FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

OS ALBORES DA TOPOLOXÍA

Nuno Xoán Mesías de Concepción

xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

OS ALBORES DA TOPOLOXÍA

Nuno Xoán Mesías de Concepción

xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Área de Xeometría e Topoloxía
Título: Os albores da Topoloxía
Breve descrición do contido
Repaso histórico detallado do longo proceso a través do cal nace e se desenvolve o concepto de espazo topolóxico tal e como o coñecemos, exposto no artigo “The emergence of open sets, closed sets and limit points in analysis and topology”. Durante este proceso, fóronse propoñendo, superando e facendo aportacións a distintas definicións das nocións sobre as que a rama matemática da Topoloxía senta a súa base tales como son o punto límite, o conxunto aberto e o conxunto pechado. Estes conceptos usábanse en principio como ferramentas da análise pero posteriormente evolucionaron ata dar lugar á Topoloxía Xeral, coa intervención de grandes figuras da matemática dende finais do século XIX e ó longo do século XX tales como Weierstrass, Cantor e Lebesgue.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumo

A Topoloxía é un campo das matemáticas relativamente moderno que se asenta sobre a noción de espazo topolóxico, o cal á súa vez se basea no concepto de conxunto aberto. O obxectivo deste traballo é realizar unha lectura crítica e revisión do artigo "The emergence of open sets, closed sets and limit points in analysis and topology" e presentar de forma simple e ordenada o proceso histórico que no artigo se narra de como se foron desenvolvendo os conceptos básicos para a topoloxía así como a posterior competencia entre as diferentes definicións de espazo topolóxico que se foron dando na primeira metade do século XX, concluíndo co asentamento da definición moderna na segunda metade do século. Durante o traballo, estableceranse comparacións entre as definicións máis primitivas de certos conceptos e as hoxe formalizadas como definicións estándar de ditas ideas, facilitando a comprensión do proceso de evolución das diferentes definicións.

Abstract

Topology is a relatively modern field of mathematics that lies on the notion of topological space, which in turn is based on the concept of open set. The aim of this project is to carry out a critical reading and revision of the article "The emergence of open sets, closed sets and limit points in analysis and topology" and to present in a simple and arranged way the historical process which is narrated on the article of how basic concepts for topology were developed, as well as the subsequent competence between the different definitions for topological space which were stated in the first half of the XXth century, concluding with the settling of the modern definition in the second half of the century. During the project, comparisons between the different and most primitive definitions of certain concepts and the nowadays formalised as standard definitions of such ideas will be established, facilitating the comprehension of the process of evolution of the different definitions.

Introdución

Neste traballo, guiados polo artigo “The emergence of open sets, closed sets and limit points in analysis and topology”, farase un percorrido pola historia da topoloxía como rama dentro das matemáticas, sendo esta bastante reciente.

Aínda que se soe situar a orixe da topoloxía en 1735 coa resolución por parte de Euler do problema das pontes de Königsberg, pois o razoamento da resolución é totalmente topolóxico, non é ata finais do século XIX e comezos do XX que se comeza a falar de topoloxía, previamente coñecida como *analisis situs*, e non é ata a segunda metade do século XX que esta queda establecida cos estándares actuais.

No Capítulo 1 centrarémonos en ver en que contexto van aparecendo as definicións de punto límite, punto interior, punto fronteira... e demais nocións que, se ben nacen de estudos do campo da análise, son esenciais para desenvolver a base da topoloxía. Alén diso, tamén estudaremos como se desenvolven e van ampliando a contextos cada vez máis xerais, así como comentando os erros que se foron cometendo, as correccións e modificacións que se levaron a cabo e como se foron estendendo as distintas ideas e aceptando en distintos lugares e épocas.

No Capítulo 2, con estes conceptos xa establecidos case por completo salvo pequenas diferenzas en certas definicións, enunciaremos as distintas definicións e axiomatizacións que se deron para os moi variados tipos de espazos topolóxicos (aos que se lles deu distintos nomes inicialmente tamén). Veremos como finalmente, tras un período no que non houbo consenso, se impón como definición estándar a actual baseada nos conxuntos abertos tras numerosas confrontacións de ideas e en gran medida grazas ao impulso do grupo de matemáticos na súa maioría franceses coñecidos como Nicolas Bourbaki.

No Capítulo 3, cambiaremos o enfoque para mencionar un caso particular de espazos de tipo topolóxico con amplos usos no estudo de problemas de moi diverso tipo que comparten unha idea básica de ampliación conxuntista nos procesos que intentan estudar. Así, estudaremos as propiedades básicas dos espazos coñecidos como *pretopolóxicos* e veremos de que forma se relacionan cos espazos topolóxicos tal e como os coñecemos.

Capítulo 1

Orixe e evolución dos conceptos fundamentais para a topoloxía

1.1. Introdución

Durante a segunda metade do século XIX foron emerxendo diferentes conceptos en variados campos de estudo da análise matemática, motivados inicialmente pola necesidade de certas ferramentas que facilitasen razoamentos, ou simplemente para darlle nome a unha noción nova da que antes non se tiña coñecemento ou que xurdiu paralelamente xunto cun resultado que se trataba de enunciar e demostrar. Así, comezouse a falar de punto límite, conxunto pechado, punto interior e exterior, da fronteira dun conxunto e do conxunto aberto.

Estes conceptos foron definidos de distinta forma ao longo do tempo e por distintos matemáticos ata quedar establecidas as definicións estándar actuais. Moitas veces, comezouse definindo certa idea nun entorno simple para despois ir xeralizando o concepto a espazos máis complexos. Desta forma, estes conceptos comezáronse definindo primeiramente sobre un intervalo ou recta, ou sobre espazos euclidianos de unha, dúas, tres e posteriormente n dimensións e tardarían en comezar a definirse para conxuntos máis abstractos que non fosen conxuntos estritamente de puntos. Nótese que non é ata 1874 que Cantor senta as bases da teoría de conxuntos nun artigo publicado na revista *Journal für die reine und angewandte Mathematik* [8], polo que aínda se tardaría un tempo en comezar a considerar conxuntos máis abstractos ca os de puntos.

1.2. Introdución do punto límite, o conxunto derivado e o conxunto pechado

A topoloxía xeral aséntase sobre os conceptos de conxunto aberto e pechado, os cales á súa vez son definidos a partir da noción de punto límite xa que, como veremos, un conxunto é pechado se e só se contén todos os seus puntos límites. Así mesmo, un aberto é o complementario dun pechado. A noción de punto límite dun conxunto é a dun punto que está arbitrariamente próximo ao conxunto, sen necesariamente formar parte do conxunto. É dicir, un punto que pode ser aproximado por puntos do conxunto tanto como desexemos. Formalmente, en linguaxe matemática moderna:

Definición 1.1. Punto límite [definición estándar actual]: Sexa (X, τ) un espazo topolóxico e S un subconxunto de X. Un punto límite de S é un punto x tal que para calquera subconxunto aberto do espazo X que conteña ao punto x, U_x, se ten que $S \cap (U_x - \{x\}) \neq \emptyset$.

A aparición deste esencial concepto de punto límite (ou de acumulación) está estreitamente ligada ao desenvolvemento do actual teorema de Bolzano-Weierstrass dende as súas máis primitivas versións. Lembremos o resultado que hoxe coñecemos por teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema 1.2. ***Teorema de Bolzano-Weierstrass [enunciado estándar actual]:*** *Se un subconxunto limitado A de X ten infinitos elementos, entón existe polo menos un punto de X que é un punto límite de A.*

O primeiro matemático en enunciar unha versión orixinaria deste resultado foi Karl Weierstrass (1815-1897), que o fixo numerosas veces dende 1865 ata 1886. Coñecemos estes traballos polas notas non publicadas tomadas polos alumnos nas súas clases ou conferencias. O teorema tomou neses escritos variedade de formas e expresións, usándose maioritariamente como ferramenta de estudo analítico, o cal será unha constante nos traballos das posteriores décadas nos que ían emerxendo os distintos conceptos que máis tarde conformarían a rama da topoloxía. Vexamos por exemplo que a primeira versión foi presentada nas notas tomadas por Moritz Pasch (ver [42]) das súas conferencias como un lema, e estaba expresado únicamente en dúas dimensións en termos de propiedades en lugar de conxuntos.

Lema 1.3. ***1ª versión do teorema de Bolzano-Weierstrass [Weierstrass, 1865-1866]:*** *Se nunha rexión limitada do plano hai infinidade de puntos cunha propiedade dada, entón hai polo menos un punto (no interior ou na fronteira) tal que en calquera veciñanza deste haxa infinidade de puntos verificando a propiedade.*

Máis tarde, iría evolucionando e expresando o resultado en termos de funcións e logo de conxuntos, aínda que sempre cun interese de uso para a análise. Pese a estar considerando a noción durante máis de vinte anos, Weierstrass nunca lle deu un nome. Foi Georg Cantor (1845-1918) o primeiro en nomealo como "Grenzpunkt" (punto límite en alemán) xa en 1872 nun artigo publicado na revista *Mathematische Annalen* [7]. Weierstrass usaba a nomenclatura similar "Grenzstelle" pero para unha idea distinta, pois para Weierstrass o "Grenzstelle" dun conxunto non pode pertencer ao mesmo e, como xa vimos, o punto límite sí aínda que non necesariamente o faga. Cantor, como Weierstrass, definiu o concepto para usalo na análise, e fíxoo para un conxunto P nunha liña recta baseándose na idea de veciñanza, que á súa vez se baseaba na de interior.

Definición 1.4. Veciñanza dun punto nunha liña recta [Cantor, 1872]: Calquera intervalo que conteña ao punto no seu interior.

Definición 1.5. Punto límite dun conxunto de puntos P nunha liña recta [Cantor, 1872]: É un punto situado na liña recta de tal forma que toda veciñanza do punto conteña infinitos puntos de P. O punto pode tamén pertencer a P.

Nótese que esta non é a definición estándar actual de punto límite, que non sería enunciada ata 1892 por Jordan, como veremos máis adiante.

O teorema de Bolzano-Weierstrass actual, ou máis concretamente unha versión errónea do mesmo xa fora publicada por primeira vez por Cantor en 1872, a continuación das anteriores definicións, omitindo a hipótese de que o conxunto fora limitado, a cal é precisa para manter a veracidade do resultado. Nese mesmo ano, Cantor xa usou o novo concepto de punto límite para definir o concepto de conxunto derivado, que daría lugar á seguinte definición de conxunto perfecto.

Definición 1.6. Conxunto derivado dun conxunto P [Cantor, 1872]: O conxunto dos puntos límite de P. Denotarase por P'.

Definición 1.7. Conxunto perfecto [Cantor, 1872]: Conxunto que é igual ao seu derivado.

Cantor definiu tamén as iteracións do concepto, dando lugar á n-ésima derivación do conxunto P, denotada como P^n.

Pronto estendéronse estes conceptos a Italia a través de Ulisse Dini (1845-1918) e o seu libro sobre as bases da análise real de 1878 [11], onde Dini enunciou o teorema de Bolzano-Weierstrass de forma similar a Cantor, pero máis precisa.

Teorema 1.8. ***Teorema Bolzano-Weierstrass [Dini, 1878]:*** *Un conxunto infinito de puntos G nun intervalo (a,b) ten un punto límite que pode estar ou non en G.*

Tamén chegarían a Italia estas ideas a través de Salvatore Pincherle (1853-1936) e as súas notas das conferencias de Weierstrass en 1878 ás que asistiu, onde o teorema se probaba para unha liña real e para o espazo n-dimensional [33]. Serán especialmente relevantes no obxecto de estudo deste traballo as aportacións realizadas por Giuseppe Peano (1858-1932), as cales veremos na próxima sección. Finalmente, en 1884, Cantor definiu por primeira vez o concepto de conxunto pechado [9].

Definición 1.9. Conxunto pechado [Cantor, 1884]: Conxunto que contén todos os seus puntos límite.

Ademais disto, no mesmo traballo expuxo que todo conxunto pechado P é o conxunto derivado dalgún conxunto Q e que $(A \cup B)' = A' \cup B'$, propiedade que se seguiría verificando nos espazos topolóxicos xerais [9]. Pese a isto, nunca definiu nin usou a idea xeral de conxunto aberto nin sequera nos casos máis particulares. Só usou o concepto de puntos interior, o cal definiu en 1879, como veremos na próxima sección.

1.3. Aparición do punto interior, o punto exterior e a fronteira

Cantor foi o primeiro en definir os puntos interiores, pero inicialmente só os considerou primeiro nun intervalo e logo nun conxunto de puntos "Continuum" (continuo), o cal nos levará a ter que analizar tamén a evolución do concepto de conexidade por ser necesaria para a definición dun conxunto "Continuum".

Definición 1.10. Conxunto conexo [Cantor, 1879]: Subconxunto M de $\mathbb{R}^m$ que verifica que $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall a, b \in M$, existe un $n \in \mathbb{N}$ e n puntos $p_1, ..., p_n$ tales que todas as distancias $d(a, p_1)$, $d(p_1, p_2)$, ..., $d(p_n, b)$ son menores que ε.

Definición 1.11. Continuum [Cantor, 1879]: Un conxunto M dise continuum se é perfecto e conexo.

Nótese que baixo a súa definición de conexidade, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ serían conxuntos conexos, pois entre todo par de racionais (ou irracionais) se pode construír unha sucesión finita de racionais (ou irracionais) na que as distancias entre cada elemento e o seguinte sexa menor que ε, sendo isto pola densidade de $\mathbb{Q}$ (ou de $\mathbb{I}$). Porén, agora son exemplos do que chamamos conxuntos totalmente disconexos, pois os únicos subespazos conexos son conxuntos unitarios, é dicir, cada un dos racionais e cada un dos irracionais compón unha compoñente conexa xa que está "illado" do resto de puntos. Sería Camille Jordan (1838-1922) en 1892 o que establecería unha definición máis correcta de conexidade, aínda que restrinxíndose a conxuntos pechados e acotados.

Definición 1.12. Conxunto conexo [Jordan, 1892]: Conxunto que non pode ser particionado en dous conxuntos pechados e separados A e B, é dicir, tales que a mínima distancia $d(a, b)$ con $a \in A$ e $b \in B$ sexa maior ca cero.

Como vemos, ambas definicións se apoian no concepto de distancia, e non sería ata 1905 que Nels Johann Lennes (1874-1951) daría a primeira definición de conexidade aplicable a conxuntos arbitrarios nun espazo euclidiano n-dimensional, na American Mathematical Society en decembro de 1905, aínda que non se publicaría nun artigo ata 1911 [30].

Definición 1.13. Conxunto conexo [N. J. Lennes, 1911]: Conxunto de puntos tal que se se particiona en dous subconxuntos non baleiros B e C, polo menos un deles contén un punto límite do outro.

Como xa introducimos, Cantor só definira punto interior considerándoo dentro dun conxunto "Continuum", da seguinte forma.

Definición 1.14. Punto interior dun "Continuum" [Cantor, 1879]: Punto p para o que podemos tomar unha bóla pechada centrada nel cun radio tan pequeno como para que todos os puntos dentro e sobre a fronteira da bóla pertenzan ao "Continuum" M.

Peano recollería o testigo de Cantor e, de forma moi similar, definiría un punto interior para un conxunto de puntos A nun espazo de unha, dúas ou tres dimensións nun traballo de 1887 sobre as aplicacións xeométricas do cáculo infinitesimal [32].

Definición 1.15. Punto interior a un conxunto A [Peano, 1887]: Punto $p \in A$ tal que $\exists\ r > 0$ para o que todos os puntos cuxa distancia a p sexa menor que r pertenzan a A.

Mais non se detería aí, e continuaría definindo un punto exterior, un punto fronteira e a fronteira dun conxunto.

Definición 1.16. Punto exterior a un conxunto A [Peano, 1887]: Punto p que é interior ao complementario de A.

Definición 1.17. Punto fronteira dun conxunto A [Peano, 1887]: Punto p que non é interior a A nin ao complementario de A, é dicir, que non é interior nin exterior.

Definición 1.18. Fronteira dun conxunto A [Peano, 1887]: O conxunto dos puntos fronteira do conxunto A.

O concepto de punto interior seguiría desenvolvéndose logo a través da comunidade matemática francesa, que recibiría moi probablemente da tradución de 1887 de Jules Tannery (1848-1910) [39], os conceptos de punto límite (Cantor), interior, exterior e fronteira (Peano). O maior expoñente dos matemáticos franceses da época sería, nesta materia, Jordan, o cal absorbeu estes conceptos e usounos de forma moi interesante nun artigo no que trataba as integrais definidas [19]. Vemos, outra vez, como estes conceptos non son percibidos como posibles pilares doutra forma de facer matemáticas, senón como nocións que poden axudar na análise clásica. Jordan comezou neste sentido por dar unha definición distinta á de Cantor de punto límite, a cal se convertiría dúas décadas despois na definición estándar do concepto.

Definición 1.19. Punto límite dun conxunto E [Jordan, 1892]: Punto p tal que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, q \in E, q \neq p$ tal que $d(p, q) < \varepsilon$.

Da mesma forma que Cantor, Jordan definiría o conxunto derivado como o conxunto de puntos límite dun conxunto, pero tomaría outra definición para un conxunto perfecto.

Definición 1.20. Conxunto perfecto [Jordan, 1892]: Conxunto E tal que o seu conxunto derivado é subconxunto de E .

Como xa vimos, a de Cantor para conxunto perfecto é a definición estándar actual, polo que aquí vemos como a nocións distintas se lles da o mesmo nome, levando a incongruencias entre a notación de diferentes matemáticos. Observemos que o que para Cantor sería un pechado (un conxunto E tal que o seu derivado esté contido en E), para Jordan sería un perfecto. Ademais disto, Jordan tamén aportaría as seguintes definicións en 1892:

Definición 1.21. Punto interior [Jordan, 1892]: Punto $p \in E$ que non está no derivado do complementario a E .

Definición 1.22. Punto fronteira [Jordan, 1892]: Punto p que non é interior a E nin ao seu complementario .

A súa definición de punto interior é válida de forma máis xeral que a que dera Peano, pero a de punto fronteira é totalmente idéntica á xa vista anteriormente. Porén, en 1893, deu unha definición substancialmente distinta de punto límite nun libro de análise [20], a que agora recoñecemos como a definición de punto límite secuencial, e que vén a ser equivalente aínda que para probalo é preciso o axioma da elección, que nesas datas aínda non se formulara sequera.

Definición 1.23. Punto límite (secuencial) [Jordan, 1893]: Punto p que é límite dunha secuencia de puntos (sucesión) de E.

Pese a ter definidos todos estes conceptos, nin Peano nin Jordan desenvolveron o concepto de conxunto aberto, que podían ter facilmente definido como un conxunto igual aos seus puntos interiores (igual ao seu interior). O traballo de Tannery e Jordan influiu moito na seguinte xeracion de matemáticos franceses, os cales seguirían aportando ao desenvolvemento das bases da topoloxía. Serán especialmente relevantes na materia de estudo deste traballo Émile Borel (1871-1956), René-Louis Baire (1874-1932) e Henri Léon Lebesgue (1875-1941), como veremos na próxima sección, aínda que todos eles vían o seu traballo como unha compoñente da análise e non como unha disciplina illada.

1.4. Desenvolvemento do concepto de conxunto aberto

Moitas das definicións expostas na anterior sección xa as desenvolvera Richard Dedekind (1831-1916) antes de que o fixeran Peano e Jordan. Sabemos disto por unha carta de 1879 a Cantor na que Dedekind lle contaba que xa definira estes conceptos (punto interior, punto exterior e punto límite) uns anos atrás nun manuscrito non publicado. Ademais, fora máis alá definindo:

Definición 1.24. Corpo ("Körper") [Dedekind, anterior a 1879]: Sistema de puntos tal que para cada un dos seus puntos p, existe unha distancia d tal que todos os puntos cuxa distancia a p é menor que d pertencen ao sistema.

Debemos ter coidado de, pese a ter o mesmo nome, non confundir este concepto cun corpo no sentido da álxebra. Neste caso estamos falando precisamente do que sería un conxunto aberto nun espazo euclidiano n-dimensional, en principio.

Dedekind continuou definindo o que significa que un punto esté fóra dun "Körper" e logo o concepto de "Grenzpunkt", que pese a usar a mesma nomenclatura que para as primeiras definicións de punto límite, neste caso se trataba dun punto fronteira.

Definición 1.25. Punto fronteira ("Grenzpunkt") [Dedekind, anterior a 1879]: Punto p tal que non está nun Körper P nin tampouco fóra..

Naturalmente, definiu a fronteira "Begrenzung" como o conxunto dos puntos fronteira ou "Grenzpunkts".

As aportacións de Dedekind neste campo non resultaron relevantes no proceso de evolucón dos conceptos, pois o seu traballo non se publicaría ata 1931 nunha colección impulsada por Emmy Noether [10], pero é curioso como Dedekind definira certos conceptos moitos anos antes do que chegarían a facelo outros matemáticos.

Análogamente ao concepto de punto límite e o seu desenvolvemento parello co teorema de Bolzano-Weierstrass, a aparición do conxunto aberto como tal estará sobre todo ligada á aparición do teorema de Heine-Borel, que trata a noción de compacidade, para a que claramente precisamos do concepto de aberto.

Definición 1.26. Compacidade [definición estándar actual]: Un conxunto X é compacto se para calquera recubrimento aberto de X, existe un subrecubrimento finito do mesmo.

Teorema 1.27. ***Teorema de Heine-Borel [enunciado estándar actual]:*** *Un subconxunto X de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é pechado e acotado.*

Porén, cando Emile Borel enunciou a versión máis primitiva do teorema por primeira vez na súa tese doutoral de 1895 [5], non mencionaba os abertos e o enunciado era o seguinte, que chamaremos teorema de Borel, por conveniencia.

Teorema 1.28. ***Teorema de Borel (versión primitiva do teorema de Heine-Borel) [Borel, 1895]:*** *Se nun segmento de liña hai infinitos intervalos parciais tal que cada punto do segmento de liña sexa interior a polo menos un intervalo, poderemos determinar efectivamente un número finito de intervalos entre os dados que verifiquen o mesmo.*

O concepto de conxunto aberto aínda tardaría 4 anos en ser mencionado nunha publicación, da man de René Baire na súa tese discutindo as funcións reais semicontinuas onde definía, despois dos conceptos de esfera pechada S e esfera aberta S' nun espazo euclidiano n-dimensional [3].

Definición 1.29. Dominio aberto de n dimensións [Baire, 1899]: Un conxunto que verifica que para todo punto de, hai unha esfera con centro nese punto e radio $r > 0$ tal que todos os seus puntos estén no conxunto.

Vemos que, como máis de 20 anos antes fixera Dedekind sen publicalo, chegouse á definición dun conxunto aberto nun espazo euclidiano n-dimensional, se ben agora definíndoo en termos de esferas, pero non temos aínda definida a idea xeral de conxunto aberto, que se basa nas veciñanzas. O nome de "conxunto aberto", que ninguén usara ata agora, introduciuno Lebesgue en 1902 na súa tese doutoral na que introducía a medida de Lebesgue e a integral de Lebesgue [24]. Apréciase claramente unha marcada influencia do traballo de Jordan, especialmente do recollido no libro "Cours d'analyse" de 1893 [20], do que adoptou as definicións de punto interior e de fronteira. Lebesgue, ademais de introducir o nome, dotouno da idea intuitiva xeral que caracteriza aos conxuntos abertos.

Definición 1.30. Conxunto aberto nunha liña recta [Lebesgue, 1902]: Un conxunto nunha liña recta que non contén ningún punto da súa fronteira.

Vemos que esta idea vai parella da caracterización de que nun aberto todo elemento ten unha veciñanza incluída no mesmo conxunto, pois se non fora así e un aberto contivera algún punto da súa fronteira, entón para ese mesmo punto non existiría tal entorno, pola propia definición de fronteira, pois non podería ser un punto interior do conxunto. Primeiramente só o definiu para o caso dunha liña recta, sen xeneralizar a definición a outros espazos, pero disto claramente se seguían as próximas deducións:

1. Todo punto dun aberto é interior ao conxunto, é dicir $A \in Interior(A)$, e como xa sabemos que $Interior(A) \in A$, entón temos que para os abertos se verifica que $A = Interior(A)$.

2. O complementario dun aberto é pechado. De isto seguiu que un conxunto aberto é Borel-medible, pois de feito Borel definira tales conxuntos como a clase de conxuntos obtidos dende

os pechados a través das operacións de complementaridade e unión numerable, e xa vira que en particular, os pechados son Borel-medibles.

Inmediatamente estendeu estas consideracións ao espazo euclidiano n-dimensional. Curiosamente, tendo definido o concepto xeral de conxunto aberto nun espazo euclidiano n-dimensional e o Teorema de Borel xeralizado para unha cantidade non numerable de recubrimentos, non xeneralizou o resultado para ter en conta que eses propios recubrimentos podían consistir nun conxunto arbitrario de abertos, e non só de intervalos. En ambas edicións do seu libro sobre a integral de Lebesgue, tanto en 1904 como en 1928 [26], formulaba o teorema sen mencionar os abertos.

Teorema 1.31. ***Teorema de Borel [Lebesgue, 1904 e 1928]:*** *Se hai unha familia Δ de intervalos tales que cada punto dun intervalo (a, b) incluíndo tanto a a como a b (é dicir, á fronteira), é interior a polo menos un dos intervalos de Δ, entón existe unha familia formada por un número finito de intervalos de Δ ca mesma propiedade.*

Quen sí fixo isto foi Frigyes Riesz (1880-1956), con algunhas erratas de por medio, nun artigo publicado en 1905 [34], onde definía un dominio (aberto) e o teorema de Borel da seguinte forma.

Definición 1.32. Dominio (aberto) [Riesz, 1905]: Un conxunto conexo de cuxos elementos, ningún é un punto límite do complementario.

Teorema 1.33. ***Teorema de Borel [Riesz, 1905]:*** *Se cada punto dun pechado é interior a polo menos un elemento dun conxunto S de dominios, entón hai un subconxunto finito de S coa mesma propiedade.*

Claramente nos damos conta de que o resultado é falso por non exixirse o carácter limitado do pechado. Podemos tomar como contraexemplo o conxunto dos números reais, para o que non ten por que existir un subrecubrimento finito (depende do recubrimento que tomemos inicialmente). Ademais, por outra parte o resultado é máis estrito do necesario, ao só considerarse para conxuntos conexos. Máis tarde quedaría en evidencia que a conexidade non é relevante a non ser que estemos a considerar "compoñentes abertas" dun mesmo conxunto, e o resultado seguiría sendo certo aínda que non se exixise esa condición, se non fora polo carácter limitado que sí é preciso impoñer.

En 1905, Lebesgue realizou un traballo moito máis exhaustivo ca o que ninguén fixera antes arredor dos conxuntos abertos, o cal veu motivado polo seu traballo sobre os conxuntos de Borel nun estudo extensivo das funcións analíticamente representables [25]. Nel, apoiouse amplamente na clasificación dada por Baire das funcións reais, que pasamos a presentar:

Definición 1.34. Función de clase α de Baire: Para cada $\alpha \in \mathbb{N}$, defínese a función f de clase α de Baire como o límite puntual dunha sucesión infinita de funcións de clases máis baixas que α pero sen ser ela mesma f de clase menor que α.

Correspondentemente, existían diferentes clases de conxuntos de Borel. Lebesgue introduciu dous tipos de xerarquía dos conxuntos de Borel. Vexamos:

Definición 1.35. Subconxunto $E \in \mathbb{R}$ de clase F_α: Conxunto $E \in \mathbb{R}$ tal que $E = S$, sendo S o conxunto de todos os valores reais x tales que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para algúns valores a e b, e algunha función f de clase α de Baire, pero E sería distinto a calquera outro conxunto S no caso de que f fora dunha clase menor que α.

Nótese que Lebesgue usaba a notación F_α onde a F é de "fermé", pechado, xa que a clase F_0 é a dos conxuntos pechados. Analogamente, vexamos que caracterizará as outras clases como O_α onde O significa "ouvert", aberto, pois neste caso O_0 é a clase dos conxuntos abertos. É por isto que o seu estudo resulta de gran interese, pois a continuación deduciría diferentes relacións entre estas clases de conxuntos.

Definición 1.36. Subconxunto $E \in \mathbb{R}$ de clase O_α: Conxunto $E \in \mathbb{R}$ tal que $E = S$, sendo S o conxunto de todos os valores reais x tales que $a < f(x) < b$ para algúns valores a e b, e algunha función f de clase α de Baire, pero E sería distinto a calquera outro conxunto S no caso de que f fora dunha clase menor que α.

Ao estudar a relación entre ambas caracterizacións das clases de conxuntos, chegou a importantes conclusións que hoxe en día son básicas na construción e desenvolvemento da topoloxía. Mostrou que un conxunto de clase F_α é ao sumo de clase $O_{\alpha+1}$, en particular calquera conxunto pechado (de clase F_0) é a intersección dunha familia numerable de abertos (de clase O_0). Inversamente, un conxunto de clase O_α é ao sumo de clase $F_{\alpha+1}$, en particular calquera conxunto aberto (de clase O_0) é a unión dunha familia numerable de pechados (de clase F_0). Desenvolveu algunha relación máis, pero estas son as que máis relevantes se mostrarán no desenvolvemento máis tarde da topoloxía xeral. De feito, Lebesgue xa resolvera a estrutura básica das clases de conxuntos de Borel, que máis tarde serían tan útiles no marco dos espazos métricos.

Pese ao enormemente innovador traballo de Lebesgue sobre os conxuntos abertos, difundiuse moi lentamente entre a comunidade matemática, e foron xurdindo outras definicións e estudos sobre os abertos na comunidade matemática. Durante os mesmos anos, en Inglaterra, W. H. Young (1863-1942) e a súa muller G. C. Young (1868-1944) definiron un conxunto de puntos como aberto se non era pechado, o cal é totalmente incompatible ca definición de Lebesgue e por tanto ca actual, pese a poder parecer moi intuitivo. Sen ir máis lonxe, baixo esta definición, a unión de dúas bolas disxuntas, unha aberta e a outra pechada, sería un conxunto aberto (por non ser un pechado). Así mesmo, tomaban un intervalo como aberto se non incluía algún dos seus extremos. E. W Hobson (1856-1933) adoptou para o seu libro en 1907 "Teoría das Funcións dunha Variable Real" [25], que se convertiría nun fito dentro da tradición matemática británica, a terminoloxía de Young para un conxunto aberto, pero non a dun intervalo, onde preferiu tomar a máis moderna, na que un intervalo é aberto se non contén ningún dos seus extremos. Non sería ata 1927 que Hobson aceptaría a definición moderna de conxunto aberto para a terceira edición do seu libro [17], que será unha peza clave na transmisión destes conceptos á posterior xeración de matemáticos que se encargarán de sentar as bases dos distintos espazos topolóxicos e a súa axiomática.

1.5. Breves notas biográficas dos matemáticos máis relevantes do capítulo

Weierstrass

Karl Weierstrass é por moitos considerado o pai da análise matemática. Moitos dos teoremas fundamentais das diferentes ramas da análise levan o seu nome, sexa porque el os descubriu ou porque foi o primeiro en darlles unha desmotración rigurosa.

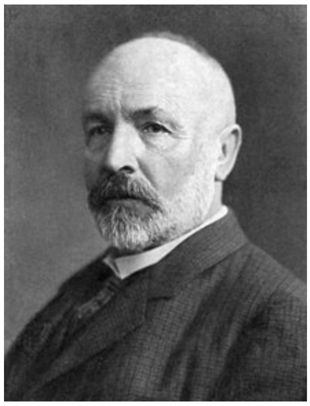
Naceu en 1815 en Warendorf, o que sería daquelas Prusia e hoxe Alemania. Aos seus catorce anos comezou a ler regularmente a revista matemática *Journal de Crelle: Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* ("Revista de matemáticas puras e aplicadas"). Máis tarde comezou estudos universitarios de finanzas públicas e administración para complacer ao seu pai, pero non o motivaban, ao contrario das obras matemáticas que comezou a ler durante ese ano na Universidade de Bonn, polo que se decidiu a estudar matemáticas.

Posteriormente, comezou a traballar como profesor de secundaria, aínda que seguía investigando e escribindo artículos que fixeron que a comunidade matemática recoñecese o seu talento. Así, entrou a traballar na Universidade de Berlín. Alí, outras das súas grandes aportacións foi a creación dun seminario de matemáticas, cuxa estructura e organización sentaron as bases da ensinanza-investigación das matemáticas como actualmente a coñecemos.

Weierstrass sempre foi moi estimado polos seus discípulos e durante a súa vida foi premiado cos galardóns máis prestixiosos da comunidade matemática. Morreu en Berlín no 1897, aos 82 anos de idade.

Cantor

Georg Cantor foi un matemático de orixe danés, nado en San Petersburgo (Rusia) en 1845, pero que case toda a súa vida residiu en Alemania. Comezou os seus estudos matemáticos en Frankfurt, asistindo dende os 17 anos a cursos de matemáticas e filosofía. Graduouse en matemáticas 5 anos máis tarde e traballou na teoría de números.



Influenciado por Weierstrass, máis tarde cambiou o seu interese cara a análise, á que tamén fixo contribucións fundamentais en diversas ramas da mesma. Sen embargo, o seu traballo máis relevante foi o desenvolvemento da teoría de conxuntos, sendo o primeiro en definir rigurosamente un "conxunto infinito" e en demostrar que non todos os infinitos son iguais. Aínda que esta teoría foi posteriormente completada e modificada, segue sendo a base do estudo das propiedades dos conxuntos infinitos.

A teoría de conxuntos recibiu nun inicio numerosas críticas e motivou acaloradas discusións, o cal afectou profundamente a Cantor e puido influír na depresión que sufriu Cantor nos seus últimos anos de vida. Faleceu en 1918 en Halle, dun ataque ao corazón.

Jordan

Camille Jordan foi un matemático francés nado en 1838 en Lyon. Jordan comezou os seus estudos matemáticos na École Polytechnique en 1855 e seis anos máis tarde era xa, non só un gran matemático, pero tamén un enxeñeiro destacado. Despois de ingresar na Escola de Minas traballou como responsable dunha rede de canteiras de París, cargo que logo simultaneou co de profesor universitario ata que en 1876 foi contratado como investigador de matemáticas. Foi a partir de entón cando se puido adicar por completo a esta ciencia.

Foi o primeiro en comprender a relevancia das aportacións do xove matemático Galois á teoría alxébrica, e fixo numerosas aportacións neste campos desenvolvendo importantes conceptos novos como o de grupo cociente, homomorfismo... Ademais, destacou pola novidosa exposición dos seus resultados, actuando como nexo entre variados campos da matemática do seu tempo.

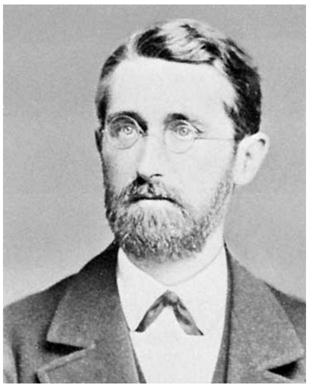
Pese a ser condecorado con algunhas das distincións máis relevantes das matemáticas da época, os seus últimos anos pasounos sumido na tristeza causada pola Primeira Guerra Mundial, na que perdeu a tres fillos. Morreu en 1922 en París.

Peano

Giuseppe Peano naceu en Cuneo (actual Italia) en 1858 e estudou na universidade de Turín. Destaca actualmente polas súas aportacións á axiomática das matemáticas, pois tivo un constante empeño en non permitir a ambigüidade nas definicións e os teoremas matemáticos. Así, frecuentemente denunciaba incorreccións presentes na obra doutros matemáticos, tanto dos que o precederan como dos seus contemporáneos. Tiña unha excepcional agudeza crítica e sensibilidade para as condicións de validez dos máis delicados teoremas.

Obtivo recoñecemento mundial polos seus traballos, o que o convertiu durante moitos anos no maior representante dos matemáticos de Italia. Faleceu en Turín en 1932.

Dedekind



Richard Dedekind naceu en Brunswick (actual Alemania) en 1831, e foi unha figura clave da matemática do século XX, tanto que algúns o consideran un moderno Euclides, pois deixou unha marca moi profunda nos elementos das matemáticas. As súas principais contribucións serían no campo da álxebra.

Estudou na célebre Universidade de Göttingen, onde entrou en contacto con destacados matemáticos como Gauss, Weber ou Riemann. Este último sería moi relevante no seu desenvolvemento polas súas interaccións con regularidade. En 1854 comezan ambos a traballar como profesores asistentes, pero Dedekind non logra nin moito menos equiparar as enormes contribucións realizadas por Riemann nas súas teses, aínda que a súa interacción sería un estímulo decisivo. Coa morte de Gauss en 1855 e a entrada de Dirichlet na universidade, sí entra Dedekind na esfera da alta investigación.

Pese a ser agora amplamente recoñecido Dedekind por algúns traballos novidosos e moi avanzados, non chega a publicar numerosas contribucións desenvoltas por el mesmo que eran de gran importancia. Consérvanse manuscritos de diversos temas que constituían para a época os primeiros e os máis avanzados na súa área, pero aínda así non os publicaba.

Isto débese ao exixente que era á hora de xulgar os seus logros, o cal é quizáis normal nunha persoa que coincidira con Gauss e con Riemann, e que mantiña regular correspondencia con Cantor. Isto mesmo foi o que sucedeu cos estudos que se mencionan neste traballo, dos que só se tivo coñecemento cando foron publicados póstumamente por Emmy Noether.

Dedekind morreu en 1916 no seu lugar de nacemento.

Lebesgue

Henri Léon Lebesgue foi un matemático francés nado en Beauvais en 1875 e mostrou dende moi xove un excepcional talento para as matemáticas. É coñecido fundamentalmente polos seus aportes á teoría da medida e da integral.

Tras graduarse en matemáticas en 1897, coñeceu os traballos de Baire, Borel e Jordan. Apoiándose no desenvolvemento incipiente da teoría da medida de Borel e da medida de Jordan, formulou a súa teoría da medida en 1901 e deu a coñecer a integral de Lebesgue, que xeneralizaba a integral de Riemann a funcións tamén discontinuas, en 1902. Así mesmo, tamén contribuíu noutras áreas das matemáticas como a análise de Fourier ou complexa, pero estas pequenas aportacións non se poden comparar coas contribucións á análise real, que tiveron un enorme impacto na forma do campo actual, tanto que os seus métodos se convertiron nunha parte esencial do mesmo.

En 1910 recibiu unha cátedra na Universidade da Soborna, pero non se centrou na área de estudo que el mesmo iniciara, xa que o seu traballo era unha xeneralización e el mesmo se consideraba temeroso das mesmas. Nas súas palabras: "*Reducida a teorías xerais, as matemáticas serían unha forma fermosa sin contido. Morrerían rápidamente.*"

Tendo recibido moitos honores entre a comunidade matemática, nas súas últimas dúas décadas de vida os seus intereses cambiaron cada vez máis a cuestións pedagóxicas e de xeometría elemental. Lesbesgue faleceu en París en 1941.

Capítulo 2

Construción de distintos tipos de espazos topolóxicos

2.1. Introdución

Unha vez temos definidos os diferentes conceptos primitivos da análise que poderían posibilitar a construción da topoloxía como poden ser o conxunto pechado, a clausura, o conxunto derivado, o conxunto aberto..., xurde a dúbida de cal desas nocións se poderá usar como a principal, é dicir, cal de elas pode servir de base para enunciar a definición do espazo topolóxico tal e como o coñecemos agora.

Ademais, terase que determinar que axiomas se exixen para obter como resultado un espazo que non sexa nin demasiado particular para que as súas propiedades se podan estender a outros casos de estudo cos que comparta certas características nin demasiado xeral como para que, pese a podelas estender a numerosos casos, non haxa case propiedades intrínsecas que estudar.

Como veremos ao longo deste capítulo, este proceso non é nada simple e da lugar a moitas e moi variadas definicións e axiomatizacións de moi diversos tipos que agora nos poden resultar curiosas, mais non son máis que intentos de construción de algo que nos xa coñecemos pero os matemáticos da época, como é obvio, descoñecían e tentaban atopar a base de proba e erro. Moitas veces obtiñan espazos ou demasiado xerais ou demasiado particulares, outras o resultado era equivalente aos espazos actuais aínda que se basara nun concepto radicalmente distinto...

2.2. L-espazos, espazos métricos e espazos de veciñanza

A xeneralización dos espazos euclidianos cara espazos máis xerais e abstractos comeza coa introdución dos L-espazos por Maurice René Fréchet (1878-1973) en 1904 [12]. Estes L-espazos tomaban como idea de base o límite dunha sucesión infinita, seguindo na liña do traballo que deixara Jordan definindo os puntos límite secuenciais.

Definición 2.1. L-espazo [Fréchet, 1904]: Par (X, F) formado por un conxunto X xunto cunha función $F : S \longrightarrow X$ sendo S o conxunto de infinitas sucesións formadas por elementos de X, e tal que F leva as sucesións $s \in S$ nos seus respectivos límites $F(s)$. Estes espazos deben verificar os seguintes axiomas:

L1. Se s é unha constante de valor a, o límite de s é a.

L2. Se o límite dunha sucesión s é b, tamén é b o límite para calquera subsucesión de s.

Nótese que pese a que poda parecer que nesta definición Fréchet está considerando xa un conxunto X máis abstracto ou xeral, segue a referirse a un conxunto de puntos. Sobre esta base, definiu os conceptos de punto límite dun subconxunto A de X, conxunto pechado e función continua en X.

Definición 2.2. Punto límite dun subconxunto $A \subset X$ dun L-espazo [Fréchet, 1904]: Punto p tal que é o límite dalgunha sucesión formada por elementos distintos do subconxunto A.

Definición 2.3. Subconxunto pechado nun L-espazo [Fréchet, 1904]: Subconxunto $A \subset X$ tal que contén todos os seus puntos límite.

Nótese que esta última definición é exactamente igual a como Cantor definira o concepto para conxuntos de puntos.

Definición 2.4. Función continua nun L-espazo [Fréchet, 1904]: Función en X que é secuencialmente continua no sentido de Jordan, é dicir, se o límite da sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é p, entón o límite da sucesión $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é $f(p)$.

Os L-espazos de Fréchet foron un intento de isolar as propiedades compartidas por diferentes teorías como as teorías de conxuntos de puntos, funcións, curvas... co obxectivo de evitar ter que repetir probas iguais e axilizar o desenvolvemento en distintos campos, como el mesmo expuxo no seu seguinte artículo en 1905 [13]. Un intento que, dende a análise, pretendía desenvolver unha ferramenta para a análise. Máis tarde, na súa tese doutoral en 1906 [14], introduciría o concepto de espazo métrico, co que resolvería a dúbida de se todo espazo derivado sería pechado nos L-espazos, concluíndo que non é así, pero isto sí se verificará nos espazos métricos, que son algo máis particulares.

Definición 2.5. Espazo métrico [Fréchet, 1906]: Un conxunto M xunto cunha función $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ chamada métrica en M, é dicir, tal que para calquera $x, y, z \in M$, se verifique:

M1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

M2. $d(x, y) = d(y, x)$

M3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Dos anteriores axiomas, dedúcese tamén que $d(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in M$ tal que $x \neq y$.

Pese ao amplo uso nos traballos de Frechet de termos cantorianos como punto límite, conxunto pechado, perfecto... nunca chegou a introducir os conxuntos abertos en asbtracto, o cal é normal pois aínda non existía unha idea de conxunto en abstracto, que non volvese sobre a idea dun conxunto de puntos. Esta idea nun espazo abstracto, é dicir, nun espazo que non fose euclidiano n-dimensional (onde a idea a desenvolveron Baire e Lebesgue), orixinouna Felix Hausdorff (1868-1942) no contexto dos seus espazos topolóxicos [16]. Porén, o que el definiu como espazo topolóxico é unha idea máis particular da que agora temos universalmente, pois usaba a idea primitiva de veciñanza dun punto. Para evitar a confusión, chamarémolos espazos de veciñanza. Hausorff definiunos da seguinte forma.

Definición 2.6. Espazo de veciñanza [Hausdorff, 1914]: Un conxunto E cuxos elementos son chamados puntos, xunto cunha colección de subconxuntos de E, chamados veciñanzas e suxeitos a 4 axiomas:

V1. Todo punto x pertence a polo menos unha veciñanza de x, e toda veciñanza de x contén a x.

V2. Se U e V son veciñanzas de x, entón existe algunha veciñanza W de x tal que $W \subseteq U \cap V$.

V3. Se un punto y pertence a unha veciñanza U de x, entón existe algunha veciñanza V de y tal que V é un subconxunto de U.

V4. Se x e y son puntos distintos, entón existe unha veciñanza U de x e outra V de y tal que U e V son disxuntas.

Nótese que o axioma (V4) é o que agora se coñece como o axioma de separación (T_2).

Hausdorff continou definindo un punto interior e un punto fronteira dun subconxunto A nun espazo de veciñanza, para logo presentar o concepto de conxunto aberto.

Definición 2.7. Punto interior a un subconxunto A dun espazo de veciñanza [Hausdorff, 1914]: Punto x tal que algunha veciñanza U de x é un subconxunto de A.

Definición 2.8. Punto fronteira a un subconxunto A dun espazo de veciñanza [Hausdorff, 1914]: Punto x que pertence a A pero non é interior a A.

Definición 2.9. Conxunto aberto ("Gebiet") [Hausdorff, 1914]: Conxunto tal que todos os seus puntos son interiores.

Concluíu demostrando que a unión dunha familia calquera de abertos tamén é aberta e que a intersección dunha familia finita de abertos é aberta, indo máis lonxe do que fora Lebesgue en 1905 no seu traballo sobre os abertos.

É importante notar que as veciñanzas de Hausdorff non se corresponden coas actuais exactamente. Por exemplo, se tomamos un espazo de veciñanza E con polo menos dous puntos, o espazo E non ten por que ser veciñanza de ningún dos puntos, pois se a única veciñanza de cada punto x é $\{x\}$, satisfanse todos os axiomas de Hausdorff, pero o espazo total E non sería un conxunto aberto. Porén, se tomamos o concepto moderno de espazo topolóxico coa idea primitiva do conxunto aberto, defínese unha veciñanza de x como calquera conxunto V tal que x pertence a algún subconxunto aberto de V, co cal o espazo total sería unha veciñanza de cada un dos seus puntos, o cal non sucede co noso exemplo anterior dun espazo de veciñanza de Hausdorff. Nótese que o que para Hausdorff era o conxunto de veciñanzas dun espazo, hoxe en día coñécese como base de veciñanzas do espazo.

2.3. Espazos de clausura e espazos de abertos

Na seguinte década non houbo un consenso de que a topoloxía debía tratar cos espazos "topolóxicos" con axiomas en termos de veciñanzas. Xurdiu unha rivalidade entre os diversos tipos de espazo abstracto que xurdiron nesas datas. Un notable exemplo foron os espazos de clausura desarrollados polo xove topólogo polaco Kasimierz Kuratowski (1896-1980) nun artigo de 1922 onde usaba como idea primitiva soamente a operación clausura [22].

Definición 2.10. Espazo clausura [Kuratowski, 1922]: Par (X, f) formado por un conxunto X xunto cunha función f, que chamaremos clausura, de subconxuntos de X a subconxuntos de X satisfacendo 4 axiomas para calquera A e B subconxuntos de X:

C1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

C2. $A \subseteq f(A)$.

C3. $f(\emptyset) = \emptyset$.

C4. $f(f(A)) = f(A)$.

Definición 2.11. Conxunto pechado nun espazo clausura [Kuratowski, 1922]: Conxunto que é idéntico á súa clausura.

Definición 2.12. Conxunto aberto nun espazo clausura [Kuratowski, 1922]: Conxunto que é idéntico ao complementario da clausura do seu complementario.

Nótese que estes espazos serían idénticos aos espazos definidos por Hausdorff se o axioma V4 non se exixise, e son máis xerais que os L-espazos de Fréchet (basados en axiomas sobre o límite das sucesións). De feito, estes espazos foron a primeira forma do que agora chamamos universalmente espazos topolóxicos, pois pese a ser definidos en base á clausura, son equivalentes aos espazos topolóxicos estándar actuais tal e como os coñecemos definidos en base a conxuntos abertos, como veremos no seguinte capítulo. Porén, esta definición parte dunha idea máis intuitiva que a dunha familia de abertos, usando o concepto de punto adherente e aherencia, o que nos permite entender o proceso usado para definir os subconxuntos da topoloxía como un de ampliación, no que engadimos a un conxunto os seus puntos adherentes, ou próximos, idea moito máis simple e intuitiva que a dos abertos, o cal explica que se desenvolvera antes. Ademais destes espazos, Kuratowski tamén desenvolveu outra axiomatización basada na idea primitiva de conxunto derivado A'.

Definición 2.13. Espazo derivado [Kuratowski, 1922]: Un conxunto X xunto cunha función (operador derivado) de subconxuntos de X en subconxuntos de X satisfacendo 4 axiomas para calquera A e B subconxuntos de X:

D1. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

D2. $X' = X$.

D3. $\emptyset' = \emptyset$.

D4. A'' é un subconxunto de A'.

En 1923, o austríaco Heinrich Tietze (1880-1964) publicou un artigo na revista *Mathematische Annalen* chamado "Contribucións á Topoloxía Xeral. I. Axiomas para Varias Formas do Concepto de Veciñanza" [40]. Nel, ademais de adoptar, en lugar do substantivo "Gebiet" usado por Hausdorff, o adxectivo aberto ("offen") de Carathéodory, quen pensaba que pola profunda relación entre ambos conceptos, era preciso caracterizar os conxuntos abertos cunha palabra explícitamente ligada ao termo "pechado". Tietze intentaba atopar un sistema axiomático para un espazo de veciñanza pero expresado tomando como idea primitiva a de conxunto aberto en lugar da de veciñanza. Intentou facelo manténdose tan cercano aos axiomas de Hausdorff (V1)-(V4) como lle fora posible.

Definición 2.14. O-espazo [Tietze, 1923]: Un conxunto E cuxos membros son chamados puntos, xunto cunha colección de conxuntos abertos satisfacendo 4 axiomas:

O1. Todo punto x pertence a polo menos un conxunto aberto.

O2. Se U e V son conxuntos abertos con polo menos un punto en común, entón $U \cap V$ é un conxunto aberto.

O3. Se todo punto x de A é un membro de algún subconxunto aberto de A, entón A é aberto.

O4. Se x e y son puntos distintos, entón existe un conxunto aberto U contendo a x e outro conxunto aberto V contendo y tal que U e V son disxuntos.

O topólogo ruso Pavel Aleksandrov (1896-1982) publicou dous anos máis tarde e na mesma revista un artigo de topoloxía en espazos euclidianos [1], onde daba unha definición dos espazos de veciñanza de Hausdorff en termos de conxuntos abertos dunha forma moito máis simple que Tietze.

Definición 2.15. Espazo de veciñanza en termos de conxuntos abertos [Aleksandrov, 1925]: Un conxunto E cuxos membros son chamados puntos, xunto cunha colección de conxuntos abertos satisfacendo 2 axiomas:

I. A intersección de dous conxuntos abertos é aberta. A unión de calquera familia de conxuntos abertos tamén é aberta.

II. Calquera dous puntos distintos están contidos en conxuntos abertos disxuntos.

2.4. Aportacións polacas á topoloxía

O topólogo polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) traballou neses mesmos anos en diferentes posibles construcións dos espazos topolóxicos tomando como referencia distintas ideas primitivas, publicando unha análise detallada na revista *Mathematische Annalen* [36]. Primeiro, usou o concepto de conxunto derivado, onde desenvolveu algúns coñecidos resultados da topoloxía ao deixar que a operación derivación dun conxunto puidese ser arbitraria en lugar de levar subconxuntos do conxunto E só en subconxuntos de E como se viña facendo. Logo fíxoo tomando como idea básica a de conxunto pechado, desenvolvendo os F-espazos, que son máis xerais que os espazos veciñanza de Hausdorff e que os espazos clausura de Kuratowski.

Definición 2.16. F-espazo [Sierpinski, 1926]: Un conxunto non baleiro E xunto cun conxunto arbitrario F de subconxuntos de E, que chamaremos pechados, satisfacendo 2 axiomas:

F1. O conxunto E é pechado.

F2. A intersección de calquera conxunto de pechados é pechada.

En 1928, publicou un libro sobre topoloxía xeral [37], onde xa traballaba sobre a idea primitiva de conxunto aberto, por considerar esta idea máis simple e intuitiva. Comezou establecendo os seguintes axiomas, para despois ir engadindo algúns máis nos capítulos posteriores.

Definición 2.17. Espazo topolóxico [Sierpinski, 1928]: Un conxunto arbitrario K xunto cunha colección de subconxuntos chamados conxuntos abertos e satisfacendo 3 axiomas:

(1). O conxunto baleiro é un conxunto aberto.

(2). K é un conxunto aberto.

(3). A unión de calquera familia de subconxuntos abertos de K é un aberto.

Con estes axiomas demostrou o que xa probara para os F-espazos, mais no seguinte capítulo continuaría o traballo incluíndo outros dous axiomas:

(4). Se p e q son elementos distintos de K, entón existe un conxunto aberto contendo a p pero non a q.

(5). A intersección de dous conxuntos abertos é un conxunto aberto.

Nótese que os seus axiomas (1), (2), (3) e (5) son os que eventualmente se converterían na definición estándar para un espazo topolóxico. O seu axioma (4) é un axioma de separación agora coñecido como (T_1). Nos seguintes capítulos engadiría distintas versións do segundo axioma de contabilidade de Hausdorff, ademais de axiomas de separación, en concreto os axiomas que agora se coñecen como T_2 e T_3, para rematar cun estudo dos espazos métricos. O seu traballo sería traducido ao inglés en 1934 [38].

Pouco máis tarde, Kuratowski tamén publicou un libro de topoloxía pero en francés [23], onde usaba como base os seus axiomas de 1922 (ver definición 2.10), cunha adición e unha deleción, obtendo a seguinte axiomatización:

Definición 2.18. Espazo clausura [Kuratowski, 1933]: Par (X, f) formado por un conxunto X xunto cunha función f, que chamaremos clausura, de subconxuntos de X a subconxuntos de X satisfacendo 4 axiomas para calquera A e B subconxuntos de X:

C1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

C3. $f(\emptyset) = \emptyset$.

C4. $f(f(A)) = f(A)$.

C5. Para calquera punto p do espazo, $p = f(\{p\})$.

Como podemos apreciar, eliminou o axioma C2 (A é un subconxunto da clausura de A) e engadiu o axioma C5. Máis avanzado no texto, introduciría o axioma T_4 e o segundo axioma de numerabilidade de Hausdorff, concluíndo que os espazos que verificaran todos estes axiomas son homeomorfos a espazos métricos separables. Así, ambos matemáticos polacos, Sierpinski e Kuratowski, concluían os seus libros cun estudo dos espazos métricos separables e completos.

2.5. Impacto dos espazos topolóxicos noutras áreas

Pronto, os recén formulados espazos topolóxicos foron útiles en diferentes campos das matemáticas, onde foron usados de diversas formas nas súas disciplinas, ao mesmo tempo estendendo e facendo progresar e evolucionar ós conceptos da topoloxía.

Como é obvio, unha das disciplinas na que máis relevantes foron os espazos topolóxicos é a topoloxía combinatoria, pese a que ao principio se introducisen de forma lenta.

Primeiramente, en ambos os dous libros máis relevantes para o "Analysis situs", o de Oswald Veblen (1880-1960) en inglés [41] e o de Solomon Lefschetz (1884-1972) en francés [27] traballábase con n-celdas en espazos euclidianos n-dimensionais sen mencionar os espazos topolóxicos. Porén, cometéronse certos erros ao definir conceptos como o de continuidade dunha función. Neste senso, Veblen enunciou a seguinte definición.

Definición 2.19. Función continua [Veblen, 1922]: Unha tranformación de X, unha celda e a súa fronteira, en Y, tamén unha celda coa súa fronteira, tal que para calquera subconxunto A de X e para todo punto límite p de A, o punto $f(p)$ é un punto límite de $f(A)$.

Como consecuencia desta definición, unha función constante non sería continua, pois o conxunto de chegada Y sería unitario co valor da función constante, e este punto non sería límite por non poder ser aproximado tanto como se desexe por puntos do conxunto distintos a el, pois non existe ningún punto do conxunto distinto a el.

Cara a década de 1930, a situación desta disciplina xa mudara. Lefschetz publicara un novo libro en inglés titulado *Topology* [28], palabra que se ben el non inventou pois xa se tiña usado por outros matemáticos previamente, foi dos primeiros en usala tentando darlle a dimensión de disciplina por si mesma, como se pode apreciar no seguinte parágrafo extraído do libro.

> A *Topoloxía* ou a *Análise situs* defínese normalmente como o estudo das propiedades dos espazos ou das súas configuracións invariantes baixo transformacións continuas. Pero que son eses *espazos* e e as súas transformacións *continuas*? O concepto de espazos é difícil de reconciliar con algo conforme a nosa intuición espacial a non ser que se lle dote da seguinte propiedade: Con todo punto vai unha porción do espazo no que está incrustado.

Como vemos, neste segundo libro xa comeza a considerar os espazos de veciñanza de Hausdorff con estas porcións dun espazo R ás que chamou veciñanzas, e ás que primeiramente só lles requería que verificasen o primeiro axioma de Hausdorff: Todo punto p de R pertence a polo menos unha veciñanza de p, e toda veciñanza de p contén a p. Só con este axioma xa observou que se podía desenvolver unha considerable cantidade de conceptos, definindo punto interior a un conxunto, punto fronteira, conxunto pechado, conxunto aberto, clausura dun conxunto, punto límite e subconxunto denso. De calquera forma, tomou outra definición errónea de función continua.

Definición 2.20. Función continua [Lefschetz, 1930]: Función dun espazo R noutro S tal que a imaxe de calquera conxunto aberto en R fora aberta en S.

Outra vez, esta definición causaba que unha función constante non fora continua, pois esta imaxe sería un conxunto unitario, que claramente non é aberto por non poder tomarse un entorno do punto contido no conxunto.

En 1942, Lefschetz continuaría con outro libro titulado *Algebraic Topology* [29], no que xa de inicio desenvolvía un traballo moito máis profundo sobre os espazos topolóxicos baseados nos axiomas estándar de hoxe en día para os conxuntos abertos. Así, tomaba como base un tipo de espazo máis xeral ca os espazos de veciñanza de Hausdorff. Agora sí que definiu correctamente como transformación aberta o que antes chamara transformación continua, e definiu correctamente este último termo.

Definición 2.21. Función continua [Lefschetz, 1942]: Función dun espazo R noutro S tal que a súa inversa é unha transformación aberta, é dicir, tal que se U é un aberto en S, entón $f^{-1}(U)$ é un aberto en R.

Nótese que esta definición concorda coa que dera Hausdorff e tamén é a definición actual. Ademais deste concepto, tamén tratou os de conexidade, compacidade, homotopía e deformacións no contexto xeral dun espazo topolóxico abstracto.

En Alemania, os espazos topolóxicos como os coñecemos apareceron por primeira vez nun libro que recibiu influenzas dos tomos de Lefschetz (1930) e Kuratowski (1934). O libro foi escrito por Herbert Seifert (1907-1996) e William Threlfall (1888-1949) e titulábase *Lehrbuch der Topologie* (Libro de texto de Topoloxía) [35]. Pese a algunha pequena discordancia, a diferencia entre este libro e o de Lefschetz era mínima, así que non nos deteremos a comentalo. Sí será relevante o título *Topologie* de Aleksandrov e Hopf [2], pois traballaron cos espazos topolóxicos tanto para a topoloxía xeral asbtracta como para a máis particular topoloxía combinatoria. Influenciados polos axiomas de Kuratowski para espazos de clausura, reformularon as esixencias da operación para que non se requerise ningunha relación particular entre A e $\bar{A}$, obtendo uns espazos topolóxicos máis xerais que os espazos de veciñanza de Hausdorff e tamén que os espazos topolóxicos de hoxe en día. Denominaron a estes espazos como *espazos topolóxicos xerais*, distinguíndoos dos *espazos* *topolóxicos*, que definían como espazos topolóxicos xerais que tamén verificaban os axiomas de clausura introducidos por Kuratowski en 1922 (ver definición 2.10).

En Inglaterra, o primeiro libro en tratar a topoloxía de forma profunda foi *Elements of the Topology of Plane Sets of Points* de M.H.A. Newman (1897-1984) (ver [31]), aínda que esencialmente se estudaban os conceptos topolóxicos en termos de espazos métricos. Neste libro discutíanse brevemente os espazos topolóxicos *abstractos* de forma similar á que Aleksander e Hopf usaban para os espazos topolóxicos *xerais*, diferencíandoos así dos espazos topolóxicos. A diferencia radicaba en que os os espazos topolóxicos se definían partindo dun dos cinco conceptos topolóxicos fundamentais (conxunto derivado, clausura dun conxunto, conxunto pechado, conxunto aberto e sucesión converxente) e asumían algúns axiomas sobre o concepto para despois definir os outros catro conceptos en termos do básico. Por outro lado, sobre os espazos topolóxicos *xerais* ou *abstractos* non se tomaban restricións para os conceptos topolóxicos fundamentais en forma de axiomas.

Se ben é certo que nas notas finais do libro, Newman definiu os espazos topolóxicos usando os axiomas de Kuratowski para a clausura, na segunda edición e moi posiblemente influenciado pola aproximación á topoloxía desenvolta polo grupo francés Bourbaki, Newman xa tomaba a definición actual dos espazos topolóxicos, en termos dos catro axiomas actuais sobre os conxuntos abertos.

Outra das ramas na que influíron os espazos topolóxicos foi a análise real, na que foron usados como marco de referencia por Hans Hahn (1879-1934), un matemático austríaco da Universidade de Vienna cuxo contacto previo coa topoloxía e os topólogos polacos fora mínimo, feito que chama moito a atención. Hans Hahn publicou en 1932 un libro sobre funcións reais no que lle dedicaba un capítulo enteiro aos espazos topolóxicos e métricos [15]. Para os seus axiomas usaba como concepto primitivo o de aberto e citaba o traballo de Tietze pese a que os seus axiomas eran máis similares aos de Aleksandrov de 1925 (ver definición 2.15), polo que é probable que os redescubrise pola súa conta.

2.6. Establecemento final dos espazos topolóxicos basados nos conxuntos abertos

Nos anos 1935-1938, no seo do grupo de matemáticos franceses coñecidos colectivamente como Nicolas Bourbaki, xurdiu un interesante debate sobre como desenvolver a topoloxía, que acabaría por dinamizar e estender a idea actual dos espazos topolóxicos en base ao concepto de conxunto aberto e cos axiomas que se toman actualmente.

Estes matemáticos comezaron cunha mistura de ideas tomadas de Fréchet, Riesz, Weyl, Hausdorff e Aleksandrov que deu lugar a un enfrontamento entre distintas propostas. Nun primeiro borrador presentado ao grupo, Weyl enfrontou diversas críticas que se verían reflexadas nas seguintes versións do documento. A súa idea era a de comezar traballando cos espazos métricos para despois ir cara os máis xerais formulados en termos dos axiomas de clausura de Kuratowski, mais Claude Chevalley insistiu na necesidade de antepoñer os espazos xerais, aos que consideraba de moito maior interese e importancia, e pretendía facelo en función doutros axiomas, en termos de conxuntos abertos. Ademais, o borrador de Weyl supuña satisfeito o axioma de separación T_0 e tamén se centraba en establecer equivalencias entre distintos conxuntos de axiomas. De novo, Chevalley criticou este feito, insistindo en comezar traballando só cos axiomas en termos de abertos e deixar o resto de axiomas para un apéndice. O grupo finalmente decidiuse a tomar os axiomas en función de conxuntos abertos pois eran estes os que se usaban para definir a continuidade, sen decatarse que a continuidade podía tamén ser formulada en termos da clausura.

Bourbaki publicaría en 1940 un libro no cal un dos capítulos estarían adicado á topoloxía e sería titulado *Structures Topologiques* [6]. Nel, usábase o concepto de conxunto aberto como idea primitiva, e como únicos axiomas uns que variaban só lixeiramente dos que usou Aleksandrov en 1925 (ver definición 2.15).

(1). A intersección de calquera familia finita de conxuntos abertos é aberta.

(2). A unión de calquera familia de conxuntos abertos é aberta.

Dende estes axiomas, deducían os outros dous axiomas estándar actualmente: que o conxunto baleiro é aberto (como a unión dunha familia baleira de conxuntos abertos) e que o espazo total tamén (como intersección dunha familia baleira de conxuntos, o cal require unha convención particular de como se entende a intersección dunha familia baleira de conxuntos). Estes axiomas permanecerían exactamente igual na segunda edición do libro.

A influencia do grupo francés foi tal que o libro máis influínte nos Estados Unidos durante varias décadas dende 1955 foi escrito por John L. Kelley (1916-1999), o cal estaba familiarizado co traballo de Bourbaki e tomaba no seu libro exactamente os dous mesmos axiomas. Este libro titulábase *General Topology* [21].

En posteriores traballos sobre a topoloxía, os outros dous axiomas (o baleiro e o espazo total son abertos) serían normalmente enunciados explícitamente xunto cos anteriores e converteríanse pouco a pouco nos axiomas estándar para definir un espazo topolóxico. Serían moitísimos os libros publicados nas posteriores décadas usando eses mesmos axiomas, mentres os espazos máis xerais considerados por Sierpinski, Aleksandrov e Hopf ían quedando á marxe como curiosidades históricas. Podemos sitúar pois nestas datas (a mediados do século XX), os anos nos que a competición por ver que concepto se usaría como base para a definición dos espazos topolóxicos que constituirían a topoloxía xeral se daría por finalizada co establecemento da definición moderna dos espazos topolóxicos basada nos conxuntos abertos.

Definición 2.22. Espazo topolóxico [definición estándar actual]: Par ordenado (X, τ) sendo X un conxunto e $\tau \subseteq P(X)$ un subconxunto das partes de X que chamaremos *topoloxía* e cuxos elementos chamaremos *abertos*, verificando os seguintes catro axiomas:

(1). $\emptyset \in \tau$.

(2). $X \in \tau$.

(3). A unión arbitraria de elementos de τ é un elemento de τ.

(4). A intersección finita de elementos de τ é un elemento de τ.

2.7. Breves notas biográficas dos matemáticos máis relevantes do capítulo

Fréchet

Maurice René Fréchet naceu en 1878 en Maligny, Francia. No instituto, foi alumno de Jacques Hadamard, o cal se deu conta da súa capacidade e decidiu comezar a darlle clases particulares. Incluso cando Hadamard se trasladou á Universidade de Burdeos en 1894, seguiu mantendo correspondencia co seu alumno, enviándolle problemas para que os resolvera, cousa que Fréchet agradecía.

Ao rematar a secundaria, fixo o servizo militar e posteriormente estudou matemáticas. Despois de presentar a súa tese doutoral, foi reclutado tras o estalido da Primeira Guerra Mundial, pero seguiu traballando en proxectos matemáticos.

Fréchet fixo algunhas das maiores contribucións ao estudo da topoloxía e introduciu o concepto de espazo métrico, ademais de contribuír nos campos da estatística, a probabilidade e o cálculo infinitesimal. A pesar disto, nunca foi acordemente valorado en Francia, pero sí fóra dela, sendo membro de academias de varios países e invitado a varios Congresos Internacionais das Matemáticas. Morrería en París en 1973.

Hausdorff

Hausdorff foi un matemático alemán nado en Wrocław, actualmente Polonia, en 1868. De xove, estudou astronomía e matemáticas na Universidade de Leipzig. Despois de graduarse e obter o seu doutoramento, enrolouse como voluntario na infantería alemana ata 1894. Pouco máis tarde sería aceptado como profesor en Leipzig.

Hausdorff mostrou moito interese no traballo de Cantor sobre teoría de conxuntos, pero tamén publicou en temas como a xeometría non euclidiana, os números complexos e a probabilidade. Quizáis a súa aportación máis importante foi o traballo que desenvolveu para a creación da topoloxía xeral.

En xaneiro de 1942, a Hausdorff, á súa muller e á irmá desta, que vivía con eles, chegoulles unha orde de que debían presentarse nun campo de internamento pola súa condición de xudeus, o cal posiblemente continuaría nunha deportación a un campo de concentración. Suicidaríanse ese mesmo mes despois de organizar os seus asuntos e deixar instrucións sobre as súas propiedades a amigos de confianza.

Kuratowski

Kazimierz Kuratowski foi un matemático polaco, un dos principais representantes da Escola de Matemáticas de Varsovia, a cidade que o vira nacer en 1896. Comezou os seus estudos universitarios en Escocia, pois non quería estudar en ruso e daquelas a instrución en polaco estaba prohibida polas forzas de ocupación. Continuou a súa formación en Varsovia en 1915 unha vez se retiraron as tropas rusas e obtivo o seu doutoramento en 1921, nunha recén independizada Polonia. Esta tese é fundamentalmente a que lle otorga relevancia neste traballo, pois trata a construción axiomática da topoloxía a través dos axiomas de clausura.

Kuratowski ingresou como profesor e investigador na Universidade de Varsovia ata 1939. No período da Segunda Guerra Mundial, deu conferencias na universidade clandestina da cidade, pois a educación superior para os polacos estaba prohibida baixo a ocupación esta vez alemana. Despois da guerra, volveu dar conferencias na reaberta universidade e participou activamente na reconstrución da vida científica en Polonia, tendo distintos cargos e responsabilidades en diferentes sociedades matemáticas e científicas tanto do país como estranxeiras.

O topólogo polaco faleceu en 1980 á idade de 84 anos tamén en Varsovia, que nesta época estaba baixo o control da República Popular de Polonia.

Sierpinski

Wacław Franciszek Sierpiński foi outro matemático polaco de suma importancia para o noso tema de estudo e para o desenvolvemento das matemáticas en Polonia. Naceu en Varsovia en 1882 e, pese ás dificultades impostas pola ocupación rusa que desalentaban á educación superior dos polacos, en 1899 uniuse ao Departamento de matemáticas e física da Universidade de Varsovia. Obtería o seu doutoramento en 1908.

Ao longo da súa vida, Sierpinski escribiu unha considerable cantidade de artículos de investigación (arredor de 700) e 50 libros. Inicialmente, centrouse na teoría de conxuntos, pero máis tarde interesaríase tamén pola topoloxía xeral. En ambos campos, as súas aportacións serían de sumo interese. Traballou na Universidade de Varsovia a partir de 1919, e continuaría ensinando na universidade clandestina durante a Segunda Guerra Mundial. Sufriu directamente a represión dos nazis tras o levantamento de Varsovia en 1944, sendo queimada a súa casa xunto con todas as súas pertenzas.

Como Kuratowski, Sierpinski participou activamente na vida científica de Polonia e tamén pertenceu e recibiu títulos honorarios de diversas sociedades científicas tanto polacas como foráneas. Morreu en Varsovia en 1969, aos 87 anos de idade.

Nicolas Bourbaki

En realidade, como xa mencionamos, Nicolas Bourbaki é o nome colectivo que usaban un grupo de matemáticos franceses. Nos anos 30, este grupo propuxo revisar os fundamentos da matemática cunha exixencia de rigor moito maior que a que era usual nesa época.

O seu impacto na matemática contemporánea foi enorme, pois dende os anos 50 pode dicirse que a súa exixencia de rigor foi universalmente aceptada na matemática, xunto co particular estilo no que a expresan, o cal fai que sexan moi fáciles de distinguir os textos actuais dos prebourbakianos.

Capítulo 3

Os espazos pretopolóxicos

3.1. Introdución

Neste capítulo deterémonos un pouco máis para estudar máis a fondo unhas estruturas matemáticas concretas, os espazos pretopolóxicos, as cales teñen unha propiedade moi interesante que non posúen os espazos topolóxicos. Cunha axiomatización menos restritiva e definidos a partir dun concepto do que non falamos ata agora, a pseudoclausura, sobre os espazos pretopolóxicos poderemos establecer unha xerarquización entre os elementos do conxunto, o cal é moi útil para resolver problemas dun tipo determinado no que se quera estudar a influencia de certos elementos dun conxunto sobre os demais.

3.2. A pseudoclausura e a súa utilidade

Vexamos cal é o operador pseudoclausura a través do cal imos definir os espazos pretopolóxicos.

Definición 3.1. Operador pseudoclausura: Sexa E un conxunto non baleiro, consideremos a aplicación $a : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ verificando os seguintes axiomas:

(1). $a(\emptyset) = \emptyset$.

(2). $A \subseteq a(A)\ \forall A \subseteq E$.

Para todo subconxunto A de E, $a(A)$ denominarase a pseudoclausura de A.

Agora, definimos un espazo pretopolóxico, ao que como vemos non se lle exixen máis propiedades das que xa cumple o operador.

Definición 3.2. Espazo pretopolóxico: Par (E, a), sendo E un conxunto non baleiro e $a : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ un operador pseudoclausura.

Nótese que, se exiximos dúas propiedades adicionais ao operador pseudoclausura, obtemos a definición de espazo topolóxico que dera Kuratowski en 1922 partindo da clausura e que é equivalente á definición estándar actual pese a usar como concepto primitivo un diferente. Estas propiedades serían as seguintes.

(I). $a^2(A) = a(A)\ \forall A \subseteq E$.

(II). $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)\ \forall A, B \subseteq E$.

A primeira propiedade é coñecida como idempotencia dun operador. A importancia dos espazos pretopolóxicos débese en gran medida a non requerir que se verifique, pois iso permítenos poder aplicar reiteradamente esta operación a calquera conxunto A obtendo como resultado outro conxunto $a(A)$ maior que conteña ao anterior, o cal nos proporcionará diversas aplicacións en multitude de campos de estudo. Este proceso de iteración, que non é posible realizar sobre os espazos topolóxicos co operador clausura, podémolo definir formalmente da seguinte forma.

Definición 3.3. ***n*-ésima pseudoclausura:** Dado un espazo pretopolóxico (E, a), un subconxunto $A \subseteq E$ e $n \in \mathbb{N}$, dirase que $a^n(A)$ é a n-ésima pseudoclausura de A, sendo a composición do operador pseudoclausura a n veces aplicada sobre A. Desta forma, temos que a^0 é o operador identidade en $\mathcal{P}(E)$.

A relevancia deste proceso iterativo que podemos realizar dentro dun espazo pretopolóxico pero, debido á idempotencia da clausura, non é posible sobre un espazo topolóxico do tipo de Kuratowski, é que nos brinda unha ferramenta excepcional para adaptar as matemáticas ao estudo de diversos procesos evolutivos como a epidemioloxía ou a propagación de enfermidades, problemas de economía, xenética ou calquera no que entre un conxunto de elementos se poda establecer unha relación de influencia ou dominación duns sobre outros [4].

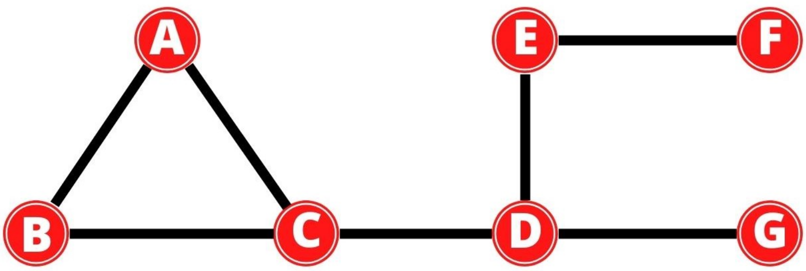
En esencia, poderemos estudar mediante a pretopoloxía espazos carentes dunha noción de puntos ou elementos arbitrariamente próximos, e que nin moito menos nos exixan traballar con espazos métricos para poder establecer distancias entre os elementos, pois o relevante neste caso non é a posición de cada elemento en relación ós seus veciños, senon máis ben o estudo dun proceso evolutivo entre os elementos. Para comparar os estados dos elementos ao longo do tempo, si será preciso contar cunha noción de proximidade ao longo do tempo, pero a cal non ten nada que ver cunha distancia ou métrica, senón que será un concepto de natureza topolóxica.

Non nos deteremos moito nas aplicacións, pois teríamos que desenvolver unha base moito máis extensa da pretopoloxía, pero si nos centraremos en estudar de que forma se relacionan os espazos pretopolóxicos cos espazos topolóxicos, e que espazos podemos construír que se atopen no medio entre uns e outros.

3.3. Tipos de espazos pretopolóxicos e relación cos espazos topolóxicos

Antes de ver os distintos tipos de espazos pretopolóxicos que podemos desenvolver, vexamos un exemplo moi simple co que ilustrar como se comporta a pseudoclausura e, en concreto, ese proceso iterativo que será de utilidade para o estudo de problemas evolutivos por ampliación de conxuntos.

Exemplo 3.4. Espazo pretopolóxico cun grafo: Tomamos por exemplo o conxunto de puntos $X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ que forman parte do seguinte grafo representado na figura. (X, a) será un espazo pretopolóxico sempre que a verifique as condicións dun operador pseudoclausura. Así, podemos tomar a como o operador que a cada subconxunto Ω de X lle asigna o conxunto formado polos puntos en Ω e todos os que estén conectados con algún elemento de Ω por unha soa arista.



Conxunto de partida Ω	$a(\Omega)$	$a^2(\Omega)$	$a^3(\Omega)$	$a^4(\Omega)$
$\{A\}$	$\{A, B, C\}$	$\{A, B, C, D\}$	$\{A, B, C, D, E, G\}$	X
$\{B\}$	$\{A, B, C\}$	$\{A, B, C, D\}$	$\{A, B, C, D, E, G\}$	X
$\{C\}$	$\{A, B, C, D\}$	$\{A, B, C, D, E, G\}$	X	X
$\{D\}$	$\{C, D, E, G\}$	X	X	X
$\{E\}$	$\{E, F, D\}$	$\{E, F, D, G, C\}$	X	X
$\{F\}$	$\{F, E\}$	$\{F, E, D\}$	$\{F, E, D, G, C\}$	X
$\{G\}$	$\{G, D\}$	$\{G, D, E, C\}$	X	X

Cadro 3.1: Iteracións da pseudoclausura no noso exemplo.

Claramente observamos esta propiedade que antes se mencionaba de como o conxunto de partida se vai ampliando, vanse engadindo elementos ata chegar a un no que se estabiliza, neste caso o conxunto total. Nótese que se o grafo tivese dúas compoñentes conexas, neste caso a pseudoclausura non se estabilizaría no conxunto total, senón en cada unha das compoñentes, dependendo do conxunto de partida.

Esta propiedade pódese formalizar a través do concepto de conxunto a-pechado.

Definición 3.5. Espazo a-pechado: Nun espazo pretopolóxico (E, a), un conxunto $A \subseteq E$ é a-pechado se $a(A) = A$.

Isto pode darnos pé a establecer unha analoxía cos pechados na topoloxía, o cal veremos é bastante acertado, pois ademais verifícase que os conxuntos $\emptyset$ e E son sempre a-pechados. Da mesma forma, existe un operador pseudointerior, verificando uns axiomas que poderíamos considerar opostos aos do operador clausura, co que tamén poderemos construír a noción dun conxunto a-aberto.

Definición 3.6. Operador pseudointerior: Sexa E un conxunto non baleiro, é a aplicación $i : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ verificando os seguintes axiomas:

(1). $i(E) = E$.

(2). $i(A) \subseteq A \ \forall A \subseteq E$.

Para todo subconxunto A de E, $i(A)$ denominarase o pseudointerior de A.

Debemos ter coidado cunha cousa, e é que mentres na topoloxía existe unha clara dualidade entre o interior dun conxunto e a súa clausura, nun espazo pretopolóxico temos a liberdade de poder definir un operador pseudointerior que sexa independente da pseudoclausura. Porén, é habitual tomar un pseudointerior que sí esté asociado á pseudoclausura e exista dualidade. Nese caso, omitiríase a definición de i, denotaríase ó espazo simplemente (E, a) e verificaríase a seguinte propiedade:

$i(a) = a(A^c)^c = E - a(E - A) \ , \forall A \subseteq E$.

Da mesma forma que a iteración da pseudoclausura xera unha cadea de conxuntos crecentes, podemos imaxinar que o operador pseudointerior fai o contrario, vai diminuíndo o conxunto de partida ata estabilizarse nalgún momento determinado, o cal nos leva á seguinte definición.

Definición 3.7. Espazo a-aberto: Nun espazo pretopolóxico (E, a), un conxunto $A \subseteq E$ é a-aberto se $i(A) = A$.

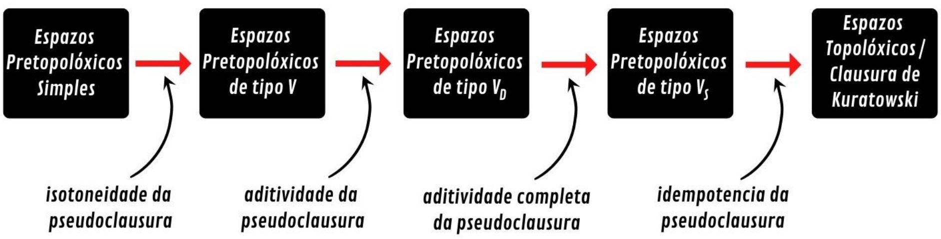
Claramente, isto tamén nos recorda aos abertos na topoloxía, e podemos deducir que $\emptyset$ e E tamén son conxunto a-abertos mediante o seguinte resultado.

Proposición 3.8. *Nun espazo pretopolóxico (E, a), $A \subseteq E$ é a-aberto se $A^c = E - A$ é a-pechado.*

A proba disto é inmediata, aplicando a definición temos que A é a-aberto $\iff A = i(A) = E - a(E - A) \iff E - A = a(E - A) \iff E - A$ é pechado, isto último tamén por definición.

A partir dos conxuntos a-abertos e a-pechados pódense definir a a-apertura e a a-clausura dun conxunto, análogos aos conceptos de clausura e interior, pero non existen para todos os conxuntos. A existencia da a-apertura de A depende de que exista un maior subconxunto a-aberto contido en A, o cal podemos caracterizar como que a unión de calquera familia de a-abertos tamén é a-aberto. A existencia da a-clausura, pola contra, depende de que exista así mesmo un menor subconxunto a-pechado contendo a A, e pódese caracterizar analogamente como que a intersección de calquera familia de a-pechados en E tamén é un a-pechado en E.

Coa axuda destas ideas básicas de pretopoloxía, imos presentar agora os tres tipos de espazos pretopolóxicos que se atopan entre os inicialmente definidos con só dous axiomas sobre a pseudo-clausura e os espazos topolóxicos definidos a través da clausura por Kuratowski, equivalentes aos actuais. Segundo imos engadindo condicións, a cadea de conxuntos que teremos será a seguinte.



Definición 3.9. Espazo pretopolóxico de tipo $\mathcal{V}$: Un espazo pretopolóxico (E, a) é de tipo $\mathcal{V}$, tamén denominado $\mathcal{V}$-espazo, se $\forall A, B \subseteq E$ con $A \subseteq B$, entón $a(A) \subseteq a(B)$, é dicir, a é isótona.

Proposición 3.10. *Nun $\mathcal{V}$-espazo, $\forall A, B \subseteq E$ con $A \subseteq B$ tamén se tén que $i(A) \subseteq i(B)$*

Isto dedúcese por definición pola isotoneidade, xa que como $A \subseteq B \implies a(A) \subseteq a(B) \implies a(B^c) \subseteq a(A^c) \implies (a(A^c))^c \subseteq (a(B^c))^c$, e pola dualidade de a e i, tense que $i(A) \subseteq i(B)$.

Sobre un $\mathcal{V}$-espazo tense que a unión de calquera familia de a-abertos é un a-aberto e que a intersección de calquera familia de a-pechados é un a-pechado, polo que se garantiza a existencia da a-clausura e da a-apertura para calquera subconxunto do $\mathcal{V}$-espazo, pois eran as condicións necesarias que vimos anteriormente.

Definición 3.11. Espazo pretopolóxico de tipo $\mathcal{V}_D$: Un espazo pretopolóxico (E, a) é de tipo $\mathcal{V}_D$, tamén denominado $\mathcal{V}_D$-espazo, se $\forall A, B \subseteq E$ se verifica que $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)$, é dicir, a é aditiva.

Proposición 3.12. *Nun $\mathcal{V}_D$-espazo, $\forall A, B \subseteq E$ tamén se tén que $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$*

A proba disto volve a ser case directa. Como a é aditiva, tense que se $A, B \subseteq E \Longrightarrow a(A \cup B) = a(A) \cup a(B) \Longrightarrow a((A \cap B)^c) = a(A^c \cup B^c) = a(A^c) \cup a(B^c) \Longrightarrow a((A \cap B)^c)^c = a(A^c)^c \cap a(B^c)^C$, é dicir, $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$.

Vexamos agora que os $\mathcal{V}_D$-espazos son máis particulares que os $\mathcal{V}$-espazos, é dicir, que todo $\mathcal{V}_D$-espazo é un $\mathcal{V}$-espazo.

Nun $\mathcal{V}_D$-espazo (E, a) con $A, B \subseteq E$ e $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B \Longrightarrow a(A \cup B) = a(B)$. Ademais, $a(A \cup B) = a(A) \cup a(B) \Longrightarrow a(B) = a(A) \cup a(B) \Longrightarrow a(A) \subseteq a(B) \Longrightarrow (E, a)$ é un $\mathcal{V}$-espazo.

Definición 3.13. Espazo pretopolóxico de tipo $\mathcal{V}_S$: Un espazo pretopolóxico (E, a) é de tipo $\mathcal{V}_S$, tamén denominado $\mathcal{V}_S$-espazo, se se verifica que $a(A) = \bigcup\limits_{x \in A} a(\{x\})$, $\forall A \subseteq E$, é dicir, se a é completamente aditiva.

Poderíamos pensar que en consecuencia se ten que $i(A) = \bigcap\limits_{x \in A} i(\{x\})$, mais isto non é certo, pois $\bigcap\limits_{x \in A} i(\{x\}) = \emptyset$, xa que o pseudointerior dun elemento $x \in E$ é ou el mesmo ou o baleiro, polo que a intersección do pseudointerior dos elementos dun conxunto será a intersección entre elementos distintos ou o baleiro, polo que sempre será baleira.

Como dicíamos, estes espazos son aínda máis particulares que os $\mathcal{V}_D$-espazos, é dicir, que todo $\mathcal{V}_S$-espazo é un $\mathcal{V}_D$-espazo, o cal está claro xa que o feito de que a sexa completamente aditiva implica que a sexa aditiva.

Agora vexamos como se pode definir un espazo topolóxico ou de clausura de Kuratowski obtido a través da particularización dun espazo pretopolóxico.

Definición 3.14. Espazo topolóxico (caracterización pola idempotencia da pseudoclausura): Un espazo pretopolóxico (E, a) é un espazo topolóxico se se verifica que é un $\mathcal{V}_D$-espazo e $\forall A \subseteq E$, $a^2(A) = a(A)$, é dicir, a pseudoclausura tamén é aditiva e idempotente.

A proba é moi simple, denominando $\mathcal{F}(A)$ á a-clausura de A, se supoñemos que é un espazo topolóxico teríamos que $a(A) = \mathcal{F}(A) \Longrightarrow a^2(A) = a(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A) = a(A)$.

O recíproco tense porque $a^2(A) = a(A) \Longrightarrow a(A)$ é un a-pechado contendo a A e a $\mathcal{F}(A)$, pola definición de a-clausura. Porén, como $a(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$, tense que $a(A) = \mathcal{F}(A) \Longrightarrow (E, a)$ é un espazo topolóxico.

Con esta caracterización podemos facernos unha idea das moitas formas que existen de poder definir espazos con certas propiedades que se asemellen en certo modo aos espazos topolóxicos, o cal explica en gran medida o longo proceso estudado neste traballo polo que se foron definindo, probando, modificando e redefinindo diferentes conceptos e tipos de espazos similares nunha pugna por sentar as bases da topoloxía, e en concreto da topoloxía xeral tal e como a coñecemos.

Bibliografía

[1] Aleksandrov, P. (1925). *Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie.* Mathematische Annalen 94, 296-308.

[2] Aleksandrov, P., Hopf, H. (1935). *Topologie.* Springer-Verlag, Berlin.

[3] Baire, R. (1899). *Sur les fonctions de variables réelles.* Annali di matematica pura ed applicata (3) 3, 1-123.

[4] Bärbel M.R., S., Stadler, P.F., Wagner, G.P and Fontana, W. (2001). *The Topology of the Possible: Formal Spaces Underlying Patterns of Evolutionary Change.* Journal of Theoretical Biology 213, 241-274

[5] Borel, E. (1895). *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Annales scientifiques de l´Ecole Normale Supérieure (3) 12, 9-55.

[6] Bourbaki, N. (1940). *Eléments de mathématique II. Première partie. Les structures fondamentales de l´analyse. Livre III. Topologie générale. Chapitre I. Structures topologiques, second edition.* Actualités scientifiques et industrielles, vol. 858. Hermann, Paris.

[7] Cantor, G. (1872). *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* Mathematische Annalen 5, 123-132. Reprinted in [1932, 92-102]. Pagination agrees with the reprint.

[8] Cantor, G. (1874). *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. Reprinted in [2009, 258-262]. Pagination agrees with the reprint.

[9] Cantor, G. (1884). *Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. 6.* Mathematische Annalen 23, 453-488. Reprinted in [1932, 210-244]. Pagination agrees with the reprint.

[10] Dedekind, R. (1931). *Gesammelte mathematische Werke, vol. 2 (R. Fricke, E. Noether, Ö. Ore, Eds.).* Vieweg, Braunschweig.

[11] Dini, U. (1878). *Fondamenti per la teorica della funzioni di variabili reali.* Nistri, Pisa.

[12] Fréchet, M. (1904). *Généralisation d´un théorème de Weierstrass.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l´Académie des Sciences, Paris 139, 848-850.

[13] Fréchet, M. (1905). *Sur les fonctions limites et les opérations fontionelles.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l´Académie des Sciences, Paris 140, 27-29.

[14] Fréchet, M. (1906). *Sur quelques points du Calcul fonctionnel.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 22, 1-74.

[15] Hahn, H. (1932). *Reelle Funktionen.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

[16] Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, Leipzig.

[17] Hobson, E. W. (1907). *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier´s Series.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[18] Hobson, E. W. (1927). *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier´s Series, vol. 1, third edition.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[19] Jordan, C. (1892). *Remarques sur les intégrales définis.* Journal de mathématiques pures et appliquées (4) 8, 69-99.

[20] Jordan, C. (1893). *Cours d´analyse de l´Ecole Polytechnique, vol. 1, second, revised edition.* Gauthier-Villars, Paris.

[21] Kelley, J.L., (1955). *General Topology.* Van Nostrand, Princeton, NJ.

[22] Kuratowski, K. (1922). *Sur l´opération $\bar{A}$ de l´analysis situs.* Fundamenta Mathematicae 3, 182-199.

[23] Kuratowski, K. (1933). *Topologie I. Espaces métrisables, espaces complets.* Garasinski, Warsaw.

[24] Lebesgue, H. (1902). *Intégrale, longueur, aire.* Annale di matematica pura ed applicata (3) 7, 231-359. Pagination follows the original printing of the dissertation, pp. 1-129.

[25] Lebesgue, H. (1905). *Sur les fonctions représentables analytiquement.* Journal de mathématiques pures et appliqués 60, 139-216.

[26] Lebesgue, H. (1928). *Leçons sur l´intégration et la recherche des fonctions primitives, second edition.* Gauthier-Villars, Paris.

[27] Lefschetz, S. (1924). *L´analysis situs et la géométrie algébrique.* Gauthier-Villars, Paris.

[28] Lefschetz, S. (1930). *Topology.* American Mathematical Society, New York.

[29] Lefschetz, S. (1942). *Algebraic Topology.* American Mathematical Society, New York.

[30] Lennes, N. J. (1911). *Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations.* American Journal of Mathematics 33, 287-326.

[31] Newman, M.H.A. (1939). *Elements of the Topology of Plane Sets of Points.* Cambridge University Press, Cambridge , UK.

[32] Peano, G. (1887). *Applicazione geomteriche del calcolo infinitesimale.* Fratelli Bocca, Turin.

[33] Pincherle, S. (1880). *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C. Weierstrass.* Giornale di matematiche 18, 178-254, 317-357.

[34] Riesz, F. (1905). *Sur un théorème de M. Borel.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l´Académie des Sciences, Paris 140, 224-226.

[35] Seifert, H., Threlfall, W. (1934). *Lehrburch der Topologie.* Teubner, Leipzig.

[36] Sierpinski, W. (1926). *La notion de dérivée comme base d´une théorie des ensembles abstraits.* Mathematische Annalen 97, 321-337.

[37] Sierpinski, W. (1928). *Topologia ogólna.* Kasa im. Mianowskiego, Warsaw.

[38] Sierpinski, W. (1934). *Introduction to General Topology.* University of Toronto, Toronto.

[39] Tannery, J. (1887). *Review of Peano.* Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques (2) 11, 237-239.

[40] Tietze, H. (1923). *Beiträge zur allgemein Topologie. I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs.* Mathematische Annalen 88, 290-312.

[41] Veblen, O. (1922). *The Cambridge Colloquium 1916. Part II: Analysis Situs.* American Mathematical Society, New York.

[42] Weierstrass, C. (1865-1866). *Prinzipen der Theorie der analytischen Functionen.* Unpublished lecture notes taken by Moritz Pasch at the University of Berlin. Kept in Pasch´s *Nachlass* at the University of Gießen.