estudio del movimiento de los fluidos comenzado por Euler y continuó con la línea de investigación acerca de los fluidos incompresibles. Además, afirmó que *"la teoría de los fluidos debe estar necesariamente basada en la experimentación"*.

Finalmente, en el siglo XIX aparece el modelo matemático más importante en la dinámica de fluidos: las ecuaciones de Navier-Stokes, que resolvían los problemas que tenían las ecuaciones de Euler a la hora de reflejar la realidad mediante la introducción de un término con el que admitían las fuerzas de rozamiento originadas por la viscosidad del fluido. Fueron publicadas por el matemático francés Claude Navier en 1822 desde la base de un modelo molecular válido, y sucesivamente reobtenidas, con diferentes argumentos, por otros famosos matemáticos como Cauchy (1823), Poisson (1829) y, finalmente, George Gabriel Stokes, en 1845, quien las derivó a partir de la teoría de medios continuos. Se pueden encontrar más detalles sobre la historia específica de estas ecuaciones en [9].

Las ecuaciones de Euler y las de Navier-Stokes tienen una infinidad de aplicaciones

prácticas y conforman las bases de numerosos campos como la meteorología, la aeronáutica, la geología o incluso la medicina. Aun así, el conocimiento matemático que poseemos acerca de las mismas está todavía incompleto, especialmente en lo que gira en torno al problema de existencia y regularidad de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes (y el problema análogo para las ecuaciones de Euler), del cual se dice que se trata del último problema no resuelto de la física matemática clásica. La pregunta que plantea, sin entrar en detalles, es si existen soluciones regulares y globales de las ecuaciones para unas condiciones iniciales dadas. Otra pregunta abierta sobre las ecuaciones de Navier-Stokes es si estas son capaces de modelizar rigurosamente el caótico fenómeno de las turbulencias.

Podríamos continuar citando a numerosos matemáticos posteriores cuya labor fue igualmente esencial para llegar a nuestro conocimiento actual, como Reynolds y su trabajo acerca de los flujos laminares y turbulentos, Ernst Mach y sus estudios en el campo de las velocidades supersónicas, o Ludwig Prandtl y su modernización de los modelos mediante el análisis de la capa límite de los fluidos. Centramos esta última parte de la introducción en una reflexión acerca del papel de las matemáticas a la hora de estudiar la realidad.

Las matemáticas tienen varias facetas diferentes, y están constantemente sometidas a una tensión entre el arte y la aplicabilidad, esto es, entre la creación y exploración de teorías matemáticas y entre la necesidad de explicar el mundo que nos rodea. A lo largo de la historia, los seres humanos han sido capaces de elaborar teorías para predecir lo que ocurrirá en el futuro a partir de la información disponible en el presente: el movimiento de los astros, el lanzamiento de una pelota o el giro de una peonza. La capacidad que poseen para dar explicación lógica a los fenómenos que ocurren en el universo hace de las matemáticas nuestra herramienta más importante para su estudio, especialmente a través del lenguaje simbólico que aportan y que permite expresar ideas extremadamente complejas de manera sencilla. El porqué de esta conexión entre la realidad y las matemáticas es algo que pertenece al terreno de la filosofía. A nivel matemático, para que un modelo sea bueno, debe cumplir una serie de condiciones:

- Sencillez: no por ser más complejo el modelo es mejor.
- Modestia: debe aspirar a unos objetivos asequibles, ya que, como un mapa, no busca imitar la realidad sino centrarse solo en los aspectos de interés para su aplicación.
- Exactitud: el modelo debe reproducir en la medida de lo posible el funcionamiento del sistema.
- Verificabilidad: los resultados deben poder compararse con datos reales para validar el modelo.

Capítulo 1

Preámbulos

Para facilitar la comprensión del texto, recordamos algunos de los conceptos matemáticos que serán utilizados, fundamentalmente relativos a ciertos espacios funcionales.

Sean $1 \leq p \leq +\infty$, $m \in \mathbb{N}$ y un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define el *espacio de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\},$$

donde $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y $D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$ es la notación multi-índice para las derivadas parciales, y está definida en un sentido débil (o distribucional), esto es:

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) =: \mathcal{D}(\Omega).$$

Esta es una generalización de la idea clásica de derivada que es aplicable a cualquier función localmente integrable. En el caso de una función suficientemente regular, la integración por partes lleva a esta relación en el sentido usual.

Los espacios de Sobolev son los espacios funcionales que se emplean normalmente para el estudio de la regularidad en las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), como las de Euler o las de Navier-Stokes. Son espacios de Banach con la norma

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}.$$

Nótese que si $m = 0$, entonces $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ y que para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq p \leq +\infty$ se tienen las inclusiones continuas

$$W^{m+1,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Si $p = 2$, los espacios de Sobolev se denotan por $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$ y están dotados de manera natural de la estructura de espacio de Hilbert, con producto interno definido a

partir del de $L^2(\Omega)$ como

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}.$$

Por último, los espacios de Sobolev H^m verifican el siguiente teorema de embebimiento:

Teorema 1.1. *Sea un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $m, k, n > 0$ cumplen que*

$$m - \frac{n}{2} > k,$$

entonces $H^m(\Omega) \subset C^k(\Omega)$.

Este resultado forma parte del Teorema del Embebimiento de Sobolev, que tiene una formulación más general que incluye a los espacios $W^{m,p}$ con $p \neq 2$, pero en este trabajo solamente utilizaremos los espacios H^m , por lo que esta versión es suficiente.

Se define el *espacio de Schwartz* como

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \|f\|_{\alpha, \beta} < \infty\},$$

siendo

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|,$$

con $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Se dice que dichas funciones y sus derivadas son de decrecimiento rápido, pues, intuitivamente, la condición significa que la función y sus derivadas de cualquier orden decrecen más rápido que el inverso de cualquier polinomio. Un ejemplo de función en este espacio es la función $f(x) = x^a e^{-b|x|^2}$, para $a > 0$, $b \in \mathbb{N}^n$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para $\alpha \in (0, 1]$, se define el *espacio de funciones Hölder-continuas* $C^\alpha = C^\alpha(\Omega)$ como aquellas que verifican la condición

$$\|f\|_{C^\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty, \quad (1.1)$$

o

$$\|f\|_{C^\alpha} = \sup_{h \neq 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\alpha} < \infty. \quad (1.2)$$

Si $\alpha = 1$, la condición (1.1) coincide con la definición de función Lipschitziana. El espacio C^α es un espacio de Banach y las funciones que lo componen son continuas, ya que se tiene la cadena de inclusiones

$$C^\beta \subset C^\alpha \subset C^0,$$

para todo $1 \geq \beta > \alpha > 0$. Estos espacios funcionales permiten medir la regularidad de manera fraccionaria, entendiendo esto como que “rellenan” los huecos entre los espacios C^0

y C^1 . El ejemplo clásico de función Hölder-continua C^α es $f(x) = |x|^\alpha$, para $\alpha \in (0, 1]$ y con $x \in \mathbb{R}$. Además, para cualquier función continuamente diferenciable k se tiene que la función $f(x) = k(|x|^\alpha)$ es C^α usando que k es, en particular, Lipschitziana.

El *valor principal de Cauchy* VP es una herramienta matemática que tiene la finalidad de asignar un valor a ciertas integrales impropias que no son convergentes de la manera usual. En este trabajo, se utilizará constantemente pues forma parte de la definición de la transformada de Hilbert. En este caso concreto, para $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función integrable, está definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H\omega(x) &= \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{\omega(y)}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{\omega(y)}{x-y} dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{\omega(x-z)}{z} dz + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\omega(x+z)}{-z} dz \right) = -\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\omega(x+z) - \omega(x-z)}{z} dz. \end{aligned}$$

Con más generalidad, si ω es solo localmente integrable, se puede definir como

$$H\omega(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{x-t}^{x-\epsilon} \frac{\omega(y)}{x-y} dy + \int_{x+\epsilon}^{x+t} \frac{\omega(y)}{x-y} dy \right),$$

siempre que estos límites existan. Si la integral impropia es convergente, su valor principal de Cauchy también es finito y además coincide con el valor de la integral. Sin embargo, puede ocurrir que la integral diverja pero su valor principal de Cauchy sea finito. Un ejemplo sencillo es el de la función $f(x) = x$, para la cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx \quad \text{no convergente pues} \quad \int_0^{\infty} x dx = \infty,$$

pero

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Algunas consideraciones más sobre el lenguaje y la notación matemática que utilizaremos son:

- Emplearemos letras minúsculas en negrita para denotar campos vectoriales y letras mayúsculas en negrita para campos tensoriales.
- Utilizaremos en algún desarrollo la notación de Einstein para cálculo vectorial, que es el convenio para sumas vectoriales que consiste en suprimir los símbolos de sumatorio y entender que se suma sobre los índices repetidos.
- Usaremos indistintamente la notación $\partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t}$ y $\partial_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para referirnos a las derivadas parciales de una función f respecto de la variable temporal t o respecto de cada coordenada espacial x_i .

- Cuando digamos que una función o campo vectorial es diferenciable, nos referiremos a que es diferenciable C^∞ , salvo que se especifique lo contrario.
- Cuando trabajemos con números complejos, $\Re(\cdot)$ y $\Im(\cdot)$ denotarán la parte real y la parte imaginaria, respectivamente.

Capítulo 2

El movimiento de los fluidos: Ecuaciones de Navier-Stokes

Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

(Clay Mathematics Institute)

Las *ecuaciones de Navier-Stokes* son el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) que constituyen el modelo matemático que describe el movimiento y evolución temporal de determinadas clases de fluidos que introduciremos más tarde, pero aglomeran a la mayoría de los mismos. Con la finalidad de comprender el origen y efecto de cada término de las ecuaciones, estas serán derivadas desde cero. Pese a que cronológicamente son posteriores a las ecuaciones de Euler, y de hecho resolvieron las limitaciones que estas planteaban como modelo del movimiento de los fluidos, en este capítulo se obtendrán primero las ecuaciones de Navier-Stokes y después las otras como el caso límite cuando la viscosidad es nula. La deducción se llevará a cabo de forma breve y a partir de la teoría de medios continuos, con [8], [14] y [27] como referencias principales. Previamente, haremos una introducción formal a la dinámica de fluidos.

2.1. Hipótesis básicas

En el marco de la teoría de los medios continuos, denominamos *fluido* a una distribución continua de partículas puntuales que se mueve y deforma en el espacio conforme avanza el tiempo, t , sin que aparezcan fuerzas internas que intenten recuperar su forma original. Es por ello que un fluido no tiene una forma definida y se adapta a la del recipiente que lo contiene, en caso de que haya uno. Así pues, con esta aproximación, el fluido es una sustancia continua en vez del conglomerado real de moléculas discretas que los componen y cuyo tratamiento matemático sería mucho más complejo. Mientras no se especifique lo contrario, en este trabajo supondremos que esta distribución está definida para cada instante en un espacio de tres dimensiones.

La aproximación del medio continuo supone una enorme simplificación y es efectiva cuando el recorrido libre medio entre colisiones de las partículas es mucho menor que las longitudes características mínimas del problema, esto es, las distancias más pequeñas a las que las propiedades macroscópicas pueden variar de manera apreciable, que son del orden de 10^{-5} cm. En sustancias en las que el recorrido libre medio es mayor, como los gases interestelares enrarecidos, la aproximación deja de ser válida pues la acción de cada molécula individual es significativa, y se debe recurrir a otras teorías de índole estadística.

Además de suponer el fluido como un medio continuo, el análisis matemático también requiere considerar que los campos que lo caracterizan varían en el medio de forma continua. Para ello, se considera, a escalas mucho mayores que el recorrido libre medio y mucho menores que la escala de trabajo, un volumen elemental en torno a cada punto espacial \mathbf{x} y para cada instante t . A este volumen se le conoce como *partícula fluida*, y es un medio continuo y homogéneo en el que podemos definir una velocidad media del movimiento, que será para nosotros la *velocidad* puntual. También podemos definir una densidad media, que es la masa contenida por unidad de volumen; o una presión media, entendida como el valor absoluto de la fuerza por unidad de superficie a través de una superficie infinitesimal que contiene a la partícula, y se asume que es la misma en toda las direcciones. En resumen, las consideraciones con partículas en un medio continuo son consideraciones con partículas puntuales ideales que promedian las propiedades de cada elemento de volumen. A todas estas suposiciones se les conoce como la *Hipótesis del continuo*.

2.2. Aproximación al estudio del movimiento

Para caracterizar el movimiento del fluido, trabajaremos fundamentalmente con tres campos: un campo escalar de densidades $\rho(t, \mathbf{x})$; un campo escalar de presiones $p(t, \mathbf{x})$; y un campo vectorial de velocidades $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, que supondremos a priori que están definidos

en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Existen dos enfoques diferentes para describir los cambios en dichos campos:

Por una parte, el *enfoque euleriano*, que centra su estudio analítico en un punto determinado del espacio, y no tiene interés en la partícula específica del fluido que ocupa dichas coordenadas, sino en el valor que toman los campos en dicho punto a lo largo del tiempo.

Por otra parte, el *enfoque lagrangiano*, que pretende estudiar la variación que experimentan las propiedades de una partícula fijada del fluido a lo largo de su trayectoria. Para ello, se identifica cada partícula con unas coordenadas espaciales $\boldsymbol{\alpha} = (x_0, y_0, z_0)$ en un instante inicial t_0 y se estudia su movimiento con respecto al tiempo a través de la función que describe su trayectoria, esto es, el lugar geométrico de los puntos del espacio que va ocupando sucesivamente en su desplazamiento. A esta función $\mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha})$ que nos proporciona la posición en el instante t de la partícula que ocupaba la posición $\boldsymbol{\alpha}$ en el instante t_0 se la conoce como *curva característica asociada al campo de velocidades*, o *función trayectoria*, y se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}(t)), \quad (2.1)$$

para cada $t \geq t_0$. De esta forma, el campo vectorial \mathbf{u} nos proporciona para cada punto del fluido y cada instante de tiempo, el vector cuya dirección y magnitud son las de la velocidad de la partícula del fluido que está en dicho punto en ese momento. A partir de las curvas características podemos definir también el *flujo característico* como la aplicación definida, para cada $t_0, t \in \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} F_{t_0 \rightarrow t}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{X}(t; t_0, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Esta aplicación hace corresponder al punto del fluido que ocupa la posición \mathbf{x} en el instante t_0 su posición en el instante t . Por otra parte, podemos definir una *línea de corriente* en un fluido como una curva que en un instante t fijado es tangente al campo de velocidades en cada punto de la misma.

Siguiendo la línea de los dos enfoques para el estudio del movimiento, podemos definir la *derivada euleriana*, que es el operador que al aplicarse a un campo f en un punto e instante temporal nos proporciona su derivada temporal con respecto a dicha posición fija en el espacio $\frac{\partial f}{\partial t}$; y la *derivada material* o *derivada de Lagrange*, que describe la variación temporal del valor del campo en una partícula del fluido fijada, por lo que tiene en cuenta también la variación debido al movimiento a lo largo de la trayectoria que sigue la partícula. En otras palabras, estamos expresando el campo f como función de las curvas características $f = f(t, \mathbf{X}(t))$, por lo que se define la derivada material $\frac{D}{Dt}$ de f como

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{f(t, \mathbf{X}(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{u} \cdot \nabla f = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$ es el producto escalar de \mathbf{u} y el vector gradiente de f , si este es un campo escalar. Si, por el contrario, $f = (f_1, f_2, f_3)$ se trata de un campo vectorial, entonces $\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2,3}$ es su matriz jacobiana, y $\mathbf{u} \cdot \nabla f = (\nabla f) \cdot \mathbf{u}$ se refiere a la multiplicación usual de una matriz y un vector:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla f)_i = u_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

El primer sumando de (2.2) representa la derivada de Euler, mientras que el segundo sumando representa la variación de f debido a su transporte por el flujo, efecto conocido como advección, o convección, si se trata de un campo vectorial. Este segundo sumando se puede interpretar como la derivada direccional del campo f en la dirección del vector \mathbf{u} .

Un ejemplo ilustrativo de la manera en la que actúan las dos componentes de este operador es el de una partícula que se desplaza a lo largo de un río y experimenta cambios en su temperatura. Esta puede variar tanto por el calentamiento del sol en cada punto del espacio a medida que avanza el día (derivada de Euler) o por moverse por zonas del río que están al sol o a la sombra (derivada advectiva).

2.3. Derivación de las ecuaciones

Las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma habitual se derivan de dos leyes de conservación, además de una serie de condiciones que simplifican razonablemente el problema de cara al análisis matemático. La primera de las leyes es la ley de conservación de la masa, y la otra es la ley de conservación de la cantidad de movimiento. Hay una tercera ley de conservación importante que es la de la energía, pero que no se usa en la deducción de las ecuaciones que buscamos.

2.3.1. Conservación de la masa

La ley de conservación de la masa es una ecuación de continuidad, lo que significa que se expresa como una igualdad entre la velocidad de cambio de una propiedad ϕ definida en un volumen arbitrario Ω y la cantidad que atraviesa la frontera de Ω más la que se crea o consume en las fuentes y sumideros del campo. En el caso de la función densidad, no existe este último término, pues la masa del fluido no se crea ni se destruye. Por tanto, al hacer $\phi = \rho$, obtenemos la ley de conservación de la masa (en forma diferencial):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{2.3}$$

donde $\nabla \cdot$ es el operador divergencia. Esta ecuación tiene otra formulación más geométrica, que vamos a derivar. Usando la definición (2.2), la ecuación (2.3) es equivalente a:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

Sea $J = J(t; t_0, \mathbf{x}) = \det\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)$ el jacobiano del flujo característico $F_{t_0 \rightarrow t}$, que describe la expansión del volumen a lo largo de una trayectoria. Se verifica que

$$\frac{DJ}{Dt} = J(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (2.5)$$

cuya demostración se puede encontrar en [28]. Por razones físicas, debe ser $J \neq 0$, por lo que (2.4) equivale a

$$0 = \frac{D\rho}{Dt} J + \rho J(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{D\rho}{Dt} J + \rho \frac{DJ}{Dt} = \frac{D}{Dt}(\rho J),$$

de manera que (2.3) es equivalente a

$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = 0. \quad (2.6)$$

Se llaman *fluidos incompresibles* a los que verifican que cualquier volumen del fluido permanece constante en su evolución, y no se comprime (o expande). Esta condición nos dice que el jacobiano J debe ser constante e igual a 1, ya que, si consideramos un volumen Ω del fluido en un instante t_0 , el volumen que ocupará en $t \geq t_0$ será $\Omega_t = F_{t_0 \rightarrow t}(\Omega) = \mathbf{X}(t; t_0, \Omega)$, y cumplirá:

$$\text{Vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} dV = \int_{\Omega} J dW = \int_{\Omega} dW = \text{Vol}(\Omega),$$

si y solo si $J = 1$. Entonces, la ley de conservación de la masa toma la forma

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

que significa que la densidad de cualquier partícula fluida permanece constante a lo largo de su trayectoria. Equivalentemente, y en su forma más común, usando (2.3) y (2.6), la condición de incompresibilidad se puede expresar como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.7)$$

El significado físico de esta ecuación se puede deducir usando el Teorema de la Divergencia: el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada será nulo, luego esta no se podrá comprimir o expandir. Si lo interpretamos desde la perspectiva del mundo real, la hipótesis de incompresibilidad limita el estudio al de los fluidos líquidos, aunque también los gases son aproximadamente incompresibles bajo ciertas hipótesis. A partir de ahora, nos restringiremos a los fluidos incompresibles y podremos aplicar (2.7) en nuestros desarrollos.

Es posible simplificar un poco más incorporando la hipótesis del fluido *homogéneo*, en el cual se cumple que $\rho = \rho(t)$. Así obtenemos, de la condición $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, esto es, que la densidad también será constante en el tiempo y es, por tanto, un campo constante.

2.3.2. Conservación del momento

La ley de conservación del momento o cantidad de movimiento describe la dinámica del fluido. Se deriva de la segunda ley de Newton, que establece que la variación temporal (lagrangiana) de la cantidad de movimiento en una partícula fluida es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre él. En mecánica de fluidos se trabaja con densidades y fuerzas por unidad de volumen en vez de masas y fuerzas absolutas, y además recordamos que hemos considerado ρ constante. Así, la ecuación toma la forma:

$$\rho(t, \mathbf{x}) \frac{D\mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{Dt} = \mathbf{f}_e(t, \mathbf{x}) + \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}), \quad (2.8)$$

donde \mathbf{f}_e hace referencia a la fuerza debida a campos externos, usualmente el gravitatorio (por lo que se suele escribir $\mathbf{f}_e \equiv \rho\mathbf{g}$), aunque podrían ser electromagnéticos o de origen químico. Por otro lado, \mathbf{f}_c se refiere a las fuerzas de contacto o internas, originadas en las capas de fluido contiguas. Este último término es algo particular de los fluidos, e identificar sus componentes fue una tarea muy complicada en la que participaron matemáticos como Johann y Daniel Bernouilli, Euler o Augustin Cauchy. Este último introdujo el concepto del *tensor de esfuerzos* $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t, \mathbf{x})$ como forma general del efecto de contacto. \mathbf{T} es un campo tensorial simétrico de segundo orden y dimensión 3 que verifica que cada elemento T_{ij} (con $i, j \in \{1, 2, 3\}$) representa la fuerza por unidad de superficie que actúa sobre la partícula fluida en la dirección i sobre la cara perpendicular al eje j , de manera que los elementos de su diagonal describen las componentes de la tensión normal, incluyendo las componentes de presión debidas al fluido que rodea al elemento de volumen considerado, y los demás las componentes cortantes o de arrastre. Este tensor se relaciona con \mathbf{f}_c por

$$\mathbf{f}_c = \nabla \cdot \mathbf{T},$$

cuya deducción se puede encontrar en [8]. La expresión resultante al sustituir este en (2.8) se llama la *ecuación de momentum de Cauchy*:

$$\rho(t, \mathbf{x}) \frac{D\mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{Dt} = \rho(t, \mathbf{x})\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{T}(t, \mathbf{x}),$$

o, alternativamente,

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \rho g_j + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}. \quad (2.9)$$

La idea fundamental para obtener \mathbf{T} es suponer que, para cada punto e instante, solo depende de \mathbf{u} a través del gradiente del velocidad $\nabla\mathbf{u}$ en dichas coordenadas. Introducimos ahora el *campo tensorial de deformación* $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t, \mathbf{x})$, que es la parte simétrica de $\nabla\mathbf{u}$ y cuyas componentes S_{ij} se definen como

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (2.10)$$

con $i, j = 1, 2, 3$. El tensor \mathbf{S} es, por construcción, simétrico, y, a grandes rasgos, describe el ritmo de deformación al que se ve sometido cada punto del fluido. Como el fluido es incompresible, se verifica la condición (2.7) y se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{tr } \mathbf{S} = 0, \quad (2.11)$$

para todo $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega$. La relación funcional entre el campo tensorial \mathbf{T} que describe las fuerzas internas y el tensor de deformación \mathbf{S} se denomina *ecuación constitutiva*, y es la que caracteriza las propiedades físicas del medio. El fluido se denomina *Newtoniano* si dicha relación es afín. Además, supongamos que el fluido es isótropo, esto es, que las propiedades no dependen de la dirección en la que son analizadas. Entonces, existe una función escalar $p = p(t, \mathbf{x})$, denominada *presión*, una función λ , llamada *viscosidad volumétrica*, y una función μ , llamada *viscosidad de cizallamiento* (o *viscosidad dinámica*), que verifican (ver [28] para un desarrollo con detalle y la demostración formal)

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}_3 + 2\mu\mathbf{S} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}_3, \quad (2.12)$$

donde \mathbf{I}_3 denota la matriz identidad 3×3 . El último término de la ecuación es nulo debido a la hipótesis de incompresibilidad (2.11). Los fluidos Newtonianos incluyen a la gran mayoría de líquidos, exceptuando algunos como la sangre o las pinturas, que se denominan *no-Newtonianos*. La viscosidad μ , que supondremos en primera aproximación constante (en realidad varía con la temperatura) toma valores reales no negativos, lo que se puede deducir de forma cualitativa mediante modelos físicos sencillos (véase [14]). Los fluidos para los que $\mu > 0$ se denominan *fluidos viscosos*, y los que cumplen que $\mu = 0$, esto es, que no sufren efectos viscosos, son *fluidos no viscosos* o *fluidos perfectos*. Si sustituimos (2.10) en la ecuación constitutiva (2.12) y expresamos la fórmula en notación de subíndices, se tendrá que, para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$,

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

donde hemos introducido la delta de Kronecker δ_{ij} . Entonces, usando que $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (2.13)$$

2.4. Formulación de las ecuaciones

Juntando (2.9) y (2.13), llegamos a las famosas ecuaciones de Navier-Stokes, formuladas para fluidos incompresibles y Newtonianos:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.15)$$

Si dividimos entre la densidad, y definiendo la *viscosidad cinemática* (o, simplemente, *viscosidad*) como $\nu = \frac{\mu}{\rho} \geq 0$, simplificamos la ecuación a:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.17)$$

Como la densidad es constante, la tomaremos en lo que sigue como $\rho = 1$ sin pérdida de generalidad. Estas ecuaciones pueden plantearse en un espacio \mathbb{R}^n con dimensión $n \geq 1$ arbitraria, pero el caso de mayor interés es para $n = 3$. Se trata de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales (concretamente, cuadráticas, por el producto $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$) y de segundo orden (por el operador laplaciano Δ). En \mathbb{R}^3 , tiene 4 ecuaciones y 4 incógnitas, que son el campo de velocidades $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, que tiene 3 componentes, y el campo de presiones $p(t, \mathbf{x})$. Analicemos término a término las ecuaciones:

- El lado izquierdo de la igualdad es la derivada material del campo de velocidades, que describe la variación de dicho campo en una partícula determinada a lo largo de su trayectoria. Lo hace a través de la suma de la derivada temporal euleriana $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, que es la aceleración local en el punto espacial \mathbf{x} , y la derivada convectiva $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.
- El primer término del lado derecho de la ecuación (2.16) es el opuesto del gradiente de presiones $-\nabla p$ dividido entre la densidad. Se trata por tanto de una aceleración que está dirigida desde los puntos sometidos a una mayor presión interna hacia los de menor presión, y cuyo peso en la ecuación es inversamente proporcional a la densidad. Así, se puede deducir que el fluido tiene una tendencia a homogeneizar el campo de presiones. La presión queda, por tanto, determinada en (2.16) salvo un término aditivo que no depende de la posición pero sí puede depender del tiempo.
- El segundo término del lado derecho de (2.16), \mathbf{g} , es la resultante de las aceleraciones externas que se ejercen sobre el fluido, que suele tratarse del campo gravitatorio. Nótese que este campo es conservativo, es decir, existe una función potencial U tal que $\mathbf{g} = -\nabla U$, por lo que podemos incluirlo en el término de presión y escribir $-\nabla \pi$,

siendo $\pi = p + \rho U$ la *presión hidrostática*, de gran importancia en el estudio de la estática de fluidos.

- Finalmente, el último término $\nu \Delta \mathbf{u}$ es el producto del coeficiente de viscosidad ν y el laplaciano del campo \mathbf{u} . Se le llama término de *difusión* y recoge las fuerzas viscosas de rozamiento interno del fluido, que suponen una resistencia al movimiento de las partículas. El coeficiente de viscosidad ν funciona como el peso de dichas fuerzas, de manera similar al coeficiente de rozamiento en la dinámica de los sólidos.

Además de las anteriores ecuaciones, para tener un problema bien propuesto en el sentido matemático, y como es habitual en las EDPs, se imponen unas condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

para algún campo vectorial \mathbf{u}_0 definido en \mathbb{R}^3 . Si trabajásemos en un dominio abierto, convexo y de frontera regular $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, se impondrían además condiciones del tipo Dirichlet.

2.5. El problema del milenio

Ahora, estamos en condiciones de enunciar el famoso problema del milenio formulado por el Instituto Clay de Matemáticas en el año 2000, pero que lleva abierto desde la primera formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes hace casi 200 años, en 1822. Para ello, seguiremos esencialmente la exposición de Charles Fefferman en la presentación del problema para dicho instituto (ver [13]).

Sean las condiciones iniciales (2.18), con \mathbf{u}_0 un campo vectorial de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, con $n \in \mathbb{N}$, y de divergencia nula en \mathbb{R}^n , y planteamos las ecuaciones (2.16), (2.17) definidas en $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$. Consideremos el campo \mathbf{g} también regular. Dado que el problema se plantea en un espacio no acotado, por motivos de coherencia con la física, así como por simple comodidad matemática, se someten los datos iniciales y la solución, así como sus derivadas, a condiciones de decrecimiento rápido. Para ello, bastan con suponer que $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbf{g} \in \mathcal{S}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$.

Declararemos admisibles aquellas soluciones clásicas $\mathbf{u}, p \in C^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^n)$ para algún $T > 0$ que verifiquen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{u}(t, \mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} < \infty \quad \forall t,$$

esto es, que $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Desde el punto de vista de la mecánica esto significa que la energía cinética es acotada, una condición necesaria para que las soluciones sean de validez física.

El problema consiste en demostrar cuál de los dos resultados siguientes es verdadero:

1. **Problema de existencia y regularidad:** Sea $\nu > 0$ constante y $\mathbf{g} = 0$ y supongamos que \mathbf{u}_0 satisface las condiciones de regularidad, divergencia nula y decaimiento rápido en el infinito mencionadas. Entonces existen un par de funciones $\mathbf{u}, p \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, con $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, que resuelven el sistema (2.16), (2.17) en el sentido clásico y cumpliendo la condición inicial (2.18).
2. **Problema de colapso de la solución:** Sea $\nu > 0$ constante. Existe un dato inicial \mathbf{u}_0 y una función \mathbf{g} cumpliendo las condiciones anteriores, tales que no existe una solución clásica (\mathbf{u}, p) del sistema (2.16), (2.17) verificando la condición inicial (2.18). Además, se les añade el problema de unicidad:
3. **Problema de unicidad:** Dada una teoría de existencia de soluciones físicamente aceptables, entonces la solución es única durante todo el tiempo de existencia.

En otras palabras, ¿se conserva la diferenciabilidad o hay, por el contrario, una pérdida repentina de regularidad en algún instante finito $T > 0$? Este colapso significaría un fallo del modelo matemático para predecir el comportamiento del fluido y podría servir como una posible explicación para la aparición del fenómeno físico de las turbulencias, algo conjeturado por el matemático Jean Leray (para más detalles, ver [27]). El problema está planteado tanto en \mathbb{R}^n como en un dominio periódico. El caso $n = 2$ ya se ha resuelto, resultando que la regularidad se conserva, pero el análogo tridimensional todavía está abierto tras varios siglos, lo que muestra su enorme dificultad. Pese a ello, se conocen varias particularidades:

- Si cambiamos $T = \infty$ por un tiempo pequeño se conserva la regularidad.
- Si la condición inicial es lo suficientemente pequeña en un sentido a precisar, o si es fuertemente oscilante, entonces se conserva la regularidad.
- Si hubiese un colapso de la solución y no pudiese extenderse más allá de un tiempo $T > 0$, entonces \mathbf{u} se va a infinito cuanto $t \rightarrow T$, fenómeno conocido como *blow-up* o explosión. Este comportamiento es común en las ecuaciones diferenciales no lineales. El ejemplo más simple y representativo es el de la ecuación del crecimiento cuadrático unidimensional

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = x_0 > 0, \quad t > 0$$

cuya solución es $x(t) = \frac{1}{T-t}$, con $T = \frac{1}{x_0}$, que es regular y está definida en $(0, T)$, pero explota en $t = T$ pues $\lim_{t \rightarrow T^-} x(t) = \infty$.

Capítulo 3

Las ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles

Se llaman *fluidos ideales* a los fluidos perfectos (no viscosos), incompresibles y homogéneos. Las *ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles*, que consideraremos en \mathbb{R}^3 , están formuladas para este tipo de fluidos. Por tanto, este sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales se obtiene a partir del de Navier-Stokes (2.16), (2.17) con $\rho = 1$, tomando el límite $\nu \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.1)$$

Es importante aclarar lo que se entiende por solución de las ecuaciones (3.1). Como es habitual en el estudio de las soluciones en derivadas parciales, haremos uso del concepto de *solución débil*. Se dirá que un campo $\mathbf{u} \in L_{1,loc}([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^3))$ es *solución* de la ecuación (3.1) si satisface:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \mathbf{u} \cdot \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi \right\} dt d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}_0 \cdot \psi(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

para cualquier función $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla \cdot \psi = 0$ en $[0, \infty) \times \mathbb{R}^3$. Nótese que, si aplicamos el operador divergencia en la primera ecuación del sistema (3.1), tenemos la siguiente ecuación de Poisson:

$$-\Delta p(t, \mathbf{x}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))^2,$$

y, asumiendo ciertas condiciones de regularidad y decaimiento, llegamos a que

$$\nabla p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))^2 d\mathbf{y}, \quad (3.3)$$

(ver [26]). Luego, la presión se puede determinar a partir de la velocidad salvo un término que solo depende del tiempo y no de la posición, y el operador que relaciona la presión y la velocidad es no local y cuadráticamente no lineal.

Respecto al estudio de las soluciones, solo se ha logrado demostrar hasta ahora, para las ecuaciones de Euler tridimensionales con condiciones iniciales regulares (en el sentido de Sobolev), la existencia de una única solución regular de manera local en el tiempo, esto es, definida en un intervalo de tiempo finito ([26]):

Teorema 3.1. *Sea $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, con $s \geq 3$, una función que satisface $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$. Entonces, existe un tiempo finito $T_0 > 0$, que depende solamente de la cantidad $\|\mathbf{u}_0\|_{H^3(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)}$ para el cual existen dos únicas funciones*

$$\mathbf{u} \in C([0, T_0]; H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T_0]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3))$$

y

$$p \in C([0, T_0]; H^{s+1}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}))$$

que resuelven (3.1), para todo $t \in [0, T_0]$.

Este teorema asegura la existencia de soluciones regulares definidas en un intervalo de tiempo finito, pero no asegura que pierdan la regularidad o la forma en la que lo harían. Este problema, que sigue abierto hoy en día, constituye uno de los más importantes de este campo y de la matemática aplicada en general. La ausencia del término de difusión facilita el estudio de la ecuación y, a priori, esta posee una mayor probabilidad de formar singularidades debido al efecto regularizador asociado a dicho término (tiende a “suavizar” la solución). No obstante, las soluciones también son extremadamente inestables, lo que dificulta su análisis computacional. El caso bidimensional fue resuelto por el matemático Tosio Kato en 1967, quien probó un teorema de existencia y unicidad clásico (ver [18]).

3.1. Análisis local del campo de velocidades

El estudio de los fluidos ideales supone resolver un sistema de EDPs no lineales, debido al término $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Es por ello que es necesario simplificar el problema. Vamos a dar una descripción local del campo de velocidades de un fluido ideal, con el objetivo de comprender mejor su comportamiento y descomponerlo como suma de campos más sencillos. Este análisis, que está basado en los desarrollos de [3] y [26], servirá para introducir el campo de vorticidades $\boldsymbol{\omega}$, que será de gran importancia en el resto del documento.

Consideremos un fluido en \mathbb{R}^3 , y sea $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}), u_3(t, \mathbf{x}))$ el campo de velocidades del fluido, que a cada punto $(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ le hace corresponder el

vector velocidad de la partícula que ocupe dichas coordenadas en ese instante de tiempo. Supondremos que este campo es lo suficientemente diferenciable.

Sea un punto $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$. Vamos a estudiar el campo $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ en un entorno de dicho punto. Para ello, consideramos un desarrollo de Taylor de primer orden del campo \mathbf{u} en torno al punto (t_0, x_0) :

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0) + \nabla \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}^2\|),$$

con $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$. El término $\nabla \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0) \equiv \nabla \mathbf{u}$ es la matriz jacobiana del campo \mathbf{u} en el punto (t_0, \mathbf{x}_0) , definida, en notación de subíndices, como

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \partial_{x_j} u_i,$$

con $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Esta matriz admite una descomposición única

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{S} + \mathbf{\Omega}, \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{\Omega} &= \mathbf{\Omega}(t_0, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T), \end{aligned}$$

son la parte simétrica y antisimétrica de $\nabla \mathbf{u}$ en (t_0, \mathbf{x}_0) , respectivamente. A la matriz $\mathbf{S} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ se le llama *matriz de deformación* (nótese que coincide con (2.10)), y a la matriz $\mathbf{\Omega} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, *matriz de rotación*. Nótese que la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ es equivalente, en términos de estas matrices, a $\text{tr } \nabla \mathbf{u} = \text{tr } \mathbf{S} = 0$, ya que los elementos de la diagonal de $\mathbf{\Omega}$ son nulos por ser antisimétrica. Ahora, definimos el *campo de vorticidades* $\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x})$ del fluido como el rotacional del campo de velocidades, es decir,

$$\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1), \quad (3.5)$$

para cada $(t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$. Este campo verifica que

$$\mathbf{\Omega}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \quad (3.6)$$

y de ahí el nombre que se le da a la matriz $\mathbf{\Omega}$. Comprobamos esto haciendo uso de la notación de Einstein. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h})_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_j h_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jab} \partial_{x_a} u_b h_k \\ &= -\frac{1}{2} (\delta_{ia} \delta_{kb} - \delta_{ib} \delta_{ka}) \partial_{x_a} u_b h_k = \frac{1}{2} (\partial_{x_k} u_i - \partial_{x_i} u_k) h_k = \Omega_{ik} h_k, \end{aligned}$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita, definido como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{si } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}, \\ -1, & \text{si } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que cumple $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, y verifica que $\epsilon_{ijk} \epsilon_{iab} = \delta_{ja} \delta_{kb} - \delta_{jb} \delta_{ka}$.

Lema 3.2 (Caracterización local del campo de velocidades). *Para cualquier punto espacio-temporal del fluido $(t_0, \mathbf{x}_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, existe un entorno espacial en el que el campo de velocidades viene dado por:*

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t_0, \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2). \quad (3.7)$$

Para ilustrar el tipo de movimiento que provoca cada término, estudiamos las curvas características del fluido en cada caso a partir de la ecuación (2.1):

- Para $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t_0, \mathbf{x}_0)$, la ecuación (2.1) es

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t) = \mathbf{u}_0(t, \mathbf{x}_0) \implies \mathbf{X}(t; t_0, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{u}_0(t_0, \mathbf{x}_0)(t - t_0),$$

que es una traslación en la dirección $\mathbf{u}_0(t_0, \mathbf{x}_0)$ de la partícula que se encuentra en $\boldsymbol{\alpha}$ en el instante t_0 .

- Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)^T$ (basta con efectuar una rotación de ejes), y que $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)^T = \mathbf{0}$, $t_0 = 0$. Entonces, para $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t_0, \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(0, \mathbf{0}) \times \mathbf{x}$, la ecuación (2.1) es

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t}(t) = -\frac{\omega}{2} X_2, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t}(t) = \frac{\omega}{2} X_1, \\ \frac{\partial X_3}{\partial t}(t) = 0, \end{cases}$$

cuya solución, aplicando las condiciones iniciales, es:

$$\begin{cases} X_1(t; 0, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \alpha_2 \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right), \\ X_2(t; 0, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_2 \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \alpha_1 \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right), \\ X_3(t; 0, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_3. \end{cases}$$

De esta manera, las soluciones son trayectorias circulares en el plano $X_3 = \alpha_3$ con centro $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, radio $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ y velocidad angular $\frac{\omega}{2}$.

- Supongamos que $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Por ser la matriz $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t_0, \mathbf{x}_0)$ simétrica, sabemos que es diagonalizable, esto es, existe una matriz ortogonal $\mathbf{O} = \mathbf{O}(t_0, \mathbf{x}_0)$ tal que

$$\mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}\mathbf{S}\mathbf{O}^{\mathbf{T}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

con $\lambda_i = \lambda_i(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$. Además, la traza de \mathbf{S} es nula por ser un fluido incompresible, y como la aplicación traza es invariante bajo transformaciones de semejanza, se tiene que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \iff \lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2).$$

En el nuevo sistema de coordenadas, cuyos ejes son los dados por las direcciones de los autovectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de \mathbf{S} , la ecuación (2.1) es

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t}(t) = \lambda_1 X_1, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t}(t) = \lambda_2 X_2, \\ \frac{\partial X_3}{\partial t}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2) X_3, \end{cases}$$

y su solución,

$$\mathbf{X}(t; \boldsymbol{\alpha}, 0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}.$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, entonces X_1, X_2 decrecen exponencialmente a 0, mientras que X_3 aumenta también de manera exponencial. Esto significa, en el sistema de coordenadas original, que existe un eje sobre el que el fluido se está comprimiendo a lo largo de sus dos direcciones formando un chorro, es decir, el fluido se deforma en el espacio.

Así pues, el Lema 3.2 significa que, localmente, el campo de velocidad se puede descomponer como la suma de una traslación rígida, una deformación y una rotación cuyo eje viene dado por la dirección que toma el campo de vorticidad en dicho punto y con velocidad angular proporcional a $\frac{\|\boldsymbol{\omega}\|}{2}$. Además, es muy general, pues la única condición que hemos requerido es la diferenciabilidad del campo \mathbf{u} para poder aplicar el teorema de Taylor.

Pueden encontrarse varios ejemplos de soluciones exactas sencillas para distintas formas de la matriz de deformación y de rotación en los que se ilustra la interacción entre ambos términos en [15].

3.2. El criterio de Beale-Kato-Majda

El problema de la pérdida de regularidad en las soluciones de las ecuaciones de Euler tridimensionales con condiciones iniciales diferenciables cobró una gran importancia

desde su planteamiento, y muchas computaciones numéricas fueron llevadas a cabo tratando de arrojar luz sobre el mismo. En estas simulaciones parecía que, para determinadas condiciones iniciales regulares, la formación de singularidades en los flujos era algo intrínseco a las ecuaciones. Sin embargo, la extrema inestabilidad de las ecuaciones dificultaba enormemente la verificación de las predicciones, y todavía lo hace hoy en día.

Tanto los experimentos numéricos como los estudios cualitativos mostraban evidencias de una conexión entre la formación de singularidades y la acumulación de vorticidad en regiones cada vez más pequeñas. Esta relación fue rigurosamente analizada por J.T. Beale, T. Kato y A. Majda, quienes, en 1984, publicaron el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar con detalle en [4].

Teorema 3.3. *Sea $\mathbf{u} \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^3))$, para $s \geq 3$, una solución de las ecuaciones de Euler, y supongamos que existe un tiempo $T_0 > 0$ para el que la solución $\mathbf{u}(t, \cdot)$ no puede extenderse permaneciendo en la clase anterior. Asumimos que T_0 es el primer instante en el que esto ocurre. Entonces el campo de vorticidades $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ verifica que*

$$\int_0^{T_0} \|\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x})\|_{L^\infty} dt = \infty,$$

y, en particular,

$$\limsup_{t \rightarrow T_0} \|\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x})\|_{L^\infty} = \infty.$$

Así pues, la pérdida repentina de regularidad de una solución inicialmente regular en un instante dado $T_0 > 0$ provoca que el valor máximo de la vorticidad (en valor absoluto) incremente sin límites a medida que dicho momento se acerca. En particular, se tendría que $\boldsymbol{\omega}$ es no acotada en \mathbb{R}^3 en el instante T_0 , por lo que se dice que tiene un blow-up de tiempo finito. De esta forma, la norma infinito de la vorticidad controla el colapso de las soluciones regulares de las ecuaciones de Euler tridimensionales, como expone el contrarrecíproco del anterior teorema, que enunciamos como un corolario:

Corolario 3.4. *Sea $T_0 > 0$. Existe una solución global de las ecuaciones de Euler 3D $\mathbf{u} \in C([0, T_0]; H^s) \cap C^1([0, T_0]; H^{s-1})$, para $s \geq 3$, si para todo $T > 0$ se verifica*

$$\int_0^T \|\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x})\|_{L^\infty} dt < \infty.$$

A modo de observación, este resultado fue originalmente demostrado en \mathbb{R}^3 , pero se puede aplicar también para dominios periódicos que dan lugar a flujos periódicos sin más que realizar ligeras modificaciones en la demostración (véase [16], [1]). Además, existen resultados similares para el caso viscoso, es decir, para las ecuaciones de Navier-Stokes.

3.3. Ecuaciones de la vorticidad

El criterio de Beale-Kato-Majda desvela una conexión entre la formación de singularidades en el fluido y su campo de vorticidades, de ahí la motivación para introducir este campo en las ecuaciones. Para ello, aplicamos el operador rotacional en el sistema (3.1). En la ecuación del movimiento, como el rotacional del gradiente de un campo escalar es nulo, se anula el término del campo de presiones, y si las fuerzas externas son conservativas, como el campo gravitatorio, también se anula este término. Al aplicar el rotacional en el lado izquierdo de dicha ecuación, tenemos por una parte que

$$\nabla \times (\partial_t \mathbf{u}) = \partial_t (\nabla \times \mathbf{u}) = \partial_t \boldsymbol{\omega}.$$

Para el término convectivo, usando la siguiente fórmula de cálculo vectorial, que se puede encontrar demostrada en [28],

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right),$$

y la identidad vectorial

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

se tiene que

$$\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Como la divergencia de un rotacional siempre es 0, la condición de incompresibilidad no es característica para la vorticidad, pero, usando $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, podemos poner \mathbf{u} en función de $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \implies \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} = -\Delta \mathbf{u} \implies \mathbf{u} = \nabla \times (-\Delta)^{-1} \boldsymbol{\omega}.$$

Por último, las condiciones iniciales pasarán a estar formuladas para el campo de vorticidad. Así, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} = \nabla \times (-\Delta)^{-1} \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega}(0, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (3.8)$$

Este sistema es equivalente a (3.1), teniendo en cuenta que \mathbf{u} se puede calcular mediante la segunda ecuación, verificando $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, y, que resuelto este sistema, la presión se puede calcular a partir de (3.3) La primera igualdad se denomina la *ecuación de la vorticidad*, y describe la evolución temporal de este campo. Esta ecuación es lineal en $\boldsymbol{\omega}$, por lo que a

datos iniciales nulos les corresponde una solución nula. En el caso de que el fluido fuera viscoso, bastaría con añadir un término de difusión $\nu\Delta\boldsymbol{\omega}$.

El término de la izquierda es la derivada material de la vorticidad. El término de la derecha es la derivada direccional de \mathbf{u} en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. Teniendo en cuenta la descomposición (3.4) de $\nabla\mathbf{u}$ y la expresión (3.6), que implica que $\boldsymbol{\omega} \in \text{Ker } \boldsymbol{\Omega}$ en todo punto e instante de tiempo, se tiene que:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{u} = \mathbf{S}\boldsymbol{\omega}.$$

Esto implica que la variación temporal de la vorticidad a lo largo de las trayectorias de las partículas es igual al producto de la matriz de deformación en cada punto por el vector de vorticidad correspondiente. Así pues, cuando $\boldsymbol{\omega}$ se alinea con alguno de los autovectores v_i ($i = 1, 2, 3$) de la matriz \mathbf{S} , $\boldsymbol{\omega}$ crece o decrece en magnitud de manera exponencial en función del signo del autovalor correspondiente. En particular, en dimensión $n = 2$ se verifica que $\mathbf{u} = (u, v, 0)^T$ y que $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)^T$, por lo que

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{u} = \omega \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u} = 0,$$

de donde se deduce que en el caso bidimensional $\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = 0$, esto es, la vorticidad se conserva a lo largo de las trayectorias.

La dinámica de las soluciones del sistema (3.8) se guía por algunos efectos como la no localidad, el transporte y el estiramiento de vórtices.

- La *no localidad* se origina en la segunda ecuación de (3.8), conocida como Ley de Biot-Savart, debido al término $(-\Delta)^{-1}$. Físicamente, indica que cualquier pequeña perturbación vorticial tiene efecto sobre el movimiento de cada partícula del fluido. La Ley de Biot-Savart es la misma que describe el campo magnético que induce una corriente eléctrica, y tiene la siguiente formulación integral a través de un núcleo:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \times \boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3. \quad (3.9)$$

- El *transporte de vórtices* indica que los vórtices se ven arrastrados por el campo de velocidades que ellos mismos generan, lo cual puede conllevar además un aumento o disminución de su magnitud. Este efecto se produce por el término $\mathbf{u} \cdot \nabla\boldsymbol{\omega}$.
- Por último, el *estiramiento de vórtices* se refiere al proceso por el cual estos varían su magnitud debido a los cambios que sufre el gradiente de velocidades en la dirección del vórtice, descritos a través de la derivada direccional $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{u}$. Este término resulta ser la principal fuente de singularidades, y de ahí el interés por estudiar su comportamiento e interacción con el término de transporte. Nótese que en dimensión $n = 2$ este término es nulo, lo cual es una de las claves de la globalidad en las soluciones.

Capítulo 4

Modelos unidimensionales

A lo largo de este capítulo introduciremos varios modelos unidimensionales de las ecuaciones de Euler en su formulación de vorticidad. Por analogía con las mismas, denominaremos también término de estiramiento de vórtices y término de transporte a los dos términos que pretenden modelizar el comportamiento de ambos.

4.1. El modelo de Constantin-Lax-Majda (CLM)

El modelo de Constantin-Lax-Majda (CLM), propuesto en 1985, abrió una línea de investigación que todavía se estudia hoy en día. Fue creado con el objetivo de analizar en dimensión $n = 1$ el efecto del estiramiento de vórtices $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{S} \boldsymbol{\omega}$ sobre las soluciones. Para ello, se tiene en cuenta que al hacer la derivada espacial en la ley de Biot-Savart (3.9) se puede obtener una expresión de la forma $\mathbf{S} = F(\boldsymbol{\omega})$, donde F es un operador lineal integral que conmuta con la traslación, con núcleo de Schwartz singular y de valor medio nulo en la esfera \mathbb{S}^2 (para más detalles, ver [6]). Solamente existe, salvo multiplicación por una constante, un operador unidimensional con propiedades similares: la *transformada de Hilbert*, definida, para $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ como

$$H\omega(x) = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(y)}{x-y} dy. \quad (4.1)$$

Nótese que en la definición no aparece la variable temporal y el dominio de la función ω es el eje espacial \mathbb{R} . En realidad, el eje temporal está también incluido en el dominio de la función ω , pero como la transformada de Hilbert solo actúa en el eje espacial, por comodidad omitiremos esta notación en ocasiones.

Para $1 < p < \infty$, la transformada de Hilbert (4.1) define un operador lineal continuo $H : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$. En particular, si $p > 1$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$, entonces $H(f)(x) \equiv Hf(x)$ está bien definida en c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ y es un elemento de $L^p(\mathbb{R})$. De entre las muchas propiedades

importantes que tiene este operador, una que será esencial para nosotros a lo largo del trabajo es la siguiente:

Lema 4.1. *Para $1 < p < \infty$, si $f \in L^p(\mathbb{R})$ es una función impar/par, entonces $Hf \in L^p(\mathbb{R})$ es una función par/impar. Además, la transformada de Hilbert es un operador antisimétrico en $L^p(\mathbb{R})$ (con $p > 1$), esto es:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Hf(x)f(x)dx = 0, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

La antisimetría se deduce directamente del lema A.3 tomando $f = g$. Además, para cualquier función holomorfa en el semiplano superior complejo, la transformada de Hilbert describe la relación entre sus partes real e imaginaria en la recta real. Concretamente, si f es holomorfa en el semiplano superior $\Im z > 0$ y continua en el eje real, entonces $\Im f(t) = H(\Re f)(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, suponiendo que la transformada está bien definida. Pueden encontrarse en el Apéndice más propiedades interesantes de este operador cuya lectura es recomendable para seguir con facilidad los desarrollos posteriores. También recogemos algunos resultados más técnicos que usaremos más adelante. Para más detalles sobre este operador y su utilidad de cara a los problemas del análisis diferencial, se recomienda consultar [24].

Tras esta pequeña introducción a la transformada de Hilbert, presentamos el modelo de Constantin-Lax-Majda:

$$\begin{cases} \partial_t \omega = \omega H(\omega), \\ \omega(0, x) = \omega_0(x). \end{cases} \quad (4.2)$$

Puede verse la introducción formal de este modelo en [6] y un análisis detallado de sus propiedades en [26]. La gran ventaja que ofrece este modelo es el hecho de que posee una solución explícita:

Teorema 4.2. *Considérese una condición inicial $\omega_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que decaiga lo suficientemente rápido cuando $|x| \rightarrow \infty$ (por ejemplo, $\omega_0 \in H^1(\mathbb{R})$). Existe una única solución para el modelo (4.2) que viene dada por la expresión*

$$\omega(t, x) = \frac{4\omega_0(x)}{[2 - tH\omega_0(x)]^2 + [t\omega_0(x)]^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Demostración. Consideraremos únicamente la transformada de Hilbert en el eje real, ya que los cálculos y resultados son los mismos en el caso periódico. Dada una condición inicial $\omega_0 \in H^1(\mathbb{R})$, sabemos que el problema (4.2) posee una única solución $\omega \in H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ para todo $t \geq 0$.

Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, su transformada de Hilbert $H(f)$ también pertenece a $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ y, por el teorema A.7, verifica en c.t.p. de \mathbb{R} la igualdad:

$$H\{fH(f)\} = \frac{1}{2} [H(f)^2 - f^2]$$

Para cada $t \geq 0$, la función $\omega(\cdot, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es, en particular, un elemento de $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Por tanto, podemos aplicar la transformada de Hilbert a la ecuación (4.2) y, empleando la identidad anterior, deducimos que $\forall t \geq 0$ y en c.t.p. $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} H(\omega)(t, x) = \frac{1}{2} [H(\omega)(t, x)^2 - \omega(t, x)^2], \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Definimos ahora en c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ la función $z : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como:

$$z(t, x) = H(\omega)(t, x) + i\omega(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Si hacemos la derivada temporal de $z(t, x)$, y utilizando la igualdad (4.4) y la ecuación del modelo (4.2), podemos ver que esta función satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} z(t, x)^2,$$

cuya solución explícita es

$$z(t, x) = \frac{2z(0, x)}{2 - tz(0, x)}$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ tales que $tz(0, x) \neq 2$ y en c.t.p. $x \in \mathbb{R}$. Finalmente, tomando la parte real e imaginaria de esta solución, se deduce que:

$$\begin{cases} \omega(t, x) = \frac{4\omega_0(x)}{[2 - tH\omega_0(x)]^2 + [t\omega_0(x)]^2}, \\ H(\omega)(t, x) = \frac{2H\omega_0(x)[2 - tH\omega_0(x)] - 2t\omega_0(x)^2}{[2 - tH\omega_0(x)]^2 + [t\omega_0(x)]^2}, \end{cases}$$

en c.t.p. $x \in \mathbb{R}$ y $\forall t \geq 0$ tales que $[2 - tH\omega_0(x)]^2 + [t\omega_0(x)]^2 > 0$. \square

Pese a su simplicidad, este modelo retiene muchas de las propiedades más importantes de la ecuación tridimensional y sus soluciones exhiben algunos de los fenómenos observados. En particular, existen condiciones iniciales regulares que dan lugar a la formación de singularidades. Una condición necesaria y suficiente para que (4.3) tenga un blow-up en un instante $T_0 > 0$ es que exista $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\omega_0(x_0) = 0$ y $H\omega_0(x_0) > 0$. En tal caso,

$$T_0 = \frac{2}{\sup\{H\omega_0(x) \mid \omega_0(x) = 0\}},$$

(ver [6]), y el blow-up tiene lugar en los puntos del conjunto

$$Z = \{x \in \mathbb{R} : \omega_0(x) = 0, H\omega_0(x) > 0\}$$

en los que se alcance el supremo. Por ejemplo, para $\omega_0(x) = \sin(x)$, se tiene que $H\omega_0(x) = -\cos(x)$ y

$$\omega(t, x) = \frac{4 \sin(x)}{[2 + t \cos(x)]^2 + [t \sin(x)]^2} = \frac{\sin(x)}{1 + \frac{t^2}{4} + t \cos(x)}$$

tiene una singularidad en el instante $t = 2$ en los puntos de la forma $x = \pi + 2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$.

El problema de determinar si hay un blow-up en tiempo finito es formulado en [11] de forma equivalente llevando a cabo la siguiente reescala temporal $t \rightarrow -2t$:

$$\partial_t \omega + 2H(\omega)\omega = 0, \quad \omega(0, x) = \omega_0(x). \quad (4.5)$$

Podemos comprobarlo llamando a la nueva variable temporal $s = -2t$ y $\tilde{\omega}(t, x) = \omega(s, x)$. Entonces,

$$\partial_t \tilde{\omega}(t, x) = \partial_t \omega(s, x) = \partial_s \omega(s, x) \partial_t s = -2\tilde{\omega}(t, x) H\tilde{\omega}(t, x).$$

Por cuestión de notación, seguiremos llamando t a la nueva variable y ω a la función $\tilde{\omega}$. El motivo principal de esta reescala es que simplifica la solución explícita del modelo a

$$\omega(t, x) = \frac{\omega_0(x)}{(1 + t \cdot H\omega_0(x))^2 + (t \cdot \omega_0(x))^2}, \quad (4.6)$$

$$H\omega(t, x) = \frac{H\omega_0(x)(1 + t \cdot H\omega_0(x)) + t \cdot \omega_0^2(x)}{(1 + t \cdot H\omega_0(x))^2 + (t \cdot \omega_0(x))^2}. \quad (4.7)$$

En este caso, si el conjunto

$$Z = \{x \in \mathbb{R} : \omega_0(x) = 0, H\omega_0(x) < 0\}$$

es no vacío, la solución $\omega(t, \cdot)$ explota en $L^\infty(\mathbb{R})$ (esto es, diverge a infinito) en el instante

$$T = \frac{1}{\sup_{x \in Z} (-H\omega_0(x))} > 0,$$

en los puntos de Z en el que se alcance el supremo. Si, en particular, la condición inicial ω_0 es una función impar y estrictamente positiva en $(0, \infty)$, la solución tiene una singularidad en $x = 0$ en el instante $T = -\frac{1}{H\omega_0(0)}$.

Aunque el intervalo $(0, \infty)$ corresponde a $(-\infty, 0)$ por la reescala utilizada, si lo planteamos en $(0, \infty)$, teniendo en cuenta la expresión de T y cambiando la condición inicial ω_0 por $-\omega_0$, se tiene que el problema de existencia de singularidad para alguna condición inicial es equivalente en ambos casos.

Por analogía, se podría pensar que la formación de singularidades también es posible en las ecuaciones de Euler tridimensionales, pero la omisión del efecto del término de transporte en este modelo imposibilita sacar conclusiones pues dicho término puede contraponerse al de estiramiento de vórtices. Además, el modelo de Constantin-Lax-Majda no se comporta bien al incorporar el término de difusión, y en [25], S. Schochet comprueba que una extensión del modelo con viscosidad no nula podría formar una singularidad en tiempo finito antes que su contraparte no viscosa, lo cual no tiene sentido debido al carácter estabilizador que se presupone que tiene dicho término.

4.2. El modelo de Okamoto-Sakajo-Wunsch

De Gregorio introdujo el siguiente modelo, más realista y cercano a las ecuaciones de Euler tridimensionales reales, y en el que los términos de transporte y de estiramiento de vórtices tienen el mismo peso.

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \partial_x \omega = \omega \partial_x u, \\ \partial_x u = H\omega, \\ \omega(0, x) = \omega_0(x). \end{cases} \quad (4.8)$$

Basándose en simulaciones numéricas, S. De Gregorio ([10]) conjeturó que la adición del término de transporte debería proporcionar regularidad global a la ecuación, para lo que existen fuertes evidencias numéricas (véase [17]). El efecto estabilizador que tiene el término de transporte en este modelo se puede ver explícitamente probando la condición inicial $\omega_0(x) = \sin(x)$, que da lugar a una solución estacionaria del modelo (4.8) mientras que ya hemos visto que da lugar a una singularidad en el modelo (4.2). Otro modelo es el de Cordoba-Cordoba-Fontelos, que constituye un modelo unidimensional para la ecuación de vorticidad cuasigeostrófica bidimensional (ver [22]). Esta ecuación es un modelo matemático de los flujos atmosféricos geofísicos que mostramos a continuación:

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta = 0, \\ u = R^\perp(\theta), \\ \theta(0, x, y) = \theta_0(x, y), \end{cases}$$

donde $R^\perp = (R_2, R_1)$, siendo R_i ($i = 1, 2$) las transformadas de Riesz en \mathbb{R}^2 , que son una generalización de la transformada de Hilbert para espacios euclidianos de dimensión $d > 1$. Por su parte, el modelo de Cordoba-Cordoba-Fontelos es el siguiente:

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \partial_x \theta = 0, \\ u = H\theta, \\ \theta(0, x) = \theta_0(x), \end{cases}$$

o, denotando $\partial_x \theta = \omega$ y derivando la ecuación ([11]),

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \partial_x \omega + \omega \partial_x u = 0, \\ \partial_x u = H\omega, \\ \omega(0, x) = \omega_0(x), \end{cases} \quad (4.9)$$

que es el mismo modelo que (4.8) pero cambiado de signo. En [7], se demuestra que este modelo desarrolla singularidades en tiempo finito empleando algunas propiedades especiales

de la transformada de Hilbert, y se conjetura que θ permanece uniformemente acotado en norma $C^{\frac{1}{2}}$, lo que parece ocurrir por alguna razón.

Todos estos modelos se culminan con el modelo de Okamoto-Sakajo-Wunsch (ver [23]), que se trata en realidad de una familia uniparamétrica de modelos que se obtiene introduciendo en el término de transporte un parámetro de peso $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \partial_t \omega + au \partial_x \omega = \omega \partial_x u, \\ \partial_x u = H\omega, \\ \omega(0, x) = \omega_0(x). \end{cases} \quad (4.10)$$

Si $a = -1$, se corresponde con el modelo (4.9); si $a = 0$, se corresponde con el modelo (4.2); y si $a = 1$, se corresponde con el modelo (4.8). Por tanto, vemos que la variación del parámetro de peso a da lugar a fenómenos completamente diferentes. Como en el modelo de Constantin-Lax-Majda, se usará en lo que queda otra formulación equivalente para este modelo:

$$\begin{cases} \partial_t \omega + au \partial_x \omega = 2\omega \partial_x u, \\ u = -\Lambda^{-1} \omega := -\int_0^x H\omega(y) dy, \\ \omega(0, x) = \omega_0(x). \end{cases} \quad (4.11)$$

obtenida a partir de (4.10) por medio de una reescala temporal $t \rightarrow 2t$ y las redefiniciones del parámetro $2a \rightarrow a$ y de la relación entre $\partial_x u$ y $H\omega$. Esta formulación es la usada por los autores de los resultados que se expondrán a continuación (ver [12]).

Se ha demostrado en [5] que si $a < 0$ entonces cualquier solución regular del modelo en su forma original (4.10) desarrolla una singularidad en tiempo finito como resultado de la cooperación entre el término de transporte y el de estiramiento de vórtices. Si, en cambio, $a > 0$, entonces los dos términos se contraponen y la existencia o no de blow-up es una cuestión que permanece abierta y que dependerá del tamaño de parámetro de peso y de la regularidad de la solución inicial. Así pues, comprobamos que el término de transporte tiene un efecto estabilizador frente al de estiramiento de vórtices.

Capítulo 5

Algunos resultados

5.1. Teoremas

Expondremos en este capítulo dos resultados relativos al modelo de Okamoto-Sakajo-Wunsch que tratan de esclarecer la relación existente entre el término de transporte y el de estiramiento de vórtices en cuanto a la formación de singularidades en tiempo finito. Estos dos resultados y sus demostraciones son extraídos de [11], y se pretende simplemente revisarlos y exponer sus ideas principales.

La estructura de las soluciones singulares que construiremos será *autosimilar*, concepto que introducimos de forma preliminar. Las soluciones de las ecuaciones de Euler tridimensionales (3.1) verifican la siguiente propiedad de invarianza de escala: si \mathbf{u} y p solucionan el sistema de ecuaciones en $(0, T_0) \times \mathbb{R}^3$ para algún $T_0 > 0$, entonces el par de funciones

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\lambda, \alpha}(t, \mathbf{x}) := \lambda^\alpha \mathbf{u}(\lambda^{\alpha+1}t, \lambda \mathbf{x}), \\ p^{\lambda, \alpha}(t, \mathbf{x}) := \lambda^{2\alpha} p(\lambda^{\alpha+1}t, \lambda \mathbf{x}), \end{cases} \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T_0) \times \mathbb{R}^3, \quad (5.1)$$

también resuelve el sistema (3.1), para todo $\lambda > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tomando como condición inicial $\mathbf{u}_0^{\lambda, \alpha}(x) = \lambda^\alpha \mathbf{u}_0(\lambda \mathbf{x})$. Por tanto, con el fin de describir un posible escenario de blow-up en un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ y en un instante $T > 0$, y para obtener una solución única con respecto a la invarianza (5.1), es natural probar con una solución de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(T-t)^\gamma} \mathbf{U} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{(T-t)^\beta} \right), \\ p(t, \mathbf{x}) = \frac{\alpha+1}{(T-t)^{2\gamma}} P \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{(T-t)^\beta} \right), \end{cases} \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \mathbb{R}^3. \quad (5.2)$$

Se dice que esta solución es *autosimilar*, y $\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son, respectivamente, el *perfil autosimilar* del campo de velocidades y del campo de presiones. Por otra parte, se llaman *exponentes de escalamiento* a las constantes $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$. Para ser soluciones únicas en

el sentido de la invarianza, deberá ser

$$\beta = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad \forall \alpha \neq 1.$$

Definido este concepto, consideremos la familia uniparamétrica de modelos de Okamoto-Sakajo-Wunsch en la forma (4.11):

$$\begin{cases} \partial_t \omega + au \partial_x \omega = 2\omega \partial_x u, \\ u = -\Lambda^{-1} \omega = -\int_0^x H\omega(y) dy, \\ \omega(0, x) = \omega_0(x), \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$ parámetro de peso y $u(t, \cdot)$, $\omega(t, \cdot)$ funciones en una variable espacial $x \in \mathbb{R}$.

A lo largo de este capítulo se trabajará tanto en el espacio de Sobolev $H^3 = H^3(\mathbb{R})$ como en el espacio Hölder $C^\alpha = C^\alpha(\mathbb{R})$. Cuando hablemos de una función regular, nos referimos a que pertenece al espacio H^3 . Además, el Teorema 1.1 nos permite asegurar que, para este caso, se tendrá que la función pertenece en particular a la clase $C^2(\mathbb{R})$.

Teorema 5.1. *Existe una constante absoluta a_0 tal que, para cada a cumpliendo $|a| < a_0$, hay una condición inicial impar $\omega_0 = \omega_0^a \in H^3(\mathbb{R})$ de (4.11) que depende analíticamente de a y que explota en tiempo finito de una forma autosimilar.*

Concretamente, para $|a| < a_0$, existe $\lambda = \lambda(a)$ que depende analíticamente de a y con $\lambda(0) = 0$, tal que la única solución local de (4.11) con condición inicial $\omega_0 := \omega_0^a$ en $C([0, 1]; H^3(\mathbb{R}))$ viene dada por:

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} \omega_0 \left(\frac{x}{(1-t)^{1+\lambda}} \right),$$

que explota en $t = 1$.

Teorema 5.2. *Existe una constante absoluta $c_0 > 0$ tal que, para $\alpha \in \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ y $|a| < c_0/\alpha$, existe un parámetro $\lambda^{(\alpha)}(a)$ cumpliendo $\lambda^{(\alpha)}(0) = 0$ y $\lambda^{(\alpha)}(a) > -2$, y una condición inicial impar de (4.11) $\omega_0^{(\alpha)}(a) \in L^{p, \infty} \cap C^\alpha(\mathbb{R})$, para $p = \frac{1+\lambda^{(\alpha)}(a)}{\alpha}$, que explota de forma autosimilar.*

Concretamente, la única solución local de (4.11) para una condición inicial $\omega_0 = \omega_0^\alpha$ en $C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}))$ viene dada por:

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} \omega_0^\alpha \left(\frac{x}{(1-t)^{\frac{1+\lambda^{(\alpha)}(a)}{\alpha}}} \right),$$

que explota en $t = 1$.

Antes de proceder a la demostración de ambos resultados, vamos a analizar su contenido. La idea principal que encierran es que la formación de singularidades en tiempo finito depende directamente de la interacción entre el término de estiramiento de vórtices y el término de transporte, de tal forma que la singularidad tendrá lugar si el segundo es más débil que el primero. El debilitamiento del término de transporte puede ocurrir de dos formas:

1. Haciendo el parámetro de peso a lo suficientemente pequeño.
2. Tomando la vorticidad inicial $\omega_0 \in C^\alpha$ con $\alpha > 0$ lo suficientemente pequeño.

5.2. “Toy model” ilustrativo

Para ilustrar estas ideas, los autores proponen un “toy model” explícitamente resoluble y discutido también en [11]. Consideremos la ecuación (4.11) reemplazando la derivada $\partial_x u$ por su valor en $x = 0$, $\partial_x u(t, 0) = -H\omega(t, 0)$, de forma que $u = -H\omega(t, 0)x$.

$$\partial_t \omega(t, x) - aH\omega(t, 0)x \cdot \partial_x \omega(t, x) + 2H\omega(t, 0) \cdot \omega(t, x) = 0,$$

donde asumimos que la condición inicial ω_0 es impar, no negativa en \mathbb{R}^+ y regular lejos del origen. Esta EDP es fácilmente resoluble por el método de las características, obteniendo

$$\omega(t, x) = e^{-2 \int_0^t H\omega(s, 0) ds} \cdot \omega_0 \left(x e^{a \int_0^t H\omega(s, 0) ds} \right),$$

que también es impar en x . Puede comprobarse fácilmente que la anterior expresión es la solución de la EDP. Ahora, usando que $H\omega$ será par, podemos evaluar

$$\begin{aligned} H\omega(t, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(t, x)}{0 - x} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2 \int_0^t H\omega(s, 0) ds} \omega_0 \left(x e^{a \int_0^t H\omega(s, 0) ds} \right) \frac{dx}{x} = -e^{-2 \int_0^t H\omega(s, 0) ds} c_0, \end{aligned}$$

donde $c_0 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega_0 \left(x e^{a \int_0^t H\omega(s, 0) ds} \right) \frac{dx}{x} = H\omega_0(0) < 0$, mientras no sea $\omega_0 = 0$. Entonces, derivando esta expresión respecto de t , tenemos que

$$\frac{dH\omega(t, 0)}{dt} = -2H\omega(t, 0)^2,$$

y, resolviendo esta ecuación diferencial, determinamos que

$$H\omega(t, 0) = -\frac{1}{c_0^{-1} - 2t} = -\frac{c_0}{1 - 2c_0 t}, \quad \text{para } t > \frac{1}{2c_0}.$$

Podemos insertar esto en la expresión de $\omega(t, x)$ y, usando que

$$\int_0^t H\omega(s, 0)ds = \frac{1}{2} \ln(1 - 2c_0t),$$

concluimos que

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1 - 2c_0t} \omega_0 \left(x (1 - 2c_0t)^{a/2} \right).$$

Entonces, podemos observar:

- Si $a \leq 0$, la solución desarrolla en el punto $x = 0$ una singularidad en el instante $t = \frac{1}{2c_0}$ para cualquier perfil no trivial ω_0 .
- Si $a = 2$, podemos distinguir dos casos: Si la condición inicial ω_0 es por lo menos de clase C^1 en \mathbb{R} , entonces la solución permanece regular para todo instante de tiempo. Esto puede comprobarse, por ejemplo, aplicando el Teorema del Valor Medio en la variable x y usando que $\omega_0(0) = 0$ por ser función impar:

$$|\omega(t, x) - \omega(t, 0)| = \left| \frac{\omega_0(x(1 - 2c_0t))}{1 - 2c_0t} \right| \leq x \|\omega'_0\|_{L^\infty} < \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si, en cambio, la condición inicial es de la forma $\omega_0(x) = C \text{sign}(x)|x|^\alpha$ en un entorno de $x=0$ para algún $\alpha \in (0, 1)$ y $C > 0$ constante, entonces la solución tiene una singularidad en el origen en el instante $t = \frac{1}{2c_0}$.

- Con mayor generalidad (véase [11]), si $a > 0$ y la condición inicial es al menos de clase $C^{\frac{1}{2a}}$ con derivadas hasta el orden $[\frac{1}{2a}]$ (parte entera de $\frac{1}{2a}$) nulas en el origen, entonces la solución es global, lo que, en particular, significa que si la condición inicial verifica

$$|\omega_0(x)| \lesssim |x|^{2/\alpha},$$

entonces la solución es global. En otro caso, podría existir un blow-up.

5.3. Demostraciones de los Teoremas 5.1 y 5.2

5.3.1. Estructura

Las dos demostraciones siguen exactamente los mismos pasos, con la diferencia de que una cuenta con la simplificación de estar formulada para el caso regular, mientras que la otra hay que adaptarla al caso de continuidad Hölder.

1. Los autores comienzan estudiando con detalle el modelo CLM, que constituye el caso $a = 0$ de la ecuación (4.11). Se construyen soluciones que tengan un perfil autosimilar y exploten en tiempo finito de la forma que nos interesa. Se distinguirá el caso regular del caso de continuidad Hölder.

2. Posteriormente, se trata de extender las soluciones construidas para el caso regular con $a = 0$ a soluciones de la ecuación (4.11) para $a \neq 0$ (si este parámetro es lo suficientemente pequeño) con el mismo perfil autosimilar y que también exploten en tiempo finito. Para ello, trataremos de linealizar la ecuación satisfecha por las soluciones autosimilares alrededor de la solución del caso $a = 0$. Al considerar una ecuación funcional paramétrica $N(f, a) = 0$, la forma usual de probar la existencia de una familia de soluciones (f^a, a) (para a suficientemente pequeño) alrededor de una solución $(f^0, 0)$ conocida es utilizando el Teorema de la Función Implícita. Sin embargo, este resultado requiere la invertibilidad del operador lineal $\frac{\partial N}{\partial f}(f^0, 0)$, y en nuestro caso este operador no es ni inyectivo ni sobreyectivo pues tiene un núcleo unidimensional y su imagen tiene codimensión uno. Para que una función $f \in H^3$ esté en el rango de este operador, veremos que debe satisfacer una condición de consistencia que relacione su transformada de Hilbert y su derivada en $x = 0$. Esto lo remediamos añadiendo un parámetro $\lambda(a)$, de modo que buscaremos una solución de la forma $\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} F^a(\frac{x}{(1-t)^{\lambda(a)}})$. La elección de dicho parámetro que permita extender la solución para $a = 0$ se hará por medio de un proceso iterativo que para converger requerirá que la inversa del operador lineal esté acotado en el espacio de trabajo.
3. Finalmente, haremos los mismos pasos para las soluciones con un perfil Hölder-continuo y veremos que en este caso el parámetro a puede tomarse hasta del orden de α^{-1} , siendo este el índice de continuidad Hölder de la solución para $a = 0$.

A lo largo de las demostraciones, y especialmente en los últimos pasos, para probar la acotación de los operadores necesarios, serán empleadas algunas propiedades de la transformada de Hilbert y varias desigualdades funcionales que están recogidas en el Apéndice.

5.3.2. Notación

Utilizaremos las letras C, c para denotar de forma genérica a constantes genéricas cuyos valores pueden variar de una igualdad a otra. Escribiremos $x \lesssim y$ cuando exista una constante $c > 0$ tal que $x \leq cy$. Indicaremos la dependencia de una función o constante con parámetro empleando un subíndice o superíndice. En el caso Hölder y con el fin de simplificar las cuentas, utilizaremos tildes para denotar la siguiente transformación que actúa en funciones en \mathbb{R}^+ :

$$\tilde{f}(w) := f(w^{\frac{1}{\alpha}}), \quad \alpha \in (0, 1).$$

5.3.3. Soluciones autosimilares del modelo de Constantin-Lax-Majda

El caso $a = 0$ reduce el modelo (4.11) a la ecuación de Constantin-Lax-Majda (4.5)

$$\partial_t \omega + 2H(\omega)\omega = 0, \quad \omega(0, x) = \omega_0(x). \quad (5.3)$$

Como explicamos previamente, esta ecuación puede resolverse de manera explícita y tiene por solución el par (4.6), (4.7). Consideremos la condición inicial

$$\omega_0(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

cuya transformada de Hilbert es

$$H\omega_0(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Puede comprobarse esto último a partir de la definición de $H\omega_0$, aunque se verá posteriormente en la prueba de la proposición 5.3. Si introducimos estas expresiones en (4.6), tenemos:

$$\begin{aligned} \omega(t, x) &= \frac{\frac{x}{x^2+1}}{\left(1 - \frac{t}{x^2+1}\right)^2 + t^2 \cdot \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + 1 - 2t + \frac{t^2}{x^2+1} + \frac{t^2 x^2}{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{1-t} \cdot \frac{\frac{x}{1-t}}{1 + \left(\frac{x}{1-t}\right)^2} = \frac{1}{1-t} \cdot \omega_0\left(\frac{x}{1-t}\right). \end{aligned}$$

Como la transformada de Hilbert solo depende de la variable espacial, también tenemos

$$H\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} \cdot H\omega_0\left(\frac{x}{1-t}\right).$$

Por tanto, la solución es autosimilar y explota en el instante $t = 1$. Vemos además que el factor de estiramiento de vórtices $H\omega(t, \cdot)$ alcanza su máximo (en valor absoluto) en el origen, y por tanto arrastra el máximo de $\omega(t, \cdot)$ hacia este punto, lo que por otra parte intensifica el estiramiento. Podemos ver estos efectos en las figuras.

En [11], se caracteriza además el perfil de blow-up para las soluciones de la ecuación (4.5) cuyas condiciones iniciales sean impares y positivas en $(0, \infty)$. Resulta que la naturaleza del blow-up depende solo del comportamiento de la condición inicial ω_0 en un entorno de $x = 0$, y más aún, el blow-up es de tipo autosimilar con diferentes parámetros de escala en función de si $0 < \omega'_0(0) < \infty$, $\omega'_0(0) = +\infty$ o $\omega'_0(0) = 0$, aunque este último caso no está presente en este desarrollo. Al decir “de tipo autosimilar” nos referimos a que la solución se compone de la suma de un término autosimilar y un término uniformemente acotado

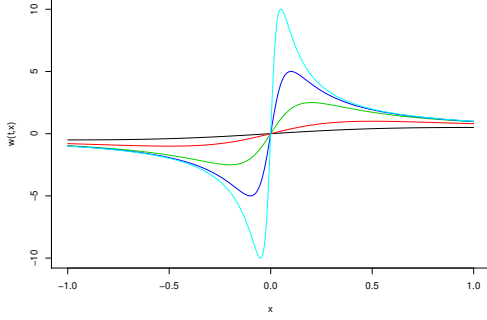


Figura 5.1: Representación de $\omega(t, x)$ para distintos instantes $t=0.95, 0.9, 0.8, 0.5, 0$ (de arriba a abajo en el origen)

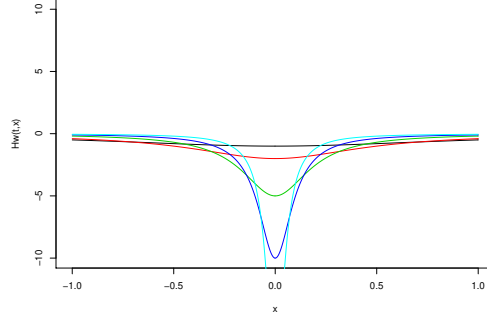


Figura 5.2: Representación de $H\omega(t, x)$ para distintos instantes $t=0.95, 0.9, 0.8, 0.5, 0$ (de arriba a abajo en el origen)

hasta el momento del blow-up. Así pues, si el signo \approx significa igual salvo un término uniformemente acotado hasta el instante $t = 1$, tenemos que, en el caso $0 < \omega'_0(0) < \infty$,

$$\omega(x, t) \approx \frac{x}{(1-t)^2 + t^2 x^2} = \frac{1}{1-t} F\left(\frac{x}{1-t}\right),$$

con $F(z) = \frac{z}{z^2+1}$. Si, por otra parte, $\omega'_0(0) = +\infty$, entonces, suponiendo que la condición inicial es de la forma $\omega_0(x) = \text{sgn}(x)|x|^\alpha \Omega_1(x)$ para algún $\alpha \in (0, 1)$ y siendo Ω_1 una función par lo suficientemente diferenciable y de decaimiento rápido con $\Omega_1(0) = 1$ y $\Omega_1 > 0$ en \mathbb{R} , se tiene que, cerca de $x = 0$ y $t = 1$,

$$\omega(t, x) \approx \frac{1}{1-t} F\left(\frac{x}{(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right),$$

con

$$F(z) = \frac{\text{sign}(z)|z|^\alpha}{1 + 2|z|^\alpha \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + |z|^{2\alpha} \csc^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}.$$

No desarrollaremos las deducciones de ambas caracterizaciones por falta de espacio y porque estos resultados no son estrictamente necesarios para la demostración de los teoremas. Los detalles de las mismas se pueden encontrar en [11].

Para el caso regular, tomemos la ecuación (4.5) e, introduciendo la variable $z = \frac{x}{1-t}$ para simplificar la notación, impongamos el siguiente ansatz (o función de prueba) autosimilar

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} F_0\left(\frac{x}{1-t}\right). \quad (5.4)$$

Veamos la ecuación que debe cumplir el perfil F_0 :

$$\partial_t \omega + 2H(\omega)\omega = 0 \iff \frac{1}{(1-t)^2} F_0(z) + \frac{x}{(1-t)^3} F_0'(z) + 2\frac{1}{(1-t)^2} F_0(z) H F_0(z) = 0.$$

Así pues, simplificando la expresión, la ecuación que debe satisfacer F_0 para que (5.4) sea solución de (4.5) es la siguiente:

$$F_0(z) + zF_0'(z) + 2F_0(z)HF_0(z) = 0. \quad (5.5)$$

Sabemos que $F_0(z) = \frac{z}{z^2+1}$ es solución de dicha ecuación y, de hecho, lo es cualquier perfil $F_0(z) = \frac{cz}{(cz)^2+1}$, con c constante. Además, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.3. *Supongamos que el perfil F_0 en (5.5) es impar, regular y que decae a 0 en el infinito. Entonces*

$$F_0 = \frac{z}{1+z^2},$$

salvo una reescala en la variable z (multiplicación por una constante).

Demostración. Tomemos la transformada de Hilbert en los dos miembros de (5.5):

$$HF_0(z) + z(HF_0)'(z) - F_0(z)^2 + HF_0(z)^2 = 0, \quad (5.6)$$

donde usamos las propiedades A.6 y A.8 de la transformada de Hilbert sobre la función impar F_0 , junto con el hecho de que la transformada de Hilbert conmuta con el operador de diferenciación.

Ahora, definimos $V = F_0 + iHF_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Se tiene entonces que

$$-iV^2 = -i(F_0 + iHF_0)^2 = 2F_0HF_0 + i(-F_0^2 + HF_0^2),$$

lo que permite reescribir el sistema de las ecuaciones (5.5),(5.6) en notación compleja como

$$V + zV' - iV^2 = 0 \iff V' = \frac{iV^2 - V}{z} \iff \frac{dV}{iV^2 - V} = \frac{dz}{z}.$$

Esta ecuación diferencial se puede integrar y tiene por solución

$$V(z) = \frac{1}{i + Cz} = \frac{1}{\Re Cz + i[1 + \Im Cz]} = \frac{\Re Cz - i[1 + \Im Cz]}{[\Re Cz]^2 + [1 + \Im Cz]^2},$$

con $C \in \mathbb{C}$ constante. Sabemos que $F_0 = \Re V$ es una función impar y $HF_0 = \Im V$ es par, y esto ocurre si y solo si $\Im C = 0$, de manera que

$$F_0(z) = \frac{Cz}{1 + C^2z^2}, \quad (5.7)$$

$$HF_0(z) = \frac{-1}{1 + C^2z^2}, \quad (5.8)$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante. □

5.3.4. Blow-up autosimilar para el caso regular

En esta sección se demostrará el Teorema 5.1 siguiendo los pasos explicados previamente, es decir, haremos una continuación de la solución autosimilar para el caso $a = 0$. Para ello, consideraremos ahora el ansatz

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} F\left(\frac{x}{(1-t)^{1+\lambda(a)}}\right), \quad \lambda(0) = 0, \quad (5.9)$$

siendo F una función impar y regular que decae a 0 en el infinito. Si denotamos $z = \frac{x}{(1-t)^{1+\lambda(a)}}$, al introducir esta expresión en el modelo (4.11) y expresar todos los términos en función de z , este toma la forma

$$\frac{1}{(1-t)^2} F(z) + \frac{(1+\lambda(a))x}{(1-t)^{2+\lambda(a)}} F'(z) - \frac{a}{(1-t)^2} \Lambda^{-1} F(z) F'(z) + 2 \frac{1}{(1-t)^2} F(z) H F(z) = 0,$$

de manera que, al simplificar,

$$F(z) + ((1+\lambda(a))z - a\Lambda^{-1}F(z)) F'(z) + 2F(z)HF(z) = 0. \quad (5.10)$$

Hemos visto previamente que cuando $a = 0$ entonces $F = F_0$ es el perfil que obtuvimos y $\lambda(0) = 0$. El término $-a\Lambda^{-1}F(z)F'(z)$ es el que se contrapone a la existencia de un perfil F que verifique la ecuación, y solo existirá tal solución si el parámetro a es lo suficientemente pequeño. Consideremos las siguientes expansiones en a en torno a $(F_0, 0)$:

$$F(z) = F_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a^n F_n(z), \quad \lambda(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \lambda_n, \quad (5.11)$$

donde las funciones F_n están en el espacio $H^3(\mathbb{R})$, que explicamos en los Preámbulos. Veremos que las series (5.11) convergen en $H^3(\mathbb{R})$. Nótese que, para $f \in H^3$, las expresiones como $f'(0)$, $f''(0)$ y $Hf'(0)$ están bien definidas por el Teorema del Embebimiento de Sobolev. Para que F resuelva la ecuación (5.10), se necesita que las series converjan en H^3 y otras condiciones en las F_n y λ_n . El proceso iterativo funcionará de la siguiente forma: Dadas F_1, \dots, F_{n-1} y $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, determinaremos F_n invirtiendo un operador lineal L en una ecuación lineal de la forma

$$L(F_n)(z) = G_n(z) - \lambda_n z F_0'(z) = G_n(z) - \lambda_n \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)^2},$$

para algún $G_n = G_n(F_1, \dots, F_{n-1}; \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, donde λ_n es el único número que proporciona una solución F_n salvo un núcleo unidimensional. Este núcleo verifica que cualquier elemento no trivial del mismo tiene una derivada no nula en el origen, por lo que podemos definir L^{-1} en la imagen de L forzando la derivada de F_n a anularse en el origen. Por tanto, procedemos a demostrar que, usando simples acotaciones de norma, las dos series de (5.11) son convergentes.

El operador lineal y su inversa

Insertamos las expansiones (5.11) en (5.10) y obtenemos, para cada $n \geq 1$, una igualdad de la forma

$$\begin{aligned} F_n + zF'_n + 2HF_0F_n + 2F_0HF_n \\ = \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda^{-1}(F_j)F'_{n-1-j} - z \sum_{j=1}^n \lambda_j F'_{n-j} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} F_j HF_{n-j}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nótese que definiendo el operador lineal L por

$$Lf := f + zf' + 2HF_0f + 2F_0Hf = f + zf' - \frac{2}{1+z^2}f + \frac{2z}{1+z^2}Hf, \quad (5.13)$$

las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$L(F_n)(z) = G_n(z) - \lambda_n z F'_0(z) = G_n(z) - \lambda_n \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}, \quad (5.14)$$

donde $G_n = G_n(F_1, \dots, F_{n-1}; \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ no es más que el lado derecho de la ecuación 5.12 sin el término de λ_n , esto es:

$$G_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda^{-1}(F_j)F'_{n-1-j} - z \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j F'_{n-j} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} F_j HF_{n-j}. \quad (5.15)$$

El lema que veremos a continuación, y cuya demostración pretende exponer y revisar la llevada a cabo por los autores en [11], nos garantiza que siempre existe un único λ_n de forma que la ecuación (5.14) es resoluble. Entonces, podremos definir

$$F_n := L^{-1} \left(G_n(z) - \lambda_n \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \right)$$

por medio de una fórmula integral explícita. En particular, el propósito del lema será principalmente proporcionar una fórmula de representación para el operador L^{-1} , bajo las suposiciones adecuadas. Posteriormente, llevaremos a cabo estimaciones de norma precisas para las funciones F_n .

Lema 5.4. *Consideremos la ecuación lineal*

$$Lf = g, \quad (5.16)$$

donde $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ es una función impar dada. Entonces, existe una solución $f \in H^3(\mathbb{R})$, que es necesariamente impar, si y solo si $g'(0) + 2Hg(0) = 0$. Si además imponemos que $f'(0) = 0$, la solución estará determinada de forma única por la expresión

$$\begin{aligned} L^{-1}g(z) = \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \cdot \int_0^z \left(\frac{1-w^2}{w} \hat{g}(w) + 2\hat{h}(w) \right) dw \\ - \frac{2z^2}{(1+z^2)^2} \cdot \int_0^z \left(-2\hat{g}(w) + \frac{1-w^2}{w} \hat{h}(w) \right) dw, \end{aligned} \quad (5.17)$$

con

$$\hat{g}(z) := \frac{g(z)}{z} - \frac{1}{1+z^2}g'(0), \quad \hat{h}(z) := \frac{Hg(z) - Hg(0)}{z} + \frac{2z}{1+z^2}Hg(0).$$

Demostración. Supongamos dada una solución $f \in H^3(\mathbb{R})$ para la ecuación (5.16). Si aplicamos la transformada de Hilbert en ambos lados de la igualdad y tenemos en cuenta la expresión (5.13) de Lf , obtendremos

$$Hf + z(Hf)' - \frac{2z}{1+z^2}f - \frac{2}{1+z^2}Hf = Hg, \quad (5.18)$$

donde se ha utilizado la identidad de Tricomi A.6. Denotando $d = Hf$ para simplificar, observamos que la solución f debe resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{pmatrix} f \\ d \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} f \\ d \end{pmatrix}' + \frac{2}{1+z^2} \begin{pmatrix} -1 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

siendo $d = Hf$ y $h = Hg$. Estamos interesados en el caso en el que f es impar y, por tanto, $d = Hf$ par. Luego, basta con resolver para \mathbb{R}_+ el problema de valor inicial dados $f(0)$ y $d(0)$. Debido a la presencia del coeficiente z , no está claro si el problema de valor inicial está bien planteado, y así deducimos la necesidad de la condición $g'(0) + 2h(0) = 0$. Evaluamos ambos lados de la segunda componente del sistema (5.19) en $z = 0$ y, usando que $d'(0) = 0$ por ser d' impar.

$$d(0) - 2d(0) = h(0) \iff -Hf(0) = Hg(0).$$

Si, por otra parte, dividimos los dos miembros de la primera componente de (5.19) entre z y tomamos el límite cuando $z \rightarrow 0^+$. Usando que $f(0) = g(0) = 0$ por ser impares, se sigue que

$$0 = \lim_{z \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(z)}{z} + f'(z) - \frac{2}{1+z^2} \frac{f(z)}{z} + \frac{2}{1+z^2} d(z) - \frac{g(z)}{z} \right) = 2d(0) - g'(0).$$

Por tanto, llegamos a que una condición necesaria para que el sistema (5.19) tenga una solución C^1 en $[0, \infty)$ es

$$d(0) = -h(0) = \frac{1}{2}g'(0).$$

Vemos que solo hay un par de condiciones iniciales $(f(0), d(0)) = (0, -h(0)) = (0, \frac{g'(0)}{2})$ capaz de proporcionar una solución diferenciable.

Denotamos, por simplificar, $\hat{d}(z) := d(z) - d(0)$ y hacemos lo propio con las demás funciones. Usando la condición anterior, podemos reescribir el sistema como

$$\begin{pmatrix} f \\ \hat{d} \end{pmatrix}' + \frac{1}{z(1+z^2)} \begin{pmatrix} -(1-z^2) & 2z \\ -2z & -(1-z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ \hat{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g(z)}{z} - \frac{1}{1+z^2}g'(0) \\ \frac{h(z)-h(0)}{z} + \frac{2z}{1+z^2}h(0) \end{pmatrix}.$$

Ahora, introduciendo las variables complejas

$$\begin{aligned} V(z) &= F_0(z) + iHF_0(z) = \frac{z-i}{1+z^2}, \\ U(z) &= f(z) + id(z), \\ \hat{G}(z) &= \hat{g}(z) + i\hat{h}(z), \end{aligned}$$

el sistema vectorial se puede reescribir como

$$-\frac{1}{z} \cdot \frac{1+iz}{1-iz} (U(z) - U(0)) + (U(z) - U(0))' = \frac{\hat{G}(z)}{z}.$$

Este sistema se puede integrar directamente obteniendo la solución

$$U(z) = U(0) + \frac{z(-2z + i(1-z^2))}{(1+z^2)^2} \cdot \left(c + \int_0^z \left(-2 - i\frac{1-w^2}{w} \right) \frac{\hat{G}(w)}{w} dw \right), \quad (5.20)$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante de integración. Volviendo a la notación real,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ \hat{d} \end{pmatrix} &= \frac{z}{(1+z^2)^2} \begin{pmatrix} 1-z^2 & -2z \\ 2z & 1-z^2 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \left(\begin{pmatrix} c_f \\ c_d \end{pmatrix} + \int_0^z \begin{pmatrix} (1-w^2)/w & 2 \\ -2 & (1-w^2)/w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}(w) \\ \hat{h}(w) \end{pmatrix} dw \right), \end{aligned}$$

donde c_f y c_d son dos constantes reales. Ahora, el término integral es de orden $O(z)$ para $|z|$ pequeño, por lo que c_f y c_d resultan ser las derivadas de f y \hat{d} evaluadas en $z = 0$. La segunda es 0 por ser \hat{d} una función par, mientras que c_f es también 0 si asumimos que $f'(0) = 0$. Esto, en particular, muestra que bajo esta condición la solución f es única.

Para concluir que la función f dada por la fórmula anterior es solución de $Lf = g$, debemos comprobar también que $Hf = d$. Los autores deducen esto al observar que las funciones V , U y G pueden extenderse como funciones holomorfas en el semiplano superior complejo, y que (5.20) define una función de este tipo con parte real impar y parte imaginaria par al restringirla al eje real. \square

Estimaciones para la inversa

Para estimar la inversa L^{-1} en $H^3(\mathbb{R})$, descomponemos su expresión (5.17) en doce operadores $\{T^{l,\sigma}, S^{l',\sigma'}\}$, con $l, l' \in \{1, 2\}$ y $\sigma, \sigma' \in \{-1, 0, 1\}$ definidos para funciones impares $g \in H^2(\mathbb{R})$ como

$$\begin{aligned} T^{1,\sigma}(g)(z) &:= \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \int_0^z w^\sigma \left(\frac{g(w)}{w} - \frac{1}{1+w^2} g'(0) \right) dw, \\ T^{2,\sigma}(g)(z) &:= \frac{2z}{(1+z^2)^2} \int_0^z w^\sigma \left(\frac{g(w)}{w} - \frac{1}{1+w^2} g'(0) \right) dw, \end{aligned}$$

y

$$S^{1,\sigma}(g)(z) := \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \int_0^z w^\sigma \left(\frac{Hg(w) - Hg(0)}{w} + \frac{2w}{1+w^2}(Hg)(0) \right) dw,$$

$$S^{2,\sigma}(g)(z) := \frac{2z}{(1+z^2)^2} \int_0^z w^\sigma \left(\frac{Hg(w) - Hg(0)}{w} + \frac{2w}{1+w^2}(Hg)(0) \right) dw.$$

De esta forma, la expresión (5.17) de L^{-1} se puede descomponer como la siguiente combinación lineal de los anteriores operadores:

$$L^{-1}(g)(z) = T^{1,-1}(g)(z) - T^{1,1}(g)(z) + 2S^{1,0}(g)(z) + 2zT^{2,0}(g)(z) - zS^{2,-1}(g)(z) + zS^{2,1}(g)(z). \quad (5.21)$$

Además, recordemos que F_n y λ_n deben satisfacer la ecuación

$$F_n = L^{-1} \left(G_n(z) - \lambda_n \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \right),$$

y que de la expresión (5.15) de G_n se puede deducir que este es de un orden derivativo mayor que las funciones F_j y que podría no decaer a 0 cuando $z \rightarrow \infty$. Debido a esta pérdida de un orden derivativo, los operadores $T^{1,-1}$ y $S^{1,-1}$, que son los más singulares de entre los que componen L^{-1} , no están acotados de $H^2(\mathbb{R})$ en $H^3(\mathbb{R})$. Ingenuamente uno podría esperar que estos operadores ganasen un orden derivativo, pero la división por w dentro de la integral evita ese hecho. Por tanto, para deducir que $F_n \in H^3(\mathbb{R})$, tendremos que utilizar la forma específica de G_n y las acotaciones en normas L^2 y H^3 que se establecen en los lemas siguientes.

Lema 5.5 (Cotas L^2). *Sean f y g funciones impares en \mathbb{R} . Para cada $l = 1, 2$ y $\sigma = -1, 0, 1$, tenemos las siguientes estimaciones:*

$$\begin{aligned} \|T^{l,\sigma}g\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|S^{l,\sigma}g\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C\|g\|_{H^2(\mathbb{R})}, \\ \|T^{l,\sigma}(zg')\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|S^{l,\sigma}(zg')\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C\|g\|_{H^2(\mathbb{R})}, \\ \|T^{l,\sigma}(\Lambda^{-1}(f) \cdot g')\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|S^{l,\sigma}(\Lambda^{-1}(f) \cdot g')\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C\|f\|_{H^2(\mathbb{R})}\|g\|_{H^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Lema 5.6 (Cotas H^3). *Sean E y F funciones impares en $H^3(\mathbb{R})$. Para cada $l = 1, 2$ y $\sigma = -1, 0, 1$, tenemos las estimaciones:*

$$\begin{aligned} \|S^{l,\sigma}(\Lambda^{-1}E) \cdot F'\|_{H^3(\mathbb{R})} + \|T^{l,\sigma}(\Lambda^{-1}E) \cdot F'\|_{H^3(\mathbb{R})} &\leq C\|E\|_{H^3(\mathbb{R})}\|F\|_{H^3(\mathbb{R})}, \\ \|S^{l,\sigma}(zF')\|_{H^3(\mathbb{R})} + \|T^{l,\sigma}(zF')\|_{H^3(\mathbb{R})} &\leq C\|F\|_{H^3(\mathbb{R})}, \\ \|S^{l,\sigma}(E \cdot H(F))\|_{H^3(\mathbb{R})} + \|T^{l,\sigma}(E \cdot H(F)) \cdot F'\|_{H^3(\mathbb{R})} &\leq C\|E\|_{H^3(\mathbb{R})}\|F\|_{H^3(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

No consideramos conveniente escribir el desarrollo de las demostraciones de estos dos lemas en este trabajo debido a su extensión. Si el lector desea verlas, están presentes en [11]. Se basan en probar cada una de las desigualdades funcionales caso por caso y empleando repetidamente las mismas herramientas matemáticas, que son los resultados A.1, A.8 y A.12 recogidos en el Apéndice de este documento. También se usan las desigualdades funcionales $\|f \cdot g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^p}$ y $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^i}$, para todo $i \geq 1$. Además, se deduce y utiliza la siguiente desigualdad, que será empleada de nuevo más adelante:

$$|H(\Lambda^{-1}(f) \cdot g')(0)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z} \Lambda^{-1}(f)(z) \cdot g'(z) dz \right| \leq C \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{H^1}. \quad (5.22)$$

Fin de la demostración del Teorema 5.1

Solo queda demostrar que las series (5.11) son convergentes, para lo cual basta con ver que existe una constante absoluta $r > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, se tiene:

$$\|F_n\|_{H^3(\mathbb{R})} \leq r^n, \quad |\lambda_n| \leq r^n. \quad (5.23)$$

En tal caso, bastaría con tomar $a_0 < \frac{1}{r}$ tal que $\lambda(a) > -1/2$ para $|a| < a_0$. Por simplificar, denotaremos $\mu_n = \|F_n\|_{H^3(\mathbb{R})}$.

Vamos a tratar de expresar las desigualdades de los Lemas 5.5 y 5.6 en términos de las sucesiones $\{\mu_n\}$ y $\{\lambda_n\}$. Para ello, comenzaremos recordando las expresiones de las funciones $L(F_n)$ y G_n :

$$L(F_n)(z) = G_n(z) - \lambda_n z F_0'(z) = G_n(z) - \lambda_n \frac{z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}, \quad (5.24)$$

$$G_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda^{-1}(F_j) F'_{n-1-j} - z \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j F'_{n-j} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} F_j H F_{n-j}. \quad (5.25)$$

Además, en virtud del Lema 5.4, sabemos que la ecuación (5.24) tiene una solución (necesariamente impar) si y solo si se cumple

$$\lambda_n = G_n'(0) + 2HG_n(0).$$

Dicha solución será única si $F_n'(0) = 0$, y así el operador L^{-1} está bien definido. Podemos calcular

$$\begin{aligned} G_n'(0) &= \sum_{j=0}^{n-1} H F_j(0) F'_{n-1-j}(0) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j F'_{n-j}(0) - 2 \sum_{j=1}^{n-1} F_j'(0) H F_{n-j}(0), \\ H G_n(0) &= \sum_{j=0}^{n-1} H(\Lambda^{-1}(F_j) F'_{n-1-j})(0) - \sum_{j=1}^{n-1} (-F_j(0) F_{n-j}(0) + H F_j(0) H F_{n-j}(0)). \end{aligned}$$

Luego, usando las cotas $\|H(F_j)\|_{L^\infty}, \|F'_j\|_{L^\infty} \leq C\|F_j\|_{H^3}$ y (5.22), se puede deducir que

$$|\lambda_n| \leq C\mu_0\mu_{n-1} + C \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_j\mu_{n-1-j} + |\lambda_j|\mu_{n-j} + \mu_j\mu_{n-j}) \quad (5.26)$$

Dado λ_n , aplicando las desigualdades de los Lemas 5.5 y 5.6 a la expresión (5.21) de L^{-1} como combinación lineal de los operadores $T^{l,\sigma}, S^{l',\sigma'}$ con $l, l' \in \{1, 2\}$ y $\sigma, \sigma' \in \{-1, 0, 1\}$, deducimos que

$$\mu_n \leq C|\lambda_n| + C\mu_0\mu_{n-1} + C \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_j\mu_{n-1-j} + |\lambda_j|\mu_{n-j} + \mu_j\mu_{n-j}) \quad (5.27)$$

Ahora, combinando las dos desigualdades (5.26) y (5.27), deducimos que debe existir alguna constante absoluta $C_0 > 0$ para la cual el parámetro

$$\zeta_n := \mu_n + C_0(|\lambda_n| + \mu_{n-1}), \quad (5.28)$$

para todo $n \geq 1$, verifica la desigualdad

$$\begin{aligned} \zeta_n \leq C \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_j \zeta_{n-j} &= C \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_j\mu_{n-j} + C_0(2|\lambda_j|\mu_{n-j} + \mu_j\mu_{n-j-1} + \mu_{j-1}\mu_{n-j})) \\ &\quad + C_0^2(|\lambda_j\lambda_{n-j}| + 2|\lambda_j|\mu_{n-j-1} + \mu_{j-1}\mu_{n-j-1}). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Sea $\bar{\zeta}_n$ la solución de la recursión cuadrática

$$\bar{\zeta}_n := \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\zeta}_j \bar{\zeta}_{n-j}, \quad n \geq 2,$$

con $\bar{\zeta}_1 := C\zeta_1$ (siendo C la constante de (5.29)). Entonces, se puede comprobar que la sucesión $\{\bar{\zeta}_n\}$ está formada por los coeficientes de la expansión de Taylor en torno a 0 de la función f que cumple $f(0) = 0$ y

$$f(z) - f(z)^2 = \bar{\zeta}_1 z.$$

Despejando en el polinomio cuadrático, llegamos a que esta es la función

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\bar{\zeta}_1 z}}{2}.$$

Así pues, para cada $n \geq 0$, será $\bar{\zeta}_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Entonces, tenemos que existen $C > 0$ y $r > 0$ tales que

$$\zeta_n \leq C^n \bar{\zeta}_n \leq r^n, \quad (5.30)$$

donde la primera desigualdad se sigue por inducción en n , y la segunda por ser f analítica en $z = 0$. Por la definición (5.28), la desigualdad (5.30) implica que se verifica (5.23), y esto finaliza la demostración.

A modo de observación, se puede desarrollar un argumento similar para cualquier espacio de trabajo H^s , con $s > 3$, lo que significa, en particular, que las funciones F_n y el perfil F son diferenciables $C^\infty(\mathbb{R})$.

5.3.5. Blow-up autosimilar para el caso Hölder-continuo

Solución autosimilar para la ecuación de Constantin-Lax-Majda

En el caso Hölder-continuo, veremos que el índice de regularidad α de la clase Hölder C^α a la que pertenecen las soluciones actúa de forma que el blow-up autosimilar existe mientras el parámetro de peso a tome valores en un rango que varía con $\frac{1}{\alpha}$. Como antes, comenzaremos construyendo una familia particular de soluciones autosimilares para la ecuación (4.5), pero en esta ocasión serán de clase C^α (concretamente, serán funciones regulares de $|z|^\alpha$). Por tanto, el procedimiento será análogo al caso regular pero habrá que lidiar con las dificultades que aparezcan fruto de la pérdida de regularidad. Esto nos llevará a definir los operadores \tilde{H}^n que describen cómo actúa la transformada de Hilbert sobre funciones de $|z|^\alpha$.

Consideramos ahora un ansatz autosimilar para la ecuación de Constantin-Lax-Majda de la siguiente forma:

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} F_0^{(\alpha)} \left(\frac{x}{(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right),$$

con $\alpha \in (0, 1)$ y donde, si $z = \frac{x}{(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}}$, $F_0^{(\alpha)}$ será un perfil de clase C^α por ser una función diferenciable de $|z|^\alpha$. Al introducir esta función de prueba en la ecuación (4.5), esta se reduce a la ecuación diferencial

$$F_0^{(\alpha)} + \frac{1}{\alpha} z F_0^{(\alpha)'} + 2F_0^{(\alpha)} \cdot HF_0^{(\alpha)} = 0, \quad (5.31)$$

y puede verse que las funciones

$$F_0^{(\alpha)}(z) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{sgn}(z) |z|^\alpha}{1 + 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) |z|^\alpha + |z|^{2\alpha}}, \quad (5.32)$$

$$HF_0^{(\alpha)}(z) = -\frac{1 + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) |z|^\alpha}{1 + 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) |z|^\alpha + |z|^{2\alpha}} \quad (5.33)$$

solucionan la ecuación (5.31). Si $\alpha = 1$, recuperamos las funciones (5.7) y (5.8). Comprobamos esto en la siguiente proposición, similar a la Proposición 5.3 del caso regular.

Proposición 5.7. *Para cada $0 < \alpha \leq 1$, $F_0^{(\alpha)}$ es la única condición inicial impar que es función diferenciable de z^α en \mathbb{R}^+ con extensión holomorfa al semiplano superior complejo y que define una solución autosimilar para la ecuación CLM.*

Demostración. La prueba es semejante a la del resultado análogo del caso regular. Definimos la variable compleja

$$V(z) := F_0^{(\alpha)}(z) + iHF_0^{(\alpha)}(z).$$

Al aplicar la transformada de Hilbert en ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$HF_0^{(\alpha)} + \frac{1}{\alpha}zHF_0^{(\alpha)'} + (HF_0^{(\alpha)})^2 - (F_0^{(\alpha)})^2 = 0$$

de forma que llegamos a la ecuación diferencial

$$V + \frac{1}{\alpha}zV' - iV^2 = 0,$$

que se puede integrar y tiene por solución la función

$$V(z) = \frac{1}{i + C^{(\alpha)}z^\alpha} = \frac{\Re(C^{(\alpha)}z^\alpha) - i[1 + \Im(C^{(\alpha)}z^\alpha)]}{[\Re(C^{(\alpha)}z^\alpha)]^2 + [1 + \Im(C^{(\alpha)}z^\alpha)]^2} \quad (5.34)$$

con $C^{(\alpha)} \in \mathbb{C}$ constante de integración, y donde $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$, siendo $z = re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \pi]$. Esta función es holomorfa en el plano superior complejo. Además,

$$C^{(\alpha)} = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) = e^{i\frac{(1-\alpha)\pi}{2}}$$

es el único número, salvo reescala por números positivos, que hace que $V(z)$ tenga parte real impar al restringirla a \mathbb{R} . Esto se puede comprobar sin más que aplicar la igualdad $V(z) = -\bar{V}(-z)$, para cada $z \in \mathbb{R}$, y cuya verificación significa que la función $\Re V = F_0^{(\alpha)}$ es impar y la función $\Im V = HF_0^{(\alpha)}$ es par. Al calcular la parte real e imaginaria de la función V para este valor de $C^{(\alpha)}$, recuperamos las expresiones (5.32) y (5.33), lo que además prueba que (5.33) es la transformada de Hilbert de (5.32). \square

La expansión en a y el operador lineal

En el caso Hölder-continuo, probamos el ansatz

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1-t}F\left(\frac{x}{(1-t)^{\frac{1+\lambda(a)}{\alpha}}}\right), \quad \lambda(0) = 0, \quad (5.35)$$

que al introducir en la ecuación (4.11) da lugar a

$$F(z) + \left(\frac{1+\lambda(a)}{\alpha}z - a \cdot \Lambda^{-1}F(z)\right)F'(z) + 2F(z)HF(z) = 0. \quad (5.36)$$

Como vemos, la ecuación es similar a la del caso regular, pero aparece un factor $\frac{1}{\alpha}$ en el término $(1 + \lambda(a))zF'(z)$, de manera que cuando α se hace más pequeño, este término gana más peso frente al término $-a \cdot \Lambda^{-1}F(z)F'(z)$, que es el que se contrapone a la existencia de una solución F .

A continuación, expandimos F y λ como

$$F(z) = F_0^{(\alpha)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a^n F_n(z), \quad \lambda(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \lambda_n, \quad (5.37)$$

donde todos los términos dependen de α , aunque por comodidad lo omitimos en la escritura. Insertamos estas expansiones en (5.36) y, denotando $F_0 = F_0^{(\alpha)}$, obtenemos, para cada $\alpha \in (0, 1)$ y $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_n + \frac{1}{\alpha} z'_n + 2HF_0 \cdot F_n + 2F_0HF_n \\ = \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda^{-1}(F_j)F'_{n-1-j} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \lambda_j z F'_{n-j} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} F_j HF_{n-j}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Como en el caso regular, escribimos (5.38) como

$$L(F_n)(z) = G_n(z) - \frac{1}{\alpha} \lambda_n z F'_0(z), \quad (5.39)$$

$$G_n = G_n(F_1, \dots, F_{n-1}; \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \quad (5.40)$$

donde el operador lineal $L = L^{(\alpha)}$ se define como

$$Lf = f + \frac{1}{\alpha} z f' + 2HF_0 f + 2F_0 H f.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único λ_n para el que la ecuación lineal (5.39) tiene solución, y esto permitiría definir F_n como

$$F_n(z) = L^{-1} \left(G_n(z) - \frac{1}{\alpha} \lambda_n z F'_0(z) \right).$$

La idea principal de la demostración reside en el hecho de que F_0 , HF_0 y, por tanto, $\Lambda^{-1}(F_0)F'_0$, son funciones diferenciables en la variable $w := z^\alpha$ en el semieje real positivo \mathbb{R}^+ . Deduciremos una fórmula para el operador L^{-1} en función de la nueva variable w y después simplemente acotaremos las funciones F_n en $H^3(\mathbb{R}^+)$ con respecto a w . Además, dada una función f definida en \mathbb{R}^+ , emplearemos la notación $\tilde{f}(w) := f(w^{1/\alpha})$. Con esta notación, (5.32) y (5.33) se expresan como

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0(w) &= \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)w}{1 + 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)w + w^2}, \\ H\tilde{F}_0(w) &= -\frac{1 + \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)w}{1 + 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)w + w^2}, \end{aligned}$$

la ecuación (5.39) se escribe

$$\tilde{L}\tilde{f} := \tilde{f} + w\tilde{f}' + 2\tilde{H}\tilde{F}_0\tilde{f} + 2\tilde{F}_0\tilde{H}\tilde{f} = \tilde{g}, \quad (5.41)$$

con $f = F_n$ y $g = G_n - \frac{1}{\alpha}\lambda_n z F'_0$, y (5.34) es

$$V(w) = \tilde{F}_0(w) + i\tilde{H}\tilde{F}_0(w) = \frac{1}{i + C^{(\alpha)}w}. \quad (5.42)$$

Ahora, como de costumbre, aplicamos la transformada de Hilbert en ambos lados de la ecuación (5.41), definimos

$$\begin{aligned} U(w) &= \tilde{f} + i\tilde{H}\tilde{f}(w), \\ G(w) &= \tilde{g}(w) + i\tilde{H}\tilde{g}(w), \end{aligned}$$

y llegamos a la ecuación diferencial compleja

$$U + wU' - 2iVU = G. \quad (5.43)$$

Las funciones G y V son holomorfas en el sector

$$S^{(\alpha)} := \{w \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(w) \leq \alpha\pi\},$$

por lo que las consideramos definidas en este conjunto y diremos, en un abuso de lenguaje, que este tipo de funciones son holomorfas. Probaremos ahora un resultado análogo al Lema 5.4 del caso regular.

Lema 5.8. *Consideremos la ecuación diferencial (5.43) en $S^{(\alpha)}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

- *Existe una solución holomorfa U si y solo si G verifica la condición*

$$G'(0) - 2iC^{(\alpha)}G(0) = 0, \quad (5.44)$$

con $C^{(\alpha)} = \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) + i\cos(\frac{\alpha\pi}{2})$, y dicha solución cumplirá que $U(0) = -G(0)$.

- *La solución U es única si imponemos además la condición $U'(0) = 0$. En tal caso, U está dada explícitamente por la fórmula integral*

$$\begin{aligned} U(w) - U(0) &= \frac{w}{(1 + 2w \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + w^2)^2} \\ &\cdot \left(-(1 + w^2) \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) - 2w + i(1 - w^2) \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \right) \\ &\cdot \int_0^w \left(-\frac{1 + s^2}{s} \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) - 2 - i\frac{1 - s^2}{s} \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \right) \frac{\hat{G}(s)}{s} ds, \quad (5.45) \end{aligned}$$

donde

$$\hat{G}(w) := G(w) + (1 - 2iV(w))G(0)$$

La demostración de este lema es muy similar a la del Lema 5.4 del caso regular. No será incluida en el documento por falta de espacio, pero si el lector desea verla, se puede encontrar en el artículo [11]. Una idea clave en la demostración es la necesidad de la condición (5.44) para que desaparezca la singularidad $1/s$ de la integral, pues la función $\frac{\hat{G}(w)}{w}$ se anula en $w = 0$. Así, la solución (5.45) estará bien definida. Esta solución se obtiene explícitamente resolviendo una ecuación equivalente a (5.43), y posee un núcleo unidimensional que cumple que cualquier múltiplo del mismo también da otra solución de la ecuación. La unicidad se obtiene con la condición $U'(0) = 0$.

A partir de la condición (5.44), podemos hallar el único valor de λ_n que permite que (5.39) tenga solución. Para ello, tomamos la parte real y, desarrollando $C^{(\alpha)}$, nos queda

$$\Re G'(0) + 2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Re G(0) + 2 \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Im G(0) = 0. \quad (5.46)$$

Vamos a calcular cada término de la ecuación. Se tiene que

$$G(w) = \tilde{g}(w) + i\tilde{H}g(w) = \left[\tilde{G}_n - \lambda_n w \tilde{F}'_0 \right] + i \left[H\tilde{G}_n - \lambda_n \tilde{H}(w \tilde{F}'_0) \right].$$

Luego

$$\begin{aligned} \Re G'(w) &= \tilde{G}'_n(w) - \lambda_n \tilde{F}'_0 - \lambda_n w \tilde{F}''_0(w), \\ \Re G'(0) &= \tilde{G}'_n(0) - \lambda_n \tilde{F}'_0(0). \end{aligned}$$

Además, por (5.42),

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_0(w) &= \Re V'(z) = \frac{-C^{(\alpha)}}{(i + C^{(\alpha)}w)^2}, \\ \tilde{F}'_0(0) &= \Re V'(0) = \Re C^{(\alpha)} = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Por otra parte, asumiendo que $\Re G(w)$ es impar (esto es, que \tilde{G}_n es impar para todo n , pues el otro sumando de $\Re G(w)$ es impar), tenemos que $\Re G(0) = 0$. Luego,

$$G(0) = \Im G(0) = H\tilde{G}_n(0) - \lambda_n \tilde{H}(0) = H\tilde{G}_n(0),$$

y sustituyendo todo en la ecuación (5.46) y despejando λ_n , llegamos a que

$$\lambda_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \tilde{G}'_n(0) + 2H\tilde{G}_n(0). \quad (5.47)$$

Estimaciones para la inversa

Restringiremos la variable w al semieje real \mathbb{R}^+ y obtendremos acotaciones de norma para las partes real e imaginaria de la solución $U(w) = \tilde{F}_n + i\tilde{H}\tilde{F}_n(w)$ obtenida en el resultado anterior explícitamente como (5.45). Para $\alpha \in (0, 1)$, consideramos las transformaciones

\tilde{H} y $\tilde{\Lambda}^{-1}$ para funciones definidas en \mathbb{R}^+ como

$$\tilde{H}(\tilde{f})(w) := Hf(w^{1/\alpha}), \quad (\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{f})(w) := \Lambda^{-1}f(w^{1/\alpha}).$$

Por ejemplo, para nuestro perfil (5.32) del caso $a = 0$,

$$\tilde{H}(\tilde{F}_0)(w) = \tilde{H}\left(\frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{2})w}{1 + 2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})w + w^2}\right) = -\frac{1 + \cos(\frac{\alpha\pi}{2})w}{1 + 2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})w + w^2} = H\tilde{F}_0(w).$$

Podemos obtener una expresión explícita para el operador \tilde{H} a partir de la definición de la transformada de Hilbert y usando que f es impar:

$$\tilde{H}(\tilde{f})(w) = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2tf(t)}{w^{2/\alpha} - t^2} dt = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2t\tilde{f}(t^\alpha)}{w^{2/\alpha} - t^2} dt \quad (5.48)$$

$$= \frac{1}{\alpha\pi} \text{VP} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2s^{2/\alpha-1}}{w^{2/\alpha} - s^{2/\alpha}} \tilde{f}(s) ds. \quad (5.49)$$

Si $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, el núcleo de la transformada es una función racional de w y s . Para este caso tenemos varias propiedades en el apéndice, entre ellas una cota L^2 y H^m para el operador (Lema A.11). De ahora en adelante nos restringiremos a tales valores de α . Por otra parte, el operador $\tilde{\Lambda}^{-1}$ se expresa como

$$(\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{f})(w) := \Lambda^{-1}f(w^{1/\alpha}) = \int_0^{w^{1/\alpha}} Hf(s) ds = \int_0^w \tilde{H}f(t) \cdot \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dt.$$

Ahora, tomamos la parte real de la solución $U(w)$ del Lema 5.8, que es la única función \tilde{f} verificando

$$\tilde{f} = \tilde{L}^{-1}(\tilde{g}).$$

A partir de la expresión (única) (5.45) que encontramos para $U(w)$, dividimos esta función en seis partes: para $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, definimos

$$T^\sigma(\tilde{g})(w) := P(w) \cdot \int_0^w s^\sigma \left(\frac{\tilde{g}(s)}{s} - \frac{1}{1 + 2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})s + s^2} \tilde{g}'(0) \right) ds, \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} S^\sigma(\tilde{g})(w) &:= P(w) \cdot \int_0^w s^\sigma \left(\frac{\tilde{H}\tilde{g}(s)}{s} - \frac{1 - s^2}{s(1 + 2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})s + s^2)} \right) \tilde{H}\tilde{g}(0) ds, \\ &= P(w) \cdot \int_0^w s^\sigma \left(\frac{\tilde{H}\tilde{g}(s) - \tilde{H}\tilde{g}(0)}{s} + \frac{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + 2s}{1 + 2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})s + s^2} \tilde{H}\tilde{g}(0) \right) ds, \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde

$$P(w) = w \frac{(-(1 + w^2)\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) - 2w)}{(1 + 2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})w + w^2)^2}.$$

Lema 5.9. *Supongamos que \tilde{E} y \tilde{F} se anulan en 0. Entonces se verifican en H^3 las desigualdades:*

$$\begin{aligned} \|T^\sigma(\tilde{F})\|_{H^3} + \alpha \cdot \|S^\sigma(\tilde{F})\|_{H^3} &\leq C\|\tilde{F}\|_{H^3}, \\ \|T^\sigma(w\tilde{F}')\|_{H^3} + \alpha \cdot \|S^\sigma(w\tilde{F}')\|_{H^3} &\leq C\|\tilde{F}\|_{H^3}, \\ \|T^\sigma(\Lambda^{-1}\tilde{E} \cdot F')\|_{H^3} + \alpha \cdot \|S^\sigma(\Lambda^{-1}\tilde{E} \cdot F')\|_{H^3} &\leq C\|\tilde{E}\|_{H^3}\|\tilde{F}\|_{H^3}, \end{aligned}$$

para cada $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, y siendo en cada desigualdad $C > 0$ una constante independiente de $\alpha \in (0, 1]$.

La demostración es completamente análoga a la de los Lemas 5.5 y 5.6, utilizando ahora las desigualdades (A.13) en vez de (A.12) y las propiedades (A.9), (A.10) y (A.11) de la transformada de Hilbert modificada.

Fin de la demostración del Teorema 5.2

Para finalizar la demostración, los autores comprueban la existencia de un par de constantes $c, c_0 > 0$ independientes de $\alpha \in (0, 1]$ y verificando las cotas

$$\|\tilde{F}_n\|_{H^3} \leq c\alpha(c_0\alpha)^n, \quad |\lambda_n| \leq c(c_0\alpha)^n, \quad (5.52)$$

para todo entero $n \geq 0$ (nótese que en el caso $n = 0$ las cotas se cumplen para alguna elección de c). Ambas desigualdades hacen que los desarrollos (5.37) sean convergentes y existan un parámetro λ y un perfil F para los cuales el ansatz (5.35) sea solución de la ecuación (4.11).

Definimos μ_n y l_n tales que $\|\tilde{F}_n\|_{H^3} = \alpha^{n+1}\mu_n$ y $|\lambda_n| = \alpha^n l_n$ y busquemos las desigualdades que las sucesiones $\{\mu_n\}$ y $\{l_n\}$ deben cumplir. Recordemos que

$$L(F_n) = G_n - \frac{1}{\alpha}\lambda_n z f'_0,$$

siendo

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda^{-1}(F_j) \cdot F'_{n-1-j} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j z F'_{n-j} - 2 \sum_{j=1}^{n-1} H F_{n-j} \cdot F_j, \\ H G_n(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} H(\Lambda^{-1}(F_j) \cdot F'_{n-1-j}) - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j z (H F_{n-j})' + \sum_{j=1}^{n-1} (F_{n-j} \cdot F_j - H F_{n-j} \cdot H F_j). \end{aligned}$$

Además, hemos visto que, para que exista la solución buscada F_n , el parámetro λ_n debe tomar el valor (5.47):

$$\lambda_n = \frac{1}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2})} \tilde{G}'_n(0) + 2\tilde{H}\tilde{G}_n(0),$$

donde podemos calcular

$$\begin{aligned}\tilde{G}'_n(0) &= \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{H}\tilde{F}_j(0) \cdot \alpha \tilde{F}'_{n-1-j}(0) - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \tilde{F}'_{n-j}(0) - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{H}\tilde{F}_{n-j}(0) \cdot \tilde{F}'_{n-j}(0), \\ \tilde{H}\tilde{G}_n(0) &= \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{H}(\Lambda^{-1}(F_j) \cdot F'_{n-1-j})(0) - \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{H}\tilde{F}_{n-j}(0) \cdot \tilde{H}\tilde{F}_j(0).\end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene la desigualdad

$$\left| \tilde{H}(\Lambda^{-1}(F_j) \cdot F'_{n-1-j})(0) \right| \leq C \|\tilde{H}\tilde{F}_j\|_{L^2} \cdot \|\tilde{F}_{n-1-j}\|_{H^1},$$

cuya demostración se puede ver en [11], y en la que se utilizan las desigualdades de tipo Hardy (A.13). Con esto, y usando el embebimiento $H^3(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ y la estimación

$$\|\tilde{H}(\tilde{F}_j)\|_{H^3} \leq \frac{C}{\alpha} \|\tilde{F}_j\|_{H^3},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}|\lambda_n| &\leq \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \alpha^j \cdot \alpha \cdot \mu_{n-1-j} \alpha^{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} l_j \alpha^j \cdot \mu_{n-j} \alpha^{n-j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{n-j} \alpha^{n-j} \cdot \mu_j \alpha^{j+1} \right) \\ &\quad + C \left(\sum_{j=0}^{n-1} \mu_j \alpha^j \cdot \mu_{n-1-j} \alpha^{n-j} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{n-j} \alpha^{n-j} \cdot \mu_j \alpha^j \right).\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$l_n = \frac{|\lambda_n|}{\alpha^n} \leq C \left(\mu_0 \mu_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_j \mu_{n-1-j} + l_j \mu_{n-j} + \mu_{n-j} \mu_j) \right),$$

para alguna constante $C > 0$ independiente del parámetro $\alpha \in (0, 1]$. Para el valor de λ_n dado,

$$\tilde{F}_n := \tilde{L}^{-1} \left(\tilde{G}_n - \lambda_n w \tilde{F}'_0 \right),$$

dado por la parte real de la expresión (5.45), se puede escribir como combinación lineal de las funciones $T^\sigma, S^{\sigma'}$ con $\sigma, \sigma' \in \{-1, 0, 1\}$, dadas en (5.50) y (5.51). Nótese que siempre que se utiliza el operador $S^{\sigma'}$, su coeficiente en la expansión de \tilde{L}^{-1} tiene un factor α . Por tanto, aplicando el lema 5.9 a cada uno de los términos que conforman \tilde{G}_n , deducimos que

$$\mu_n \alpha^{n+1} \leq C(l_n \alpha^n \cdot \alpha) + C \alpha^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_j \mu_{n-1-j} + l_j \mu_{n-j} + \mu_j \mu_{n-j})$$

o, equivalentemente,

$$\mu_n \leq C \left(l_n + \mu_0 \mu_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (\mu_j \mu_{n-1-j} + l_j \mu_{n-j} + \mu_j \mu_{n-j}) \right).$$

Las sucesiones $\{l_n\}$ y $\{\mu_n\}$ cumplen por tanto desigualdades equivalentes a las de las sucesiones $\{\lambda_n\}$ y $\{\mu_n\}$ del caso regular. En consecuencia, podemos emplear el mismo argumento y así concluir que existen dos parámetros $c, c_0 > 0$ verificando (5.52), de manera que las series (5.37) convergen en un intervalo $a \in \left(\frac{-1}{c_0 \alpha}, \frac{1}{c_0 \alpha} \right)$ en el que también se puede asegurar que $\lambda^{(\alpha)}(a) > -2$.

Apéndice A

A.1. Propiedades de la transformada de Hilbert

Lema A.1. *La transformada de Hilbert es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para cada $1 < p < \infty$, esto es, existe una constante $C_p > 0$ tal que:*

$$\|Hg\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \forall g \in L^p(\mathbb{R}).$$

Lema A.2 (Identidad de Parseval generalizada). *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Luego, si $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$, entonces se tendrá que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} Hf(x) Hg(x) dx.$$

Lema A.3 (Antiautoadjunto). *En las condiciones de la propiedad anterior, se tiene que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} Hf(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-Hg(x)) dx.$$

Lema A.4 (Reciprocidad). *Si $1 < p < \infty$, entonces, dada $f \in L^p(\mathbb{R})$:*

$$H(H(f))(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ c.t.p.}$$

En términos de operadores, la propiedad de reciprocidad de la transformada de Hilbert se expresa diciendo que, si $1 < p < \infty$, entonces:

$$H^2 = -\text{id}_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Esto significa que la transformada de Hilbert es invertible y su inversa es $H^{-1} = -H$.

Lema A.5 (Diferenciación). *Sea una función f en el dominio de la transformada de Hilbert, se tiene que la transformada de Hilbert de la derivada de f es la derivada de la transformada de Hilbert de f , esto es, los dos operadores conmutan:*

$$\frac{dH(f)}{dt} = H\left(\frac{df}{dt}\right).$$

Lema A.6 (Identidad de Tricomi). *Dadas dos funciones f y g en el dominio de la transformada de Hilbert, se tiene que:*

$$H(fg) = H(f)g + fH(g) + H(H(f)H(g))$$

Lema A.7. *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1.$$

Luego, si $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$, entonces se tendrá la siguiente igualdad c.t.p. en \mathbb{R} :

$$H\{fH(g) + gH(f)\} = H(f)H(g) - fg.$$

Lema A.8. *Supongamos que f es una función en el dominio de la transformada de Hilbert tal que la función $g(z) = zf(z)$ está en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, la transformada de Hilbert de g está relacionada con la transformada de Hilbert de f por*

$$H(g)(z) = zHf(z) - \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{\mathbb{R}} f(w)dw.$$

Además, si la función $h(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ está en $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$H(h)(z) = \frac{Hf(z) - Hf(0)}{z}.$$

Además, enunciaremos ahora propiedades recogidas en [11] (algunas de ellas análogas a las anteriores) para la transformada \tilde{H} que empleamos en la demostración del teorema (5.2). Esta transformación está definida en (5.48) y, recordamos, depende de un parámetro $\alpha \in (0, 1)$ que en el caso que nos concierne tomamos de la forma $\alpha = 1/n$, con $n \geq 1$ entero. Dada una función f definida en \mathbb{R}^+ y un entero positivo n , consideramos la transformación $\tilde{H}^{(n)}$ dada por

$$\tilde{H}^{(n)}(f)(w) = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{ns^{2n-1}}{w^{2n} - s^{2n}} \tilde{f}(s)ds, \quad (\text{A.1})$$

con $w > 0$.

Sea $\zeta_{2n} := \exp(i\pi/n)$ la raíz $2n$ -ésima primitiva de la unidad.

Lema A.9.

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{(n)}(f)(w) &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2n} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{-\zeta_{2n}^j}{w - \zeta_{2n}^j t} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2t}{w^2 - t^2} dt + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2t - 2\Re(\zeta_{2n}^j) w}{w^2 - 2\Re(\zeta_{2n}^j) wt + t^2} f(t) dt.\end{aligned}$$

Denotando

$$\tilde{H}_0^{(n)}(f)(w) = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2t}{w^2 - t^2} f(t) dt$$

y, para $j \in \{\pm 1, \dots, \pm(n-1)\}$,

$$\tilde{H}_j^{(n)}(f)(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{-\zeta_{2n}^j}{w - \zeta_{2n}^j t} f(t) dt.$$

Nótese que $\tilde{H}_0^{(n)}$ resulta ser la transformada de Hilbert de la función impar $f(|w|) \text{sgn}(w)$ restringida a \mathbb{R}^+ . En particular,

$$\left\| \tilde{H}_0^{(n)}(f) \right\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Los siguientes resultados se siguen directamente de la definición de los operadores $\tilde{H}_j^{(n)}$.

Lema A.10. *Dado n entero positivo, para $1 \leq |j| < n$ se verifican las identidades*

$$\begin{aligned}\tilde{H}_j^{(n)}(tf(t))(w) &= -\frac{1}{\zeta_{2n}^j} \cdot w \tilde{H}_j^{(n)}(f)(w) - \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^+} f(t) dt, \\ \tilde{H}_j^{(n)}\left(\frac{f(t) - f(0)}{t}\right)(w) &= \zeta_{2n}^j \cdot \frac{\tilde{H}_j^{(n)} f(w) - \tilde{H}_j^{(n)} f(0)}{w},\end{aligned}$$

y

$$\tilde{H}_j^{(n)}(f')(w) = -\zeta_{2n}^j \cdot \tilde{H}_j^{(n)}(f)'.$$

Como consecuencia, se verifica

$$\tilde{H}^{(n)}(tf'(t))(w) = w \left(\tilde{H}^{(n)} f \right)'(w).$$

Lema A.11. *Dado n entero positivo, para $1 \leq |j| \leq n$ se tiene la cota*

$$\left\| \tilde{H}_j^{(n)}(f) \right\|_{L^2} \leq C \ln \left(1 + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{j\pi}{n}\right)} \right) \|f\|_{L^2},$$

para alguna constante absoluta $C > 0$. En particular, para cada entero $n \geq 1$, se cumple

$$\left\| \tilde{H}^{(n)}(f) \right\|_{L^2} \leq Cn \|f\|_{L^2}.$$

De manera similar, para cualquier entero $m \geq 1$ tenemos

$$\left\| \tilde{H}^{(n)}(f) \right\|_{H^m} \leq C_m n \|f\|_{H^m}.$$

A.2. Desigualdades funcionales

Estos resultados se usan para probar los lemas de estimaciones de normas que permiten la acotación de la inversa del operador lineal en la demostración de los teoremas 5.1 y 5.2:

Lema A.12 (Desigualdades de Hardy). *Para cualquier $f \in H^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 0$, tenemos*

$$\left\| \frac{1}{z} \int_0^z f(w) dw \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \geq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Concretamente, para cada $0 \leq \sigma \leq s$, tenemos

$$\left\| \partial_z^\sigma \left(\frac{1}{z} \int_0^z f(w) dw \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{2}{2\sigma + 1} \|\partial_z^\sigma f\|_{L^2}.$$

Lema A.13 (Más desigualdades de tipo Hardy). *Para cualquier $f \in H^s(\mathbb{R}^+)$, con $s \geq 0$ y $0 \leq \sigma \leq 1$, tenemos*

$$\left\| z^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^z f(w) \cdot \frac{1}{\alpha} w^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dw \right\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^+)},$$

siendo la constante C_s uniforme para $0 < \alpha \leq 1$. Concretamente, para cada $0 \leq \sigma \leq s$, tenemos

$$\left\| \partial_z^\sigma \left(z^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^z f(w) \cdot \frac{1}{\alpha} w^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dw \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} < \frac{2}{2\sigma + 1} \|\partial_z^\sigma f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Bibliografía

- [1] Bardos, C., Titi, E., *Euler Equations of Incompressible Ideal Fluids*, Russian Math. Surveys **62** (2007), 409.
- [2] Basic, J., *Turbulent history of fluid mechanics (brief essay)*, 2016. doi:10.13140/RG.2.1.3487.8485.
- [3] Batchelor, G., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [4] Beale J. T., Kato T., Majda A., *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math. Phys. **94** (1984), 61–66.
- [5] Castro, A., Córdoba, D., *Infinite energy solutions of the surface quasi-geostrophic equation*, Adv. Math. **225** (2010), 1820–1829.
- [6] Constantin P., Lax P.D., Majda A., *A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation*, Commun. Pure Appl. Anal. **38** (1985), 715–724.
- [7] Córdoba, A., Córdoba, D., Fontelos, M.A., *Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity*, Ann. of Math. (2) **162** (2005), 1377–1389.
- [8] Currie, I.G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, Fourth Edition. CRC Press., Hoboken, 2012.
- [9] Darrigol, O., *Between Hydrodynamics and Elasticity Theory: The First Five Births of the Navier-Stokes Equation*, Arch. Hist. Exact Sci. **56** (2002), 95–150.
- [10] De Gregorio, S., *A partial differential equation arising in a 1D model for the 3D vorticity equation*, Math. Methods Appl. Sci. **19** (1996), 1233—1255.
- [11] Elgindi, T.M., Jeong, IJ., *On the Effects of Advection and Vortex Stretching*, Arch. Ration. Mech. Anal. **235** (2020), 1763–1817.

- [12] Elgindi, T.M., Ghoul, T., Masmoudi, N., *Stable self-similar blowup for a family of nonlocal transport equations*, arXiv:1906.05811, 2019.
- [13] Fefferman, C., *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation*. In: The Millennium Prize Problems. The Clay Mathematics Institute, Cambridge, Massachusetts, 2006, pp. 57–70.
- [14] Galdi G.P., *Navier–Stokes Equations: A Mathematical Analysis*. En: “Meyers R. (eds) Mathematics of Complexity and Dynamical Systems”. Springer, New York, NY, 2012.
- [15] Garzón Martínez, M., *Soluciones explícitas de las ecuaciones de los fluidos y consecuencias*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2017.
- [16] Gibbon, J.D., *The three-dimensional Euler equations: Where do we stand?*, Physica D: Nonlinear Phenomena **237** (2008), 1894–1904.
- [17] Jia, H., Stewart, S. Sverak, V., *On the De Gregorio Modification of the Constantin–Lax–Majda Model*, Arch. Ration. Mech. Anal. **231** (2019), 1269–1304.
- [18] Kato T., *On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **25** (1967), 296–305.
- [19] Lei Zhen, Liu Jie, Ren Xiao, *On the Constantin–Lax–Majda Model with Convection*, Comm. Math. Phys. **375** (2019), 765–783.
- [20] Liñán Martínez, A., *Las ecuaciones de Euler de la mecánica de fluidos*. En: “La obra de Euler: tricentenario del nacimiento de Leonhard Euler (1707-1783)”. Instituto de España, Madrid, 2009, pp. 151–177.
- [21] Love, E.R., *Repeated Singular Integrals*, J. London Math. Soc. (2) **15** (1977), 99–102.
- [22] Majda, A.J., Bertozzi, A.L., *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [23] Okamoto, H., Sakajo, T., Wunsch, M., *On a generalization of the Constantin–Lax–Majda equation*, Nonlinearity **21** (2008), 2447–2461.
- [24] Pandey, J., *The Hilbert transform of Schwartz distributions*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [25] Schochet, S. *Explicit solutions of the viscous model vorticity equation*. Commun. Pure Appl. Math. **39** (1986), 531–537.

- [26] Sperone Martí, G.S., *Singularidades en tiempo finito de soluciones de la ecuación de Euler y de Navier-Stokes en tres dimensiones espaciales*, Memoria de ingeniería, Universidad de Chile, 2016.
- [27] Vázquez, J.L. (2004), *La ecuación de Navier-Stokes. Un reto físico-matemático para el siglo XXI*. En: Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza, N. 26 (Ejemplar dedicado a: Problemas del Milenio), 2004, pp. 31–56
- [28] Vázquez, J.L., *Fundamentos matemáticos de la Mecánica de Fluidos*, Notas Curso Doctorado, UAM, 2003.