# A INDIVISIBLE HISTORIA DOS INDIVISIBLES

Antón Labraña Barrero*
José Antonio Cajaraville*
Paula Blanco Mosquera**
(*) Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais
Área de Didáctica da Matemática
Universidade de Santiago de Compostela
(**) IES San Clemente - Santiago de Compostela

*Este é o significado do diálogo coa natureza, que identificamos co coñecemento científico. Ao longo deste diálogo transformamos o que a primeira vista parece un obstáculo, en estructuras conceptuais que otorgan unha nova significación á relación entre quen coñece e o que é coñecido.*

Ilya Prigogine (O fin das certidumes)

## Resumo

A partir dun resultado xeométrico simple pero pouco coñecido, recréanse algúns episodios da problemática histórica que acompañou a apaixoada busca dos "indivisibles", e dos usos dos mesmos para resolver problemas de medida (particularmente de áreas e volumes). Algunhas das vellas concepcións erradas que xurdiran perviven ocultas tras unhas técnicas de cálculo integral altamente mecanizadas, constituíndo un obstáculo que podería ser superado retrotaéndonos a o "principio de exhausción" da época clásica.

**Palabras clave**: Educación Matemática, Áreas e volumes, Indivisibles, Calculo Integral, Obstáculos epistemolóxicos.

## Abstrac

Starting from a simple but slightly know geometric result, there are recreated some episodes of the historic problems joining the passionate search of the "indivisible", and their use to solve measurement problems (particularly areas and volumes). When analyzing the teaching and learning processes some of the wrong old conceptions, can still be found hidden behind highly mechanised techniques of integral calculus; this is an obstacle which may be overcome going back to the principle of the "exhaución" from the classical period.

**Key words:** Mathematics Education, Areas and volumes, Indivisibles, Integral Calculus, Epistemological obstacles

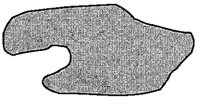
# 1. Prólogo

Sobre o volume das figuras "en pico" fixéranos notar hai uns anos o profesor Rodríguez Mayo, que ven a resultar ser 1/3 das correspondentes figuras "completas" que as conteñen.

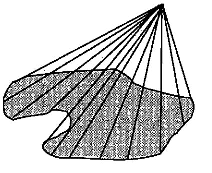
Explicámonos: de todos é coñecido que o volume dunha pirámide ou dun cono calquera é 1/3 da área da base pola altura, ou sexa, 1/3 do volume do correspondente prisma ou cilindro que o conteña. Mostramos a comprobación dunha propiedade xeral.

Precisamos os termos:

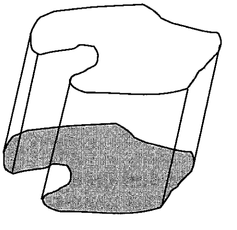
1.- Consideremos unha rexión do plano limitada por unha liña pechada calquera:



2.- Un corpo "en pico" formaríase o unir mediante segmentos un punto exterior a ela con cada un dos que forman a liña base.



3.- O "correspondente corpo que o contén" sería aquel tal que, tendo a mesma altura, teña sempre a mesma sección, considerando esta nun plano paralelo á base:



a) Consideremos un corte das anteriores figuras segundo un plano que conteña á altura.

b) Podemos obter os volumes respectivos integrando respecto da altura:

$$dV = A(x)dx \longrightarrow V = \int_0^a A(x)dx$$

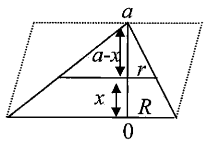
c) Para a figura "completa", por manter a sección constante $A$, será: $V = \int_0^a A(x)dx = A \cdot \int_0^a dx = A \cdot a$.

d) Para a figura "en pico", sendo a sección variable, temos:

$$A(x) = A \cdot \frac{a^2 - 2ax + x^2}{a^2} \qquad [1]$$

$$V = \int_0^a A(x)dx = \int_0^a A \cdot \frac{a^2 - 2ax + x^2}{a^2} dx =$$

$$= \frac{A}{a^2} \int_0^a (a^2 - 2ax + x^2)dx = \frac{A}{a^2} \left[a^2x - ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{1}{3} A \cdot a$$




[1] A razón entre as áreas (homotéticas) é igual ó cadrado da razón entre segmentos homólogos: $\frac{r}{R}$.

Por semellanza de triángulos: $\frac{r}{R} = \frac{a-x}{a}$

$$\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2$$

## 2. Percorrendo a historia

A demostración anterior resulta sinxela, pero tras dela hai uns 2500 anos de creación matemática: o que vai dende o teorema de Thales, S.VI a.C., que nos permite xustificar a proporcionalidade entre triángulos semellantes[1], ata a consolidación do cálculo integral para funcións continuas con Cauchy, S. XIX, que nos garante a corrección do método que permite obter os volumes como suma dos seus elementos diferenciais; o que vai dende a *primeira* teoría científica da historia (a auga é o elemento primixenio que, por condensación, evaporación ou alteración, xera tódalas cousas –Thales de Mileto-: a auga como o primeiro INDIVISIBLE de que temos noticia), ata Dalton, S. XIX, que culmina as concepcións atomistas ó dotalas dunha estructura matemática; sen esquecer, entre outros moitos, o "descobremento" do cálculo infinitesimal por Newton, S. XVII, quen adoptara a teoría atomista da súa época.

1 Euclides (S. IV a.C.), establece este teorema no libro VI dos "Elementos", despois de desenvolver a complexa teoría xeral das proporcións. Nunha revisión desta casuística, o profesor García Suárez (2001), obtén este resultado directamente a partir das propiedades inherentes á área manexadas polo propio Euclides.

Durante cinco anos conviviu cos xeómetras exipcios o filósofo-matemático Demócrito (S. V - IV a.C.), quen sostiña que toda a natureza está composta por unión de átomos, que catalogaremos como os cuartos INDIVISIBLES, pois na súa teoría desenvolve as ideas do seu mestre Leucipo, quen á súa vez estivo influenciado por Anaxágoras –S. V a.C.-, quen considera as "homeomerías" como elementos primixenios idénticos entre si, constitutivos de todo o existente (terceiros INDIVISIBLES); quen á súa vez estivo influenciado pola filosofía dos "catro elementos": aire, terra, auga e lume, de Empédocles[2] (que catalogaremos como os segundos INDIVISIBLES), discípulo este de Pitágoras[3], quen á súa vez estivo influenciado –a través doutros pensadores -polas ensinanzas de Thales (o dos primeiros INDIVISIBLES).

Pois ven a resultar que Arquímedes atribúe a Demócrito o do volume da pirámide; aínda que di que non conseguiu demostralo rigorosamente, co cal pode moi ben estar aludindo á utilización do *atomismo xeométrico*[4], que se aceptaba como recurso práctico pero non formal.

Como o propio Arquímedes explicou no "Método", moitos dos seus descubrimentos matemáticos baseáronse en investigacións "mecánicas" previas. Por exemplo, considera unha área como suma de segmentos rectilíneos que se poden "pesar" e comparar con outros corpos de "peso" coñecido, e logo aplicándolle a lei da palanca deduce o seu valor. Pero a proba deses resultados requiría un razoamento puro que se baseaba no principio de exhausción introducido por Eudoxo[5] no S. IV a.C.

O razoamento formal de Arquímedes, xa moi evolucionado respecto de Eudoxo, en liguaxe actualizada viría a dicir:

- Trátase de probar que certa magnitude $X$ ten como medida $K$.

- Constrúense dúas sucesións con cantidades de magnitude $M(I_n)$ e $M(C_n)$, de medidas$(I_n)$ e $(C_n)$ respectivamente: unha crecente $M(I_n)$, e outra decrecente $M(C_n)$ tales que $M(I_n) \leq X \leq M(C_n)$

2 Quizais o primeiro que postolou a idea da evolución das especies.

3 Quizais o primeiro heliocentrista.

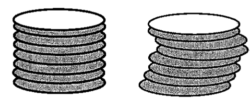
4 Os paradoxos de Zenón e os descobrementos pitagóricos dos incomensurables estimularon as concepcións atomistas do espacio físico e da xeometría que o explicaba. Sen embargo, o propio Aristóteles adicaría un tratado a rebatir a existencia das liñas indivisibles, que tiñan daquela o sentido que para nós terían hoxe os elementos diferenciais de lonxitude (análoga debeu ser a polémica para magnitudes doutra orde).

5 A el débese a primeira sistematización coñecida dos movementos dos astros. A súa formulación do que hoxe damos en chamar principio de exhausción viña dicindo: "dadas dúas magnitudes desiguais, se quitamos da maior unha magnitude maior ca súa metade e, da que queda, unha magnitude maior ca súa metade e así sucesivamente, quedará unha magnitude que será menor ca magnitude menor dada", formulación que recorda máis ó axioma arquimediano que manexamos actualmente.

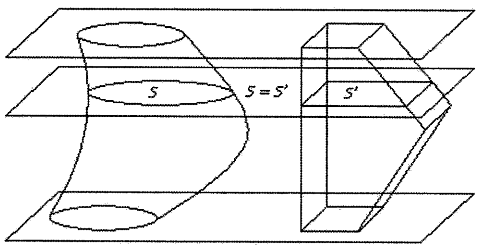
- Se para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N$ tal que $C_N - I_N < \varepsilon$ e para todo $n > N$ é $I_n \leq K \leq C_n$, entón, por *reductio ad absurdum*, med(*X*) = *K*.

pero a execución do mesmo require coñecer previamente o dito valor *K*, o que implicaba a utilización doutros recursos que non respondían a razonamentos formais, razón pola que foi criticado polos platonistas a pesar de que aporta demostraccións formais.

## 3. Principio de Cavalieri

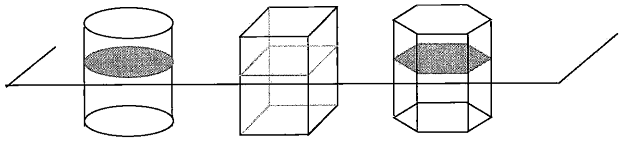
| | |
|---|---|
| Se apiñamos moedas ocupamos un determinado volume; se agora empurramos suavemente a pila faremos que cambie a forma da figura, pero o volume que ocupa segue a ser o mesmo. |  |

Esta idea permite un proceso intuitivo de adelgazamento das moedas ata chegar ós máis elementais constituíntes: os INDIVISIBLES, que foi expresado como un principio matemático xeral no século XVII, por Cavalieri:



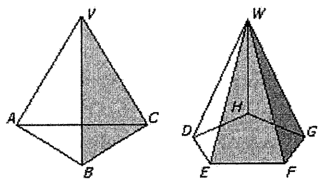

> *"Se temos varios corpos xeométricos con bases de igual área e coa mesma altura, e ó cortalos por un plano calquera paralelo á base obtemos seccións de igual área en cada corpo, entón eses corpos teñen o mesmo volume".*

En particular, isto permitiría establecer formalmente que para calquera prisma (cilindro incluído), o seu volume é igual á área da base pola altura, a partir do ortoedro:



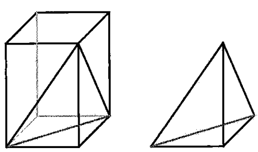
## 4. De Demócrito a Cavalieri

1.- Non sabemos cal foi a demostración "non o bastante rigorosa" que Arquímedes atribúe a Demócrito, pero a súa concepción do atomismo ben o puido levar a manexar unha versión restrinxida do que agora coñecemos como Principio de Cavalieri, o que lle permitiría concluír que dúas pirámides de iguales áreas da base e da mesma altura terían o mesmo volume:

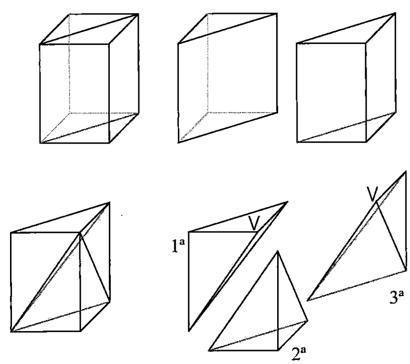



A partir de aí, chegaría con comprobar un caso no que o volume da pirámide fose 1/3 do volume do prisma que a contén. A iso imos:

Cada esquina do ortoedro podemos considerala como unha pirámide triangular recta:



Cortamos o ortoedro en dous prismas triangulares iguais e descompoñemos cada un deles en tres pirámides:



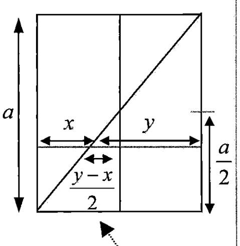
- As dúas primeiras teñen bases iguais (triángulo superior e inferior, respectivamente) e a mesma altura (a do prisma). Logo terían o mesmo volume.

- A primeira e a terceira teñen bases iguais (as caras posteriores, que proceden dunha mesma cara rectangular que se cortou diagonalmente), e teñen -respecto dela- o vértice común, logo teñen a mesma altura (distancia dese punto ó plano rectangular que cortamos). Logo terían tamén o mesmo volume.

- Concluímos, pois, que o volume da pirámide "esquina" é 1/3 do volume do prisma triangular[6] (1/3 da área da súa base pola súa altura).

2.- Sen embargo, Cavalieri puido deducir que o volume dunha pirámide de base cadrada é 1/3 da área da súa base pola altura, mediante analoxías xeométricas e a suma de indivisibles:

- Aínda que xeralmente se enuncia o seu principio en base a igualdade de áreas, o certo é que el traballaba establecendo unha razón constante.
- A súa estratexia é comparar unha pirámide con outra semellante nunha razón coñecida.




$$\frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2}$$

Divide diagonalmente un paralelogramo en dúas metades: calquera liña paralela á base descomponse en dous segmentos $x$ e $y$.

Traza unha medianeira que dá lugar a un terceiro segmento $\frac{y-x}{2}$.

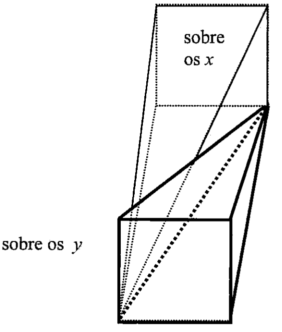
Establece unha relación alxébrica entre os seus cadrados:

$$x^2 + y^2 = 2\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{y-x}{2}\right)^2$$

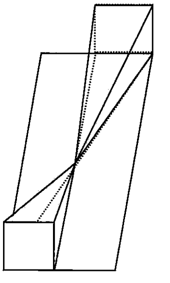
Percorrendo toda a altura teriamos (debuxo, agora, en perspectiva):

6 Este resultado, referido a pirámides triangulares, constitúe a proposición 7 do libro XII de Euclides.

- A unión de tódolos cadrados sobre os $x$ forma unha pirámide igual, aínda que invertida, á que forman os cadrados sobre os $y$ .
- As pirámides estarían contidas nun prisma rector "levantado" sobre o rectángulo de partida.




- A unión de tódolos cadrados sobre os $\frac{y-x}{2}$ forman dúas pirámides iguais entre si e semellantes ás anteriores, tendo de altura a metade e, coñecendo que a razón entre os volumes é o cubo da razón de semellanza, o seu volume será $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ do volume das outras pirámides*.



$$\sum(x^2+y^2)=\sum\left[2\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{y-x}{2}\right)^2\right]\Rightarrow\sum x^2+\sum y^2=\sum 2\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\sum 2\cdot\left(\frac{y-x}{2}\right)^2$$

*2Vpirámide maior = 2Vprisma menor + 2·2Vpirámide menor*
*2Vpirámide maior = 2·(1/4) Vprisma maior + 4·(1/8)Vpirámide maior*
*2Vpirámide maior = 1/2 Vprisma maior + 1/2Vpirámide maior*
*4Vpirámide maior = Vprisma maior + Vpirámide maior*
*3Vpirámide maior = Vprisma maior→Vpirámide maior = 1/3 Vprisma maior*

## 5. Os principios dun Principio

A controversia en torno ós indivisibles avivouse no século XVII: dende un punto vista técnico, se as seccións teñen volume 0, ¿como é posible que sumando seccións se obteña un volume cun valor arbitrario? Analogamente sucedía coa áreas e os seus indivisibles: liñas. Esta cuestión ocasiona un

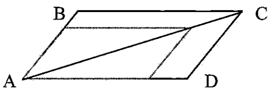
* Euclides proba este resultado para pirámides triangulares (proposición 8 do libro XII), a partir do respectivo para paralelepípedos (proposición 33 do libro XI).

sutil conflicto cognitivo: personaxes como Cavalieri, Pascal ou Barrow, por unha parte, e Torricelli, Huygens ou Newton[7], por outra, non permaneceron alleas ó mesmo.

O problema ó que se enfrontaban radicaba en que aínda sendo admisible dividir un volume indefinidamente en partes, estas deberan ser da mesma "orde" ca aquel, ou sexa, tamén volumes, pero os *indivisibles* eran de orde inferior, xa que eran superficies. Analogamente sucedía para as áreas ó considerar as liñas como indivisibles.

Brevemente, indicamos a prolífica polémica entre Cavalieri e Torriceli, que constitúe unha ilustración dun conflicto entre paradigmas:

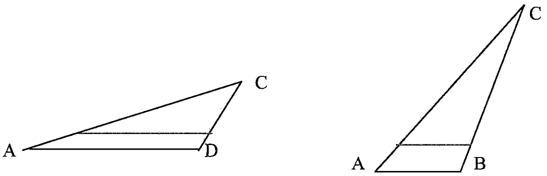
- Cavalieri considera válidas as liñas como indivisibles de superficies e a estas como indivisibles de volumes. Diante das contradiccións que lle presentaban introduce unha serie de condicións que limitan o dominio de aplicación dos indivisibles, pero que lle permiten salvalos. Vemos un exemplo:




Se cada liña horizontal é maior cá súa correspondente "vertical", o triángulo ABC debe ter máis área có ADC, cando son iguais.

i) Entón impón a primeira condición de validez: para poder comparar magnitudes mediante indivisibles, estes deben ser paralelos a unha recta fixa (a un plano no caso dos volumes). A colocación invalidaba a aplicación do criterio de comparación.

ii) Pero aínda poderían pensarse as figuras noutra posición:

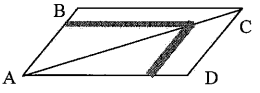



Polo que impón unha nova condición: as alturas a respecto desa recta fixa deben ser iguais (anologamente para os volumes).

- Torriceli propón un cambio de perspectiva: os indivisibles deben ser da mesma orde cás magnitudes primitivas.

Así, ó considerar pequenas tiras, a perda en lonxitude vese compensada polo aumento de largura, igualando as áreas.

7 Newton crearía o alternativo método das "fluxións", no cal consideraba, dende unha nova formulación, as ideas do principio de Cavalieri.




## 6. ¿O final dun Principio?: O Problema da Superficie Lateral

O Cálculo Diferencial e Integral daría, finalmente, a razón a Torricelli: os indivisibles deben ser da mesma orde cás magnitudes primitivas; o que se deu en chamar "homoxeneidade dos indivisibles". Pero a pesar diso, o Principio de Cavalieri segue a ser exitoso nun dominio de problemas, o que tende a afianzar as intuicións que o sustentan.

Unha das aplicacións comúns da integral: o cálculo da *superficie lateral*, problema estándar no COU dos anos 80, mostrános como intuicións do tipo de Cavalieri conducen a erros de cálculo na superficie lateral mentres que intuicións semellantes conducían ó éxito no cálculo de volumes:

Intuitivamente poderiamos aproxima-la superficie dun corpo de revolución por medio de "bandas" cilíndricas: a aproximación melloraría ó seren estas máis estreitas, e sería total cando se convertesen en circunferencias. (Non necesariamente o corpo debe ser de revolución para que esta intuición sexa aplicable: simplemente as "bandas" e as liñas terían outra forma curvilínea non circular).

Isto presenta a posibilidade de obter unha superficie de revolución mediante a integral da función $2\pi f(x)$. Sen embargo, rexeitamos a dita posibilidade porque temos asimilado que iso non é así[8].

O certo é que, efectivamente, $2\pi f(x)dx$ expresa correctamente un elemento de superficie lateral cando se trata de cilindros (que poden extenderse a sumas graduadas de cilindros), tal e como sucede nos volumes con p $f(x)^2dx$; o cal ten o seu equivalente nos rectángulos ou rexións planas formadas por unións de rectángulos, con $f(x)dx$.

## 7. Volta atrás: De Cavalieri a Eudoxo

Sendo tan intuitiva a realización dun proceso de aproximacións sucesivas á superficie lateral mediante franxas cilíndricas como o é para o

8 A fórmula que proporciona a superficie lateral dun corpo de revolución xerado por un arco de curva con derivada en tódolos puntos, obtense a partir da aproximación por troncos de cono.

volume a aproximación polos ciclindros que esas mesmas franxas rodean, e funcionando correctamente para o volume, ¿onde radica a dificultade coas superficies laterais?.

Unha situación comparable presentábase na determinación da lonxitude dun arco de curva, problema tamén clásico naquela altura. Sobre disto hai unha observación importante que facer: a lonxitude do arco non depende puntualmente dos valores da función, senón das súas relacións, da "forma" que determinan. Logo no cálculo da lonxitude, a integral non debe conter información acerca dos valores da función, senón acerca dos da súa derivada,

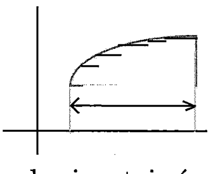
como de feito sucede: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx.$

Nese sentido, a superficie de revolución si que depende do "tamaño" da función, pero tamén da súa derivada. A integral debe, pois, conter información acerca de ámbalas dúas, tal como sabemos que sucede: .

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Quizais a cuestión poida parecer trivial, independente da validez dos resultados matemáticos, pero non é así. Analicémo-lo que sucedería neste dous exemplos clásicos que estamos tratando:

i) A discusión, no caso da lonxitude dun arco levaríanos a presentala como unha suma de segmentos horizontais e, no caso límite, como unha suma de elementos diferenciais, *dx*.



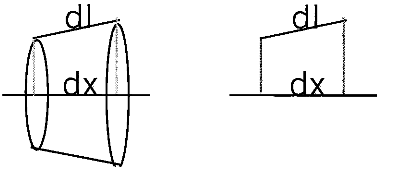
Certamente iso non funciona: a suma dos segmentos horizontais é sempre o propio intervalo, polo que o límite seguirá sendo este. Pero a intuición permítenos cubri-la curva punto a punto, con absoluta exactitude: a suma das "lonxitudes dos seus puntos" deberá ser igual á lonxitude do arco.

Quizais a facilidade visual para saír do engano (non sería posible un proceso de aproximacións sucesivas por este procedemento) e que, por outra parte, sexa bastante natural intenta-la aproximación rectificando o arco por medio dunha poligonal, lle resten interese a este problema. Pero en calquer caso é un exemplo no cal as intuicións tipo Cavalieri nos levan a erro.

ii) O caso da superficie de revolución resultará máis apaixonante pois trascende a polémica da homoxeneidade dos elementos diferenciais, pois ainda admitindo que debamos empregar superficies non está tan claro que o intuitivo sexa aproximar por troncos de cono, sobre todo se pouco antes o volume se aproximou por cilindros, xa que se trata dunha mesma figura.

Non deixa de ser curioso, ademais, que o volume se poida aproximar por cilindros ou troncos de cono indistintamente (no volume non intervén a xeratriz, se non a altura), mentres que a superficie lateral soamente admite a "rectificación" por troncos de cono (intervén a xeratriz).

Esta situación ten un claro paralelismo coa área plana, que tamén admite aproximación por rectángulos ou trapecios.

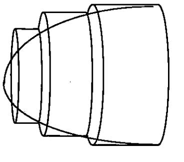



Certamente podemos constatar cómo nunha rotación o volume é xerado polo recinto plano (área), mentres que a superficie lateral éo polo seu contorno (lonxitude). Pero a cuestión que se nos suscita podemos discutila con independencia da rotación.

Ó contrario do que sucedía coa lonxitude do arco de curva, agora si é posible un proceso de aproximacións sucesivas á superficie lateral mediante franxas cilíndricas, do mesmo xeito que procedemos cando aproximamos un volume:

A diferencia estriba en que os volumes (como sucede coas áreas planas) pódense estender a calquera tipo de funcións a través do principio de exhaución, precisamente pola monotonía da magnitude que se mide, que permite "encaixar" o valor buscado para un volume, entre os valores obtidos con funcións en esqueira respectivamente $\leq$ ou $\geq$ que a función dada. Requisito que, polo xeral, non se cumple no caso da superficie lateral:

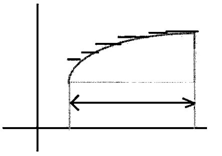
Se decidisemos face-las aproximacións por exceso sufriríamos un severo revés: é probable que para curva do debuxo tal aproximación non consiga maiora-la superficie de revolución que queremos medir.



Poderiamos imaxinar curvas moito máis oscilantes para agrava-la contradicción, pero non consideramos que sexa necesario.

Nótese que non estamos discutindo se existe ou non integral para a función $2\pi f(x)$, senón se a dita integral responde ou non á magnitude que pretendemos calcular.

Se reparamos de novo no arco de curva, vemos que sucede o propio, se cabe aínda máis drasticamente: utilizando unha función máis grande definida a tramos constantes, non se consegue maiora-la lonxitude, ¡en ningún caso!



## 7. Epílogo: Unha metáfora para a Educación Matemática

A creación do coñecemento é case sempre unha tarefa colectiva, pero en calquera caso plural: as ideas que finalmente se adoptan soeno ser como resultado dun *proceso de construcción* no que se manexaron outras ideas tamén correctas que logo non serían fructíferas, ideas erradas que sen embargo funcionaban ben en certos ámbitos (*obstáculos epistemolóxicos*), e ideas alternativas pero menos eficaces; todas elas parcialmente "responsables" da idea final.

Na educación necesitamos, certamente, "adelgazar" os procesos de construcción do coñecemento, considerando partes "elementais" dos mesmos que os fagan manexables nunha aula. Pero se en aras desta necesaria simplificación descontextualizamos os conceptos desvinculándoos da problemática na que xorden, obviando as dificultades que se atoparon, as solucións que se achegaron e as críticas de que foron obxecto, estarémonos silenciando o diálogo científico, favorecendo a camuflaxe dos obstáculos e dificultando, así, a súa transformación *en estructuras conceptuais que otorguen unha nova significación á relación entre quen coñece e o que é coñecido.*

## 8. Bibliografía.

Alesandrov, A.; Kolgomorov, A.N.; Laurentiev, M.A. et al. (1979): *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid. Alianza Universidad.
Aristóteles (2000): *Sobre las líneas indivisibles*. Madrid. Gredos.
Boyer, C. (1986): *Historia de la Matemática*. Madrid. Alianza Editorial.
Cajaraville, J.A. (1996). *Evaluación del significado del Cálculo Diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una Ingeniería Didáctica alternativa.* Tese Doutoral. Universidade de Santiago de Compostela.
Duvillé, B. (1999): *Sur les traces de l'Homo mathematicus*. París. Ellipses.
Encarta 2000. Microsoft, Enciclopedia.
Euclides (1991, 1994, 1996): *Elementos*. Madrid. Gredos. (En tres tomos, cada un editado no correspondiente ano).

Gandt, F. (1983): Les indivisibles de Torriceli. Cahier nº 17 du *Séminaire d´Epistemologie et d´Historie des Sciences. Université de Nice.* (Citado por Schneider).

García Suarez, J. A. (2001): Área, proporcionalidad y semejanza de triángulos. Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, *Boletín nº 59.* Madrid.

Gere, B.H. et al. (1972): *Curso programado de cálculo.* Barcelona. Ed. Reverté.

Grattan-Guinnes, I. et al. (1984): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910.* Madrid. Alianza Universidad.

Kline, M. (1985): *La pérdida de la certidumbre.* Madrid. Siglo veintiuno.

Labraña, A. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca dos significados do cálculo integral.Tese Doutoral.* Universidade de Santiago de Compostela.

Labraña, A.; R. Mayo, M.; Cachafeiro, L. (1994): *Sobre integrais.* Muros (A Coruña). Toxosoutos.

Larousse, Enciclopedia (1980).Barcelona. Editorial Planeta.

Malet, A. (1996): *From Indivisibles to Infinitesimals.* Barcelona. Universitat Autónoma.

Piskunov, N.S. (1977): *Cálculo diferencial e integral.* H.C. Пhckyhob. Moscú.

Puig Adam, P. (1958): *Curso de Geometría Métrica.* (Tomo I, 6ª edicción). Madrid.

Schneider, M. (1992): Un obstácle épistémologique soulevé par "découpages infinis" des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 11(2-3), (pp. 241-294).

Spivak, M. (1992): *Calculus.* Barcelona. Reverté.