UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Estudo cuantitativo e cualitativo de ecuacións discretas

Julio José Rodríguez Martínez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Estudo cuantitativo e cualitativo de ecuacións discretas

Julio José Rodríguez Martínez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemática
Título: Estudio cuantitativo y cualitativo de ecuaciones discretas
Descripción del contenido: Se describirán fenómenos modelados por ecuaciones en diferencias (modelos de poblaciones, económicos, epidemiológicos, ...). Se estudiarán técnicas básicas de la matemática discreta, como o operador incremento y el incremento inverso, la resolución de ecuaciones en diferencias lineales tanto escalares como vectoriales, así como el estudio de la estabilidad de las ecuaciones estudiadas.

Índice general

Resumen

En este trabajo empezaremos viendo la motivación del estudio de las ecuaciones en diferencias, mediante ilustres ejemplos como el problema de la isla de Manhattan o el problema de la torre de Hanoi.

A continuación, introduciremos los conceptos claves de este trabajo: el operador suma y el operador diferencia, y veremos como se comportan ante las principales operaciones y las funciones más básicas. Estos dos conceptos serán fundamentales para la resolución de ecuaciones en diferencias lineales.

Tras introducir el concepto de ecuación de primer orden, veremos como resolverlas. Para ello, hablaremos de ecuaciones homogéneas, que se obtienen prescindiendo del término independiente. El método de resolución consistirá en primero resolver la ecuación homogénea, para acabar obteniendo una solución de la ecuación general.

Para las ecuaciones de orden$n$ con coeficientes constantes, presentaremos dos métodos, el de variación de parámetros y el de los aniquiladores, dándole una mayor importancia a este último, que consiste en transformar la ecuación general en una homogénea eliminando el término independiente, para luego resolverla como ya vimos anteriormente. El caso de coeficientes variables lo vemos brevemente al final del capítulo.

Para terminar, veremos como calcular una solución dado un valor inicial, los conocidos como problemas de valor inicial, mediante un método llamado Algoritmo de Putzer, y estudiaremos la estabilidad de estas soluciones a partir de los autovalores de las matrices que definan los sistemas lineales.

Abstract

In this work we will begin looking at the motivation for the study of difference equations, through illustrious examples such as the Manhattan island problem or the Hanoi tower problem.

Next, we will introduce the key concepts of this work: the summation operator and the difference operator, and we will see how they behave before the main operations and the most basic functions. These two concepts will be fundamental for solving linear difference equations.

After introducing the concept of a first order equation, we will see how to solve them. To do

this, we will talk about homogeneous equations, which are obtained regardless of the independent term. The solving method will consist of solving the homogeneous equation, to end up obtaining a solution of the general equation.

For equations of order n with constant coefficients, we will present two methods, parameter variation and method of anniquilators, giving greater importance to the second one, which consists of transforming the general equation into a homogeneous one by eliminating the independent term, and then solve it as we saw previously. We see the case of variable coefficients briefly at the end of the chapter.

Finally, we will see how to calculate a solution given an initial value, known as initial value problems, by means of a method called Putzer's Algorithm, and we will study the stability of these solutions from the eigenvalues.

Introducción

Desde hace más de 3500 años se resuelven problemas que dan lugar a ecuaciones. Por ejemplo, una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$\frac{1}{4} anchura + longitud = 7\, manos$$
$$longitud + anchura = 10\, manos$$

Hasta 1700 podemos destacar la resolución de ecuaciones y la invención de símbolos. Las ecuaciones en diferencias jugarán un papel fundamental, junto con la teoría de los indivisibles, para formalizar y dar rigor al cálculo integral.

A la hora de construír modelos matemáticos en los que las variables solo pueden tomar valores discretos, como el tiempo, emplearemos las ecuaciones en diferencias. A lo largo de este trabajo veremos el gran número de similitudes con las ecuaciones diferenciales. La principal diferencia entre ellas es que en las ecuaciones diferenciales las variables toman valores continuos, mientras que en las ecuaciones en diferencias no.

Una ecuación en diferencias es una expresión que relaciona distintas sucesiones, donde una de ellas es desconocida. En este trabajo nos centraremos en la resolución de ecuaciones en diferencias lineales, en particular en las que tienen coeficientes constantes.

Como ya dijimos, la principal motivación de las ecuaciones en diferencias es modelar situaciones en las que las variables solo puedan tomar valores discretos. En el capítulo 1 veremos diferentes ejemplos de la vida cotidiana en las que estas ecuaciones nos ayudarán a ahorrarnos un gran número de cálculos.

El segundo capítulo nos ayudará a obtener las herramientas necesarias para el siguiente capítulo, en el que nos centraremos en la resolución de ecuaciones en diferencias lineales.

Para terminar, hablaremos de los problemas de valor inicial y de la estabilidad de la solución.

Principalmente, se seguirá el libro de Walter G. Kelley, Allan C. Peterson - Difference equations an introduction with applications, 2nd Edition-Academic Press (2001) y se irá complementando con otra bibliografía, que iremos nombrando al principio de cada capítulo.

Capítulo 1

Las ecuaciones de recurrencia

A la hora de resolver problemas matemáticos con un gran número de cálculos puede resultar útil, en vez de abordar directamente el problema, intentar calcularlos suponiendo conocido un conjunto de valores dados. Por ésto, nos resultará de gran interés estudiar las ecuaciones de recurrencia, que nos ayudarán a ahorrarnos un gran número de operaciones.

Definición 1.1. Una ecuación de recurrencia es una función que a la hora de definirla hace referencias a si misma.

Ejemplo 1.2. $y(t+1) = 2y(t)$ es una ecuación de recurrencia.

Ejemplo 1.3. La sucesión de Fibonacci $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8...\}$ puede ser modelada como una ecuación de recurrencia:
Necesitamos un conjunto de términos iniciales, que en este caso son los dos primeros términos de la sucesión, ya que ésta va a estar definida en términos de los dos anteriores y, por tanto necesitaremos definir los dos primeros puntos:

$$y(0) = 0, y(1) = 1.$$

A partir de esos dos términos, podemos determinar el resto con la función:

$$y(t+2) = y(t+1) + y(t) \text{ para } t = \{0, 1..\}.$$

Las ecuaciones de recurrencia serán de utilidad en muchos campos, como podemos ver en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.4. El problema de la isla de Manhattan

En 1626, Peter Minuit compró la isla de Manhattan por 24 dólares. Si esos 24 dólares se pudieran invertir con una tasa de interés anual del 7 %, ¿cuánto valdría en 1998?

Cabe destacar que el interés se produce trimestralmente. Entonces, en cada trimestre obtendremos un beneficio del 1,75 %. Podemos obtener el valor de la isla de forma recursiva: si sabemos cuánto vale en un trimestre, sabemos que en el siguiente trimestre valdrá un 1,75 % más. Por lo tanto, en el trimestre $(t+1)$ la ecuación:

$$y(t+1) = y(t) + 0{,}0175y(t)$$

nos dará el valor de la isla. Podemos reescribirlo como:

$$y(t+1) = 1{,}0175 \cdot y(t).$$

Inicialmente, tenemos que el valor de la isla es de 24 dólares. Por lo tanto, $y(0) = 24$. Podemos calcular el valor de la isla los primeros trimestres:

$$y(0) = 24$$

$$y(1) = 24 \cdot 1{,}0175$$

$$y(2) = y(1) \cdot 1{,}0175 = 24 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}0175 = 24 \cdot 1{,}0175^2$$

y encontramos un patrón. Entonces:

$$y(t) = 24 \cdot 1{,}0175^t.$$

Por lo tanto, tras 1488 trimestres:

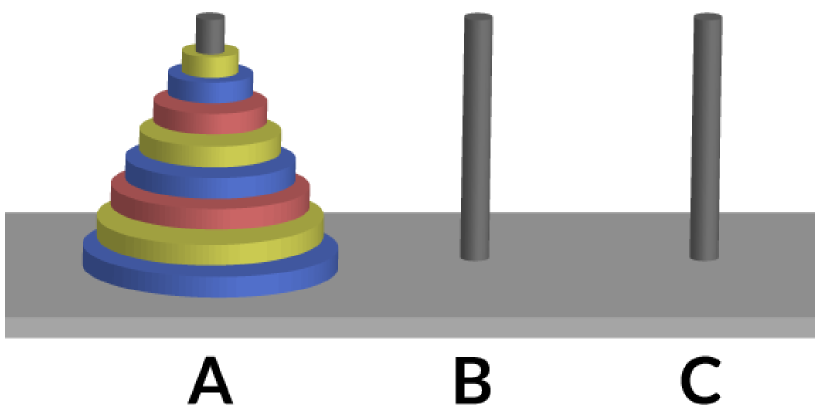
$$y(1488) = 24 \cdot 1{,}0175^{1488} \approx 2{,}0466 \cdot 10^{12}.$$

Con un procedimiento análogo al anterior, podemos resolver problemas en los que nos den una cantidad inicial y un interés, como puede ocurrir en la Economía, para calcular el dinero que obtendremos al cabo de un tiempo depositando una cantidad inicial y con un interés fijo.

En este segundo ejemplo veremos como resolver un famoso rompecabezas inventado en 1883 por el matemático francés Édouards Lucas:

Ejemplo 1.5. El problema de la torre de Hanoi

Tenemos 3 clavijas, y n discos en la primera clavija. El tamaño de cada disco va disminuyendo ascendentemente, como vemos en la siguiente gráfica:



Queremos calcular el número mínimo de movimientos necesarios para mover esos n discos, de forma que queden colocados en la tercera clavija de la misma manera (el más grande siempre va en la parte de abajo, y así sucesivamente), sin poner ningún disco grande sobre uno más pequeño en ningún paso intermedio.

Para resolverlo lo haremos de forma recurrente, es decir, para calcular cuantos movimientos necesitaremos para mover $t+1$ discos, colocaremos todos los discos en la segunda clavija (necesitando $y(t)$ movimientos), después moveremos el disco restante a la tercera clavija, y luego pondremos encima el resto de discos, en y(t) movimientos. Por lo tanto, tenemos que el número de movimientos necesarios serán:

$$y(t+1) = y(t) + 1 + y(t) = 2 \cdot y(t) + 1.$$

Consideramos $y(0) = 0$. Entonces:

- $t = 0 : y(1) = 2y(0) + 1 = 1$
- $t = 1 : y(2) = 2y(1) + 1 = 3$
- $t = 2 : y(3) = 2y(2) + 1 = 7$
- $t = 3 : y(4) = 2y(3) + 1 = 15$

Encontrando un patrón. Entonces, para un t arbitrario, tenemos:

$$y(t) = 2^t - 1.$$

Podemos ver que resolver el problema de la torre de Hanoi para un pequeño número de discos es relativamente sencillo de calcular. Por ejemplo, para 3 discos necesitaríamos 7 movimientos, que fácilmente podríamos calcularlos contando el número de movimientos necesarios, pero para 9 discos necesitaríamos 511 movimientos, lo que ya sería mucho más costoso. Por esto, reafirmamos de nuevo la importancia de las ecuaciones de recurrencia.

Veamos un último ejemplo en el que las ecuaciones de recurrencia son importantes. En este caso, se tratará en el ámbito de la estadística:

Ejemplo 1.6. Problemas estadísticos

Veamos mediante un ejemplo cómo pueden ser útiles las ecuaciones de recurrencia en el ámbito de la estadística. En este caso, vamos a calcular las distintas formas de repartir n caramelos distintos entre k cajas idénticas, de modo que haya algún caramelo en cada caja. A este valor lo denotaremos por $D(n,k)$.

Para calcular $D(n,k)$, consideremos el último caramelo, y distinguimos dos casos:

- Caso 1: Llevamos $n-1$ caramelos metidos en k cajas (tenemos $D(n-1,k)$ formas de hacerlo). Por tanto, el caramelo restante podrá ir en cualquiera de las cajas. En este caso, tenemos $k \cdot D(n-1,k)$ formas de hacerlo.
- Caso 2: Llevamos $n-1$ caramelos metidos en $k-1$ cajas (tenemos $D(n-1,k-1)$ formas de hacerlo). Por tanto,el caramelo restante solo podrá ir en la caja que está vacía. Tenemos $D(n-1,k-1)$ formas de hacerlo.

Por lo tanto:

$$D(n,k) = D(n-1,k-1) + k \cdot D(n-1,k).$$

Por todo esto, tendremos especial interés en estudiar herramientas que nos permitan resolver las ecuaciones de recurrencia, que abordaremos en los siguientes capítulos.

Capítulo 2

Ecuaciones en diferencias

En esta primera sección veremos herramientas que nos serán de utilidad para resolver ecuaciones en diferencias, como el operador diferencia (o incremento) y el operador suma. Cabe resaltar que son los conceptos análogos a la derivada y la integral para las ecuaciones diferenciales. Además del libro principal, nos apoyaremos, puntualmente, en [4].

2.1. El operador diferencia

Comenzamos definiendo el operador diferencia que, como mencionábamos anteriormente, es el análogo a la derivada:

Definición 2.1. Dada una función $y(t)$, definimos el operador diferencia Δ, como $\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$.

Observación 2.2. No es necesario que el paso sea de una unidad.

Observación 2.3. El operador diferencia se puede aplicar a dos o más variables:

$$\begin{aligned} \Delta_t te^n &= (t+1)e^n - te^n = e^n \\ \Delta_n te^n &= te^{n+1} - te^n = te^n(e-1) \end{aligned}$$

Observación 2.4. Para órdenes mayores, usaremos la composición:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(t) &= \Delta(\Delta y(t)) = \Delta(y(t+1) - y(t)) \\ &= (y(t+2) - y(t+1)) - (y(t+1) - y(t)) = y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) \end{aligned}$$

De forma genérica, tenemos que:

$$\Delta^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (t+n-k)$$

Definición 2.5. Definimos el operador desplazamiento de una función $y(t)$, $Ey(t)$, como $Ey(t) = y(t+1)$.

Observación 2.6. Si I denota el operador identidad, podemos redefinir el operador diferencia como $\Delta = E - I$.

A continuación veremos como se comporta el operador diferencia frente a las principales operaciones:

Proposición 2.7. *Se verifica:*
1) $\Delta^m(\Delta^n y(t)) = \Delta^{m+n} y(t)$
2) $\Delta(y(t) + z(t)) = \Delta y(t) + \Delta z(t)$
3) $\Delta(Cy(t)) = C\Delta y(t) + \Delta z(t)$*, siendo* C *una constante.*
4) $\Delta(y(t)z(t)) = y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t)$
5) $\Delta \dfrac{y(t)}{z(t)} = \dfrac{z(t)\Delta y(t) - y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}$

Demostración. Las 3 primeras demostraciones son inmediatas a partir de la definición.
Probaremos (4):

$$\begin{aligned}\Delta(y(t)z(t)) &= y(t+1)z(t+1) - y(t)z(t)\\ &= y(t+1)z(t+1) - y(t)z(t+1) + y(t)z(t+1) - y(t)z(t)\\ &= \Delta y(t)Ez(t) + y(t)\Delta z(t)\end{aligned}$$

Por último, probaremos (5):

$$\begin{aligned}\Delta\frac{y(t)}{z(t)} &= \frac{y(t+1)}{z(t+1)} - \frac{y(t)}{z(t)}\\ &= \frac{z(t)y(t+1) - y(t)z(t+1)}{z(t)z(t+1)}\\ &= \frac{z(t)y(t+1) - z(t)y(t) + z(t)y(t) - y(t)z(t+1)}{z(t)Ez(t)}\\ &= \frac{z(t)\Delta y(t) - y(t)\Delta z(t))}{z(t)Ez(t)}\end{aligned}$$

□

Observación 2.8. Con un razonamiento análogo, podríamos generalizar (3) para más de dos variables:

$$\Delta[x(t)y(t)z(t)] = \Delta x(t)Ey(t)Ez(t) + x(t)y(t)Ez(t) + x(t)y(t)\Delta z(t)$$

En este proposición veremos el valor del operador diferencia sobre las funciones más básicas:

Proposición 2.9. *Se verifica:*
1)$\Delta a^t = (a-1)a^t$
2)$\Delta \sin(at) = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos a\left(t + \frac{1}{2}\right)$
3)$\Delta \cos(at) = -2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos a\left(t + \frac{1}{2}\right)$
4)$\Delta \log(at) = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$
5)$\Delta \log\Gamma(t) = \log t$

Demostración. Los apartados 1), 2) y 5) se prueban del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\Delta a^t &= a^{t+1} - a^t = a^t(a-1) \\
\Delta \sin(at) &= \sin(a(t+1)) - \sin(at) \\
&= \sin(x) - \sin(y) = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\
&= 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos a\left(t+\frac{1}{2}\right) \\
\Delta \log\Gamma(t) &= \log\Gamma(t+1) - \log\Gamma(t) \\
&= \log\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)} = \log(t)
\end{aligned}$$

En la demostración de 2) hacemos el cambio de variable:

$$x = a(t+1), y = at.$$

Los apartados 3) y 4) se resolvería de manera análoga. □

Observación 2.10. Las fórmulas anteriores son igualmente válidas introduciendo una constante:

$$\Delta a^{t+k} = (a-1)a^{t+k}.$$

Combinando estos dos primeros teoremas, podemos obtener nuevos resultados, como puede ser una expresión para el incremento de la tangente. Basta con expresarlo como el cociente de seno entre coseno y aplicar los dos teoremas ya conocidos:

$$\begin{aligned}
\Delta\tan(t) &= \Delta\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos t\Delta\sin t - \sin t\Delta\cos t}{\cos tE\cos t} \\
&= \frac{\cos t\left(2\sin\frac{1}{2}\cos\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) - \sin t\left(-2\sin\frac{1}{2}\sin(t+\frac{1}{2})\right)}{\cos tE\cos t}.
\end{aligned}$$

Desarrollando el numerador, tenemos que:

$$2\cos t\sin\frac{1}{2}\cos\left(t+\frac{1}{2}\right) + 2\sin t\sin\frac{1}{2}\sin\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\cos t\sin\frac{1}{2}\left(\cos t\cos\frac{1}{2} - \sin t\sin\frac{1}{2}\right) + 2\sin t\sin\frac{1}{2}\left(\sin t\cos\frac{1}{2} + \cos t\sin\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2 t\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} - 2\sin t\cos t\sin^2\frac{1}{2} + 2\sin^2 t\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} + 2\sin t\cos t\sin^2\frac{1}{2}$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} = \sin 1.$$

Haciendo lo mismo con el denominador, llegamos a que:

$$\cos tE\cos t = \cos t\cos(t+1) = \cos t(\cos t\cos 1 - \sin t\sin 1) = \cos^2 t\cos 1 - \cos t\sin t\sin 1.$$

Entonces:

$$\frac{\sin 1}{\cos^2 t\cos 1 - \cos t\sin t\sin 1} = \frac{\tan 1}{\cos^2 t - \cos t\sin(t)\tan 1} = \sec^2 t\cdot\frac{\tan 1}{1-\tan(t)\tan 1}.$$

A continuación, introduciremos un concepto similar al de factorial. Cabe resaltar que la idea subyacente es la misma, hacer el producto desde un número natural desciendo unidad a unidad, pero en el factorial descendiente solo intervendrán r factores mientras que en el factorial intervienen todos los necesarios hasta llegar al uno.

Definición 2.11. Definimos la función gamma, Γ, como $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, z \in \mathbb{C}$
Cabe destacar que la integral converge para $Re(z) > 0$.
La siguiente proposición nos permite interpretar a la función Γ como el factorial de cualquier número:

Proposición 2.12. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), z \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2..\}$

Demostración. $\Gamma(z+1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^z = -t^z e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty zt^{z-1}e^{-t}dt = z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z).$ □

Observación 2.13. La fórmula $t^{\underline{r}} = \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$ es válida para cualquier caso en el que $t-r+1$ sea positivo. Por sencillez, sólo la utilizaremos en los casos en los que r no sea entero.

Definición 2.14. Definimos el factorial descendente, $t^{\underline{r}}$, como :
si r=1,2,3... $t^{\underline{r}} = t(t-1)\cdot ... \cdot (t-r+1)$
si r=0 $t^{\underline{r}} = 1$
si r=-1,-2,-3... $t^{\underline{r}} = \dfrac{1}{(t+1)(t+2)\cdot ... \cdot (t-r)}$
si r no es entero $t^{\underline{r}} = \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$

Observación 2.15. Cabe resaltar la existencia del factorial ascendente, que se comporta de la misma manera pero el producto va ascendiendo unidad a unidad. Como en este trabajo no lo utilizaremos, nos limitamos a mencionarlo.

A continuación veremos una definición similar a la de número combinatorio. Como es lógico, la definición estará en términos del factorial descendente:

Definición 2.16. Dados dos enteros t y r, definimos el coeficiente binomial $\binom{t}{r}$, como:

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)}$$

Observación 2.17. En la definición del coeficiente binomial, tiene que existir $\Gamma(r+1)$. Esto pasa si, y solo si, $r \notin \{1, 0, -1...\}$.

Veamos las propiedades esenciales del coeficiente binomial:

Proposición 2.18. *Dados $t, r \in \mathbb{R}$, para los que están definidos los correspondientes números combinatorios, entonces se verifica las siguientes propiedades:*
1) Simetría: $\binom{t}{r} = \binom{t}{t-r}$
2) Sacar del paréntesis: $\binom{t}{r} = \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1}$
3) Fórmula de aditividad: $\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1}$

Demostración. Las 3 demostraciones son casi inmediatas a partir de la definición. Veamos la simetría.

Queremos ver que :

$$\frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{t^{\underline{t-r}}}{\Gamma(t-r+1)}$$

Haciendo uso de la fórmula del factorial descendente en términos de la función Gamma:

$$\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)\Gamma(r+1)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-t+r+1)\Gamma(t-r+1)}$$

Con lo que es inmediato ver que se verifica la igualdad. □

En la siguiente proposición veremos cómo actúa el operador diferencia sobre el factorial descendente y el coeficiente binomial:

Proposición 2.19. *Dados $t, r \in \mathbb{R}$, para los que están definidos los correspondientes operaciones. Entonces, se verifica:*
a)$\Delta_t t^{\underline{r}} = r t^{\underline{r-1}}$
b)$\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1} (r \neq 0)$
c)$\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t}{t+1}$

Demostración. Probemos (a):
Consideremos r un entero positivo. Entonces:

$$\begin{aligned} \Delta_t t^{\underline{r}} &= \Delta_t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= \frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{(t-r+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} \\ &= r\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} = r \cdot t^{\underline{r-1}}. \end{aligned}$$

Ahora, probaremos (b):

$$\Delta_t \binom{t}{r} = \Delta_t \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{r t^{\underline{r-1}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{t^{\underline{r-1}}}{\Gamma(t)} = \binom{t}{r-1}$$

Para (c), basta usar la fórmula de la aditividad enunciada en la proposición previa. □

Con estos resultados, podremos resolver más rápidamente ecuaciones en diferencias, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.20. Resuelve la ecuación $y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = t(t-1)$
Para ello , reescribiremos la ecuación como:

$$\Delta^2 y(t) = t^{\underline{2}}$$

Aplicando el anterior teorema, sabemos que:

$$\Delta^2 t^{\underline{4}} = \Delta 4t^{\underline{3}} = 12t^{\underline{2}}$$

Entonces:

$$y(t) = \frac{t^{\underline{4}}}{12} + at + b$$

es una solución de la ecuación, con $a, b \in \mathbb{R}$.

2.2. El operador suma

Ahora, introduciremos el concepto análogo al de primitiva: el operador suma.

Definición 2.21. La suma indefinida de $y(t)$, denotada por $\sum y(t)$ es cualquier función que verifique que $(\Delta \sum y(t)) = y(t)$.

La suma indefinida no es única, como veremos en el siguiente teorema:

Teorema 2.22. *Sea $z(t)$ suma indefinida de $y(t)$. Entonces, $\sum y(t) = z(t)+C(t)$, donde $\Delta C(t) = 0$, y C tiene el mismo dominio que y.*

Demostración. $\Delta(z(t) + C(t)) = \Delta z(t) + \Delta C(t) = y(t) + 0 = y(t)$. □

A continuación, estudiaremos qué tipo de función es $C(t)$. Esto dependerá del dominio de $y(t)$, distinguiendo dos casos:

Caso 1: el dominio son números enteros positivos.Entonces:

$$C(t+1) - C(t) = 0 \Rightarrow C(t+1) = C(t)$$

Para $t = \{1, 2, 3...\}$, tenemos que $C(1) = C(2) = ... = C(t)$, esto es, $C(t)$ es una función constante.

Caso 2: el dominio es real. Entonces:

$$\Delta C(t) = C(t+1) - C(t) = 0$$

para todo número real t, es decir, C puede ser cualquier función periódica con período 1, no necesariamente constante.

Como hicimos con el operador suma, nos será muy útil conocer el resultado de aplicarle este operador a las funciones más básicas:

Proposición 2.23. *Sea a una constante, y ΔC=0. Entonces:*

a) $\sum a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + C(t)(a \neq 1)$

b) $\sum \sin at = -\dfrac{\cos\left(a\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)$

c) $\sum \cos at = \dfrac{\sin\left(a\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)$

d) $\sum \log t = \log\Gamma(t) + C(t)$

e) $\sum t^{\underline{a}} = \dfrac{t^{\underline{a+1}}}{a+1} + C(t)$

f) $\sum \binom{t}{a} = \binom{t}{a+1} + C(t)$

g) $\sum \binom{a+t}{t} = \binom{a+t}{t-1} + C(t)$

Demostración. b) Dado que

$$\Delta \cos a\left(t-\frac{1}{2}\right) = -2\sin\frac{a}{2}\sin at,$$

tenemos que:

$$\sum \sin at = \frac{-\cos a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t).$$

El resto de demostraciones se resuelven con un procedimiento análogo. Por ejemplo, como:

$$\Delta(\binom{a+t}{t-1} + C(t)) = \Delta\binom{a+t}{t-1} = \binom{a+t}{t}$$

Entonces:

$$\sum \binom{a+t}{t} = \binom{a+t}{t-1} + C(t).$$

□

Observación 2.24. Al igual que en el operador diferencia, las fórmulas son igualmente válidas si introducimos una constante. Por ejemplo:

$$\sum a^{t+1} = \frac{a^{t+1}}{a} + C(t).$$

Ahora ya disponemos de más herramientas para resolver ecuaciones en diferencias. Veamos unos cuantos ejemplos:

Ejemplo 2.25. Resuelve $y(t+2) - 2y(t) + y(t) = t^{\underline{2}}$ sabiendo que $y(0) = -1$, $y(1) = 3$.
Tenemos que:

$$\Delta^2 y(t) = t^{\underline{2}}$$

Por lo tanto:

$$\Delta y(t) = \frac{t^{\underline{3}}}{3} + C$$

Entonces, la solución será de la siguiente forma:

$$y(t) = \frac{t^{\underline{4}}}{12} + Ct + D.$$

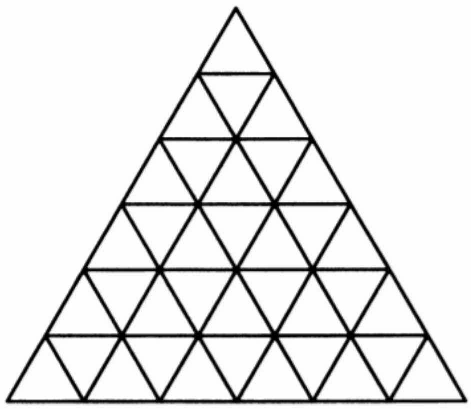
Suponemos que el dominio de t es entero. Imponiendo las condiciones iniciales obtendremos las constantes:

$$y(0) = -1 \Rightarrow D = -1$$

$$y(1) = 3 \Rightarrow C = 4$$

A continuación, veremos otro ejemplo más práctico:

Ejemplo 2.26. Supongamos que un triangulo equilátero se divide en n franjas horizontales. A su vez, cada franja se divide en triángulos equiláteros, alternando uno que apunta hacia arriba con otro que lo hace hacia abajo, empezando con uno que apunte hacia arriba, como vemos en la siguiente gráfica. ¿Cuantos triángulos equiláteros hay apuntando hacia arriba?



Tenemos que $y(1) = 1$.
Consideremos el caso en el que el triangulo está dividido en $n+1$ franjas. Sin tener en cuenta esta última, tendremos $y(n)$ triángulos equiláteros apuntando hacia arriba. Ahora, contamos el número de triángulos equiláteros que hay en esta franja. Si dibujamos el triángulo, podemos observar que cada triángulo que esté apuntando hacia arriba va a formar un triángulo consigo mismo, y uno con cada uno del resto que apuntan hacia arriba. Entonces, para la franja $n+1$ tendremos:

$$y(n+1) = y(n) + (n+1) + n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

triángulos equiláteros apuntando hacia arriba.
Si agrupamos el primer termino de la izquierda con el primero de la derecha, y así sucesivamente, llegamos a que:

$$y(n+1) = y(n) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Entonces:

$$\Delta y(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}(n+2)^{\underline{2}}.$$

Por lo tanto:

$$y(n) = \frac{1}{6}(n+2)^{\underline{3}} + C.$$

Teniendo en cuenta que $y(1) = 1, C = 0$, llegamos a que:

$$y(n) = \frac{1}{6}(n+2)^{\underline{3}}.$$

A continuación, veremos las operaciones principales del operador diferencia:

Proposición 2.27. *Sean y, z dos funciones reales de variable real. Entonces:*
a)$\sum(y(t) + z(t)) = \sum y(t) + \sum z(t)$
b)$\sum Dy(t) = D\sum y(t)$ *(D cte)*
c)$\sum(y(t)\Delta z(t)) = y(t)z(t) - \sum Ez(t)\Delta y(t)$
d)$\sum(EY(t)\Delta z(t)) = y(t)z(t) - \sum z(t)\Delta y(t)$

Demostración. Las demostraciones de a) y b) son inmediatas.
La demostración de d) se obtiene despejando en c).
Veamos c). Como:

$$\Delta(y(t)z(t)) = y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t),$$

entonces:

$$\sum y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t) = y(t)z(t).$$

Por lo tanto:

$$\sum(y(t)\Delta z(t)) = y(t)z(t) - \sum Ez(t)\Delta y(t).$$

□

Veamos una serie de ejemplos:

Ejemplo 2.28. Calcula $\sum t\sin t$

Aplicaremos el apartado c) del resultado anterior:

$$\begin{aligned} y(t) &= t \Rightarrow \Delta y(t) = 1 \\ \Delta z(t) &= \sin t \Rightarrow z(t) = \frac{-\cos\left(t - \frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + C(t) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sum t\sin t &= t\frac{-\cos\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + \sum\frac{\cos(t+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}} + C(t) \\ &= \frac{-t\cos\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\sum\cos\left(t+\frac{1}{2}\right) + C(t) \end{aligned}$$

Desarrollamos $\sum \cos\left(t+\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
\sum \cos(t+\frac{1}{2}) &= \sum \cos t \cos\frac{1}{2} - \sin t \sin\frac{1}{2} \\
&= \cos\frac{1}{2}\sum \cos t - \sin\frac{1}{2}\sum \sin t = \cos\frac{1}{2}\frac{\sin\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} - \sin\frac{1}{2}\frac{\cos\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{1}{2}\right) - \sin\frac{1}{2}\cos\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum t\sin t = \frac{-t\cos\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\frac{\cos\frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{1}{2}\right) - \sin\frac{1}{2}\cos\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + C(t).$$

Para determinar C habría que imponer una condición inicial.

Hagamos otro ejemplo:

Ejemplo 2.29. Calcula $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}^k = \sum\frac{2}{3}^n + C = \frac{\frac{2}{3}^n}{\frac{2}{3}-1} + C = -3\frac{2}{3}^n + C.$$

Para determinar C, necesitamos darle un valor a n.

Tomando $n=2$, obtenemos que $C = \frac{22}{9}$.

Observación 2.30. Antes de introducir el concepto de suma definida, necesitaremos una serie de aclaraciones.

Para un m fijo, y $n \geq m$:

$$\Delta_n\left(\sum_{k=m}^{n-1} y_k\right) = y_n.$$

De aquí, llegamos a que :

$$\sum y_n = \sum_{k=m}^{n-1} y_k + C,$$

siendo C una constante.

Para un p fijo, con $p \geq m$:

$$\Delta_n \sum_{k=n}^{p} y_k = -y_n.$$

Obteniendo que:

$$\sum y_n = -\sum_{k=n}^{p} y_k + D,$$

siendo D una constante.

El siguiente teorema es análogo al teorema fundamental del cálculo:

Teorema 2.31. *Sea z_n la suma indefinida de y_n, entonces:*

$$\sum_{k=m}^{n-1} y_k = [z_k]_m^n = z_n - z_m.$$

Demostración. Aplicando lo visto en la última observación. □

Veamos cómo aplicarlo en un ejemplo:

Ejemplo 2.32. Calcula $\sum_{k=1}^{l} k^2$

Como $k^2 = k^{\underline{1}} + k^{\underline{2}}$, tenemos que :

$$\sum_{k=1}^{l} k^2 = \sum k^{\underline{1}} + \sum k^{\underline{2}} = \frac{k^{\underline{2}}}{2} + \frac{k^{\underline{3}}}{3} + C.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l} k^2 &= \left[\frac{k^{\underline{2}}}{2} + \frac{k^{\underline{3}}}{3}\right]_l^{l+1} = \frac{(l+1)^{\underline{2}}}{2} + \frac{(l+1)^{\underline{3}}}{3} - \frac{(l)^{\underline{2}}}{2} - \frac{(l)^{\underline{3}}}{3} \\
&= \frac{(l+1)l}{2} + \frac{(l+1)l(l-1)}{3} = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}.
\end{aligned}$$

A continuación, veremos el resultado análogo a la integración por partes:

Teorema 2.33. *Sea $m < n$, entonces:*

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \Delta b_k = [a_k b_k]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta a_k) b_{k+1}.$$

Demostración. Sea $y(n) = a_n, z(n) = b_n$ en el Teorema 2.27. (c):

$$\sum a_n \Delta b_n = a_n b_n - \sum (\Delta a_n) b_{n+1}$$

Por la observación 2.30, tenemos:

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta a_k) b_{k+1} + C$$

Tomando $n = m + 1$, deducimos que:

$$a_m \Delta b_m = a_{m+1} b_{m+1} - (\Delta a_m) b_{m+1} + C$$

Por lo tanto, $C = -a_m b_m$, como queríamos demostrar. □

Este método será de especial utilidad cuando tenemos un producto de la forma $p(n)a^n, p(n)\sin(an)$, $p(n)\binom{n}{a}$, donde $p(n)$ es un polinomio. Nótese que además de $\sin(an)$, también valdrá para $\cos(an)$. Tendremos que utilizar tantas veces este método como el grado de p.

Observación 2.34. Alternativamente, tenemos la fórmula de Abel:

$$\sum_{k=m}^{n-1} c_k d_k = d_n \sum_{k=m}^{n-1} c_k - \sum_{k=m}^{n-1} (\sum_{i=m}^{k} c_i) \Delta d_k$$

Para terminar esta sección, veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 2.35. Calcula $\sum_{k=1}^{n-1} k3^k$

Tomando $a_k = k, \Delta b_k = 3^k$, tenemos :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k3^k = \left[k\frac{3^k}{2}\right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^{k+1}}{2}.$$

Además:

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^n - 3}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k3^k = \frac{n3^n - 3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{3^n - 3}{2}\right) = \frac{(2n-3)3^n + 3}{4}.$$

Ejemplo 2.36. Calcula $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{i+a}{m}$.

Tomando y(i)=$\binom{i+a}{m}$ tenemos $\Delta^n \binom{i+a}{m} = \binom{i+a}{m-n}$.

Por lo tanto:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{i+a}{m} = (-1)^n \binom{a}{m-n}.$$

Capítulo 3

Ecuaciones en diferencias lineales

3.1. Ecuaciones de primer orden

En este capítulo hablaremos de las ecuaciones de primer orden, y de su resolución, centrándonos sobre todo en las ecuaciones donde los coeficientes son constantes.Además del libro principal, utilizaremos también [2] y [3].

A continuación, definiremos las ecuaciones de primer orden. Decimos que son de primer orden porque el mayor valor que aparece es $t+1$.

Definición 3.1. Sean p(t) y r(t) dos funciones, con $p(t) \neq 0$ para todo t. Decimos que una ecuación de la forma $y(t+1) - p(t)y(t) = r(t)$ es de primer orden.

Observación 3.2. En esta sección trabajaremos con un dominio discreto.

Ejemplo 3.3. $y(t+1) - y(t) = 10$ es una ecuación de primer orden.

Observación 3.4. Hay ecuaciones que a simple vista pueden parecer de primer orden, pero pueden no serlo. Consideremos la siguiente ecuación, que a priori puede parecer de primer orden:

$$\Delta y(t) + y(t) = e^t.$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad, tenemos que:

$$\Delta y(t) + y(t) = y(t+1) - y(t) + y(t) = y(t+1).$$

Por tanto, como $p(t) = 0$, no es de primer orden.

Observación 3.5. Si $p(t) = 1$ para todo t, tenemos que:

$$\Delta y(t) = r(t) \Rightarrow y(t) = \sum r(t) + C(t),$$

donde $\Delta C(t) = 0$

Definición 3.6. Dada una ecuación en diferencias de primer orden $y(t+1) - p(t)y(t) = r(t)$, definimos su ecuación homogénea asociada como:

$$u(t+1) = p(t)u(t). \tag{3.1}$$

Teorema 3.7. *Dada una ecuación en diferencias de primer orden y su ecuación homogénea asociada, la solución de la homogénea viene dada por* $u(t) = u(a)\prod_{s=a}^{t-1} p(s)$ *, con* $t \in \{a, a+1, a+2...\}$

Demostración. Sea la ecuación homogénea $u(t+1) = p(t)u(t)$. Considerando que su dominio es $t \in \{a, a+1, a+2...\}$, podemos iterar:

$$u(a+1) = p(a)u(a)$$

$$u(a+2) = p(a+1)u(a+1)$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$u(a+n) = u(a)\prod_{k=0}^{n-1} p(a+k)$$

Podemos reescribirlo como:

$$u(t) = u(a)\prod_{s=a}^{t-1} p(s).$$

□

Corolario 3.8. *En ecuaciones homogéneas del tipo* $u(t+1) = cu(t)$*, donde* c *es una constante, tenemos que* $u(t) = Ac^t$ *es solución.*

Demostración. Es inmediata.Como:

$$u(t) = u(a)\prod_{s=a}^{t-1} c,$$

entonces:

$$u(t) = u(a)c^t.$$

□

Veamos un sencillo ejemplo de como calcular la solución de la ecuación homogénea asociada a una ecuación de primer orden:

Ejemplo 3.9. Calcula las soluciones de $u(t+1) - e^{3t}u(t) = 0, t \in \{0, 1...\}$.
En virtud del Teorema 3.7., las soluciones vendrán dada por la expresión:

$$u(t) = u(a)\prod_{s=a}^{t-1} p(s).$$

Agrupando el primer término de la izquierda con el último de la derecha, y así sucesivamente, y considerando que hay $(t-1)$ factores, tenemos que:

$$\prod_{s=a}^{t-1} e^{3s} = 1 \cdot e^3 \cdot e^6 \cdot \ \cdots \ \cdot e^{3(t-3)} \cdot e^{3(t-2)} \cdot e^{3(t-1)} = e^{3(t-1)\frac{t}{2}}.$$

Por lo tanto:

$$u(t) = u(0)e^{3(t-1)\frac{t}{2}}.$$

Ahora, ya conocida la solución de la homogénea asociada, nos disponemos a resolver la ecuación de primer orden completa.

Teorema 3.10. *Sea $y(t+1) - p(t)y(t) = r(t)$ una ecuación en diferencias de primer orden, y $u(t)$ la solución de la homogénea asociada. Entonces, su solución viene dada por:*

$$y(t) = u(t)\sum \frac{r(t)}{Eu(t)} + C,$$

siendo C una constante y $u(t)$ una función sin ningún cero.

Demostración. Buscamos una solución de la forma $y(t) = u(t)v(t)$. Sustituyendo, tenemos que:

$$r(t) = u(t+1)v(t+1) - p(t)u(t)v(t).$$

Sacando factor común, y teniendo en cuenta que:

$$v(t+1) - v(t) = \Delta v(t), p(t)u(t) = u(t+1),$$

obtenemos que:

$$r(t) = u(t+1)\Delta v(t).$$

Entonces:

$$v(t) = \Delta^{-1}\frac{r(t)}{u(t+1)} = \sum \frac{r(t)}{Eu(t)} + C.$$

Finalmente, llegamos a que:

$$y(t) = u(t)v(t) = u(t)\left(\sum \frac{r(t)}{Eu(t)} + C\right).$$

□

Ejemplo 3.11. Calcula la solución de $y(t+1) - 3y(t) = e^t$, sabiendo que $y(1) = 2$.
Primero, resolvemos la homogénea:

$$u(t+1) = 3u(t) \Rightarrow u(t) = u(0)3^t$$

Ahora, procedemos con la general:

$$y(t) = u(0)3^t \sum \frac{e^t}{u(0)3^{t+1}} + C.$$

Entonces:

$$y(t) = 3^t \sum e^t(3^{-t-1}) + C.$$

Como:

$$\sum e^t \cdot 3^{-t-1} = \frac{-3^{-t}e^t}{(e-2)^2},$$

tenemos que:

$$y(t) = 3t \cdot \frac{-3^{-t}e^t}{(e-2)^2} + C.$$

Imponiendo la condición inicial $y(1) = 2$, llegamos a que:

$$C = 2 + \frac{e}{(e-2)^2}.$$

Por tanto, deducimos que:

$$y(t) = 3t \cdot \frac{-3^{-t}e^t}{(e-2)^2} + 2 + \frac{e}{(e-2)^2}.$$

Veamos otro ejemplo más de cómo calcular la solución de la ecuación general:

Ejemplo 3.12. Calcula la solución de $y(t+1) - \frac{n}{n+1}y(t) = \frac{n}{n+1}$.
Primero, calculamos la solución de la homogénea. Como:

$$u(t+1) = \frac{n}{n+1}u(t),$$

tenemos que:

$$u(t) = u(0)\left(\frac{n}{n+1}\right)^t$$

Partiendo de que:

$$y(t) = u(0)\frac{n^t}{(n+1)^t}\sum \frac{n}{n+1}\frac{(n+1)^{t+1}}{u(0)n^{t+1}} + C,$$

llegamos a que:

$$y(t) = \frac{n^t}{(n+1)^t}\sum \frac{(n+1)^t}{n^t} + C.$$

Entonces:

$$y(t) = \frac{n^t}{(n+1)^t}\frac{(n+1)^t}{n^{t+1}} + C.$$

Por tanto, la solución será:

$$y(t) = \frac{1}{n} + C.$$

Para determinar C habría que imponer una condición inicial.

Para terminar esta sección, veamos una serie de ejemplos donde mostremos la utilidad de las ecuaciones de primer orden en la vida cotidiana:

Ejemplo 3.13. Supongamos que depositamos al inicio de cada año 2000$ en una cuenta que nos da un interés anual del 8 %. Cuánto tendremos al cabo de t años?
Sea $y(t)$ la cantidad de dinero que tendremos al acabar el año t. El año siguiente tendremos:

$$y(t+1) = y(t) + (y(t) + 2000) \cdot (0{,}08) + 2000 = 1{,}08y(t) + 2160.$$

Primero, buscamos solución de la homogénea:

$$u(t+1) = 1{,}08u(t).$$

Por tanto:

$$u(t) = u(1) \prod_{s=a}^{t-1} p(s).$$

Entonces:

$$u(t) = u(0)(1{,}08)^t.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} y(t) &= (1{,}08)^t \sum \frac{2160}{(1{,}08)^{t+1}} + C \\ &= (1{,}08)^t \frac{2160}{1{,}08} \sum (\frac{1}{1{,}08})^t + C \\ &= (1{,}08)^t \frac{2160}{1{,}08} \frac{\frac{1}{1{,}08}^t}{\frac{1}{1{,}08} - 1} + C \\ &= -27000 + C(1{,}08)^t. \end{aligned}$$

Como $y(0) = 0$, tenemos que $C = 27000$.
Por lo tanto:

$$y(t) = 27000 \cdot ((1{,}08)^t - 1).$$

Ejemplo 3.14. Calcula el número de cuadrados de todas las dimensiones en un tablero de dimensiones $t \times t$.
Veamos que el número de cuadrados de todas las dimensiones de un tablero $(t+1) \times (t+1)$, viene dado por la siguiente fórmula de recurrencia:

$$y(t+1) = y(t) + t^2 + 2t + 1.$$

En un tablero $(t+1) \times (t+1)$, tenemos, sin contar la última fila y la última columna, $y(t)$ cuadrados de todas las dimensiones. Calculemos el número de nuevos cuadrados que obtenemos al añadir una fila y una columna.

De dimensión 1, obtendremos $t+1$ nuevos cuadrados por parte de la última fila, y t por parte de la última columna (ya que el último cuadrado de ésta pertenece a la última fila también). Un total de $t+1+t = 2t+1$ nuevos cuadrados.

De dimensión 2, obtendremos t nuevos cuadrados por parte de la última fila (cada cuadrado individual hará uno de dimensión 2×2 con el de su derecha, salvo el último), y $t-1$ por parte de la última columna. Un total de $2t-1$ nuevos cuadrados.

De forma general, tendremos $2t+3-2i$ nuevos cuadrados de dimensión i.

Por tanto , tendremos $\sum_{i=1}^{t+1}(2t+3-2i)$ nuevos cuadrados, lo cual resulta ser:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t+1}(2t+3-2i) &= \sum_{i=1}^{t+1}(2t+3) - 2\sum_{i=1}^{t+1} i \\ &= (t+1)(2t+3) - 2((t+2)\frac{t+1}{2}) = (t+1)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de cuadrados en un tablero $(t+1) \times (t+1)$ viene dado por la siguiente fórmula de recurrencia:

$$y(t+1) = y(t) + t^2 + 2t + 1.$$

Primero, resolvemos la homogénea:

$$u(t+1) = u(t) \Rightarrow u(t) = u(0).$$

Ahora, procedemos con la general:

$$y(t) = u(0)\sum \frac{(t+1)^2}{u(0)} + C.$$

Por lo tanto:

$$y(t) = \sum (t+1)^2 + C.$$

Entonces:

$$y(t) = \sum (t^2 + 2t + 1) + C.$$

Ahora, tenemos que:

$$y(t) = (\sum t^{\underline{1}} + t^{\underline{2}}) + \sum 2t + 1 + C.$$

Finalmente, la solución vendrá dada por:

$$y(t) = \frac{t^{\underline{2}}}{2} + \frac{t^{\underline{3}}}{3} + 2(\frac{t^{\underline{2}}}{2}) + t + C.$$

Para hallar C, debemos imponer una condición inicial. Como en un tablero 1x1 tenemos un único cuadrado, tendemos que $y(1) = 1$. Entonces:

$$y(1) = 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0.$$

Por tanto, la solución será:

$$y(t) = \frac{t^{\underline{2}}}{2} + \frac{t^{\underline{3}}}{3} + 2\left(\frac{t^{\underline{2}}}{2}\right) + t.$$

3.2. Ecuaciones de orden n

Definición 3.15. Definimos la ecuación lineal de orden n como

$$p_n(t)y(t+n) + \cdots + p_0(t)y(t) = r(t), \tag{3.2}$$

donde $p_0(t), \cdots, p_n(t)$ y $r(t)$ son conocidos, y $p_0(t) \neq 0$, $p_n(t) \neq 0$ para todo t.

Para resolverla, procederemos de una forma similar a como hacíamos en la sección anterior. Primero, resolveremos la ecuación homogénea asociada, para después proceder a resolver la ecuación general. En el siguiente teorema, veremos que, dada una condición inicial, la solución es única.

Teorema 3.16. *Sean $p_0(t), \cdots, p_n(t)$ definidos para $t \in \{a, a+1...\}$ y $p_0(t) \neq 0, p_n(t) \neq 0$ para todo t. Entonces, para cualesquiera $y_0, \cdots, y_{n-1}$, existe un único $y(t)$ que satisfaga la ecuación general para $t \in \{a, a+1...\}$ y $y(t_0+k) = y_k$ para $k \in \{0, \cdots, n-1\}$*

Demostración. Podemos calcular $y(t_0+n)$ de manera iterativa, conociendo los valores que le preceden, y un t_0 fijado:

$$y(t_0+n) = \frac{r(t_0) - p_{n-1}(t_0)y_{n-1} - \cdots - p_0(t_0)y_0}{p_n(t_0)}.$$

□

Ahora, estudiemos las propiedades más significativas de las soluciones, tanto de la ecuación general como de la homogénea:

Teorema 3.17. *a) Si $u_1(t), u_2(t)$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces $Cu_1(t) + Du_2(t)$ también, para cualesquiera constantes C, D.*
b) Si $u(t)$ es solución de la homogénea, $y(t)$ de la general, entonces $u(t)+y(t)$ también es solución de la ecuación general.
c) Si $y_1(t), y_2(t)$ son soluciones de la ecuación general, entonces $y_1(t) - y_2(t)$ es solución de la ecuación homogénea.

Demostración. Todas se obtienen facilmente sustituyendo. Veamos, por ejemplo, la demostración de a):
$u_1(t)$ es solución de la homogénea. Por lo tanto:

$$p_n(t)u_1(t+n) + \cdots + p_0(t)u_1(t) = 0.$$

$u_2(t)$ es solución de la homogénea. Por lo tanto:

$$p_n(t)u_2(t+n) + \cdots + p_0(t)u_2(t) = 0.$$

Multiplicando la primera expresión por C, y la segunda por D, tenemos:

$$Cp_n(t)u_1(t+n) + \cdots + Cp_0(t)u_1(t) = 0.$$

$$Dp_n(t)u_2(t+n) + \cdots + Dp_0(t)u_2(t) = 0.$$

Sumando ambas expresiones, y sacando factor común llegamos a que:

$$(Cu_1(t+n) + Du_2(t+n))p_n(t) + \cdots + (Cu_1(t+n) + Du_2(t+n))p_0(t) = 0.$$

Con lo que concluímos que $Cu_1(t) + Du_2(t)$ también es solución de la ecuación homogénea. □

Gracias a este resultado, seremos capaces de construír nuevas soluciones de la general y de la homogénea a partir de otras ya conocidas. Por ejemplo, la diferencia de dos soluciones de la ecuación general, es solución de la homogénea.

Corolario 3.18. *Si z(t) es una solución de la ecuación general, entonces cualquier otra solución de la general es de la forma:*

$$y(t) = z(t) + u(t),$$

donde $u(t)$ es una solución de la ecuación homogénea.

Observación 3.19. Para probar este último corolario basta sustituír en el apartado c) del anterior teorema.

Por tanto, para hallar todas las soluciones de la ecuación general basta con encontrar una solución particular de la general y todas las de la homogénea.

Definición 3.20. Decimos que las funciones $\{u_1(t), \cdots, u_m(t)\}$ son linealmente dependientes para el conjunto $\{a, a+1...\}$ si existen constantes $C_1, \cdots, C_m$, alguna distinta de 0, tales que:

$$C_1u_1(t) + \cdots + C_mu_m(t) = 0,$$

para todo $t \in \{a, a+1..\}$.
En otro caso, diremos que son linealmente independientes.

Existen funciones que, dependiendo de donde estén definidas, pueden ser linealmente dependientes o independientes:

Ejemplo 3.21. Las funciones $u_1(t) = 2$, $u_2(t) = 1 + \cos\pi t$ son linealmente independientes si $t \in \{1, 2..\}$, pero son linealmente dependientes si $t \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}...\}$, ya que $u_1(t) - 2u_2(t) = 0$ $\forall t \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}...\}$.

Definición 3.22. Definimos la matriz de Casorati como:

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1(t+1) & u_2(t+1) & \cdots & u_n(t+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1(t+n-1) & u_2(t+n-1) & \cdots & u_n(t+n-1) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Al determinante de la matriz de Casorati lo conocemos como el Casoratiano.

A continuación, vemos una caracterización para saber cuándo un conjunto de funciones es linealmente dependiente a partir de su Casoratiano.

Teorema 3.23. *Sean $u_1(t), \cdots, u_m(t)$ soluciones de la ecuación homogénea para $t \in \{a, a+1...\}$. Entonces, equivalen:*
a) $\{u_1(t), \cdots, u_m(t)\}$ son linealmente dependientes para $t \in \{a, a+1...\}$.
b) $W(t) = 0$ para algún t.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$:
Supongamos que $\{u_1(t), \cdots, u_m(t)\}$ son linealmente dependientes. Entonces, existen $C_1, \cdots, C_m$, alguna distinta de 0, tales que:

$$\begin{aligned} C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + \cdots + C_nu_n(t) &= 0 \\ C_1u_1(t+1) + C_2u_2(t+1) + \cdots + C_nu_n(t+1) &= 0 \\ &\cdots \\ C_1u_1(t+n-1) + C_2u_2(t+n-1) + \cdots + C_nu_n(t+n-1) &= 0 \end{aligned}$$

para $t = \{a, a+1...\}$
Si este sistema tiene solución no trivial, entonces el determinante de los coeficientes, $W(t)$, es 0 para $t \in \{a, a+1..\}$.
$b) \Rightarrow a)$: Supongamos $W(t_0) = 0$. Entonces, existen constantes $C_1, \cdots, C_n$, alguna distinta de 0, tales que:

$$\begin{aligned} C_1u_1(t_0) + C_2u_2(t_0) + \cdots + C_nu_n(t_0) &= 0 \\ C_1u_1(t_0+1) + C_2u_2(t_0+1) + \cdots + C_nu_n(t_0+1) &= 0 \\ &\cdots \\ C_1u_1(t_0+n-1) + C_2u_2(t_0+n-1) + \cdots + C_nu_n(t_0+n-1) &= 0 \end{aligned}$$

Sea $u(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + \cdots + c_nu_n(t)$, entonces u(t) es solución de la ecuación homogénea. Además:

$$u(t_0) = u(t_0+1) = \cdots = u(t_0+n-1) = 0.$$

Entonces, en virtud del Teorema 3.17, $u_1, \cdots, u_n$ son linealmente dependientes. □

Teorema 3.24. *Sean $u_1(t), \cdots, u_m(t)$ soluciones independientes de la ecuación homogénea. Entonces, cualquier solución de la homogénea, $u(t)$, puede ser escrita como:*

$$u(t) = C_1u_1(t) + \cdots + C_nu_n(t)$$

para ciertas constantes $C_1, \cdots, C_n$.

Demostración. Sea $u(t)$ una solución de la homogénea. Como $W(t) \neq 0$ para $t \in \{a, a+1...\}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} C_1u_1(a) + \cdots + C_nu_n(a) &= u(a) \\ &\cdots \\ C_1u_1(a+n-1) + \cdots + C_nu_n(a+n-1) &= u(a+n-1) \end{aligned}$$

tiene una única solución $C_1, \cdots, C_n$. Como una solución de la homogénea está unicamente determinada por sus valores en $t \in \{a, a+1 ...\}$, entonces:

$$u(t) = C_1 u_1(t) + \cdots + C_n u_n(t)$$

para todo t. □

Para concluír esta sección, veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.25. Consideremos la ecuación homogénea $u(t+2) - 5u(t) + 6u(t) = 0$.

$$w(t) = \begin{vmatrix} 2^t & 3^t \\ 2^t & 2 \cdot 3^t \end{vmatrix} = 2^t \cdot 3^t \neq 0, \forall t$$

Por lo tanto, 2^t y 3^t son linealmente independientes, con lo cual las soluciones son de la forma:

$$u(t) = C_1 2^t + C_2 3^t$$

3.2.1. Ecuaciones con coeficientes constantes

Ahora, buscamos n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea para el caso de que todos los coeficientes sean constantes.

Si $p_n \neq 0$, podemos dividir ambos lados por p_n, obteniendo:

$$u(t+n) + p_{n-1} u(t+n-1) + \cdots + p_0 u(t) = 0, \tag{3.4}$$

donde $p_0, \cdots, p_{n-1}$ son constantes, y $p_0 \neq 0$.

Definición 3.26. Llamamos polinomio característico al polinomio $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0$. A la ecuación $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_0 = 0$ le llamamos ecuación característica, y a las soluciones $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ raíces características.

A continuación, veremos un teorema con el que podremos obtener las soluciones del problema (3.4).

Teorema 3.27. *Supongamos que* (3.4) *tiene raíces características* $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$*, con multiplicidades* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$*. Entonces,* (3.4) *tiene n soluciones independientes* $\lambda_1^t, \cdots, t^{\alpha_1 - 1}\lambda_1^t, \cdots, \lambda_k^t, \cdots, t^{\alpha_k - 1}\lambda_k^t$.

Demostración. Primero, escribimos (3.4) en términos del operador desplazamiento:

$$(E^n + p_{n-1}E^{n-1} + \cdots + p_0)u(t) = 0.$$

Equivalentemente, dada la expresión de su polinomio característico, tenemos:

$$(E - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (E - \lambda_k)^{\alpha_k} u(t) = 0. \tag{3.5}$$

Centrémonos en resolver la siguiente parte de la ecuación:

$$(E - \lambda_1)^{\alpha_1} u(t) = 0.$$

Claramente, cualquier solución de esta también lo será de (3.5)

Si $\alpha_1 = 1$, es claro que $u(t) = \lambda_1^t$.

Si $\alpha_1 > 1$, busquemos una solución de la forma $\lambda_1^t v(t)$:

$$\begin{aligned}
(E-\lambda_1)^{\alpha_1}\lambda_1^t v(t) &= \sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}(-\lambda_1)^{\alpha_1-i}E^i\lambda_1^t v(t) \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}(-\lambda_1)^{\alpha_1-i}\lambda_1^{t+i}E^i v(t) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1+t}\sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}(-1)^{\alpha_1-i}E^i v(t) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1+t}(E-1)\alpha_1 v(t) \\
&= \lambda^{\alpha_1+t}\Delta^{\alpha_1}v(t) = 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual se verifica si, y solo si, $v(t) = 1, t, \cdots, t^{\alpha_1-1}$.

Por tanto, (3.4) tiene α_1 soluciones $\lambda_1^t, \cdots, t^{\alpha_1-1}\lambda_1^t$, que son claramente linealmente independientes.

Procediendo de manera análoga, obtentendremos las n soluciones linealmente independientes.

Observación 3.28. Si tenemos una raíz compleja, $\lambda = a \pm bi$, usando la fórmula de Euler llegamos a que :

$$\lambda^t = r^t(cos\theta t \pm i\sin\theta t)$$

donde $a^2 + b^2 = r^2$, y $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$.

Por tanto, el conjunto de soluciones asociado será:

$$\{\cos\theta t, t\cos\theta t, \cdots, t^{\alpha_1-1}\cos\theta t\}, \{\sin\theta t, t\sin\theta t, \cdots, t^{\alpha_1-1}\sin\theta t\}$$

$\square$

A continuación, veamos un ejemplo donde se manifieste la gran utilidad de este último teorema.

Ejemplo 3.29. Resuelve la siguiente ecuación:

$$u(t+2) + 6u(t+1) + 3u(t) = 0.$$

Tenemos la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 0.$$

Entonces:

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 3}}{2} = -3 \pm \sqrt{6}.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$u_1(t) = (-3+\sqrt{6})^t, u_2(t) = (-3-\sqrt{6})^t$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación considerada.

Observación 3.30. Podríamos comprobar la independencia lineal de las soluciones con el Casoratiano.

A continuación presentamos el método de los aniquiladores, que sirve para resolver una ecuación general con coeficientes constantes. La idea consiste en transformar la ecuación completa en una homogénea haciendo uso del operador desplazamiento:

Teorema 3.31. *Supongamos que y(t) es solución de la ecuación general con coeficientes constantes, esto es:*

$$(E^n + p_{n-1}E^{n-1} + \cdots + p_0)y(t) = r(t),$$

donde r(t) satisface que:

$$(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + \cdots + q_0)r(t) = 0.$$

Entonces:

$$(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + \cdots + q_0)(E^n + p_{n-1}E^{n-1} + \cdots + p_0)y(t) = 0.$$

Demostración. Es trivial. Basta multplicar por $(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + \cdots + q_0)$ a ambos lados de la igualdad. □

Ejemplo 3.32. Vamos a buscar la solución de $y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = 3t + 5$ haciendo uso del método de los aniquiladores.

Lo primero, es reescribir la ecuación en términos del operador desplazamiento:

$$(E^2 - 2E + 1)y(t) = 3t + 5.$$

A continuación, buscamos aniquilar la parte derecha de la igualdad.
Como $\Delta^2(3t+5) = 0$, entonces:

$$(E-1)^2(3t+5) = 0.$$

Ahora, procedemos a resolver la ecuación:

$$(E^2 - 2E + 1)(E-1)^2 = 0.$$

Equivalentemente:

$$(E-1)^4 = 0.$$

Por lo tanto:

$$\lambda = 1, \alpha = 4.$$

La solución será de la forma:

$$y(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4t^3.$$

Como los dos primeros sumandos satisfacen la parte homogénea, basta sustituír los dos siguientes para determinar C_3 y C_4, obteniendo:

$$\begin{aligned} y(t+2) &= C_3(t+2)^2 + C_4(t+2)^3 \\ &= C_3(t^2+4t+4) + C_4(t^3+6t^2+12t+8) \\ y(t+1) &= C_3(t+1)^2 + C_4(t+1)^3 \\ &= C_3(t^2+2t+1) + C_4(t^3+3t^2+3t+1) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos que:

$$C_3(t^2+4t+4)+C_4(t^3+6t^2+12t+8)-2(C_3(t^2+2t+1)+C_4(t^3+3t^2+3t+1))+C_3t^2+C_4t^3 = 3t+5.$$

Agrupando término a término:

$$\begin{aligned} 4C_3 + 8C_4 - 2C_3 - 2C_4 &= 5 \\ 4C_3 + 12C_4 - 4C_3 - 6C_4 &= 3 \\ C_3 + 6C_4 - 2C_3 - 6C_4 + C_3 &= 0 \\ C_4 - 2C_4 + C_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$4C_3 + 12C_4 - 4C_3 - 6C_4 = 3 \Rightarrow C_4 = \frac{1}{2}.$$
$$4C_3 + 8C_4 - 2C_3 - 2C_4 = 5 \Rightarrow C_3 = 1.$$

Entonces, tenemos:

$$y(t) = C_1 + C_2t + t^2 + \frac{t^3}{2}.$$

Para hallar C_1, C_2 habría que imponer condiciones iniciales.

Ahora, veremos un ejemplo muy práctico y de gran utilidad:

Ejemplo 3.33. A la hora de amortizar una deuda, tendremos en cuenta los siguientes factores: el dinero total que tengo que pagar (A), los intereses (I, siendo I un porcentaje), el pago en cada período (R) y el pago restante tras t pagos ($P(t)$). Considerando el período $t+1$, tendremos que pagar la deuda que teníamos en el período anterior, más el interés. Considerando que en ese período realizamos un pago de R, tenemos que:

$$P(t+1) = (1+I)P(t) - R.$$

Obviamente, como el dinero total que tengo que pagar es A, tendremos que:

$$P(0) = A.$$

Resolviendo la ecuación, llegaremos a que:

$$P(t) = A(1+I)^t - R\frac{(1+I)^t - 1}{I}.$$

Ahora, considerando que queremos amortizar la deuda en n pagos:

$$P(n) = 0.$$

Entonces:

$$R = \frac{A \cdot I}{1-(1+I)^{-n}}.$$

Entonces, para calcular el número de pagos necesarios n para amortizar una deuda A con un interés I y un pago de R en cada período, tenemos la siguiente ecuación:

$$A(1+I)^n - \frac{A}{1-(1+I)^{-n}} \cdot ((1+I)^n - 1) = 0.$$

Para terminar con el método de los aniquiladores, ilustraremos como resolver un sistema de ecuaciones haciendo uso de este método:

Ejemplo 3.34. Vamos a resolver el siguiente sistema haciendo uso del método de los aniquiladores.

$$\begin{aligned} u(t+1) - 4u(t) - v(t) &= 3^t \\ u(t+1) - 2u(t) + v(t+1) - 2v(t) &= 2 \end{aligned}$$

Empezamos reescribiendo ambas ecuaciones en términos del operador desplazamiento:

$$\begin{aligned} (E-4)u(t) - v(t) &= 3^t \\ (E-2)u(t) + (E-2)v(t) &= 2 \end{aligned}$$

Ahora, eliminamos $v(t)$ multiplicando arriba por $(E-2)$ y sumando ambas expresiones:

$$(E-4)(E-2)u(t) + (E-2)u(t) = (E-2)3^t + 2.$$

Por lo tanto:

$$(E-2)(E-3)u(t) = 3^t + 2.$$

Ahora, aniquilamos la parte derecha de la igualdad aplicando $(E-I)(E-3)$ a ambos lados de la igualdad:

$$(E-2)(E-3)^2(E-I)u(t) = 0.$$

Entonces, $\lambda_1 = 2$ simple, $\lambda_2 = 3$ doble, $\lambda_3 = 1$ simple, por lo que la solución será de la forma:

$$u(t) = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot 3^t + C_3 \cdot t \cdot 3^t + C_4.$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$(E-2)(E-3)(C_3 \cdot t \cdot 3^t + C_4) = 3^t + 2.$$

Operando, llegamos a que:

$$C_3 \cdot 3^{t+1} + 2C_4 = 3^t + 2.$$

Con lo que:

$$C_3 = \frac{1}{3}, C_4 = 1$$

A continuación, presentamos otro método para resolver ecuaciones con coeficientes constantes, conocido como método de variación de parámetros.

Teorema 3.35. *Sea $u_1(t), \cdots, u_n(t)$ soluciones de la ecuación homogénea linealmente independientes. Entonces:*

$$y(t) = a_1(t)u_1(t) + \cdots + a_n(t)u_n(t)$$

es solución de la ecuación general, siempre que $a_1, \cdots, a_n$ cumplan que:

$$W(t+1)\begin{bmatrix}\Delta a_1(t)\\ \cdots \\ \Delta a_n(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ \frac{r(t)}{p_n(t)}\end{bmatrix}$$

Demostración. Supongamos n=2.
Sean u_1, u_2 dos soluciones independientes de la homogénea. Buscamos una solución de la general de la siguiente forma:

$$y(t) = a_1(t)u_1(t) + a_2(t)u_2(t).$$

donde a_1, a_2 han de ser determinados.
Tenemos que:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= a_1(t+1)u_1(t+1) + a_2(t+1)u_2(t+1) \\ &= a_1(t)u_1(t+1) + a_2(t)u_2(t+1) + \Delta a_1(t)u_1(t+1) + \Delta a_2(t)u_2(t+1) \end{aligned}$$

Escogiendo a_1, a_2 tales que:

$$\Delta a_1(t)u_1(t+1) + \Delta a_2(t)u_2(t+1) = 0 \tag{3.6}$$

podemos eliminar los dos últimos términos.
Ahora, tenemos que:

$$\begin{aligned} y(t+2) &= a_1(t+1)u_1(t+2) + a_2(t+1)u_2(t+2) \\ &= a_1(t)u_1(t+2) + a_2(t)u_2(t+2) + \Delta a_1(t)u_1(t+2) + \Delta a_2(t)u_2(t+2). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación general, y agrupando términos, tenemos que:

$$p_2(t)y(t+2) + p_1(t)y(t+1) + p_0(t)y(t)$$

$$= a_1(t)[p_2(t)u_1(t{+}2){+}p_1(t)u_1(t{+}1){+}p_0(t)u_1(t)]{+}a_2(t)[p_2(t)u_2(t{+}2){+}p_1(t)u_2(t{+}1){+}p_0(t)u_2(t)]$$

$$+p_2(t)[u_1(t+2)\Delta a_1(t) + [u_2(t+2)\Delta a_2(t)]$$

Como u_1, u_2 son soluciones de la homogénea, las dos primeras expresiones son iguales a 0. Entonces, $y(t)$ es solución de la general si:

$$u_1(t+2)\Delta a_1(t) + u_2(t+2)\Delta a_2(t) = \frac{r(t)}{p_2(t)}. \tag{3.7}$$

Es decir, $y(t) = a_1(t)u_1(t) + a_2(t)u_2(t)$ es solución de la general si $\Delta a_1(t), \Delta a_2(t)$ satisfacen las ecuaciones (3.6)(3.7).
Este sistema de ecuaciones lineales tiene una solución única ya que la matriz de coeficientes, $W(t+1)$, tiene determinante distinto de 0, por el Teorema 3.23. □

Veamos cómo resolver una ecuación haciendo uso del método de variación de parámetros:

Ejemplo 3.36. Resuelve $y(t+2) - 7y(t+1) + 10y(t) = 4^t$
Primero, resolvemos la homogénea:

$$y(t+2) - 7y(t+1) + 10y(t) = 0.$$

Tenemos la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

Entonces:

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$$

Por lo tanto, $\{5^t, 2^t\}$son las soluciones (linealmente independientes) de la homogénea. Como

$$W(t+1)\begin{bmatrix}\Delta a_1(t)\\ \cdots\\ \Delta a_n(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \cdots\\ \frac{r(t)}{p_n(t)}\end{bmatrix}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}5^t\Delta a_1(t) + 2^t\Delta a_2(t) &= 0\\ 5^{t+1}\Delta a_1(t) + 2^{t+1}\Delta a_2(t) &= 4^t\end{aligned}$$

Entonces:

$$\Delta a_1(t) = -(\frac{2}{5})^t\Delta a_2(t)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$-5^{t+1}\frac{2^t}{5^t}\Delta a_2(t) + 2^{t+1}\Delta a_2(t) = 4^t$$

Esto nos lleva a que:

$$\Delta a_2(t) = -3\cdot 2^t.$$

Con esto:

$$a_2(t) = -3\cdot 2^t.$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$\Delta a_1(t) = 3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t$$

Y esto implica que:

$$a_1(t) = -15 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t.$$

Concluímos que la solución, que además es única, viene dada por:

$$y(t) = -15 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t - 3 \cdot 2^t 2^t = -15 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t - 3 \cdot 4^t.$$

Para terminar, veremos una serie de aplicaciones en las que aparecen ecuaciones con coeficientes constantes.

Ejemplo 3.37. La sucesión de Fibonacci.
La sucesión de Fibonacci está definida de la siguiente manera: $1, 1, 2, 3, 5, 8...$
Es decir, a partir del segundo término, podemos obtener el siguiente sumando los dos anteriores. Esta sucesión está presente en muchos fenómenos de la naturaleza, como la distribución de las hojas alrededor del tallo, la reproducción de los conejos o la disposición de las semillas en numerosas flores y frutos. Además, estos números también aparecen en el análisis de algoritmos. Podemos definir la sucesión de Fibonacci como:

$$y(t+2) - y(t+1) - y(t) = 0, t \in \{1, 2...\}$$

$$y(1) = y(2) = 1$$

Tenemos que la ecuación característica es:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Entonces, $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Por lo tanto, la solución general será:

$$y(t) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Imponiendo las condiciones iniciales, obtenemos que $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Por lo tanto:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Observación 3.38. Cabe resaltar que podemos encontrar el número aúreo en la sucesión de Fibonacci como el cociente de dos términos consecutivos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Observación 3.39. El número de formas distintas en las que podemos pintar una tira de una unidad de ancho por n de largo, si podemos pintar con cuadrados rojos o azules, sin poner nunca dos rojos consecutivos, se resuelve de manera muy similar a la sucesión de Fibonacci, ya que la definición de la sucesión es la misma, solo cambia las condiciones iniciales, que en este caso son $y(1) = 2, y(2) = 3$.

Ejemplo 3.40. Supongamos que, si no intervienen factores externos, el incremento del número de conejos en un mes es igual a la tres cuartas partes del incremento del mes anterior. Inicialmente el número de conejos es de 10 y al finalizar el primer mes es de 30, además cada mes se incorporan 25 conejos a la población. Determinar como va a evolucionar la población de conejos.

Tenemos que la población de conejos en el año $t+1$ viene dado por la siguiente expresión:

$$y(t+1) = y(t) + \frac{3}{4}(y(t) - y(t-1)) + 25.$$

Lo que equivale a:

$$y(t+1) - y(t) - \frac{3}{4}y(t) + \frac{3}{4}y(t-1) - 25 = 0.$$

Es decir:

$$y(t+1) - \frac{7}{4}y(t) + \frac{3}{4}y(t-1) - 25 = 0.$$

Primero, resolvemos la homogénea. Tenemos la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 - \frac{7}{4}\lambda + \frac{3}{4} = 0.$$

Entonces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{3}{4}$.

Ahora, procedemos con la general. Para ello, la escribimos en términos del operador desplazamiento:

$$(E^2 - \frac{7}{4}E + \frac{3}{4})y(t-1) = 25.$$

Como $\Delta 25 = 0$, entonces $(E-1)25 = 0$. Por tanto:

$$(E^2 - \frac{7}{4}E + \frac{3}{4})(E-1)y(t-1) = 0.$$

Tenemos $\lambda_1 = 1$ doble, y $\lambda_2 = \dfrac{3}{4}$ simple, entonces la solución será de la forma:

$$y(t-1) = C_1 + C_2(\frac{3}{4})^t + C_3 \cdot t.$$

Como los dos primeros sumandos son la solución de la homogénea, "prescindimos de ellos". Por tanto:

$$y(t-1) = C_3 \cdot t$$

Entonces:

$$y(t) = C_3(t+1).$$

Con lo que:

$$y(t+1) = C_3(t+2).$$

Sustituyendo:

$$C_3 \cdot (t+2) - \frac{7}{4}C_3 \cdot (t+1) + \frac{3}{4}C_3 \cdot t - 25 = 0.$$

De aquí, deducimos que $C_3 = 100$. Por lo tanto, la solución viene dada por la siguiente expresión:

$$y(t-1) = C_1 + C_2(\frac{3}{4})^t + 100t.$$

Para calcular C_1 y C_2 buscamos condiciones iniciales. Sabemos que tenemos el número de conejos es 10 inicialmente y, tras un mes, 30. Entonces:

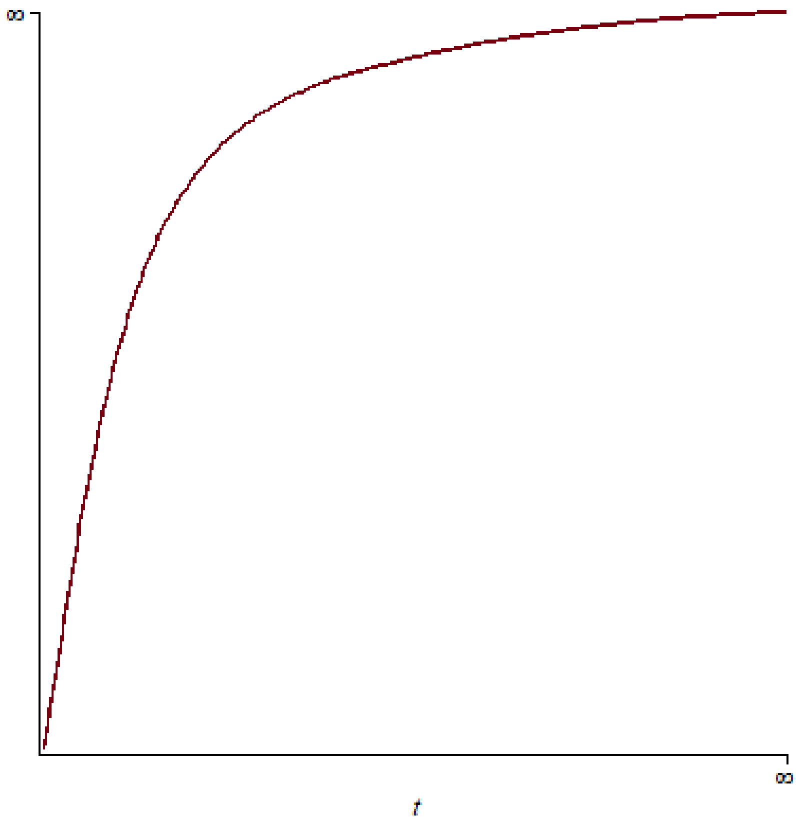
$$y(0) = 10 \Rightarrow C_1 + \frac{3}{4}C_2 + 100 = 10$$

$$y(1) = 30 \Rightarrow C_1 + \frac{9}{16} \cdot C_2 + 200 = 30$$

Resolviendo el sistema, tenemos que $C_1 = -410$ y $C_2 = \dfrac{1280}{3}$.
Por tanto, la evolución de la población de conejos vendrá dada por la siguiente expresión:

$$y(t-1) = -410 + \frac{1280}{3}(\frac{3}{4})^t + 100t.$$

En la siguiente gráfica podemos ver la evolución de la población de conejos:



3.2.2. Ecuaciones con coeficientes variables

Para terminar esta sección, hablaremos brevemente de las ecuaciones de orden n con coeficientes variables. A diferencia de las que hemos visto anteriormente, no hay un método general para resolverlas. En este subapartado presentamos uno de los métodos que podemos utilizar para resolverlas, el conocido como método de reducción del orden.

Lema 3.41. *Sean $u_1(t), \cdots, u_n(t)$ soluciones de la ecuación*

$$p_n(t)u(t+n) + \cdots + p_0(t)u(t) = 0.$$

Entonces, w(t) satisface que:

$$w(t+1) = (-1)^n \frac{p_0(t)}{p_n(t)} w(t). \tag{3.8}$$

Demostración. El valor de $w(t+1)$ será el mismo aunque cambiemos la fila n-ésima por una combinación lineal de todas:

$$(\text{fila } n) + \frac{p_1}{p_n} \cdot (\text{fila } 1) + \cdots + \frac{p_{n-1}}{p_n} \cdot (\text{fila } n-1)$$

Tendremos la ecuación en diferencias asociada a esta última fila

$$\left[-\frac{p_0}{p_n} u_1(t), \cdots, -\frac{p_0}{p_n} u_n(t) \right]$$

Entonces:

$$w(t+1) = \begin{vmatrix} u_1(t+1) & \cdots & u_n(t+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1(t+n-1) & \cdots & u_n(t+n-1) \\ -\frac{p_0}{p_n} u_1(t) & \cdots & -\frac{p_0}{p_n} u_n(t) \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{p_0(t)}{p_n(t)} w(t)$$

.

Ahora, supongamos que $u_1(t)$ es una solución no trivial de

$$p_2(t)u(t+2) + p_1(t)u(t+1) + p_0(t)u(t) = 0 \tag{3.9}$$

. Además:

$$\Delta \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{u_1(t)\Delta u_2(t) - u_2(t)\Delta u_1(t)}{u_1(t)u_1(t+1)} = \frac{w(t)}{u_1(t)u_1(t+1)}.$$

Con lo que:

$$u_2(t) = u_1(t) \sum \frac{w(t)}{u_1(t)u_1(t+1)} \tag{3.10}$$

. □

A continuación, enunciamos el método de reducción del orden:

Teorema 3.42. *Sea u_1 una solución no trivial de* (3.9), *y $p_0(t), p_n(t)$ no nulos. Entonces,* (3.10) *produce una solución independiente de* (3.9), *donde w(t) es una solución no trivial de* (3.8)

Veamos un ejemplo donde se ponga en práctica lo visto en este último teorema:

Ejemplo 3.43. Resuelve $u(t+2) - u(t+1) - \dfrac{1}{t+1}u(t) = 0$

Primero, buscamos una solución sencilla que verifique la ecuación, como puede ser $u(t) = t+1$. Por el lema 3.41, el Casoratiano cumple que:

$$w(t+1) = -\frac{1}{t+1}w(t).$$

Por tanto, tendremos que $w(t) = \dfrac{(-1)^t}{t!}$ cumple la ecuación si $t \in \{1, 2...\}$. Entonces, haciendo uso del teorema 3.42, tenemos que:

$$u_2(t) = (t+1)\sum_{k=0}^{t-1} \frac{(-1)^k}{(k+2)!}.$$

Y llegamos a que la solución general es:

$$u(t) = (t+1)\left(C + D\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{(-1)^k}{(k+2)!}\right)\right).$$

Capítulo 4

Problemas de valor inicial

4.1. Problemas de valor inicial

En este capítulo, nos centraremos en la resolución de problemas de valor inicial. En particular, veremos como resolver las ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes dada una condición inicial, a través de un método conocido como el algoritmo Putzer.

Hasta ahora, hemos estudiado cómo trabajar con una única ecuación en diferencias, pero lo más común es que haya varias. De forma general, podemos escribirlas como:

$$u_1(t+1) = a_{11}(t)u_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)u_n(t) + f_1(t)$$

$$u_2(t+1) = a_{21}(t)u_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)u_n(t) + f_2(t)$$

$$\cdots$$

$$u_n(t+1) = a_{n1}(t)u_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)u_n(t) + f_n(t)$$

Matricialmente:

$$u(t+1) = A(t)u(t) + f(t) \tag{4.1}$$

donde

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \cdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Teorema 4.1. *Para cada condición inicial $u(t_0) = u_0$, el problema (4.1) tiene una única solución u(t).*

A continuación, veremos el teorema de Cayley-Hamilton, del que nos interesará especialmente su corolario para la única demostración que vamos a ver en esta sección, ya que nos proporcionará un método para calcular soluciones de la ecuación homogénea a partir de una condición inicial, conocido como algoritmo de Putzer.

Teorema 4.2. *Sea M una matriz cuadrada. Entonces M satisface su ecuación característica.*

Corolario 4.3. *Sea M una matriz cuadrada. Entonces, podemos escribir cualquier potencia $M^n, M^{n-1}, \cdots, 1$ como combinación lineal de las otras.*

Para el próximo resultado necesitamos definir previamente una serie de matrices. Sea A una matriz $n \times n$ constante, y λ_i sus autovalores. Definimos:

$$M_0 = I,$$

$$M_i = (A - \lambda_i I)M_{i-1}(1 \leq i \leq n) \tag{4.2}$$

y

$$\begin{pmatrix} c_1(t+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n(t) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Ahora, ya estamos preparados para enunciar y demostrar el Algoritmo de Putzer, que nos proporcionará un método fácil para calcular una solución a partir de una condición inicial.

Teorema 4.4. *La solución de $u(t+1) = Au(t)$, dada una condición inicial u_0, viene dada por:*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t)M_i u_0 = A^t u_0.$$

Demostración. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los autovalores de A. Por el teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que $M_n = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_n I) = 0$. Ademas, por (4.2), tenemos que A^i es combinación lineal de $M_0, \cdots, M_i$ para $i = 0, \cdots, n-1$. Entonces, por el corolario anterior, cualquier potencia de A también lo será, por lo que podemos escribir de la siguiente forma:

$$A^t = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t)M_i. \tag{4.4}$$

con c_i coeficientes por determinar.
Entonces:

$$\begin{aligned} A^{t+1} &= \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}(t+1)M_i) \\ &= A \cdot A^t = A\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}(t)M_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}(t)[M_{i+1} + \lambda_{i+1}M_i]) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}(t)\lambda_{i+1}M_i) + \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}(t)M_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}(t)\lambda_{i+1}M_i) + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i(t)M_i). \end{aligned}$$

Con lo cual, eligiendo los términos $c_i(t)$ como las soluciones del problema (4.3), y teniendo en cuenta que $A^0 = I = c_1(0)I + \cdots + c_n(0)M_{n-1}$, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} c_1(0) \\ . \\ . \\ . \\ c_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

En virtud del Teorema 4.1, estas dos últimos sistemas tendrán una única solución. □

Observación 4.5. De la expresión (4.4) podemos calcular el valor de A^t para todo $t \in \mathbb{N}$, sin más que resolver un sistema lineal n-dimensional.

Ejemplo 4.6. Resuelve

$$u(t+1) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} u(t),$$

sabiendo que

$$u(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el polinomio característico:

$$(6-\lambda)(9-\lambda) - 4 = 0.$$

Por lo tanto:

$$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5.$$

Ademas, tenemos que:

$$M_0 = I, M_1 = (A-5)M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1(t+1) \\ c_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} c_1(t+1) &= 5c_1(t) \\ c_2(t+1) &= c_1(t) + 10c_2(t) \end{aligned}$$

Es inmediato verificar que $c_1(t) = 5^t$.
Ahora, calculemos $c_2(t+1) = c_1(t) + 10c_2(t)$ sabiendo que $c_2(0) = 0 :$

$$u(t+1) - 10u(t) = 0 \Rightarrow u(t) = 10^t.$$

Teniendo en cuenta que 5^t es solución de $u(t+1) - 5u(t)$:

$$(E-10)(E-5)u(t) = 0.$$

Por lo que:

$$c_2(t) = C_1 \cdot 10^t + C_2 \cdot 5^t.$$

Sustituyendo, obtendremos que $C_2 = \dfrac{-1}{5}$.

Imponiendo la condición inicial, $C_1 = \dfrac{1}{5}$.

Por lo que:

$$c_2(t) = \frac{1}{5}10^t - \frac{1}{5}5^t = 5^{t-1}(2^t - 1).$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(5^t I + 5^{t-1}(2^t-1)\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(5^{t-1}\begin{pmatrix} 4+2t & -7\cdot 2^t + 14 \\ -7\cdot 2^t + 14 & 1+2^{t+2} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 5^{t+1}\begin{pmatrix} 22+4t-7\cdot 2^t \\ 29-5\cdot 2^{t+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para concluír este capítulo, cabe destacar que la solución de la ecuación general completa también es única si imponemos una condición inicial:

Teorema 4.7. *La solución de $u(t+1) = Au(t) + f(t)$, dada la condición inicial $u(0) = u_0$, viene dada por la siguiente expresión:*

$$u(t) = A^t u_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^{t-s-1} f(s).$$

Demostración. Por el Teorema 4.1., basta ver que

$$u(t) = A^t u_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^{t-s-1} f(s)$$

satisface el problema de valor inicial.

Como

$$\sum_{s=0}^{-1} A^{-s-1} f(s) = 0$$

tenemos que $u(0) = u_0$.

Para $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} u(t+1) &= A^{t+1}u_0 + \sum_{s=0}^{t} A^{t-s} f(s) \\ &= A^{t+1}u_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^{t-s} f(s) + f(t) \\ &= A[A^t u_0 + \sum_{s=0}^{t-1} A^{t-s-1} f(s)] + f(t) = Au(t) + f(t). \end{aligned}$$

$\square$

4.2. Estabilidad de los sistemas lineales

En esta sección estudiaremos la sucesión de puntos que obtenemos a través de los problemas de valor inicial. Más concretamente, nos centraremos en estudiar los casos en los que esos puntos tienden a cero, lo que clasificaremos como una solución asintóticamente estable. Empezamos definiendo este concepto:

Definición 4.8. Decimos que la solución cero de un problema lineal de valor inicial es asintóticamente estable cuando:

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

para toda u solución del problema.

A continuación, veremos bajo que condiciones podemos asegurar la estabilidad asintótica de una solución:

Teorema 4.9. *Sea A una matriz $n \times n$, con $r(A)<1$, sea u solución de $Au(t+1) = Au(t)$. Entonces:*

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

Además, si $r(A)<\delta<1$, existe una constante C tal que:

$$|u(t)| \leq C\delta^t |u(0)|$$

Demostración. Primero, veamos que $|u(t)| \leq C\delta^t|u(0)|$.
Para ello, tendremos en cuenta la siguiente cadena de desigualdades:

$$|u(t)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_{i+1}(t)||M_i u(0)| \leq B_i \delta^t |u(0)| \sum_{i=0}^{n-1} D_i = C\delta^t |u(0)|.$$

Para la primera de las desigualdades, tendremos en cuenta (4.3). Entonces, tenemos que:

$$c_1(t+1) = \lambda_1 c_1(t)$$

Teniendo en cuenta que $r(A) \geq |\lambda_1|$:

$$|c_1(t+1)| \leq r(A)|c_1(t)|,$$

y como $c_1(0) = 1$:

$$|c_1(t)| \leq (r(A))^t \leq \delta^t.$$

Ahora, procedemos a acotar el segundo término:

$$|c_2(t+1)| \leq r(A)|c_2(t)| + |c_1(t)|.$$

Juntando a lo que vimos anteriormente, llegamos a que:

$$|c_2(t+1)| \leq r(A)|c_2(t)| + (r(A))^t.$$

Imponiendo que $c_2(0) = 0$:

$$|c_2(t)| \leq t(r(A))^{t-1} = t\left(\frac{r(A)}{\delta}\right)^{t-1} \delta^{t-1}.$$

Por L´Hopital:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(t\left(\frac{r(A)}{\delta}\right)^{t-1}\right) = 0.$$

Entonces, existe una constante $B_1 > 0$ tal que:

$$|C_2(t)| \leq B_1\delta^t.$$

Con un procedimiento análogo, y por inducción, podríamos probar que siempre se va a poder conseguir la siguiente acotación:

$$|c_1(t)| \leq B_{i-1}\delta^t,$$

tal y como queríamos para probar.
La segunda desigualdad es fruto del hecho que para cualquier matriz M, existe $D > 0$ tal que:

$$||Mv|| \leq D||v||.$$

Por último, teniendo en cuenta que:

$$||u(t)|| \leq C\delta^t||u(0)||$$

y que $\delta < 1$, tendremos que:

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0.$$

□

Ahora, damos una condición necesaria para que haya estabilidad asintótica:

Teorema 4.10. *Si $r(A) > 1$, la solución no es asintóticamente estable.*

Demostración. Como $r(A) > 1$ existe al menos un autovalor, llamémosle λ tal que $|\lambda| > 1$.
Como:

$$Av = \lambda v,$$

entonces:

$$A^t v = \lambda^t v.$$

Considerando el problema:

$$\begin{aligned} u(t+1) &= Au(t) \\ u(0) &= v \end{aligned}$$

con $v \neq 0$ el autovector asociado a λ.
Entonces:

$$u(t) = A^t u(0) = A^t v.$$

Por lo tanto:

$$|u(t)| = |A^t v| = |\lambda^t v| = |\lambda|^t |v|.$$

Con lo que:

$$\lim_{n\to\infty} |u(t)| = \infty$$

por lo que la solución no será asintóticamente estable. □

Hemos visto que el punto de inflexión para hablar de la estabilidad de una solución es cuando $r(A) = 1$. Si $r(A) < 1$ la solución será asintóticamente estable mientras que si $r(A) > 1$ no. En el siguiente resultado veremos que pasa cuando $r(A) = 1$:

Teorema 4.11. *Si $r(A) \leq 1$, y cada autovalor λ tal que $|\lambda| = 1$ es simple, entonces existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$|u(t)| \leq C|u(0)|.$$

Demostración. Ordenemos los autovalores de forma que:

$$|\lambda_i| = 1 \;\; i \in \{1, .., k-1\}.$$

$$|\lambda_i| < 1 \;\; i \in \{k, .., n\}.$$

Sabemos que:

$$c_1(t) = \lambda_1^t.$$

$$c_2(t+1) = \lambda_2 c_2(t) + \lambda_1^t.$$

Aniquilando, llegamos a que:

$$(E - \lambda_1)(E - \lambda_2)c_2(t) = 0.$$

Entonces, la solución $c_2(t)$ será de la forma:

$$c_2(t) = B_{12}\lambda_1^t + B_{22}\lambda_2^t,$$

siendo B_{12}, B_{22} constantes.
De esta forma, sabemos que la solución seguirá una expresión del tipo:

$$c_i(t) = B_{1i}\lambda_1^t + \cdots + B_{ii}\lambda_i^t$$

Por lo tanto:

$$|c_i(t)| \leq D, t \geq 0$$

para una constante D, e $i \in \{1, .., k-1\}$.
Teniendo en cuenta que:

$$c_k(t+1) = \lambda_k c_k(t) + c_{k-1}(t),$$

tenemos que:

$$|c_k(t+1)| \leq |\lambda_k||c_k(t)| + D.$$

Tomando $\delta = \text{máx}\,|\lambda_k|, .., |\lambda_n|$:

$$|c_k(t)| \leq D \sum_{j=0}^{t-1} \delta^j \leq \frac{D}{1-\delta} = K.$$

La solución, dada una condición inicial $u(0) = u_0$, por el Teorema 4.4, viene dada por:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t) M_i u_0.$$

Entonces, teniendo en cuenta la acotación anterior:

$$|u(t)| \leq K \sum_{i=0}^{n-1} |M_i u_0| \leq C|u_0|.$$

□

Ejemplo 4.12. Comprueba si converge la solución del siguiente sistema lineal:

$$u(t+1) \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} u(t), \quad t \geq 0$$

Tenemos la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 1{,}5 \cdot \lambda + 0{,}56 = 0.$$

De aquí, llegamos a que

$$\lambda_1 = \frac{4}{5}, \lambda_2 = \frac{7}{10}.$$

Como $r(A) = \dfrac{7}{10} < 1$, en virtud del Teorema 4.8 podemos asegurar que la solución va a ser asintóticamente estable.

Veamos un ejemplo más práctico:

Ejemplo 4.13. Estudiando la población de bisontes, los hemos clasificado según su edad, siendo $u_1(t)$ los bisontes jóvenes, $u_2(t)$ los de edad media y $u_3(t)$ los más mayores. En forma vectorial, podemos describir la población como:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

Cada año tenemos que nacen un 42 % de los adultos que ya había. Además, un 60 % de la población que era clasificada como jóvenes pasan a ser de edad media, mientras que un 75 % de los de edad media pasan a ser adultos, y un 5 % de los adultos mueren. Por consiguiente, tenemos que la población de bisontes satisface el siguiente sistema lineal:

$$u(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}42 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}95 \end{pmatrix} u(t)$$

Estudiamos la estabilidad de la solución con los métodos ya conocidos. Calculando la ecuación característica, llegamos a que:

$$-\lambda^2 + 0{,}95\lambda + 0{,}189 = 0.$$

De donde deducimos que:

$$\lambda_1 = -0{,}17, \lambda_2 = 1{,}12.$$

Como $r(A) > 1$, con lo que la solución no será asintóticamente estable.

Por todo esto, nos va a interesar estudiar el subespacio formado por los autovalores de módulo menor que 1, que es donde tendremos asegurada la estabilidad asintótica.

Definición 4.14. Llamamos subespacio estable de una ecuación, S, al subespacio formado por los autovectores asociados a los autovalores de módulo menor que 1.

Este subespacio nos será de especial interés porque las soluciones con condición inicial en S van a cero, como veremos en el siguiente teorema:

Teorema 4.15. *Si $u(0)$ pertenece a S, entonces $u(t)$ también para todo $t \geq 0$, y la solución será asintóticamente estable.*

Demostración. Sea u(0) en S. Como A envía a cada autoespacio en sí mismo, también lo hará con S. Por lo tanto, $u(t)$ estará en S para todo t.
Consideremos los primeros k autovalores: $\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_k|\} < \delta < 1$.
Por el Teorema 4.4., tenemos que:

$$|c_i(t)| \leq B\delta^t, t \geq 0, 1 \leq i \leq k.$$

Además:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(t) M_i u_0 = A^t u_0.$$

Como $u(0) \in S$, lo podemos expresar como:

$$u(0) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k,$$

siendo $v_1, \cdots, v_k$ los autovectores asociados a los primeros k autovalores.
Por la construcción de M_i, tenemos que:

$$M_i u(0) = 0, \forall i = \{k, \cdots, n\},$$

que se corresponde con las filas asociadas a los autovalores $|\lambda| \geq 1$.Por eso:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(t) M_i u_0,$$

y llegamos a las desigualdades:

$$|u(t)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} c_{i+1}(t) |M_i u(0)| \leq B\delta^t \sum_{i=0}^{k-1} |M_i u(0)| \leq C\delta^t |u(0)|,$$

y obviamente:

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0$$

□

Para terminar, calcularemos el subespacio estable de un sistema lineal en un ejemplo:

Ejemplo 4.16. Calcula el subespacio estable del siguiente sistema lineal:

$$u(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Tenemos la siguiente ecuación característica

$$-\lambda^3 + 0{,}75\lambda + 0{,}25$$

Entonces, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{-1}{2}$, con multiplicidad 2.
Por lo tanto, el subespacio estable estará formado por el autovector asociado a λ_2:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

[1] Walter G. Kelley, Allan C. Peterson, *Difference equations an introduction with applications*, 2nd Edition-Academic Press (2001).

[2] Samuel Goldberg *Introduction to difference equations, with illustrative examples from economics, psychology, and sociology*, New York: Dover Publications, cop. 1986.

[3] *Ecuaciones y Sistemas en diferencias*
http://matema.ujaen.es/jnavas/web_recursos/archivos/matriciales/sistemas %20dinamicos.pdf

[4] Grupo de innovacióndocente CDPYE-UGR *La función Gamma.*
https://www.ugr.es/ cdpye/CursoProbabilidad/pdf/P_T05_FuncionGamma.pdf