



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A refracción astronómica

María Alonso Laredo

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A refracción astronómica

María Alonso Laredo

07/19

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Astronomía e Astrofísica
Título: A refracción astronómica
Breve descrición do contido
Calquera sinal luminosa procedente do exterior da Terra vese afectada pola atmósfera que nos rodea. A desviación aparente que experimentan as posicións dos astros, dependendo das condicións das capas atmosféricas e da altura do astro, constitúe a Refracción Astronómica. Estudaranse os fundamentos físicos, as alteracións que provocan nas coordenadas das estrelas, as correccións locais correspondentes e as relacións cos modelos de corrección polo retardo da radiación recibida a causa deste fenómeno.
Recomendacións
Ter cursado a materia de Fundamentos de Astronomía
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	IX
1. Modelo plano	1
2. Modelo esférico	5
2.1. Desenvolvemento en serie	9
2.2. Aplicación de logaritmos	12
3. Método da función xeradora	25
3.1. Retardo refractivo	26
3.2. Refracción astronómica	34
4. Consecuencias da refracción	37
4.1. Sistema de coordenadas	37
4.2. Efecto da refracción nas coordenadas	40
4.3. Efecto da refracción nos astros sobre o horizonte	44
Apéndice A	51
Apéndice B	55
Apéndice C	57
Bibliografía	59

Resumo

Todo sinal luminoso procedente do espazo debe atravesar a atmósfera antes de chegar a nós. Ao atravesala sofre un cambio na dirección en que o percibimos debido á refracción astronómica. Ao longo deste traballo estúdase este fenómeno así como as consecuencias para as observacións astronómicas. Analízanse diferentes métodos e fórmulas coas que poder obter o cambio de dirección e chégase á conclusión de que é un fenómeno moi variable e pouco predecible por depender en gran medida das condicións meteorolóxicas e da composición da atmósfera. Préstase especial atención a sinais procedentes de astros próximos ao horizonte do observador, por ser este o lugar onde a refracción é máxima e non todos os métodos son válidos. No estudo desas fórmulas tamén se examina a relación deste fenómeno con outro producido pola atmósfera, o retardo da radiación recibida, xa que un dos métodos é común a ambos. Por último estúdase o efecto que provoca nas coordenadas dos astros dado que a refracción fai que estes se vexan máis altos do que realmente están, polo que varía a hora do seu orto e ocaso, ademáis de modificar a súa forma aparente.

Abstract

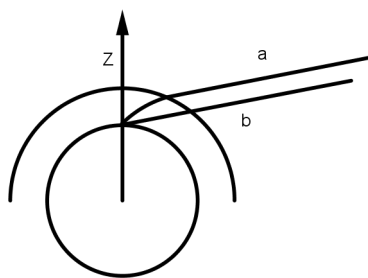
Any luminous signal coming from space go through the atmosphere before reaching us. When it happens, the signal changes its direction due to astronomical refraction. In this project we study this phenomenon as well as the consequences for astronomical observations. We analice differents methods and formulas to obtain the change's value in the direction and we conclude that it is a very variable and unpredictable phenomenon, to a large extent because of its dependence of the climatic conditions and of the atmosphere's composition. Special attention is paid to the celestial body's signals near the observer's horizon since this is the place where refraction is maximun and not all methods are valid. In the study of these formulas we also examine the relationship of this phenomenon with

another produced by the atmosphere, the delay of the received radiation because one of the methods is common to both. Finally we study the effect it has on the coordinates of the celestial bodies because refraction makes them look higher than they actually are, so the time of its rises and sets is modified in addition to modifying their apparent shape.

Introdución

A luz que emite un astro atravesa a atmósfera antes de chegar á superficie terrestre e sofre o que se coñece como refracción astronómica ou refracción atmosférica. Este fenómeno de refracción, é dicir, o cambio na dirección de propagación dun raio de luz ao atravesar un medio, é debido á distinta velocidade que ten a luz ao propagarse ao longo da nosa atmósfera. Depende de varios factores entre os que se encontran as características físicas da atmósfera e a altura sobre o horizonte, ou o seu complementario, chamado distancia cenital (ver apéndice A Definición A .1), do corpo que emite o raio de luz.

Se consideramos un corpo situado no espazo fóra da atmósfera terrestre, o raio de luz que este emite recibe o nome de raio incidente antes de entrar nela, isto é, cando se propaga polo vacío, e de raio refractado unha vez que pasa á atmósfera. A diferenza entre ambos é o que se coñece como refracción.



Na Figura 1¹ podemos observar a traxectoria do raio no caso real, *a*, e no suposto no que o fenómeno de refracción non se produxera, *b*.

Figura 1: Refracción

O efecto principal que provoca este fenómeno é a elevación aparente dos astros, isto é, as alturas observadas dos astros son maiores das que se obterían en ausencia de atmósfe-

¹Todas as figuras que aparecen neste traballo, salvo indicación específica, son de elaboración propia a partires das referencias bibliográficas.

ra. Ademáis adiantase aparentemente a hora das saídas dos astros (ortos) e atrásanse os seus ocasos. Outro dos efectos que ten é a deformación da súa forma, os astros obsérvanse achatados verticalmente.

Para poder estudar a refracción astronómica existen varias fórmulas desenvoltas por diversos autores e obtidas con distintas condicións de observación (distancia cenital, posición, temperatura, ...). Todas elas supoñen que a atmósfera se encontra dividida en capas e a precisión destas fórmulas depende, entre outros, de factores como: a forma das capas (planas, esféricas, elipsoidais,...), o espesor destas, a diferenza entre a verdadeira atmósfera e o modelo elexido para representala, a altitude sobre o nivel do mar do punto dende o cal se observa, o grao de humidade...

Neste traballo abordaremos, nos tres primeiros capítulos, algunhas desas fórmulas e os distintos métodos usados para obtelas. Todas elas serven para aproximar o valor da refracción pero non son exactas, é máis, algunhas delas dan problemas se a distancia cenital é moi grande. Cabe destacar, a pesares de que neste traballo non o estudaremos, que hoxe en día os métodos que se empregan para obter o valor da refracción son algoritmos computacionais.

Estudaremos ademáis, no *Capítulo 4*, cales son as consecuencias deste fenómeno á hora de calcular a posición dos astros e os problemas que esto supón.

Veremos finalmente, tamén no cuarto capítulo, os efectos da refracción na saída e posta do sol, xa que, canto máis próximo estea un astro ao horizonte maior será o efeto da refracción, e como xa dixemos non todas as fórmulas serven para estudar este caso.

Capítulo 1

Modelo plano

Nun primeiro estudo da refracción astronómica teremos en conta as seguintes leis xerais da refracción que establece a óptica:

- O raio incidente, o raio refractado e a normal á superficie, dende a cal se observan, están no mesmo plano.
- Cúmrese a **lei de Snell** a cal establece que:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}$$

onde i representa o ángulo que forma o raio incidente coa vertical no punto (ver Definición A .18), r o ángulo do raio refractado coa vertical do lugar, c a velocidade da luz no vacío e n_1 e n_2 os índices de refracción dos dous medios, respectivamente, (véxase Definición A .12).

Se observamos un obxecto fóra da atmósfera pero cercano a superficie terrestre, comparándoo co semidiámetro da Terra, podemos desprezar a curvatura desta, é dicir, supoñer que a Terra é plana. Así, obtemos unha fórmula simplificada, que orixinará imprecisións no modelo matemático que obteremos, pero será útil para obter a refracción de estrelas próximas ao cenit (ver Definición A .3).

Consideraremos logo que a atmósfera se encontra dividida en capas infinitesimais planas, que o índice de refracción aumenta ao achegarnos á superficie terrestre e que este non varía mentres permanezamos na mesma capa. Neste suposto, a pesares de que o raio de luz describe unha curva continua, podemos representalo como unha línea quebrada tal e como se mostra na Figura 1.1.

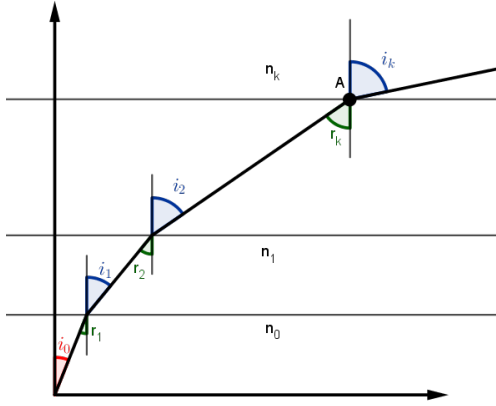


Figura 1.1: Modelo plano

Se aplicamos no punto A da Figura 1.1 a ley de Snell obtemos que:

$$n_{k-1} \operatorname{sen} r_k = n_k \operatorname{sen} i_k$$

ademáis $r_k = i_{k-1}$ polo que:

$$n_{k-1} \operatorname{sen} i_{k-1} = n_k \operatorname{sen} i_k$$

Aplicando isto sucesivamente nas distintas capas obtemos que

$$n_k \operatorname{sen} i_k = n_0 \operatorname{sen} i_0 = \text{cte}$$

Tense que o índice de refracción no vacío, n_k , é 1, o ángulo de incidencia no punto A , i_k , é a distancia cenital verdadeira z , e na superficie terrestre, i_0 , é a distancia cenital observada z' . Se definimos o ángulo de refracción, R , como $R = z - z'$, podemos expresar z como $z = z' + R$ e así:

$$n_k \operatorname{sen} i_k = n_0 \operatorname{sen} i_0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} z = n_0 \operatorname{sen} z' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(z' + R) = n_0 \operatorname{sen} z' \Leftrightarrow \operatorname{sen} z' \cos R + \cos z' \operatorname{sen} R = n_0 \operatorname{sen} z' \quad (1.1)$$

Como R é moi pequeno podemos supoñer que $\cos R \approx 1$ e que $\operatorname{sen} R \approx R$ (expresado en radianos) e substituíndo isto na ecuación (1.1) obtemos:

$$\operatorname{sen} z' + R \cos z' = n_0 \operatorname{sen} z' \Leftrightarrow R = \frac{n_0 \operatorname{sen} z' - \operatorname{sen} z'}{\cos z'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = (n_0 - 1) \cdot \tan z'$$

En condicións normais de presión e temperatura, isto é, 0°C e 76 cm de mercurio ($\approx 101324,7 \text{ Pa} \approx 1 \text{ atm}$ (véxanse Definicións A .14 e A .2)), o índice de refracción na superficie terrestre é $n_0 = 1,00029255$. Polo que se ten a seguinte expresión para a refracción atmosférica:

$$R = 0,00029255 \cdot \tan z'$$

Agora ben, se temos en conta a **Ley de Gladstone** que nos di que o índice de refracción dun gas menos un é proporcional a súa densidade, é dicir, $n - 1 = k \cdot \rho$, sendo ρ a densidade do gas e k unha constante, e tendo en conta ademáis que a densidade dun gas se pode

expresar como: $\rho = \frac{M \cdot P}{S \cdot T}$, sendo M a masa molar e S a constante dos gases ideais, tense que:

$$[n - 1]_{T,P} = k \cdot \rho = k \cdot \frac{M \cdot P}{S \cdot T} = k \cdot \frac{M}{S} \cdot \frac{76}{273} \cdot \frac{P}{76} \cdot \frac{273}{T} = [n - 1]_{273,76} \cdot \frac{P}{76} \cdot \frac{273}{T}$$

sendo T a temperatura de observación en graos Kelvin ($T = t + 273$ con t a temperatura en graos Celsius) e P a presión atmosférica de observación expresada en centímetros de mercurio.

Polo que a expresión xeralizada da refracción neste modelo é:

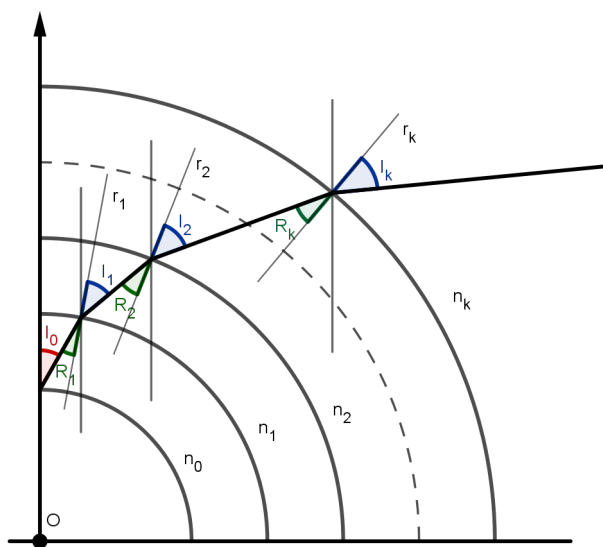
$$R = 0,00029255 \cdot \frac{P}{76} \cdot \frac{273}{T} \cdot \tan z'$$

Temos así unha fórmula aproximada para o cálculo da refracción que sofren obxectos cercanos á superficie terrestre a distancias cenitais pequenas, non maiores de 50° , dando valores imposíbeis para astros próximos ao horizonte.

Capítulo 2

Modelo esférico

Supoñamos un corpo situado nun punto moi alonxado de nós que emite un raio de luz. Neste caso non podemos desprezar a curvatura da terra, polo tanto consideraremos que a atmósfera se encontra dividida en capas esféricas infinitesimais de densidade constante. Ao igual que no capítulo anterior podemos representar o raio como unha línea quebrada como se mostra na Figura 2.1. Ademáis suporemos que o índice de refracción é unha función monótona dependente da distancia r ao centro da Terra ($n = n(r)$). Teremos en conta tamén as leis xerais da refracción enunciadas no *Capítulo 1*.



Denotaremos por I_0 o ángulo que forma o raio incidente cando chega a nós coa vertical do lugar dende o cal observamos, isto é, a distancia centital observada; e por I_k o ángulo que forma dito raio ao incidir no bordo inferior da capa k -ésima da atmósfera coa vertical nese punto. R_k denotará o ángulo que forma o raio refractado coa vertical ao entrar na capa $(k - 1)$ -ésima. Finalmente n_k denotará o índice de refracción da capa k -ésima (Figura 2.1).

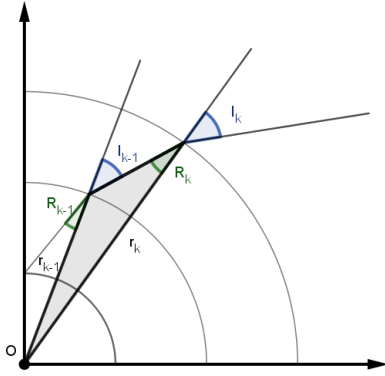
Figura 2.1: Modelo esférico

Unha vez introducida esta notación reformulemos a ley de Snell para adaptala a ela:

$$\frac{\text{sen } I_k}{\text{sen } R_k} = \frac{n_{k-1}}{n_k} \quad (2.1)$$

Por outra banda a **lei dos senos** dinos que se A, B, C denotan os ángulos dun triángulo, e a, b, c as medidas dos lados opostos, respectivamente, a eses ángulos, tense que:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$



Se aplicamos esta ley ao triángulo marcado na Figura 2.2 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{r_k}{\text{sen}(\pi - I_{k-1})} &= \frac{r_{k-1}}{\text{sen } R_k} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{r_k}{\text{sen } I_{k-1}} &= \frac{r_{k-1}}{\text{sen } R_k} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r_k \text{sen } R_k &= r_{k-1} \text{sen } I_{k-1} \quad (2.2) \end{aligned}$$

Figura 2.2: Aplicación da ley dos senos

Tendo en conta as expresións (2.1) e (2.2), obtidas coa ley de Snell e coa ley dos senos, tense que:

$$\begin{aligned} n_k \text{sen } I_k = n_{k-1} \text{sen } R_k &\Leftrightarrow n_k \text{sen } I_k = n_{k-1} \frac{r_{k-1} \text{sen } I_{k-1}}{r_k} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n_k r_k \text{sen } I_k &= n_{k-1} r_{k-1} \text{sen } I_{k-1} = \text{constante} \end{aligned}$$

Esta expresión é o que se coñece como **Lei de Bouguer**, e pode enunciarse xeralmente como:

$$n r \text{sen } I = n_0 r_0 \text{sen } z_0$$

sendo z_0 a distancia cenital observada, na nosa notación $z_0 = I_0$.

Fixémonos agora na capa k -ésima da atmósfera e vexamos como conseguir unha aproximación da refracción que sofre o raio nesa capa. Consideraremos de novo que o raio é unha curva continua como se mostra na Figura 2.3. Omitiremos os índices k -ésimos para maior comodidade.

Supoñamos que a capa está situada a unha distancia r do centro da Terra e consideremos o triángulo da Figura 2.3 de vértices P , punto no que o raio de luz interseca con dita capa; Q , a intersección da tanxente a traxectoria luminosa en P coa vertical do lugar P_0 ; e O , que denota o centro da Terra. O ángulo que forma a vertical do lugar coa recta que pasa polo centro da Terra e o punto P será denotado por θ .

Na Figura 2.3 pódese observar como a partir do triángulo que acabamos de describir se pode obter a seguinte relación:

$$z = \theta + I$$

de onde $\frac{dz}{dr} = \frac{d\theta}{dr} + \frac{dI}{dr}$, o que se pode expresar como $dz = d\theta + dI$, é dicir, se tomamos outro punto P' da traxectoria do raio de luz, o que varía o ángulo z dende o punto P ao punto P' é igual á suma das variacións dos ángulos θ e I .

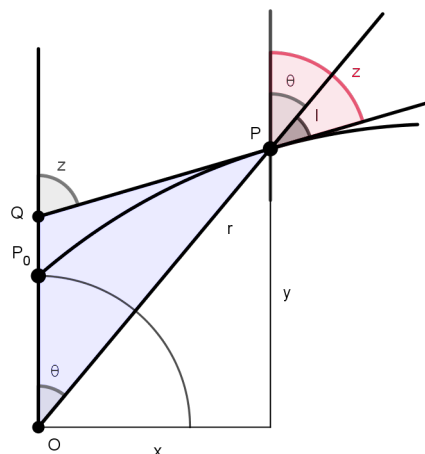


Figura 2.3: Tanxente á traxectoria

Volvendo agora ao triángulo de vértices O , P e Q da Figura 2.3 temos que:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r \cdot \text{cos } \theta$$

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot \text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r \cdot \text{sen } \theta$$

Desa relación obtense o seguinte: $\tan \theta = \frac{x}{y}$.

Ademáis, tendoa en conta, podemos representar en forma paramétrica, en función do parámetro r , a curva que segue o raio de luz emitido polo corpo do seguinte xeito:

$$\begin{cases} x(r) = r \cdot \text{sen } \theta \\ y(r) = r \cdot \text{cos } \theta \end{cases}$$

sendo θ unha variable dependente de r ($\theta = \theta(r)$).

Agora ben, sabemos que a pendente m da recta tanxente a curva nun punto é igual a derivada da curva nese punto, polo que:

$$m = \frac{dy}{dx} \tag{2.3}$$

xa que a curva está expresada en forma paramétrica e polo tanto a derivada con respecto a r calcúlase dese xeito.

Por outra banda a pendente da recta tamén é igual á tanxente do ángulo que forma a recta co eixo OX , así:

$$m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{\tan z} \quad (2.4)$$

Das relacións (2.3) e (2.4) tense que:

$$\frac{1}{\tan z} = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{d\theta}{dr}}{\operatorname{sen} \theta + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dr}} \quad (2.5)$$

Recordando a relación que obtivemos antes, $z = \theta + I$, podemos escribir o seguinte:

$$\tan z = \tan(\theta + I) = \frac{\tan \theta + \tan I}{1 - \tan \theta \cdot \tan I} \quad (2.6)$$

Xuntando as ecuacións (2.5) e (2.6) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I} &= \frac{\cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{d\theta}{dr}}{\operatorname{sen} \theta + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dr}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I} \right) + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dr} \left(\frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I} \right) &= \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{d\theta}{dr} \Rightarrow \\ \Rightarrow r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dr} \left(\frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I} \right) + r \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{d\theta}{dr} &= \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow r \cdot \frac{d\theta}{dr} \left(\cos \theta \cdot \frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I} + \operatorname{sen} \theta \right) &= \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow r \cdot \frac{d\theta}{dr} &= \frac{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I}}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta \cdot \frac{1 - \tan \theta \cdot \tan I}{\tan \theta + \tan I}} \Rightarrow \\ \Rightarrow r \cdot \frac{d\theta}{dr} &= \frac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta \cdot \tan I - \operatorname{sen} \theta + \frac{\tan I}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta} + \operatorname{sen} \theta \cdot \tan I + \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cdot \tan I} \Rightarrow \\ &\Rightarrow r \cdot \frac{d\theta}{dr} = \tan I \end{aligned} \quad (2.7)$$

Fixémonos agora na Ley de Boguer: $n r \operatorname{sen} I = n_0 r_0 \operatorname{sen} z_0$. Se diferenciamos esta ecuación obtense que:

$$\frac{dn}{dr} r \operatorname{sen} I + n \operatorname{sen} I + n r \cos I \cdot \frac{dI}{dr} = 0$$

Dividindo todo por $\cos I$:

$$\frac{dn}{dr} r \tan I + n \tan I + n r \frac{dI}{dr} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dn}{dr} r + n\right) \tan I = -nr \frac{dI}{dr}$$

Aplicando a relación obtida antes $\frac{dI}{dr} = \frac{dz}{dr} - \frac{d\theta}{dr}$ podemos escribir:

$$\left(\frac{dn}{dr} r + n\right) \tan I = nr \frac{d\theta}{dr} - nr \frac{dz}{dr}$$

Tendo en conta a expresión (2.7) que acabamos de obter:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn}{dr} r + n\right) \tan I &= nr \frac{1}{r} \tan I - nr \frac{dz}{dr} \Rightarrow \left(\frac{dn}{dr} r + n\right) \tan I = n \tan I - nr \frac{dz}{dr} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{dn}{dr} r + n - n\right) \tan I = -nr \frac{dz}{dr} \Rightarrow \frac{dn}{dr} \cdot \frac{1}{n} \tan I = -\frac{dz}{dr} \end{aligned}$$

Podendo expresalo finalmente como: $\frac{dn}{n} \tan I = -dz$

Para determinar cal é a variación por refracción na distancia cenital debemos integrar esta ecuación, é dicir, obter a seguinte integral:

$$R = \int_1^{n_0} \tan I \frac{dn}{n}$$

Veremos a continuación como podemos obtela a partir de dous métodos distintos.

2.1. Desenvolvemento en serie

Neste caso, o primeiro que temos que facer é expresar $\tan I$ en función do índice de refracción n ou da distancia cenital z . O que faremos nós será expresalo en función da distancia cenital.

Fixémonos primeiro que, pola Ley de Bouguer, $\text{sen } I = \frac{n_0 r_0}{nr} \text{sen } z_0 = e \text{sen } z_0$, sendo $e = \frac{n_0 r_0}{nr}$. Definimos entón $2f = 1 - e^2 \Rightarrow e^2 = 1 - 2f$.

Unha vez definido isto, vexamos como expresar $\tan I$ en función de z_0 :

$$\tan I = \frac{\text{sen } I}{\cos I} = \frac{\text{sen } I}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 I}} = \frac{e \text{sen } z_0}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 z_0}}$$

Dividindo e multiplicando todo por $\cos z_0$ temos que:

$$\begin{aligned} \tan I &= \frac{e \text{sen } z_0}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 z_0}} \cdot \frac{\cos z_0}{\cos z_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tan I &= \frac{e \frac{\text{sen } z_0}{\cos z_0}}{\frac{1}{\cos z_0} \sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 z_0}} = \frac{e \tan z_0}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 z_0} - e^2 \tan^2 z_0}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por outra banda:

$$\frac{1}{\cos^2 z_0} - e^2 \tan^2 z_0 = \frac{1}{\cos^2 z_0} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 z_0) = \frac{1}{\cos^2 z_0} (1 - \operatorname{sen}^2 z_0 + 2f \operatorname{sen}^2 z_0) = 1 + 2f \tan^2 z_0$$

Aplicando isto á ecuación (2.8) obtense finalmente que:

$$\tan I = \frac{e \tan z_0}{\sqrt{1 + 2f \tan^2 z_0}}$$

Polo tanto, supoñendo que coñecemos a relación $n = n(r)$ podemos integrar a fórmula $-dz = \frac{dn}{n} \tan I$. É dicir podemos obter a seguinte integral:

$$R = \int_1^{n_0} -dz = \int_1^{n_0} \frac{dn}{n} \tan I$$

Para iso, tendo en conta que $\tan I = \frac{e \tan z_0}{\sqrt{1 + 2f \tan^2 z_0}}$, o primeiro que faremos será desenvolver, aplicando a fórmula do binomio de Newton, á seguinte expresión: $\frac{1}{\sqrt{1 + 2f \tan^2 z_0}}$.

Introduzcamos antes este concepto:

Definición. O teorema do binomio é unha fórmula que proporciona o desenvolvemento da potencia n -ésima (sendo n un enteiro positivo) dun binomio. Newton xeralizou a fórmula para tomar outros expoñentes, empregando unha serie infinita e obtendo o seguinte resultado:

$$(x + y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

onde r pode ser calquera número real, non necesariamente positivo nin enteiro, e os coeficientes binomiais están dados por:

$$\binom{r}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{n=0}^{k-1} (r - n) = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!}$$

tendo en conta que se $k = 0$ entón o produto é vacío e polo tanto igual a 1, e se $k = 1$ entón é r xa que este é o único factor que aparece.

Esta suma converge e a igualdade é verdadeira se os números complexos ou reais x e y cumpren que $\frac{|x|}{|y|} < 1$.

Un caso especial tense cando $x = 1$ ou $y = 1$, para o cal podemos empregar a seguinte fórmula:

$$(1 + x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-r)_k}{k!} (-x)^k$$

sendo $(r)_k$ o símbolo de Pochhammer que se define da seguinte forma:

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\dots(x+n-1)$$

sendo Γ a función gamma de Euler (ver Definición A .11).

Unha vez introducidos estes conceptos, aplicámoslos ao binomio para o cal queremos obter o desenvolvemento:

$$\begin{aligned} (1 + 2f \tan^2 z_0)^{-1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} (-2f \tan^2 z_0)^k = \\ &= \frac{1}{0!} (-2f \tan^2 z_0)^0 + \frac{1}{1!} (-2f \tan^2 z_0)^1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)}{2!} (-2f \tan^2 z_0)^2 + \dots = \\ &= 1 - f \tan^2 z_0 + \frac{3}{2} f^2 \tan^4 z_0 + \dots \end{aligned}$$

Polo tanto $\tan I = e \tan z_0 (1 - f \tan^2 z_0 + \frac{3}{2} f^2 \tan^4 z_0 + \dots)$, e xa estamos en condicións de aplicar isto á integral que queremos calcular:

$$\begin{aligned} R &= \int_1^{n_0} \frac{dn}{n} \tan I = \int_1^{n_0} \frac{dn}{n} e \cdot \tan z_0 (1 - f \tan^2 z_0 + \frac{3}{2} f^2 \tan^4 z_0 + \dots) = \\ &= \int_1^{n_0} \frac{dn}{n} e \cdot \tan z_0 - \int_1^{n_0} \frac{dn}{n} f \cdot e \cdot \tan^3 z_0 + \frac{3}{2} \int_1^{n_0} \frac{dn}{n} f^2 \cdot e \cdot \tan^5 z_0 + \dots = \\ &= \tan z_0 \cdot n_0 r_0 \int_1^{n_0} \frac{1}{n^2 r} dn - \tan^3 z_0 \cdot n_0 r_0 \int_1^{n_0} f \frac{1}{n^2 r} dn + \frac{3}{2} \tan^5 z_0 \cdot n_0 r_0 \int_1^{n_0} \frac{f^2}{r} \frac{1}{n^2} dn + \dots \end{aligned}$$

Por outra banda vexamos como simplificar a seguinte integral:

$$\int_1^{n_0} \frac{dn}{n^2 r}$$

Facendo o cambio de variable $\frac{1}{n} = a \Rightarrow dn = \frac{-1}{a^2} da$, obtense:

$$\int_1^{1/n_0} \frac{-1}{a^2} a^2 \frac{1}{r} da = \int_1^{1/n_0} \frac{-1}{r} da = \int_1^{n_0} \frac{-1}{r} d\left(\frac{1}{n}\right)$$

Polo que:

- $\int_1^{n_0} \frac{f}{r} \frac{dn}{n^2} = \int_1^{n_0} \frac{-f}{r} d\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\int_1^{n_0} \frac{f^2}{r} \frac{dn}{n^2} = \int_1^{n_0} \frac{-f^2}{r} d\left(\frac{1}{n}\right)$

Substituíndo todo na integral principal:

$$R = -\tan z_0 \cdot n_0 r_0 \int_1^{n_0} \frac{1}{r} d\left(\frac{1}{n}\right) + \tan^3 z_0 \cdot n_0 r_0 \int_1^{n_0} \frac{f}{r} d\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{3}{2} \tan^5 z_0 \cdot n_0 r_0 \int_1^{n_0} \frac{f^2}{r} d\left(\frac{1}{n}\right) + \dots$$

Para que o desenvolvemento do binomio $(1 + 2f \tan^2 z_0)^{(-1/2)}$ sexa converxente é necesario que $|2f \tan^2 z_0| < 1$. En xeral isto soe ser certo para distancias cenitais $z_0 < 75^\circ$ sendo necesario empregar máis termos canto máis se aproxime a distancia cenital a 75° .

Posto que non se coñece a relación $n = n(r)$, estas integrais seguen sen poderse obter analíticamente polo que os coeficientes determínanse a través de observacións. Para iso considérase un conxunto de N estrelas circumpolares (véxase Definición A .10) e as súas distancias cenitais nas súas culminacións superior e inferior (ver Definicións A .6), z_i^o e $z_i^{o'}$ respectivamente. Sexan z_i e z_i' as súas distancias cenitais, se non existise refracción, nas culminacións superior e inferior respectivamente. Teñense logo as seguintes relacións:

$$z_i = \phi - \delta_i = z_i^o + A \tan z_i^o + B \tan^3 z_i^o + C \tan^5 z_i^o + \dots$$

$$z_i' = \pi - \phi - \delta_i = z_i^{o'} + A \tan z_i^{o'} + B \tan^3 z_i^{o'} + C \tan^5 z_i^{o'} + \dots$$

sendo ϕ a latitude do lugar dende o cal se observa e δ_i a declinación de cada estrela (concepto que se define no *Capítulo 4*). Sumando estas dúas ecuacións obtemos:

$$\begin{aligned} z_i + z_i' &= \pi - 2\delta_i = \\ &= z_i^o + z_i^{o'} + A(\tan z_i^o + \tan z_i^{o'}) + B(\tan^3 z_i^o + \tan^3 z_i^{o'}) + C(\tan^5 z_i^o + \tan^5 z_i^{o'}) \dots \end{aligned}$$

tendo así un sistema de N ecuacións con incógnitas $A, B, C \dots$ que se resolve mediante o método de mínimos cadrados.

Realizando este proceso a diferentes latitudes e con diferentes condicións de observación xéranse unhas táboas nas que se recollen as diferentes correccións por refracción para distintas condicións astronómicas. As máis empregadas son as do observatorio de Pulkovo, as cales se adaptan para os distintos observatorios. Outras tablas, publicadas anualmente, son as do anuario do Real Observatorio Astronómico de Madrid [8], das cales se fala no Apéndice B.

2.2. Aplicación de logaritmos

Outra forma de calcular a refracción a partir da integral:

$$R = \int_1^{n_0} \tan I \frac{dn}{n}$$

a cal evita as dificultades numéricas cando o ángulo de incidencia se aproxima a $I = \frac{\pi}{2}$, e varía pouco se o ángulo se mantén próximo a I é a obtida por Auer & Standish [2] a partir da seguinte versión transformada desa integral:

$$R = \int_1^{n_0} \tan I \frac{dn}{n} = \int_0^{\ln(n_0)} \tan I d(\ln n)$$

e expresando todas as variables en función de I .

O primeiro que faremos será aplicar o logaritmo neperiano á Ley de Bouguer obtendo:

$$\ln(r n \sen I) = \ln(n_0 r_0 \sen z_0) \Leftrightarrow \ln(r n) = \ln(n_0 r_0 \sen z_0) - \ln(\sen I)$$

Derivando esta ecuación con respecto a I tense que:

$$\frac{d(\ln(r n))}{dI} = -\frac{1}{\tan I}$$

e substituíndo na integral:

$$R = - \int_0^{\ln(n_0)} \frac{dI}{d(\ln(r n))} d(\ln n)$$

Tendo en conta agora que:

$$d(\ln(r n)) = d(\ln r) + d(\ln n)$$

cambiando ademáis a variable de integración para poder integrar con respecto a I , o que se pode facer xa que n é función de I , e considerando que:

$$R(\ln n_0) = R(I_0) = R(z_0)$$

é dicir, tomamos como valor para a refracción cando $\ln n = \ln n_0$ o valor da refracción cando o raio incidente chega a nós, isto é, cando a distancia cenital aparente é z_0 . Podemos aplicalo entón a integral obtendo:

$$R = - \int_0^{z_0} \frac{d(\ln n)}{d(\ln r) + d(\ln n)} dI = - \int_0^{z_0} \frac{\frac{d(\ln n)}{d(\ln r)}}{1 + \frac{d(\ln n)}{d(\ln r)}} dI$$

Para simplificar esta expresión podemos facer a seguinte substitución:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d(\ln n)}{dI} = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dI} \\ \frac{d(\ln r)}{dI} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dI} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d(\ln n)}{d(\ln r)} = \frac{r}{n} \cdot \frac{dn}{dr}$$

e obter:

$$R = - \int_0^{z_0} \frac{\frac{r}{n} \cdot \frac{dn}{dr}}{1 + \frac{r}{n} \cdot \frac{dn}{dr}} dI = - \int_0^{z_0} \frac{r \frac{dn}{dr}}{n + r \frac{dn}{dr}} dI$$

Como xa dixemos, esta ecuación compórtase ben cando $I = \frac{\pi}{2}$ e pódese avaliar por cuadratura usando pasos iguais en I , é dicir, aplicando algunha fórmula do tipo Newton-Cortes, tales como a regra do trapecio, ou a regra de Simpson, a cal explicaremos máis adiante. En cada paso teñense que calcular os valores para r , n e $\frac{dn}{dr}$, para o cal é preciso introducir un modelo de variación radial da presión atmosférica, P ; da temperatura, T ; e da humidade relativa, RH ; na atmósfera terrestre o cal veremos máis adiante.

Unha vez introducido este modelo os valores de r , n e $\frac{dn}{dr}$ pódense encontrar, en cada paso, calculando as raíces da ecuación da Ley de Bourguer expresándoa como función de r :

$$F(r) = nr - \frac{n_0 r_0 \text{sen} z_0}{\text{sen} I}$$

Para iso pódese utilizar o método iterativo Newton-Raphson.

Antes de describir o proceso para o cálculo das raíces vexamos en que consiste este método:

Método iterativo Newton-Raphson: Este método busca un cero da función $f(x)$ mediante sucesivas aproximacións a partir dun valor inicial x_0 . En cada iteración n , considérase a recta tanxente a $f(x)$ en $(x_n, f(x_n))$ e tómase como x_{n+1} a intersección desa tanxente co eixo OX . Polo tanto, dado que a ecuación da recta tanxente á función $f(x)$ no punto $(x_n, f(x_n))$ é:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

tense que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

O algoritmo deste método é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ dado} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$$

é preciso, claramente, que a función sexa derivable, e que a raíz sexa simple xa que noutro caso a derivada anúlase.

Así no noso caso, precisamos dun valor inicial r_0 e atopar as sucesivas raíces potenciais como:

$$r_{i+1} = r_i - \frac{F(r_i)}{F'(r_i)} = r_i - \left[\frac{n_i r_i - n_0 r_0 \frac{\text{sen} z_0}{\text{sen} I}}{n_i + r_i \frac{dn_i}{dr_i}} \right]$$

para todo $i = 0, 1, 2, \dots$, onde r_i é o valor calculado na iteración anterior e tendo en conta que:

$$F'(r) = \frac{dn}{dr} r + n$$

xa que estamos supondo que I é fixo en cada paso do método de cuadratura.

Unha vez calculado o valor de r , pódense obter n e $\frac{dn}{dr}$ usando, por exemplo, o modelo atmosférico, do que falamos antes, que vamos a describir a continuación.

Para introducir un modelo de variación radial de P , T e RH na atmósfera terrestre seguiremos o descrito por Sinclair & Hohenkerk [3]. Podemos definir, así, un modelo simple de dous compoñentes para a atmósfera terrestre como segue:

- Denotaremos as seguintes constantes deste xeito:
 - Constante universal do gas: S_g
 - Masa molar do aire seco, M_d , do aire húmido, M_w , e da atmósfera (mestura de aire seco e húmido), M_{atm} .
 - Aceleración debida á gravidade no centro de masas da columna vertical de aire sobre o observador, g_m .
 - Raio terrestre, s .
 - Distancia dende a superficie terrestre ata o lugar de observación, h_0 .
 - Distancia dende a superficie terrestre ata a tropopausa, h_t , (ver Definición A .17).
 - Distancia dende a superficie terrestre ata o final da atmósfera, h_s .
 - Altura total do lugar de observación: $r_0 = s + h_0$.
 - Altura total da troposfera (véxase Definición A .16): $r_t = s + h_t$.
 - Altura total da estratosfera (ver Definición A .9): $r_s = s + h_s$.
- Distribución simétrica esférica da densidade con dúas capas (troposfera e estratosfera).

- Equilibrio hidrostático, isto é, as forzas do gradiente vertical de presión e a gravidade están en equilibrio.

$$\frac{dP}{dr} = -g_m \rho$$

- Cúmrese a ley dos gases perfectos que é a ecuación do estado dun gas ideal, isto é, un gas hipotético formado por partículas puntuais sen atracción nin repulsión entre elas e cuxos choques son perfectamente elásticos (conservación do momento e enerxía cinética).

$$P \cdot V = \frac{m S_g T}{M_{atm}} \Leftrightarrow P = \frac{\rho S_g T}{M_{atm}}$$

sendo m a masa do gas e ρ a súa densidade.

- A temperatura decrece en tasa constante coa altura na troposfera e é constante na estratosfera.
- A ley de Gladstone que enunciámos no primeiro capítulo e que establece que:

$$n - 1 = k \cdot \rho$$

sendo k unha constante que só depende das propiedades físicas locais da atmósfera.

- Estructura de dúas capas con $k < \infty$ para a troposfera e $k = \infty$ para a estratosfera.
- Humidade relativa constante na troposfera e igual á humidade relativa medida polo observador, e humidade relativa constante igual a 0 na estratosfera.

Pasamos agora a expresar a presión P , a temperatura T , a humidade relativa RH , o índice de refracción n e a súa derivada $\frac{dn}{dr}$ en función de r nas dúas capas: troposfera e estratosfera.

Distribución da temperatura

- Troposfera: Definimos a distribución da temperatura dependendo de r como:

$$T(r) = T_0 + \alpha(r - r_0)$$

$$\frac{dT}{dr} = \alpha$$

onde α coñécese como a tasa de cambio da temperatura atmosférica.

- Estratosfera: Para as capas isotérmicas, como a estratosfera, a tasa de cambio é nula polo tanto a temperatura é constante:

$$T(r) = T_{r_t} \tag{2.9}$$

O valor que toma en toda a capa é o valor último da temperatura na tropoesfera, isto é

$$T_{r_t} = T_0 + \alpha(r_t - r_0)$$

tomando α como a tasa de cambio da temperatura na tropoesfera.

Distribución da presión

- Tropoesfera: Tendo en conta a ley dos gases perfectos e a ecuación para o equilibrio hidroestático que acabamos de introducir obtemos:

$$\frac{dP}{dr} = -g_m \rho \cdot \frac{M_{atm}}{\rho S_g T} = \frac{-g_m M_{atm}}{S_g T}$$

Se temos en conta a relación da distribución da temperatura e a súa derivada, podemos escribir a ecuación anterior como:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{-g_m M_{atm}}{S_g T} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{P} &= \frac{-g_m M_{atm}}{S_g \alpha} \cdot \frac{dT}{T} \end{aligned} \quad (2.10)$$

podendo así integrar esta ecuación para obter:

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} &= \frac{-g_m M_{atm}}{\alpha S_g} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} \Leftrightarrow \ln(P) - \ln(P_0) = \frac{-g_m M_{atm}}{\alpha S_g} (\ln(T) - \ln(T_0)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) &= \frac{-g_m M_{atm}}{\alpha S_g} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{-g_m M_{atm}}{\alpha S_g}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{P}{P_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta \end{aligned} \quad (2.11)$$

con $\beta = \frac{-g_m M_{atm}}{\alpha S_g}$.

A presión atmosférica total pódese descompoñer en dúas compoñentes: a presión parcial debida ao aire seco, P_d ; e a presión parcial debida ao vapor da auga, P_w . Dado que a presión do vapor da auga decrece moito máis rápido que a presión total é necesario dar unha expresión para P que o teña en conta.

Ademáis, ao igual que a presión, a densidade tamén se pode descompoñer en: ρ_d , densidade do aire seco, e ρ_w , densidade do vapor de auga.

Así obtense que:

$$P = P_d + P_w \quad e \quad \rho = \rho_d + \rho_w$$

Partindo da ecuación dos gases perfectos e tendo en conta estas relacións temos o seguinte:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{S_g T}{M_{atm}} (\rho_d + \rho_w) \\ P_d &= \frac{S_g T}{V} \cdot \frac{m_d}{M_d} = \frac{S_g T}{M_d} \rho_d \Leftrightarrow \rho_d = \frac{P_d M_d}{S_g T} \\ P_w &= \frac{S_g T}{V} \cdot \frac{m_w}{M_w} = \frac{S_g T}{M_w} \rho_w \Leftrightarrow \rho_w = \frac{P_w M_w}{S_g T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{S_g T}{M_{atm}} \left(\frac{P_d M_d}{S_g T} + \frac{P_w M_w}{S_g T} \right) \Leftrightarrow P = \frac{P_d M_d + P_w M_w}{M_{atm}}$$

De onde podemos obter a seguinte relación:

$$M_{atm} = \frac{P_d M_d + P_w M_w}{P} = \frac{(P - P_w) M_d + P_w M_w}{P} \Leftrightarrow$$

$$M_{atm} = M_d - \frac{P_w (M_d - M_w)}{P} \quad (2.12)$$

Das relacións (2.10), (2.11) e (2.12) tense:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= -\frac{g_m M_{atm}}{\alpha S_g} \cdot \frac{dT}{T} = -\frac{g_m}{\alpha S_g} \cdot \frac{dT}{T} \left(M_d - \frac{P_w (M_d - M_w)}{P} \right) \\ &= -\frac{g_m M_d}{\alpha S_g} \cdot \frac{dT}{T} + \frac{g_m M_d P_w}{\alpha S_g P} \cdot \frac{dT}{T} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \\ &= \beta \frac{M_d}{M_{atm}} \cdot \frac{dT}{T} - \beta \frac{M_d}{M_{atm}} \cdot \frac{P_w}{P} \cdot \frac{dT}{T} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \\ &= \beta \frac{M_d}{M_{atm}} \frac{dT}{T} - \beta \frac{M_d}{M_{atm}} \cdot \frac{P_w}{P_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\beta} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \frac{dT}{T} \end{aligned}$$

Agora ben, como xa dixemos a presión do vapor de auga decrece moito máis rápido que a presión total polo que o cociente $\frac{P_w (M_d - M_w)}{P}$ pódese desprezciar e ter así que $M_{atm} \approx M_d$. Considerando isto, o cociente $\frac{M_d}{M_{atm}}$ é aproximadamente 1 co cal se pode escribir:

$$\frac{dP}{P} = \beta \frac{dT}{T} - \beta \cdot \frac{P_w}{P_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\beta} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \frac{dT}{T} \quad (2.13)$$

Obtemos así unha expresión que describe a variación de P na que só se descoñece a dependencia de P_w con respecto a r . Para poder conseguir unha expresión que non dependa de r e así poder integrala debemos ter en conta o seguinte:

- Asumindo que a humidade relativa, RH , permanece constante ao longo da troposfera, e é igual a humidade relativa no lugar de observación RH_0 , é dicir, $RH(r) = RH_0$, podemos escribir:

$$\frac{P_w}{P_{w_0}} = \frac{e_{sat}(P, T)}{e_{sat}(P_0, T_0)}$$

sendo $e_{sat}(P, T)$ a saturación da presión parcial do vapor de auga dependendo da presión e temperatura. Se tabulamos os valores de e_{sat} fronte a T , obtemos a seguinte relación dacordo co descrito por Mangum e Wallace en [4]:

$$\frac{e_{sat}(P, T)}{e_{sat}(P_0, T_0)} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\gamma$$

sendo γ o índice de potencia derivado de comparar os valores tabulados de e_{sat} e T .

Así obtemos unha boa aproximación de P_w en función da temperatura:

$$\frac{P_w}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\gamma \Leftrightarrow P_w = P_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^\gamma$$

Substituíndo o valor de P_w na expresión (2.13) tense:

$$\frac{dP}{P} = \beta \frac{dT}{T} - \beta \cdot \frac{P_{w_0}}{P_0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma-\beta} \left(1 - \frac{M_w}{M_d}\right) \frac{dT}{T}$$

Só resta integrala para así obter unha expresión da presión en función de r ao longo da troposfera.

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} &= \int_{T_0}^T \beta \frac{dT}{T} - \int_{T_0}^T \beta \frac{P_{w_0}}{P_0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma-\beta} \left(1 - \frac{M_w}{M_d}\right) \frac{dT}{T} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(P) - \ln(P_0) &= \beta (\ln(T) - \ln(T_0)) - \beta \frac{P_{w_0}}{P_0} \left(1 - \frac{M_w}{M_d}\right) \int_{T_0}^T \frac{T^{\gamma-\beta-1}}{T^{\gamma-\beta}} dT \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) &= \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta - \beta \frac{P_{w_0}}{P_0} \left(1 - \frac{M_w}{M_d}\right) \frac{1}{\gamma-\beta} \left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma-\beta} - 1\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{P}{P_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^\beta \cdot \exp\left\{\frac{\beta}{\gamma-\beta} \frac{P_{w_0}}{P_0} \left(1 - \frac{M_w}{M_d}\right) \left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma-\beta}\right]\right\} \end{aligned}$$

Por outra banda, Sinclair (1982) [10] probou que

$$\exp\left\{\frac{\beta}{\gamma-\beta} \frac{M_d}{M_{atm}} \frac{P_{w_0}}{P_0} \left(1 - \frac{M_d}{M_{atm}}\right) \left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma-\beta}\right]\right\} \lesssim 0,003$$

Entón se consideramos o desenvolvemento en serie de potencias da función exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

e dado que no noso caso x é moi pequeno, podemos facer a seguinte aproximación: $e^x \approx 1 + x$.

Isto permítenos facer o seguinte cambio:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{\beta}{\gamma - \beta} \frac{P_{w_0}}{P_0} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma - \beta} \right] \right\} &\approx \\ \approx 1 + \frac{\beta}{\gamma - \beta} \frac{P_{w_0}}{P_0} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma - \beta} \right] \end{aligned}$$

e polo tanto:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\beta} + \frac{\beta}{\gamma - \beta} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \frac{P_{w_0}}{P_0} \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{\beta} - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma} \right]$$

Así temos unha expresión para a presión na troposfera que só depende da temperatura:

$$P = P_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\beta} + \frac{\beta}{\gamma - \beta} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \cdot P_{w_0} \cdot \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{\beta} - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma} \right]$$

- Estratosfera: Se temos en conta de novo a lei dos gases perfectos, a ecuación do equilibrio hidroestático e a distribución da temperatura (no caso da estratosfera), temos que:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{S_g T}{M_{atm}} (\rho_d + \rho_w) \Leftrightarrow \rho = \frac{P M_{atm}}{S_g T} \\ \frac{dP}{dr} &= -g_m \rho \\ T(r) &= T(r_t) = T_0 + \alpha (r_t - r_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -g_m \frac{P M_{atm}}{S_g T(r_t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -g_m \frac{M_{atm}}{S_g T(r_t)} dr$$

Se integramos a ecuación anterior obteremos a relación que queremos:

$$\int_{P(r_t)}^P \frac{dP}{P} = \int_{r_t}^r -g_m \frac{M_{atm}}{S_g T(r_t)} dr \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(P) - \ln(P(r_t)) = -g_m \frac{M_{atm}}{S_g T(r_t)} (r - r_t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{P}{P(r_t)} = \exp \left\{ -g_m \frac{M_{atm}(r - r_t)}{S_g T(r_t)} \right\}$$

Así:

$$P(r) = P(r_t) \cdot \exp \left\{ -g_m \frac{M_{atm}(r - r_t)}{S_g T(r_t)} \right\} \quad (2.14)$$

$$\text{onde } P(r_t) = P_0 \cdot \left(\frac{T(r_t)}{T_0} \right)^\beta + \frac{\beta}{\gamma - \beta} \left(1 - \frac{M_w}{M_d} \right) \cdot P_{w_0} \cdot \left[\left(\frac{T(r_t)}{T_0} \right)^\beta - \left(\frac{T(r_t)}{T_0} \right)^\gamma \right]$$

Distribución da humidade relativa

- Troposfera: como xa dixemos $RH(r) = RH_0$ (constante)
- Estratosfera: $RH(r) = 0$

Distribución do índice de refracción e a súa derivada

Podemos relacionar o índice de refracción cun concepto chamado refractividade, concepto que nos facilita ver cambios pequenos no índice de refracción da atmósfera xa que este está moi próximo a 1.

A refractividade pode expresarse en termos do índice de refracción no lugar de observación como:

$$N_0 = 10^6(n_0 - 1)$$

- Troposfera: Tendo en conta o concepto de refractividade podemos definir o índice de refracción na tropoesfera como:

$$n = 1 + 10^{-6}N(r)$$

sendo $N(r)$ a refractividade dependendo da distancia ao centro da terra do punto que esteamos a considerar (a cal toma unha expresión diferente segundo o tipo de atmósfera que consideremos), polo que

$$\frac{dn}{dr} = 10^{-6} \frac{dN(r)}{dr}$$

- Estratosfera: Para definir o índice de refracción na estratosfera temos que ter en conta a relación deste coa presión e a temperatura dada pola Ley de Gladstone e a Ley dos gases ideais:

$$n - 1 = \rho \cdot k = \frac{M_{atm} P}{S_g T} \cdot k$$

Recordando a distribución da temperatura e da presión na estratosfera, (2.9) e (2.14), obtemos:

$$n-1 = \frac{M_{atm} P(r_t) \cdot \exp\left\{-g_m \frac{M_{atm}(r-r_t)}{S_g T(r_t)}\right\}}{S_g T(r_t)} \cdot k = (n(r_t)-1) \cdot \exp\left\{-g_m \frac{M_{atm}(r-r_t)}{S_g T(r_t)}\right\}$$

polo que

$$\begin{aligned} n &= 1 + (n(r_t) - 1) \cdot \exp\left\{-g_m \frac{M_{atm}(r-r_t)}{S_g T(r_t)}\right\} \\ &= 1 + 10^{-6} N(r_t) \cdot \exp\left\{-g_m \frac{M_{atm}(r-r_t)}{S_g T(r_t)}\right\} \end{aligned}$$

de onde:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dr} &= -g_m \frac{M_{atm}(r-r_t)}{S_g T(r_t)} (n(r_t) - 1) \cdot \exp\left\{-g_m \frac{M_{atm}(r-r_t)}{S_g T(r_t)}\right\} \\ &= -g_m \frac{M_{atm}(r-r_t)}{S_g T(r_t)} 10^{-6} N(r_t) \cdot \exp\left\{-g_m \frac{M_{atm}(r-r_t)}{S_g T(r_t)}\right\} \end{aligned}$$

Temos así todas as relacións que precisamos.

O seguinte paso é calcular a integral que nos ocupa:

$$R = - \int_0^{z_0} \frac{r \frac{dn}{dr}}{n + r \frac{dn}{dr}} dI$$

Se asumimos o modelo simple que acabamos de describir, no que a atmósfera esta constituída por dúas capas, a troposfera e a estratosfera, entón existe unha discontinuidade en $\frac{dn}{dr}$ na tropopausa, polo que a refracción débese calcular en dúas partes; unha ao longo da troposfera e outra ao longo do resto da atmósfera.

Agora ben o cálculo da integral en cada capa da atmósfera faise por cuadratura usando a regra de Simpson con suma en pasos iguais en I .

A regra de Simpson: obtense ao interpolar en tres puntos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$ mediante un polinomio de grado 2, é dicir:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

sendo $P_2(x)$ o polinomio de grado 2; f_0 , f_1 , f_2 a función f avaliada en x_0 , x_1 e x_2 respectivamente.

A regra de Simpson composta: Sexa $f(x)$ con derivada cuarta continua en $[a, b]$, e sexa

a partición do intervalo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$, entón:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3}(f_0 + f_n) + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + \frac{4h}{3} \sum_{i=1}^m f_{2i-1} + E_n^s(f)$$

onde $f_i = f(x_i)$ e

$$\exists \tau \in [a, b] : E_n^s(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f'''(\tau) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\tau)$$

Unha vez aplicada a fórmula de Simpson, para comprobar a converxencia o que se fai e comparar o resultado da última iteración co anterior. Compróbase entón se estes dous valores están o suficientemente próximos, é dicir, se a diferenza en valor absoluto é menor que ϵ , sendo $\epsilon > 0$ fixado de antemán, ou se se chegou a iteración máxima, a cal se fixa con anterioridade. No segundo caso o método non converge, entón recalcúlamos r en cada paso usando o procedemento anterior (Newton-Raphson). Se pola contra cúmprese a condición do ϵ entón o método converge e o último resultado será o valor aproximado da refracción.

Capítulo 3

Método da función xeradora

En lugar de resolver unha integral coma no *Capítulo 2*, tamén se pode facer unha aproximación da refracción reducindo a expresión a unha forma analítica.

Para iso asumiremos un modelo atmosférico simple, chamado atmósfera isotérmica ou atmósfera exponencial. Neste caso a refractividade, concepto que introducimos no capítulo anterior, segue unha distribución exponencial dependente da altura:

$$N(h) = N_0 \exp\left(\frac{-(h - h_0)}{H}\right) \quad (3.1)$$

podéndose expresar tamén en función do índice de refracción, como xa vimos, do seguinte xeito:

$$N = 10^6(n - 1) \quad (3.2)$$

Denotaremos por N_0 a refractividade no lugar de observación e por H a altura efectiva da atmósfera, definida como:

$$H = \frac{S_g T}{M_{atm} g_m}$$

onde S_g é a constante universal de gas; M_{atm} é a masa molar da atmósfera; T a temperatura da atmósfera expresada en Kelvins e g_m é a constante de aceleración gravitacional.

Para obter unha relación entre a altura efectiva da atmósfera e a refractividade basta integrar, con respecto a altura h , a expresión (3.1). En efecto:

$$\int_{h_0}^{\infty} N(h) dh = \int_{h_0}^{\infty} N_0 e^{\frac{-(h-h_0)}{H}} dh = N_0 \cdot e^{\frac{h_0}{H}} \int_{h_0}^{\infty} e^{\frac{-h}{H}} dh = N_0 \cdot H$$

Así obtense a seguinte relación:

$$H = \frac{1}{N_0} \int_{h_0}^{\infty} N(h) dh \quad (3.3)$$

a cal nos permite calcular a altura efectiva en función da refractividade para calquera modelo atmosférico.

En 1972 Marini [15] propuxo que a corrección para o retardo debido a atmósfera podíase escribir como o produto do defecto cenital e unha función, a cal expresou como unha fracción continua empírica, é dicir, unha expresión da forma:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

onde a_0 é un número real non negativo, o resto dos a_i , con $i \in 1, \dots, n$, son estrictamente positivos e n denota a orden da fracción.

Ademáis, Marini, aplicou unha fracción continua similar á do retardo debido á atmósfera na fórmula para o cálculo da refracción astronómica, a cal veremos máis adiante.

Dado que o método da función xeradora foi usado en primeiro lugar para o estudo do retardo atmosférico faremos unha pequena introducción sobre este concepto e veremos a súa relación coa refracción astronómica.

3.1. Retardo refractivo

A propagación dunha sinal electromagnética entre dous puntos nun medio cumpre a **Ley de Fermat**, a cal establece que o traxecto seguido pola luz ao propagarse dun punto ao outro é tal que o tempo empregado en recorrela é un mínimo. É dicir, se L é o raio de luz, entón a distancia óptica σ , definida como:

$$\sigma = \int_L n dL$$

é un mínimo, sendo n o índice de refracción.

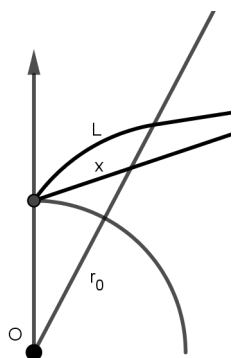


Figura 3.1: Distancia óptica

O retardo atmosférico, denotado como $\Delta\sigma$, defínese como a diferenza entre as distancias óptica, σ , e xeométrica, X , dun obxecto dende un lugar de observación.

O retardo pódese representar como unha integral vertical máis un termo de corrección tal como expresa H. Yan en [13]:

$$\Delta\sigma = \sigma - X = \int_L n dL - \int_X dX = \int_{h_0}^{h_a} \frac{n-1}{\cos z} dh + \delta\sigma$$

onde $\delta\sigma$ sóese chamar corrección de flexión de raios, orixinado pola diferenza de lonxitudes xeométricas entre o camiño real do sinal e o camiño en liña recta entre o observador e a fonte.

O retardo $\Delta\sigma$, ademais, pódese expresar matematicamente como:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_z \cdot m(z, P)$$

onde $\Delta\sigma_z$ é o defecto cenital definido como:

$$\Delta\sigma_z = \int_{h_0}^{\infty} (n-1) dh \quad (3.4)$$

e $m(z, P)$ é a función obtida por Marini, tal é como dixemos anteriormente. Veremos a continuación como obtela e que forma ten. A variable z denota a distancia cenital verdadeira e P denota un vector que inclúe varios factores meteorolóxicos e xeofísicos que son relevantes: presión, temperatura,...

O retardo debido a refracción producida pola atmósfera, $\Delta\sigma$, pódese aproximar, recordando a relación do índice de refracción coa refractividade (3.2) e usando unha aproximación ao longo da recta que conecta ao observador e á fonte da sinal L , denotada por x na Figura 3.1, como:

$$\Delta\sigma \approx 10^{-6} \int_x N(h) dx \quad (3.5)$$

Agora ben, se nos fixamos no triángulo da Figura 3.2 de vértices o centro da Terra O , o lugar de observación P e o punto A , podemos aplicarlle a **ley dos cosenos**.

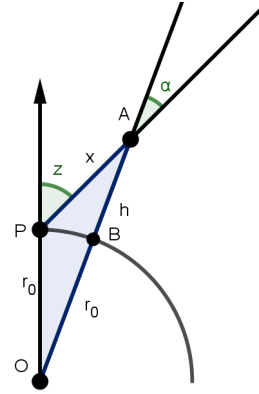


Figura 3.2: Triángulo distancia óptica

Esta ley dinos que se a , b e c son as lonxitudes dos lados dun triángulo e α , β e γ os ángulos opostos respectivamente a eses lados, tense que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Aplicandoa ao triángulo descrito antes obtense que:

$$(r_0 + h)^2 = r_0^2 + x^2 - 2r_0 x \cos(\pi - z) \quad (3.6)$$

sendo z a distancia cenital verdadeira, r_0 o radio da Terra, h a altura, dende a superficie da Terra, do punto A e x a lonxitude entre os puntos P e A .

Da relación (3.6), resolvendo a ecuación de segundo grado, obtemos que:

$$h = -r_0 + \sqrt{r_0^2 + x^2 + 2x r_0 \cos z} \Leftrightarrow \frac{h}{r_0} = -1 + \sqrt{1 + \frac{x^2}{r_0^2} + \frac{2x \cos z}{r_0}}$$

Aplicando o seguinte desenvolvemento en serie de orden 2:

$$\left(1 + \frac{x^2}{r_0^2} + \frac{2x \cos z}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{2x \cos z}{r_0}}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{2x \cos z}{r_0}\right)^2}{8}$$

obtense:

$$h \approx x \cos z + \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 z}{2r_0} \quad (3.7)$$

Ao estar traballando cunha atmósfera exponencial a expresión (3.5) pódese escribir como:

$$\Delta\sigma \approx 10^{-6} \int_0^\infty N_0 e^{-\frac{h}{H}} dx = 10^{-6} N_0 \int_0^\infty e^{-\frac{h}{H}} dx$$

Substituíndo o valor de h pola expresión (3.7) tense:

$$\Delta\sigma \approx 10^{-6} N_0 \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{-(x \cos z + \frac{x^2}{2r_0} \operatorname{sen}^2 z)}{H} \right\} dx$$

Completando cadrados no expoñente da exponencial obtemos:

$$-\left(\frac{x \cos z}{H} + \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 z}{2r_0 H} \right) = -\left(\frac{x \operatorname{sen} z}{\sqrt{2r_0 H}} + \frac{\cos z \sqrt{r_0}}{\sqrt{2H} \operatorname{sen} z} \right)^2 + \frac{\cos^2 z r_0}{2H \operatorname{sen}^2 z}$$

E facendo o seguinte cambio de variable: $y = \frac{x \operatorname{sen} z}{\sqrt{2r_0 H}} + \frac{\cos z \sqrt{r_0}}{\sqrt{2H} \operatorname{sen} z}$, obtense:

$$\Delta\sigma \approx 10^{-6} N_0 \int_{\sqrt{\frac{r_0}{2H}} \cot z}^\infty \exp \left\{ -y^2 + \frac{\cos^2 z r_0}{2H \operatorname{sen}^2 z} \right\} \frac{\sqrt{2r_0 H}}{\operatorname{sen} z} dy$$

e así finalmente podemos expresar o retardo refractivo como:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &\approx 10^{-6} N_0 \sqrt{2r_0 H} \frac{1}{\operatorname{sen} z} e^{(\frac{r_0}{2H}) \cot^2 z} \int_{\sqrt{\frac{r_0}{2H}} \cot z}^\infty e^{-y^2} dy = \\ &= 10^{-6} N_0 \sqrt{2r_0 H} \frac{1}{\operatorname{sen} z} e^{(\frac{r_0}{2H}) \cot^2 z} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erfc}(x) \left(\sqrt{\frac{r_0}{2H}} \cot z \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde a función do erro complementario $\operatorname{erfc}(x)$ está dada por:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2} dy$$

Da definición do defecto cenital e das ecuacións (3.2) e (3.4) obtense que:

$$\Delta\sigma_z = 10^{-6} N_0 H \quad (3.9)$$

Tendo esta relación en conta e fixándonos na ecuación (3.8) podemos seguir a idea de Marini e expresar o retardo refractivo como $\Delta\sigma = \Delta\sigma_z \cdot m(z, P)$ sendo:

$$\begin{aligned} m(z, P) &\approx \frac{1}{\operatorname{sen} z} \sqrt{\frac{2r_0}{H}} e^{\frac{r_0}{2H} \cot^2 z} \int_{\sqrt{\frac{r_0}{2H}} \cot z}^\infty e^{-y^2} dy = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} z} \sqrt{\frac{2r_0}{H}} e^{I^2} \int_I^\infty e^{-y^2} dy \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde o parámetro I , definido como o argumento cenital efectivo normlizado, ten a seguinte expresión:

$$I = \sqrt{\frac{r_0}{2H}} \cot z$$

A función do erro complementario, $\operatorname{erfc}(x)$, serve entón para obter a función xeradora do retardo refractivo:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_z \cdot m(z, P) = 10^{-6} N_0 H \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} z} \sqrt{\frac{2r_0}{H}} e^{I^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(I) \quad (3.11)$$

Para iso hai que considerar a expansión matemática desa función. A continuación veremos dous procedementos distintos.

Procedemento de axuste de Chebyshev

A primeira forma que veremos para obter a expansión da función do erro complementario está baseada no procedemento de axuste de Chebyshev.

Antes diso vamos a introducir os polinomios de Chebyshev e algunha das súas propiedades.

- O polinomio de Chebyshev de grado n denótase por $T_n(x)$ e ven dado pola seguinte fórmula:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Combinando isto con identidades trigonométricas podemos obter expresións explícitas para $T_n(x)$ con $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{T}_0(\mathbf{x}) = \cos 0 = 1; \quad \mathbf{T}_1(\mathbf{x}) = \cos(\arccos x) = x;$$

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{x}) = \cos(2 \arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \operatorname{sen}^2(\arccos x) = x^2 - 1 + \cos^2(\arccos x) = 2x^2 - 1; \quad \dots$$

De forma xeral, obtemos a seguinte relación de recorrencia de tres termos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n(\mathbf{x}) &= \cos(n \arccos x) = \cos((n-1)\arccos x + \arccos x) = \\ &= x \cdot \cos((n-1)\arccos x) - \operatorname{sen}((n-1)\arccos x) \cdot \operatorname{sen}(\arccos x) = \\ &= x \cdot T_{n-1}(x) - (x \cdot \operatorname{sen}((n-2)\arccos x) \cdot \operatorname{sen}(\arccos x) + (1-x^2) T_{n-2}(x)) = \\ &= x \cdot T_{n-1}(x) + x \cdot \cos((n-1)\arccos x) - x \cdot \cos((n-2)\arccos x) \cdot \cos(\arccos x) - (1-x^2) T_{n-2}(x) = \\ &= 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{aligned}$$

O polinomio $T_n(x)$ ten n ceros no intervalo $[-1, 1]$ e están localizados nos puntos:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k + \frac{1}{2})}{n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.12)$$

No mesmo intervalo hai $n+1$ extremos (máximos e mínimos):

$$x'_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, n$$

onde os polinomios toman o seguinte valor: $T_n(x'_k) = (-1)^k \forall k = 0, 1, \dots, n$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Esta é a propiedade que fai útil a estos polinomios á hora de aproximar funcións.

Propiedade de ortogonalidade discreta: Se x_k ($k = 0, \dots, m-1$) son os m ceros de $T_m(x)$ dados por (3.11), e $j, i < m$ entón $\sum_{k=0}^{m-1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \left(\frac{m}{2}(1 + \delta_{i0})\right) \delta_{ij}$,

sendo $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ a delta de Kronecker, tendose entón que:

$$\sum_{k=0}^{m-1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{m}{2} & i = j \neq 0 \\ m & i = j = 0 \end{cases}$$

O polinomio interpolador de grado n baseado nos nodos de Chebyshev (os ceros de $T_{n+1}(x)$ dados por (3.12)), que interpola $f(x)$ nestos $n+1$ puntos de $[-1, 1]$, pódese escribir como:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x)$$

sendo, $\forall j = 1, \dots, n$:

$$c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k) = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f \left[\cos \left(\frac{\pi(k + \frac{1}{2})}{n+1} \right) \right] \cos \left(\frac{\pi j(k + \frac{1}{2})}{n} \right)$$

$$e c_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_0(x_k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f \left[\cos \left(\frac{\pi(k + \frac{1}{2})}{n+1} \right) \right]$$

Entón a fórmula aproximada:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^n c_j T_j(x) \tag{3.13}$$

é exacta para x igual a os $n+1$ ceros de $T_{n+1}(x)$.

Para xeralizar esta definición a un intervalo arbitrario $[a, b]$ en lugar do intervalo $[-1, 1]$ basta facer o seguinte cambio de variable:

$$y = \frac{x - \frac{1}{2}(b+a)}{\frac{1}{2}(b-a)}$$

e aproximar $f(x)$ por un polinomio de Chebyshev en y .

Agora ben, unha vez obtidos os coeficientes para aproximar unha función nun certo rango, entón é fácil atopar os coeficientes de Chebyshev para a derivada ou a integral desa función:

- Se c_i $i = 0, \dots, m - 1$ son os coeficientes que aproximan a función f na ecuación (3.13) entón:

$$C_i = \frac{c_{i-1} - c_{i+1}}{2i} \quad (i > 0)$$

son os coeficientes que aproximan a integral indefinida de f , tomando ademais como C_0 unha constante arbitraria de integración e

$$c'_{i-1} = c'_{i+1} + 2i \cdot c_i \quad (i = m - 1, m - 2, \dots, 1)$$

os coeficientes que aproximan a derivada de f tomando como $c'_m = c'_{m-1} = 0$.

Segundo o descrito en [6] pódese aproximar a función $erfc(x)$ da seguinte forma:

$$erfc(x) \approx t \exp[-x^2 + P(t)] \quad (z > 0)$$

onde:

$$t = \frac{2}{2+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x}$$

e $P(t)$ é un polinomio para $0 \leq t \leq 1$ o cal pode ser atopado usando o método de Chebyshev.

Da definición do erro complementario e desta aproximación tense que:

$$\int_I^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t \exp\{-I^2 + P(t)\}$$

Sabendo isto podemos substituír esta expresión na ecuación (3.10) e obter a seguinte expresión para a función $m(z, P)$:

$$m(z, P) = \frac{\sqrt{\pi}}{\text{sen } z} t \sqrt{\frac{r_0}{2H}} e^{P(t)}$$

Fracción continua

A segunda forma pode ser derivada da expresión en fracción continua da función Γ incompleta.

A función gamma incompleta está definida por:

$$P(a, x) = \frac{\gamma(a, x)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt \quad (a > 0)$$

sendo $\Gamma(a)$ a función gamma de Euler. Tense que $P(a, 0) = 0$ e $P(a, \infty) = 1$, ademáis $P(a, x)$ é unha función monótona.

A parte da definición de $\gamma(a, x)$ podemos dar a seguinte expresión en forma de serie:

$$\gamma(a, x) = e^{-x} x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1+n)} x^{-n}$$

tendo en conta que non fai falla calcular para cada n unha nova expresión de $\Gamma(a+1+n)$, basta notar que se cumpre que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

A función complementaria de $P(a, x)$ denomínase tamén función gamma incompleta, e seguindo a notación empregada en [6], defínese como:

$$Q(a, x) = 1 - P(a, x) = \frac{\Gamma(a, x)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad (a > 0)$$

Tense que $Q(a, 0) = 1$ e $Q(a, \infty) = 0$.

Vexamos agora que se ten que $erfc(x) = Q(\frac{1}{2}, x^2)$. En efecto:

$$Q(\frac{1}{2}, x^2) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}, x^2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{x^2}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt$$

Facendo agora o seguinte cambio de variable $t = y^2$ téndose entón que $dt = 2y dy$, obtemos:

$$Q(\frac{1}{2}, x^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} y^{-1} 2y dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy = erfc(x)$$

Por outra banda sabemos que a función $\Gamma(a, x)$ pódese expresar en forma de fracción continua como segue:

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^a \frac{1}{x + \frac{1-a}{1 + \frac{1}{x + \frac{2-a}{1 + \frac{2}{x + \dots}}}}}$$

Polo que é posible escribir:

$$erfc(x) = Q(\frac{1}{2}, x^2) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}, x^2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} x \frac{1}{x^2 + \frac{0,5}{1 + \frac{1}{x^2 + \frac{1,5}{1 + \frac{2}{x^2 + \dots}}}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \frac{1}{x + \frac{0,5}{1 + \frac{1}{x + \frac{1,5}{1 + \frac{2}{x + \dots}}}}}$$

Desta relación e da definición da función do erro complementario obtense que:

$$\int_x^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} e^{-x^2} \frac{1}{x + \frac{0,5}{x + \frac{1}{x + \frac{1,5}{x + \frac{2}{x + \dots}}}}}$$

Aplicando isto, finalmente, na ecuación (3.10) obtemos:

$$m(z, P) = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \sqrt{\frac{r_0}{2H}} \frac{1}{I + \frac{0,5}{I + \frac{1,5}{I + \frac{2}{I + \dots}}}} = \frac{1}{\cos z + \frac{0,5}{I^2 \sec z + \frac{1}{\cos z + \frac{1,5}{I^2 \sec z + \frac{2}{\cos z + \dots}}}}}$$

Se axustamos correctamente os coeficientes, podemos reducir a fracción continua e expresala como:

$$m(z, P) = \frac{1}{\cos z + \frac{D_1}{I^2 \sec z + \frac{D_2}{\cos z + \frac{D_3}{I^2 \sec z + D_4}}}}$$

Segundo H. Yan e J. Ping [15], despois de ter en conta as condicións meteorolóxicas terrestres e as constantes xeofísicas, por un proceso de axuste de mínimos cadrados, podemos estimar os parámetros D_i con $i = 1, \dots, 4$ da ecuación anterior e expresalos en función de: P_0 a presión total na superficie terrestre expresada en milibares; e_0 o presión parcial debida ao vapor en milibares; T_0 a temperatura na superficie expresada en graos Celsius; e β a tasa de lapso da temperatura en $K \cdot km^{-1}$ (onde K denota graos Kelvin).

Ambas expresións para $m(z, P)$ soen ser utilizadas para describir o retardo refractivo nunha atmósfera simétrica arbitraria e os coeficientes de ambas pódense obter usando o método de mínimos cadrados. Sen embargo hai certas dificultades na primeira delas para construír un conxunto de coeficientes de Chebyshev de expansión parametrizados meteorolóxicamente. Estas dificultades pódense solucionar utilizando a expresión da fracción continua xa que, como acabamos de dicir, esos parámetros obteñense a partir das condicións meteorolóxicas.

3.2. Refracción astronómica

Pasaremos agora a describir a aplicación do método da función xeradora na investigación da refracción astronómica.

Tendo en conta a relación de N co índice de refracción e despexando n , temos que: $n = \frac{N}{10^6} + 1$. Diferenciando isto respecto da altura h obtemos:

$$\frac{dn}{dh} = \frac{1}{10^6} \cdot \frac{dN}{dh} = 10^{-6} N_0 \exp\left(\frac{-(h+h_0)}{H}\right) \cdot \left(\frac{-1}{H}\right) = -10^{-6} \cdot \frac{N(h)}{H}$$

Podemos reescribir esta expresión como: $dn = -10^{-6} \cdot \frac{N(h)}{H} dh$.

Se temos en conta a integral obtida no capítulo anterior para o cálculo da refracción, a cal establecía que:

$$R = \int_1^{n_0} \frac{\tan z}{n} dn$$

e substituíndo agora dn pola expresión que acabamos de obter:

$$R = \int_1^{n_0} \frac{\tan z}{n} (-10^{-6}) \cdot \frac{N(h)}{H} dh$$

dado que se $n = 1 \Rightarrow h = \infty$ e $n = n_0 \Rightarrow h = h_0$ tense que:

$$R = \frac{10^{-6}}{H} \int_{h_0}^{\infty} \frac{\sen z \cdot N(h)}{\cos z \cdot n} dh$$

Como unha aproximación xeral, se poñemos $n = 1$, sacamos o $\sen z$ fóra da integral como $\sen z_0$ temos:

$$R \approx 10^{-6} \frac{\sen z_0}{H} \int_{h_0}^{\infty} \frac{N}{\cos z} dh \quad (3.14)$$

obtendo así unha relación aproximada entre a refracción astronómica e o retardo refractivo, xa que se comparamos as ecuacións (3.9) e (3.14) e considerando que a función $m(z, P)$ de Marini pódese expresar alternativamente como:

$$m(z, P) = \frac{1}{\cos z} I \sqrt{\pi} e^{I^2} \operatorname{erfc}(I)$$

tense que:

$$R \approx \sen z_0 \frac{\Delta \sigma_z}{H} m^*(z, P) = 10^{-6} N_0 \sen z_0 m^*(z, P)$$

onde $m^*(z, P)$ denota a función de Marini axustada para a refracción.

Para obter este axuste consideramos de novo a expansión en fracción continua para a función Γ incompleta asociada coa función do erro complementario obtendo, dacordo co exposto en [13]:

$$m^*(z, P) = \frac{1}{\cos z + \frac{A_1}{I^2 \sec z + \frac{A_2}{\cos z + \frac{13,24969}{I^2 \sec z + 173,4233}}}}$$

Os parámetros meteorolóxicos A_1 e A_2 calcúlanse aplicando o método de mínimos cadrados á integral obtida no capítulo anterior:

$$R = \int_1^{n_0} \frac{\tan z}{n} dn$$

ao longo de camiños de sinais con diferentes condicións meteorolóxicas terrestres a diversas elevacións. Para radio frecuencias estes coeficientes poden escribirse, según H. Yan (1998) [13], en función dos parámetros: T_0 , temperatura expresada en graos Celsius; P_0 , a presión na superficie da Terra expresada en mPa; e e_0 o vapor parcial en mPa. Tómase como modelo atmosférico un formado por dúas capas separadas pola tropopausa: a troposfera cunha tasa de lapso de temperatura constante β cerca do chan, e unha estratosfera isotérmica.

Capítulo 4

Consecuencias da refracción

A refracción astronómica afecta tanto á posición como á forma que observamos dos astros. Veremos neste capítulo como corrixir estes erros nas observacións facendo un estudo particular no caso dos astros situados no horizonte, xa que, tal e como fomos vendo ao longo dos tres primeiros capítulos, a distancias cenitais próximas a 90 graos, este fenómeno é moi alto e moi variable. Antes diso faremos unha pequena introducción das coordenadas terrestres para situar o lugar de observación, e das coordenadas celestes que se ven afectadas pola refracción astronómica.

4.1. Sistema de coordenadas

Como xa dixemos, distinguiremos dous tipos: o sistema de coordenadas xeográficas e os sistemas de coordenadas celestes. Dentro dos sistemas celestes encóntranse o sistema de coordenadas horizontais, o de ecuatorias horarias, o de ecuatorias absolutas, o de eclípticas e o de galácticas. Neste traballo só introduciremos aqueles que se ven afectados polo efecto da refracción, é dicir, o de horizontais, o de ecuatorias horarias e o de ecuatorias absolutas.

Coordenadas xeográficas

O sistema de coordenadas xeográficas é un sistema para referenciar calquera sitio da superficie terrestre, e para iso defínense dúas coordenadas, latitude e lonxitude:¹

Latitude xeográfica dun lugar. É o ángulo medido ao longo do meridiano do lugar (véxase Definición A .13) entre o plano do ecuador e a vertical do lugar. Toma valores entre 0 e 90 graos, mídese positivamente no hemisferio norte e negativamente no sur, e

¹Consideraremos que a Terra é un elipsoide por ser este o modelo que mellor se axusta a súa forma.

representábase pola letra ϕ .

Lonxitude xeográfica dun lugar. É o ángulo medido no plano do ecuador, entre o meridiano de dito lugar e o meridiano de Greenwich (ver Definición A .13) e representábase coa letra λ . Toma valores entre 0 e 180 graos e mídese positivamente cara ao este e negativamente cara ao oeste do meridiano de Greenwich.

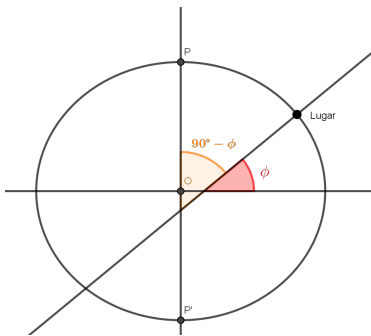


Figura 4.1: Latitude xeográfica

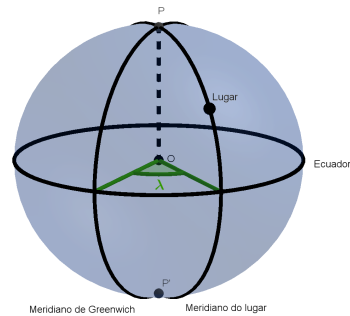


Figura 4.2: Lonxitude xeográfica

Coordenadas horizontais

O sistema de coordenadas horizontais baséase nas posicións dos astros que ve un observador dependendo do lugar no que se atope, é dicir, son coordenadas locais, e ademais dependen do movemento diurno. Está formado por dúas coordenadas: altura e acimut.

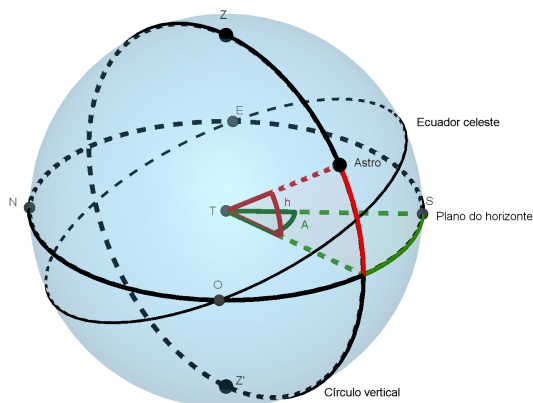


Figura 4.3: Coordenadas Horizontais

Altura. É o ángulo, medido sobre o círculo vertical (ver Definición A .5), dende o plano horizontal ata o astro, é dicir, o ángulo que forma a visual dirixida ao astro co horizonte. Toma valores entre -90° e 90° graos, medíndose positivo cara ó cenit e negativo cara ó nadir. Sóese denotar pola letra h e o seu complementario é a distancia cenital.

Azimut. É o ángulo diedro que forma o meridiano superior do lugar có círculo vertical que pasa polo astro. Mídese sobre o horizonte en sentido dextróxiro, comenzando no sur, e toma valores entre 0 e 360 grados. Denótase habitualmente por A .

Coordenadas ecuatoriais horarias

Este sistema de coordenadas, ao igual que o anterior, depende do lugar de observación e do movemento diurno. As coordenadas deste sistema son a declinación e o ángulo horario.

Declinación. É o ángulo que forma o ecuador celeste e o astro. Toma valores entre -90 e 90 graos, medíndose en positivo para astros entre o ecuador e o polo norte e en negativo para o resto. Denótase coa letra δ .

Ángulo horario. É o ángulo diedro que forma o meridiano celeste do observador e o círculo horario (véxase Definición A .4) que pasa polo astro. Mídese en sentido *NOSE*, toma valores entre 0 e 24 horas, polo que se mide en horas, minutos e segundos de tempo, e denótase por H ².

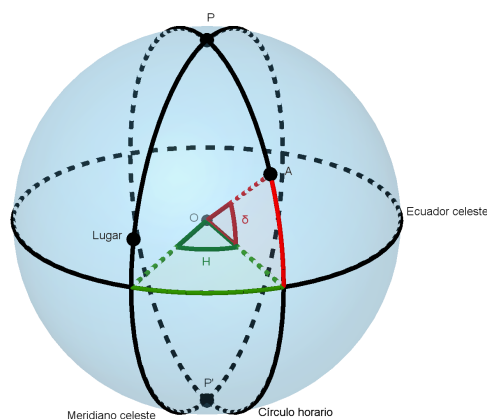


Figura 4.4: Coordenadas Ecuatoriais Horarias

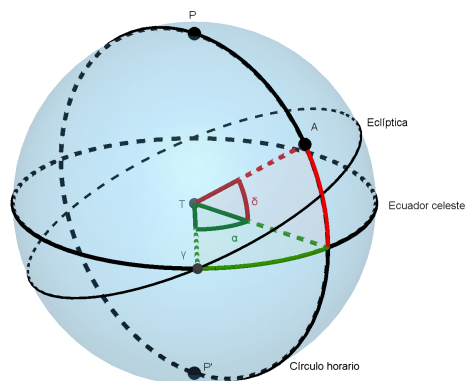
Coordenadas ecuatoriais absolutas

O sistema de coordenadas ecuatoriais absolutas básase na posición da Terra respecto aos astros, por iso, estas coordenadas non dependen do lugar de observación. As coordenadas que o conforman son a declinación, definida igual que no sistema anterior, e a ascensión

²Para cambiar de horas, minutos e segundos de tempo a grados, minutos e segundos de arco basta ter en conta as seguintes equivalencias:

$$24^h = 360^\circ; 1^h = 15^\circ; 1^{min} = 15'; 1^s = 15''$$

recta. Son o equivalente á latitude e á lonxitude xeográficas.



Ascensión recta. É o ángulo que se forma entre o punto aries (ver Definición A .15) e a intersección do ecuador celeste co círculo horario de dito astro. Mídese en sentido levóxiro, toma valores entre 0 e 24 horas e denótase por α .

Figura 4.5: Coordenadas Ecuatoriais Absolutas

4.2. Efecto da refracción nas coordenadas

Unha vez feita esta pequena introducción vexamos a influencia que ten a refracción nelas. Do exposto nos primeiros capítulos pódese deducir que a refracción astronómica altera as coordenadas horizontais e ecuatoriais (horarias e absolutas) dunha forma non enteiramente predecible e que aumenta rapidamente ao incrementar a distancia cenital. Agora ben, na práctica, afecta maioritariamente as alturas e declinacións observadas, incrementándoas, e case nada aos acimuts. Dada a relación do ángulo horario coa declinación e a latitude do lugar, así coma a da ascensión recta co ángulo horario, ambas coordenadas vense tamén afectadas na observación. Veremos nesta sección o efecto da refracción na distancia cenital, no ángulo horario e na ascensión recta dun astro supoñendo que non se modifica o seu acimut, guiándonos polo descrito por Samrt en [11].

Aínda que as variacións por refracción nestas coordenadas son moi pequenas, e polo tanto, como primeira aproximación, poderíamos empregar a formulación diferencial da trigonometría esférica, posto que non sabemos como de pequenas son, como xa dixemos no horizonte pode chegar a valores relativamente grandes, o que faremos será utilizar a formulación da trigonometría esférica para o caso xeral.

Consideremos un astro situado nun punto X na esfera celeste. Debido ao efecto da refracción astronómica vemolo desprazado a un punto X' no seu círculo vertical, por supoñer que non se modifica o seu azimut. Se trazamos un paralelo celeste pasando por X' , este, corta ao círculo horario do astro en Y (ver Figura 4.6).

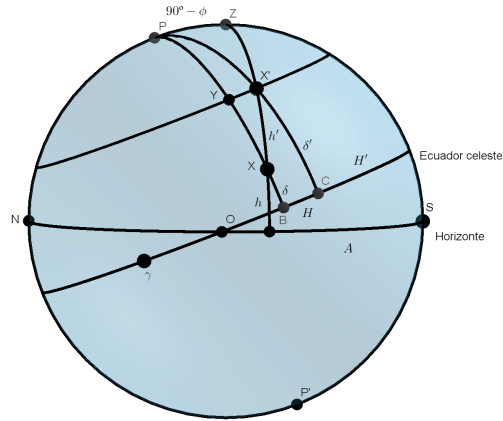


Figura 4.6: Consecuencias da refracción

Tendo en conta as definicións das coordenadas que introducimos na sección anterior temos as seguintes equivalencias: $PX = 90^\circ - \delta$, $\widehat{ZPX} = H$, $ZX = 90^\circ - h = z$, $\widehat{XZS} = A$ e $PZ = 90^\circ - \phi$. Podemos escribir algo análogo para as coordenadas aparentes do astro: $PX' = PY = 90^\circ - \delta'$, $\widehat{ZPX'} = H'$, $ZX' = 90^\circ - h' = z'$ e $\widehat{X'ZS} = A = 180^\circ - \widehat{PZX'}$. Ademais tamén se ten que $XY = \delta' - \delta$ e $\widehat{YPX'} = H - H'$. Agora ben, é claro que a diferenza entre as distancias cenitais aparente e real é precisamente XX' polo que podemos escribir $XX' = z - z' = R$, sendo R a refracción astronómica calculada seguindo algunha das fórmulas obtidas nos primeiros capítulos.

Vexamos entón como obter a diferenza entre as coordenadas reais e as aparentes que provoca a refracción.

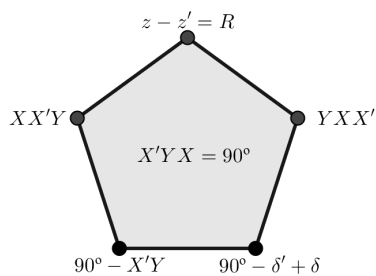


Figura 4.7: Pentágono de Neper

Primeiro fixémonos no triángulo de vértices Y , X' e X . Por ser $\sphericalangle X'YX$ o ángulo que forman o círculo horario do astro e un paralelo celeste, este é un ángulo recto e podemos aplicarlle a regra do pentágono de Neper, a cal se pode consultar en [11], páxinas 14 – 15, salvo que representada nunha circunferencia.

$$\operatorname{sen}(\delta' - \delta) = \frac{\operatorname{sen} R \cdot \operatorname{sen} \widehat{PX'Z}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 R \cdot \operatorname{sen}^2 \widehat{PX'Z}}} \cdot \cot \widehat{PX'Z} \quad (4.1)$$

$$\operatorname{sen}(H - H') = \frac{\operatorname{sen} R \cdot \operatorname{sen} \widehat{PX'Z}}{\cos \delta'} = \operatorname{sen}(\alpha' - \alpha) \quad (4.2)$$

Para calcular o seu valor bastará aplicar a seguinte fórmula de Bessel³, ao triángulo de vértices P , Z e X' :

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos a \quad (4.3)$$

tendo, polo tanto, que:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{PX'Z}) &= -\cos(180^\circ - A) \cdot \cos H' + \operatorname{sen}(180^\circ - A) \cdot \operatorname{sen} H' \cdot \cos(90^\circ - \phi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(\widehat{PX'Z}) = \cos A \cdot \cos H' + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} H' \cdot \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (4.4)$$

Unha vez calculado este valor xa estamos en condicións de calcular as coordenadas reais do astro e obter así o efecto da refracción nelas.

Tomando a fórmula máis simple que obtivemos para a refracción, a do *Capítulo 1*, que establecía que $R = 0,00029255 \cdot \tan z'$, sendo z' a distancia cenital observada, é dicir, $ZX' = z'$, por ser a única que non depende de condicións meteorolóxicas nin do lugar de observación, e polo tanto coa que podemos conseguir maior xeralidade para ver o cambio de coordenadas en astros a distancias cenitais pequenas, e, aplicándoa ás relacións anteriores, obtense que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\delta' - \delta) &= \frac{\operatorname{sen}(0,00029255 \cdot \tan z') \cdot \operatorname{sen} \widehat{PX'Z}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(0,00029255 \cdot \tan z') \cdot \operatorname{sen}^2 \widehat{PX'Z}}} \cdot \cot \widehat{PX'Z} \\ \operatorname{sen}(H - H') &= \frac{\operatorname{sen}(0,00029255 \cdot \tan z') \cdot \operatorname{sen} \widehat{PX'Z}}{\cos \delta'} = \operatorname{sen}(\alpha' - \alpha) \end{aligned}$$

³Pódense consultar todas as fórmulas de Bessel en [11] (páxinas 6 – 14)

Exemplo

O 21 de abril de 2019 tomei a fotografía da Figura 4.10 da posta do Sol ás 21 : 22 horas de tempo oficial. Esa imaxe foi tomada no Monte Coirego, no concello de Cerdedo-Cotobade en Pontevedra, sendo a latitude do lugar $\phi = +42,4953^\circ$, e a lonxitude $\lambda = -8,4582^\circ$. Para tomar esta fotografía empreguei unha cámara Canon modelo EOS 1200D cun obxectivo tamén Canon modelo EFS 18-55 mm, e non utilicei ningún filtro.

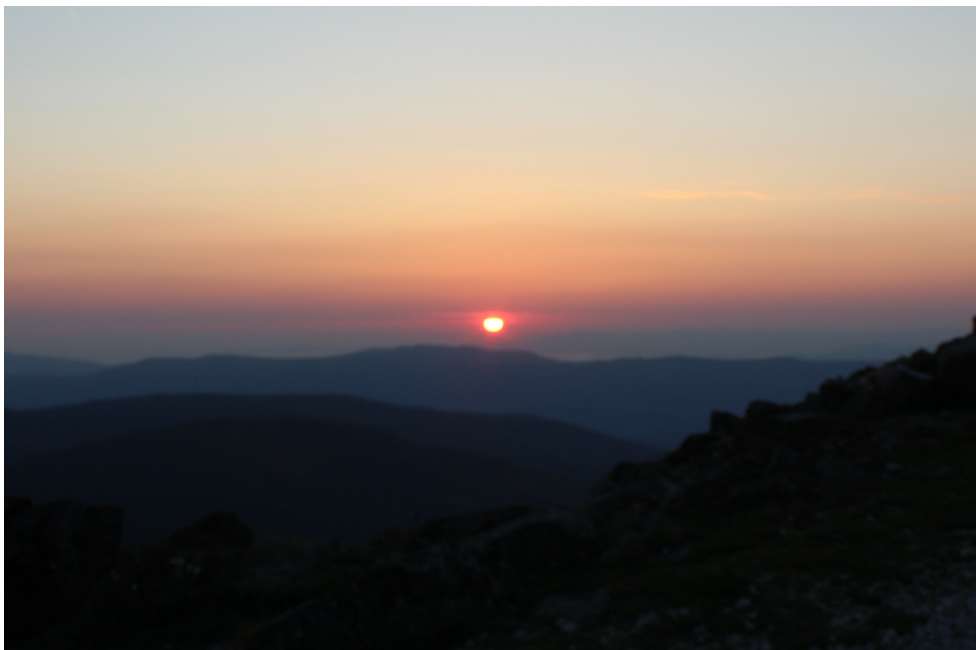


Figura 4.10: Posta do sol

O lugar encóntrase a 740 metros sobre o nivel do mar, a temperatura nese momento era de $19^\circ C$ e a presión de 1010 hPa. Pódese ver na Figura 4.11 as alturas dos montes que se ven na fotografía, así como a dirección na que foi tomada o foto. A pesares de que na fotografía non se aprecia ben, a altitude do horizonte é de 0° , é dicir, a nivel do mar, feito que se marca na ampliación da fotografía na Figura 4.16 e que se pode observar mellor na Figura 4.11. Cabe destacar que se isto non fose así, é dicir, o horizonte visible non coincidira có horizonte real, isto é, o nivel do mar, teríamos que telo en conta tal e como se indica no artigo [9].

Posto que non se dispoñía do material necesario para a determinación das coordenadas

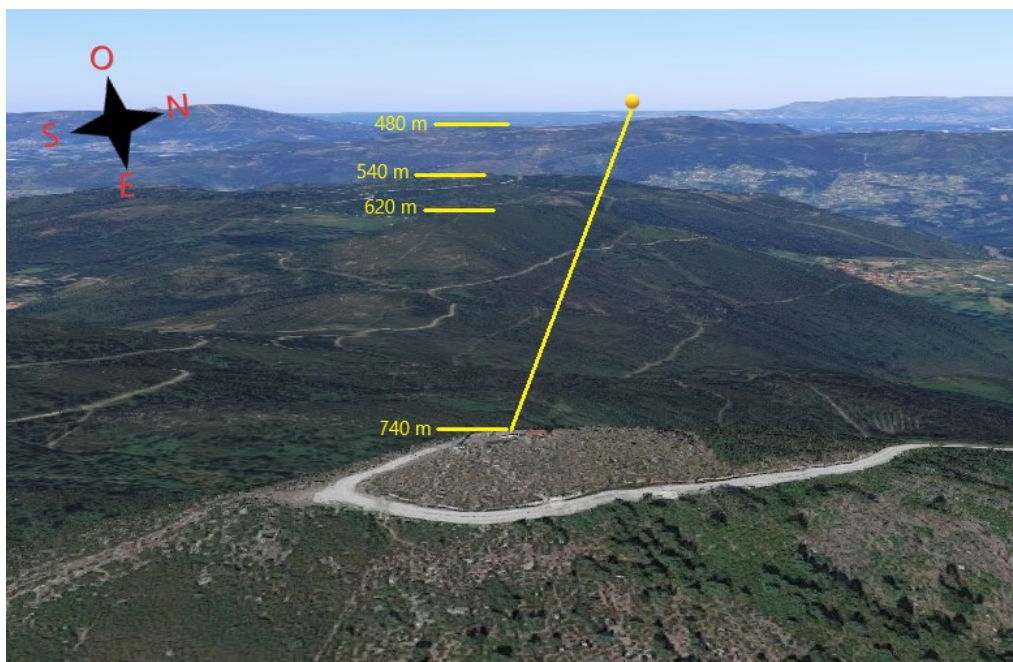


Figura 4.11: Mapa

aparentes do Sol nese instante o que se fará será calculalas a partir das coordenadas reais e do valor tabulado da refracción.

Tomaremos como coordenadas ecuatoriais absolutas reais do astro as proporcionadas pola aplicación "Heavens Above"(ver apéndice C), é dicir: $\delta = 11^\circ 52' 10''$ e $\alpha = 1^h 56^m 1^s$. Para o acimut hai que ter en conta que a aplicación mídeo dende o norte mentres que nós o definimos dende o sur, polo tanto, $A = 287,1^\circ - 180^\circ = 107,1^\circ$, e suporemos, igual que na sección anterior, que este non se modifica polo efecto da refracción.

Como valor da refracción, tomaremos o dado pola táboa da Figura 17 do apéndice B. A altura observada do astro é $h' = 0^\circ$ polo que o valor da refracción para $P = 1000$ hPa e $T = 10^\circ C$ é $33' 48''$. Facendo as tranformacións que se indican no apéndice B obtemos que o valor para a refracción no noso caso, $P = 1010$ hPa e $T = 19^\circ C$, é $R_h = 33' 5,15''$.

Posto que descoñecemos as coordenadas aparentes do astro, como xa dixemos, non podemos empregar directamente as fórmulas vistas na sección anterior para calcular o efecto da refracción nas coordenadas. Vexamos entón como proceder neste caso.

Temos un astro, X , na súa posta, polo que a distancia cenital é, seguindo o dito anteriormente, $z = 90^\circ + R_h = ZX$, o cal vemos no horizonte, logo, a distancia cenital aparente é $ZX' = 90^\circ$.

Como é habitual denotamos por H o ángulo horario do astro polo que se ten $\widehat{ZPX} = H$, e por H' o ángulo horario aparente co cal $\widehat{ZPX'} = H'$. Tamén $PX = 90^\circ - \delta$ sendo δ a declinación do astro e $PX' = 90^\circ - \delta'$ con δ' a declinación aparente. Por outra banda o acimut é $A = \widehat{XZS} = 180^\circ - \widehat{PZX}$, o cal asumimos que non varía, e ϕ é a latitude do lugar de observación, tendo así que $PZ = 90^\circ - \phi$.

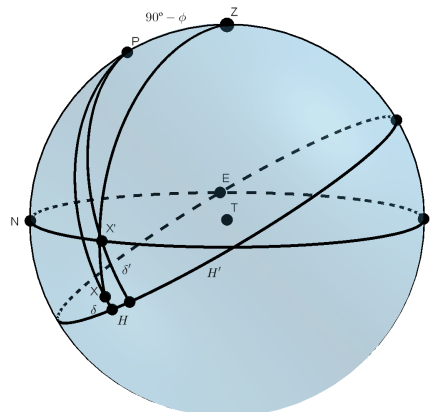


Figura 4.12: Efectos na posta do Sol

Aplicando a fórmula de Bessel análoga á (4.3), $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$, ao triángulo de vértices P , Z e X' podemos escribir:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta') &= \cos z' \cdot \cos(90^\circ - \phi) + \sin z' \cdot \sin(90^\circ - \phi) \cdot \cos(180^\circ - A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \delta' = -\cos \phi \cdot \cos A \end{aligned}$$

e tamén:

$$\begin{aligned} \cos z' &= \cos(90^\circ - \delta') \cdot \cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - \delta') \cdot \sin(90^\circ - \phi) \cdot \cos H' \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = \sin \delta' \cdot \sin \phi + \cos \delta' \cdot \cos \phi \cdot \cos H' \Rightarrow \cos H' = -\tan \delta' \cdot \tan \phi \end{aligned}$$

Empregando estas dúas fórmulas no noso caso particular:

$$\sin \delta' = -\cos 42,4953^\circ \cdot \cos 107,1^\circ \Rightarrow \delta' = 12^\circ 31' 17,32''$$

$$\cos H' = -\tan 12^\circ 31' 17,32'' \cdot \tan 42,4953^\circ \Rightarrow H' = 101^\circ 44' 24,37''$$

Agora ben, como xa coñecemos as coordenadas aparentes do astro podemos aplicar a fórmula da sección anterior (4.2), calculando o ángulo $\widehat{PX'Z}$ coa ecuación (4.4), e obter así a diferenza entre o ángulo horario real e o aparente (a cal coincide coa diferenza das ascensións rectas) no solpor do 21 de abril:

$$\Delta H = H - H' = \arcsen \left(\frac{\sin 33' 5,15'' \cdot \sin 46^\circ 12' 44,11''}{\cos 12^\circ 31' 17,32''} \right) \Rightarrow \Delta H = 24' 28'' = 1^m 37,87^s$$

Así temos que este día o solpor, visto dende o Monte Coirego, retrasouse $1^m 37,87^s$ debido ao efecto da refracción astronómica.

O efecto da refracción na forma do Sol

A refracción atmosférica, como xa dixemos, aumenta rápidamente canto maior é a distancia cenital, sendo o seu máximo a refracción horizontal, R_h . Ademais, pola diferenza entre o valor da refracción que sofre a parte superior e o da que sofre a inferior cando este está próximo ao horizonte, a súa forma vese achatada verticalmente.

Nunha primeira aproximación, se tomamos como diámetro angular (ver Definición .7) do Sol o valor medio deste, é dicir, $d_m = 32'$, no caso ideal no que o Sol fose perfectamente esférico e non existise refracción, o seu diámetro vertical tería a mesma dimensión, pero pode verse na fotografía do exemplo anterior que isto non é así. A causa é que, como se pode observar na táboa do apéndice B, a diferenza entre a refracción que experimentan a parte superior e a inferior do Sol ronda os $6'$, dependendo das condicións meteorolóxicas da observación ⁴, un valor moi alto para tan pouca variación na altura. Así, a luz que provén da parte inferior do Sol vese máis desviada que a que provén da superior, provocando o aparente achatamento do astro.

Vexamos o que ocorre no exemplo anterior.

Exemplo

O diámetro aparente vertical do Sol varía segundo o lugar e as condicións meteorolóxicas da observación polo efecto da refracción. Pola imposibilidade de obtelo no momento da observación, debido a falta dos medios necesarios, o que faremos será calcular unha aproximación a partir da fotografía e do diámetro aparente do Sol en ausencia de refracción, que é precisamente o seu diámetro angular.

Se consideramos a Terra como unha esfera perfecta, a distancia en liña recta dende unha altura h , onde se atopa o observador, ao horizonte, está dada por $d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}$, como se mostra na Figura 4.13, sendo R o radio da Terra para o cal tomaremos o seguinte valor: $R = 6378,1366$ km ⁵. No noso caso, posto que a altura dende a cal se tomou a fotografía é $h = 740$ metros sobre o nivel do mar, tense que $d = 97160,6$ metros.

É claro que, segundo a Figura 4.14, o diámetro angular do Sol é $\varepsilon = 2 \cdot \arcsen\left(\frac{r_s}{D}\right)$, onde

⁴Por exemplo, para o caso no que a presión é $P = 1000$ hPa e a temperatura $T = 10^\circ C$, as condicións para as que foron calculados os valores da táboa da Figura 17, tense que $R_h = 33'48''$ e $R_{32'} = 27'51,4''$, polo que a diferenza é de $5'56,6''$.

⁵Dato tomado do “Anuario del Real Observatorio 2018” [8].

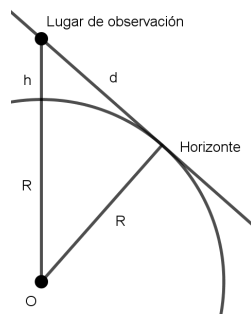


Figura 4.13: Distancia ao horizonte

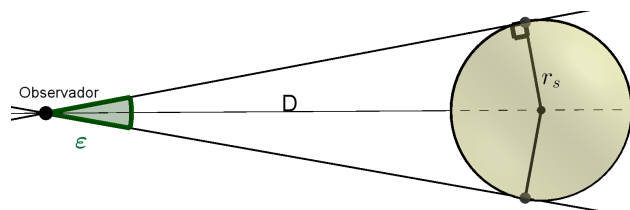


Figura 4.14: Diámetro angular

r_s é o semidiámetro real do Sol e D é a distancia dende o punto dende o cal se observa ao centro do Sol, polo que $D = d + d_{S-T}$ con d_{S-T} a distancia do Sol a Terra. Tomaremos como semidiámetro do Sol $r_s = 695660$ km ⁶ e como distancia do Sol á Terra a proporcionada pola aplicación "Heavens Above" para ese día, é dicir, $d_{S-T} = 1,0049251$ u.a. = 150334655173 metros, posto que 1 u.a. = 149597870700 metros. Polo tanto $D = 150334752333,6$ metros é o diámetro angular do Sol visto dende o Monte Coirego ese día é:

$$\varepsilon = 2 \cdot \arcsen\left(\frac{r_s}{D}\right) = 0,5302636098^\circ = 31' 48,95''$$

Por outra banda, para obter a Figura 4.16 aplicouse un aumento do 25% a fotografía orixinal da Figura 4.10. Ademais, superpúxose unha cuadrícula formada por unha matriz de 25×20 elementos iguais, e representouse o horizonte cunha liña negra.

Agora ben, se nos fixamos na Figura 4.16 pódese comprobar que o diámetro vertical aparente do Sol é aproximadamente $d_v = \frac{3}{4} \cdot \varepsilon = 23' 51,71''$, pois seguindo a cuadrícula marcada na imaxe o diámetro horizontal ocupa aproximadamente 8 elementos, mentres que o vertical ocupa 6. Polo tanto d_v é $7' 57,24''$ máis pequeno que o diámetro angular.

Dacordo co que acabamos de calcular, a altura observada da parte superior do Sol é aproximadamente $h'_{sup} = 23' 51,71''$, e segundo a táboa da Figura 17 do apéndice B, despois de facer as oportunas correccións para a presión e temperatura do instante da foto, tense que $R_{sup} = 29' 12,61''$. Recordemos que o valor para a refracción para a parte inferior do Sol é, segundo o calculado no exemplo anterior, $R_h = 33' 5,15''$, e así, a diferenza entre a refracción que sofren os extremos do Sol é de $3' 52,54''$.

Podemos concluír entón que o día 21 de abril de 2019, dende o Monte Coirego, o Sol

⁶Dato tomado do "Anuario del Real Observatorio 2018" [8].

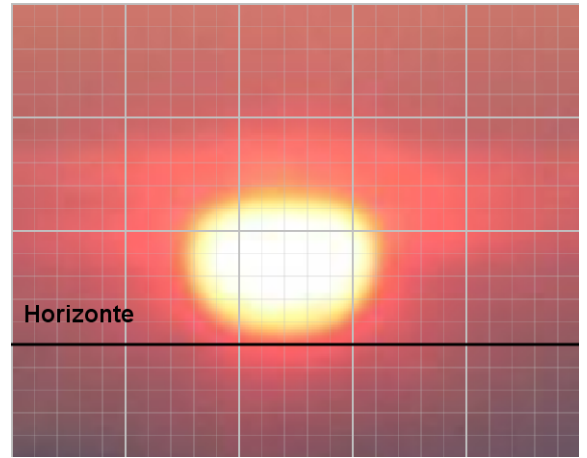
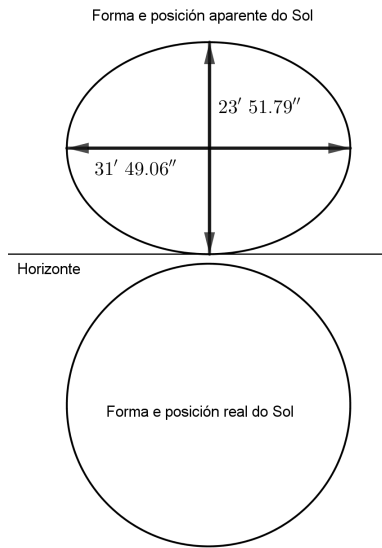


Figura 4.16: Fotografía ampliada

Figura 4.15: Representación aproximada

observouse $7' 57,24''$ máis pequeno verticalmente do que en realidade se vería se non existise a refracción, debido a que a diferenza entre o efecto desta na parte superior e inferior do Sol era de $3' 52,54''$.

Como observación interesante, dado que a $z_{sup} = 90^\circ 5' 20,9''$ é maior de 90° o Sol encontrábase totalmente baixo o horizonte no momento en que se tomou a fotografía, sen embargo víase completamente sobre el. Isto débese a que a refracción no horizonte neste caso, aínda que tamén de forma xeral, é maior que o diámetro aparente máximo do Sol.

Apéndice A

Glosario

Definición A .1. Chámase **altura** do astro, h , ao ángulo que forma a visual dirixida a el co horizonte. O ángulo complementario á altura, é dicir, $\frac{\pi}{2} - h$, coñécese como **distancia cenital** e denótase por z .

Definición A .2. A unidade de presión denominada **atmósfera** equivale á presión que exerce a atmósfera terrestre ao nivel do mar.

Definición A .3. O **cenit** é o punto situado xusto encima do observador na esfera celeste e o **nadir** é o punto antipodal do cenit, é dicir, son a intersección da vertical coa esfera celeste.

Definición A .4. O **círculo horario** dun astro é o círculo máximo que pasa polos polos da esfera celeste e o astro.

Definición A .5. O **círculo vertical** dunha estrela é o círculo máximo da esfera celeste que pasa polo astro e o cenit do lugar de observación do mesmo.

Definición A .6. A **culminación dun astro** é o paso deste polo meridiano do lugar. Durante o movemento aparente dun astro polo ceo do observador ou movemento diurno, os instantes nos que o astro alcanza a súa máxima e mínima altura sobre o horizonte do observador reciben o nome de **culminación superior e inferior** respectivamente.

Definición A .7. O **diámetro angular dun corpo celeste** é a dimensión aparente do diámetro ecuatorial do corpo celeste, é dicir, a distancia en liña recta entre dous puntos

antipodais situados no eixo ecuatorial, expresado en forma de ángulo e supoñendo ao observador no vértice.

Definición A .8. A **esfera celeste ou bóveda celeste** trátase dunha esfera ideal, sen raio definido e cuxo centro é o observador, habitualmente como o raio soe ser moi grande en comparación coa Terra, tómase a esta como centro. Nela proxéctanse os astros para estudar o seu movemento.

Definición A .9. A **estratosfera** é unha das capas da atmósfera, situada xusto a continuación da tropoesfera. Neste documento referirémonos con estratosfera a toda a atmósfera excepto a troposfera.

Definición A .10. Unha **estrela circumpolar** é unha estrela que, vista dende unha latitude dada na Terra, nunca se pon, é dicir, non desaparece baixo o horizonte. Isto é debido á proximidade a un dos polos celestes. Estas estrelas son visibles toda a noite, todas as noites do ano, dende dito lugar. Ademais tamén se poderían ver durante todo o día se non fose polo efecto do resplandor do Sol.

Definición A .11. A **función gamma** $\Gamma(z)$ é unha aplicación que estende o concepto de factorial aos números reais e complexos. Se a parte real do número complexo z é positiva entón a integral:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

converxe absolutamente. Esta integral pode ser extendida a todo o plano complexo, excepto aos enteiros negativos e ao cero.

Se n é un enteiro positivo, entón:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

o que mostra a relación desta función có factorial.

Definición A .12. O **índice de refracción** defínese como o cociente entre a velocidade da luz no vacío, que denotamos por c , e a velocidade de fase no medio a través do cal se propaga a onda electromagnética:

$$n = \frac{c}{v_{fase}}$$

sendo a velocidade de fase dunha onda a tasa á cal a fase da mesma se propaga no espacio, isto é:

$$v_{fase} = \frac{w}{k}$$

onde w é a frecuencia da onda e k o vector de onda.

Definición A .13. O **meridiano dun lugar** é a elipse que pasa polos polos terrestres e por dito lugar. Divídese en meridiano superior, semielipse que ten por extremos os polos e pasa polo lugar, e meridiano inferior, semielipse cuxos extremos son os polos pero non pasa polo lugar.

O **meridiano de Greenwich** é o meridiano que pasa polo observatorio de Greenwich e tómase como referencia para medir a lonxitude terrestre. Considérase, polo tanto, que a lonxitude deste meridiano é cero grados.

Definición A .14. O **pascal**, cuxo símbolo é Pa, é a unidade de presión do Sistema internacional de Unidades. Defínese como a presión que exerce unha forza de 1 Newton sobre unha superficie de 1 metro cadrado normal á mesma. Tense que $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$.

Definición A .15. Denomínase **punto Aries** ao punto da eclíptica, é dicir, a línea que describe o movemento aparente do Sol visto dende a Terra, a partir do cal o Sol pasa do hemisferio sur ao norte.

Definición A .16. A **troposfera** é a capa da atmósfera que está en contacto coa superficie terrestre.

Definición A .17. A **tropopausa** é a zona de transición entre a troposfera e a estratosfera.

Definición A .18. Denomínase **vertical do lugar** á perpendicular ao plano do horizonte no lugar do observador.

Apéndice B

Táboas para a refracción

O Real Observatorio de Madrid publica anualmente un Anuario onde, entre outros moitos datos, se poden atopar táboas para o cálculo do valor da refracción.

No “Anuario del Real Observatorio de 2018 ” [8] publicáronse as seguintes táboas para a corrección da refracción:

Corrección de la refracción atmosférica media, R_0
con entradas cada 10' para alturas entre 0° y 20°
($\lambda = 0,575\mu\text{m}$, P=1000 mbar, T=10°C)

altura observada	0'	10'	20'	30'	40'	50'
	(' ")	(' ")	(' ")	(' ")	(' ")	(' ")
19°	2 45	2 44	2 42	2 41	2 39	2 38
18°	2 55	2 53	2 51	2 50	2 48	2 47
17°	3 05	3 04	3 02	3 00	2 58	2 56
16°	3 17	3 15	3 13	3 11	3 09	3 07
15°	3 31	3 29	3 26	3 24	3 22	3 20
14°	3 46	3 43	3 41	3 38	3 36	3 33
13°	4 03	4 00	3 57	3 54	3 51	3 48
12°	4 23	4 19	4 16	4 12	4 09	4 06
11°	4 46	4 42	4 38	4 34	4 30	4 26
10°	5 13	5 08	5 04	4 59	4 54	4 50
9°	5 46	5 40	5 35	5 29	5 24	5 18
8°	6 26	6 19	6 12	6 05	5 59	5 52
7°	7 16	7 07	6 58	6 50	6 42	6 34
6°	8 19	8 08	7 57	7 46	7 36	7 26
5°	9 42	9 26	9 12	8 58	8 44	8 32
4°	11 33	11 12	10 52	10 33	10 15	9 58
3°	14 08	13 38	13 10	12 44	12 19	11 55
2°	17 56	17 11	16 30	15 51	15 14	14 40
1°	23 53	22 41	21 35	20 34	19 37	18 45
0°	33 48	31 45	29 52	28 10	26 37	25 11

Figura 17: Táboa A

Corrección de la refracción atmosférica media, R_0
 con entradas cada grado para alturas entre 20° y 90°
 ($\lambda = 0,575 \mu\text{m}$, $P=1000 \text{ mbar}$, $T=10^\circ\text{C}$)

alt. obs.	0° (")	1° (")	2° (")	3° (")	4° (")	5° (")	6° (")	7° (")	8° (")	9° (")
80°	10,1	9,1	8,1	7,0	6,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0
70°	20,9	19,8	18,6	17,5	16,5	15,4	14,3	13,3	12,2	11,2
60°	33,1	31,8	30,5	29,2	28,0	26,8	25,5	24,4	23,2	22,0
50°	48,1	46,4	44,8	43,2	41,7	40,2	38,7	37,3	35,8	34,5
40°	68,3	65,9	63,7	61,5	59,4	57,3	55,4	53,5	51,6	49,9
30°	99,1	95,2	91,6	88,1	84,9	81,8	78,8	76,0	73,3	70,8
20°	156,3	148,4	141,1	134,4	128,2	122,4	117,1	112,2	107,5	103,2

Figura 18: Táboa B

Nelas a corrección por refracción aparece en función da altura observada, e aplícase seguindo o seguinte criterio:

$$\text{altura verdadeira} = \text{altura observada} - \text{Refracción}$$

$$\text{distancia cenital verdadeira} = \text{distancia cenital observada} + \text{Refracción}$$

Nas táboas aparecen as correccións para unha presión atmosférica $P_0 = 1000 \text{ hPa}$ e unha temperatura $T_0 = 10^\circ\text{C}$. Para obter a refracción para outros valores de P e T bastará aplicar as seguintes correccións:

- Corrección para a presión: multiplicar por $\frac{P}{1000}$
- Corrección para a temperatura: multiplicar por $\frac{283}{273 + T}$

Para obter a corrección por refracción para unha altura observada que non estea na táboa procederemos do mesmo xeito que no seguinte exemplo, o cal nos fixo falta no *Capítulo 4*:

- Queremos obter o valor para a refracción a unha altura observada $h = 23' 51,71'' = 23,8618'$. Temos, segundo a táboa anterior, que a corrección para $h_1 = 20'$ é $R_1 = 29' 52''$ e para $h_2 = 30'$ é $R_2 = 28' 10''$ polo que:

$$\left. \begin{array}{l} R_1 - R_2 = 1' 42'' \\ h_2 - h_1 = 10' \end{array} \right\} \Rightarrow \text{A corrección para } h_1 + k' \text{ é } R_1 - k \cdot 10,2'' \text{ con } k \in [0, 10]$$

Así para unha altura observada $h = 23' 51,71'' = 23,8618'$ a corrección por refracción é $R = 29' 12,61''$.

Apéndice C

Aplicación Heavens Above

Heavens Above é unha páxina web sen ánimo de lucro que proporciona información precisa sobre a posición de estrelas, satélites e demais obxectos de orixe natural e humano que circulan polo espazo.

Para empregala debes introducir a ubicación da que desexas obter os datos, introducindo a cidade directamente ou as coordenadas GPS.

Nesta aplicación pódese atopar unha base de datos de satélites, de natureza humana, con información sobre os seus pasos, visibles ou non, a súa órbita e detalles sobre o propio satélite e o seu lanzamento. Entre eles destaca a ISS, Estación Espacial Internacional, a que se pode visualizar en 3D nesta páxina.

Tamén se pode obter información sobre eclipses, horas e lugares dende onde se observarán, cartas celestes, ... Ademais tamén podes encontrar información sobre cometas, asteroides e constelacions.

Para todos os obxectos podes encontrar as coordenadas precisas para situalo na esfera celeste dende o lugar de observación que introduciras calquer día a calquera hora. Ademais, para todos os planetas, para o Sol e para a Lúa proporciona a hora dos seus ortos e ocasos calquer día do ano.

A páxina web é: <https://www.heavens-above.com>. Tamén se pode obter unha app gratuita para o teléfono móbil.

Bibliografía

- [1] Abad, Alberto; Docobo, José Ángel y Elipe, Antonio, 2002, *Curso de Astronomía*, Prensas Universitarias de Zaragoza, España.
- [2] Auer, L. H. y Standish, E. M., 1979, *Astronomical refraction: Computational Method for All Zenith Angles*, Tech. Rep., Yale University Astronomy Department.
- [3] Hohenkerk, C. Y., y Sinclair, A. T., 1985, *The Computation of Angular Atmospheric Refraction at Large Zenith Angles*, Tech. Rep. 63, HM Nautical Almanac Office.
- [4] Mangum, Jeffrey G. y Wallace, Patrick, 2015, *Atmospheric Refractive Electromagnetic Wave Bending and Propagation Delay*, The Astronomical Society of the Pacific, U.S.A.
- [5] Mao, Wei; Yang, Lei t Tie, Qiong-xian, 2008, *On Astronomical Atmospheric Refraction*, Chinese Astronomy and Astrophysics, Elsevier.
- [6] Press, William H., Teukolsky, Saul A., Vetterling, William T., Flannery, Brian P., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Third Edition, Cambridge University Press, 2007.
- [7] Prieto, Juan F. y Velasco, Jesús, *Modelos de Refracción Astronómica*, Astronomía Geodésica Curso 2010-2011.
- [8] Real Observatorio de Madrid, 2018, *Anuario del Real Observatorio 2018*, recuperado de: <https://astronomia.ign.es/anuario-astronomico>.
- [9] Sampson, Russell D., Lozowski, Edward P., Peterson, Arthur E. y Hube, Douglas P., 2003, *Variability in the Astronomical Refraction of the Rising and Setting Sun*, The Astronomical Society of the Pacific, U.S.A.
- [10] Sinclair, A. T., 1982, *The Effect of Atmospheric Refraction on Laser Ranging Data*, Tech. Rep. 59, HM Nautical Almanac Office.

- [11] Smart, W.M., 1997, *Textbook on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] Thomas, Michael E. y Joseph, Richard I., 1996, *Astronomical Refraction*, Johns Hopkins Apl Technical Digest, Volume 17, Number 3.
- [13] Yan, H., 1998, *Improvement of astronomical refraction by mapping function*, Shanghai Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030.
- [14] Yan, H., 1996, *A new Ecpresion for Astronomical Refraction*, Shanghai Observatory, People's Republic of China, Shanghai 200030, The Astronomical Journal Volume 112, Number 3.
- [15] Yan, H. y Ping, J., 1995, *The Generator Function Method of the Tropospheric Refraction Corrections*, Shangai observatory, Shanghai 200030, China, The Astronomical Journal Volume 110, Number 2.