



FACULDADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Funciones especiales en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales

María del Carmen Fuente Santiago

2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Funciones especiales en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales

María del Carmen Fuente Santiago

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático

Título: Funciones especiales en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales

Breve descripción del contenido

La resolución mediante separación de variables de, por ejemplo, la ecuación de ondas en un dominio espacial circular, nos lleva a las funciones de Bessel como funciones base para obtener las soluciones en series. En este TFG se trata de estudiar las funciones de Bessel, y otras funciones especiales, y mostrar su utilidad en la resolución de EDPs en dominios espaciales circulares o cilíndricos.

Recomendaciones

Otras observaciones

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden	1
2. Funciones de Legendre	9
2.1. La ecuación de Legendre	9
2.2. La fórmula de Rodrigues	11
2.3. Definición a partir de una función generadora	13
2.4. Ortogonalidad	14
2.5. Relaciones de recurrencia y ecuación diferencial para los polinomios de Legendre	15
2.6. Representación integral de los polinomios de Legendre	17
2.7. Expansión de funciones. Series de Legendre	19
2.8. Funciones asociadas de Legendre	22
2.8.1. Polinomios asociados de Legendre	23
2.8.2. Paridad de los polinomios asociados de Legendre	25
2.8.3. Ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre	26
2.9. Aplicaciones de los polinomios de Legendre	27
2.9.1. Ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas	27
2.9.2. Armónicos esféricos	29

2.9.3. Operadores de momento angular orbital	31
3. Funciones de Bessel	35
3.1. La ecuación diferencial de Bessel	35
3.1.1. Función generadora y representaciones integrales de las funciones de Bessel	37
3.1.2. Ceros de las funciones de Bessel	42
3.2. Propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel	45
3.3. Funciones de Bessel modificadas de orden general	46
3.4. Funciones esféricas de Bessel	47
3.4.1. Relación de completitud de las funciones esféricas de Bessel	49
3.5. Algunas aplicaciones de las funciones de Bessel	50
3.5.1. Difracción de Fraunhofer en una apertura circular	50
4. La función hipergeométrica	53
4.1. La serie hipergeométrica	53
4.2. La serie hipergeométrica generalizada	56
4.3. Funciones especiales como casos particulares de la función hipergeométrica	58
Bibliografía	59

Resumen

En este trabajo se estudian distintas funciones especiales como soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con puntos singulares regulares con un énfasis en sus aplicaciones físicas. Se obtienen las funciones de Bessel y de Legendre mediante el método de soluciones en series de potencias, analizando la estructura de sus soluciones en torno a los puntos singulares. Posteriormente, se introduce la ecuación hipergeométrica como caso general que engloba a los anteriores, y se demuestra cómo estas funciones pueden obtenerse como casos particulares o límites adecuados de sus soluciones. Este análisis permite evidenciar la función hipergeométrica como un modelo unificador dentro de la teoría de funciones especiales, y proporciona una visión estructurada de su papel en la resolución de problemas con simetrías geométricas relevantes en física matemática.

Abstract

This work explores various special functions as solutions of second-order linear differential equations with regular singular points, with an emphasis on their physical applications. The Bessel and Legendre functions are derived using the method of power series solutions, analyzing the structure of their behavior near the singular points. Subsequently, the hypergeometric equation is introduced as a general case encompassing the previous ones, and it is shown how these functions can be obtained as particular cases or suitable limits of its solutions. This analysis highlights the hypergeometric function as a unifying model within the theory of special functions and provides a structured perspective on its role in solving problems with geometric symmetries relevant to mathematical physics.

Introducción

Desde los albores del análisis matemático, las ecuaciones diferenciales han sido una herramienta esencial en el estudio de los fenómenos naturales y en la formulación de leyes físicas y modelos matemáticos. Su origen se remonta a Newton y su método de las fluxiones en el 1670, y a aportaciones casi simultáneas de otros matemáticos, como Leibniz y los hermanos Bernoulli, alrededor del 1680.

Frente a la imposibilidad de encontrar soluciones exactas para la mayoría de estas ecuaciones, el desarrollo de soluciones en series de potencias supuso un hito fundamental. Este método permitió abordar ecuaciones lineales de segundo orden, ofreciendo una vía sistemática para construir soluciones locales y analizar su comportamiento cerca de puntos regulares o singulares.

En este marco de expansión del análisis cobraron especial importancia ciertas soluciones particulares de ecuaciones diferenciales, hoy conocidas como funciones especiales. El interés en dichas funciones surgió a causa de su aparición recurrente en problemas concretos en física y astronomía. Por ejemplo, Adrien-Marie Legendre introdujo los polinomios que llevan su nombre al estudiar el potencial gravitatorio de cuerpos esféricos; Friedrich Bessel se encontró con sus funciones al analizar la propagación de ondas y vibraciones circulares.

A pesar de que el origen de las funciones especiales no sea puramente matemático, su estudio ha estimulado el desarrollo de herramientas analíticas generales, como la función hipergeométrica, que actúa como un marco unificador que incluye muchas otras funciones especiales como casos particulares.

Este trabajo se sitúa en ese contexto clásico del análisis matemático y se centra precisamente en el estudio de estas funciones especiales desde una perspectiva analítica, entendiendo su origen como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden. La característica fundamental que tienen en común tales funciones es que pueden obtenerse mediante el método de soluciones en series de potencias, particularmente efectivo cuando se trata de ecuaciones con puntos singulares regulares. En dicho método nos enfocaremos en el primer capítulo, que constituye una base común para abordar tanto la ecuación de Bessel como la de Legendre y que culminará en el estudio general de la función hipergeométrica, desde la cual muchas de estas

funciones se derivan como casos particulares.

A finales del siglo XVIII el estudio de la gravitación newtoniana, particularmente en problemas relacionados con el potencial gravitatorio generado por cuerpos con simetría esférica como la Tierra o el Sol, conduce a las funciones de Legendre que trataremos en el tercer capítulo. El matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752–1833) introdujo estos polinomios en 1782 mientras estudiaba la atracción de un elipsoide sobre un punto exterior. Para resolver este problema utilizó la expansión del potencial newtoniano en coordenadas esféricas y descubrió que ciertas funciones – hoy llamadas polinomios de Legendre – resolvían la parte angular de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

Posteriormente, Laplace y Gauss extendieron el uso de estos polinomios en física matemática, especialmente en el estudio del campo gravitatorio y electrostático, desarrollando las soluciones generales de la ecuación de Laplace en la esfera. Esta expansión angular mediante los armónicos esféricos, basados en funciones de Legendre generalizadas, se convirtió en una herramienta central en física.

El interés puramente matemático por estos polinomios se consolidó en el siglo XIX gracias a sus propiedades de ortogonalidad, su papel en la teoría de Sturm–Liouville, y su aparición como soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden con un punto singular regular. En el siglo XX, los polinomios de Legendre se integraron plenamente en la teoría general de funciones especiales, y se reconoció que son un caso particular de la función hipergeométrica.

Las funciones de Bessel se tratarán en el tercer capítulo. Fue Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), astrónomo y matemático alemán, quien formalizó su estudio en 1817 al investigar el movimiento de los tres cuerpos celestes bajo la ley de Newton y ciertos problemas orbitales. No obstante, el desarrollo más conocido proviene del estudio del problema físico de la vibración de una membrana circular o la difracción de ondas, donde se aplica la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares. Como se verá posteriormente, al separar variables, la parte radial de la solución conduce a la ecuación de Bessel, cuya solución regular en el origen es precisamente la función $J_\nu(x)$.

Durante el siglo XIX, las funciones de Bessel fueron sistematizadas y extendidas a órdenes no enteros, a soluciones singulares, y a versiones modificadas que se verán más adelante (funciones de Bessel modificadas, $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$) para problemas de crecimiento o decaimiento exponencial. También ellas pueden verse como casos particulares de la función hipergeométrica, lo que resalta su papel estructural en la teoría de funciones especiales.

En conjunto, este trabajo se propone trazar un recorrido por algunas de las funciones que históricamente han surgido como soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden en contextos físicos concretos. A través del método de soluciones en serie de potencias, se abor-

dará la deducción sistemática de las funciones de Bessel y de Legendre, atendiendo tanto a sus propiedades analíticas como a su trasfondo histórico. Finalmente, se introducirá la función hipergeométrica no como una función especial más, sino como una herramienta general que permite englobar y reinterpretar muchas de estas funciones dentro de un marco común, revelando así la estructura unificadora que subyace en gran parte del análisis clásico.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Las funciones especiales que estudiaremos a lo largo de este trabajo — como las funciones de Bessel o los polinomios de Legendre — aparecen como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes no constantes. Muchas de estas ecuaciones presentan puntos en los que los coeficientes dejan de ser analíticos, lo que impide aplicar métodos elementales para hallar soluciones.

En este capítulo introducimos el método de soluciones en series de potencias, que resulta especialmente útil para abordar ecuaciones con puntos singulares. El tratamiento posterior de las ecuaciones diferenciales de Bessel y Legendre hace que nuestro interés se enfoque en la resolución de la ecuación diferencial de segundo orden en torno a un punto ordinario (para la de Legendre) y a un punto singular (para la de Bessel). El desarrollo de ambos casos nos proporcionará las herramientas necesarias para los posteriores capítulos.

Consideremos la ecuación lineal general homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1.1}$$

y definamos los siguientes conceptos.

Definición 1.1. Se dice que x_0 es un *punto ordinario* de la ecuación (1.1) si P y Q son analíticas en un entorno de x_0 .

Definición 1.2. Se dice que x_0 es un *punto singular* de la ecuación (1.1) si al menos una de las funciones coeficientes, $P(x)$ o $Q(x)$, es analítica en x_0 .

Definición 1.3. Un punto singular x_0 de la ecuación (1.1) se dice *regular* si las funciones $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0 .

Comenzaremos demostrando el siguiente teorema que caracteriza el comportamiento de las soluciones cerca de un punto ordinario. El método empleado en la prueba se aplicará posteriormente a la hora de hallar las soluciones de la ecuación diferencial de Legendre.

Teorema 1.4. [19, Teorema A, Cap.5 28, p. 187] Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación diferencial (1.1) y sean a_0 y a_1 constantes arbitrarias. Existe una única función $y(x)$ analítica en x_0 que es solución de la ecuación (1.1) en un cierto entorno de ese punto y satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1$. Además, si los desarrollos en serie de potencias de $P(x)$ y $Q(x)$ son válidos en un intervalo $|x - x_0| < R$, $R > 0$, entonces el desarrollo en serie de potencias de esta solución es válido también en ese mismo intervalo.

Demostración. Pongamos por conveniencia que $x_0 = 0$, de modo que podamos trabajar con series de potencias en x (en vez de $x - x_0$) sin perder generalidad. Por hipótesis, P y Q son analíticas en el origen y se puede escribir

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad y \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

que convergen en $|x| < R$ para $R > 0$. Considerando las condiciones iniciales, se trata de buscar una solución de (1.1) de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1.2)$$

con radio de convergencia no menor que R . De estas expresiones se obtiene,

$$\begin{aligned} P(x)y' &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_{n-k}(k+1)a_{k+1} \right) x^n \\ Q(x)y &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_{n-k}a_k \right) x^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.1) y sumando las series término a término se obtiene la siguiente recurrencia,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = - \sum_{k=0}^n [(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k]. \quad (1.3)$$

Esta expresión determina los a_n con $n \geq 2$ en función de a_0 y a_1 , de modo que la serie (1.2), que satisface (1.1) y las condiciones iniciales, queda unívocamente determinada por (1.3). La prueba de la última afirmación del teorema puede consultarse en [19, Apéndice A]. \square

A continuación trataremos el caso en que $x_0 = 0$ es un punto singular regular. Siguiendo [19, Cap. 5.30, p. 199], proponemos una solución en forma de serie de Frobenius,

$$y = x^m (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots), \quad a_0 \neq 0, \quad (1.4)$$

con m un número sin determinar y limitándonos al intervalo $x > 0$ (para buscar soluciones válidas sobre $x < 0$, basta hacer un cambio de variable a $t = -x$ y resolver la ecuación resultante para $t > 0$).

Asumiendo la analiticidad de $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ en $x_0 = 0$, escribimos:

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (1.5)$$

con $|x| < R$ para algún $R > 0$. Reescribiendo (1.4) como

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}, \quad (1.6)$$

los términos $P(x)y'$ y $Q(x)y$ en (1.1) resultan,

$$\begin{aligned} P(x)y' &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (m+n) x^{m+n-1} \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n p_{n-k} a_k (m+k) \right] x^n \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k} a_k (m+k) + p_0 a_n (m+n) \right] x^n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q(x)y &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k} a_k \right) x^n \\ &= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} a_k + q_0 a_n \right) x^n. \end{aligned}$$

Introduciendo las expresiones anteriores en (1.1) y factorizando x^{m-2} se obtiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^n = 0.$$

De donde se llega a la recurrencia

$$a_n [(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0. \quad (1.7)$$

Sea $f(m) = m(m-1) + mp_0 + q_0$, los coeficientes a_n para los distintos valores de n se pueden

expresar como,

$$\begin{aligned} a_0 f(m) &= 0, \\ a_1 f(m+1) + a_0 (mp_1 + q_1) &= 0, \\ a_2 f(m+2) + a_0 (mp_2 + q_2) + a_1 [(m+1)p_1 + q_1] &= 0, \\ &\dots \\ a_n f(m+n) + a_0 (mp_n + q_n) + \dots + a_{n-1} [(m+n-1)p_1 + q_1] &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Como $a_0 \neq 0$, de la primera relación se deduce que $f(m) = 0$, lo cual da lugar a la *ecuación indicial*:

$$m(m-1) + mp_0 + q_0 = 0. \quad (1.8)$$

Las raíces de (1.8), m_1 y m_2 son los valores admisibles de m en (1.4) y se denominan *exponentes* de la ecuación diferencial (1.1) en el punto singular $x_0 = 0$. Los a_n vienen determinados en función de a_0 para cada m a menos que $f(m+n) = 0$ para algún entero positivo n , caso en el que el proceso falla.

Si $m_1 = m_2 + n$ para cierto entero $n \geq 1$, la elección $m = m_1$ da una solución formal. Esto no sucede en general con $m = m_2$, pues $f(m_2 + n) = f(m_1) = 0$. Si $m_1 = m_2$ también se tiene una sola solución formal y, en todos los demás casos en que m_1 y m_2 son números reales, este procedimiento proporciona dos soluciones formales independientes. Posteriormente discutiremos el caso en que m_1 y m_2 son números complejos conjugados.

El siguiente teorema resume las conclusiones anteriores.

Teorema 1.5. [19, Cap. 5.30, p. 202]

Supongamos que $x_0 = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1.1) y que los desarrollos en serie de potencias (1.5) de $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son válidos sobre un intervalo $|x| < R$ con $R > 0$. Sean m_1, m_2 las raíces de la ecuación indicial (1.8), con $m_2 \leq m_1$. Entonces la ecuación (1.1) tiene al menos una solución

$$y_1 = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0) \quad (1.9)$$

sobre el intervalo $0 < x < R$, donde los a_n quedan determinados en términos de a_0 por la fórmula de recurrencia (1.7) con m sustituido por m_1 , y la serie $\sum a_n x^n$ converge para $|x| < R$. Además, si $m_1 - m_2$ no es un entero positivo o cero, la ecuación (1.1) tiene una segunda solución independiente,

$$y_2 = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0) \quad (1.10)$$

sobre ese mismo intervalo. En este caso los a_n quedan determinados en términos de a_0 por la fórmula (1.7) con m sustituido por m_2 y, de nuevo, la serie $\sum a_n x^n$ es convergente para $|x| < R$.

Para hallar una segunda solución cuando $m_1 - m_2$ es un entero positivo o cero, distinguimos tres casos.

CASO 1. Si $m_1 = m_2$, no puede existir una segunda solución en serie de Frobenius. Cuando $m_1 - m_2$ sea un entero positivo, facilitaremos el análisis insertando $m = m_2$ en (1.7), de modo que

$$a_n f(m_2 + n) = -a_0(m_2 p_n + q_n) - \cdots - a_{n-1} [(m_2 + n - 1) p_1 + q_1]. \quad (1.11)$$

Los siguientes casos se refieren a la situación en que $f(m_2 + n) = 0$, que presenta la dificultad del cálculo de los a_n .

CASO 2. Si el miembro de la derecha de (1.11) es distinto cero cuando $f(m_2 + m) = 0$, entonces no es posible continuar el cálculo de los coeficientes y no existirá una segunda solución en serie de Frobenius.

CASO 3. Si el miembro de la derecha de (1.11) es cero cuando $f(m_2 + n) = 0$, entonces a_n está libre de restricciones y se le puede asignar cualquier valor. Luego sí que existe una segunda solución en serie de Frobenius para este caso.

Para deducir la forma de la segunda solución cuando $m_1 - m_2$ es un entero positivo o cero, definimos un entero positivo $k = m_1 - m_2 + 1$, de modo que (1.8) se puede escribir como

$$(m - m_1)(m - m_2) = m^2 - (m_1 + m_2)m + m_1 m_2 = 0. \quad (1.12)$$

Igualando los coeficientes de m , se tiene que $p_0 - 1 = -(m_1 + m_2)$, de donde $k = 2m_1 + p_0$. Una segunda solución y_2 obtenida a partir de la ya conocida se puede utilizar el siguiente método propuesto en [19, Cap. 3.16, p. 95]: dada la solución no nula $y_1(x)$ de (1.1) conocida, $cy_1(x)$ también es solución para toda constante c . La idea es sustituir c por una función desconocida $v(x)$ tal que $y_2 = vy_1$ sea solución de (1.1). Asumiendo que esto es cierto, se tiene

$$y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0. \quad (1.13)$$

Derivando $y_2 = vy_1$,

$$y_2' = vy_1' + v'y_1 \quad \text{e} \quad y_2'' = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1$$

y sustituyendo en (1.13) queda,

$$v(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + v''y_1 + v'(2y_1' + Py_1) = 0.$$

Dado que y_1 es solución de (1.1), la ecuación anterior se reduce a

$$v''y_1 + v'(2y_1' + Py_1) = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - P.$$

Integrando,

$$\log v' = -2\log y_1 - \int P dx,$$

de donde,

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}.$$

Finalmente se obtiene v , que es tal que y_1 e $y_2 = vy_1$ son linealmente independientes:

$$v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx. \quad (1.14)$$

Puesto que $y_1 = x^{m_1} (a_0 + a_1x + \dots)$, la segunda solución será $y_2 = vy_1$ con,

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx} = \frac{1}{x^{2m_1} (a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{-\int (\frac{p_0}{x} + p_1 + \dots) dx} \\ &= \frac{1}{x^{2m_1} (a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{(-p_0 \log x - p_1x - \dots)} \\ &= \frac{1}{x^k (a_0 + a_1x + \dots)^2} e^{(-p_1x - \dots)} = \frac{1}{x^k} g(x). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Donde la función $g(x)$ es analítica en $x_0 = 0$ con $g(0) = \frac{1}{a_0^2}$, luego en algún intervalo en torno al origen se tendrá,

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots, \quad b_0 \neq 0. \quad (1.16)$$

Así, se deduce que

$$v' = b_0x^{-k} + b_1x^{-k+1} + \dots + b_{k-1}x^{-1} + b_k + \dots, \quad (1.17)$$

de donde,

$$v = \frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1} + \frac{b_1x^{-k+2}}{-k+2} + \dots + b_{k-1} \log x + b_kx + \dots. \quad (1.18)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1v = y_1 \left(\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1} + \dots + b_{k-1} \log x + b_kx + \dots \right) \\ &= b_{k-1}y_1 \log x + x^{m_1} (a_0 + a_1x + \dots) \left(\frac{b_0x^{-k+1}}{-k+1} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Sacando el factor x^{-k+1} , usando que $m_1 - k + 1 = m_2$ y multiplicando las dos series resultantes, se obtiene la segunda solución:

$$y_2 = b_{k-1}y_1 \log x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (1.20)$$

A partir de la serie (1.20) podemos extraer cierta información de interés. Por un lado, si $m_1 = m_2$ entonces $k = 1$ y $b_{k-1} = b_0 \neq 0$, encontrándonos en el caso 1 visto anteriormente y el término que contiene a $\log x$ está presente en la segunda solución (1.20). Por otro lado, si $m_1 - m_2 = k - 1$ es un entero positivo, entonces a veces $b_{k-1} \neq 0$ y los logaritmos están presentes (caso 2), y otras $b_{k-1} = 0$ y no habrá término logarítmico (caso 3). La dificultad práctica reside en que no podemos calcular de modo directo los coeficientes de (1.16). A pesar de esto, sabemos que al menos en los casos 1 y 2, cuando $b_{k-1} \neq 0$ y el método de Frobenius es solo parcialmente eficaz, la forma general de una segunda solución es

$$y_2 = y_1 \log x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (1.21)$$

donde las constantes desconocidas c_n se pueden determinar sustituyendo (1.21) en la ecuación diferencial.

CASO COMPLEJO. Si las raíces de la ecuación indicial son números complejos conjugados, por ejemplo m_1 y \bar{m}_1 , entonces la solución es compleja y toma la forma

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1.22)$$

donde los coeficientes a_n pueden ser complejos. En este caso y_1 e y_2 son las partes reales e imaginarias de y respectivamente y son soluciones linealmente independientes [1, Cap. 7.3, p.522].

Capítulo 2

Funciones de Legendre

2.1. La ecuación de Legendre

Una ecuación lineal homogénea de segundo orden con la que es muy común encontrarse en problemas de física es la ecuación de Legendre. Esta se obtiene a partir de la forma general (1.1) estableciendo las siguientes funciones analíticas en el origen como coeficientes,

$$P(x) = \frac{-2x}{1-x^2}, \quad Q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2}, \quad (2.1)$$

donde p es una constante. Así, (1.1) se puede reescribir como

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0, \quad (2.2)$$

que es precisamente la *ecuación de Legendre*. El origen es un punto ordinario, por lo que aplicaremos el Teorema 1.4 y buscaremos una solución de la forma $y = \sum a_n x^n$. Sustituyendo este Ansatz en la ecuación de Legendre y agrupando términos en x^n , se obtiene una relación de recurrencia entre los coeficientes a_n :

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n. \quad (2.3)$$

Insertando los coeficientes en $y = \sum a_n x^n$ se llega a:

$$y = a_0 \left[1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \dots \right]. \quad (2.4)$$

Para p no entero, cada serie entre corchetes tiene radio de convergencia $R = 1$, lo cual se prueba usando (2.3): efectivamente, para la primera serie (con n sustituida por $2n$) se tiene

$$\left| \frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}} \right| = \left| -\frac{(p-2n)(p+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \right| |x|^2 \rightarrow |x|^2,$$

cuando $n \rightarrow \infty$, y es análogo para la segunda. La validez de (2.4) como solución de (2.2) para toda elección de constantes a_0 y a_1 queda demostrada por la positividad del radio de convergencia de cada serie. Cada serie entre corchetes es una solución particular, y como es claro que las funciones definidas por ellas son linealmente independientes, (2.4) es la solución general de (2.2) sobre el intervalo $|x| < 1$. Las funciones definidas por (2.4) son las funciones de Legendre, generalmente no elementales. No obstante, para $p = n$ un entero no negativo, veremos que una de las series termina y es por tanto un polinomio (la primera si p es par y la segunda si es impar), mientras que la otra sigue siendo una serie infinita. Dichas soluciones nos conducirán a los polinomios de Legendre.

Sea, pues, la ecuación de Legendre con $p = n$ un entero no negativo,

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0. \quad (2.5)$$

El Teorema 1.4 proporcionaba soluciones analíticas para dicha ecuación sobre el intervalo $-1 < x < 1$.

A fin de aislar las soluciones que se mantienen acotadas cerca de $x = 1$, por ser más útiles en la práctica, realizamos el cambio de variable $t = (1 - x)/2$ propuesto en [19, Cap. 8.44, p. 350], que hace que $x = 1$ corresponda a $t = 0$. Así,

$$t(1 - t)y'' + (1 - 2t)y' + n(n + 1)y = 0. \quad (2.6)$$

Como veremos en el último capítulo, esta es una ecuación hipergeométrica que admite la solución cerca de $t = 0$ dada por una función hipergeométrica (para ver su definición, ir a 4.5),

$$y_1 = F(-n, n + 1, 1, t). \quad (2.7)$$

Aunque todavía no se haya definido tal función, es suficiente para el estudio presente conocer simplemente la existencia de dicha solución. La segunda solución se busca mediante el mismo método empleado en el primer capítulo, de modo que tomará la forma $y_2 = vy_1$ con

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dt} = \frac{1}{y_1^2} e^{\int (2t-1)/t(1-t) dt} = \frac{1}{y_1^2 t(1-t)} = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{y_1^2(1-t)} \right].$$

Como y_1^2 es un polinomio con término constante 1, la expresión entre corchetes es una función analítica, luego

$$v' = \frac{1}{t} + a_1 + a_2 t + \dots$$

Con lo cual, $v = \log t + a_1 t + \dots$ y,

$$y_2 = y_1 (\log t + a_1 t + \dots).$$

Así, solución general de (2.6) cerca del origen es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (2.8)$$

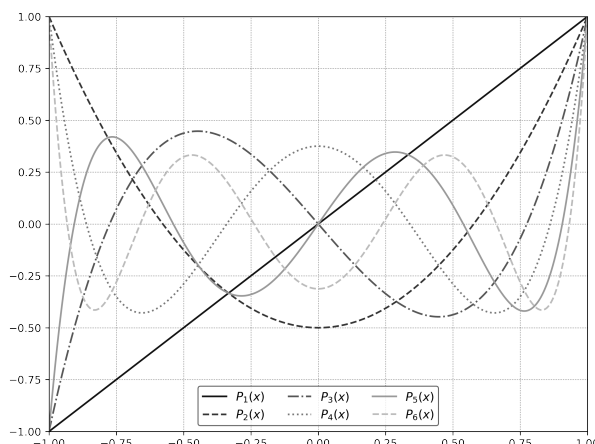


Figura 2.1: Polinomios de Legendre para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

La presencia del término $\log t$ en y_2 hace patente que (2.8) es acotada cerca de $t = 0$ si y solo si $c_2 = 0$. Desahaciendo el cambio $t = (1 - x)/2$ en (2.7), se deduce que las soluciones de (2.5) acotadas cerca de $x = 1$ son múltiplos constantes de $F(-n, n + 1, 1, (1 - x)/2)$. Esto conduce a la definición fundamental del n -ésimo polinomio de Legendre:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= F\left(-n, n + 1, 1, \frac{1 - x}{2}\right) \\ &= 1 + \frac{n(n + 1)}{(1!)^2 2^2} (x + 1) + \frac{n(n - 1)(n + 1)(n + 2)}{(2!)^2 2^2} (x - 1)^2 + \cdots + \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} (x - 1)^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sabemos por lo estudiado en el primer capítulo que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n que contiene solo potencias pares o solo potencias impares de x según la paridad de n . Por tanto, puede escribirse

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \cdots, \quad (2.10)$$

donde la suma termina con a_0 para n par y con $a_1 x$ si n es impar. Por (2.9), se tiene que $P_n(1) = 1$ para todo n y por (2.10), $P_n(-1) = (-1)^n$.

2.2. La fórmula de Rodrigues

Con el fin de simplificar la expresión obtenida en (2.9), se puede deducir una forma más manejable de los polinomios $P_n(x)$. Considerando la relación de recurrencia (2.3) con p reemplazado por n y n por $k - 2$, así como el hecho de que $a_n = (2n)!/(n!)^2 2^{2n}$ (que se deduce de (2.9)),

$$a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n+k-1)} a_k, \quad k = n, n-2, \dots$$

Sustituyendo en (2.10),

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + \dots + (-1)^k \frac{n(n-1) \cdots (n-2k+1)}{2^k k!(2n-1)(2n-3) \cdots (2n-2k+1)} x^{n-2k} + \dots \right]. \quad (2.11)$$

Como, $n(n-1) \cdots (n-2k+1) = \frac{n!}{(n-2k)!}$ y

$$\begin{aligned} (2n-2k+1)(2n-2k+3) \cdots (2n-3)(2n-1) &= \\ &= \frac{(2n-2k+1)(2n-2k+2)(2n-2k+3) \cdots (2n-3)(2n-2)(2n-1)2n}{(2n-2k+2) \cdots (2n-2)2n} \\ &= \frac{(2n)!}{(2n-2k)!} \frac{1}{2^k (n-k+1) \cdots (n-1)n} \\ &= \frac{(2n)!(n-k)!}{(2n-2k)! 2^k n!}, \end{aligned}$$

el coeficiente de x^{n-2k} en (2.11) es

$$(-1)^k \frac{(n!)^2 (2n-2k)!}{k!(2n)!(n-k)!(n-2k)!}.$$

Así, podemos escribir (2.11) como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (2.12)$$

donde $[n/2]$ denota la parte entera de $n/2$.

Obsérvese que,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^2)^{n-k} (-1)^k. \end{aligned}$$

Extendiendo el recorrido de esta suma y dejando a k variar entre 0 y n (no afectará pues los términos nuevos son de grado mayor que n y sus derivadas n -ésimas cero) se llega a,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n-k} \left(\frac{x+1}{2} \right)^k. \quad (2.13)$$

Empleando la fórmula del binomio se obtiene la *fórmula de Rodrigues*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (2.14)$$

2.3. Definición a partir de una función generadora

Una manera alternativa de presentar los polinomios de Legendre es considerando la expresión $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$ cuando $|2xt-t^2| < 1$, que puede expandirse en una serie de potencias ascendentes de $2xt-t^2$. Si, además, $|2xt|+|t^2| < 1$, dichas potencias pueden multiplicarse y la serie resultante reorganizada de cualquier forma, pues la expansión de $[1-(|2xt|+|t^2|)]^{-1/2}$ en potencias de $|2xt|+|t^2|$ en tal caso converge absolutamente ¹. En particular, si se reordena en potencias de t se obtiene la definición de los polinomios de Legendre $P_n(x)$ mediante la relación generadora [20, Cap. 15.1, p. 316],

$$\omega(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \quad (2.15)$$

Puesto que $(1-z)^{-\alpha} = {}_1F_0(\alpha; -; z)$ (consúltese la definición (4.13)), podemos escribir [18, Cap. 10.86, p. 157],

$$\begin{aligned} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n \frac{(2xt - t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n (-1)^k (2x)^{n-2k} t^{n+k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} (2x)^{n-2k} t^n}{k!(n-2k)!}, \end{aligned}$$

donde se ha empleado la ecuación [18, Cap. 4.37, p. 58, ecuación 13] ². Por tanto,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}, \quad (2.16)$$

de donde se deduce que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n en x .

Reemplazando x por $-x$ en 2.15 y t por $-t$, el miembro izquierdo no cambia, de modo que,

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (2.17)$$

por lo que $P_n(x)$ es una función impar de x para n impar, y una función par de x para n par.

A continuación se dará una prueba más rigurosa de que la función (2.15) es, efectivamente, una función generadora de los polinomios de Legendre siguiendo un procedimiento similar al expuesto en [14, Cap. 4.2, p. 45].

¹El teorema empleado es:

Teorema 2.1. [20, Cap. 2.52, p. 26]. *Si los términos de una serie doble absolutamente convergente se toman en cualquier orden como una serie simple, la suma converge al mismo límite, siempre que todos los términos aparezcan en la suma. Su demostración puede consultarse en la referencia indicada.*

²Esta ecuación se obtiene a partir de resultados mostrados en [18, Cap. 4.37, p. 58] en el contexto de manipulaciones de series elementales

Sean r_1 y r_2 raíces de $1 - 2xt + t^2 = 0$ y sea $r = \min\{|r_1|, |r_2|\}$. Entonces $\omega(x, t)$ como función de t es analítica en $|t| < r$ y se sigue que,

$$\omega(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n, \quad |t| < r,$$

donde los $c_n(x)$ se pueden escribir como integrales de contorno evaluadas sobre cualquier contorno cerrado \mathcal{C} alrededor de $t = 0$ sobre el disco $|t| < r$,

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} t^{-n-1} dt. \quad (2.18)$$

Mediante la sustitución $1 - ut = (1 - 2xt + t^2)^{1/2}$, la expresión anterior se transforma en,

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}'} \frac{(u^2 - 1)^n}{2^n(u - x)^{n+1}} du. \quad (2.19)$$

Dicha integral se puede evaluar por medio de teoría de residuos (ver [12, Cap. 10, p. 548]),

$$c_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d^n (u^2 - 1)^n}{du^n} \right]_{u=x} \equiv P_n(x), \quad (2.20)$$

verificando así (2.15).

2.4. Ortogonalidad

Una de las propiedades esenciales de los polinomios de Legendre es que $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$ es una sucesión de *funciones ortogonales* sobre $-1 \leq x \leq 1$, esto es

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (2.21)$$

Para demostrarlo seguiremos el procedimiento indicado en [19, Cap. 8.45, p. 356]. Consideremos una función cualquiera $f(x)$ con al menos n derivadas continuas en $-1 \leq x \leq 1$ y sea

$$I = \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx,$$

donde hemos sustituido por la fórmula de Rodrigues (2.14). Integrando por partes,

$$I = \frac{1}{2^n n!} \left[f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx.$$

Puesto que la expresión entre corchetes se anula en ambos extremos y continuando el proceso con nuevas integraciones por partes,

$$I = -\frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx.$$

Si $f(x) = P_m(x)$ con $m < n$, entonces $f^{(n)}(x) = 0$, luego $I = 0$, probando el primer caso. Para ver el segundo, sea $f(x) = P_n(x)$. Como $P_n^{(n)}(x) = (2n)!/2^n n!$,

$$I = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx. \quad (2.22)$$

Haciendo el cambio de variable $x = \sin \theta$, la integral definida de la expresión anterior pasa a ser³

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} \theta d\theta &= \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2^n n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

Se concluye, pues, que $I = 2/(2n+1)$ en este caso, quedando (2.21) demostrada.

2.5. Relaciones de recurrencia y ecuación diferencial para los polinomios de Legendre

A continuación deduciremos una serie de relaciones de recurrencia satisfechas por los polinomios de Legendre con el fin de ilustrar el uso de la expansión (2.15). Para empezar, sustituimos (2.15) en la identidad

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial \omega}{\partial t} + (t - x) \omega = 0.$$

Diferenciando término a término, se obtiene

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0.$$

Igualando el coeficiente de t^n a cero,

$$(n+1) P_{n+1}(x) - 2nx P_n(x) + (n-1) P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - x P_n(x) = 0$$

equivalentemente,

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

³Empleamos la siguiente fórmula que se demuestra por integración por partes,

$$\int \cos^{2n+1} \theta d\theta = \frac{1}{2n+1} \cos^{2n} \theta \sin \theta + \frac{2n}{2n+1} \int \cos^{2n-1} \theta d\theta.$$

Similarmente, la identidad

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial \omega}{\partial x} - t\omega = 0$$

conduce a

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = 0,$$

que implica

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Antes de continuar, emplearemos el razonamiento de [14, Cap. 4.3, p. 47] para justificar la diferenciación de (2.15) término a término con respecto a x . Para ello se ha de probar la convergencia uniforme de (2.15) en $|x| < a$ para un $a > 0$ finito y arbitrario y $|t|$ suficientemente pequeño. Sea $|t| < b$, donde $b = \sqrt{a^2 + 1} - a$. De acuerdo con (2.15), la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(ia)}{i^n} |t|^n$$

converge a $(1 - 2a|t| - |t|^2)^{-1/2}$. La convergencia uniforme de (2.15) para $|x| < a$, $|t| < b$ se sigue de la desigualdad

$$|P_n(x)t^n| \leq \frac{P_n(ia)}{i^n} |t|^n,$$

de acuerdo con (2.12).

Habiendo probado esto, diferenciamos (2.23) y, empleando (2.24), se llega a dos relaciones de recurrencia:

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Sumando (2.25) y (2.26) se obtiene

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Finalmente, reemplazando n por $n-1$ en (2.25) y eliminando $P'_{n-1}(x)$ de la ecuación resultante y (2.26) se encuentra que

$$(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Esta última fórmula permite expresar la derivada de un polinomio de Legendre en términos de polinomios de Legendre. Diferenciando (2.28) con respecto a x y usando de nuevo (2.26) para eliminar $P'_{n-1}(x)$, se llega a

$$[(1 - x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Esto muestra que el polinomio de Legendre $u = P_n(x)$ es una integral particular de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\left[(1-x^2)u'\right]' + n(n+1)u = 0. \quad (2.30)$$

Esta ecuación es habitual en física matemática por ser la manifestación natural de la parte angular de muchas ecuaciones en física con simetría esférica.

2.6. Representación integral de los polinomios de Legendre

En esta sección seguiremos el desarrollo expuesto en [14, Cap. 4.4, p. 48] para llegar a representaciones sencillas de los polinomios de Legendre en términos de integrales definidas.

Comenzaremos asumiendo que x es un número real o complejo y escojamos que el camino de integración C' en la fórmula (2.20) sea un círculo de radio $\sqrt{|x^2-1|}$ con centro en $u = x$.⁴ Entonces, $u = x + \sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ y se obtiene a partir de (2.20)

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi} + (x^2-1)e^{2i\varphi} - 1}{2\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}} \right]^n d\varphi,$$

que se reduce a la *integral de Laplace*:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi \right]^n d\varphi. \quad (2.31)$$

Nótese que la elección del valor de la raíz $\sqrt{x^2-1}$ no importa, puesto que tras elevar la expresión entre corchetes a la n -ésima potencia e integrar el resultado término a término, las potencias impares de la raíz cuadrada se anulan.

A partir de (2.31) se puede deducir una importante desigualdad satisfecha por los polinomios de Legendre. Sea x un número real tal que $-1 \leq x \leq 1$; entonces,

$$|x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi| = \sqrt{x^2 + (1-x^2) \cos^2 \varphi} \leq 1,$$

por lo que,

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.32)$$

Otra representación integral relevante de los polinomios de Legendre se deduce a partir de (2.31) asumiendo que x es un número real tal que $-1 < x < 1$. En este caso, poniendo $x = \cos \theta$,

⁴De acuerdo con el teorema integral de Cauchy, reemplazar el contorno C' por cualquier otra curva cerrada de Jordan alrededor de $u = x$ no cambia el valor de la integral

$0 < \theta < \pi$ e introduciendo una variable compleja de integración, $t = \cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi$, (2.31) pasa a ser

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^n d\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} \frac{t^n dt}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}}, \quad (2.33)$$

donde la integral es evaluada a lo largo del segmento AB que une los puntos $t = e^{\pm i\theta}$ (2.2), y

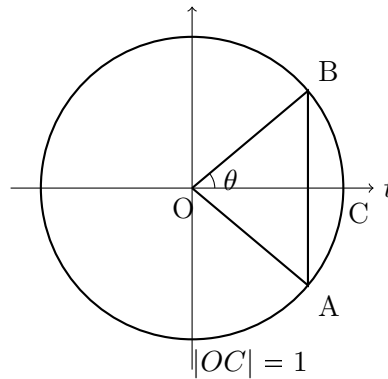


Figura 2.2: Esquema para el cálculo de la integral (2.33).

la elección de la raíz cuadrada viene determinada por la condición de que su valor en el punto $t = \cos \theta$ sea $\sin \theta$. De acuerdo con el teorema integral de Cauchy⁵, la integración a lo largo de AB puede reemplazarse por la integración a lo largo del arco ACB de la circunferencia unitaria, puesto que el integrando es analítico en la región entre el arco y la cuerda. Haciendo este cambio y escribiendo $t = e^{i\psi}$, encontramos que

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\psi}}{\sqrt{2 \cos \psi - 2 \cos \theta}} d\psi,$$

que se convierte en la *fórmula de Mehler - Dirichlet* tras tomar la parte real,

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\psi}{\sqrt{2 \cos \psi - 2 \cos \theta}} d\psi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

5

Teorema 2.2. *Teorema integral de Cauchy [13, Theorem 10.1] Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado de Jordan y $f \in H(\bar{D})$. Entonces, $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$.*

2.7. Expansión de funciones. Series de Legendre

Muchos problemas en teoría del potencial requieren disponer de desarrollos en serie de polinomios de Legendre de funciones dadas. Es por esto que, dada una función arbitraria $f(x)$, buscamos una expansión de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad -1 < x < 1. \quad (2.35)$$

Multiplicando esta expresión por $P_m(x)$ e integrando término a término,

$$\int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = a_m \int_{-1}^1 P_m^2(x) dx = \frac{2a_m}{2m+1},$$

puesto que todas las integrales del término intermedio se anulan excepto para $n = m$. Ahora, reemplazando m por n y x por y ,

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(y) P_n(y) dy. \quad (2.36)$$

Conociendo a_n , procedemos a probar el siguiente resultado,

Teorema 2.3. [18, Cap. 10.100, p. 177] Si en $-1 \leq x \leq 1$, la función $f(x)$ es continua excepto en un número finito de discontinuidades finitas; si en $-1 \leq x \leq 1$, $f'(x)$ existe en los puntos donde $f(x)$ es continua y además existen los límites laterales de la derivada (por la derecha y por la izquierda) de $f(x)$ en los puntos de discontinuidad. Si

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx,$$

entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (2.37)$$

en los puntos de continuidad de $f(x)$.

La serie de la izquierda en (2.37) converge al valor medio $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ en los puntos de discontinuidad de $f(x)$.

Demostración. Considérese el miembro izquierdo de (2.37) con los a_n dados por (2.36):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(y) P_n(y) P_n(x) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(y) P_k(y) P_k(x) dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(y) \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2} \right) P_k(x) P_k(y) dy. \end{aligned}$$

La serie a la izquierda de (2.37) convergerá a la suma $f(x)$ si solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(y) K_n(x, y) dy = f(x), \quad (2.38)$$

donde

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) P_k(x) P_k(y). \quad (2.39)$$

Para sumar la serie a la derecha de (2.39) se emplea la fórmula de Christoffel-Darboux ⁶. Para

$$\varphi_k(x) = P_k(x),$$

$$g_k(x) = \int_{-1}^1 P_k^2(x) dx = \frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k + \frac{1}{2}},$$

y el coeficiente principal en $P_n(x)$ es $h_n = 2^n \left(\frac{1}{2}\right)_n / n!$. Entonces, $h_n / (g_n h_{n+1}) = \frac{1}{2} (n+1)$ y concluimos por (2.40) que

$$K_n(x, y) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}. \quad (2.41)$$

La condición (2.38) puede reescribirse de la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(x) - \int_{-1}^1 f(y) K_n(x, y) dy \right] = 0. \quad (2.42)$$

Puesto que $\int_{-1}^1 P_k(y) dy = 0$, para $k > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 K_n(x, y) dy &= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) P_k(x) P_k(y) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) P_k(x) P_k(y) \right] dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dy = 1. \end{aligned}$$

6

Teorema 2.4. [18, Cap. 9.85, p. 154] *Fórmula de Christoffel-Darboux.* Sea $\varphi_n(x)$ un conjunto simple de polinomios reales ortogonales con respecto a $\omega(x) > 0$ en $a < x < b$. Sea h_n el coeficiente principal en $\varphi_n(x)$ de modo que

$$\varphi_n(x) = h_n x^n + \pi_{n-1},$$

donde π_{n-1} representa un polinomio de grado a lo sumo $n-1$. Sea

$$g_k = (\varphi_k, \varphi_k) = \int_a^b \omega(x) \varphi_k^2(x) dx.$$

Entonces,

$$\sum_{k=0}^n g_l^{-1} \varphi_k(x) \varphi_k(y) = \frac{h_n}{g_n h_{n+1}} \cdot \frac{\varphi_{n+1}(y) \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) \varphi_n(y)}{y-x}. \quad (2.40)$$

Con esto, la condición (2.42) pasa a ser

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 [f(x) - f(y)] K_n(x, y) dy = 0.$$

Por (2.41),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(y)}{x-y} [P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)] dy = 0. \quad (2.43)$$

Por el Teorema 59 de [18, p. 156] se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \int_{-1}^1 g(y) P_n(y) dy = 0, \quad (2.44)$$

para cualquier $g(y)$ tal que $\int_{-1}^1 g^2(y) dy$ existe.

En un punto de continuidad de $f(y)$ también se ha asumido la existencia de $f'(y)$. Así, con

$$g(y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

$\int_{-1}^1 g^2(y) dy$ existe. Se sigue de (2.44) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(y)}{x-y} P_n(y) dy = 0 \quad (2.45)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{3}{2}\right)^{1/2} \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(y)}{x-y} P_{n+1}(y) dy = 0. \quad (2.46)$$

Entonces, (2.43) se satisfará en un punto de continuidad de $f(x)$ en $-1 < x < 1$ si se puede demostrar que las siguientes expresiones son acotadas para $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{n+1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} P_{n+1}(x), \quad \frac{n+1}{2} \left(n + \frac{3}{2}\right)^{-1/2} P_n(x).$$

Empleando el Teorema 61 de [18, p. 173]⁷, para $-1 < x < 1$, se deduce que

$$\begin{aligned} \left| \frac{n+1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} P_{n+1}(x) \right| &< \left[\frac{(n+1)^2}{4 \left(n + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2(n+1)(1-x^4)} \right]^{1/2} \\ &< \left[\frac{\pi(n+1)}{4(2n+1)(1-x^2)} \right]^{1/2} < \left[\frac{\pi}{4(1-x^2)} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left| \frac{n+1}{2} \left(n + \frac{3}{2}\right)^{-1/2} P_n(x) \right| &< \left[\frac{(n+1)^2}{4 \left(n + \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2n(1-x^2)} \right]^{1/2} \\ &< \left[\frac{\pi(n^2 + 2n + 1)}{4(2n^2 + 3n)(1-x^2)} \right]^{1/2} < \left[\frac{\pi}{4(1-x^2)} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

⁷Los Teoremas 59 y 61 de [18] son resultados generales para polinomios ortogonales. Para profundizar, consúltese [18, Cap. 9.85].

Queda, pues, demostrada la validez de (2.37) en los puntos de continuidad de $f(x)$.

La demostración de la convergencia al valor medio de la serie de la izquierda en (2.37) es similar a la del caso continuo. \square

2.8. Funciones asociadas de Legendre

Cuando la ecuación de Helmholtz (2.74) se separa en coordenadas esféricas, una de las EDOs separadas (2.83) es la *ecuación asociada de Legendre*,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) = 0. \quad (2.47)$$

En la sección 2.9.1 se verá detalladamente cómo llegar a dicha ecuación por separación de variables. Sustituyendo por $x = \cos \theta$,

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n^m(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) = 0. \quad (2.48)$$

Si la constante de separación azimutal es $m^2 = 0$, tenemos la ecuación de Legendre (2.2). Las soluciones regulares $P_n^m(x)$ (con m no necesariamente cero, pero sí entero) son

$$v \equiv P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad \text{con } m \geq 0 \text{ un entero.} \quad (2.49)$$

Para ver esto, se puede partir de la ecuación de Legendre regular y convertirla en la ecuación asociada mediante el uso de diferenciación múltiple. Efectivamente, tal y como se indica en [2, Cap. 12.5, p. 771], sea la ecuación de Legendre

$$(1-x^2) P_n'' - 2x P_n' + n(n+1) P_n = 0.$$

Usando la fórmula de Leibniz diferenciamos m veces obteniendo ⁸,

$$(1-x^2) u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0,$$

donde $u \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$. Para poner la ecuación de Legendre en forma autoadjunta y convertir la función peso en 1, reemplazamos $u(x)$ por

$$v(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (2.51)$$

⁸La fórmula de Leibniz para la n -ésima derivada de un producto es,

$$\frac{d^n}{dx^n} [A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x). \quad (2.50)$$

Resolviendo para u y diferenciando,

$$u' = \left(v' + \frac{mxv}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{-m/2},$$

$$u'' = \left[v'' + \frac{2mxv'}{1-x^2} + \frac{mv}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2v}{(1-x^2)^2} \right] \cdot (1-x^2)^{-m/2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de Legendre, entonces la nueva función v satisface la EDO autoadjunta

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] v = 0, \quad (2.52)$$

que es la *ecuación de Legendre asociada*. Esta se reduce a la ecuación de Legendre cuando $m = 0$.

Expresada en coordenadas polares, la ecuación asociada de Legendre es

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] v = 0. \quad (2.53)$$

2.8.1. Polinomios asociados de Legendre

Las soluciones regulares (2.49) se llaman las *funciones asociadas de Legendre*. Como la mayor potencia es x^n , se ha de tener $m \leq n$.

Por la forma de (2.49), se podría esperar que m fuese no negativa. Sin embargo, si $P_n(x)$ se expresa mediante la fórmula de Rodrigues, esta restricción sobre m se relaja y es posible tener $-n \leq m \leq n$. Empleando la fórmula de diferenciación de Leibniz de nuevo, se puede demostrar que

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x). \quad (2.54)$$

Una función generadora para las funciones asociadas de Legendre se obtiene, por medio de (2.47), a partir de la de los polinomios de Legendre ordinarios:

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x) t^s. \quad (2.55)$$

Definiendo los polinomios $\mathcal{P}_{s+m}^m(x) = P_{s+m}^m(x) (1-x^2)^{-m/2}$, se halla una expresión práctica para la función generadora,

$$g_m(x, t) \equiv \frac{(2m)!}{2^m m! (1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{s+m}^m(x) t^s. \quad (2.56)$$

Se puede calcular una relación recursiva para los polinomios asociados de Legendre análoga a (2.23), anteriormente obtenida. Diferenciando,

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial g_m}{\partial t} = (2m + 1)(x - t)g_m(x, t).$$

Sustituyendo por la expansión de definición en (2.56),

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_s s \mathcal{P}_{s+m}^m(x) t^{s-1} = (2m + 1) \sum_s [x \mathcal{P}_{s+m}^m t^s - \mathcal{P}_{s+m}^m t^{s+1}].$$

La siguiente relación recursiva (que devuelve (2.23) para $m = 0$ y $s = n$) se obtiene comparando los coeficientes de las potencias de t :

$$(s + 1) \mathcal{P}_{s+m+1}^m - (2m + 1 + 2s)x \mathcal{P}_{s+m}^m + (s + 2m) \mathcal{P}_{s+m-1}^m = 0. \quad (2.57)$$

El uso de esta relación requiere su inicialización, esto es, relacionar los polinomios asociados de Legendre con los polinomios ordinarios de Legendre. Para ello, veamos que se cumple que $\mathcal{P}_m^m = (2m - 1)!!$. Para llegar a dicha expresión, hemos de volver a la recurrencia (2.3), que se puede reescribir como

$$a_{k+2} = -\frac{l(l+1) - k(k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k.$$

Siguiendo el procedimiento expuesto en [7, 3.1], yendo de manera descendente se tiene

$$a_{l-2} = -\frac{l(l-1)}{(2l-1)} a_l, \quad a_{l-4} = -\frac{(l-2)(l-3)}{2(2l-3)} a_l, \dots$$

De modo que,

$$P_l(x) = a_l \left[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2^2(2l-1)(2l-3)} x^{l-4} - \dots \right]. \quad (2.58)$$

Evaluando en $x = 1$, como $P_l(1) = 1$,

$$1 = a_l \left[1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2^2(2l-1)(2l-3)} - \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)(l-4)(l-5)}{2^3(2l-1)(2l-3)(2l-5)} + \dots \right].$$

Nótese que si fijamos

$$a_l = \frac{(2l-1)!!}{l!},$$

con $(2l-1)!! = (2l-1)(2l-3)(2l-5) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1$, se cumple que $P_l(1) = 1$. Sustituyendo en (2.58) e integrando l veces,

$$\frac{(2l-1)!!}{(2l)!} \left[x^{2l} - lx^{2l-2} + \frac{l(l-1)}{2!} x^{2l-4} - \dots \right].$$

En el corchete está la expresión del binomio de Newton $(x^2 - 1)^l$, luego,

$$\frac{(2l-1)!!}{(2l)!} (x^2 - 1)^l = \frac{1}{2^l l!} (x^2 - 1)^l. \quad (2.59)$$

Para obtener la expresión buscada de \mathcal{P}_m^m , basta sustituir (2.59) en la fórmula de Rodrigues con $x = 1$. Además, puesto que $|m| \leq n$, se puede establecer $P_n^{n+1} = 0$ y emplear esto para obtener valores de inicio para varios procesos recursivos [2, Cap. 12.5, p. 773]. Obsérvese que

$$(1 - 2xt + t^2)g_1(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_s P_s(x)t^s, \quad (2.60)$$

y tras insertar en (2.57) se halla la recursión

$$\mathcal{P}_{s+1}^1 - 2x\mathcal{P}_s^1 + \mathcal{P}_{s-1}^1 = P_s(x). \quad (2.61)$$

Más en general se tiene la identidad,

$$(1 - 2xt + t^2)g_{m+1}(x, t) = (2m + 1)g_m(x, t) \quad (2.62)$$

de donde se extrae la recursión

$$\mathcal{P}_{s+m+1}^{m+1} - 2x\mathcal{P}_{s+m}^{m+1} + \mathcal{P}_{s+m-1}^{m+1} = (2m + 1)\mathcal{P}_{s+m}^m(x). \quad (2.63)$$

Con esto podemos calcular algunos de los polinomios asociados de Legendre. Para $m = 1$ y $s = 0$ la ecuación (2.61) da $\mathcal{P}_1^1 = 1$, porque $\mathcal{P}_0^1 = 0 = \mathcal{P}_{-1}^1$ no aparecen en la definición (2.56). Para $s = 1$, por medio de (2.61),

$$\mathcal{P}_2^1(x) = P_1 + 2x\mathcal{P}_1^1 = x + 2x = 3x.$$

Para $s = 2$ tenemos,

$$\mathcal{P}_3^1(x) = P_2 + 2x\mathcal{P}_2^1 - \mathcal{P}_1^1 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + 6x^2 - 1 = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}.$$

Para $m = 1, s = 0$ utilizamos la ecuación (2.62): $\mathcal{P}_2^2(x) = 3\mathcal{P}_1^1(x) = 3$.

2.8.2. Paridad de los polinomios asociados de Legendre

La relación de paridad de los $P_n^m(x)$ se puede obtener a partir de la ecuación de definición (2.49). Sabemos que $P_n(x)$ contribuye con $(-1)^n$ al hacer $x \rightarrow -x$. Diferenciar m veces da un factor $(-1)^m$, por lo que

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m}P_n^m(x). \quad (2.64)$$

Asimismo, de la definición (2.49) se sigue que

$$P_n^m(\pm 1) = 0, \quad \text{para } m \neq 0. \quad (2.65)$$

2.8.3. Ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre

Por la definición (2.49), la fórmula de Rodrigues (2.14) para $P_n(x)$ y definiendo la función $X \equiv (x^2 - 1)$ tal y como se propone en [2, Cap. 12, p.776],

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{(-1)^m}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^1 X^m \left(\frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} X^q dx.$$

Si $p \neq q$, asumimos $p < q$. Nótese que el superíndice m es el mismo para ambas funciones, condición esencial. Integrando $q + m$ veces,

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{(-1)^m (-1)^{q+m}}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^1 X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) dx. \quad (2.66)$$

Expandimos el integrando del término derecho mediante la fórmula de Leibniz,

$$X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) = X^q \sum_{i=0}^{q+m} \frac{(q+m)!}{i!(q+m-i)!} \left(\frac{d^{q+m-i}}{dx^{q+m-i}} X^m \right) \frac{d^{p+m+i}}{dx^{p+m+i}} X^p. \quad (2.67)$$

Puesto que el término X^m no contiene potencias mayores que x^{2m} , se requiere que $q+m-i \leq 2m$ (sino, la derivada se anula). Similarmente, $p+m+i \leq 2p$ y la suma de ambas desigualdades resulta en $q \leq p$. Esto contradice la suposición inicial de que $p < q$. Por lo tanto, no hay solución para i y la integral se anula. Lo mismo ocurrirá si $p > q$.

El caso restante es $p = q$, para el cual se tiene el término único correspondiente a $i = q - m$. Sustituyendo (2.67) en (2.66) se llega a,

$$\int_{-1}^1 [P_q^m(x)]^2 dx = \frac{(-1)^{q+2m} (q+m)!}{2^{2q} q! q! (2m)! (q-m)!} \int_{-1}^1 X^q \left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m \right) \left(\frac{d^{2q}}{dx^{2q}} X^q \right) dx. \quad (2.68)$$

Dado que, $X^m = (x^2 - 1)^m = x^{2m} - mx^{2m-2} + \dots$ y $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m = (2m)!$, la ecuación (2.68) se reduce a

$$\int_{-1}^1 [P_q^m(x)]^2 dx = \frac{(-1)^{q+2m} (2q)! (q+m)!}{2^{2q} q! q! (q-m)!} \int_{-1}^1 X^q dx. \quad (2.69)$$

La integral de término derecho es

$$(-1)^q \int_0^\pi \sin^{2q+1} \theta d\theta = \frac{(-1)^q 2^{2q+1} q! q!}{(2q+1)!}. \quad (2.70)$$

Combinando (2.69) y (2.70) se llega a la *integral de ortogonalidad* [2, Cap. 12.5, p. 777],

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{2}{2q+1} \cdot \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq}. \quad (2.71)$$

En coordenadas esféricas, (2.71) es

$$\int_0^\pi P_p^m(\cos \theta) P_q^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq}. \quad (2.72)$$

La ortogonalidad de los polinomios de Legendre es un caso particular de este resultado para $m = 0$.

Es posible desarrollar una relación de ortogonalidad para las funciones asociadas de Legendre con mismo subíndice pero distinto superíndice:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^k(x) (1-x^2)^{-1} dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{m,k}. \quad (2.73)$$

2.9. Aplicaciones de los polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre y sus funciones asociadas desempeñan un papel central en numerosos problemas de la física matemática, particularmente en aquellos que presentan simetría esférica. Esta sección está dedicada a dos de sus aplicaciones más destacadas: la construcción de los armónicos esféricos y la descripción algebraica de los operadores de momento angular orbital en mecánica cuántica.

2.9.1. Ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas

En numerosos contextos físicos, como en la resolución de la ecuación de Laplace, de la ecuación de Helmholtz o de la ecuación de Schrödinger con potenciales centrales, la técnica de separación de variables permite descomponer la solución en factores radiales y angulares. La parte angular de dichas ecuaciones procede exclusivamente del operador Laplaciano, lo que conduce a una ecuación diferencial en las variables angulares cuya resolución define funciones especiales.

En esta sección nos centramos en la ecuación de Helmholtz, formulada en coordenadas esféricas, y mostraremos cómo la aplicación sistemática del método de separación de variables conduce a una descomposición de la solución en tres ecuaciones ordinarias. Este análisis permitirá, en la sección siguiente, introducir de manera natural los armónicos esféricos.

Sea la ecuación de Helmholtz, donde k^2 es constante

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (2.74)$$

Empleando coordenadas esféricas [2, Cap. 2, p. 126]⁹

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right], \quad (2.76)$$

obtenemos

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] = -k^2 \psi. \quad (2.77)$$

Utilizaremos el método de separación de variables, por lo que comenzamos buscando soluciones no triviales de la forma

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (2.78)$$

Sustituyendo en (2.77) y dividiendo entre $R\Theta\Phi$ se obtiene la siguiente ecuación, donde todas las derivadas son ordinarias en lugar de parciales:

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k^2. \quad (2.79)$$

Multiplicando todo por $r^2 \sin \theta$, tendremos una función únicamente de φ igualada a una función únicamente dependiente r y θ . Puesto que r, θ y φ son variables independientes, ambas funciones deben ser constantes, por lo que igualamos cada lado de (2.79) a una constante de separación¹⁰ $-m^2$. Así,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (2.80)$$

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} = -k^2. \quad (2.81)$$

Tras multiplicar (2.81) y reorganizar términos,

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k^2 = -\frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}, \quad (2.82)$$

donde vemos que, de nuevo, las variables están separadas, por lo que igualamos cada lado a una constante Q :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta + Q\Theta = 0, \quad (2.83)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{QR}{r^2} = 0. \quad (2.84)$$

⁹Para la deducción del Laplaciano en esféricas, se puede consultar [2, Cap. 2.2, p.110]. A partir de la fórmula general [2, ecuación 2.22, p. 112], para coordenadas ortogonales con factores de escala h_1, h_2, h_3 y una función escalar ψ ,

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right], \quad (2.75)$$

basta tener en cuenta que los factores de escala en coordenadas esféricas son: $h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta$. Así, aplicando la fórmula para $u_1 = r, u_2 = \theta$ y $u_3 = \varphi$, se obtiene (2.76).

¹⁰Hemos tenido en cuenta que en casi todos los problemas físicos φ aparece como el ángulo azimutal, lo cual sugiere una solución periódica en lugar de una exponencial, por eso el signo menos.

Por tanto, hemos reemplazado una ecuación diferencial en derivadas parciales de tres variables por tres EDOs. La solución más general de (2.74) puede escribirse como [2, Cap. 9.3, p. 558]

$$\psi_{Qm}(r, \theta, \varphi) = \sum_{Q,m} a_{Qm} R_Q(r) \Theta_{Qm}(\theta) \Phi_m(\varphi), \quad (2.85)$$

para ciertos coeficientes $a_{Qm} \in \mathbb{R}$. La restricción de que k^2 ha de ser constante es innecesariamente restrictiva, puesto que el proceso de separación sigue siendo posible para un k^2 tan general como

$$k^2 = f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\varphi) + k'^2. \quad (2.86)$$

Finalmente, veamos cómo la constante m en (2.80) es restringida. En coordenadas cilíndricas o esféricas, φ es un ángulo azimutal. Si se trata de un problema clásico, se requerirá que $\Phi(\varphi)$ sea univaluada. Entonces, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ y m ha de ser un entero cuya determinación dependerá del problema. Para un entero $|m| > 1$, Φ tendrá período $2\pi/m$. Siempre que una coordenada corresponde a un eje de traslación a un ángulo azimutal, la ecuación de separación tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} &= -m^2 \Phi(\varphi), \quad \text{para } \varphi \text{ el ángulo azimutal, y} \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= \pm a^2 Z(z), \quad \text{para } z, \text{ un eje de traslación del sistema coordenado cilíndrico.} \end{aligned}$$

2.9.2. Armónicos esféricos

Como resultado del procedimiento de separación de variables aplicado a ecuaciones con simetría esférica —como la de Laplace, la de Helmholtz o la ecuación de Schrödinger con potenciales centrales—, la parte angular de la solución queda determinada exclusivamente por el operador Laplaciano. Esta dependencia angular conduce a la ecuación

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + n(n+1) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) = 0. \quad (2.87)$$

Dependencia azimutal

La ecuación azimutal (2.80) es

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2,$$

con soluciones $\Phi(\varphi) = e^{-im\varphi}, e^{im\varphi}$, con m entero, que satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\varphi} e^{im_2\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{m_1 m_2}. \quad (2.88)$$

Nótese que se ha tomado el producto $\Phi_{m_1}^*(\varphi)\Phi_{m_2}(\varphi)$, donde \star indica la función complejo conjugado. En electrostática y muchos otros problemas físicos se requiere que m sea un entero para que $\Phi(\varphi)$ sea una función univaluada del ángulo azimutal.

De acuerdo con (2.88),

$$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (2.89)$$

es ortonormal con respecto a la integración sobre φ .

Dependencia polar angular

La separación de la dependencia polar (ver 2.83) da lugar a la ecuación asociada de Legendre (2.47),

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta + n(n+1)\Theta = 0. \quad (2.90)$$

Es decir, para $\Theta(\theta) = P_n^m(\cos\theta)$.

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P_n^m(\cos\theta) = 0. \quad (2.91)$$

El empleo de la fórmula de Rodrigues (2.14) para incluir valores negativos de m conduce a

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n, \quad -n \leq m \leq n. \quad (2.92)$$

Tras normalizar la función asociada de Legendre se obtienen las funciones ortonormales con respecto de θ ,

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta), \quad -n \leq m \leq n. \quad (2.93)$$

Armónicos esféricos

La función $\Phi_m(\varphi)$ dada por (2.89) es ortonormal con respecto al ángulo azimutal φ . Tomando el producto de $\Phi_m(\varphi)$ y la función ortonormal (2.93) definimos

$$Y_n^m(\theta, \varphi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (2.94)$$

para obtener funciones de dos ángulos (y dos índices) ortonormales sobre la superficie esférica.

Estas funciones $Y_n^m(\theta, \varphi)$ son armónicos esféricos y se cumple que,

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1*}(\theta, \varphi) Y_{n_2}^{m_2}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (2.95)$$

A continuación se verá la utilidad de los armónicos esféricos en el contexto de la mecánica cuántica.

2.9.3. Operadores de momento angular orbital

En términos matemáticos, el momento angular orbital es una manifestación de la invariancia bajo rotaciones en el espacio tridimensional. Más concretamente, es el operador asociado a las transformaciones infinitesimales del grupo de rotaciones $SO(3)$ que actúan sobre funciones en \mathbb{R}^3 .

En mecánica clásica, para una partícula puntual se tiene que $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ es la posición de la partícula y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ es el momento lineal de la misma. Esto puede interpretarse como un campo vectorial sobre el espacio de fases (posición y momento) y cumple el papel de generador de rotaciones. En mecánica cuántica, el momento lineal \mathbf{p} se representa por el operador diferencial $-i\nabla$ en unidades con $(\hbar = 1)$. Así, el momento angular orbital cuántico es el operador $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ que actúa sobre funciones de onda $\psi(\mathbf{r})$ definidas en \mathbb{R}^3 , en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Los componentes del operador $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k, \quad (2.96)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita¹¹. Con lo cual, desde el punto de vista matemático, el momento angular orbital es una representación del álgebra de Lie de $SO(3)$ como operadores diferenciales sobre funciones en \mathbb{R}^3 .

El operador diferencial correspondiente al cuadrado del momento angular puede determinarse a partir de $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ y es,

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2. \quad (2.97)$$

Existen autofunciones normalizadas ψ_{LM} simultáneas para L_z y \mathbf{L}^2 ,

¹¹El símbolo de Levi-Civita se define como:

$$\epsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k, l, \dots) \text{ es una permutación par de } (1, 2, 3, 4, \dots), \\ -1 & \text{si } (i, j, k, l, \dots) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, 3, 4, \dots), \\ 0 & \text{si dos o más índices son iguales.} \end{cases}$$

$$L_z \psi_{LM} = M \psi_{LM}, \quad \mathbf{L}^2 \psi_{LM} = \lambda \psi_{LM}. \quad (2.98)$$

Emplearemos posteriormente los *operadores escalera*, ampliamente utilizados en mecánica cuántica y se definen como, $L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$. Dada una autofunción de dichos operadores, ψ_{LM} , su actuación sobre ella es,

$$L_+ \psi_{LM} = \sqrt{L(L+1) - M(M+1)} \psi_{L, M+1}, \quad (2.99)$$

$$L_- \psi_{LM} = \sqrt{L(L+1) - M(M-1)} \psi_{L, M-1}. \quad (2.100)$$

El objetivo de esta sección es demostrar que las autofunciones ψ_{LM} de L^2 y L_z en coordenadas esféricas son los armónicos esféricos $Y_L^M(\theta, \varphi)$. Es decir,

$$L_z \psi_{LM}(\theta, \varphi) = M \psi_{LM}(\theta, \varphi), \quad \psi_{LM}(\theta, \varphi) = Y_L^M(\theta, \varphi). \quad (2.101)$$

La forma explícita de $L_z = -i\partial/\partial\varphi$ indica que ψ_{LM} tiene una dependencia en φ dada por $\exp(iM\varphi)$, con M un entero para mantener ψ_{LM} univaluada. Si M es entero, entonces también lo es L .

Para determinar la dependencia en θ de $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$ se seguirá el procedimiento de dos pasos dado en [2, Cap. 12.7, p. 793]: (1) la determinación de $\psi_{LL}(\theta, \varphi)$ y (2) el desarrollo de $\psi_{LM}(\theta, \varphi)$ en términos de ψ_{LL} con fase fijada por ψ_{L0} . Sea

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \Theta_{LM}(\theta) e^{iM\varphi}. \quad (2.102)$$

Por (2.99), $L_+ \psi_{LL} = 0$ y siendo L el mayor M , empleamos las siguientes fórmulas (se obtienen a partir de $\mathbf{L} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)$),

$$L_x + iL_y = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right),$$

$$L_x - iL_y = -e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i \cot\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right);$$

y (halladas a partir de las anteriores),

$$(L_x + iL_y) Y_L^M(\theta, \varphi) = \sqrt{(L-M)(L+M+1)} Y_L^{M+1}(\theta, \varphi),$$

$$(L_x - iL_y) Y_L^M(\theta, \varphi) = \sqrt{(L+M)(L-M+1)} Y_L^{M-1}(\theta, \varphi).$$

Con esto,

$$e^{i(L+1)\varphi} \left[\frac{d}{d\theta} - L \cot\theta \right] \Theta_{LL}(\theta) = 0. \quad (2.103)$$

Por tanto,

$$\psi_{LL}(\theta, \varphi) = c_L \sin^L \theta e^{iL\varphi}. \quad (2.104)$$

Normalizando,

$$c_L^* c_L \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^{2L+1} \theta d\theta d\varphi = 1. \quad (2.105)$$

La integral en θ puede evaluarse como una función beta y

$$|c_L| = \sqrt{\frac{(2L+1)!!}{4\pi(2L)!}} = \frac{\sqrt{(2L)!!}}{2^L L!} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}. \quad (2.106)$$

Esto completa el primer paso. Para obtener ahora los ψ_{LM} , $M \neq \pm L$, volvemos a los operadores escalera. A partir de (2.99),

$$\begin{aligned} \psi_{LM}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}} (L_-)^{L-M} \psi_{LL}(\theta, \varphi), \\ \psi_{LM}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}} (L_+)^{L+M} \psi_{L,-L}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Nótese que las fases relativas quedan establecidas por los operadores escalera. L_+ y L_- operando en $\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi}$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} L_+ \Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= e^{i(M+1)\varphi} \left[\frac{d}{d\theta} - M \cot \theta \right] \Theta_{LM}(\theta) \\ &= e^{i(M+1)\varphi} \sin^{1+M} \theta \frac{d}{d(\cos \theta)} \sin^{-M} \theta \Theta_{LM}(\theta), \\ L_- \Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= -e^{i(M-1)\varphi} \left[\frac{d}{d\theta} + M \cot \theta \right] \Theta_{LM}(\theta) \\ &= e^{i(M-1)\varphi} \sin^{1-M} \theta \frac{d}{d(\cos \theta)} \sin^M \theta \Theta_{LM}(\theta). \end{aligned} \quad (2.108)$$

Repetiendo estas operaciones n veces se obtiene

$$\begin{aligned} (L_+)^n \Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= (-1)^n e^{i(M+n)\varphi} \sin^{n+M} \theta \frac{d^n \sin^{-M} \theta \Theta_{LM}(\theta)}{d(\cos \theta)^n}, \\ (L_-)^n \Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} &= e^{i(M-n)\varphi} \sin^{n-M} \theta \frac{d^n \sin^M \theta \Theta_{LM}(\theta)}{d(\cos \theta)^n}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

A partir de (2.108),

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = c_L \sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}} e^{iM\varphi} \sin^{-M} \theta \frac{d^{L-M}}{d(\cos \theta)^{L-M}} \sin^{2L} \theta, \quad (2.110)$$

y para¹² $M = -L$:

$$\psi_{L,-L}(\theta, \varphi) = \frac{c_L}{(2L)!} e^{-iL\varphi} \sin^L \theta \frac{d^{2L}}{d(\cos \theta)^{2L}} \sin^{2L} \theta = (-1)^L c_L \sin^L \theta e^{-iL\varphi}. \quad (2.111)$$

¹²La fase $(-1)^L$ característica de $\psi_{L,-L}$ relativa a $\psi_{L,L}$ entra debido a $\sin^{2L} \theta = (1-x^2)^L = (-1)^L (x^2-1)^L$.

Combinando las ecuaciones (2.108), (2.110) y (2.111) se obtiene,

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = (-1)^L c_L \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}} (-1)^{L+M} e^{iM\varphi} \sin^M \theta \frac{d^{L+M} \sin^{2L} \theta}{d(\cos \theta)^{L+M}}. \quad (2.112)$$

Las ecuaciones (2.110) y (2.112) concuerdan si

$$\psi_{L0}(\theta, \varphi) = c_L \frac{1}{\sqrt{(2L)!}} \frac{d^L}{(d \cos \theta)^L} \sin^{2L} \theta. \quad (2.113)$$

Usando la fórmula de Rodrigues (2.14) se tiene

$$\psi_{L0}(\theta, \varphi) = (-1)^L c_L \frac{2^L L!}{\sqrt{(2L)!}} P_L(\cos \theta) = (-1)^L \frac{c_L}{|c_L|} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} P_L(\cos \theta). \quad (2.114)$$

La última igualdad se sigue de (2.106). Ahora exigimos que $\psi_{L0}(0, 0)$ sea real y positivo:

$$c_L = (-1)^L |c_L| = (-1)^L \frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}. \quad (2.115)$$

Con $(-1)^L c_L / |c_L| = 1$, $\psi_{L0}(\theta, \varphi)$ en (2.114) puede identificarse con el armónico esférico $Y_L^0(\theta, \varphi)$.

Sustituyendo el valor de $(-1)^L c_L$ en (2.112) y definiendo $x = \cos \theta$, para $M \geq 0$ se tiene,

$$\begin{aligned} \psi_{LM}(\theta, \varphi) &= \frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}} (-1)^{L+M} e^{iM\varphi} \sin^M \theta \frac{d^{L+M}}{d(\cos \theta)^{L+M}} \sin^{2L} \theta \\ &= \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(L-M)!}{(L+M)!}} e^{iM\varphi} (-1)^M \left\{ \frac{1}{2^L L!} (1-x^2)^{M/2} \frac{d^{L+M}}{dx^{L+M}} (x^2-1)^L \right\}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

La expresión entre corchetes se identifica con la función asociada de Legendre mediante la ecuación (2.92) y se tiene

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = Y_L^M(\theta, \varphi) = (-1)^M \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \cdot \frac{(L-M)!}{(L+M)!} \cdot P_L^M(\cos \theta) e^{iM\varphi}, \quad M \geq 0. \quad (2.117)$$

Finalmente, de acuerdo con (2.49), Y_L^M para superíndices negativos viene dada por

$$Y_L^{-M}(\theta, \varphi) = (-1)^M [Y_L^M(\theta, \varphi)]^*. \quad (2.118)$$

Capítulo 3

Funciones de Bessel

3.1. La ecuación diferencial de Bessel

En este capítulo abordaremos la resolución de la ecuación diferencial de Bessel por medio del método de Frobenius. Dicha ecuación viene dada por,

$$\nabla_{\nu}\omega \equiv z^2 \frac{d^2\omega}{dz^2} + z \frac{d\omega}{dz} + (z^2 - \nu^2)\omega = 0. \quad (3.1)$$

Obsérvese que es de la forma (1.1) y tiene un punto singular regular en $z = 0$ para el cual el exponente indicial es $m = \pm\nu$. Por el Teorema 1.5, admite una solución en serie:

$$\omega = z^{\nu} \sum_n a_n z^n \quad (a_0 \neq 0). \quad (3.2)$$

Al sustituir esta serie en la ecuación, se obtiene una relación recurrente para los coeficientes:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}, \quad (3.3)$$

permitiendo expresar todos los coeficientes pares en términos de a_0 y resultando en coeficientes impares nulos,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)}. \quad (3.4)$$

Nos topamos con dificultades para ν entero o semientero negativo: si $\nu = -m$, los a_{2k} no están bien definidos para $k \geq m$ por haber un factor cero en el denominador, por lo que en este caso no hay solución. Si $\nu = -m/2$ con m impar, la fórmula (3.3) tiene un cero en el denominador para $n = m$, rompiéndose la cadena $0 = a_1 = a_3 = \cdots$. Ahora bien, reescribiendo (3.3) de la forma

$$[(j+b)^2 - \nu^2] a_n + a_{n-2} = 0, \quad j \geq 2, \quad (3.5)$$

se tiene que $a_{m-2} = 2$ y sigue siendo consistente tomar $a_m = 0$.

En definitiva, para ν no entero negativo, las soluciones para la ecuación de Bessel son,

$$\omega_\nu(z) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+\nu}}{2^{2n} n! (1+\nu)(2+\nu) \cdots (n+\nu)}. \quad (3.6)$$

La elección estándar es $a_0 = \frac{1}{2^\nu} \nu!$, que da lugar a la *función de Bessel de primera clase de orden* ν no entero negativo:

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n+\nu+1)}. \quad (3.7)$$

Esta serie converge absolutamente para todo $z \neq 0$ y también para $z = 0$ cuando $\operatorname{Re}(\nu) > 0$ o $\nu = 0$. Para enteros $\nu = m$ se emplea¹ $j! = \Gamma(j+1)$ para escribir,

$$J_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.8)$$

Cabe notar que (3.7) tiene sentido también para ν entero negativo, aunque las fórmulas que lleven a ella no lo tengan. Efectivamente, puesto que $1/\Gamma(z) = 0$ para $z = 0, -1, -2, \dots$, entonces si $\nu = -m$ se tiene $1/\Gamma(n+\nu+1) = 0$ para $n = 0, 1, \dots, m-1$. Entonces los primeros m términos de la serie (3.7) desaparecen y, poniendo $n = k+m$ en (3.7) se obtiene [10, Cap. 5.1, p. 130],

$$J_{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \frac{(z/2)^{2k+m}}{k!(k+m)!} \quad (3.9)$$

o

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z). \quad (3.10)$$

Se puede comprobar fácilmente que $J_{-\nu}$ es una solución de (3.1), de modo que se han hallado dos soluciones J_ν y $J_{-\nu}$ de (3.1). Cuando ν no es un entero, estas son linealmente independientes, pues para z próximo a 0 se tiene (véase [10, Cap. 5.1, p. 131]),

$$J_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad J_{-\nu}(z) \approx \frac{z^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}. \quad (3.11)$$

A continuación presentamos una serie de funciones que son combinaciones lineales de las funciones de Bessel de primera clase, J_ν y $J_{-\nu}$, luego también son soluciones de la ecuación de Bessel ([4, Cap. 7.2.1, p. 4]). Tales soluciones reciben el nombre de función de Bessel de segunda clase o función de Neumann, Y_ν , y funciones de Bessel de tercera clase o funciones de Hankel segundas,

¹La definición y propiedades de la función gamma pueden verse en [19, Cap. 8.46, p. 365].

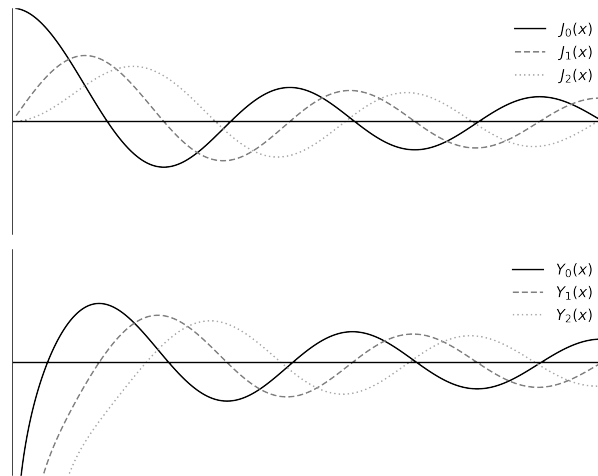


Figura 3.1: Gráfica de las funciones de Bessel de primera y segunda clase. Mientras $J_\nu(x)$ es regular en el origen, $Y_\nu(x)$ presenta una singularidad en $x = 0$.

$H_\nu^{(1)}$ y $H_\nu^{(2)}$:

$$Y_\nu(z) = (\sin \nu\pi)^{-1} [J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)], \quad (3.12)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = [i \sin(\nu\pi)]^{-1} [J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)e^{-i\nu\pi}], \quad (3.13)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) = (i \sin \nu\pi)^{-1} [J_\nu(z)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(z)]. \quad (3.14)$$

Estas funciones, analíticas salvo puntos de ramificación en $z = 0$, son soluciones fundamentales en problemas prácticos. Nótese que Y_ν y J_ν son linealmente independientes², de manera que se pueden utilizar (en lugar de J_ν y $J_{-\nu}$) como base para las soluciones de (3.1).

3.1.1. Función generadora y representaciones integrales de las funciones de Bessel

En esta sección presentaremos algunas de las fórmulas más útiles que involucran funciones de Bessel. Comenzaremos exponiendo un conjunto de identidades algebraicas que relacionan J_ν y su derivada con las funciones “adyacentes” $J_{\nu\pm 1}$. La razón de mostrarlas es su uso posterior en esta sección. Para su demostración, consúltese [10, Cap. 5.2, p. 133].

²La prueba de esto se puede ver en [4, Cap. 7.2.4, p. 7].

Teorema 3.1. *Fórmulas de recurrencia.* [10, Cap. 5.2, p. 133]. Para todo z y ν ,

$$\frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad (3.16)$$

$$zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = -zJ_{\nu+1}(z), \quad (3.17)$$

$$zJ'_\nu(z) + \nu J_\nu(z) = zJ_{\nu-1}(z), \quad (3.18)$$

$$zJ_{\nu-1}(z) + zJ_{\nu+1}(z) = 2\nu J_\nu(z), \quad (3.19)$$

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z). \quad (3.20)$$

Como primera aplicación de estas fórmulas, veamos que las funciones de Bessel de orden semi-entero pueden expresarse en términos de funciones elementales. Consideremos $J_{-1/2}(z)$. Puesto que

$$\begin{aligned} 2^k k! &= 2^k (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k) \\ 2^k \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) &= 2^k \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (2k - 1)(2k - 3) \cdots (1) \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

se tiene

$$J_{-1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k-1/2}}{2^{-1/2} [2^k k!] [2^k \Gamma(k + \frac{1}{2})]} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

La última serie es la expansión de Taylor de $\cos z$. Esto, junto con un cálculo similar para $J_{1/2}(z)$, se tiene

$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z, \quad J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z. \quad (3.21)$$

Se sigue por repetida aplicación de la ecuación (3.19) que, siempre que $\nu - \frac{1}{2}$ sea un entero,

$$J_\nu(z) = z^{-1/2} [P_\nu(z) \cos z + Q_\nu(z) \sin(z)], \quad (3.22)$$

donde P_ν y Q_ν son funciones racionales. Se ha de enfatizar que las funciones de Bessel de orden semi-entero son las únicas que son funciones elementales.

El siguiente grupo de resultados concierne las funciones de Bessel de orden entero. Recordemos que dada una sucesión de números $\{a_n\}$, la función generadora para a_n es la serie de potencias $\sum a_n z^n$.

Teorema 3.2. *Función generadora de $J_n(z)$.* [10, Cap. 5.2, p. 135]

Para todo z y todo $t \neq 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n = \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Demostración. Comenzamos observando que

$$\exp \frac{zt}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^j, \quad \exp \frac{-z}{2t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{t^k k!} \left(\frac{z}{2}\right)^k.$$

Puesto que estas series son absolutamente convergentes, se pueden multiplicar y los términos de la serie doble resultante, sumada en cualquier orden:

$$\exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{j-k}}{j! k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{j+k}.$$

Poniendo $j - k = n$ se obtiene (teniendo en cuenta que $1/(k+n)! = 1/\Gamma(k+n+1) = 0$, cuando $k+n < 0$),

$$\exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \right] t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n.$$

□

En (3.23), t puede ser cualquier número complejo. En particular, tomando $t = e^{i\theta}$, en cuyo caso $\frac{1}{2}(t - t^{-1}) = i \sin \theta$,

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}. \quad (3.24)$$

La expresión de la izquierda es una función 2π -periódica de θ y la de la derecha es claramente una serie de Fourier. Consecuentemente, los coeficientes $J_n(z)$ en la serie han de venir dados por la fórmula usual de los coeficientes de Fourier, es decir

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \theta - in\theta} d\theta. \quad (3.25)$$

Así, llegamos a una fórmula distinta para J_n que en ocasiones resulta más útil. Por ejemplo, muestra inmediatamente que $|J_n(x)| \leq 1$ para todo x real, lo cual no es evidente cuando se considera la serie de potencias. Efectivamente,

$$|J_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ix \sin \theta - in\theta}| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 1 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (3.26)$$

De hecho, lo mismo se cumple para todas las derivadas de $J_n(x)$. Por diferenciación de (3.25),

$$J_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (i \sin \theta)^k e^{ix \sin \theta - in\theta} d\theta. \quad (3.27)$$

En el siguiente teorema se recogen otras fórmulas para J_n equivalentes a (3.25), su prueba se puede ver en [10, Cap. 5.2, p. 136].

Teorema 3.3. *Fórmulas integrales de Bessel [10, Cap. 5.2, p. 136]*

Para cualquier $x \in \mathbb{C}$ y cualquier entero n ,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta - in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta. \quad (3.28)$$

Además,

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) \cos n\theta d\theta, \quad \text{si } n \text{ es par,}$$

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \theta) \sin n\theta d\theta, \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Demostración. Esta demostración es similar a la del Teorema 3.2 y se puede consultar en [10, Cap. 5.2, p. 136]. \square

La expresión (3.28) se denomina *integral de Hankel* y aparecerá posteriormente a la hora de estudiar la difracción de Fraunhofer (3.5.1).

Para terminar esta sección seguiremos el procedimiento indicado en [16, p. 3 - 5] para obtener, a partir de (3.24), otra expresión para la función de Bessel de primera clase que será empleada posteriormente en las aplicaciones. Reemplazando θ por $-\theta$ en (3.24),

$$e^{\pm iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{\pm in\theta}.$$

Mediante el cambio de variable $\theta' = \theta + \pi/2$,

$$\sin \theta = \sin\left(\theta' \mp \frac{\pi}{2}\right) = \mp \cos \theta' \sin \frac{\pi}{2} = \mp \cos \theta',$$

$$e^{in\theta} = e^{in(\theta' \mp \pi/2)} = e^{\mp in\pi/2} e^{in\theta'} = (\mp i)^n e^{in\theta'}.$$

Introduciendo estas relaciones en (3.24) se obtiene la *expansión de Jacobi-Anger*:

$$e^{iz \sin \theta} = e^{\mp iz \cos \theta'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) (\mp i)^n e^{in\theta'}. \quad (3.29)$$

Consecuentemente, se tienen las siguientes relaciones:

$$e^{\pm iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{\pm in\theta}, \quad e^{\pm iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm i)^n J_n(z) e^{in\theta}.$$

La expansión de Jacobi-Anger aparece a menudo en problemas físicos con simetría cilíndrica. Por ejemplo, dada una onda plana con vector de onda \mathbf{k} y vector de posición \mathbf{r} , $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr \cos(\theta-\phi)}$, mediante expansión de Jacobi - Anger se tiene,

$$e^{ikr \cos(\theta-\phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in(\theta-\phi)}.$$

Así, (3.29) simplifica el análisis de ondas, difracción, interacciones oscilatorias y problemas con simetría circular o cilíndrica al permitir reescribir la exponencial con argumento trigonométrico en una serie de modos armónicos multiplicados por funciones de Bessel.

Consideremos ahora la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{iz \cos \theta} d\theta.$$

Utilizando (3.29) y $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{iz \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l J_l(z) e^{il\theta} d\theta \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{i^l}{2} J_l(z) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(e^{i(n+l)\theta} + e^{i(-n+l)\theta} \right) d\theta \\ &= \frac{i^n}{2} J_n(z) (1 + (-1)^n i^{-2n}) = i^n J_n(z). \end{aligned}$$

Por tanto se llega a que

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{iz \cos \theta} d\theta. \quad (3.30)$$

De forma directa se puede obtener que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{-iz \cos \theta} d\theta = (-i)^n J_n(z).$$

Luego,

$$J_n(z) = \frac{(\pm i)^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{\pm iz \cos \theta} d\theta.$$

Usando (3.29),

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos n\theta e^{\pm iz \cos \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(z) (\mp i)^l e^{il\theta} d\theta \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\mp i)^l J_l(z) \int_0^{2\pi} \left(e^{i(n+l)\theta} + e^{-i(n-l)\theta} \right) d\theta \\ &= \pi \left[(\mp i)^n J_n(z) + (\mp i)^{-n} (-1)^n J_n(z) \right] \\ &= 2\pi \Re \left[(\mp i)^n \right] J_n(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin n\theta e^{\pm iz \cos \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(z) (\mp i)^l e^{il\theta} d\theta \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} J_l(z) (\mp i)^l \int_0^{2\pi} \left(e^{i(n+l)\theta} - e^{-i(n-l)\theta} \right) d\theta \\ &= \pi \left[\frac{(\mp i)^n - (-1)^n (\mp i)^{-n}}{i} \right] J_n(z) \\ &= 2\pi \Im \left[(\mp i)^n \right] J_n(z) \end{aligned}$$

Combinando estos resultados,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{\pm iz \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta + i \sin n\theta) e^{\pm iz \cos \theta} d\theta = (\pm i)^n J_n(z).$$

Y finalmente se llega a la fórmula buscada,

$$J_n(z) = \frac{(\mp i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{\pm iz \cos \theta} d\theta. \quad (3.31)$$

3.1.2. Ceros de las funciones de Bessel

La serie de potencias (3.7) es útil cerca de $x = 0$, pero no para valores altos de x . Dado que las funciones de Bessel aparecen en ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera del tipo $J_\nu(\mu) = 0$ o $cJ_\nu(\mu) + \mu J'_\nu(\mu) = 0$, interesa particularmente localizar los ceros de funciones como $J_\nu(x)$ o $cJ_\nu(x) + xJ'_\nu(x)$. Se asumirá en esta sección que ν es real y x positivo, aunque los resultados se pueden extender a ν y x complejos con las modificaciones adecuadas.

El siguiente método permitirá deducir el comportamiento de las funciones de Bessel para valores elevados de x . Sea $f(x)$ una solución de la ecuación de Bessel:

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0.$$

Definiendo $g(x) = x^{1/2} f(x)$, esta satisface

$$g''(x) + g(x) + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2} g(x) = 0.$$

Para grandes valores de x es razonable esperar que las soluciones se comporten como soluciones de $g''(x) + g(x) = 0$, es decir, $a \cos(x+b)$ o $a \sin(x+b)$. Luego las soluciones $f(x)$ de la ecuación de Bessel deberían ser de la forma $ax^{-\frac{1}{2}} \cos(x+b)$ o $ax^{-\frac{1}{2}} \sin(x+b)$. Estas ideas intuitivas resultan ser correctas y vienen dadas por el siguiente teorema.

Teorema 3.4. [10, Cap. 5.3, p. 139] Para cada $\nu \in \mathbb{R}$, existen una función $E_\nu(x)$ y una constante C_ν tales que, para $x \geq 1$,

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + E_\nu(x), \quad |E_\nu(x)| \leq \frac{C_\nu}{x^{3/2}}. \quad (3.32)$$

Entonces, $J_\nu(x) \approx ax^{-1/2} \cos(x+b)$ donde $a = \sqrt{2/\pi}$ y $b = (2\nu - 1)/4\pi$, con un término de error que tiende a cero como $x^{-3/2}$, es decir, un orden más rápido que el $x^{-1/2}$ del término

principal. Nótese que la constante C_ν en la estimación del error crece con $|\nu|$. La expresión (3.32) es una fórmula útil tan solo para $x \gg |\nu|$.

A partir de (3.32) y empleando la definición de $Y_\nu(x)$ (3.12), se obtiene para $x \gg 0$,

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 0, \quad (3.33)$$

con el error acotado por una constante multiplicada por $x^{-3/2}$.

Utilizando estas aproximaciones, se obtienen también estimaciones para $J'_\nu(x)$:

$$J'_\nu(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \tilde{E}_\nu(x), \quad \left|\tilde{E}_\nu(x)\right| \leq \frac{C'_\nu}{x^{3/2}}. \quad (3.34)$$

Se consideran ahora los ceros positivos de

$$aJ_\nu(x) + bxJ'_\nu(x) = 0, \quad (3.35)$$

con $\nu \geq 0$, $a, b \geq 0$ y $(a, b) \neq (0, 0)$. Por ser $x^{-\nu} [aJ_\nu(x) + bxJ'_\nu(x)]$ una función entera y analítica de variable compleja x , sus ceros son todos aislados, de modo que solo hay un número finito de ellos en cualquier región acotada del plano complejo. Entonces, las soluciones positivas de (3.35) se pueden ordenar como

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots, \quad (3.36)$$

con $\lim \lambda_j = \infty$. Es de especial interés conocer el comportamiento de λ_k para $k \rightarrow \infty$, para lo cual se distinguen los casos $b = 0$ y $b \neq 0$, es decir:

$$J_\nu(x) = 0 \quad \text{y} \quad cJ_\nu(x) + xJ'_\nu(x) = 0, \quad (c = a/b). \quad (3.37)$$

Cuando $b = 0$, por (3.32), se tiene que $J_\nu(x) \approx x^{-1/2} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ para grandes x ; luego sus ceros ocurren aproximadamente en los mismos puntos que $\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. Esta idea se demuestra en el siguiente lema.

Lema 3.5. [10, Cap. 5.3, p. 141]

Sea $f(x)$ una función diferenciable de variable real tal que

$$|f(x) - \cos x| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad |f'(x) + \sin x| \leq \varepsilon \quad \text{para} \quad x \geq M\pi, \quad (3.38)$$

donde $\varepsilon \leq 1$. Entonces, para todos los enteros $m \geq M$, f tiene exactamente un cero z_m en cada intervalo $[m\pi, (m+1)\pi]$, y satisface $|z_m - (m + \frac{1}{2}\pi)| < 2\varepsilon$.

Demostración. Se tiene $\cos m\pi = (-1)^m$ y $\cos(m + \frac{1}{2})\pi = 0$. Como $|f(x) - \cos x| < \varepsilon$, f tiene signos opuestos en $m\pi$ y $(m+1)\pi$, de modo que ha de tener al menos un cero entre dichos valores

y todos los ceros se encuentran cerca de $(m + \frac{1}{2})\pi$. Pero $\sin(m + \frac{1}{2}\pi) = (-1)^m$, de modo que la condición $|f'(x) + \sin x| < \varepsilon$ implica que $f'(x) \neq 0$ para x cerca de $(m + \frac{1}{2})\pi$. Por tanto, f es estrictamente creciente o decreciente cerca de $(m + \frac{1}{2})\pi$, por lo que puede tener como mucho un cero ahí. \square

Sea la función

$$f(x) = \tilde{x}^{1/2} J_\nu(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = x + \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{1}{4}\pi. \quad (3.39)$$

Como $f'(\tilde{x}) = \tilde{x}^{1/2} J'_\nu(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\tilde{x}^{-1/2} J_\nu(\tilde{x})$, las estimaciones (3.32) y (3.36) muestran que $f(x)$ y $f'(x)$ difieren de $\cos x$ y $-\sin x$ por errores que están acotados por constantes multiplicadas por x^{-1} (luego se hacen muy pequeños para x suficientemente grandes). Entonces, para M muy grande, las soluciones de $J_\nu(x) = 0$ tales que $x > M\pi$ están aproximadamente en los puntos de $(m + \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{4})\pi$ con m entero. Dicha aproximación se vuelve mejor a mayor M .

Un argumento similar se puede aplicar a

$$f(\tilde{x}) = c\tilde{x}^{-1/2} J_\nu(\tilde{x}) + \tilde{x}^{1/2} J'_\nu(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = x + \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi. \quad (3.40)$$

El segundo término de $f(\tilde{x})$ es aproximadamente $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$ por (3.34), mientras que el primero está dominado por x^{-1} de acuerdo con (3.32). Asimismo,

$$f'(\tilde{x}) = -\frac{1}{2}c\tilde{x}^{-3/2} J_\nu(\tilde{x}) + c\tilde{x}^{-1/2} J'_\nu(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\tilde{x}^{-1/2} J'_\nu(\tilde{x}) + x^{1/2} J''(\tilde{x}). \quad (3.41)$$

Los tres primeros términos están dominados por \tilde{x}^{-1} y según la ecuación de Bessel,

$$J''_\nu(\tilde{x}) = -\tilde{x}^{-1} J'_\nu(\tilde{x}) - (1 - \nu^2 \tilde{x}^{-2}) J_\nu(\tilde{x}). \quad (3.42)$$

Con lo cual,

$$f'(x) = \tilde{x}^{1/2} J'_\nu(\tilde{x}) + (\text{términos de orden } x^{-1}). \quad (3.43)$$

Por tanto, (3.32) implica que $f'(x)$ es aproximadamente $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\sin x$, por lo que es posible aplicar el Lema 3.5 a $f(\tilde{x})$. Con esto se concluye que la función $cJ_\nu(\tilde{x}) + \tilde{x}J'_\nu(\tilde{x}) = x^{1/2}f(\tilde{x})$ tiene ceros aproximadamente en los puntos $(m + \frac{1}{2})\pi$ para grandes enteros m . Es decir, $cJ_\nu(x) + xJ'_\nu(x)$ tiene ceros aproximadamente en $(m + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4})\pi$ para grandes m enteros. En el siguiente lema se obtiene una cota inferior para los ceros más pequeños de $aJ_\nu(x) + bxJ'_\nu(x)$.

Lema 3.6. [10, Cap. 5.3, p. 142]

Sea $\nu \geq 0$, $a, b \geq 0$ y $(a, b) \neq (0, 0)$. Si ω_ν es el menor cero de $aJ_\nu(x) + bxJ'_\nu(x)$, entonces $\omega_\nu > \nu$.

Demostración. El caso $\nu = 0$ es trivial, de modo que asumimos $\nu > 0$. $J_\nu(x)$ y $J'_\nu(x)$ son claramente positivas para $x > 0$ pequeños, ya los términos dominantes de sus series de potencias

(concretamente, $x^\nu/2^\nu\Gamma(\nu+1)$ y $x^{\nu-1}/2^\nu\Gamma(\nu)$) son positivos. La ecuación de Bessel se puede escribir como

$$x \frac{d}{dx} [xJ'_\nu(x)] = (\nu^2 - x^2) J_\nu(x).$$

Si el primer cero ξ_ν de J_ν fuese $\leq \nu$, la expresión a la derecha sería positiva en el intervalo $(0, \xi_\nu)$; luego $xJ'_\nu(x)$ sería creciente en dicho intervalo. Esto supondría que J'_ν fuese positiva en él, lo cual no es posible por el teorema de Rolle. Por lo tanto, $\xi_\nu > \nu$. La expresión a la derecha es positiva en el intervalo $(0, \nu)$, luego $xJ'_\nu(x)$ es creciente $(0, \nu]$, así que $J'_\nu > 0$ en $(0, \nu]$. Se ha demostrado, pues, que $J_\nu(x)$ y $J'_\nu(x)$ son positivas en $(0, \nu]$, luego también lo es $aJ_\nu(x) + bxJ'_\nu(x)$, con lo que $\omega_\nu > \nu$. \square

3.2. Propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel

En esta sección se demuestra la ortogonalidad de las funciones $J_p(\lambda_m x)$ con respecto a la función peso x en $0 \leq x \leq 1$, siendo λ_n los ceros positivos de $J_p(x)$ con $p \geq 0$:

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \frac{1}{2} J_{p+1}(\lambda_n)^2, & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (3.44)$$

Siguiendo el procedimiento expuesto en [19, Cap. 8.47, p. 377], recordamos que $y = J_p(x)$ es solución de:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Dadas constantes positivas distintas a, b , definamos $u(x) = J_p(ax)$, $v(x) = J_p(bx)$, que satisfacen:

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(a^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u = 0, \quad (3.45)$$

$$v'' + \frac{1}{x}v' + \left(b^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)v = 0. \quad (3.46)$$

Multiplicando estas ecuaciones por v y u respectivamente y restando los resultados se obtiene,

$$\frac{d}{dx}[x(u'v - v'u)] = (b^2 - a^2)xuv.$$

Integrando entre 0 y 1 y evaluando los extremos (que se anulan), se concluye para $a = \lambda_m$ y $b = \lambda_n$, ceros distintos positivos de $J_p(x)$ que,

$$\int_0^1 x J_p(\lambda_m x) J_p(\lambda_n x) dx = 0, \quad (3.47)$$

probando así la primera parte de (3.44).

Para el caso $m = n$, multiplicamos (3.46) por $2x^2u'$. Tras simplificar se tiene,

$$\frac{d}{dx}[x^2u'^2 + (a^2x^2 - p^2)u^2] - 2a^2xu^2 = 0.$$

Integrando entre 0 y 1,

$$2a^2 \int_0^1 xu^2 dx = [x^2u'^2 + (a^2x^2 - p^2)u^2]_0^1. \quad (3.48)$$

Evaluando y teniendo en cuenta que $u(1) = J_p(a)$, $u'(1) = aJ'_p(a)$, obtenemos:

$$\int_0^1 xJ_p(ax)^2 dx = \frac{1}{2}[J'_p(a)^2 + \left(1 - \frac{p^2}{a^2}\right)J_p(a)^2].$$

Finalmente, si $a = \lambda_n$ (ceros de $J_p(x)$), usando la identidad (3.17),

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_n x)^2 dx = \frac{1}{2}J'_p(\lambda_n)^2 = \frac{1}{2}J_p + 1(\lambda_n)^2.$$

3.3. Funciones de Bessel modificadas de orden general

La ecuación modificada de Bessel es:

$$z^2 f''(z) + z f'(z) - (z^2 - \nu^2) f(z) = 0. \quad (3.49)$$

Esta difiere de la ecuación ordinaria de Bessel únicamente por el signo de z^2 . De hecho, es un caso particular de la ecuación generalizada de Bessel:

$$z^2 f''(z) + z f'(z) + (\mu^2 z^2 - \nu^2) f(z) = 0, \quad (3.50)$$

donde $\mu = i$. Esta puede reducirse a la ecuación de Bessel mediante el cambio de variable $z \rightarrow iz$, por lo que una solución de (3.49) es $f(z) = J_\nu(iz)$. No obstante, se suele emplear la función

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz), \quad (3.51)$$

llamada *función de Bessel modificada de primera clase*. Gracias a que $i^{\nu+2k} = i^\nu(-1)^k$, se tiene su expresión en serie:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad (3.52)$$

la cual es real si z y ν son reales.

Para una segunda solución independiente de (3.49), se podría tomar $I_{-\nu}(z)$ si ν no es entero, o $Y_\nu(iz)$ en general. Sin embargo, es habitual usar la función de Bessel modificada de tercera clase, o *función de Basset*, definida por [4, Cap. 7.2.2, p. 5]:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \sin \nu \pi}. \quad (3.53)$$

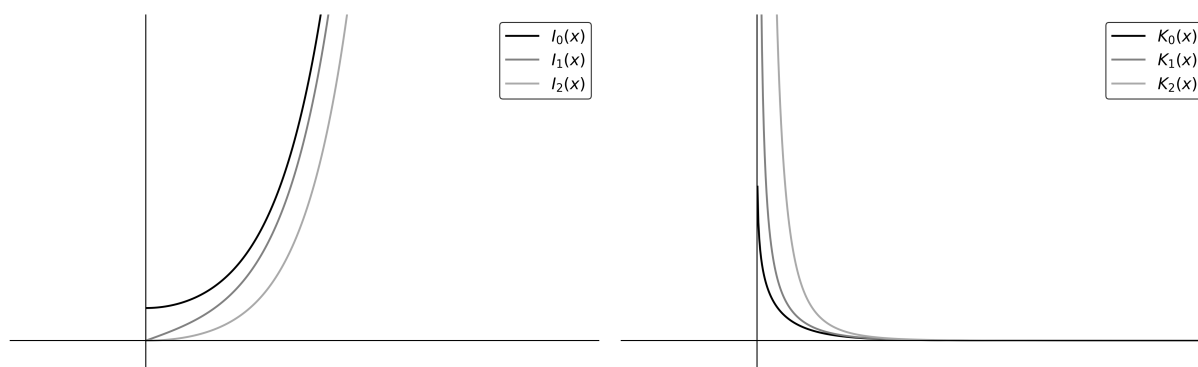


Figura 3.2: Funciones de bessel modificadas $I_n(x)$, $K_n(x)$ para $n = 0, 1, 2$.

Esta definición es válida si ν no es entero, pero se puede extender a ν entero mediante la regla de L'Hôpital. Así, K_ν constituye una solución independiente de I_ν para todo ν . Como señala [10, Cap. 5.6, p. 159], la elección de K_ν como segunda solución independiente (análogo a Y_ν en la ecuación ordinaria) responde a su comportamiento asintótico para $z \rightarrow \infty$. Al hacer el cambio $f(z) = z^{-1/2}g(z)$ en (3.49), se obtiene:

$$g''(z) - g(z) + \frac{1/4 - \nu^2}{z^2}g(z) = 0.$$

Cuando $z \gg 1$, el último término es despreciable, por lo que se espera que $g(z) \sim ae^z + be^{-z}$, luego $f(z) \sim z^{-1/2}(ae^z + be^{-z})$. Esto implica crecimiento exponencial salvo que $a = 0$. De hecho, K_ν es la única solución de (3.49) que tiende a cero cuando $z \rightarrow +\infty$. Más precisamente:

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^z(1 + E_1(z)), \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2z}e^{-z}(1 + E_2(z)), \quad z \geq 1,$$

donde $E_1(z)$ y $E_2(z)$ están acotadas por una constante (dependiente de ν) por z^{-1} .

Para $z \rightarrow 0$, las funciones modificadas de Bessel se comportan como las ordinarias, salvo por constantes: si $\nu > 0$, entonces $I_\nu(z) \sim c_\nu z^\nu$ y $K_\nu(z) \sim c'\nu z^{-\nu}$; mientras que $I_0(z) \sim 1$ y $K_0(z) \sim c \log z$. Por tanto, cuando $\nu \geq 0$, las únicas soluciones de (3.49) que no divergen en $z \rightarrow 0$ son los múltiplos constantes de $I_\nu(z)$.

3.4. Funciones esféricas de Bessel

Definición 3.7. [9, p. 5] Denominamos,

- Funciones esféricas de Bessel de primera y segunda clase

$$j_m(t, d) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{m+d/2-1}(t)}{t^{d/2-1}}, \quad y_m(t, d) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Y_{m+d/2-1}(t)}{t^{d/2-1}}. \quad (3.54)$$

Veremos posteriormente que la combinación lineal de estas funciones da lugar a las soluciones de la parte radial de la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas.

- Funciones de Hankel de primera y segunda clase

$$H_\mu^{(1)} := J_\mu + iY_\mu, \quad H_\mu^{(2)} := J_\mu - iY_\mu. \quad (3.55)$$

- Funciones esféricas de Hankel de primera y segunda clase

$$h_m^{(1)}(\cdot, d) := j_m(\cdot, d) + iy_m(\cdot, d), \quad h_m^{(2)}(\cdot, d) := j_m(\cdot, d) - iy_m(\cdot, d). \quad (3.56)$$

Las funciones de Hankel y las funciones esféricas de Hankel se emplean para describir ondas en propagación radial. Las primeras se emplean en problemas con simetría cilíndrica, como en guías de onda; mientras que las segundas se aplican cuando la geometría es esférica, como en el caso de la radiación por una fuente puntual o en la dispersión de una esfera.

Las funciones esféricas de Bessel surgen al resolver problemas con simetría circular. Al resolver la ecuación de Laplace y de Helmholtz en coordenadas esféricas, necesitamos resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left[1 + \frac{l(l+1)}{x^2} \right] y = 0. \quad (3.57)$$

Esta ya se obtuvo en (2.84) y en este caso se ha utilizado el término habitual $Q = l(l+1)$, asumiendo l entero y el cambio de variable $x = kr$, $y(x) = R(r)$. Las soluciones de (3.57) son ecuaciones esféricas de Bessel y de Neumann, definidas como

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \quad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x). \quad (3.58)$$

Y relacionadas con las funciones de Hankel como sigue,

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x), \quad h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x). \quad (3.59)$$

Estas funciones satisfacen varias relaciones de recurrencia útiles [2, Cap. 14.7, p. 700-702] como,

$$y_{l-1} + y_{l+1} = \frac{2l+1}{x}, \quad ly_{l-1} - (l+1)y_{l+1} = (2l+1) \frac{dy_1}{dx}, \quad (3.60)$$

donde y_l puede ser cualquiera de $j_l, n_l, h_l^{(1)}, h_l^{(2)}$. Las funciones de esféricas de Bessel se pueden obtener por inducción en l , llevando a las fórmulas de Rayleigh:

$$j_l(x) = (-1)(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{\sin(x)}{x}, \quad n_l(x) = (-1)(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{\cos(x)}{x}, \quad (3.61)$$

$$h_l^{(1)}(x) = (-1)(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{i}{x} e^{ix}, \quad h_l^{(2)}(x) = (-1)(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{i}{x} e^{-ix}. \quad (3.62)$$

Estas expresiones nos permiten estudiar el comportamiento en casos límite. Cuando $x \ll l$:

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) \approx -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}. \quad (3.63)$$

Y cuando $x \gg l$:

$$j_l(x) \approx \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \quad h_l^{(1)}(x) \sim \frac{e^{ix}}{x}. \quad (3.64)$$

3.4.1. Relación de completitud de las funciones esféricas de Bessel

La expansión de una onda plana en coordenadas esféricas se expresa como:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta), \quad (3.65)$$

donde $z = r \cos\theta$ en coordenadas esféricas³. Esta se generaliza mediante armónicos esféricos [15, p. 3]:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr) \sum_{m=-l}^l Y^{m*}(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}) Y^m(\theta_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}). \quad (3.66)$$

Donde \mathbf{k} es el vector de onda y k su módulo. Partiendo de la identidad de Dirac:

$$\int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad (3.67)$$

a partir de (3.65) se tiene para el lado izquierdo,

$$\int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = \sum_{l,m} (4\pi)^2 \int dr r^2 j_l(kr) j_l(k'r) Y^{m*}(\theta_{\mathbf{k}}) Y^m(\theta_{\mathbf{k}}). \quad (3.68)$$

Mientras que en el derecho,

$$(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = (2\pi)^3 \frac{1}{k^2 \sin\theta} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \delta(\theta-\theta') \delta(\phi-\phi'). \quad (3.69)$$

Combinando las dos expresiones anteriores y teniendo en cuenta la ortogonalidad de los armónicos esféricos⁴,

$$\int_0^{\infty} dr r^2 j_l(kr) j_l(k'r) = \frac{\pi}{2k^2} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \quad (3.70)$$

Finalmente se llega a la relación de ortogonalidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_k(x) j_l(x) dx = \frac{\pi}{2l+1} \delta_{kl}, \quad \text{para } k, l \in \mathbb{N}, \quad (3.71)$$

donde δ_{kl} es la delta de Kronecker.

³Coordenadas esféricas: $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$ con $r \in [0, \infty]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

⁴ $\sum_{l,m} Y_l^{m*}(\Omega_{\mathbf{k}}) Y_l^m(\Omega_{\mathbf{k}'}) = \delta(\Omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathbf{k}'})$

3.5. Algunas aplicaciones de las funciones de Bessel

3.5.1. Difracción de Fraunhofer en una apertura circular

La difracción de Fraunhofer en una apertura circular es uno de los ejemplos más claros de cómo las funciones de Bessel se asocian a fenómenos físicos concretos. La difracción es un fenómeno que ocurre cuando una onda encuentra un obstáculo o una rendija y se curva, se dispersa o se expande al pasar por él. El modelo de Fraunhofer estudia los casos límite en los que la fuente de luz y la pantalla en la que se observa el patrón están efectivamente a distancias infinitas de la apertura causante de la difracción. La fórmula integral de la difracción en forma generalizada es

$$U(P) = C \int \int_A e^{ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta, \quad (3.72)$$

donde $U(P)$ es el campo difractado de la onda en el punto de observación P , A es la superficie o apertura y ξ y η son las coordenadas sobre dicha apertura. Además, k es el número de onda, C una constante dependiente de las condiciones del sistema y p y q describen la dirección hacia el punto de observación P .

Bajo la aproximación del plano lejano, régimen de Fraunhofer, esta integral se obtiene como la transformada de Fourier del campo en la propia apertura; cuando esta es circular, el paso a coordenadas polares transforma esa integral bidimensional en una integral de Hankel (3.28). El resultado revela de modo natural la función de Bessel de primera clase J_1 , y conduce a la famosa expresión de intensidad

$$I(\rho) \propto \left[\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2, \quad (3.73)$$

como veremos a continuación apoyándonos en el procedimiento expuesto en [5, Cap. 8.5, p. 439-443].

Comenzamos considerando un punto en la apertura de coordenadas polares (ρ, θ) , de modo que

$$\rho \cos \theta = \chi, \quad \rho \sin \theta = \eta.$$

Sean (ω, ψ) las coordenadas de un punto P en el patrón de difracción referido a la imagen simétrica de la fuente,

$$\omega \cos \psi = p, \quad \omega \sin \psi = q.$$

Se sigue que $\Omega = \sqrt{p^2 + q^2}$ es el seno del ángulo que la dirección (p, q) forma con la dirección central, $p = q = 0$. La integral de difracción (3.72), con a el radio de la apertura circular, se convierte en

$$U(P) = C \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho\omega \cos(\theta-\psi)} \rho d\rho d\theta.$$

Usando la representación integral de las funciones de Bessel de primera clase obtenida en (3.31),

$$\frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \alpha} e^{in\alpha} d\alpha = J_n(x),$$

la ecuación anterior se reduce a

$$U(P) = 2\pi C \int_0^a J_0(k\rho\omega) \rho d\rho.$$

Por la fórmula de recurrencia (3.16),

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x).$$

Luego para $n = 0$,

$$\int_0^x x' J_0(x') dx' = x J_1(x).$$

De estos resultados se sigue

$$U(P) = CD \left[\frac{2J_1(ka\omega)}{ka\omega} \right],$$

donde $D = \pi a^2$. Por tanto, la intensidad vendrá dada por

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left[\frac{2J_1(ka\omega)}{ka\omega} \right]^2 I_0.$$

La distribución de intensidades en el entorno de la imagen geométrica está caracterizada por la

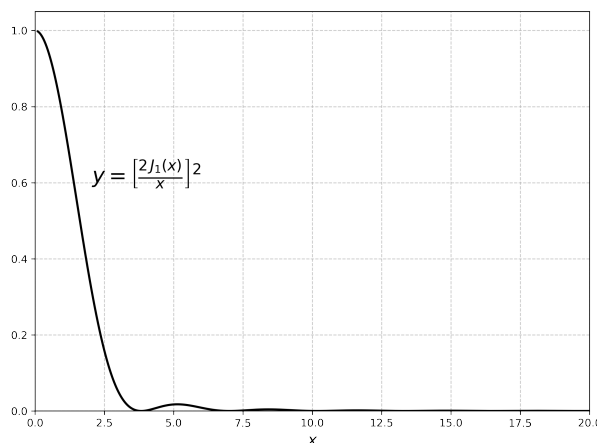


Figura 3.3: Difracción de Fraunhofer en una apertura circular.

función $y = (2J_1(x)/x)^2$. El máximo principal es $y = 1$ en $x = 0$, y con x creciente oscila con amplitud gradualmente decreciente, similar a cómo lo hace la función $[\sin(x)/x]^2$. Los mínimos de intensidad, que no son estrictamente equidistantes, vienen dados por $J_1(x) = 0$. Las posiciones de los máximos secundarios son tales que satisfacen $\frac{d}{dx} [J_1(x)/x] = 0$. Con x creciente la separación entre dos mínimos sucesivos o dos máximos sucesivos se aproxima a π .

Los resultados muestran que el patrón consiste en un disco brillante, centrado en la imagen geométrica $p = q = 0$ de la fuente, rodeada por anillos concéntricos brillantes y oscuros. La intensidad de los anillos brillantes decrece rápidamente con sus radios y normalmente tan solo el primero o los dos primeros son los suficientemente brillantes como para ser observables a simple vista. También resulta de interés examinar la fracción de la energía total incidente que contiene

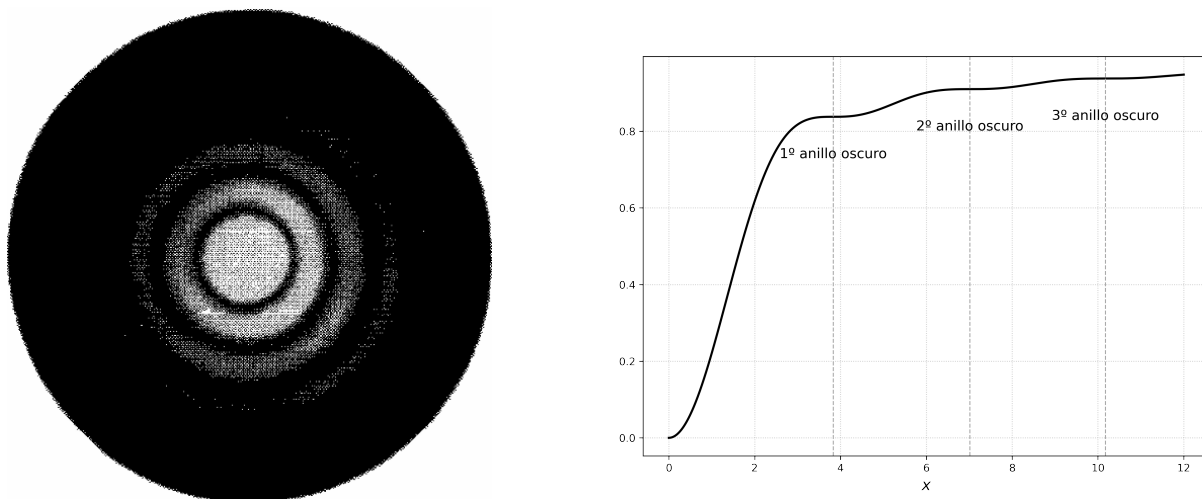


Figura 3.4: A la izquierda, patrón de difracción de Fraunhofer por una apertura circular, llamado patrón de Airy (adaptado de [11, Cap. 4]). A la derecha, la función $1 - J_0^2(x) - J_1^2(x)$, que representa la fracción de energía contenida dentro de un disco de radio x centrado en el eje óptico.

el núcleo central del patrón de difracción. Denotando por $L(\omega_0)$ la fracción de energía total contenida en un círculo de radio ω_0 en el plano imagen, centro en la imagen geométrica, se tiene

$$L(\omega_0) = \frac{1}{E} \int_0^{\omega_0} \int_0^{2\pi} I(\omega) \omega d\omega d\psi = \frac{D}{\lambda^2} \int_0^{\omega_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2J_1(ka\omega)}{ka\omega} \right]^2 \omega d\omega d\psi = 2 \int_0^{ka\omega_0} \frac{J_1^2(x)}{x} dx. \quad (3.74)$$

Ahora, por (3.16) para $n = 0$, multiplicando por $J_1(x)$ y empleando (3.15) con $\nu = n = 0$,

$$\frac{J_1^2(x)}{x} = J_0(x)J_1(x) - \frac{dJ_1(x)}{dx}J_1(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [J_0^2(x) + J_1^2(x)].$$

La expresión (3.74) ahora es, recordando que $J_0(0) = 1$ y $J_1(0) = 0$,

$$L(\omega_0) = 1 - J_0^2(ka\omega_0) - J_1^2(ka\omega_0), \quad (3.75)$$

una fórmula debida a Rayleigh. Para los anillos oscuros, $J_1(ka\omega_0) = 0$, de modo que la fracción de la energía total fuera de cualquier anillo oscuro es simplemente $J_0^2(ka\omega_0)$.

Capítulo 4

La función hipergeométrica

La función hipergeométrica aparece como solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con tres puntos singulares regulares, y constituye un modelo unificador dentro del estudio de funciones especiales. Las ecuaciones de Bessel y de Legendre pueden verse como casos particulares o límites de la ecuación hipergeométrica. En este capítulo estudiaremos la ecuación hipergeométrica desde el punto de vista del método de Frobenius, analizando sus soluciones alrededor de los puntos singulares $z = 0$, $z = 1$ y $z = \infty$. Nótese que en el capítulo 2 ya se empleó la función geométrica para resolver la ecuación diferencial de Legendre (2.7), de modo que ahora daremos un sentido completo a lo anteriormente expuesto.

4.1. La serie hipergeométrica

La *ecuación diferencial hipergeométrica* es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden dada por,

$$z(1-z) \frac{d^2u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0, \quad (4.1)$$

donde a, b, c son sus parámetros, números complejos independientes de z . Resolveremos esta ecuación mediante el método de Frobenius expuesto en el primer capítulo. Consideremos

$$P(z) = \frac{c - (a+b+1)z}{z(1-z)} \quad \text{y} \quad Q(z) = \frac{-ab}{z(1-z)},$$

de manera que $z = 0$ y $z = 1$ son los únicos puntos singulares. Así,

$$zP(z) = c + [c - (a+b+1)]z + \dots, \quad z^2Q(z) = -abz - abz^2 - \dots,$$

de modo que $z = 0$ (y análogamente $z = 1$) es un punto singular regular. A partir de estas expresiones se tiene que $p_0 = c$ y $q_0 = 0$, de modo que la ecuación indicial es

$$m[m - (1 - c)] = 0,$$

y los exponentes son $m_1 = 0$ y $m_2 = 1 - c$. Si $1 - c$ no es un entero positivo, es decir, si c no es un entero negativo o cero, el Teorema 1.5 garantiza que (4.1) tiene una solución de la forma

$$u = z^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_0 \neq 0. \quad (4.2)$$

Se obtiene así la siguiente fórmula de recurrencia para los a_n ,

$$a_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} a_n, \quad (4.3)$$

de modo que (4.2) se convierte en

$$u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} z^n. \quad (4.4)$$

Es decir, para $c \neq 0, -1, -2, \dots$, el método de la solución en serie de potencias nos proporciona una solución regular de (4.1) en $z = 0$. Dicha solución (4.4) se denomina *función hipergeométrica de Gauss* y se puede escribir como sigue:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \equiv {}_2F_1(a, b; c; z) \equiv F(a, b; c; z). \quad (4.5)$$

Donde $(a)_n$ es el *símbolo de Pochhammer*, definido como

$$\begin{aligned} (a)_0 &= 1, & (a)_n &= a(a+1)\dots(a+n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ (a)_n &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, & & \text{si } a, a+n \text{ no son enteros negativos.} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si a o b son un entero negativo o cero, la serie (4.4) termina y pasa a ser un polinomio. De lo contrario, el criterio del cociente demuestra que converge para $|z| < 1$ pues,

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} \right| |z| \rightarrow |z| \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Con lo cual, cuando c no es un entero negativo o cero, $F(a, b, c, z)$ es una función analítica sobre $|z| < 1$ y es la solución particular más sencilla de la ecuación hipergeométrica [19, Cap. 5.31, p. 207].

Para $c = -n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, por el Teorema 1.5 se tendrá una segunda solución independiente de (4.1) cerca de $x = 0$ con exponente $m_2 = 1 - c$. Tal y como se propone en [19, Cap. 5.31, p. 208], esta solución puede hallarse directamente sin más que sustituir

$$u = z^{1-c} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots),$$

en (4.1) y calcular los coeficientes. Es conveniente cambiar la variable dependiente en (4.1), escribiendo

$$u = z^{1-c}\omega.$$

Tras las manipulaciones pertinentes, la ecuación (4.1) pasa a escribirse como:

$$z(1-z)\omega'' + [(2-c) - ([a-c+1] + [b-c+1] + 1)z]\omega' - (a-c+1)(b-c+1)\omega = 0, \quad (4.8)$$

que es la ecuación hipergeométrica con las constantes a, b y c sustituidas por $a-c+1, b-c+1$ y $2-c$. Ya sabemos que (4.8) admite la solución en serie de potencias

$$\omega = F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)$$

en las proximidades del origen, de modo que la segunda solución requerida es

$$u_2 = z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z).$$

Por tanto, cuando c no es entero tenemos

$$u = c_1F(a, b, c, z) + c_2z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z) \quad (4.9)$$

como solución general de la ecuación hipergeométrica cerca del punto singular $z = 0$.

Por lo general, esta solución tan solo es válida en torno al origen. Para resolver (4.1) cerca de la singularidad $z = 1$, se parte de la solución ya conocida, introduciendo una nueva variable independiente $t = 1 - z$. Así, $z = 1$ corresponde a $t = 0$ y transforma (4.1) en

$$t(1-t)u'' + [(a+b-c+1) - (a+b+1)t]u' - abu = 0.$$

La ecuación anterior es hipergeométrica, de manera que sus solución general cerca de $t = 0$ se desprende de (4.9) haciendo las sustituciones pertinentes ($z = 0$ y c por $a+b-c+1$). Tras sustituir t por $1-z$, la solución general de (4.1) en las proximidades de $z = 1$ es,

$$u = c_1F(a, b, a+b-c+1, 1-z) + c_2(1-z)^{c-a-b}F(c-b, c-a, c-a-b+1, 1-z), \quad (4.10)$$

y $c-a-b$ se ha de asumir no entero.

La función ${}_2F_1(a, b; c; z)$ es la *serie hipergeométrica* de variable z con parámetros a, b, c . Omitiremos los subíndices mientras no se usen otras series hipergeométricas. Tal y como se indica en [3, Cap. 2.1, p. 57] Cuando $c = -m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), se ha de complementar la definición de esta función, pues en dicho caso (4.5) no tiene sentido. Si $a = -n$ o $b = -n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ y $c = -m$, con $m = n, n+1, n+2, \dots$, se define,

$$\begin{cases} F(-n, b; -m; z) = \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (b)_r z^r}{(-m)_r r!} \\ F(a, -n; -m; z) = \sum_{r=0}^n \frac{(a)_r (-n)_r z^r}{(-m)_r m!} \end{cases} \quad (4.11)$$

Si $a, b \neq 0, -1, -2, \dots$, entonces la serie hipergeométrica (4.5) converge absolutamente para todos los valores de $|z| < 1$ si $c \neq 0, -1, -2, \dots$

Para el caso $|z| = 1$, teniendo en cuenta que¹

$$\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1} [1 + \mathcal{O}(n^{-1})], \quad (4.12)$$

y empleando el test de Raabe se tiene: convergencia absoluta para $|z| = 1$ si $\operatorname{Re}(a+b-c) < 0$, convergencia condicional para $|z| = 1$, $z \neq -1$ si $0 \leq \operatorname{Re}(a+b-c) < 1$ y divergencia si $|z| = 1$ y $1 \leq \operatorname{Re}(a+b-c)$.

4.2. La serie hipergeométrica generalizada

La serie hipergeométrica de Gauss $F(a, b; c; z)$ se generaliza con la introducción de p parámetros de la naturaleza de a, b y de q parámetros de la naturaleza de c . La serie consiguiente es la serie hipergeométrica generalizada,

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ \rho_1, \dots, \rho_q \end{matrix} ; z \right] = {}_pF_q(a_{\mathbf{r}}; \rho_{\mathbf{t}}; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n z^n}{(\rho_1)_n \dots (\rho_q)_n n!}. \quad (4.13)$$

Con esta notación, la serie de Gauss es,

$${}_2F_1(a, b; c; z) \equiv \left[\begin{matrix} a, b; \\ c \end{matrix} ; z \right]. \quad (4.14)$$

En general (exceptuando algunos valores enteros de los parámetros para los que la serie termina o no tiene sentido), ${}_pF_q$ converge para todo z finito si $p \leq q$, converge para $|z| < 1$ si $p = q + 1$ y diverge para todo $z \neq 0$ si $p > q + 1$.

Esta serie fue introducida por Clausen (1828) para el caso $p = 3$, $q = 2$ y la notación empleada es la de Pochhammer modificada por Barnes. Si uno de los a_r es un entero no positivo, la serie termina; los casos en los que uno de los ρ_t es un entero positivo se excluyen. Si $p = q + 1$ y

$$s = \operatorname{Re}(\rho_1 + \dots + \rho_q - a_q - \dots - a_{q+1}), \quad (4.15)$$

entonces la serie (4.13) converge para todo $|z| = 1$ si $s > 1$; converge para todo $|z| = 1$, $z \neq 1$ si

¹Esto es una estimación para $n \rightarrow \infty$ obtenida aplicando el comportamiento asintótico de la función Gamma. Partiendo de la fórmula de Stirling: $\Gamma(n) \approx \sqrt{2\pi n} n^{-\frac{1}{2}} e^{-n}$, para $n \rightarrow \infty$, se deduce que

$$\frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(n)} \approx n^x \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

$1 \geq s \geq 0$ y es divergente si $s \leq 0$ ².

Para la función $u = {}_qF_p$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.1. [18, Cap. 5.74, p. 75] *La función hipergeométrica ${}_pF_q$ es solución de la ecuación diferencial*

$$\left(\delta \prod_{j=1}^q (\delta + \rho_j - 1) - z \prod_{i=1}^p (\delta + a_i) \right) u(z) = 0, \quad (4.16)$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ si $p < q + 1$ y para $|z| < 1$ si $p = q + 1$, donde δ es el operador $z \frac{d}{dz}$.

Es decir,

$$\{\delta(\delta + \rho_1 - 1) \dots (\delta + \rho_q - 1) - z(\delta + a_1) \dots (\delta + a_p)\} u = 0, \quad (4.17)$$

que equivale a la ecuación general del tipo,

$$\sum_{n=1}^q z^{n-1} (a_n z - b_n) D^n v + a_0 v + z^q D^{q+1} v = 0, \quad q \geq p \quad (4.18)$$

o

$$\sum_{n=1}^q z^{n-1} (a_n z - b_n) Dv + a_0 v + z^q (1 - z) D^{q+1} v = 0, \quad p = q + 1, \quad (4.19)$$

con a_n, b_n constantes, $a_n \neq 0$ y $D = d/dz$. Para (4.18), $z = 0, \infty$ son puntos singulares, siendo $z = 0$ de tipo regular; además, (4.19) tiene singularidades regulares en $0, \infty, 1$ (para más detalle, ver [17, Cap. 5, p. 81, 82.]).

Si $v(z)$ satisface (4.17) y se puede obtener a partir de una función analítica $\omega(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$, mediante una transformación de Laplace,

$$v(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \omega(t) dt, \quad (4.20)$$

entonces $\omega(t)$ satisface,

$$\{(-1)^{p+1} \theta(\theta + 1 - a_1) \dots (\theta + 1 - a_p) + (-1)^{q+1} t(\theta + 1)(\theta + 2 - \rho_1) \dots (\theta + 2 - \rho_q)\} v = 0, \quad (4.21)$$

donde $\theta = t \partial / \partial t$, véase [3, Cap. 4.2, p. 184-185]

²La prueba es la misma que la dada en (4.1) para ${}_2F_1$.

4.3. Funciones especiales como casos particulares de la función hipergeométrica

Muchas funciones especiales clásicas pueden entenderse como casos particulares de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; z)$, ya sea directamente por sustitución de parámetros o como límites degenerados de esta. Entre ellas se encuentran la función de Legendre y la de Bessel. Con el objetivo de unificar los capítulos anteriores en una teoría conjunta, recordaremos la relación de las funciones de Legendre con las hipergeométricas y explicaremos la relación de estas últimas con las funciones de Bessel.

Recordando la ecuación diferencial de Legendre,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0,$$

vimos que el cambio de variable $t = (1 - x)/2$ hacía que $x = 1$ correspondiese a $t = 0$:

$$t(1 - t)y'' + (1 - 2t)y' + n(n + 1)y = 0.$$

Esta es una ecuación hipergeométrica con $a = -n$, $b = n + 1$ y $c = 1$ luego, cerca de $t = 0$, admite la solución

$$y_1 = F(-n, n + 1, 1, t).$$

La ecuación de Bessel de orden ν era la siguiente,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (4.22)$$

Puede obtenerse como un límite confluyente de la ecuación hipergeométrica. Para ello, consideremos la forma ${}_2F_1(a, b; c; z)$, con $a = \frac{\nu+1}{2}$, $b = \frac{\nu}{2} + 1$ y $c \rightarrow \infty$. Haciendo $z = \frac{x^2}{4c}$, en el límite $c \rightarrow \infty$ se obtiene:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{x^2}{4c}\right) = J_\nu(x). \quad (4.23)$$

Este procedimiento refleja cómo la confluencia de dos puntos singulares regulares de la ecuación hipergeométrica en $z = 0$ y $z = 1$ conduce a una ecuación con una única singularidad regular en el origen y una irregular en el infinito: la ecuación de Bessel.

Bibliografía

- [1] Adkins, W. A., y M. G. Davidson. 2012. *Ordinary Differential Equations*. Springer.
- [2] Arfken, G. B., y H. J. Weber. 2005. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press.
- [3] Bateman, H. 1995. *Higher Transcendental Functions*. Volumen I. McGraw-Hill Book Company.
- [4] Bateman, H. 1995. *Higher Transcendental Functions*. Volumen II. McGraw-Hill Book Company.
- [5] Born, M., y E. Wolf. 1970. *Principles of Optics*. 4^a ed. Pergamon Press.
- [6] Coddington, E. A. 1961. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, Inc.
- [7] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (UNLP). *Apuntes teóricos: Funciones de Legendre*. Disponible en: http://mat-avanzadas.fcaglp.unlp.edu.ar/public_html/Mat-Esp-II/pdfs/apuntes-teoricos/Legendre.pdf. Último acceso: junio de 2025.
- [8] Eterović, S., y A. Padgett. 2024. *Some Equations Involving the Gamma Function*. arXiv preprint arXiv:2310.01658v2. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2310.01658>.
- [9] Feppon, F. 2021. *Lecture Notes on Bessel Functions and Spherical Harmonics*. Disponible en: https://people.cs.kuleuven.be/~florian.feppon/files/photonics/03_04.pdf.
- [10] Folland, G. B. 1992. *Fourier Analysis and its Applications*. Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series.
- [11] Goodman, Joseph W. 2005. *Introduction to Fourier Optics*. 2^a ed. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. McGraw-Hill.
- [12] Hildebrand, F. B. 1962. *Advanced Calculus for Applications*. Prentice-Hall, Inc.

-
- [13] Isaev, A. 2017. *Twenty-One Lectures on Complex Analysis*. Springer.
- [14] Lebedev, N. N. 1965. *Special Functions and Their Applications*. Prentice-Hall, Inc.
- [15] Moloi, T. A. 2022. *Spherical Bessel Functions*. arXiv:2102.02634v2 [math.GM].
- [16] Numata, R. The University of Maryland. 2008. *Material on Bessel Functions*. Disponible en: <https://rnumata.org/research/materials/bessel.pdf>.
- [17] Poole, E. G. C. 1936. *Introduction to the Theory of Linear Differential Equations*. Oxford University Press.
- [18] Rainville, E. D. 1960. *Special Functions*. The Macmillan Company.
- [19] Simmons, G. F. 1993. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (con Aplicaciones y Notas Históricas)*. McGraw-Hill.
- [20] Whittaker, E. T., y G. N. Watson. 1946. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press.