VALENTIN BALBÍN

GEOMETROGRAFÍA

CONFERENCIA
DADA EN LOS SALONES DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
EL 15 DE JULIO DE 1897

(Artículo publicado en los « Anales de la Sociedad Científica Argentina », tomo XLIV, páginas 110 y siguientes)

BUENOS AIRES
IMPRENTA DE PABLO E. CONI É HIJOS, ESPECIAL PARA OBRAS
680 — CALLE PERÚ — 680

1897

VALENTIN BALBÍN

GEOMETROGRAFÍA

CONFERENCIA
DADA EN LOS SALONES DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
EL 15 DE JULIO DE 1897

(Artículo publicado en los « Anales de la Sociedad Científica Argentina », tomo XLIV, páginas 110 y siguientes)

BUENOS AIRES
IMPRENTA DE PABLO E. CONI É HIJOS, ESPECIAL PARA OBRAS
680 — CALLE PERÚ — 680

1897

GEOMETROGRAFÍA

CONFERENCIA DADA EN LOS SALONES DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

EL 15 DE JULIO DE 1897

---

1. La palabra *geometrografía* ha sido inventada por el matemático francés Lemoine, y significa en su etimología más literal, descripción ó arte de las construcciones geométricas.

La geometrografía es un cuerpo de doctrina que puede llamarse nuevo, pues tuvo principio en el congreso que la Asociación francesa para el fomento de las ciencias celebró en 1888 en Orán. Fué en esa ocasión que el matemático nombrado dió á conocer los principios fundamentales de la teoría, los que completó en los congresos de la misma Asociación que se verificaron en Pau y Besançon en 1892 y 1893. Salvo uno que otro detalle de escasa importancia, toda la teoría y sus numerosas aplicaciones se deben á ese matemático, que es ventajosamente conocido desde 1873 por los bellos y originales trabajos sobre algunos puntos, rectas y círculos particulares del triángulo, que le han hecho acreedor al título de fundador de la geometría moderna del triángulo (*).

2. La geometría que estudiamos en los institutos de andguse enseñanza y que se llama elemental, es la geometría de los griegos,

(*) En la traducción de la *Modern plane Geometry* (Geometría plana moderna) de los profesores Richardson y Ramsey que dimos á la publicidad en 1894, insertamos algunas notas sobre los descubrimientos de Lemoine (punto simediano, simedianas y los círculos que llevan su nombre), las que merecieron la aprobación de los profesores nombrados.

que nos ha sido transmitida por Euclides en sus *Elementos*, libro que viene sirviendo de texto desde hace siglos en muchas universidades europeas. Los modernos han seguido las huellas de la escuela griega adoptando sus métodos, desarrollando sus concepciones y extendiendo sus aplicaciones especialmente teóricas, sin tener en cuenta la idea de la construcción *efectiva* de las figuras, pues las construcciones geométricas de los griegos eran puramente *especulativas*. Si ellos trazaban croquis ó figuras en la arena, como dicen que Euclides lo hacía en el patio de la escuela de Alejandría, era solamente para auxiliarse en sus razonamientos, y nunca trazaron depurados para la construcción de sus soberbios templos y palacios, porque todas las dimensiones las determinaban por el cálculo. En una palabra, los griegos no conocían el arte de las construcciones geométricas, porque en todas las cuestiones consideraban únicamente la *posibilidad* de una solución por medio de la recta y del círculo, y no la *efectividad* de una construcción mediante la regla y el compás, que es lo que Lemoine ha sido el primero en considerar, haciendo ver que existe un arte de las construcciones geométricas que tiene sus reglas propias, de verdadero valor didáctico é inmensa aplicación práctica. He ahí, pues, la importancia y novedad de la geometrografía, cuyos principios vamos á exponer siguiendo el camino trazado por Lemoine.

3. Todas las construcciones geométricas elementales consisten en el trazado de rectas y círculos, y por lo tanto cualquier construcción ejecutada con la regla y el compás, puede reducirse á las siguientes operaciones elementales :

1° *Poner el canto de la regla en coincidencia con un punto*..................................	op. : R_1
2° *Trazar la línea recta*....................	op. : R_2
3° *Poner una punta del compás en un punto determinado*................................	op. : C_1
4° *Poner una punta del compás en un punto indeterminado de una línea*....................	op. : C_2
5° *Trazar la circunferencia*................	op. : C_3

Tales son la notaciones ideadas por Lemoine, en las que hay que observar :

a) Que el símbolo *op* significa operación.

b) Que C_3 indica tanto el trazado de un arco como el de un círculo entero, lo mismo que R_2 indica el trazado de una porción cualquiera de recta.

En virtud de estas notaciones, es evidente que toda construcción geométrica puede ser representada simbólicamente de esta manera:

$$\text{op} : l_1R_1 + l_2R_2 + m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3,$$

siendo l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 números enteros y positivos que pueden ser nulos, pues toda construcción se reduce al trazado de rectas y círculos en la geometría euclideana.

Se da el nombre de *coeficiente de complicación* al número $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$, y el de *coeficiente de inexactitud* al número $l_1 + m_1 + m_2$, porque la inexactitud depende de las operaciones preparatorias l_1, m_1, m_2 y no de las operaciones del trazado propiamente dicho en las rectas y círculos, como es fácil comprender. A estas definiciones de Lemoine nos ha parecido conveniente agregar otra que llamaremos *coeficiente de construcción*, y es la suma $l_2 + m_3$ que indica el número de rectas y círculos que la construcción requiere.

La sencillez de las notaciones anteriores hace ver con toda facilidad la exactitud de las siguientes, que corresponden á construcciones que pueden considerarse fundamentales; á saber:

1° *Trazar una recta por un punto dado* ... op : $(R_1 + R_2)$; porque se tiene primero que hacer coincidir el canto de la regla con el punto (op : R_1) y después trazar la recta (op : R_2).

2° *Trazar una recta por dos puntos dados* ... op : $(2R_1 + R_2)$; porque se tiene primero que hacer coincidir el canto de una regla con cada uno de los puntos (op : $2R_1$) y después trazar la recta (op : R_2).

3° *Trazar un círculo cualquiera cuyo centro es dado*, op : $(C_1 + C_3)$; porque se tiene primero que poner una de las puntas del compás en el punto dado (op : C_1) y después trazar el círculo (op : C_3).

4° *Tomar con el compás una longitud dada* AB ... op : $(2C_1)$, porque es poner una de las puntas del compás en A y la otra en B, es decir, dos veces op : C_1.

4. Para hacer comprender el método en todos sus alcances mostrando al mismo tiempo su facilidad y sencillez, vamos á aplicarlo en la resolución de algunas proposiciones usuales.

PROBLEMA 1

Trazar el círculo circunscrito á un triángulo dado (fig. 1)

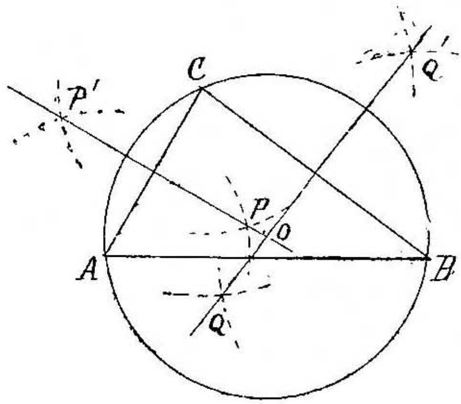

Figura 1

Tracemos los círculos A (ρ) *, C (ρ), siendo ρ mayor que la mitad de AC.................. op. : ($2C_1 + 2C_3$).

Estos círculos se cortan en P y P' ; tracemos PP'.............................. op. : ($2R_1 + R_2$).

Describamos los círculos B (r), C (r), siendo r mayor que la mitad de BC.............. op. : ($2C_1 + 2C_3$).

Estos círculos se cortan en Q y Q'; tracemos QQ'.................................. op. : ($2R_1 + R_2$).

Las dos rectas de PP', QQ' se cortan en O; describamos el círculo O (OC), que es el buscado.................................. op. : ($2C_1 + C_3$).

Símbolo total : op. : ($4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 5C_3$); coeficiente de complicación 15; coeficiente de inexactitud 10; coeficiente de construcción 7 (dos rectas y cinco círculos).

Observación. — Si hubiésemos tomado el mismo radio para todos los círculos auxiliares, la fórmula habría sido : op. : ($4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3$).

* La notación A (ρ) significa que el centro del círculo es A y el radio ρ.

Problema 2

Dados dos puntos C *y* D, *situados á un mismo lado de una recta dada* AB, *hallar el camino más corto de* C *á* D *pasando por un punto de dicha recta* (fig. 2).

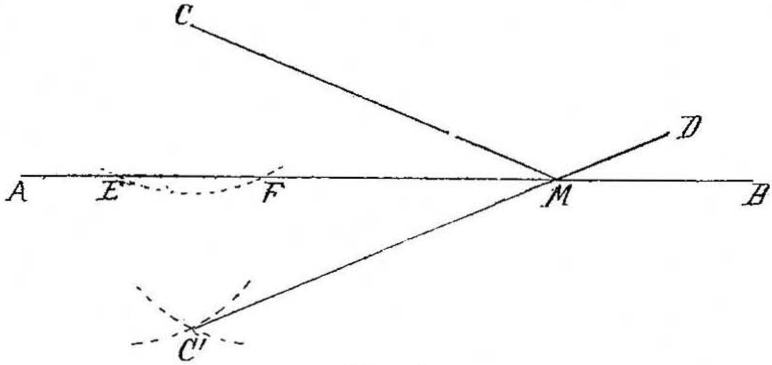

Figura 2

Tracemos el círculo C (CE) que corta á B en los puntos E y F........................ op. : $(C_1 + C_3)$.

Describamos los círculos E (EC), F (EC) que se cortan en el punto C', simétrico de C..... op. : $(3C_1 + 2C_3)$.

Tracemos C'D, que corta á AB en M....... op. : $(2R_1 + R_2)$.

Finalmente, tracemos CM.............. op. : $(2R_1 + R_2)$.

La suma CM + MD es mínima, como es sabido.

Símbolo total : op. : $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 3C_3)$; coeficiente de complicación 13; coeficiente de inexactitud 8; coeficiente de construcción 5 (dos rectas y tres círculos).

Problema 3

Por un punto dado A *de una circunferencia de centro* O *trazar una tangente á dicha circunferencia*

Primer método (fig. 3). — Tracemos la recta OA.................................... op. : $(2R_1 + R_2)$.

Describamos un círculo cualquiera C (CA) que pase por A........................ op. : $(C_1 + C_3)$

que corta á OA en B.

Tiremos la recta BC...................... op. : $(2R_1 + R_2)$
que corta á la circunferencia anterior en T.

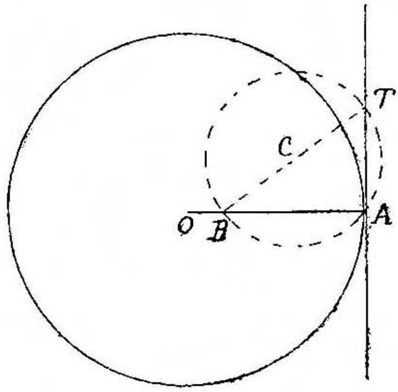

Figura 3

Finalmente, tracemos la recta AT......... op. : $(2R_1 + R_2)$
que es la tangente al círculo dado.

Símbolo total: op. : $(6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_3)$; coeficiente de complicación 11; coeficiente de inexactitud 7; coeficiente de construcción 4 (tres rectas y un círculo).

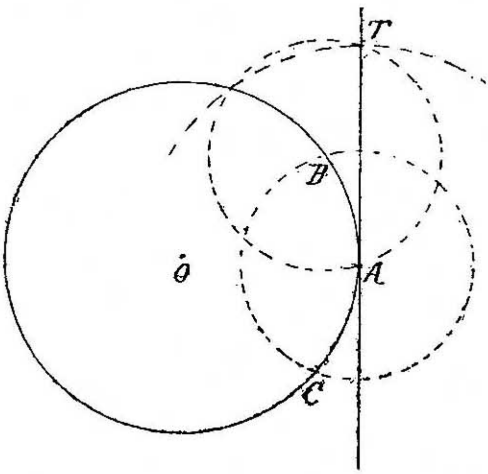

Figura 4

Segundo método (fig. 4). — Tracemos la circunferencia A (ρ), siendo ρ cualquiera, la que corta á la circunferencia dada en B y C....... op. : $(C_1 + C_3)$.

Describamos el círculo B (ρ).............. op. : $(C_1 + C_3)$.

Tomemos BC, mientras la punta del compás está en B, y tracemos A (BC) que corta al círculo B (ρ) en T.......................... op. : ($2C_1 + C_3$).

Por fin, tracemos AT.................... op. : ($2R_1 + R_2$).

Símbolo total : op. : ($2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3$); coeficiente de complicación 10; coeficiente de inexactitud 6; coeficiente de construcción 4 (una recta y tres círculos).

5. Las diversas construcciones que pueden hacerse para la resolución de un problema no ofrecen todas el mismo grado de simplicidad y exactitud, como ha podido observarse en el problema anterior. Muchas de las construcciones fundamentales que nos vienen desde Euclides, y que figuran en los tratados de geometría elemental, son más complicadas que otras más modernas, que probablemente llegarán á ser, como es lógico, las verdaderas construcciones clásicas. Esto proviene de que los geómetras no habían prestado atención sino á la parte especulativa de la ciencia, teniendo en vista solamente la sencillez de la expresión y la estrecha vinculación de un teorema demostrado con la construcción que indicaban. Hoy en día, gracias á la geometrografía, se tiene un criterio más ó menos perfecto para apreciar la simplicidad y exactitud de las construcciones geométricas y poderlas comparar, como vamos á verlo en la resolución de algunos problemas.

Problema 4

Por un punto C *dado fuera de una recta* AB, *trazar una paralela á esta recta*

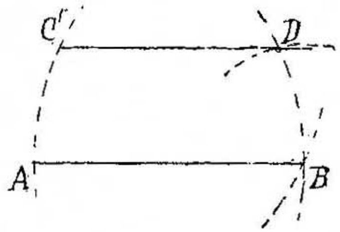

Figura 5

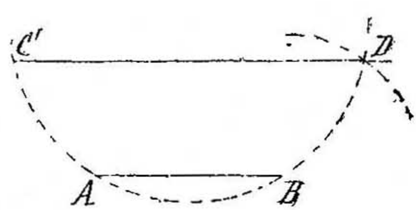

Figura 6

Primer método (fig. 5). — Tracemos el círculo C (CB), de radio cualquiera............ op. : ($C_1 + C_3$) que corta á la recta dada en B.

Describamos el círculo B (CB)............ op. : $(C_1 + C_3)$
que corta á la recta dada en A.

Tomemos la distancia AC............... op. : $(2C_1)$.

Tracemos el círculo B (AC)............... op. : $(C_1 + C_3)$.

Finalmente, tiremos CD.................. op. : $(2R_1 + R_2)$
que es la paralela buscada.

Símbolo total : op. : $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$; coeficiente de complicación 11; coeficiente de inexactitud 7; coeficiente de construcción 4 (una recta y tres círculos).

Segundo método (fig. 6). — Por C hagamos pasar un círculo que corta á la recta dada en A y B...................................... op. : $(C_1 + C_3)$.

Tomemos AC y tracemos el círculo B (AC).. op. : $(3C_1 + C_3)$.

Tiremos CD.............................. op. : $(2R_1 + R_2)$
que es la paralela buscada.

Símbolo total : op. $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$; coeficiente de complicación 9; coeficiente de inexactitud 6; coeficiente de construcción 3 (una recta y dos círculos).

Problema 5

Trazar la bisectriz de un ángulo dado

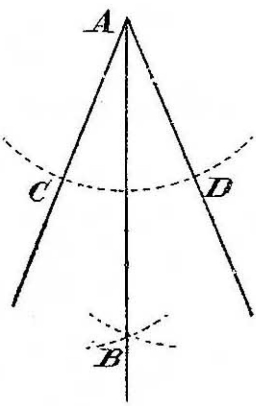

Figura 7

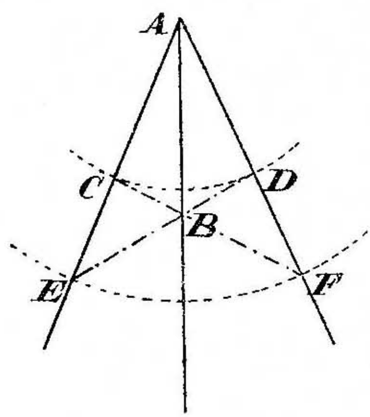

Figura 8

Primer método (fig. 7). — Tracemos un círculo cualquiera A (AC), que corta á los lados del ángulo en C y D........................ op. : $(C_1 + C_3)$.

En seguida describamos dos círculos C (AC), D (AC), que se cortan en B................ op. : $(2C_1 + 2C_3)$.

Finalmente, tracemos AB................ op. : $(2R_1 + R_2)$.

Símbolo total : op. : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$; coeficiente de complicación 9; coeficiente de inexactitud 5; coeficiente de construcción 4 (una recta y tres círculos).

Segundo método (fig. 8). — Tracemos dos círculos A (AC), A (AE), que cortan á los lados del ángulo en C, D y E, F.................. op. : $(C_1 + 2C_3)$.

Tracemos CF, DE......................... op. : $(4R_1 + 2R_2)$ se cortan en B ; tracemos AB............... op. : $(2R_1 + R_2)$.

Símbolo total: op. : $(6R_1 + 3R_2 + C_1 + 2C_3)$, coeficiente de complicación 12; coeficiente de inexactitud 7; coeficiente de construcción 5 (tres rectas y dos círculos).

Observación.—El primer método es evidentemente preferible al segundo, y por lo tanto el teorema que la segunda construcción representa, no tiene verdadero valor geométrico, á no ser que se le considere como un simple ejercicio de igualdad de triángulos.

Problema 6

Por un punto dado A *trazar una recta que pase por el punto de intersección de dos rectas dadas* BB', CC', *que no se puede prolongar.*

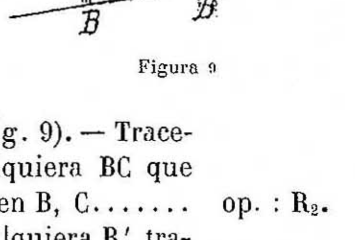

Figura 9

Primer método (fig. 9). — Tracemos una recta cualquiera BC que corta á las dadas en B, C....... op. : R_2.

Por un punto cualquiera B' tracemos B'C' paralela á BC que corta á las rectas dadas en B', C'..... op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

Tracemos AB y AC............ op. : $(4R_1 + 2R_2)$.
Tiremos C′A′ paralela á CA.... op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.
Tiremos B′A′ paralela á BA.... op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.
Estas paralelas se cortan en A′,
tracemos la recta AA′........... op. : $(2R_1 + R_2)$
que es la recta buscada.

Símbolo total : op. : $(12R_1 + 7R_2 + 12C_1 + 6C_3)$; coeficiente de complicación 37; coeficiente de inexactitud 24; coeficiente de construcción 13 (siete rectas y seis círculos).

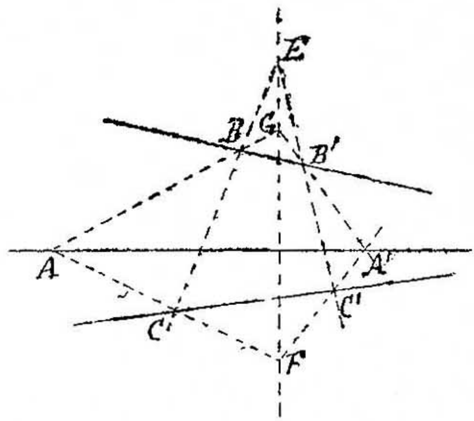

Figura 10

Segundo método (fig. 10). — Tracemos una recta cualquiera EF que corta á las dadas.... op. : R_2.
Por el punto E de dicha recta tracemos las rectas cualesquiera EBC, EB′C′............ op. : $(2R_1 + 2R_2)$.
Tiremos AB, AC que cortan á EF en G y F... op. : $(4R_1 + 2R_2)$.
Tracemos las rectas GB′, FC′........... op. : $(4R_1 + 2R_2)$
que se cortan en A′.
Finalmente, tiremos la recta AA′......... op. : $(2R_1 + R_2)$.

Símbolo total : op. : $(13R_1 + 8R_2)$; coeficiente de complicación 21; coeficiente de inexactitud 13; coeficiente de construcción 8 (ocho rectas) *.

* Esta solución muestra, por otra parte, que la perspectiva ó proyección cónica puede ser empleada como medio de demostración, como lo han indicado Fiedler y Wiener, en estos últimos años.

Problema 7

Desde un punto A dado fuera de un círculo de centro O trazar las dos tangentes á la circunferencia

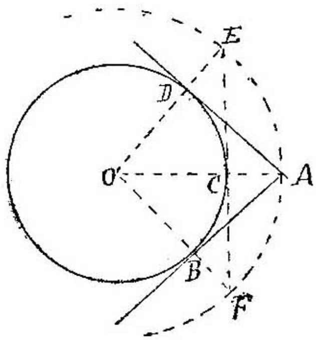

Figura 11

Primer método (fig. 11). — Tracemos OA.................... op. : $(2R_1 + R_2)$
que corta al círculo en C.
Describamos el círculo O (OA). op. : $(2C_1 + C_3)$.
Tracemos en C la perpendicular EC á OC por el método segundo del problema 3.................. op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$
que corta á la circunferencia anterior en E y F.
Tiremos OE, OF.............. op. : $(4R_1 + 2R_2)$.
Finalmente, tracemos AD y AB. op. : $(4R_1 + 2R_2)$.
Símbolo total : op. : $(12R_1 + 6R_2 + 6C_1 + 4C_3)$; coeficiente de complicación 28; coeficiente de inexactitud 18; coeficiente de construcción 10 (seis rectas y cuatro círculos).

Segundo método (fig. 12). — Tracemos OA.................... op. : $(2R_1 + R_2)$.
Describamos el círculo de diámetro OA.................... op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$
que corta al círculo dado en B y C.
Finalmente tracemos AB, AC... op. : $(4R_1 + 2R_2)$.
Símbolo total : op. : $(8R_1 + 4R_2 + 4C_1 + 3C_3)$; coeficiente de

complicación 19; coeficiente de inexactitud 12; coeficiente de construcción 7 (cuatro rectas y tres circulos).

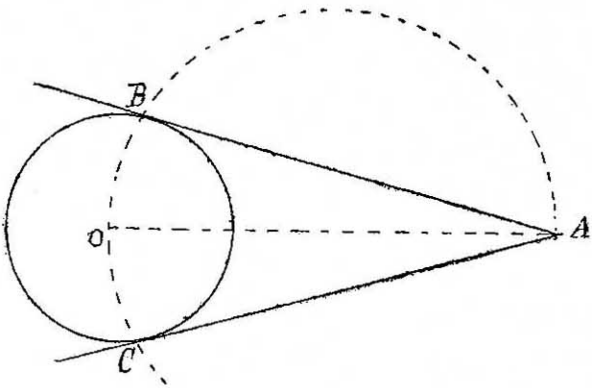

Figura 12

Tercer método (fig. 13). — Tracemos un diámetro cualquiera...................... op. : $(R_1 + R_2)$

Tomemos OA y describamos C (OA), D (OA). op. : $(4C_1 + 2C_3)$ que se cortan en E.

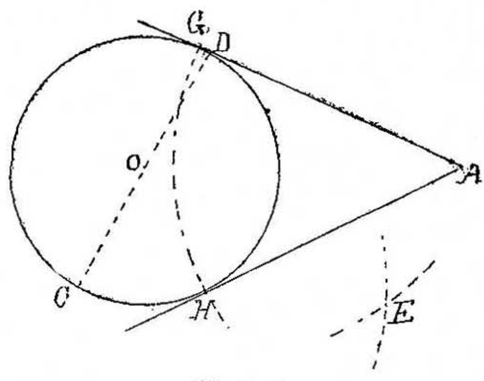

Figura 13

Tomemos EO y tracemos A (EO)........... op. : $(3C_1 + C_3)$ que corta á la circunferencia dada en G, H.

Finalmente, tracemos AG, AH............ op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

Símbolo total : op. : $(5R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 3C_3)$; coeficiente de complicación 18; coeficiente de inexactitud 12; coeficiente de construcción 6 (tres rectas y tres círculos).

Lemoine ha aplicado su método á la construcción de setenta y tres problemas en los congresos de Orán y Pau estableciendo los símbolos correspondientes, y en el de Besançon ha simplificado los símbolos de treinta y uno de esos problemas, valiéndose de las indicaciones de los profesores Tarry y Bernès. Apesar de la importancia de esas simplificaciones el mismo Lemoine no cree que haya llegado á obtener definitivamente las construcciones mejores bajo el punto de vista geometrográfico. He ahí, pues, un campo de investigación casi inexplorado en el tiempo presente.

6. No creemos necesario presentar más ejemplos para mostrar que la sencillez del enunciado de un problema, que es traslado fiel de la sencillez del razonamiento especulativo, no corresponde siempre á la simplicidad de la construcción (*).

Eso no es de extrañar porque la terminología geométrica permite condensar á menudo en una sola palabra ó breve frase las operaciones más complejas. Por ejemplo, cuando decimos: *las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto*; entendemos por la palabra *mediatriz* la perpendicular trazada en el punto medio del lado de un triángulo, lo que implica, si tratamos de hacer la figura, la ejecución de varias construcciones. Análogamente, cuando decimos: *únanse los polos de dos rectas dadas con respecto á un círculo dado*; la expresión es simple y clara, pero si tratamos de hacerlo con la regla y el compás la cuestión muda de aspecto, porque es necesario construir primero los polos, lo que exige varias construcciones, y después unirlos.

Además, el razonamiento especulativo no está sujeto á trabas, mientras que cualquier construcción geométrica, por sencilla que sea, está subordinada al empleo de ciertos instrumentos (la regla y el compás) mediante los cuales se ejecutan las construcciones. Por eso no es raro ver proposiciones de enunciado fácil, simple y lacónico, cuya figura representativa es de una construcción tan delicada y compleja que requiere toda el arte de un dibujante hábil.

7. Así como en el cálculo aritmético ó algebraico se suelen ha-

(*) Por ejemplo, el problema de *trazar la bisectriz del ángulo de dos rectas que no se puede prolongar*, se resuelve por varios métodos que exigen construcciones que se conciben y explican teóricamente con suma facilidad, pero uno de esos métodos requiere setenta y una operaciones elementales, otro veintitres y otro solamente once. (*Congrès de Besançon*, 1893).

cer ensayos previos para llegar á conocer la probabilidad ó falsedad de un teorema que se cree entrever, así también se puede proceder en la geometría y llegar al conocimiento de importantes resultados especulativos por medio de construcciones gráficas. En el congreso de Pau, Lemoine citó el caso del arquitecto Dunesme que descubrió con la regla y el compás varios teoremas tan curiosos como importantes y entre los cuales merece mencionarse el siguiente, que se halla en casi todos los libros de texto: *Toda curva C es la sombra de una superficie de revolución S (iluminada por rayos paralelos) sobre un plano perpendicular al eje.*

A este respecto, el criterio que la geometrografía proporciona para poder apreciar la simplicidad y exactitud de las construcciones gráficas, es de un valor indiscutible; porque ejecutando las construcciones más simples que corresponden á una investigación el número de las operaciones disminuye y, por lo tanto, la suma de los errores de construcción es mínima.

8. No es solamente en las construcciones de la geometría elemental que la geometrografía encuentra un vasto campo de aplicación, sino también en las de otras partes de la ciencia relativamente modernas, por ejemplo:

1° En las construcciones de la geometría descriptiva, agregando el empleo de la escuadra, para lo que se requiere un nuevo símbolo;

2° En las construcciones de la estática gráfica, agregando además del símbolo relativo á la escuadra el que corresponde el empleo de las reglas divididas, como lo indicó Lemoine en el congreso de Orán, y lo está aplicando con feliz éxito el profesor Chomé en la Escuela Militar de Bélgica.

9. No necesitamos detenernos más para mostrar la importancia de la geometrografía, cuyos principios nos habíamos propuesto divulgar. Sólo diremos, para concluir, que muchos profesores franceses la consideran útil y la explican en los cursos que están dictando en París. El camino está, pues, allanado, y no debemos tardar en imitar el ejemplo.