USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Programación estocástica

Iria Ares Méndez

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Programación estocástica

Iria Ares Méndez

Xullo 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Programación estocástica

Área de Coñecemento: Estatística e Investigación Operativa
Título: Programación estocástica
Breve descrición do contido
Este traballo pretende motivar a programación estocástica por medio de exemplos ilustrativos. Ademais estudaranse diversos elementos teóricos, como a guía para unha correcta modelización, condicións de optimalidade e os conceptos de valor da información e da solución estocástica. Con respecto aos métodos de solución, analizarase un modelador para problemas lineais denominado SMPS. Ademais, revisarase un algoritmo contributivo deseñado para problemas de rutas de vehículos estocásticos. Para rematar o traballo presentase unha aplicación á vida real.

Índice xeral

Resumo **VIII**

Introdución **XI**

1. Exemplos ilustrativos e conceptos básicos **1**

1.1. O problema do agricultor 1

1.1.1. Variables aleatorias discretas e correlacionadas 4

1.1.2. Variables aleatorias continuas e incorreladas 9

1.2. O problema de rutas 13

1.2.1. Demandas coñecidas 15

1.2.2. Demandas descoñecidas 17

2. Preliminares teóricas **23**

2.1. Programación lineal 23

2.1.1. Introdución aos problemas de programación lineal 23

2.1.2. Dualidade 24

2.2. Programación non lineal 26

2.2.1. Introdución á programación non lineal 27

2.2.2. Dualidade en programación non lineal 30

3. Modelos de programación estocástica **33**

3.1. Introdución 33

3.2. Propiedades básicas dos conxuntos factibles 34

3.2.1. Caso particular: variables aleatorias discretas 34

3.2.2. Casos xerais 37

3.3. Condicións de optimalidade específicas e problema dual 40

3.4. $EVPI$ e VSS: valor da información e solución estocástica 42

4. Resolución dos problemas **51**
4.1. Caso de variables continuas: modelador `SMPS` 51
4.1.1. Arquivo principal 52
4.1.2. Arquivo de tempo 55
4.1.3. Arquivo estocástico 55
4.2. Un caso de variables enteiras: un algoritmo heurístico 58

5. Unha aplicación á xestión de recursos **63**
5.1. Modelo estocástico de selección de recursos 63
5.2. Exemplo de selección de recursos 66

6. Conclusións **69**

Bibliografía **71**

Resumo

A priori podemos pensar que o problema dun agricultor que debe decidir as cantidades que vai plantar de certos cultivos e o problema dun coordinador de rutas de transporte dun distribuidor de carburante non teñen nada en común; porén, non é certo. Ademais do obxectivo de optimizar certos beneficios ou custos suxeitos ás diversas restricións sobre as variables de decisión, algúns parámetros (rendementos de cultivos ou demandas de clientes, respectivamente) poden distar de ser deterministas, estar suxeitos a incerteza e requirir un tratamento como variables aleatorias.

Ao longo deste traballo empregaranse diversos exemplos ilustrativos co fin de motivar a programación estocástica. Ademais estudaranse diversos elementos teóricos, como a guía para unha correcta modelización, as condicións de optimalidade e os conceptos de valor esperado de información perfecta e valor da solución estocástica.

O traballo tamén consta de dous métodos para a resolución de diversos problemas. O primeiro é un modelador, denominado `SMPS`, que se emprega para resolver problemas lineais e que pode ser empregado no servidor de optimización `NEOS`. O outro método que se explicará é un algoritmo heurístico deseñado para resolver problemas de rutas de vehículos estocásticos.

Abstract

A priori we can think that the problem of a farmer who has to decide the quantities to plant of certain crops and the problem of transport route coordination of a fuel distributor have nothing in common; however, it is not true. Besides the objective of optimizing certain benefits or costs subject to several restrictions on decision variables, some parameters (crop yields or customer demands, respectively) may be far from deterministic, be subject to uncertainty and require treatment as random variables.

Throughout this project, diverse illustrative examples will be used in order to motivate

stochastic programming. Furthermore, various theoretical elements will be studied, such as the guide for a correct modelling, optimal conditions and the concepts of the expected value of perfect information and the value of the stochastic solution.

The present work also consists of two methods to solve various problems. The first one is a modeller, called `SMPS`, which is utilized to solve linear problems and it can be used through the `NEOS` server of optimization. The other method that will be explained is a heuristic algorithm designed to solve stochastic vehicle routing problems.

Introdución

A investigación operativa (I.O.) é unha disciplina matemática cuxo obxectivo é axudar a tomar decisións en problemas da vida real resolvendo modelos matemáticos ([3]).

Esta disciplina aparece en Europa no século XVII cando se propón o "problema do viaxante". Dada unha serie de cidades e a distancia entre elas, o obxectivo do viaxante era coñecer a ruta máis curta coa que visitar tódalas cidades e volver á cidade de orixe sen repetir ningunha. Porén, non é ata a Segunda Guerra Mundial cando se recoñece esta disciplina como tal. Posteriormente, en 1949, George Dantzig publica o método do símplex para resolver problemas de programación lineal ([5]).

Os modelos matemáticos cos que se traballa nesta disciplina pódense dividir en deterministas e probabilistas. Como exemplos de modelos deterministas temos a programación lineal, enteira e non lineal, entre outros. A programación estocástica, a cal se estuda neste traballo, forma parte dos modelos probabilistas ao igual que a teoría de xogos ou a teoría de colas.

Dentro das aplicacións da I.O., están a asignación de persoal nunha empresa, a programación das rutas de trens ou autobuses, o deseño de tratamentos na sanidade e outras moitas.

A metodoloxía levada a cabo pola I.O. para resolver os distintos problemas consiste nunha serie de pasos. Unha vez definido o problema, a continuación formulamos o modelo, que inclúe, en xeral, unhas variables de decisión e unha serie de funcións que representan os obxectivos e as restricións e fan uso de certos parámetros. Unha vez formulado o modelo buscamos a solución do mesmo por medio dun algoritmo adecuado, validámolo e finalmente poñemos en práctica a solución.

A programación estocástica busca a solución óptima para problemas onde polo menos un dos parámetros do modelo é unha variable aleatoria. De aquí que neste caso a resolución do problema contempla a análise dunha serie de escenarios a partir das restricións e da función de distribución das variables aleatorias.

Este traballo iníciase coa presentación de dous exemplos ilustrativos da programación estocástica. Posteriormente, e despois de facer un repaso de diversos conceptos teóricos da programación lineal, estudaranse os modelos que comprenden a programación estocástica.

Ademais, explicarase a resolución de problemas lineais mediante o emprego do servidor de optimización `NEOS` e revisarase un algoritmo heurístico co cal se poden resolver problemas de optimización de rutas de vehículos con estocasticidade. Finalmente, preséntase un problema da vida real onde se aplican estes coñecementos.

Capítulo 1

Exemplos ilustrativos e conceptos básicos

"When is an apple an apple and what do you mean by its cost and nutrition content? For example, when you say apple do you mean a Jonathan, or McIntosh, or ... ? You see, it can make a difference, for the amount of ascorbic acid (vitamin C) can vary from 2.0 to 20.8 units per 100 grams depending upon the type of apple ([6])."

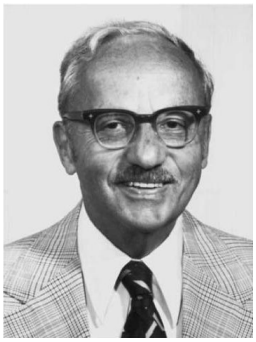


Figura 1.1: G.B. Dantzig

1.1. O problema do agricultor

Un agricultor dunha rexión europea ([2]) quere sementar en 500 acres de terreo tres tipos de cultivos: trigo, millo e remolacha. Antes de plantar ten que decidir canto terreo dedica a cada cultivo.

Sabe que para alimentar ó gando precisa polo menos 200 toneladas de trigo e 240 de millo. Estas cantidades pode cultivalas ou compralas. Ademais, todo o que produza en exceso pode vendelo. O prezo de venda nos últimos anos foi de 170 €/t de trigo e 150 €/t de millo. Pero o prezo de compra é un 40 % máis caro.

No caso da remolacha, a Comisión Europea impón unha cota de produción, de forma que se supera a cota malvende o produto excedente a 10 €/t, porén mentres cumpra a

cota véndeo a 36 €/t. Este agricultor conta cunha cota de 6000 t. Por experiencias de anos anteriores sabe que o rendemento medio da súa terra é de 2.5 t/acre de trigo, 3 t/acre de millo e 20 t/acre de remolacha.

A Táboa 1.1 recolle estes valores e a maiores o prezo de sementar cada cultivo.

Cultivo	Trigo	Millo	Remolacha
Rendemento (t/acre)	2.5	3	20
Prezo de plantación (€/acre)	150	230	260
Prezo de venda (€/t)	170	150	36 por debaixo de 6000 t e 10 por encima de 6000 t
Prezo de compra (€/t)	238	210	–
Mínimo necesario (t)	200	240	–
Total de terreo dispoñible: 500 acres			

Táboa 1.1: Datos do problema do agricultor.

O modelo que representa o noso problema sería o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + 210y_2 - 170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
s.a \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
& 2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 \\
& 3x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 \\
& w_3 + w_4 \leq 20x_3 \\
& w_3 \leq 6000 \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0,
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

onde:
x_1 son acres de terra dedicados ó trigo,
x_2 son acres de terra dedicados ó millo,
x_3 son acres de terra dedicados á remolacha,
y_1 son toneladas de trigo compradas,
y_2 son toneladas de millo compradas,
w_1 son toneladas de trigo vendidas,
w_2 son toneladas de millo vendidas,
w_3 son toneladas de remolacha vendidas a prezo favorable,
w_4 son toneladas de remolacha vendidas a prezo desfavorable.

O obxectivo é minimizar os custos de plantación e de compra e maximizar o beneficio obtido nas vendas dos produtos. A primeira restrición indícanos que a suma dos acres destinados a cada cultivo non pode ser superior a 500 t. A segunda e terceira restricións fan referencia a que se precisan polo menos 200 e 240 toneladas de trigo e millo, respectivamente. A seguinte dinos que as toneladas de remolacha vendidas non poden ser superiores ao que poden xerar os acres destinados á súa produción. A quinta restrición indica que a cantidade de toneladas vendidas a prezo favorable non pode ser superior á cota que ten o agricultor.

Malia non formar parte das variables que interveñen no modelo, imos denotar por p_i, con $i = 1, 2, 3$, á produción obtida de cada produto.

Resolvendo o problema lineal[1] obtemos como solución óptima a recollida na Táboa 1.2.

Cultivo	Trigo	Millo	Remolacha
Superficie (acres)	$x_1 = 120$	$x_2 = 80$	$x_3 = 300$
Produción (t)	$p_1 = 300$	$p_2 = 240$	$p_3 = 6000$
Vendas (t)	$w_1 = 100$	$w_2 = 0$	$w_3 = 6000, w_4 = 0$
Compra (t)	$y_1 = 0$	$y_2 = 0$	–
Beneficios: 118600 €			

Táboa 1.2: Solución óptima do problema lineal con rendemento medio.

A solución óptima dinos que o agricultor ten suficiente superficie para abastecer ó gando, tanto de trigo como de millo, e tamén terreo suficiente para alcanzar a cota de remolacha. A cantidade de superficie que lle sobre ten que dedicala a producir trigo, xa que é o cultivo que máis caro se vende e máis barato se planta, por tanto os beneficios son maiores.

A idea é distribuír a terra da seguinte forma: primeiro remolacha a prezo favorable, pois a pesar de que o beneficio non é superior ao dos outros cultivos, o rendemento na produción é moito maior. Despois sería o trigo, cuxo rendemento está próximo ó rendemento do millo e os beneficios son maiores. Logo teriamos o millo, e finalmente malvenderiamos a remolacha.

Non obstante, sábese que o rendemento cambia en función do ano, pois os cultivos dependen das condicións climáticas (seca, exceso de choiva, etc). Logo pode suceder que o rendemento sexa superior ou inferior ao promedio estimado. Tendo isto en conta imos resolver o problema anterior de forma estocástica, segundo sexan as variables aleatorias discretas e correlacionadas, ou aleatorias continuas e incorreladas.

[1] Pódese utilizar para iso algunha linguaxe de programación, como por exemplo `R` (`https://www.r-project.org/`)

1.1.1. Variables aleatorias discretas e correlacionadas

Supoñemos neste primeiro caso que hai correlación entre os distintos cultivos. Partimos da base de que pode haber tres posibilidades, que os rendementos resulten un 20 % por enriba do promedio, o promedio ou un 20 % por baixo del. Ademais asúmese que a probabilidade de darse cada un dos escenarios é a mesma, é dicir, 1/3.

Cada escenario pódese resolver de forma independente igual que se fixo con anterioridade para o caso do rendemento medio. Por exemplo, cando o rendemento é un 20 % superior ao promedio, temos que o rendemento de trigo é de 3 t/acre, o de millo é de 3.6 t/acre e o de remolacha é de 24 t/acre. Neste caso o modelo a resolver vén dado por:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + 210y_2 - 170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
s.a \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
& 3x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 \\
& 3.6x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 \\
& -24x_3 + w_3 + w_4 \leq 0 \\
& w_3 \leq 6000 \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Presentamos a solución óptima na Táboa 1.3.

Cultivo	Trigo	Millo	Remolacha
Superficie (acres)	$x_1 = 183.333$	$x_2 = 66.667$	$x_3 = 250$
Produción (t)	$p_1 = 550$	$p_2 = 240$	$p_3 = 6000$
Vendas (t)	$w_1 = 350$	$w_2 = 0$	$w_3 = 6000, w_4 = 0$
Compra (t)	$y_1 = 0$	$y_2 = 0$	–
Beneficios: 167666.7 €			

Táboa 1.3: Solución óptima do problema lineal cun rendemento do 20 % superior ao do promedio.

No caso do rendemento inferior ao 20 %, habería que cambiar a produción por 2 t/acre de trigo, 2.4 t/acre de millo e 16 t/acre de remolacha. Para este caso os gastos serían de 59950 €.

Agora ben, queremos expresar o problema de forma estocástica e para iso necesitamos

ter en conta os tres escenarios. A formulación matemática do problema é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 \\
& -\frac{1}{3}(170w_{11} - 238y_{11} + 150w_{21} - 210y_{21} + 36w_{31} + 10w_{41}) \\
& -\frac{1}{3}(170w_{12} - 238y_{12} + 150w_{22} - 210y_{22} + 36w_{32} + 10w_{42}) \\
& -\frac{1}{3}(170w_{13} - 238y_{13} + 150w_{23} - 210y_{23} + 36w_{33} + 10w_{43}) \\
s.a \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
& 3x_1 + y_{11} - w_{11} \geq 200 \\
& 3.6x_2 + y_{21} - w_{21} \geq 240 \\
& w_{31} + w_{41} \leq 24x_3 \\
& w_{31} \leq 6000 \\
& 2.5x_1 + y_{12} - w_{12} \geq 200 \\
& 3x_2 + y_{22} - w_{22} \geq 240 \\
& w_{32} + w_{42} \leq 20x_3 \\
& w_{32} \leq 6000 \\
& 2x_1 + y_{13} - w_{13} \geq 200 \\
& 2.4x_2 + y_{23} - w_{23} \geq 240 \\
& w_{33} + w_{43} \leq 16x_3 \\
& w_{33} \leq 6000 \\
& x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} \geq 0, s = 1, 2, 3. \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

A continuación defínense as variables que interveñen:
x_1 son acres de terra dedicados ó trigo,
x_2 son acres de terra dedicados ó millo,
x_3 son acres de terra dedicados á remolacha,
y_{1s} son toneladas de trigo compradas no escenario s, $s = 1, 2, 3$,
y_{2s} son toneladas de millo compradas no escenario s, $s = 1, 2, 3$,
w_{1s} son toneladas de trigo vendidas no escenario s, $s = 1, 2, 3$,
w_{2s} son toneladas de millo vendidas no escenario s, $s = 1, 2, 3$,
w_{3s} son toneladas de remolacha vendidas a prezo favorable no escenario s, $s = 1, 2, 3$,
w_{4s} son toneladas de remolacha vendidas a prezo desfavorable no escenario s, $s = 1, 2, 3$.

Ademais, para cada cultivo, imos denotar a produción obtida por p_{1s}, p_{2s}, p_{3s} con s representando os tres posibles escenarios.

A decisión do reparto de terras, (x_1, x_2, x_3), tómase antes de coñecer a produción e denomínase decisión de primeira etapa. Non obstante, as das compras, (y_1, y_2), e vendas, (w_1, w_2, w_3, w_4), tómanse despois e chámanse decisións de segunda etapa. Temos que ter en conta que estas últimas varían con cada escenario.

A solución óptima deste problema estocástico amosámola na Táboa 1.4.

		Trigo	Millo	Remolacha
Primeira etapa	Superficie (acres)	$x_1 = 170$	$x_2 = 80$	$x_3 = 250$
$s = 1$	Produción (t)	$p_{11} = 510$	$p_{21} = 288$	$p_{31} = 6000$
superior	Vendas (t)	$w_{11} = 310$	$w_{21} = 48$	$w_{31} = 6000, w_{41} = 0$
	Compra (t)	$y_{11} = 0$	$y_{21} = 0$	–
$s = 2$	Produción (t)	$p_{12} = 425$	$p_{22} = 240$	$p_{32} = 5000$
promedio	Vendas (t)	$w_{12} = 225$	$w_{22} = 0$	$w_{32} = 5000, w_{42} = 0$
	Compra (t)	$y_{12} = 0$	$y_{22} = 0$	–
$s = 3$	Produción (t)	$p_{13} = 340$	$p_{23} = 192$	$p_{33} = 4000$
inferior	Vendas (t)	$w_{13} = 140$	$w_{23} = 0$	$w_{33} = 4000, w_{43} = 0$
	Compra (t)	$y_{13} = 0$	$y_{23} = 48$	–
	Beneficios: 108390.2 €			

Táboa 1.4: Solución óptima do problema estocástico.

A área óptima destinada á remolacha é aquela que nos permite vendela a prezo favorable. É máis beneficioso vender a prezo favorable que cubrir toda a cota. A área óptima dedicada ó millo permite cubrir as necesidades alimenticias do gando cando ten lugar un rendemento medio e incluso sobra para vender se o rendemento é superior. Porén, se a produción está por debaixo do promedio é necesario comprar. A área restante dedícase ó cultivo de trigo. Esta sempre permite, ademais de cubrir todas as necesidades, vender unha parte.

Se o agricultor soubera de antemán como vai ser o rendemento cada ano, entón o problema resolveríase de forma lineal igual que se resolveu supoñendo un rendemento medio (véxase sistema (1.1)). Como o agricultor non sabe como vai a ser a produción, resólvese o problema de forma estocástica.

Non obstante, se por exemplo souberamos que os rendementos son cíclicos, poderiamos resolver os tres problemas de forma independente e lineal, sendo o gasto a media dos tres resultados. Estamos ante unhas circunstancias de información perfecta. No noso exemplo o beneficio sería $\frac{1}{3}167667$ €$+\frac{1}{3}118600$ €$+\frac{1}{3}59950$ €$= 115406$ €. A diferenza entre o beneficio obtido resolvendo o problema de forma estocástica e de forma lineal tendo información

perfecta, coñécese co nome de valor esperado de información perfecta ($EVPI$). No noso exemplo este valor é de 115406 € − 108390 € = 7016 €. Non obstante, pode ser que o agricultor decida resolver o problema de forma estocástica fixando o reparto das terras aos valores obtidos cun rendemento medio. A diferenza entre resolver o problema de forma estocástica a resolvelo da forma anterior recibe o nome de valor de solución estocástica (VSS). O valor do obxectivo cando se considera o reparto de terras que se obtén resolvendo o problema con un rendemento medio, é dicir, o valor do obxectivo empregando $x_1 = 120$, $x_2 = 80$, $x_3 = 300$, para todos os escenarios é de 107236.1 €. Por tanto, $VSS = 108390.2$ € − 107236.1 € = 1154.1 €.

Formulación xeral do modelo

Vexamos agora como se resolve de forma xeral este problema estocástico con variables aleatorias, discretas e correlacionadas.

Primeiro temos que tomar unha serie de decisións en ausencia de información respecto das variables aleatorias do problema, que denotamos co vector x e que son as decisións de primeira etapa. Posteriormente, temos máis información sobre a realización das variables aleatorias e tómanse outras decisións, z, que son as decisións de segunda etapa. De acordo con isto, definimos o problema estocástico en dúas etapas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^t x + E_{\boldsymbol{\xi}} Q(x, \boldsymbol{\xi}) \\ s.a \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $Q(x, \boldsymbol{\xi}) = \text{mín}\{\mathbf{q}^t z \,|\, Wz + \mathbf{T}x = \boldsymbol{h}, z \geq 0\}$. $\boldsymbol{\xi}$ é un vector aleatorio sobre o que se ten información. Está formado polas seguintes compoñentes: $\boldsymbol{q}^t$, que constitúe o vector de coeficientes de z no obxectivo; $\boldsymbol{h}$, que é o vector de termos independentes; e $\mathbf{T}$, que son os coeficientes de x nas restricións. $E_{\boldsymbol{\xi}}$ é a esperanza matemática con respecto a $\boldsymbol{\xi}$; e W son os coeficientes de z nas restricións. Neste caso imos supoñer que W está fixado, aínda que podería ser aleatorio.

Reescribimos o problema do agricultor a partir da información teórica.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + E_{\boldsymbol{\xi}} Q(x, \boldsymbol{\xi}) \\ s.a \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Á vista do problema (1.5), observamos que, neste caso, temos: o vector $c^t = (150, 230, 260)$, a matriz A correspóndese co vector $A = (1, 1, 1)$ e $b = 500$. Estes vectores son deterministas

e fan referencia á primeira etapa do problema.

Escribimos agora o problema de segunda etapa para un escenario en concreto, por exemplo o que considera o rendemento medio:

$$\begin{aligned} Q(x,\xi) = \quad & \text{mín} \quad 238y_1 + 210y_2 - 170w_1 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\ & s.a \quad 2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 \\ & \qquad 3x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 \\ & \qquad 20x_3 - w_3 - w_4 \geq 0 \\ & \qquad -w_3 \geq -6000 \\ & \qquad y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0. \end{aligned}$$

O vector de decisións de segunda etapa $z = (y, w) = (y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4)$ está composto polo vector de vendas e o de compras. Neste exemplo só a matriz T varía con cada escenario, pois q e h están fixados: $q^t = (238, 210, -170, -150, -36, -10)$ e $h^t = (200, 240, 0, -6000)$. A matriz T é a seguinte:

$$T = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora ben, para os outros dous escenarios temos as seguintes matrices:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3.6 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cando o rendemento supera nun 20 % o promedio; e

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cando o rendemento é inferior ao 20 % do promedio.

Como vemos, o que varía na matriz é a diagonal, logo pódese considerar o vector aleatorio $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}, \boldsymbol{t_3})$, que toma tres valores distintos en función do escenario, $(t_1(\boldsymbol{s}), t_2(\boldsymbol{s}), t_3(\boldsymbol{s}))$, con $\boldsymbol{s} = 1, 2, 3$.

Por exemplo, para $s = 2$ temos,

$$\begin{pmatrix} t_1(2) \\ t_2(2) \\ t_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

En definitiva, tamén podemos escribir as restricións de segunda etapa da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1(\boldsymbol{s}) & 0 & 0 \\ 0 & t_2(\boldsymbol{s}) & 0 \\ 0 & 0 & t_3(\boldsymbol{s}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 200 \\ 240 \\ 0 \\ -6000 \end{pmatrix}.$$

A función $E_{\boldsymbol{\xi}}Q(x, \boldsymbol{\xi})$ recibe o nome de función recurso ou función valor e pódese denotar por $\mathscr{D}(x)$. Por tanto, reescríbese a formulación do problema estocástico (1.4) dunha maneira máis reducida:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^t x + \mathscr{D}(x) \\ s.a \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.1.2. Variables aleatorias continuas e incorreladas

Imos considerar agora os rendementos como un vector aleatorio continuo. Ademais, o rendemento de cada cultivo vai a ser independente do resto de cultivos. Supoñamos que o rendemento de cada alimento é unha variable aleatoria uniforme no intervalo $[l_i, u_i]$, con i facendo referencia ó cultivo. Para que as esperanzas da produción sexan iguais a considerar variables aleatorias discretas e correlacionadas, tomamos l_i como un 80 % do rendemento medio e u_i un 120 %. Igual que antes, as decisións de primeira etapa correspóndense coa distribución das terras e as de segunda etapa coa compra e venda dos cultivos. Como estamos considerando independencia no vector aleatorio, a formulación das decisións de segunda etapa é a seguinte:

$$\mathscr{D}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}}Q(x, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{3} E_{\boldsymbol{\xi}}Q_i(x_i, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{3} \mathscr{D}_i(x_i),$$

onde $Q(x, \boldsymbol{\xi})$ asocia un valor na segunda etapa a cada posible realización do vector aleatorio e $\mathscr{D}_i(x_i)$ é a función de esperanza do óptimo da segunda etapa para o cultivo i.

Empecemos calculando $Q_i(x_i, \boldsymbol{\xi})$ con $i = 3$, é dicir, a cantidade óptima de vendas da segunda etapa para o caso da remolacha (noutros cultivos para calcular o valor óptimo da segunda etapa hai que ter en conta tamén as compras, non obstante, neste non, porque todo o que se produce véndese). A formulación do problema de segunda etapa para un rendemento dado, $t_3(\boldsymbol{\xi})$, é:

$$\begin{aligned} Q_3(x_3, \boldsymbol{\xi}) = \quad & \text{mín} \quad -36w_3(\boldsymbol{\xi}) - 10w_4(\boldsymbol{\xi}) \\ & s.a \quad w_3(\boldsymbol{\xi}) + w_4(\boldsymbol{\xi}) \leq t_3(\boldsymbol{\xi})x_3 \\ & \qquad w_3(\boldsymbol{\xi}) \leq 6000 \\ & \qquad w_3(\boldsymbol{\xi}), w_4(\boldsymbol{\xi}) \geq 0, \end{aligned}$$

onde w_3 son toneladas de remolacha vendidas a prezo favorable e w_4 son as vendidas a prezo desfavorable. Por tanto:

$$\begin{aligned} w_3(\boldsymbol{\xi}) &= \text{mín}[6000, t_3(\boldsymbol{\xi})x_3], \\ w_4(\boldsymbol{\xi}) &= \text{máx}[t_3(\boldsymbol{\xi})x_3 - 6000, 0], \end{aligned}$$

xa que o óptimo é vender a maior cantidade posible a prezo favorable e a restante a prezo desfavorable. Observemos que se $t_3(\boldsymbol{\xi})x_3 < 6000$ non se superaría a cota e venderíase todo a prezo favorable, e se $t_3(\boldsymbol{\xi})x_3 > 6000$ quere dicir que superamos a cota e vendemos a cantidade que a supera a prezo desfavorable.

Logo, o valor óptimo de vendas da remolacha é:

$$Q_3(x_3, \boldsymbol{\xi}) = -36\,\text{mín}[6000, t_3(\boldsymbol{\xi})x_3] - 10\,\text{máx}[t_3(\boldsymbol{\xi})x_3 - 6000, 0].$$

Imos supoñer que $l_3x_3 \leq 6000 \leq u_3x_3$, sendo l_3 e u_3 os límites inferior e superior de $t_3(\boldsymbol{\xi})$, respectivamente. É dicir, asumimos que a superficie dedicada a este cultivo non pode ser tan grande que dea unha produción que supere a cota para calquera rendemento, nin pode ser tan pequena que o resultado sexa sempre menor. Así temos:

$$\frac{6000}{u_3} \leq x_3 \leq \frac{6000}{l_3}.$$

Tendo isto en conta, a función da esperanza do valor óptimo de vendas da remolacha é:

$$\mathscr{D}_3(x_3) = E_{\boldsymbol{\xi}} Q_3(x_3, \boldsymbol{\xi}) = -\int_{l_3}^{6000/x_3} 36tx_3 f(t)dt - \int_{6000/x_3}^{u_3} (216000 + 10tx_3 - 60000)f(t)dt,$$

pois cando $t_3(\boldsymbol{\xi}) \in \left(l_3, \frac{6000}{x_3}\right)$ entón, $Q_3(x_3, \boldsymbol{\xi}) = -36t_3(\boldsymbol{\xi})x_3$ e cando $t_3(\boldsymbol{\xi}) \in \left(\frac{6000}{x_3}, u_3\right)$ temos, $Q_3(x_3, \boldsymbol{\xi}) = -216000 - 10(t_3(\boldsymbol{\xi}) - 6000)$. $f(t)$ é a densidade do rendemento da remolacha.

Agora, se supoñemos que a densidade no intervalo $[l_3, u_3]$ é uniforme, é dicir,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{u_3 - l_3} & \text{se } x \in (l_3, u_3) \\ 0 & \text{se } x \notin (l_3, u_3) \end{cases}$$

entón temos o seguinte resultado:

$$\mathscr{D}_3(x_3) = -18\frac{(u_3^2 - l_3^2)x_3}{u_3 - l_3} + \frac{13(u_3x_3 - 6000)^2}{x_3(u_3 - l_3)} = -36\bar{t}_3x_3 + \frac{13(u_3x_3 - 6000)^2}{x_3(u_3 - l_3)},$$

sendo $\bar{t}_3 = \frac{l_3+u_3}{2}$ o rendemento medio para a remolacha considerando unha densidade uniforme.

Se a produción supera sempre a cota ($l_3x_3 > 6000$):

$$\mathscr{D}_3(x_3) = \int_{6000/x_3}^{u_3} (-156000 - 10tx_3)f(t)dt = -156000 - 10\bar{t}_3x_3,$$

xa que:

$$\begin{aligned} Q_3(x_3, \boldsymbol{\xi}) = \quad & -36\,\text{mín}[6000, t_3(\boldsymbol{\xi})x_3] - 10\,\text{máx}[t_3(\boldsymbol{\xi})x_3 - 6000, 0] = \\ & -216000 - 10(t_3(\boldsymbol{\xi})x_3 - 6000) = -156000 - 10t_3(\boldsymbol{\xi})x_3. \end{aligned}$$

De igual forma, se a produción é sempre menor cá cota ($u_3x_3 < 6000$):

$$\mathscr{D}_3(x_3) = \int_{l_3}^{6000/x_3} -36tx_3f(t)dt = -36\bar{t}_3x_3,$$

xa que: $w_3 = t_3(\boldsymbol{\xi})x_3$ e $w_4 = 0$, logo $Q_3(x_3, \boldsymbol{\xi}) = -36t_3(\boldsymbol{\xi})x_3$.

Por tanto temos:

$$\mathscr{D}_3(x_3) = \begin{cases} -36\bar{t}_3x_3 & \text{se } x_3 \leq \frac{6000}{u_3} \\ -36\bar{t}_3x_3 + \frac{13(u_3x_3-6000)^2}{x_3(u_3-l_3)} & \text{se } \frac{6000}{u_3} \leq x_3 \leq \frac{6000}{l_3} \\ -156000 - 10\bar{t}_3x_3 & \text{se } x_3 \geq \frac{6000}{l_3}. \end{cases}$$

Sabendo que o rendemento medio da remolacha é 20, e dado que u_3 é o 120 % do rendemento medio e l_3 é o 80 % do rendemento medio, entón $u_3 = 24$, $l_3 = 16$ e $\bar{t}_3 = 20$. Logo,

$$\mathscr{D}_3(x_3) = \begin{cases} -720x_3 & \text{se } x_3 \leq 250 \\ -720x_3 + \frac{13(24x_3-6000)^2}{x_3(24-16)} & \text{se } 250 \leq x_3 \leq 375 \\ -156000 - 200x_3 & \text{se } x_3 \geq 375, \end{cases}$$

é dicir,

$$\mathscr{D}_3(x_3) = \begin{cases} -720x_3 & \text{se } x_3 \leq 250 \\ -468000 + 216x_3 + \frac{58.5\cdot 10^6}{x_3} & \text{se } 250 \leq x_3 \leq 375 \\ -156000 - 200x_3 & \text{se } x_3 \geq 375. \end{cases}$$

De forma similar obtense para o trigo,

$$\mathscr{D}_1(x_1) = \begin{cases} 47600 - 595x_1 & \text{se } x_1 \leq \frac{200}{3} \\ 119\frac{(200-2x_1)^2}{x_1} - 85\frac{(200-3x_1)^2}{x_1} & \text{se } \frac{200}{3} \leq x_1 \leq 100 \\ 34000 - 425x_1 & \text{se } x_1 \geq 100, \end{cases}$$

e para o millo,

$$\mathscr{D}_2(x_2) = \begin{cases} 50400 - 630x_2 & \text{se } x_2 \leq \frac{200}{3} \\ 87.5\frac{(240-2.4x_2)^2}{x_2} - 62.5\frac{(240-3.6x_2)^2}{x_2} & \text{se } \frac{200}{3} \leq x_2 \leq 100 \\ 36000 - 425x_2 & \text{se } x_2 \geq 100. \end{cases}$$

A expresión do problema global é:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \mathscr{D}_1(x_1) + \mathscr{D}_2(x_2) + \mathscr{D}_3(x_3) \\ s.a \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Agora imos resolver o problema. A función $f(x) = 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \mathscr{D}_1(x_1) + \mathscr{D}_2(x_2) + \mathscr{D}_3(x_3)$ é convexa, continua e diferenciable, por selo as funcións $\mathscr{D}_i(x_i)$. Ademais, o problema cumpre a condición de regularidade, é dicir, existe algún x tal que $g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 500 < 0$ e $h(x)$, que neste caso é 0, é unha función afín. Esta condición permítenos poder aplicar as condicións de Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T) e atopar así o valor óptimo.

As condicións de K-K-T dinnos que: $x^* \in X$ é solución óptima, sendo X a rexión

factible determinada polas restricións, se e só se, existen $\lambda \geq 0$ e ρ tal que:

$$\begin{aligned}&\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla g(x^*) + \rho^t \nabla h(x^*) = 0,\\ &\lambda g(x^*) = 0.\end{aligned}$$

Neste caso, como $h(x) = 0$ para todo x, aplicando as condicións K-K-T temos:

$$\begin{aligned}&150 + \frac{\partial \mathscr{D}_1(x_1)}{x_1} + \lambda = 0,\\ &230 + \frac{\partial \mathscr{D}_2(x_2)}{x_2} + \lambda = 0,\\ &260 + \frac{\partial \mathscr{D}_3(x_3)}{x_3} + \lambda = 0,\\ &\lambda[x_1 + x_2 + x_3 - 500] = 0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Se se supón que a solución é tal que $x_1 \geq 100$, $\frac{200}{3} \leq x_2 \leq 100$, $250 \leq x_3 \leq 375$ e $\lambda \neq 0$, entón tense:

$$\frac{\partial \mathscr{D}_1(x_1)}{x_1} = -425,\ \frac{\partial \mathscr{D}_2(x_2)}{x_2} = -306 - \frac{1.44 \cdot 10^6}{x_2^2},\ \frac{\partial \mathscr{D}_3(x_3)}{x_3} = 216 - \frac{5.85 \cdot 10^7}{x_3^2},$$

logo,

$$\begin{aligned}&150 - 425 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 275,\\ &230 - 306 - \frac{1.44 \cdot 10^6}{x_2^2} + \lambda = 0 \Rightarrow 199 - \frac{1.44 \cdot 10^6}{x_2^2} = 0 \Rightarrow x_2 = 85.067,\\ &260 + 216 - \frac{5.85 \cdot 10^7}{x_3^2} + \lambda = 0 \Rightarrow 751 - \frac{5.85 \cdot 10^7}{x_3^2} = 0 \Rightarrow x_3 = 279.099,\\ &x_1 + x_2 + x_3 - 500 = 0 \Rightarrow x_1 = 135.834.\end{aligned}$$

1.2. O problema de rutas

Vexamos agora un exemplo de planificación de rutas. Supoñamos que un vehículo ten que facer unha ruta para visitar a catro clientes (A,B,C,D). Ademais, o vehículo ten que saír dun depósito, que se denotará cun 0, e volver a el ao final da ruta. Sábese que só hai un vehículo dispoñible con capacidade 10 e que non hai límite de tempo para facer a viaxe.

Tres das catro demandas feitas polos clientes son coñecidas e iguais a 2, mentres que a outra demanda é aleatoria. Esta pode ser 1 ou 7 con igual probabilidade, é dicir, con probabilidade $\frac{1}{2}$ cada unha. Asúmese que os clientes con demandas coñecidas son A,B e D, e o cliente coa demanda aleatoria é C. Como é de supoñer, todos os produtos deben ser

recollidos. Neste caso estamos cun exemplo de recollida, non obstante se o que facemos son entregas resolveríase de forma similar. Máis difícil sería ter que entregar e recoller produtos de forma simultánea.

Este problema pódese representar nun grafo, G, composto por un conxunto, V, de nodos ou vértices, e un conxunto, E, de arestas ou arcos. Cada arco represéntanse por un par (i, j) que indica o desprazamento do nodo i ao j. No noso exemplo, o conxunto de nodos é $V = \{0, A, B, C, D\}$, é dicir, V son o depósito e os clientes. Ademais, o vehículo pode viaxar en calquera dirección e ir dun cliente a outro sen necesidade de volver ao depósito (véxase Figura 1.2). Por tanto, todas as arestas están presentes, o que quere dicir que temos un grafo completo ([11]):

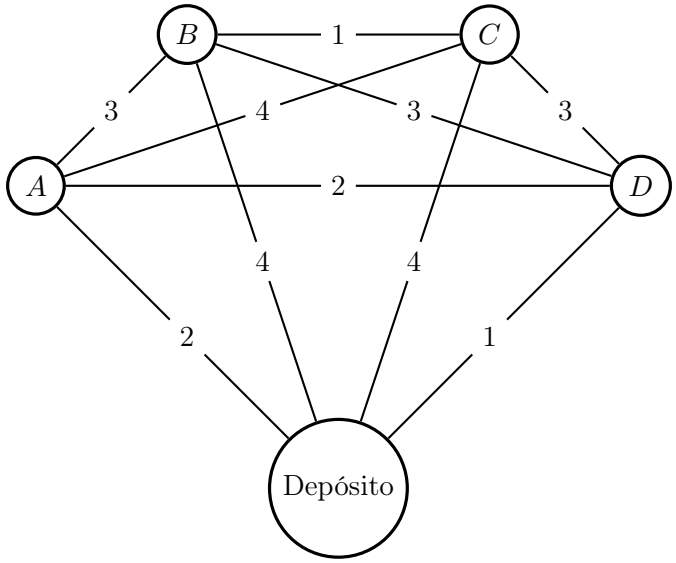


Figura 1.2: Grafo inicial.

A distancia entre os nodos está dada nunha matriz, denominada matriz de distancia que se denotará por **C**. Esta matriz é simétrica, isto quere dicir que a distancia entre cada par de nodos é a mesma en calquera sentido. A miúdo estas matrices cumpren a desigualdade triangular $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$, para todo $i, j, k \in V$, sendo c_{ij} a distancia entre o nodo i e o j. Esta desigualdade dinos que a menor distancia entre dous nodos é ir directamente dun nodo a outro, sen necesidade de pasar por outro nodo entre ambos. Podemos observar que a matriz de distancias, **C**, deste exemplo cumpre esta desigualdade.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

O problema do vendedor ambulante (TSP) consiste en encontrar o camiño máis curto para ir dun sitio a outro entre todos os posibles. No noso caso, non se resolve o exemplo con só atopar o traxecto máis curto, senón que ademais temos que ter en conta que o único vehículo dispoñible ten capacidade para 10 demandas e unha delas é aleatoria.

Se estivésemos só ante un problema TSP poderíase resolver calculando todas as posibles rutas e de entre elas tomar a máis curta. Se temos n clientes e o vehículo sae do depósito, entón pode visitar calquera deses n clientes. Unha vez que visite ao primeiro ten que visitar $n-1$, posteriormente quédanlle por visitar $n-2$ e así sucesivamente ata que os visita todos. Por tanto, resolvendo o problema manualmente teriamos que calcular $n!$ rutas. Aínda que, por simetría da matriz de distancias, sería suficiente calcular $\frac{n!}{2}$ rutas. Tamén se podería resolver con algunha linguaxe de programación, como pode ser `R` ou o servidor `CONCORDE` de `NEOS`[2]. No noso exemplo, o camiño máis curto (sen ter en conta a capacidade do vehículo) móstrase na Figura 1.3 e ten lonxitude $c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45} + c_{51} = 2 + 3 + 1 + 3 + 1 = 10$.

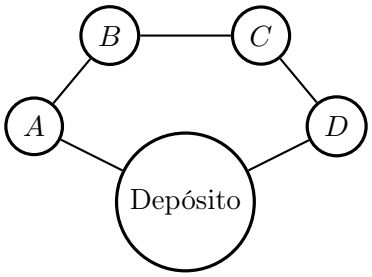


Figura 1.3: Solución TSP asociado a este problema de rutas.

Imos resolver agora o noso problema. Para iso, distinguimos entre coñecer, ou non, a demanda do cliente C antes de chegar a el.

1.2.1. Demandas coñecidas

Supoñamos que antes de comezar a ruta podemos coñecer a demanda do cliente C. Estamos ante un caso de información a priori. Por tanto, escollemos a ruta despois de coñecer a demanda aleatoria, o que se corresponde cun proceso de esperar e ver.

[2] `https://neos-server.org/neos/solvers/co:concorde/TSP.html`

Un exemplo deste tipo de caso sería a recollida dos refugallos dunha determinada empresa. Esta recollida sábese con antelación pero sen demasiada marxe. Se o caso fose de distribución, e non de recollida, un exemplo desta situación sería o reparto dunha bebida a unha serie de bares e restaurantes. Nestes establecementos a demanda varía segundo haxa días festivos, eventos ou non. Esta demanda variable coñécese pouco tempo antes do reparto.

Volvamos ao noso exemplo. Cando a demanda de C é 1, é dicir, o cliente quere que só recollamos un produto, entón a suma total das demandas é 7 (posto que o resto de clientes presentaban demanda 2). Como é menor que a capacidade do vehículo, a solución óptima coincide coa ruta máis curta. Esta ruta, que tiña lonxitude 10, calculámola previamente cando resolviamos o problema TSP e móstrase na Figura 1.4.

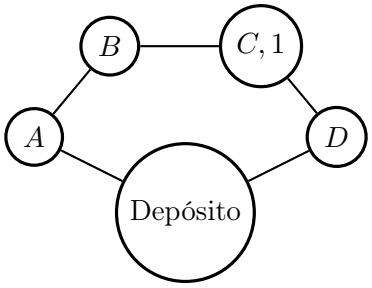


Figura 1.4: Solución de esperar e ver cando a demanda de C é 1.

Se a demanda de C é 7, a suma total das demandas excede a capacidade do vehículo, porque o número de produtos que temos que recoller é 13 e sabemos que o vehículo só pode transportar 10. Por tanto, nalgún momento ten que volver ao depósito, descargar e continuar o traxecto dende alí, ata rematar todas as demandas. En definitiva, ten que facer dúas rutas na menor distancia posible. A solución óptima é $0 \to A \to D \to 0 \to B \to C \to 0$, como se ilustra na Figura 1.5, con lonxitude $c_{12} + c_{25} + c_{51} + c_{13} + c_{34} + c_{41} = 2 + 2 + 1 + 4 + 1 + 4 = 14$.

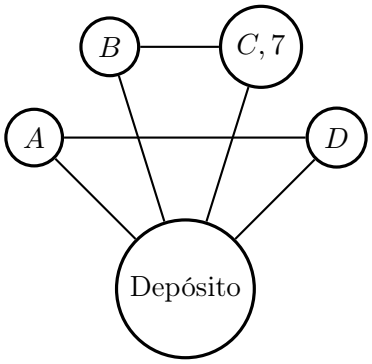


Figura 1.5: Solución de esperar e ver cando a demanda de C é 7.

Para atopar esta solución óptima podémolo facer de forma manual. Cando a demanda de C é 7 podemos visitar este cliente só ou xunto con outro cliente. Non podemos visitar máis clientes xa que se excedería a capacidade do vehículo, pois os clientes A, B e D teñen como demanda fixa 2. Por tanto temos as seguintes rutas, (véxase Figura 1.6), e de entre elas a óptima é a vista anteriormente.

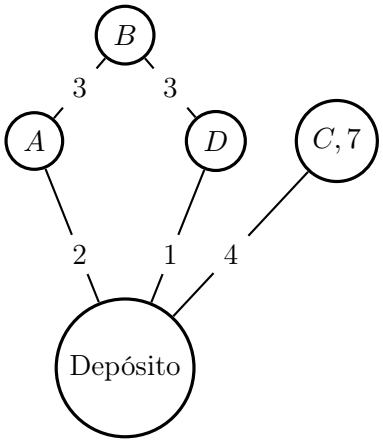
Como sabemos que a probabilidade de que C poida ser 1 ou 7 é a mesma, entón o promedio da distancia recorrida neste proceso de esperar e ver é $WS = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 14 = 12$.

1.2.2. Demandas descoñecidas

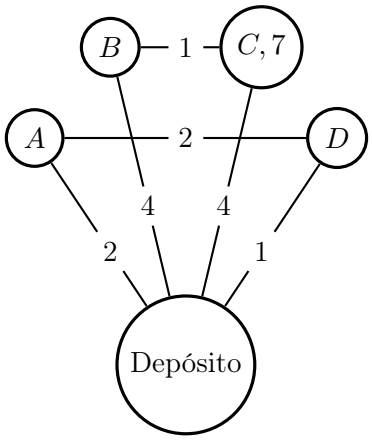
Supoñamos que non coñecemos a cantidade de produtos que temos que recoller no cliente C. Mentres sexa esta demanda menor ou igual a 4, a suma total de demandas non excede a capacidade do vehículo. Daquela, a solución óptima coincide coa ruta TSP cuxa lonxitude é 10.

O que temos que facer neste caso é planear o traxecto non tendo en conta a incerteza, e unha vez coñecida a demanda de C modificar a ruta ou non en función desta cantidade. A demanda de C pode ser 1 ou 7 coa mesma probabilidade, pero de forma aleatoria. Como consecuencia, planificamos como ruta inicial a obtida como ruta óptima do problema do vendedor ambulante.

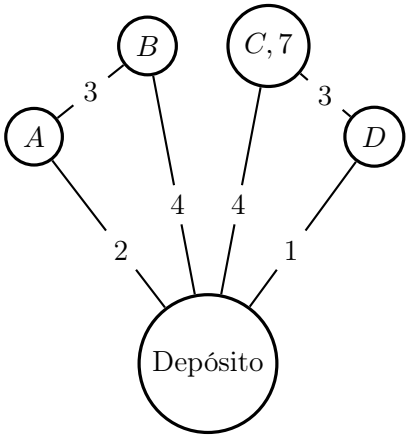
Se a demanda de C é 1, a solución óptima coincide coa do problema TSP, logo seguimos coa ruta planificada (véxase Figura 1.7).



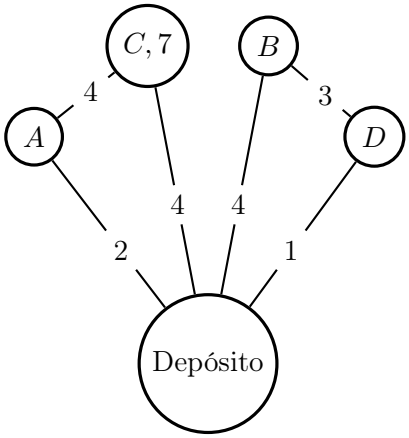
(a) A lonxitude é 17, xa que a distancia entre o depósito e o cliente C tense que contar dúas veces.



(b) A lonxitude é 14.



(c) A lonxitude é 17.



(d) A lonxitude é 18.

Figura 1.6: Posibles rutas de esperar e ver cando a demanda de C é 7.

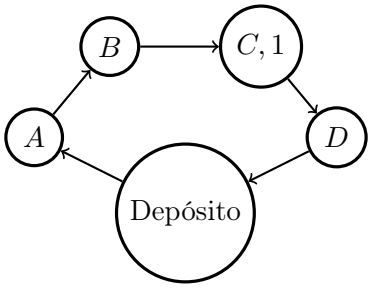


Figura 1.7: Cantidade da demanda previamente descoñecida sendo a demanda de C igual a 1.

Non obstante, se a demanda de C é 7, o vehículo non pode coller todos os produtos de C, posto que xa tería recollidos os de A e B, que son un total de 4, e xunto cos de C excederían a capacidade do vehículo. Supoñamos que podemos dividir os produtos, é dicir, no caso de non poder recoller a demanda total poder coller unha parte e despois volver pola restante. Entón, temos que coller todos os posibles de C e despois volver polos restantes ata rematar coa ruta. Tornar ao depósito por non poder recoller toda a demanda denomínase fracaso. A distancia total percorrida é a lonxitude da ruta TSP, 10, máis a distancia entre ir e volver de C ao depósito, $c_{41} + c_{14} = 4 + 4 = 8$. Por tanto, a lonxitude total que se recorre é de 18. Na Figura 1.8 amosamos o grafo a seguir.

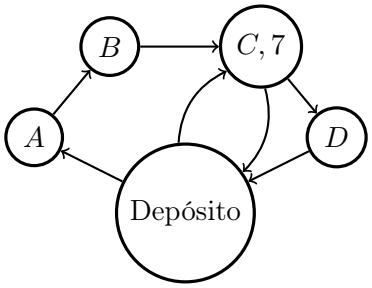


Figura 1.8: Cantidade da demanda previamente descoñecida sendo a demanda de C igual a 7.

Se a demanda non é divisible, unha vez chegado a C volveriamos ao depósito deixar as demandas de A e B e a continuación tornariamos a C para rematar o traxecto. A distancia total neste exemplo coincide en ambos casos. Porén, non sempre se dá esta coincidencia.

A probabilidade de que ocorra calquera das dúas situacións é a mesma. Daquela, a expectativa do problema do valor esperado, é dicir, o promedio do recorrido entre ambas situacións é $EEV = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 14$.

Non obstante, poderíase elixir a ruta TSP en sentido contrario, é dicir, $0 \to D \to C \to B \to A \to 0$. Neste caso, teriamos os grafos da Figura 1.9, en función de como sexa a demanda de C.

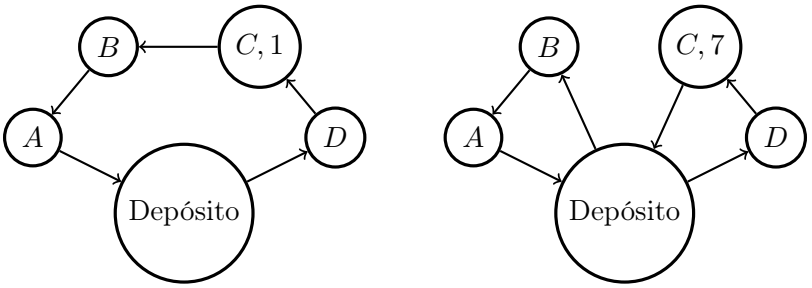


Figura 1.9: Ruta cando a demanda unha vez chegado a C é 1 (esquerda) e ruta se dita demanda fose 7 (dereita).

Como vemos, se a demanda de C é 1 lévase a cabo a ruta planificada previamente sen ningún cambio. A lonxitude total é a mesma que no outro sentido.

Pola contra, se a demanda de C é 7, como previamente só colleu dous produtos, pode recoller toda a demanda de C. En tal caso, como a capacidade do vehículo é 10 e tería collidos 9 produtos, non se pode coller a demanda completa de B, que é 2. O que se fai é volver ao depósito dende C, para despois coller as demandas de B e A. Non compensa ir a B e coller un dos produtos para ter que volver despois outra vez dende o depósito. O retorno dende C ao depósito, sabendo que non se pode recoller toda a demanda de B, coñécese como retorno preventivo. A lonxitude neste caso é $c_{15}+c_{54}+c_{41}+c_{13}+c_{32}+c_{21} = 1+3+4+4+3+2 = 17$.

Aquí, o verdadeiro custo en función da incerteza da solución do valor esperado é $EEV = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 17 = 13.5$.

Para este tipo de problemas, a decisión de primeira etapa é a ruta planificada ou ruta a priori. As accións de recurso, como poden ser a volta ao depósito ou retorno preventivo, son decisións de segunda etapa ou accións adicionais debidas á incerteza. Esta incerteza supón unha diferenza entre a ruta a priori e a ruta que finalmente se leva a cabo.

No noso exemplo, a ruta planificada elixida (a solución óptima do problema do vendedor ambulante) non nos devolve a solución óptima do problema con incerteza. Pódese calcular a ruta que se debe elixir como decisión de primeira etapa. Esta é a que proporciona o mellor resultado para ambos valores. Esta ruta inicial pódese obter de forma manual facendo o seguinte razoamento: partindo do depósito pódense visitar calquera dos catro clientes. Se eludimos a capacidade do vehículo, sabemos que temos un total de 24 rutas, que por simetría é suficiente calcular 12. Se a demanda de C fose inferior a 4, a ruta que se seguiría

sería a inicial. Por outra parte, se a demanda fose superior a 4 teriamos que modificar a ruta, introducindo voltas ao depósito ou retornos preventivos. Este último consiste en tornar ao depósito antes de visitar ao seguinte cliente, se queda espazo no vehículo pero non o suficiente para recoller a demanda deste novo cliente. Logo, calculamos todas estas rutas modificadas e, unha vez coñecidas, escollemos aquela que sexa máis óptima en ambos casos (véxase Figura 1.10).

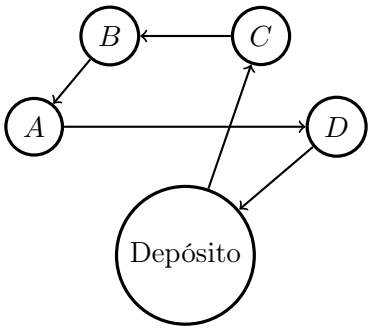


Figura 1.10: Ruta inicial óptima con demanda variable descoñecida.

Así, temos unha lonxitude de 11 se C ten unha demanda de 1, e unha lonxitude de 14 se a demanda é 7. No primeiro dos casos seguiríase coa ruta a priori. Porén, no segundo, o camiño a percorrer é unha modificación da ruta planificada (obsérvese Figura 1.11).

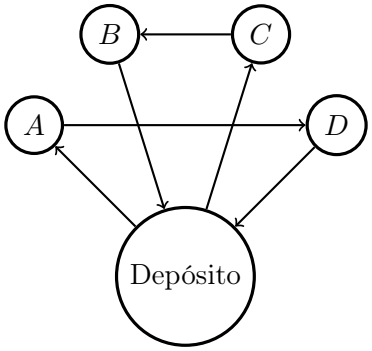


Figura 1.11: Solución óptima cando unha vez chegado a C a demanda é 7.

A lonxitude esperada segundo a política de recurso óptimo é $RP = \frac{1}{2} \cdot 11 + \frac{1}{2} \cdot 14 = 12.5$.

Con este exemplo podemos ver que dentro da programación estocástica é importante distinguir entre o que acontece antes e despois de coñecer o valor das variables aleatorias, é dicir, é importante distinguir entre a primeira etapa e a segunda. As accións de recurso, como poden ser o retorno preventivo ou a volta ao depósito, son necesarias e debemos

considerar a maior cantidade delas para poder telas en conta no momento de atopar a solución óptima. Neste caso, a solución óptima mostra un peor resultado se a demanda de C é pequena. Isto é un custo por coñecer a demanda variable a tempo. Así, se esta demanda é alta permite tomar unha acción de recurso óptima.

Ademais cúmprese:

$$WS \leq RP \leq EEV,$$

onde a primeira desigualdade dinos que o mellor de todo é coñecer sempre a información con anterioridade. A segunda dinos que é mellor ter en conta a incerteza que supoñer que non existe. A diferenza entre RP e WS coñécese como valor esperado de información perfecta, $EVPI$. Neste caso $EVPI = RP - WS = 0.5$ é a cantidade máxima que estariamos dispostos a pagar por coñecer a demanda exacta de C. A diferenza entre EEV e RP é o valor da solución estocástica, VSS. No exemplo, o valor de VSS indícanos que ter en conta a incerteza é importante, $VSS = EEV - RP = 1.5$.

Capítulo 2

Preliminares teóricas

2.1. Programación lineal

A continuación faremos un breve repaso sobre a programación lineal, introducindo os conceptos máis importantes neste tipo de problemas. Posteriormente, falaremos da dualidade e dos seus resultados máis relevantes ([3]).

2.1.1. Introdución aos problemas de programación lineal

Definición 2.1. Un *problema de programación lineal* é un problema de optimización onde a función obxectivo e as restricións son funcións lineais das variables de decisión.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (\text{ou máx}) \\ s.a \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \ \text{con } i \in \{1, \dots, m\} \\ & x_j \geq 0, \ \ \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ & c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \ \ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \ \forall j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

As variables de decisión son x_j, con $j \in \{1, \dots, n\}$, por tanto, hai n variables de decisión. Ademais, téñense un total de m restricións funcionais (e n de signo).

De forma análoga, pódese definir o problema de programación lineal empregando vec-

tores e matrices:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^t x \quad (\text{ou máx}) \\ s.a \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde x é o vector cuxas compoñentes son as variables de decisión, $b = (b_1, \dots, b_m)^t \geq 0$ son os lados dereitos das restricións, $c = (c_1, \dots, c_n)^t$ son os coeficientes do obxectivo e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ é a matriz formada polos coeficientes das restricións.

Definición 2.2. Unha *solución factible* para un problema lineal é o conxunto de valores para as variables de decisión que cumpren todas as restricións. Dise que unha solución factible é *óptima* se ao avaliala na función obxectivo devolve un mínimo desta función, ou un máximo se o problema considerado é de maximizar.

Definición 2.3. O *conxunto factible* é o conxunto de todas as solucións factibles do problema.

2.1.2. Dualidade

Cada problema de programación lineal, denominado problema primal, ten asociado outro problema que se denominada problema dual. Baixo algunhas condicións, resolvendo este problema dual poderemos obter a solución óptima do problema primal.

A continuación formulamos os problemas primal e dual:

$$\begin{array}{ll} \text{Problema primal} & \text{Problema dual} \\ \begin{aligned} \text{máx} \quad & c^t x \\ s.a \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} & \begin{aligned} \text{mín} \quad & b^t y \\ s.a \quad & A^t y \geq c \\ & y \geq 0. \end{aligned} \end{array} \tag{2.3}$$

Os vectores x e y, de dimensións n e m, están compostos polas variables de decisión dos seus respectivos problemas. O vector c, de tamaño n, está formado polos coeficientes da función obxectivo no problema primal e os lados dereitos das restricións no dual. Pola contra, o vector b, de tamaño m, está composto polos lados dereitos no problema primal e son os coeficientes da función obxectivo no dual. A matriz A de dimensións $m \times n$ está composta polos coeficientes das restricións. Ademais, a cantidade de restricións do primal, m, coincide co número de variables de decisión do dual. Analogamente, a cantidade de restricións do dual, n, coincide co número de variables do primal.

Lema 2.4 (Propiedade de dualidade débil)**.** *O valor que toma a función obxectivo para calquera solución factible no problema que é de minimizar, sempre é maior ou igual que o valor que toma a función obxectivo para calquera solución factible no problema que é de maximizar.*

Corolario 2.5. *Se x_0 e y_0 son solucións factibles dos problemas primal e dual, respectivamente, e ademais cumpren que avaliándoas nas súas correspondentes funcións obxectivo devolven o mesmo valor, isto é, $c^t x_0 = b^t y_0$, entón estas solucións factibles son óptimas en cadanseu problema.*

Corolario 2.6. *Se o valor do obxectivo para un dos problemas non está limitado, entón o outro problema non posúe solucións factibles. Non obstante, o recíproco non é certo.*

Teorema 2.7 (Condicións de optimalidade de Karush-Kuhn-Tucker)**.** *Considérese o seguinte problema de programación lineal:*

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^t x \\ s.a \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde c e b son vectores de dimensións n e m, respectivamente, e A é unha matriz de dimensión $m \times n$.

Unha solución factible, x^*, é óptima, se e só se, cumpre as seguintes condicións:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in I} w_i a^i + \sum_{j \in J} v_j e_j = c^t \\ w_i \geq 0, \ \ \forall i \in I \\ v_j \geq 0, \ \ \forall j \in J, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde a^i, con $i \in \{1, \dots, m\}$, denota a i-ésima fila de A. I é o conxunto das restricións funcionais, ($Ax \leq b$), que se saturan en x^*, é dicir, $I = \left\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid a^i x^* = b_i \right\}$. e_j, con $j \in \{1, \dots, n\}$, é un vector fila de dimensión n que contén un 1 na posición j e un cero nas restantes, e J é o conxunto de restricións de signo, ($x \geq 0$), que se saturan na solución factible considerada, isto é, $J = \left\{ j \mid x_j^* = 0 \right\}$.

Observación 2.8. En base ao teorema anterior, unha solución factible dun problema de programación lineal é óptima, se e só se, o vector de coeficientes da función obxectivo pertence ao cono xerado polos vectores de coeficientes das restricións que satura x^*.

As condicións de Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T) pódense reescribir empregando vectores e matrices, como se detalla a continuación. Sexan $w^t = (w_1, \dots, w_m)$ e $v^t = (v_1, \dots, v_n)$

vectores con todas as compoñentes maiores a cero, ou iguais a cero se as restricións ás que corresponden non se saturan. Logo, escríbese a primeira ecuación de (2.5) da forma:

$$w^t A + v^t = c^t.$$

Atopar unha solución óptima empregando as condicións K-K-T é o mesmo que achar unha solución para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Ax \geq b, \;\; x \geq 0, \\ w^t A + v^t = c^t, \;\; w \geq 0, \;\; v \geq 0, \\ w^t(Ax - b) = 0, \;\; v^t x = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Cada unha das ecuacións anteriores significa o seguinte:

- A primeira delas fai referencia á factibilidade do primal, é dicir, o vector x debe ser factible.

- A segunda fai referencia á factibilidade do dual. w e v son vectores formados polas variables do dual que se corresponden coas restricións do primal $Ax \geq b$ e $x \geq 0$, respectivamente. Tamén se denominan multiplicadores de Lagrange.

- A última restrición recibe o nome de propiedade de folguras complementarias. Tense que $w^t(Ax - b) = 0$, se e só se, $w_i = 0$ e/ou $\sum_{j=1}^{n} a_j^i x_j = b_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}$, é dicir, cúmprese a restrición se a i-ésima variable dual é cero e/ou se a i-ésima restrición do primal se satura. Da mesma forma, $v^t x = 0$, se e só se, $v_j = 0$ e/ou $x_j = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 2.9 (Propiedade de dualidade forte)**.** *Se un problema (primal ou dual) ten solución óptima finita, entón ambos problemas posúen solución óptima finita e os obxectivos óptimos coinciden.*

2.2. Programación non lineal

Ao longo desta sección, ademais das referencias anteriormente empregadas, tamén faremos uso do seguinte libro ([1]). Primeiro, do mesmo xeito que na sección anterior, faremos unha introdución á programación non lineal, e posteriormente, falaremos da súa dualidade. Ao igual que os problemas de programación lineal, cada problema non lineal ten asociado un problema dual. Baixo algunhas condicións, que neste caso serán sobre todo de convexidade, poderemos obter a solución do primal resolvendo o problema dual.

2.2.1. Introdución á programación non lineal

Durante esta introdución tamén daremos algunhas definicións básicas de convexidade empregadas no estudo destes problemas, ao igual que algunhas características das funcións que interveñen neles.

Definición 2.10. Un *problema de programación non lineal* é un problema de optimización onde a función obxectivo e as restricións poden ser funcións non lineais das variables de decisión.

A continuación móstrase a formulación dun problema de programación non lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ s.a \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$.

Pódese escribir o problema non lineal da seguinte forma equivalente:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ s.a \quad & g_i(x) \leq 0, \ \text{ con } \ i \in \{1, \dots, m\} \\ & h_j(x) = 0, \ \text{ con } \ j \in \{1, \dots, l\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Denotamos por X á rexión factible, isto é, o conxunto de todas as solucións factibles do problema. As restricións da forma g_i, con $i \in \{1, \dots, m\}$, reciben o nome de restricións de desigualdade, e as da forma h_j, con $j \in \{1, \dots, l\}$, chámanse restricións de igualdade.

De seguido presentamos algunhas definicións básicas da análise convexa.

Definición 2.11. Un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é *convexo* se o segmento que une dous puntos do conxunto permanece no conxunto. Noutras palabras, A é convexo se para todo $x, y \in A$,

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y, \text{ con } \lambda \in [0, 1]\} \subset A.$$

Definición 2.12. Os *puntos extremos* dun conxunto convexo son aqueles que non se poden poñer como combinación convexa de dous puntos distintos do conxunto.

Definición 2.13. Sexa $A \subset \mathbb{R}^n$, a *envoltura convexa* de A está formado por todas as combinacións convexas dos puntos do conxunto, é dicir, un punto x está na envoltura convexa, se e só se, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, sendo n un número natural e cada x_i pertencente a A.

Imos considerar a rexión factible como un conxunto convexo e pechado. Ademais, este conxunto tamén será conexo, de forma que, para dous puntos da rexión, x e y, vai a existir un camiño de puntos, tamén da rexión, que os conecte a través dunha función continua, $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, tal que $\eta(0) = x$ e $\eta(1) = y$. Nalgunhas ocasións pódese supoñer que a rexión factible está limitada. Non obstante, pode acontecer que o conxunto non estea limitado, mais o valor óptimo do obxectivo si o estea. Por outra banda, se o conxunto é pechado e limitado, entón é compacto.

Xeralmente o conxunto de restricións de igualdade, $h(x) = 0$, define un espazo afín, é dicir, cada restrición $h_j(x) = 0$, con $j \in \{1, \dots, l\}$, é da forma $a_j^t x + b_j = 0$, con x, $a_j \in \mathbb{R}^n$ e $b_j \in \mathbb{R}$, ou sexa, un hiperplano.

Definición 2.14. A *envoltura afín* da rexión é o espazo afín que contén ó espazo formado polas restricións de desigualdade non lineais cando o espazo que forman non é afín.

Agora imos mostrar algúns conceptos de interese neste tipo de problemas, en particular no estudo da optimalidade.

Definición 2.15. Unha función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, sendo A un subconxunto non baleiro e convexo de $\mathbb{R}^n$, é *convexa* se para todo $x, y \in A$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad \text{con} \quad \lambda \in [0,1].$$

Unha función é *estritamente convexa* se a desigualdade anterior tense de forma estrita. Dise que unha función, f, é *cóncava* se $-f$ é convexa.

Definición 2.16. Defínese o *epígrafe* dunha función, f, como $epi(f) = \{(x,y) \,|\, y \geq f(x)\}$.

Observación 2.17. Unha función é convexa, se e só se, o seu epígrafe é un conxunto convexo.

Definición 2.18. Sexa unha función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un subconxunto non baleiro e convexo de $\mathbb{R}^n$. Defínese a *derivada direccional* de f no punto $x \in A$ ao longo dunha dirección dada polo vector d como:

$$f'(x;d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda}.$$

Se a función é convexa, o límite anterior existe.

No noso caso, imos supoñer que a función obxectivo é convexa e, por tanto, existen as súas derivadas direccionais.

Definición 2.19. Unha función é *diferenciable* se existen as derivadas direccionais en cada punto e son iguais en todas as direccións.

Definición 2.20. Defínese o *gradiente* de f, ∇f, nun punto x como:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^t,$$

onde $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ denota a *derivada parcial* da función f respecto da i-ésima compoñente do vector x.

Non obstante, non todas as funcións tratadas nun problema de programación non lineal van ser diferenciables. Deste modo, introducimos a seguinte definición:

Definición 2.21. Consideremos un conxunto non baleiro e convexo de $\mathbb{R}^n$, A, e unha función convexa, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Dise que o vector η é o *subgradiente* da función no punto $x \in A$ se:

$$f(y) \geq f(x) + \eta^t(y - x),\ \forall\ y \in A.$$

O conxunto de subgradientes dun punto x recibe o nome de *subdiferencial* da función f en x e denótase por $\partial f(x)$.

Definición 2.22. Unha función continua, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, dise que é *Lipschitziana* en A se para calquera $x, y \in A$ existe $M < \infty$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq M \parallel x - y \parallel .$$

Dise que f é *localmente Lipschitziana* se esta desigualdade só se cumpre para os x, y tales que $\parallel x - y \parallel < \epsilon$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Outras propiedades interesantes que poden presentar as funcións que interveñen neste tipo de problemas son ser *separables*, é dicir, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, e/ou ser *lineais por partes*, isto é, $f(x)$ está formado pola unión de funcións lineais definidas en diferentes intervalos, de forma que o dominio de f é a unión de todos estes intervalos.

Teorema 2.23 (Karush-Kuhn-Tucker)**.** *Considérese o seguinte problema de programación non lineal, cuxa rexión factible é X:*

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ s.a & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0, \end{array} \tag{2.9}$$

con $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$. Supóñase que a función obxectivo é convexa e a rexión factible tamén, e ademais, que se cumpre a seguinte condición

de regularidade: existe algún x' de forma que $g(x') < 0$ e h é afín. Entón, unha solución factible, x^*, é óptima, se e só se, se cumpren as condicións de Karush-Kuhn-Tucker, isto é, existen λ, ρ, con $\lambda \geq 0$, tal que:

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*) + \lambda^t \nabla g(x^*) + \rho^t \nabla h(x^*) = 0, \\ &\lambda^t g(x^*) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Pódense reescribir as condicións K-K-T da seguinte forma equivalente:

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{l} \rho_j \nabla h_j(x^*) = 0, \\ &\lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad con \;\; i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2.2. Dualidade en programación non lineal

De seguido presentamos a formulación dos problemas primal e dual Lagrangiano.

Problema primal

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ s.a \quad & g_i(x) \leq 0, \;\; \text{con} \;\; i \in \{1, \dots, m\} \\ & h_j(x) = 0, \;\; \text{con} \;\; j \in \{1, \dots, l\} \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Problema dual Lagrangiano

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \theta(\lambda, \rho) \\ s.a \quad & \lambda \geq 0 \\ \text{onde} \quad & \theta(\lambda, \rho) = \text{ínf}\Big\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \rho_j h_j(x), \;\; \text{con} \;\; x \in X \Big\}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Teorema 2.24 (Dualidade débil)**.** *Sexa x unha solución factible do problema primal e (λ, ρ) unha solución factible do dual. Entón cúmprese que $f(x) \geq \theta(\lambda, \rho)$.*

Teorema 2.25 (Dualidade forte)**.** *Baixo as hipóteses do teorema de Karush-Kuhn-Tucker, ambos problemas (primal e dual) teñen valores óptimos iguais.*

Teorema 2.26. *Considérense os problemas primal e dual Lagrangiano descritos anteriormente. Sexa (λ^*, ρ^*) unha solución factible do dual Lagrangiano. Como $\theta(\lambda^*, \rho^*) = \text{ínf}\Big\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \rho_j h_j(x), \;\; con \; x \in X \Big\}$, entón tense que o vector (x, λ^*, ρ^*)*

cumpre as condicións de Karush-Kuhn-Tucker, e ademais, x é unha solución factible do primal.

Capítulo 3

Modelos de programación estocástica

Ao longo deste capítulo trataremos de mostrar a teoría necesaria para a comprensión dos problemas de programación estocástica. Ademais de estudar as propiedades básicas, tamén se formulará o problema dual e explicaranse os conceptos de valor esperado de información perfecta e valor da solución estocástica.

3.1. Introdución

Comezamos definindo o problema de programación estocástica de dúas etapas con recurso fixo:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z = c^t x + E_{\boldsymbol{\xi}}[\min_y q(\boldsymbol{\omega})^t y] \\ s.a \quad & Ax = b \\ & Wy + T(\boldsymbol{\omega})x = h(\boldsymbol{\omega}) \\ & x \geq 0, \;\; y \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo $c \in \mathbb{R}^{n_1}$ e $b \in \mathbb{R}^{m_1}$ vectores coñecidos. A matriz $A \in \mathcal{M}_{m_1 \times n_1}$ contén os coeficientes da primeira etapa e $W \in \mathcal{M}_{m_2 \times n_2}$ é a *matriz de recurso*, que ademais estase supoñendo fixa. As compoñentes estocásticas do problema englóbanse dentro do seguinte vector: $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\omega})^t = (q(\boldsymbol{\omega})^t, h(\boldsymbol{\omega})^t, T_1(\boldsymbol{\omega}), \cdots, T_{m_2}(\boldsymbol{\omega}))$, onde $q(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $h(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^{m_2}$, e $T_i(\boldsymbol{w})$ é a i-ésimas fila da matriz $T(\boldsymbol{\omega}) \in \mathcal{M}_{m_2 \times n_1}$, denominada *matriz tecnolóxica*. A dimensión deste vector é $N = n_2 + m_2 + m_2 \times n_1$. Ademais, $E_{\boldsymbol{\xi}}$ fai referencia á esperanza e denotamos por Ξ o soporte de $\boldsymbol{\xi}$, isto é, o conxunto pechado máis pequeno de $\mathbb{R}^N$ que contén a todo valor de $\boldsymbol{\xi}$ posible.

O problema anterior pódese escribir da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z = c^t x + \mathscr{D}(x) \\ s.a \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde

$$\mathscr{D}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}} Q(x, \xi(\boldsymbol{\omega}))$$

e

$$Q(x, \xi(\boldsymbol{\omega})) = \min_y \Big\{ q(\boldsymbol{\omega})^t y \,\Big|\, Wy + T(\boldsymbol{\omega})x = h(\boldsymbol{\omega}),\ y \geq 0 \Big\}.$$

As decisións de primeira etapa, x, tómanse tendo en conta a incerteza e elíxense en prol dos seus efectos futuros. A función, $\mathscr{D}(x)$ denominada *función recurso* ou *función valor*, calcula estes efectos segundo as decisións de primeira etapa elixidas. Pola contra, as decisións de segunda etapa, denominadas decisións de recurso ou correctivas, y, tómanse xa coñecendo a aleatoriedade, é dicir, sabendo quen é o vector $\boldsymbol{\xi}$. No cálculo da función valor é onde fica a dificultade principal da programación estocástica.

3.2. Propiedades básicas dos conxuntos factibles

Nesta sección imos estudar algunhas propiedades do problema lineal estocástico. Empezaremos considerando $\boldsymbol{\xi}$ unha variable aleatoria discreta e posteriormente formularemos uns resultados máis xerais. É importante ter en conta que en presencia de estocasticidade o estudo da factibilidade é máis complicado que no caso determinista. O obxectivo desta sección é facer unha introdución ao problema para mostrar o seu alcance.

3.2.1. Caso particular: variables aleatorias discretas

Consideremos o vector $\boldsymbol{\xi}$ formado por variables aleatorias discretas. Sexa K_1 o conxunto das restricións fixas (aquelas que non dependen do vector aleatorio) do problema estocástico, isto é, $K_1 = \Big\{ x \,\Big|\, Ax = b,\ x \geq 0 \Big\}$, e sexa $K_2(\boldsymbol{\xi})$ o conxunto factible elemental, isto é, $K_2(\boldsymbol{\xi}) = \Big\{ x \,\Big|\, \exists\, y \geq 0 \ s.a\ W(\boldsymbol{\omega})y + T(\boldsymbol{\omega})x = h(\boldsymbol{\omega}) \Big\}$.

Ademais como estamos considerando o caso no que $\boldsymbol{\xi}$ é discreto, o conxunto factible da segunda etapa é $K_2 = \bigcap_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} K_2(\boldsymbol{\xi})$.

A continuación mostramos un exemplo de como se pode calcular este último conxunto.

Exemplo 3.1. Sexa a seguinte segunda etapa dun problema estocástico:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 2y_1 + y_2 \\ s.a \quad & y_1 + 2y_2 + x_1 \geq \boldsymbol{\xi_1} \\ & y_1 + y_2 + x_1 + x_2 \geq \boldsymbol{\xi_2} \\ & 0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Neste caso só é aleatorio o vector h, os restantes vectores e matrices están fixos. Calculemos primeiro $K_2(\boldsymbol{\xi})$. Sabemos que:

$$K_2(\boldsymbol{\xi}) = \left\{ x \,\middle|\, \exists\, y^t = (y_1, y_2) \geq 0 \ \ s.a \ \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi_1} \\ \boldsymbol{\xi_2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Como $0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1 \Rightarrow y_1 + 2y_2 \leq 3 \Rightarrow \boldsymbol{\xi_1} - x_1 \leq 3$. De forma análoga $y_1 + y_2 \leq 2 \Rightarrow \boldsymbol{\xi_2} - x_1 - x_2 \leq 2$. Polo tanto:

$$K_2(\boldsymbol{\xi}) = \Big\{ x \,\Big|\, x_1 \geq \boldsymbol{\xi_1} - 3,\ x_1 + x_2 \geq \boldsymbol{\xi_2} - 2 \Big\}.$$

Posto que $K_2 = \bigcap_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} K_2(\boldsymbol{\xi})$, é suficiente con coñecer o valor máximo de cada unha das compoñentes de $\boldsymbol{\xi}$ para obter este conxunto. Pois por exemplo se $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2})$ toma os valores $(2,1)$ e $(4,7)$, entón $K_2(2,1) = \big\{ x \,\big|\, x_1 \geq -1,\ x_1 + x_2 \geq -1 \big\}$ e $K_2(4,7) = \big\{ x \,\big|\, x_1 \geq 1,\ x_1 + x_2 \geq 5 \big\}$. Polo que neste caso $K_2 = \big\{ x \,\big|\, x_1 \geq 1,\ x_1 + x_2 \geq 5 \big\}$.

Definición 3.2. Defínese a *envoltura positiva* de W, $posW$, como o conxunto de $h(\boldsymbol{w}) - T(\boldsymbol{\omega})x$ que se poden obter como combinación non negativa das columnas da matriz W, é dicir, $posW = \Big\{ t \,\Big|\, Wy = t,\ y \geq 0 \Big\}$.

Teorema 3.3. *As dúas seguintes afirmacións son certas:*

- *Fixado un ξ, o conxunto factible elemental, $K_2(\xi)$, é un poliedro convexo.*
- *Se ξ é unha variable aleatoria discreta finita, o conxunto factible da segunda etapa, K_2, é un poliedro convexo.*

Fixada unha decisión de primeira etapa, fai falta calcular o valor de segunda etapa, isto é: $Q(x, \boldsymbol{\xi}) = \min_y \Big\{ q(\boldsymbol{\omega})^t y \,\Big|\, W(\boldsymbol{\omega})y + T(\boldsymbol{\omega})x = h(\boldsymbol{\omega}),\ y \geq 0 \Big\}$. As dificultades que pode presentar este valor da segunda etapa residen na falta de límites e na posibilidade de non ser factible. A primeira delas soluciónase establecendo límites superiores no vector y, mentres que a segunda resólvese considerando $x \in K_2$. Asemade, supoñendo que $x \in K_2$, pódese

escribir a función valor da seguinte forma: $\mathscr{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}} Q(x, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{K} p_k Q(x, \boldsymbol{\xi_k})$, onde K é o número de realizacións de $\boldsymbol{\xi}$ e p_k é a probabilidade de cada escenario.

Por tanto pódese escribir o problema estocástico da forma:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z = c^t x + \mathscr{Q}(x) \\ s.a \quad & x \in K_1 \cap K_2. \end{aligned}$$

Teorema 3.4. *Para un ξ fixado, a función valor $Q(x, \xi)$ é*

- *unha función lineal e convexa por partes en (h, T);*
- *unha función lineal e cóncava por partes en q;*
- *unha función lineal e convexa por partes en x para todo $x \in K_2$.*

Se $\boldsymbol{\xi}$ é unha variable aleatoria discreta finita tense que $\mathscr{Q}(x)$ é unha función lineal e convexa por partes no conxunto K_2.

Exemplo 3.5. Con este exemplo imos ver que a función valor é lineal por partes nas decisións de primeira etapa, é dicir, lineal por partes en x.

Sexa a seguinte segunda etapa dun problema de programación estocástico:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 2y_1 + y_2 \\ s.a \quad & y_1 + y_2 \geq 1 - x_1 \\ & y_1 \geq \boldsymbol{\xi} - x_1 - x_2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Neste caso:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}.$$

Co fin de reducir os cálculos restrinximos as solucións de primeira etapa, isto é, limitamos o vector $x = (x_1, x_2)$ de forma que $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$.

Para obter a solución óptima deste problema temos que separar dous casos:

1. Se $\boldsymbol{\xi} \leq x_1 + x_2 \Rightarrow \boldsymbol{\xi} - x_1 - x_2 \leq 0$. En base á segunda restrición teríamos que $y_1 \geq \boldsymbol{\xi} - x_1 - x_2$ é negativo, pero ao mesmo tempo sabemos que $y_1 \geq 0$. Logo a segunda restrición neste caso non nos aporta máis información. Agora ben, como a función a minimizar é $2y_1 + y_2$ é preciso que y_1, y_2 sexan o máis pequenos posibles. Por tanto temos que tomar $y_1 = 0$ e agora empregando a primeira restrición, é dicir,

$y_1+y_2 \geq 1-x_1$, temos que $y_2 \geq 1-x_1$ e ao mesmo tempo sabemos que $y_2 \geq 0$. Como antes limitamos x_1 entón $0 \leq 1-x_1 \leq 1$, logo tomamos $y_2 = 1-x_1$. En definitiva, nesta situación $y = (0, 1-x_1)$.

2. Se $\boldsymbol{\xi} \geq x_1 + x_2 \Rightarrow \boldsymbol{\xi} - x_1 - x_2 \geq 0$. Neste caso, a diferenza do anterior, a segunda restricións si nos achega máis información. Como $\boldsymbol{\xi} - x_1 - x_2 \geq 0$ tomamos $y_1 = \boldsymbol{\xi} - x_1 - x_2$. A partir deste y_1, para a segunda compoñente do vector y tense que cumprir $y_2 \geq 1 - \boldsymbol{\xi} + x_2$ e ademais ten que ser positiva. Como precisamos o valor máis pequeno de y_2 que cumpra as dúas restricións tomamos $y_2 = \max(1-\boldsymbol{\xi}+x_2, 0)$.

Como consecuencia dos anteriores casos temos que a expresión do valor óptimo da segunda etapa é a seguinte:

$$Q(x,\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{se } 0 \leq \boldsymbol{\xi} < x_1 + x_2 \\ \boldsymbol{\xi} + 1 - 2x_1 - x_2 & \text{se } x_1 + x_2 \leq \boldsymbol{\xi} \leq 1 + x_2 \\ 2(\boldsymbol{\xi} - x_1 - x_2) & \text{se } \boldsymbol{\xi} \geq 1 + x_2. \end{cases}$$

Por tanto a función valor é lineal por partes en x.

3.2.2. Casos xerais

Agora ben, $\boldsymbol{\xi}$ non sempre está composto por variables aleatorias discretas. Polo que, a continuación mostramos algunhas propiedades básicas xerais.

Considerando un valor fixo de x sabemos que temos o seguinte valor para o problema de segunda etapa: $Q(x,\boldsymbol{\xi}) = \min_y \Big\{ q(\boldsymbol{\omega})^t y \,\Big|\, W(\boldsymbol{\omega})y + T(\boldsymbol{\omega})x = h(\boldsymbol{\omega}),\ y \geq 0 \Big\}$. Se este conxunto non está limitado inferiormente ou non é factible, por convenio considérase este valor ∞.

Previamente xa falamos do conxunto de factibilidade elemental:

$$K_2(\boldsymbol{\xi}) = \Big\{ x \,\Big|\, \exists\, y \geq 0 \ s.a\ W(\boldsymbol{\omega})y + T(\boldsymbol{\omega})x = h(\boldsymbol{\omega}) \Big\}.$$

Unha definición equivalente é:

$$K_2(\boldsymbol{\xi}) = \Big\{ x \,\Big|\, Q(x,\boldsymbol{\xi}) < \infty \Big\}.$$

Analogamente defínese $K_2 = \Big\{ x \,\Big|\, \mathscr{D}(x) < \infty \Big\}$. Outro modo de definilo é $K_2^p = \bigcap_{\boldsymbol{\xi}\in\Xi} K_2(\boldsymbol{\xi})$. Porén, estes dous conxuntos non teñen por que ser iguais (véxase exemplo 3.6).

Exemplo 3.6. Sexa a seguinte segunda etapa dun problema estocástico

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & y \\ s.a \quad & \boldsymbol{\xi} y = 1 - x \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Dito doutra maneira o valor da segunda etapa do problema é:

$$Q(x, \boldsymbol{\xi}) = \min_{y} \{y \,|\, \boldsymbol{\xi} y = 1 - x,\ y \geq 0\},$$

tendo $\boldsymbol{\xi}$ unha distribución triangular en $[0, 1]$ e $\mathbb{P}(\xi \leq u) = u^2$. Como podemos ver, só a matriz $W \in \mathcal{M}_{1\times 1}$ é aleatoria, $W = \boldsymbol{\xi}$.

Distinguimos dous casos:

- Se $\xi \in (0, 1]$, entón $y = \frac{1-x}{\xi}$ e ademais ten que cumprir $y \geq 0$. Logo:

$$y = \frac{1 - x}{\xi} \geq 0 \Rightarrow 1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1.$$

  Polo tanto $Q(x, \xi) = \frac{1-x}{\xi}$, sendo $x \leq 1$ e $K_2(\xi) = \{x \mid x \leq 1\}$.

- Se $\xi = 0$, só pode ser $x = 1$ xa que non existe outro valor para x que cumpra $0 \cdot y = 1 - x$. Polo que $Q(1, 0) = 0$ e $K_2(0) = \{x \mid x = 1\}$. Agora ben, se $x \neq 1$ entón $Q(x, 0)$ debería ser ∞ porque non sería factible o conxunto. Non obstante, como $\mathbb{P}(\xi \leq 0) = 0$, tómase $Q(x, 0) = 0$.

Daquela $K_2^p = \{x \mid x \leq 1\} \cap \{x \mid x = 1\} = \{x \mid x = 1\}$.

Agora calculemos K_2. Para iso precisamos coñecer $\mathscr{D}(x)$.

A función de densidade da distribución triangular en $[0, 1]$ é a seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{2x}{c} & \text{se } 0 \leq x < c \\ 2 & \text{se } x = c \\ \frac{2(1-x)}{1-c} & \text{se } c < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x, \end{cases}$$

sendo c a moda. Neste caso como $\mathbb{P}(\xi \leq u) = u^2$ e estamos considerando o intervalo $[0, 1]$

a moda é 1. Logo a función de densidade é:

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < 0 \\ 2\xi & \text{se } 0 \leq \xi < 1 \\ 2 & \text{se } \xi = 1, \end{cases}$$

Calculamos a función valor:

$$\mathscr{D}(x) = \int_0^1 \frac{1-x}{\xi} \cdot 2\xi d\xi = 2(1-x), \ \forall x \leq 1,$$

por tanto $K_2 = \{x \mid x \leq 1\}$.

Como se pode ver ambos conxuntos son diferentes. O que acontece é que en K_2^p un punto que non sexa factible para algún valor de ξ non se considera un punto do conxunto. Neste caso tiñamos que $x < 1$ non era factible para $\xi = 0$. Pola contra, no conxunto K_2, se a probabilidade dun punto que non é factible para algún valor de ξ é cero, non é motivo para estar fóra do conxunto; é dicir, este conxunto non ten en conta as non factibilidades cuxa probabilidade é nula.

Proposición 3.7. *Se a varianza de $\boldsymbol{\xi}$ é finita e $Q(x, \boldsymbol{\xi})$ está limitado superiormente, entón $\mathscr{D}(x)$ tamén está limitada superiormente.*

Teorema 3.8. *Nun problema de programación estocástica onde o recurso estea fixado e a varianza de $\boldsymbol{\xi}$ sexa finita ambos conxuntos de factibilidade elemental coinciden, isto é, $K_2 = K_2^p$.*

Teorema 3.9. *Se o recurso está fixado e a varianza de $\boldsymbol{\xi}$ é finita entón:*

- *K_2 é pechado e convexo.*
- *Se a matriz tecnolóxica (T) está fixada, tense que K_2 é poliédrico.*
- *Se $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{T}$ son independentes e o soporte da distribución de $\boldsymbol{T}$ é poliédrico, entón K_2 é poliédrico.*

Teorema 3.10. *Nun problema de programación estocástica onde o recurso estea fixado e a varianza de $\boldsymbol{\xi}$ sexa finita tense:*

- *$\mathscr{D}(x)$ é unha función convexa, Lipschitziana e finita no conxunto K_2.*
- *Se a función de distribución de $\boldsymbol{\xi}$ é unha distribución absolutamente continua, $\mathscr{D}(x)$ é diferenciable no interior relativo de K_2, sendo este o conxunto: $\{x \in K_2 \,|\, \exists r > 0, B(x,r) \cap aff(K_2) \subset K_2\}$.*

Se estamos ante un conxunto de variables aleatorias discretas, o conxunto K_2 é poliédrico. Ademais a función valor esperado é lineal por partes e convexa nese conxunto. Pola contra, se as variables aleatorias non seguen unha distribución discreta, a miúdo pódeselle asociar unha densidade de probabilidade. Como moitas densidades de probabilidade son absolutamente continuas e teñen varianzas finitas, ambos conxuntos K_2 e K_2^p coinciden e a función valor é diferenciable e convexa. Un exemplo deste caso é o problema do agricultor (1.1).

Aínda que non demostramos estes resultados, ditas demostracións encóntranse en ([2]).

3.3. Condicións de optimalidade específicas e problema dual

Estes aspectos xa se discutiron antes no caso determinístico (lineal e non lineal) e nesta sección faremos unha pequena introdución ao seu estudo para o caso estocástico. Primeiro obteremos algunhas condicións de optimalidade específicas para resolver algúns problemas estocásticos e de seguido formularemos o problema dual asociado.

Consideremos o problema estocástico descrito da forma (3.2). Unha cuestión importante reside en saber se o valor obxectivo é finito e se alcanza para algunha solución factible de primeira etapa. Co fin de mostrar a relevancia desta cuestión presentamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.11. Supoñemos que $\boldsymbol{\xi}$ segue unha distribución exponencial no intervalo $[0, \infty)$. Sexa o seguinte problema:

$$\text{ínf}\{E_{\boldsymbol{\xi}} y^+ \,|\, y^+, y^- \geq 0,\ x + y^+ - y^- = \boldsymbol{\xi}\}.$$

Como vemos tense que cumprir que $y = \boldsymbol{\xi} - x$, sendo $y = y^+ - y^-$. Posto que x está fixo e $y^+ = \text{máx}\,\{y, 0\}$, a medida que x sexa máis grande a probabilidade de que y^+ sexa cero é maior xa que y tomaría valores negativos con maior probabilidade. Daquela $E_{\boldsymbol{\xi}} y^+$ iría diminuíndo aínda que sempre tomaría valores positivos. Polo tanto o ínfimo desta media é 0.

A continuación mostramos un resultado que nos permite dicir cando unha solución é óptima.

Teorema 3.12. *Se (3.2) ten un valor óptimo finito, unha solución $x \in K_1$ é óptima, se e só se, existe algún $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mu \in \mathbb{R}^{n_1}_+$, con $\mu^t x = 0$, tal que,*

$$-c + A^t \lambda + \mu \in \partial \mathscr{D}(x),$$

ou expresado doutra forma:

$$\{y \,|\, y = A^t\lambda + \mu,\ \mu \geq 0,\ \mu^t x = 0\} \cap \{c + \partial\mathscr{Q}(x)\} \neq \emptyset.$$

A partir da formulación do seguinte teorema obteremos un corolario que proporciona a base para a formulación do problema dual.

Teorema 3.13. *Se $x \in K_1 \cap K_2$, tense:*

$$\partial\mathscr{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\omega}}\partial Q(x, \xi(\boldsymbol{\omega})) + N(K_2, x),$$

sendo $N(K_2, x) = \left\{v \,\middle|\, v^t y \leq 0,\ \forall y \text{ tal que } x+y \in K_2\right\}$, o cal recibe o nome de cono normal a K_2 en x .

Definición 3.14. Un problema de programación estocástica dise que ten un *recurso relativamente completo* se as solucións factibles da primeira etapa do problema tamén son factibles na segunda etapa, é dicir, se $K_1 \subset K_2$.

Corolario 3.15. *Se (3.2) ten un recurso relativamente completo, unha solución é óptima, se e só se, existe algún $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mu \in \mathbb{R}^{n_1}_+$, con $\mu^t x = 0$, tal que,*

$$-c + A^t\lambda + \mu \in E_{\boldsymbol{\omega}}\partial Q(x, \xi(\boldsymbol{\omega})).$$

A partir deste último corolario pódese chegar á formulación do problema dual asociado a (3.2). Esta formulación é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & v = b^t\lambda + E_{\boldsymbol{\omega}}[h(\boldsymbol{\omega})^t\pi(\boldsymbol{\omega})] \\ s.a \quad & A^t\lambda + E_{\boldsymbol{\omega}}[T(\boldsymbol{\omega})^t\pi(\boldsymbol{\omega})] \leq c \\ & W^t\pi(\boldsymbol{\omega}) \leq q(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Comparando este problema co seu primal descrito en (3.1) vemos que hai tantas variables no dual (λ, π) como restricións no primal que serían $m_1 + m_2$. Os coeficientes obxectivo no dual $(b, h(\boldsymbol{\omega}))$ coinciden cos lados dereitos do primal. Os lados dereitos do dual $(c, q(\boldsymbol{\omega}))$ son os coeficientes das variables obxectivo do primal. Por último, as matrices do dual $(A^t, T(\boldsymbol{\omega})^t, W^t)$ coinciden coas traspostas dos lados esquerdos do primal.

Tamén se pode demostrar que, estendendo os resultados do caso determinístico, unha solución óptima $(\lambda^*, \Pi^*(\boldsymbol{\omega}))$ ao problema dual proporciona unha solución ás condicións de

optimalidade do corolario 3.15 e que o valor óptimo do obxectivo v^* é o mesmo que o valor óptimo z^* de (3.2).

3.4. $EVPI$ e VSS: valor da información e solución estocástica

O obxectivo desta sección é estudar o valor esperado de información perfecta e o valor da solución estocástica. Ademais estudarase a relación entre elas. O estudo destes dous valores vén motivado pola necesidade de saber se se pode resolver un problema estocástico a partir de varios máis simples (como por exemplo, o obtido ao substituír as variables aleatorias polas súas esperanzas matemáticas ou os consistentes en considerar varios problemas determinísticos, cada un correspondente a un certo escenario), xa que a resolución do problema sen simplificar adoita ser computacionalmente difícil.

O *valor esperado de información perfecta*, $EVPI$, é a cantidade que se estaría disposta a pagar por coñecer o que acontece no futuro.

Supoñamos que podemos distribuír a incerteza por escenarios. Denotemos por $\boldsymbol{\xi}$ a variable aleatoria que fai referencia a cada escenario. O seguinte problema representa un escenario particular:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & z(x, \xi = (q, h, T)) = c^t x + \text{mín}\Big\{ q^t y \,\big|\, Wy + Tx = h,\ y \geq 0 \Big\} \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{3.6}$$

Neste caso, ao igual que nalgún anterior, imos considerar a matriz de recurso fixa. Supoñemos tamén que todos os escenarios teñen polo menos unha solución factible, o que quere dicir que para cada $\xi \in \Xi$ o problema ten polo menos unha solución óptima. Podemos estar interesados en coñecer as solucións óptimas e os valores obxectivos de todos os escenarios, é dicir, coñecer a distribución de $\bar{x}(\xi)$ e de $z(\bar{x}(\xi), \xi)$ para cada ξ, sendo $\bar{x}(\xi)$ unha solución óptima de (3.6).

Se dalgunha forma desaparecera a aleatoriedade poderíamos coñecer estas solucións e o seu valor, e así, coñecer a solución óptima do problema xeral. Esta solución recibe o nome de *solución de esperar e ver*, WS, e calcúlase do seguinte xeito:

$$WS = E_{\boldsymbol{\xi}} \min_x z(x, \boldsymbol{\xi}) = E_{\boldsymbol{\xi}} z(\bar{x}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}).$$

Comparar esta solución coa correspondente ao problema de recurso, *solución de aquí e agora*, devólvenos o valor esperado de información perfecta. Este valor obtense coa diferenza

de ambos valores anteriores. Dito doutra forma:

$$EVPI = WS - RP.$$

Nesta sección damos unha nova forma para definir o problema de recurso que sería a seguinte:

$$\begin{aligned} RP = \quad & \min_x \quad E_{\boldsymbol{\xi}} z(x, \boldsymbol{\xi}) \\ & s.a \quad Ax = b \\ & \qquad x \geq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Un exemplo do cálculo de $EVPI$ está no problema do agricultor e no exemplo de rutas, ambos no Capítulo 1.

O valor da solución estocástica mide como de boa ou mala é unha decisión do problema do valor medio para o problema de recurso.

O *problema do valor medio ou valor esperado* obtense cambiando as variables aleatorias polos seus valores medios.

$$EV = \min_x z(x, \bar{\xi}),$$

onde $\bar{\xi}$ é a esperanza de $\boldsymbol{\xi}$. A solución deste problema recibe o nome de *solución do valor esperado* e denotarase por $\bar{x}(\bar{\xi})$. Debido á propia incerteza é doado entender que salvo que esta solución non dependa de $\boldsymbol{\xi}$, non ten por que estar próxima á solución óptima do problema estocástico. O valor esperado de usar a solución deste problema defínese como segue:

$$EEV = E_{\boldsymbol{\xi}}(z(\bar{x}(\bar{\xi}), \boldsymbol{\xi})).$$

A diferenza entre este valor e o resultado do problema de recurso é o *valor da solución estocástica*:

$$VSS = EEV - RP.$$

Da mesma forma que para o valor esperado de información perfecta, déronse exemplos do cálculo deste valor no Capítulo 1.

Para poder determinar a relación entre o valor esperado de información perfecta e o valor da solución estocástica primeiro imos demostrar algunhas desigualdades básicas sobre os conceptos empregados nas súas definicións.

Proposición 3.16. *As seguintes desigualdade son certas:*

$$WS \leq RP \leq EEV$$

Demostración. Para cada ξ fixado cúmprese $z(\bar{x}(\xi),\xi) \leq z(x^*,\xi)$, sendo $z(\bar{x}(\xi),\xi)$ o valor obxectivo da solución óptima de (3.6) e x^* a solución óptima do problema de recurso (3.7). Por tanto cúmprese:

$$E_{\boldsymbol{\xi}} z(\bar{x}(\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi}) \leq E_{\boldsymbol{\xi}} z(x^*,\boldsymbol{\xi}) \Rightarrow WS \leq RP.$$

Por outra parte, $\bar{x}(\bar{\xi})$ só é unha solución do valor medio. Polo que se ten a segunda desigualdade:

$$E_{\boldsymbol{\xi}} z(x^*,\boldsymbol{\xi}) \leq E_{\boldsymbol{\xi}}(z(\bar{x}(\bar{\xi}),\boldsymbol{\xi})) \Rightarrow RP \leq EEV.$$

□

Proposición 3.17. *Nun problema estocástico con coeficientes obxectivos e recurso fixos cúmprese a seguinte desigualdade:*

$$EV \leq WS$$

Demostración. Aplicando o Teorema 3.4 tense que

$$z(x,\xi=(h,T)) = c^t x + Q(x,h,T) + \delta(x \mid Ax = b,\ x \geq 0),$$

onde $Q(x,h,T) = \min_y \left\{ q^t y \mid Wy + Tx = h,\ y \geq 0 \right\}$ e

$$\delta(x \mid Ax = b,\ x \geq 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } Ax = b,\ x \geq 0 \\ +\infty & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

é convexo en x, h e T.

A continuación próbase que $f(\xi) = \min_x z(x,\xi)$ é convexa en ξ. Sexan ξ_1 e ξ_2 con $z(x_1,\xi_1) = f(\xi_1)$ e $z(x_2,\xi_2) = f(\xi_2)$, entón:

$$\lambda f(\xi_1) + (1-\lambda) f(\xi_2) = \lambda z(x_1,\xi_1) + (1-\lambda) z(x_2,\xi_2) \geq z(\lambda(x_1,\xi_1) + (1-\lambda)(x_2,\xi_2)) \geq \min_x z(x, \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) = f(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2).$$

Por tanto tense así probada a convexidade de $f(\xi)$. Por último aplicando a desigualdade de Jensen, a cal establece que para toda función convexa $f(\boldsymbol{\xi})$ de $\boldsymbol{\xi}$ cúmprese que $Ef(\boldsymbol{\xi}) \geq f(E\boldsymbol{\xi})$, obtense o resultado a probar. □

Proposición 3.18. *Sexan x^* e $\bar{x}(\bar{\xi})$ a solución óptima do problema de recurso e a solución do valor esperado, respectivamente. Cúmprese:*

$$RP \geq EEV + \eta^t(x^* - \bar{x}(\bar{\xi})),$$

sendo η un punto do conxunto subdiferencial de $E_{\boldsymbol{\xi}} z(x, \boldsymbol{\xi})$ en $\bar{x}(\bar{\xi})$.

Demostración. Posto que $E_{\boldsymbol{\xi}} z(x, \boldsymbol{\xi})$ é convexo cúmprese a desigualdade do subgradiente da definición (2.21). Dado un punto x, aplicando esta desigualdade tense:

$$E_{\boldsymbol{\xi}} z(y, \boldsymbol{\xi}) \geq E_{\boldsymbol{\xi}} z(x, \boldsymbol{\xi}) + \eta^t (y - x),$$

para calquera y. En particular tomando $x = \bar{x}(\bar{\xi})$ e $y = x^*$, tense:

$$E_{\boldsymbol{\xi}} z(x^*, \boldsymbol{\xi}) \geq E_{\boldsymbol{\xi}} z(\bar{x}(\bar{\xi}), \boldsymbol{\xi}) + \eta^t (x^* - \bar{x}(\bar{\xi})) \Rightarrow RP \geq EEV + \eta^t (x^* - \bar{x}(\bar{\xi})).$$

□

Para a próxima desigualdade é preciso ter en conta unha variación do problema de recurso, asociado ao seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & z_u(x, \boldsymbol{\xi}) = c^t x + \text{mín}\Big\{ q^t y \big|\, Wy + Tx \geq h(\boldsymbol{\xi}),\ y \geq 0 \Big\} \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{3.8}$$

O problema de recurso asociado a este problema difire do problema de recurso (3.7) en que só ten os lados dereitos aleatorios e as restricións de segunda etapa son desigualdades (non necesariamente estritas). Polo tanto tamén se cumpren todas as desigualdades previas.

Proposición 3.19. *Sexa o problema (3.8) e o seu correspondente problema de recurso, é dicir, $RP = \min\limits_x E_{\boldsymbol{\xi}} z_u(x, \boldsymbol{\xi})$. Se a función dos lados dereitos, $h(\boldsymbol{\xi})$, está limitada superiormente por unha cantidade $h_{\text{máx}}$, sexa $x_{\text{máx}}$ a solución óptima de $z_u(x, h_{\text{máx}})$. Entón cúmprese:*

$$RP \leq z_u(x_{\text{máx}}, h_{\text{máx}}).$$

Demostración. Para calquera $\xi \in \Xi$ e calquera x que sexa unha solución factible da primeira etapa do problema, tense que unha solución factible para $Wy + Tx \geq h_{\text{máx}}$, $y \geq 0$ tamén o é para $Wy + Tx \geq h(\xi)$, $y \geq 0$. O cal quere dicir que $z_u(x, h_{\text{máx}}) \geq z_u(x, h(\xi))$. Como a desigualdade anterior cúmprese para todo $\xi \in \Xi$ en particular $z_u(x, h_{\text{máx}}) \geq E_{\boldsymbol{\xi}} z_u(x, h(\boldsymbol{\xi}))$. Logo, $z_u(x, h_{\text{máx}}) \geq \min\limits_x E_{\boldsymbol{\xi}} z_u(x, h(\boldsymbol{\xi}))$. □

A partir das desigualdades anteriores dedúcese a seguinte proposición:

Proposición 3.20.

- *Para calquera problema cúmprese:*

$$EVPI \geq 0 \ \ e \ \ VSS \geq 0.$$

- *Para problemas estocásticos con matriz de recurso e coeficientes obxectivo fixos cúmprese:*

$$\begin{aligned} EVPI &\leq EVV - EV, \\ VSS &\leq EVV - EV. \end{aligned}$$

A continuación imos ver unha serie de exemplos para mostrar como se calculan estes dous valores.

Exemplo 3.21. Sexa o problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z(x, \boldsymbol{\xi}) = x_1 + 4x_2 + \text{mín}\Big\{ y_1 + 10y_2^+ + 10y_2^- \ \Big| \ y_1 + y_2^+ - y_2^- = \\ & \qquad\qquad \boldsymbol{\xi} + x_1 - 2x_2, \ y_1 \leq 2, \ y \geq 0 \Big\} \\ s.a \quad & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde a variable aleatoria $\boldsymbol{\xi}$ segue unha distribución uniforme no intervalo $[1, 3]$. Logo ten como función de densidade:

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se} \ \ \xi \in [1, 3] \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Fixamos x e ξ e obtemos:

$$y(x, \xi) = \begin{cases} y_1 = \xi + x_1 - 2x_2, \ y_2 = 0 & \text{se} \ \ 0 \leq \xi + x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ y_1 = 2, \ y_2^+ = \xi + x_1 - 2x_2 - 2 & \text{se} \ \ \xi + x_1 - 2x_2 > 2 \\ y_2^- = 2x_2 - \xi - x_1 & \text{se} \ \ \xi + x_1 - 2x_2 < 0. \end{cases}$$

Polo que:

$$z(x, \xi) = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \xi & \text{se} \ \ 0 \leq \xi + x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -18 + 11x_1 - 16x_2 + 10\xi & \text{se} \ \ \xi + x_1 - 2x_2 > 2 \\ -9x_1 + 24x_2 - 10\xi & \text{se} \ \ \xi + x_1 - 2x_2 < 0. \end{cases}$$

Posto que $x_1 + x_2 = 1$ tense que $2x_1 + 2x_2 + \xi = 2 + \xi$. Ademais, operando é doado verificar que $-18+11x_1-16x_2+10\xi$ e $-9x_1+24x_2-10\xi$ son maiores que $2+\xi$. Polo tanto $z(x,\xi) \geq 2+\xi$. Logo calquera $\tilde{x} \in \{(x_1,x_2)\,|\,x_1+x_2=1,\ x_1,x_2 \geq 0\}$ é unha solución óptima do problema, sempre e cando, $2-3x_1 \leq \xi \leq 4-3x_1$. Por exemplo, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ é unha solución óptima para todo ξ, pero $(1,0)$ só é solución óptima para $\xi = \{1\}$.

Se tomamos $\bar{x}(\xi) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ para todo ξ, como esta solución non depende de ξ, obtense que $WS = RP$. Por tanto $EVPI = 0$.

Calculamos agora RP a partir de WS:

$$\min_x z(x,\xi) = 2+\xi \Rightarrow E_\xi[\min_x z(x,\xi)] = \int_1^3 (2+\xi)\frac{1}{2}d\xi = 4.$$

Logo RP=4.

Por outra parte tense que $\bar{\xi} = E(\boldsymbol{\xi}) = 2$, se supoñemos que $\bar{x}(2) = (0,1)$ obtemos:

$$EEV = E_{\boldsymbol{\xi}\leq 2}(24-10\xi) + E_{\boldsymbol{\xi}\geq 2}(2+\xi) = \frac{27}{4}.$$

Logo podemos calcular $VSS = EEV - RP = \frac{27}{4} - 4 = \frac{11}{4}$.

Exemplo 3.22. Consideremos o mesmo problema de antes, pero supoñendo que $\boldsymbol{\xi}$ é unha variable aleatoria discreta, que pode tomar os valores $\{0, \frac{2}{3}, 3\}$ con probabilidade $\frac{1}{3}$.

A esperanza de $\boldsymbol{\xi}$ é $\bar{\xi} = \frac{1}{3}\left(0+\frac{2}{3}+3\right) = \frac{3}{2}$ e $\bar{x}(\bar{\xi}) = \bar{x}\left(\frac{3}{2}\right) = \left\{x\,|\,x_1+x_2=1,\ \frac{1}{6} \leq x_1 \leq \frac{5}{6}\right\}$. Tomemos por exemplo $\bar{x}(\frac{3}{2}) = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

$$EV = \min_x z(x,\bar{\xi}) = \min_x z\left(x,\frac{3}{2}\right) = 2+\frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

Empregando que $z(\bar{x}(\bar{\xi}),0) = 2$, $z(\bar{x}\left(\bar{\xi}\right),\frac{3}{2}) = \frac{7}{2}$, $z(\bar{x}(\bar{\xi}),3) = 14$ podemos obter o valor de EEV:

$$EEV = E_{\boldsymbol{\xi}}(z(\bar{x}(\bar{\xi}),\boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{3}\left(2+\frac{7}{2}+14\right) = \frac{13}{2}.$$

Posto que $\bar{x}(0) = \left\{x\,|\,x_1+x_2=1,\ \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1\right\}$ e $\bar{x}(3) = \left\{x\,|\,x_1+x_2=1,\ 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}\right\}$ ningunha solución é óptima para os tres casos. Logo temos que pensar que $EVPI$ vai ser distinto de cero.

Calculemos agora WS considerando $\bar{x}(0) = (1,0)$, $\bar{x}\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $\bar{x}(3) = (0,1)$:

$$\begin{aligned} WS &= E_{\boldsymbol{\xi}} z(\bar{x}(\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{3}z(\bar{x}(0),0) + \frac{1}{3}z\left(\bar{x}\left(\frac{3}{2}\right),\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}z(\bar{x}(3),3) = \\ &= \frac{1}{3}(2+0) + \frac{1}{3}\left(2+\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}(2+3) = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Resolvendo o problema de recurso obtense que $RP = \frac{13}{2}$ e como solución óptima $x = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Logo:

$$EV = WS = \frac{7}{2} \leq RP = EEV = \frac{13}{2},$$

e por tanto $EVPI = 3$ e $VSS = 0$.

Exemplo 3.23. Considérese o problema de recurso seguinte:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 6x + E_{\boldsymbol{\xi}}|x - \boldsymbol{\xi}| \\ s.a \quad & x \geq 0, \end{aligned}$$

onde x é unha variable de decisión e $\boldsymbol{\xi}$ é unha variable aleatoria, que toma os valores $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ ambos con probabilidade $\frac{1}{2}$. Imos calcular $EVPI$ e VSS.

Calculemos primeiro a esperanza de $\boldsymbol{\xi}$:

$$\bar{\xi} = E(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Posto que $EVPI = RP - WS$ calculemos RP e WS.

Se $x \leq \frac{1}{3}$, entón $E_{\boldsymbol{\xi}}|x - \boldsymbol{\xi}| = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{3} - x\big) + \frac{1}{2}\big(\frac{2}{3} - x\big) = \frac{1}{2} - x$. Polo tanto, $z(x, \boldsymbol{\xi}) = 6x + 10\big(\frac{1}{2} - x\big) = -4x + 5$. Logo minimizando en x obtemos o valor $\frac{11}{3}$.

Facendo o mesmo procedemento, se $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ obtemos o valor $\frac{11}{3}$ e se $x \geq \frac{2}{3}$ obtemos o valor $\frac{17}{3}$.

Polo tanto:

$$RP = \min_x E_{\boldsymbol{\xi}} z(x, \boldsymbol{\xi}) = \frac{11}{3}.$$

Calculemos agora WS:

Se $\xi = \frac{1}{3}$ e $x \leq \frac{1}{3}$, $6x + 10\big|x - \frac{1}{3}\big| = -4x + \frac{10}{3}$. Logo minimizando en x obtense o valor 2. Por outra parte, se $\xi = \frac{1}{3}$ e $x \geq \frac{1}{3}$, $6x + 10\big(x - \frac{1}{3}\big) = 16x - \frac{10}{3}$. Do mesmo xeito, minimizando en x obtemos o valor 2.

Analogamente, se $\xi = \frac{2}{3}$ e $x \leq \frac{2}{3}$ obtemos como valor mínimo 4 e se $\xi = \frac{2}{3}$ e $x \geq \frac{2}{3}$ tamén se obtén o valor 4.

Logo:

$$WS = E_{\boldsymbol{\xi}}[\min_x z(x, \boldsymbol{\xi})] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

daquela,

$$EVPI = \frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3}.$$

Por outra parte, $VSS = EEV - RP$. Logo temos que calcular EEV.

Sabemos que $EEV = E_{\boldsymbol{\xi}}(z(\bar{x}(\bar{\xi}), \boldsymbol{\xi}))$, sendo $\bar{x}(\bar{\xi})$ a solución óptima de $EV = \text{mín}_x\, z(x, \bar{\xi})$.

Posto que $\bar{\xi} = \frac{1}{2}$ pode acontecer que $x \leq \frac{1}{2}$ ou que $x \geq \frac{1}{2}$. Se $x \leq \frac{1}{2}$, $6x + 10\left|x - \frac{1}{2}\right| = -4x + 5$, o valor mínimo conséguese en $x = \frac{1}{2}$ e este valor é 3. Da mesma forma, se $x \geq \frac{1}{2}$ obtemos o mesmo valor mínimo e a mesma x. Polo tanto $\bar{x}(\bar{\xi}) = \frac{1}{2}$.

Calculando $|\bar{x}(\bar{\xi}) - \boldsymbol{\xi}|$ obtemos para ambos casos o valor $\frac{1}{6}$. Logo:

$$EEV = E_{\boldsymbol{\xi}}(z(\bar{x}(\bar{\xi}), \boldsymbol{\xi})) = 6 \cdot \frac{1}{2} + 10\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{14}{3}.$$

Polo tanto:

$$VSS = \frac{14}{3} - \frac{11}{3} = 1.$$

Capítulo 4

Resolución dos problemas

Neste capítulo explicaremos a resolución dos problemas presentados no Capítulo 1. Para o primeiro deles (problema do agricultor) empregamos o servidos de optimización NEOS apoiándonos nos documentos ([9]) e ([10]). Para ilustrar como se resolvería o segundo problema (problema de rutas) mostraremos o algoritmo heurístico descrito no arquivo ([7]).

4.1. Caso de variables continuas: modelador SMPS

Nesta sección imos explicar como se resolven problemas lineais estocásticos empregando por un lado o modelador SMPS e por outro lado o servidor de optimización NEOS. SMPS é unha linguaxe de modelado alxébrico que permite presentar de maneira estruturada en ficheiros de texto as distintas compoñentes dun modelo de programación estocástico. O servidor NEOS[1] permite facer uso do modelo en SMPS (e de outros moitos problemas de optimización) e resolvelo a través de Internet mediante o uso dun solver. Para problemas estocásticos, NEOS permite usar o solver BNBS que implementa un algoritmo dos denominados de descomposición (cuxa presentación excede os contidos do presente traballo) que a súa vez, nas súas iteracións, fai uso do coñecido solver CPLEX (que a súa vez é unha implementación, entre outras, de diversas variantes do símplex) para a resolución de problemas de programación lineal.

O formato SMPS estándar baséase en tres arquivos diferentes: un arquivo principal, un arquivo de tempo e un arquivo estocástico. Cada arquivo está dividido nun certo número de seccións. Cada unha delas iníciase cunha cabeceira seguida por unha liña de datos. A estrutura sería a seguinte:

[1] htttps://neos-server.org/neos/

- Cabeceira
  - Primeiro campo de palabras: columnas 1–14.
  - Segundo campo de palabras: columnas 15–24.
- Liña de datos:
  - Campo de código: columnas 2–3.
  - Primeiro campo de nome: columnas 5–12.
  - Segundo campo de nome: columnas 15–22.
  - Primeiro campo numérico: columnas 25–36.
  - Terceiro campo de nome: columnas 40–47.
  - Segundo campo numérico: 50–61.

Para ilustrar a teoría dos diferentes arquivos empregaremos como exemplo o problema do agricultor no caso discreto, cuxa formulación para un rendemento medio está descrita en (1.1).

4.1.1. Arquivo principal

Neste arquivo defínense os coeficientes deterministas do problema e as dimensións do mesmo. Ademais, fíxase o seu nome e a localización dos coeficientes estocásticos.

As seccións que compoñen este arquivo son as seguintes:

NAME
Escribimos NAME no primeiro campo de palabras e o nome do problema no segundo campo. Este nome ten que ser o mesmo para os outros dous arquivos.

ROWS
Cada fila de datos especifica o nome da función obxectivo e o das restricións no primeiro campo de nome. Se a fila de datos é a da función obxectivo indicámolo coa letra N no campo de código, mentres que, se a fila corresponde cunha restrición é necesario indicar de que tipo é empregando as letras L (restrición de menor ou igual), E (restrición de igualdade) ou G (restrición de maior ou igual).

COLUMNS

Cada fila de datos especifica os coeficientes da función obxectivo e os das restricións que sexan distintos de cero.

Esta sección iníciase coa palabra COLUMNS no primeiro campo de palabras. Posteriormente, en cada liña de datos escríbese o nome da variable no primeiro campo de nome, o nome da fila no segundo campo e o valor do coeficiente no primeiro campo numérico. Ademais, pódese empregar o terceiro campo de nome para indicar outra fila á que apareza esta variable e no segundo campo numérico o seu valor. Neste caso, no campo de código non se escribe nada.

RHS

Cada liña de datos mostra os valores dos lados dereitos non nulos de cada restrición. Neste caso, ademais de escribir RHS na cabeceira no primeiro campo de palabras tamén o escribimos no primeiro campo de nome de cada liña de datos. No segundo campo de nome poñemos o nome da fila e no primeiro campo numérico o valor do lado dereito da correspondente restrición. Igual que na sección anterior, podemos escribir no terceiro campo o nome doutra fila e no segundo campo numérico o valor.

ENDATA

Desta forma remata o arquivo principal.

O arquivo principal do problema do agricultor é:

```
NAME                FARMER
ROWS
 N  WEALTH
 L  BUDGET
 G  BAL1
 G  BAL2
 L  BAL3
 L  BAL4
COLUMNS
    X1        BUDGET    1.00      BAL1      +2.5
    X2        BUDGET    1.00      BAL2      +3
    X3        BUDGET    1.00      BAL3      -20
    Y1        BAL1      1.00
    Y2        BAL2      +1.00
    W1        BAL1      -1.00
    W2        BAL2      -1.00
    W3        BAL3      +1.00     BAL4      +1.00
    W4        BAL3      +1.00
    X1        WEALTH    150
    X2        WEALTH    230
    X3        WEALTH    +260
    Y1        WEALTH    +238
    Y2        WEALTH    +210
    W1        WEALTH    -170
    W2        WEALTH    -150
    W3        WEALTH    -36
    W4        WEALTH    -10
RHS
    RHS       BUDGET    500       BAL1      200
    RHS       BAL2      240       BAL4      6000
ENDATA
```

4.1.2. Arquivo de tempo

Este arquivo contén a información necesaria para especificar a estrutura dinámica do problema. Ademais divide os datos en etapas.

Na cabeceira, no primeiro campo de palabras escríbese TIME e no segundo campo escribimos o nome do problema, igual que o fixemos no arquivo anterior. Despois temos a sección PERIODS. Neste caso, se no arquivo principal as variables seguen a orde temporal só sería preciso indicar no primeiro campo de nome a primeira variable de cada etapa, no segundo campo a fila da que forman parte e finalmente no terceiro campo escribiríase a etapa á que pertencen. Porén, se non están ordenadas sería necesario indicalo mediante unha lista completa de columnas e filas xunto coa etapa á que pertencen. Finalmente, escribimos ENDATA para rematar este arquivo.

Este sería o arquivo de tempo do problema do agricultor:

```
TIME            FARMER
PERIODS
    X1          BUDGET          TODAY
    Y1          BAL1            TOMORROW
ENDATA
```

Neste caso como as variables seguen a orde temporal non é necesario escribir a lista completa.

4.1.3. Arquivo estocástico

Este arquivo contén a información das variables aleatorias. En función de como sexa o problema hai diversas seccións para a escritura do mesmo. O obxectivo final é elaborar unha árbore de sucesos. Esta pódese facer de maneira explícita ou implícita. Algunhas seccións que poden aparecer no arquivo son as seguintes:

STOCH

Na cabeceira despois de escribir STOCH escribimos o nome do problema no segundo campo de palabras.

SCENARIOS

Nesta sección elabórase unha árbore de sucesos de forma explícita por escenarios.

Cada escenario representa unha ruta dende un nodo inicial a un nodo final. Ademais, para evitar repetir información, as distintas ramas dun período poden ser compartidas por diversos escenarios.

Para iniciar cada escenario temos que escribir SC no campo de código. Despois escribimos o nome do escenario no primeiro campo de nome e o escenario do que se ramifica no segundo. Se o escenario que queremos iniciar é o primeiro escenario entón, escríbese a palabra ROOT no segundo campo de nome. A probabilidade de que aconteza unha determinada ruta escríbese no primeiro campo numérico. Finalmente, no terceiro campo de nome engádese o período de tempo no cal se empeza unha ramificación.

Dentro de cada escenario, nas seguintes liñas de datos escríbese o nome da columna, da fila e o valor de cada variable que intervén no escenario.

Se queremos describir unha árbore de sucesos nodo a nodo empregaríamos a sección NODE.

BLOCKS

Nesta sección escribimos os vectores aleatorios de varias dimensións cuxas compoñentes son independentes entre os diferentes períodos, pero son dependentes dentro do mesmo período. Con esta sección crease unha árbore de sucesos de forma implícita.

Como cabeceira escribimos a palabra BLOCKS no primeiro campo de palabras e no segundo campo escribimos o tipo de bloque. Se temos un bloque de tipo DISCRETE escribimos no campo de código as letras BL, despois escríbese o nome do bloque no primeiro campo de nome e no segundo o período no que se realizan os cambios. Finalmente, a probabilidade dos distintos valores ponse no primeiro campo numérico.

Igual que na sección anterior, pero neste caso en cada bloque, engadimos unha fila co nome da columna, da fila e do valor da variable.

INDEP

Nesta sección especifícase a distribución de variables aleatorias independentes.

Por exemplo, para unha variable que segue unha distribución discreta utilízase a palabra DISCRETE. Esta tense que escribir na cabeceira no segundo campo de palabras. Despois, nas liñas de datos escríbese o nome da columna do elemento aleatorio no primeiro campo de nome e o nome da fila no segundo. De seguido, no primeiro campo numérico ponse o seu valor e no segundo a probabilidade coa que se alcanza este valor. Finalmente, no terceiro campo de nome escríbese a etapa á que pertence.

ENDATA

Deste xeito remata o arquivo estocástico.

Cando se crea un arquivo estocástico só pode haber unha realización da árbore de sucesos de xeito explícito, é dicir, só pode haber ou a sección SCENARIOS ou a sección NODE. Ademais, se temos establecido unha árbore de sucesos de forma explícita non poden aparecer as seccións INDEP ou BLOCKS.

Para o problema do agricultor o arquivo estocástico é o seguinte:

```
STOCH             FARMER
BLOCKS            DISCRETE
 BL  BLOCK1       TOMORROW    0.33334
     X1           BAL1        2.5
     X2           BAL2        3
     X3           BAL3        -20
 BL  BLOCK1       TOMORROW    0.33333
     X1           BAL1        3
     X2           BAL2        3.6
     X3           BAL3        -24
 BL  BLOCK1       TOMORROW    0.33333
     X1           BAL1        2
     X2           BAL2        2.4
     X3           BAL3        -16
ENDATA
```

Como podemos observar o arquivo estocástico do problema do agricultor describe unha árbore de eventos de forma implícita por medio da sección BLOCKS.

Subindo os tres arquivos anteriores a `NEOS` e seleccionando o solver `BNBS`[2] obtense a mesma solución que a presentada na Táboa 1.4.

[2] `https://neos-server.org/neos/solvers/slp:bnbs/SMPS.html`

4.2. Un caso de variables enteiras: un algoritmo heurístico

Ao longo desta sección imos presentar un algoritmo heurístico, deseñado por Dror e Trudeau (1986), que nos permite resolver un problema de rutas cando a demanda dos clientes é aleatoria. Dito algoritmo é unha adaptación ao caso estocástico do algoritmo de Clarke e Wright (1964) ([4]) para problemas de rutas de vehículos deterministas.

O obxectivo deste tipo de problemas é minimizar o custo das rutas. O algoritmo iniciase creando unha ruta de ida e volta dende o depósito para cada cliente e a partir de aquí vanse combinando iterativamente rutas de forma que se maximicen os aforros obtidos. A idea do algoritmo baséase no aforro que se obtén cando se xuntan na mesma ruta dous clientes de rutas distintas. Para un problema de rutas estocástico os aforros, que se denotan por s_{ij}, calcúlanse, para cada par de puntos de entrega (i, j), da forma:

$$s_{ij} = c'_{0i} + c'_{0j} - c'_{ij},$$

con $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sendo n o número de clientes. Ademais, suponse que a matriz de custos é simétrica. Na igualdade anterior denótase por c'_{0i} (respectivamente c'_{0j}) o custo da ruta que inicialmente visita a un cliente i (j) e c'_{ij} ao custo da ruta obtida ao combinar as rutas que inicialmente visitan a i e a j. Supoñemos que i, inicialmente, é o último cliente visitado na súa ruta e j o primeiro cliente visitado na súa.

O algoritmo ten en conta os aforros para crear rutas unindo nodos, de modo que se obteña o maior aforro posible, sen superar a capacidade do vehículo. Porén, posto que as demandas son aleatorias, pode acontecer que ao chegar a un cliente a demanda deste provoque que se supere a capacidade do vehículo. Neste caso, habería que volver ao depósito, descargar e volver para terminar de atender a todas as demandas co conseguinte incremento do custo. Ademais dous nodos que se queiran unir teñen que ter cada un polo menos unha conexión co nodo depósito. En resumo, cada aforro s_{ij} sería o valor esperado do custo da ruta que contén ao cliente i, máis o valor esperado do custo da ruta que contén ao cliente j, menos o valor esperado da ruta que contén ambos nodos onde o nodo j vai xusto despois do nodo i. Ademais, cada aforro vólvese a calcular despois de unir dúas rutas.

Outro factor a ter en conta é a dirección das rutas. Para cada par de nodos (i, j) hai dúas posibles direccións. A que se ten que tomar é a que proporciona o valor máis elevado, é dicir, a que proporciona o máx$\{s_{ij}, s_{ji}\}$.

A continuación mostramos un exemplo que ilustra como calcular o custo das rutas.

Exemplo 4.1. Sexa unha ruta con cinco clientes e un depósito. Os clientes denotados do 1 ao 5 atópanse nas posicións $(5, 0)$, $(5, 5)$, $(0, 5)$, $(-5, 5)$ e $(-5, 0)$, respectivamente e o depósito atópase na posición $(0, 0)$. Vaise a considerar a distancia entre os diferentes sitios en liña recta. Por outra parte, a demanda esperada dos catro primeiros clientes é o 15 %

da capacidade do vehículo (C) e a do último é do 40 %.

Neste exemplo asúmese que se unha ruta falla, os clientes que falten por ser visitados recibirán unha atención individual.

O obxectivo do exemplo é calcular o custo da ruta que comeza no depósito, vai ao primeiro cliente e segue polos restantes ata volver ao depósito. Denotemos esta ruta por C^R. Tamén se calculará a ruta que segue a dirección oposta, C^L.

O custo da ruta C^R é:

$$c_{01} + \mathbb{P}\{d_1 > C\}[c_{10} + 2\sum_{i=1}^{5} c_{0i}] + \mathbb{P}\{d_1 \leq C \text{ e } d_1 + d_2 > C\}[c_{12} + c_{20} + 2\sum_{i=2}^{5} c_{0i}] + \mathbb{P}\{d_1 + d_2 \leq C \text{ e } d_1 + d_2 + d_3 > C\}[c_{12} + c_{23} + c_{30} + 2\sum_{i=3}^{5} c_{0i}] + \mathbb{P}\{d_1 + d_2 + d_3 \leq C \text{ e } d_1 + d_2 + d_3 + d_4 > C\}[c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{40} + 2(c_{04} + c_{05})] + \mathbb{P}\{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq C \text{ e } d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 > C\}[c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45} + c_{50} + 2c_{05}] + \mathbb{P}\{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 \leq C\}[c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45} + c_{50}],$$

onde C é a capacidade do vehículo e d_i, con $i \in \{1, ..., 5\}$, son as demandas dos clientes. De forma análoga calcularíase o custo da ruta C^L.

Posto que as demandas dos clientes son independentes, se supoñemos que seguen variables aleatorias normalmente distribuídas onde se coñece a demanda media e $\frac{\sigma}{\mu} = 0.5$ (sendo σ a desviación típica e μ a media), o custo da ruta C^R sería 40.5563 e o da ruta C^L sería 48.8362. Como podemos ver os aforros van ser diferentes segundo sexa a dirección da ruta.

A continuación amosamos esquematicamente os pasos do algoritmo que fixeron Dror e Trudeau a partir da extensión ao caso estocástico do algoritmo de Clarke e Wright:

- **Iniciación**
  Denótase por W o conxunto formado por todos os posibles pares (i, j) tales que $i, j \in V \setminus \{0\}$, onde V é o conxunto de vértices da rede considerada e 0 é o depósito. Para cada cliente $i \in V \setminus \{0\}$ xérase a ruta $(0, i, 0)$.

- **Paso** 1
  Calcúlanse os aforros s_{ij} da forma $s_{ij} = c'_{0i} + c'_{0j} - c'_{ij}$ para todo $(i, j) \in W$, sendo c'_{0i} e c'_{0j} o valor esperado do custo da ruta que contén ao cliente i e j, respectivamente e c'_{ij} o valor esperado do custo da ruta que contén ambos nodos onde o nodo j vai xusto despois do nodo i.

- **Paso** 2
  Ordénanse os aforros calculados no paso anterior de maneira non decrecente.

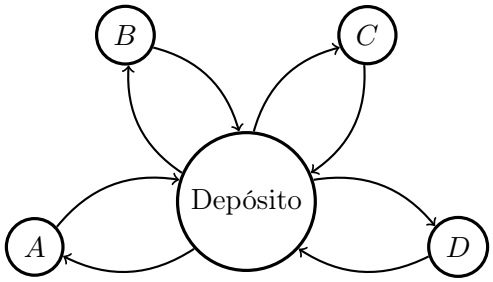
- **Paso** 3
  Calcúlase $s_{kl} = \text{máx}\{sij \,|\, (i,j) \in W\}$. A ruta é factible se $s_{kl} > 0$ e r_k é a ruta que contén a k como último cliente, r_l é a ruta que contén a l como primeiro cliente e a suma das demandas da ruta combinada entre r_k e r_l, onde k vai xusto despois de l, non supera a capacidade do vehículo (permitindo retornos ao depósito). No caso de ter factibilidade combínanse as rutas r_k e r_l eliminando os pares $(k,0)$ e $(0,l)$ e incluíndo o par (k,l). Elimínanse os aforros s_{kl} e s_{lk} e defínese o novo conxunto $W = W \setminus \{(k,l),(l,k)\}$.

- **Paso** 4
  Repítense os Pasos 1, 2 e 3 ata que non se poidan combinar máis rutas.

Exemplo

Agora imos aplicar o algoritmo ao exemplo de rutas exposto na sección 1.2.

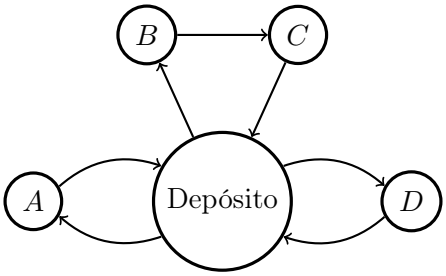
- **Iniciación**
  Creamos 4 rutas de forma que o vehículo saia do almacén, visite un único cliente e volva ao mesmo para iniciar o proceso. O custo de abastecer aos clientes segundo estas rutas é 22.



- **Paso** 1.1
  Calculamos os aforros s_{ij} correspondentes a unir os nodos i e j na mesma ruta: $s_{AB} = s_{BA} = 3$, $s_{AC} = s_{CA} = 2$, $s_{AD} = s_{DA} = 1$, $s_{BC} = s_{CB} = 7$, $s_{BD} = s_{DB} = 2$ e $s_{CD} = s_{DC} = 2$.

- **Paso** 2.1
  Claramente o maior aforro é $s_{BC} = s_{CB} = 7$.

- **Paso** 3.1
  Combinamos as rutas que conteñen a B e C.

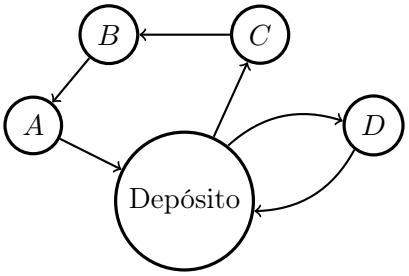


O custo é 15.

- **Paso** 1.2
  Calcúlanse os novos aforros: $s_{AB} = -1$, $s_{BA} = \frac{3}{2}$, $s_{CA} = 1$, $s_{AC} = -\frac{3}{2}$, $s_{DB} = -2$, $s_{BD} = 1$, $s_{CD} = 1$, $s_{DC} = -\frac{3}{2}$, $s_{AD} = s_{DA} = 1$.

- **Paso** 2.2
  O aforro máis grande é $s_{BA} = \frac{3}{2}$.

- **Paso** 3.2
  Combinamos a ruta que contén a B en último lugar e a que contén a A no primeiro.

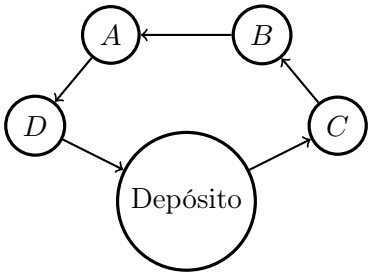


O custo é 13.5.

- **Paso** 1.3
  Os novos aforros son $s_{DC} = 0$, $s_{AD} = 1$, $s_{CD} = -\frac{1}{2}$, $s_{DA} = -\frac{3}{2}$.

- **Paso** 2.3
  O aforro máis grande é $s_{AD} = 1$.

- **Paso** 3.3
  Combinamos a ruta que contén a A en último lugar e a D de primeiro.



O custo da ruta creada é 12.5 e coincide co valor RP obtido na sección 1.2.

Capítulo 5

Unha aplicación á xestión de recursos

Neste capítulo trataremos de mostrar a importancia da programación estocástica amosando unha aplicación deste coñecemento a un problema que aparece na vida real. Este problema é a extinción de incendios forestais ([8]).

Cando ten lugar un incendio, unha actuación efectiva pode salvagardar e protexer moitos recursos naturais e incluso chegar a salvar vidas. Actualmente os incendios forestais son máis virulentos e o cambio climático está influíndo negativamente neste fenómeno polo que cada vez é máis importante tomar decisións onde se minimicen o custo e os danos e se maximice a efectividade da contención do incendio.

Neste problema de control de incendios forestais interveñen dous factores estocásticos. Estes son a frecuencia coa que se producen e as características de crecemento do lume.

5.1. Modelo estocástico de selección de recursos

Ao longo desta sección explicaremos un modelo que busca optimizar a selección inicial de recursos nun incendio forestal cando a incerteza é o crecemento do lume. Minimizando o custo dos recursos e o custo do incendio, este modelo consegue minimizar o custo dos incendios forestais. O custo dos recursos divídese nun custo fixo por seleccionar o recurso e nun custo variable que depende do tempo que se empregue. O custo do incendio fai referencia ós danos que este provoca. Por outra parte, o modelo tamén ten que ter en conta a aleatoriedade do crecemento do lume.

O modelo devólvenos a solución que proporciona a combinación óptima dos recursos necesarios para conter o lume. Un incendio estará controlado se o avance da extinción supera o avance do lume.

Neste modelo, os parámetros deterministas son o rendemento do recurso de extinción, o tempo de chegada dos operativos e o custo dos recursos, e os parámetros de natureza estocásticas son as características do crecemento do incendio, o perímetro do mesmo e

os danos que provoca. O modelo ten en conta diferentes períodos de tempo e distintos tipos de recursos. Ademais, en base ao presuposto e ó rendemento dos recursos é capaz de determinar se se pode controlar o lume ou non nun período de tempo dado. Por outra parte, posto que os recursos non se poden fraccionar, estamos ante un modelo constituído por variables enteiras mixtas.

Formulación do modelo

Igual que nos exemplos vistos anteriormente, o modelo consta de dúas etapas. Na primeira elíxense os recursos e empréganse no incendio, e na segunda lévanse a cabo as accións correctivas. Para levar a cabo esas accións é preciso ter en conta os recursos que se tomaron na primeira etapa e os diferentes escenarios do crecemento do incendio, cuxo conxunto denotamos por Ω e suporase que é finito, denotando por ω un elemento xenérico.

Denotarase por I o conxuntos de recursos de contención de incendios dispoñibles e J o conxunto de períodos de tempo para os cales se quere realizar a planificación dos recursos dispoñibles. Ambos conxuntos son finitos.

Antes de presentar o modelo imos ver cales son os parámetros que aparecen no mesmo. Distinguimos entre parámetros deterministas e estocásticos.

Parámetros deterministas:

P_i: custo fixo por empregar o recurso i, $i \in I$.

C_i: custo por hora do uso do recurso i, $i \in I$.

PR_i: rendemento do recurso i en km/h, $i \in I$.

A_i: tempo que tarda o recurso i en chegar ao incendio, $i \in I$.

H_j: contador de tempo correspondente ao período j, $j \in J$.

B_1: cota superior para os custos totais fixos por utilización de recursos.

B_2: cota superior para os custos totais (fixos e variables) por utilización de recursos.

Parámetros estocásticos:

$\mathbb{P}^\omega$: probabilidade de que ocorra o escenario $\omega \in \Omega$.

PER_j^ω: incremento do perímetro do incendio no período $j \in J$, no escenario $\omega \in \Omega$.

NVC_j^ω: incremento do valor neto do incendio en $j \in J$, no escenario $\omega \in \Omega$.

SP_j^ω: perímetro do incendio no período $j \in J$, no escenario $\omega \in \Omega$.

Observación 5.1. Os parámetros anteriores poderíanse obter, nunha situación real, a partir dos datos históricos de incendios, xunto con outras ferramentas como por exemplo simuladores de incendios.

Respecto das variables que interveñen no modelo, temos de dous tipos.
Variables de primeira etapa:

z_i: variable que vale 1 se se usa o recurso i e 0 noutro caso, $i \in I$.

Variables de segunda etapa:

d_{ij}^ω: variable que vale 1 se se usa o recurso i ata exactamente o período j e 0 noutro caso, $i \in I$, $j \in J$, $\omega \in \Omega$.

y_j^ω: variable que toma o valor de 1 se o incendio non está extinguido en $j \in J$, $\omega \in \Omega$ ($y_0^\omega = 1$, $\forall \omega \in \Omega$).

O modelo estocástico en dúas etapas é o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i \in I} P_i z_i + E[h(z_i, \omega)] \\ s.a \quad & \sum_{i \in I} P_i z_i \leq B_1 \\ & z_i \in \{0,1\},\ \forall i \in I. \end{aligned}$$

Para cada $\omega \in \Omega$, temos un problema da forma:

$$\begin{aligned} h(z_i, w) = \quad \text{mín} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C_i H_j d_{ij}^w + \sum_{j \in J} NVC_j^\omega y_{j-1}^\omega \\ s.a \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C_i H_j d_{ij}^\omega + \sum_{i \in I} P_i z_i \leq B_2 \\ & \sum_{j \in J} PER_j^\omega y_{j-1}^\omega \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (H_j - A_i) PR_i d_{ij}^\omega \\ & \sum_{j \in J} d_{ij}^w \leq z_i,\ \forall i \in I \\ & SP_j^\omega y_{j-1}^\omega - \sum_{i \in I} (H_j - A_i) PR_i d_{ij}^\omega \leq M \cdot y_j^\omega,\ \forall j \in J. \end{aligned} \tag{5.1}$$

O obxectivo do modelo é minimizar a suma dos custos dos recursos empregados e o custo do incendio causado pola área queimada. A primeira restrición dinos que o custo fixo dos recursos empregados non pode superar o presuposto que se ten para tal fin.

Por outra parte, o obxectivo da segunda etapa é minimizar o custo variable e o custo do incendio para os distintos escenarios descritos en Ω, unha vez establecidos os recursos que se empregan na primeira etapa. A primeira das restricións da segunda etapa dinos que o custo variable máis o custo fixo non pode superar o presuposto total. A segunda restrición indícanos que o perímetro final do incendio ten que ser menor que a lonxitude extinguida por todos os recursos, é dicir, empregando os recursos dispoñibles, o incendio tense que extinguir no período de tempo considerado. Nesta restrición, $(H_j - A_i)PR_i d_{ij}^{\omega}$ fai referencia á lonxitude total que extingue o recurso i. Estamos ante unha restrición de factibilidade e de non cumprirse esta restrición o problema sería infactible. Polo tanto é unha restrición fundamental. As seguintes restricións (terceira e cuarta) establecen relacións entre as variables. A primeira delas indícanos que se non usamos o recurso i, é dicir, se $z_i = 0$ entón no no usamos en ningún período polo que $d_{ij}^{\omega} = 0$. Pola contra, se usamos un recurso i ata o período j, dito doutra forma, se existe un j tal que $d_{ij}^{\omega} = 1$, entón posto que estamos a empregar o recurso i, z_i sería 1. A seguinte restrición dinos que o perímetro queimado ata o período j menos o perímetro extinguido ata ese mesmo período ten que ser menor que $M \cdot y_j^{\omega}$, sendo M unha constante tan grande como sexa necesaria para cumprir a restrición. Se no período j temos apagado o lume, entón y_j^{ω} sería 0 e cumpriríase a restrición. Porén, se no período j non temos extinguido o incendio, y_j^{ω} toma o valor de 1 e a constante M alcanza o valor necesario para cumprir a desigualdade.

Observación 5.2. Coñecidas as probabilidades de cada escenario, poderíamos resolver o problema seguindo as ideas presentadas cando se resolveu o problema do granxeiro.

5.2. Exemplo de selección de recursos

Para rematar este capítulo amosamos un exemplo onde se emprega o modelo anterior.

Supoñamos que temos un incendio no que dispoñemos de 7 recursos, realizamos a planificación tomando 6 períodos de tempo e consideramos 5 posibles escenarios de crecemento do incendio, onde todos os escenarios teñen a mesma probabilidade de acontecer. Todos os datos e resultados están tomados de ([8]).

Primeiro créase cada escenario a partir dunha serie de distribucións para PER_j^{ω} e fórmulas para estimar a superficie queimada en cada período, a partir do perímetro, o cal nos permite calcular NVC_J^{ω} (véxase Táboa 5.1). O cambio de valor neto inicial son 100 € por hectárea.

	PER_j^ω	Área queimada
Período	Distribución	Fórmula
1	Uniforme (0.1, 0.5)	$0.7SP_1^\omega/0.3$
2	Uniforme (0.5, 0.9)	$5.6SP_2^\omega/1$
3	Uniforme (0.1, 0.5)	$9.6SP_3^\omega/1.3$
4	Uniforme (0.3, 0.7)	$15.9SP_4^\omega/1.8$
5	Uniforme (0.1, 0.3)	$20.3SP_5^\omega/2$
6	Uniforme (0.1, 0.3)	$24.3SP_6^\omega/2.2$

Táboa 5.1: Distribucións e fórmulas.

A Táboa 5.2 constitúe os parámetros determinísticos do modelo, nela pódense ver as características dos recursos que podemos empregar para apagar o lume e supoñemos que temos unha unidade de cada un. Por outra banda na Táboa 5.3 móstrase, para cada escenario e cada período, a área queimada e o perímetro acumulado. Esta Táboa contén os parámetros aleatorios do problema, os cales se xeran en base ás distribucións e fórmulas antes mencionadas.

Recurso	Descrición	A_i (hr)	C_i (€/hr)	P_i (€)	PR_i (km/hr)
1	Autobomba 1	2	175	300	0.36
2	Autobomba 2	2.5	150	500	0.45
3	Brigada 1	0.5	125	500	0.20
4	Brigada 2	1	175	600	0.25
5	Camión de bombeiros 1	1.5	75	400	0.09
6	Camión de bombeiros 2	1.5	100	900	0.10
7	Camión de bombeiros 3	1	125	600	0.15

Táboa 5.2: Recursos dispoñibles.

	Escenario (perímetro)					Escenario (área)				
Período	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	0.4	0.4	0.3	0.3	0.5	1.0	1.0	0.7	0.8	1.1
2	1.3	1.3	1.2	1.1	1.2	7.3	7.2	6.6	6.3	6.9
3	1.6	1.8	1.6	1.3	1.7	11.6	13.0	11.5	9.8	12.3
4	2.2	2.2	2.0	2.0	2.0	19.7	19.3	18.1	17.4	17.7
5	2.5	2.4	2.3	2.2	2.2	25.4	24.8	22.9	22.2	22.1
6	2.8	2.7	2.4	2.4	2.4	30.5	30.0	26.7	26.4	27.0

Táboa 5.3: Perímetros acumulados e área queimada.

Finalmente, podemos ver os resultados dos 5 escenarios cando temos información perfecta na Táboa 5.4. Posto que ao ter información perfecta estamos ante problemas deterministas, estes poderíanse resolver facilmente con algunha linguaxe de programación como pode ser `R`.

Escenario	1	2	3	4	5
Custo	4960	5680	4910	3805	4635
Período de extinción	3	5	4	3	5
Recursos seleccionados					
Autobomba 1	1	1	1	1	1
Autobomba 2		1	1		1
Brigada 1	1		1	1	
Brigada 2	1			1	
Camión de bombeiros 1		1			
Camión de bombeiros 2					
Camión de bombeiros 3	1				

Táboa 5.4: Resultados baixo información perfecta.

Pódese comprobar facilmente o valor obxectivo dos diferentes escenarios. Por exemplo, para o primeiro escenario temos que o custo do incendio é de $11.6 \cdot 100 = 1160$ €, o custo fixo dos recursos utilizados é de $300 + 500 + 600 + 600 = 2000$ € e o custo variable é de $175 \cdot 3 + 125 \cdot 3 + 175 \cdot 3 + 125 \cdot 3 = 1800$ €. Polo tanto, o custo total é de 4960 €.

Por outra parte, sabendo que o valor esperado da función obxectivo tendo información perfecta (WS) é de:

$$\frac{1}{5} \cdot 4960 + \frac{1}{5} \cdot 5680 + \frac{1}{5} \cdot 4910 + \frac{1}{5} \cdot 3805 + \frac{1}{5} \cdot 4635 = 4798\,€,$$

e que o valor da función obxectivo no problema estocástico é 5215 €, podemos calcular o valor esperado de información perfecta:

$$EVPI = 5215 - 4798 = 417\,€.$$

Capítulo 6

Conclusións

Como puidemos ir observando este traballo é unha continuación da materia Programación Lineal e Enteira que se dá en 2º curso do Grao en Matemáticas. A partir de pequenos exemplos facilmente visibles na vida real, un deles de variables continuas, problema do granxeiro, e o outro de variables enteiras, problema de rutas, presentáronse as pautas para o modelado e novos conceptos relativos á solución deste novo tipo de problemas de programación estocástica. Dito doutro xeito, estes exemplos foron a antesala dos conceptos teóricos.

Con respecto á teoría, esta iniciouse coa formalización dun tipo de modelo, mostráronse propiedades da rexión factible e proporcionáronse as condicións de optimalidade. Así mesmo, formulouse o problema dual. Púidose ver que estes dous últimos conceptos se obteñen como extensión dos mesmos conceptos en programación lineal e enteira. En canto as propiedades da rexión factible tratamos de ilustralas por medio de exemplos. Finalmente, estudamos distintos tipos de solucións demostrando a relación entre algunhas delas e realizando o seu cálculo en diversos exemplos.

Para resolver este tipo de problemas presentáronse dous métodos. O primeiro deles era unha ferramenta gratuíta online que nos permitía resolver problemas continuos e que ilustramos e usamos resolvendo o problema do granxeiro e o outro método era un algoritmo heurístico clásico para resolver o problema de rutas. Mostramos o comportamento deste heurístico sobre un exemplo estudado na primeira parte do traballo e comparamos os resultados exactos alí obtidos co proporcionado polo heurístico.

Para concluír o traballo usáronse os conceptos vistos durante o mesmo para resolver un problema que consiste na selección de recursos no ámbito da extinción de incendios. Presentase un modelo para este problema específico e discútense algúns resultados obtidos sobre un pequeno caso de estudo.

Como se puido observar este tema presenta unha importante compoñente teórica xunto con múltiples aplicacións á vida real. No libro ([2]) pódense atopar algoritmos xerais de

resolución, o que pode constituír unha ampliación dos conceptos teóricos e os exemplos e aplicacións vistas no presente traballo.

Bibliografía

[1] Bazaraa, M. S. and Shetty, C. M. *Non linear programming: theory and algorithms.* John Wiley & Sons, 1979.

[2] Birge, J. R. and Louveaux, F. *Introduction to stochastic programming.* Springer Science & Business Media, 2nd ed., 2011.

[3] Casas Méndez, B. V. *Apuntes de la primera parte de la asignatura Programación Lineal y Entera.* Grado en Matemáticas. Departamento de Estatística, Análise Matemático e Optimización, USC, 2017-2018.

[4] Clarke, G.U. and Wright, J.W. *Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points.* Operations Research, 12(40), 568-581, 1964.

[5] Dantzig, G. B. *Programming of interdependent activities: II mathematical model.* Econometrica 17(3–4), 200–211, 1949.

[6] Dantzig, G.B. *The diet problem.* Interfaces 20(4), 43–47, 1990.

[7] Dror, M. and Trudeau, P. *Stochastic vehicle routing with modified savings algorithm.* European Journal of Operational Reseach 23, 228–235, 1986.

[8] Lee, W.J., *A stochastic mixed integer programming approach to wildfire management systems.* Master Thesis. Texas A & M University, 2006.

[9] Gassmann, H.I. and Kristjànsson, B. *The SMPS format explained.* IMA Journal of Management Mathematics 19, 347–377, 2008.

[10] Gassmann, H.I. and Schweitzer, E. *A comprehensive input format for stochastic linear programs.* Annals of Operations Research 104, 89–125, 2001.

[11] González Díaz, J. *Apuntes de la segunda parte de la asignatura Programación Lineal y Entera.* Grado en Matemáticas. Departamento de Estatística, Análise Matemático e Optimización, USC, 2017-2018.