



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Control óptimo de sistemas discretos e ecuacións diferenciais ordinarias

David Rodríguez Caridad

2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Control óptimo de sistemas discretos e ecuacións diferenciais ordinarias

David Rodríguez Caridad

Xullo, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Matemática aplicada

Título: Control óptimo de sistemas discretos e ecuacións diferenciais ordinarias

Breve descripción do contido

Levarase a cabo un estudo dos problemas de control óptimo, que serán aqueles onde se busque optimizar un funcional que, se ben só depende dunha variable v , poderá estenderse a un problema onde se considere un estado y , que será unha variable dependente do control. Con frecuencia, ao considerar só o control, o funcional terá unha expresión que dea lugar a elevados custos computacionais, o que suxire empregar o problema estendido, onde o funcional asociado a este adoita ter unha expresión moito máis simple, para o cálculo do gradiente do funcional orixinal.

Trataranse dous casos de dificultade crecente:

1. Onde o estado e o control son vectores e o sistema de estado ven dado por unha ecuación alxébrica, particularizando este caso para problemas evolutivos.
2. Problemas onde o estado e o control son funcións definidas nun intervalo real, estando o sistema de estado en forma de EDO.

Índice

Resumo	VIII
Introdución	XI
1. Control óptimo de sistemas discretos	1
1.1. Teoría básica de optimización non linear en \mathbb{R}^{n_v}	1
1.2. Control óptimo discreto	3
1.3. Cálculo do gradiente	5
1.3.1. Método do linearizado	5
1.3.2. Método do adxunto	6
1.4. Exemplos	7
1.4.1. Funcional cadrático	7
1.4.2. Estimación de parámetros na ecuación da calor estacionaria	9
1.5. Interpretacións: Restricións de igualdade	11
2. Control óptimo de sistemas dinámicos discretos	15
2.1. Notación e formulación do problema	15
2.2. Cálculo do gradiente	17
2.2.1. Consideracións xerais	17
2.2.2. Método do linearizado	18
2.2.3. Método do adxunto	20

2.3. Exemplo do crecemento dunha poboación bacteriana	21
3. Control óptimo en ecuacións diferenciais ordinarias	23
3.1. Notación e formulación do problema	23
3.2. Tratamento discreto do problema	25
3.3. Tratamento continuo do problema	26
3.3.1. Método do linearizado continuo	27
3.3.2. Método do adxunto continuo	28
3.3.3. Aproximación do espazo de control	29
3.4. Exemplo: Modelo Carro-Péndulo	30
3.4.1. Formulación do problema	30
3.4.2. Implementación e interpretación dos resultados	31
A. Anexo de contidos	35
A.1. Notación matricial	35
A.2. Notación e resultados de cálculo diferencial	35
A.3. Definicións relativas a funcionais	37
A.4. Resultados de EDOs	37
A.5. Convergencia uniforme e integración	38
A.6. Métodos numéricos de integración e resolución de EDOs	38
A.7. Demostración do teorema 3.10	39
A.8. Expresión dos gradientes do exemplo 3.4	41

Resumo

Neste traballo estudaranse os problemas de control óptimo sen restricións, tanto no caso discreto coma no continuo. O primeiro que se buscará nestes problemas será, proporcionar métodos que permitan o cálculo do gradiente do funcional custo, \tilde{J} , no caso discreto. Estes particularizaranse no caso onde o problema sexa evolutivo, aproveitando esta estrutura para reducir o custo computacional. No caso continuo consideraranse problemas onde o estado veña dado por unha EDO. A forma na que se abordarán estes problemas consistirá en: discretizar o problema de maneira que entre no marco das seccións anteriores, ou calcular as derivadas direccionais de \tilde{J} , mediante métodos que se proporcionarán neste traballo, permitindo así o cálculo do gradiente ao aproximar o espazo de control por un de dimensión finita. Os métodos do caso discreto empregaranse para resolver problemas de estimación de parámetros, mentres que os do caso continuo resolverán un problema relacionado co movemento dun sistema carro-péndulo.

Abstract

In this work we will study optimal control problems without restrictions, both in the discrete and continuous cases. The first thing that will be sought in these problems will be to provide methods that allow to calculate the gradient of the cost functional, \tilde{J} , in the discrete case. These will be particularized in the case where the problem is evolutionary, taking advantage of this structure to reduce the computational cost. In the continuous case, problems where the state is given by an EDO will be considered. The way in which these problems will be approached will consist of: discretizing the problem so that it falls within the framework of the previous sections, or calculating the directional derivatives of the cost functional, using methods that will be provided in this work, thus allowing the gradient to be calculated by approximating the control space by a finite-dimensional space. The methods of the discrete case will be used to solve parameter estimation problems, while those of the continuous case will solve a problem related to the motion of a cart-pole system.

Introdución

Neste traballo buscarase estudar os problemas de control óptimo sen restricións, tanto no caso discreto coma no continuo. Estes consisten na minimización dun funcional custo, \tilde{J} , que se ben depende só dunha variable, chamada control, poderá estenderse a un funcional, J , que dependa a maiores doutra variable, chamada estado, de maneira que ambas expresións sexan equivalentes ao considerar a dependencia do estado respecto do control. Mediante a adición do estado, poderase simplificar a expresión do custo, que con frecuencia pode ser moi complexa. Esta clase de problemas pode aparecer en ámbitos moi diversos, xa que en moitos casos, a presenza do estado representa a optimización respecto dunha variable sobre a que non se ten capacidade de decisión de maneira directa.

Entre outras áreas, na dinámica poden surxir esta clase de problemas, posto que en moitos casos as decisións que se poderán tomar serán sobre a forza, podendo así considerar á velocidade e a posición coma estados (presentarase un caso no exemplo 3.4), tamén poden presentarse este tipo de problemas en contextos económicos, onde o control pode representar os recursos dedicados a un sector, e o estado a produción do mesmo (poden verse exemplos desta temática na sección 2.6 de [5]). Pola súa relevancia no panorama técnico actual, tamén se destacarán as súas aplicacións no campo da robótica (sección 7 de [7]) e no adestramento de redes neuronais. Este último será un caso particular de problemas onde o que se busca é a estimación de parámetros, coma tamén o son os exemplos 1.4.2 e 2.3.

Como nos capítulos 1 e 2 vanse tratar os problemas de control óptimo discreto, onde tanto o control como o estado son variables vectoriais e sen restricións, incluírase ao inicio do primeiro capítulo unha sección onde se estudan problemas de optimización en \mathbb{R}^n en xeral, sen a consideración de ningún estado.

Nesta sección introdutoria aportaranse aquelas condicións que garantan a existencia e unicidade da solución do problema de optimización, así como as que debe cumprir un punto para ser solución do problema. Ademais, tamén se introducirá o algoritmo do método do gradiente, así como as condicións de converxencia do mesmo, xa que será o que se empregue ao longo do traballo para a aproximación das solucións dos problemas presentados.

Ao longo da sección anteriormente mencionada, destacará de maneira preeminente o gradiente de \tilde{J} como ferramenta para o estudo dos problemas de optimización. Baixo certas condicións (as de converxencia do método anterior, ou converxencia doutros métodos que non se tratarán ao longo deste traballo), o feito de que o cálculo deste gradiente sexa sinxelo, permitirá resolver o problema sen demasiado custo computacional.

Isto provoca que os problemas de control óptimo aparezan no caso onde o cálculo do gradiente de \tilde{J} sexa inviable computacionalmente. Por isto, no resto do capítulo 1 desenvolveranse métodos que permitan o cálculo deste gradiente, a partir da expresión de J , e que se relacionarán coa interpretación do problema coma un de optimización con restricións de igualdade.

Ao longo do capítulo 2, afondarase no caso onde o problema de control óptimo tratado no capítulo 1 teña un carácter evolutivo. Esta estrutura xorde polo propio plantexamento de moitos problemas, ou como resultado de discretizar un problema no que o estado veña dado por unha ecuación diferencial ordinaria (problema que se tratará no capítulo 3). Neste caso, ao ter en conta a forma de cada termo do problema, poderán particularizarse os métodos presentados no capítulo anterior, reducindo o custo computacional ou o almacenamento en memoria.

No capítulo 3 tratarase o problema de control óptimo sobre ecuacións diferenciais ordinarias (EDOs), onde o control e o estado sexan funcións definidas nun intervalo real e o sistema de estado veña dado por unha EDO. Na práctica, esta clase de problemas aparecen no estudo de sistemas que evolucionan co tempo, sendo está a variable da que dependen tanto o control como o estado. Por non ser o espazo de control de dimensión finita, non será posible considerar un gradiente para \tilde{J} , polo que haberá que considerar distintas estratexias para abordar esta problemática.

A primeira estratexia consistirá en discretizar o problema para que entre no marco do capítulo 2, para isto, aproximaranse as integrais e ecuacións diferenciais do problema.

O outro enfoque co que se tratará este problema consistirá en estudar que expresión terá a direccional de \tilde{J} respecto dunha dirección dada. Ao considerar un espazo de dimensión finita que aproxime ao de control, o gradiente nese espazo de \tilde{J} consistirá en calcular a súa direccional respecto de cada un dos elementos da base.

En cada un dos capítulos, a maiores dos desenvolvementos teóricos anteriormente mencionados, engadiranse exemplos que permitan traballar sobre aplicacións prácticas destes métodos, para a súa resolución empregaranse os códigos realizados para este traballo, implementados en Matlab.

Capítulo 1

Control óptimo de sistemas discretos

Con frecuencia xorden problemas que consisten na toma dunha decisión, que en moitos casos, poderá ser representada por unha variable de optimización vectorial, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$. A valoración da calidade dunha decisión para o obxectivo buscado cuantificarase mediante un funcional custo, $\tilde{J} : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}$, que permitirá comparar dúas decisións, sendo preferible a que teña un menor custo asociado, é dicir, preferirase v_1 sobre v_2 se $\tilde{J}(v_1) < \tilde{J}(v_2)$.

Baixo estas condicións, e se non existen restricións sobre a variable de optimización, o problema de optimización poderá expresarse como:

$$\begin{aligned} & \text{Atopar } u \in \mathbb{R}^{n_v}, \text{ tal que} \\ & \tilde{J}(u) = \min_{v \in \mathbb{R}^{n_v}} \tilde{J}(v). \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1. Teoría básica de optimización non linear en \mathbb{R}^{n_v}

Nesta sección enunciaranse resultados que permitan o estudo dos problemas anteriormente formulados, estes consistirán en dar condicións suficientes e necesarias para a existencia e unicidade de solución, e para que un punto sexa solución. Como o foco deste traballo está nos casos particulares que se tratarán nas seccións e capítulos posteriores, non se incluírán as demostracións destes resultados, aínda que si que se indicará en que referencia se pode atopar cada un deles.

A primeira proposición aportará unha condición necesaria para que un punto dado sexa un mínimo do problema, que, baixo outras hipóteses, será tamén condición suficiente.

Proposición 1.1 (Condicións para que un punto sexa mínimo). *Sexa $\tilde{J} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_v}$ é un aberto, e $u \in \Omega$ onde se acada un mínimo relativo de \tilde{J} . Se \tilde{J} é diferenciable en*

$u \in \Omega$, entón $\nabla \tilde{J}(u) = 0$. Se Ω é un conxunto convexo (A.10) e \tilde{J} , un funcional convexo (A.11), entón, $\nabla \tilde{J}(u) = 0$ é unha condición suficiente para que $u \in \Omega$ sexa un mínimo absoluto.

(Conclúese das proposicións 1.1.1 e 1.1.2 de [3]).

Por ser a convexidade unha propiedade fundamental para os funcionais dos problemas de optimización, o seguinte resultado relacionará esta propiedade co tipo de mínimos que poderá ter \tilde{J} .

Proposición 1.2 (Convexidade e unicidade de mínimo). *Sexa $\tilde{J} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_v}$ é un conxunto aberto e convexo. Entón, se \tilde{J} é un funcional convexo, todo mínimo relativo é tamén mínimo absoluto. Se \tilde{J} é estrictamente convexo, de ter un mínimo, este será único.*

(É o teorema 2.2 de [12]).

A continuación, proporcionarase unha condición suficiente para garantir que o problema de optimización teña algunha solución.

Proposición 1.3 (Condición suficiente de existencia de solución). *Sexa $\tilde{J} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional continuo e coercivo (A.12), onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_v}$ é un conxunto aberto e non baleiro. Entón, existe un mínimo absoluto de \tilde{J} .*

(É o teorema 2.1 de [12]).

Observación 1.4. Estas proposicións considéranse nun marco máis xeral que o problema (1.1), xa que admiten restricións que manteñan o conxunto aberto e convexo (\mathbb{R}^{n_v} é un conxunto aberto, convexo e non baleiro). Desta maneira, se no problema (1.1) \tilde{J} é diferenciable en \mathbb{R}^{n_v} , o seu gradiente deberá anularse en todos os mínimos relativos, e baixo as outras condicións anteriormente enunciadas, poderá garantirse a existencia e unicidade da solución.

A continuación, presentarase o método do gradiente con paso fixo, xa que este é o método de descenso que se empregará para a resolución numérica dos problemas presentados neste traballo.

Os métodos de descenso son métodos iterativos, que consistirán en construír unha sucesión de vectores de maneira que o custo avaliado nun termo da sucesión valla menos que ao avalialo no termo anterior. Para construír a sucesión anterior precisarase regras de selección da dirección d_k e do paso ρ_k , de maneira a sucesión se constrúa como: $u_{k+1} = u_k + \rho_k d_k$.

Moitos dos métodos teñen seleccións da dirección baseadas no gradiente de \tilde{J} , no método que se empregará, a dirección será o oposto do gradiente: $d_k = -\nabla \tilde{J}(u_k)$. Ademais, por ser o paso fixo, considerarase un $\rho_k = \rho > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, polo que o método será o seguinte:

Algoritmo 1.5 (Método do gradiente con paso fixo).

Introducir u_0 , ε , ρ e $itmax$.

for $i = 0$ *to* $itmax$ **do**

Calcular $\nabla\tilde{J}(u_i)$.

if $\|\nabla\tilde{J}(u_i)\| < \varepsilon$ **then**

return u_i

end if

$u_{i+1} = u_i - \rho\nabla\tilde{J}(u_i)$.

end for

Observación 1.6. No algoritmo anterior, deberán introducirse: o iterante inicial u_0 , o parámetro de tolerancia ε , o paso ρ e o número máximo de iteracións $itmax$. O número máximo de iteracións introdúcese para evitar bucles infinitos en casos de non converxencia, mentres que nas liñas 4 a 6, establécese o test de parada co que se considera que o algoritmo converxeu.

Proposición 1.7 (Converxencia do método do gradiente con paso fixo). *Sexa $\tilde{J} : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional elíptico (A.14) con gradiente Lipschitziano (A.13), $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a sucesión xerada polo método do gradiente con paso fixo $\rho > 0$. Se $\rho < \frac{2\alpha}{L^2}$, onde $\alpha > 0$ é a constante de elipticidade, e $L > 0$ a de Lipschitz, entón $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge á única solución do problema de optimización, e a converxencia é polo menos de orde 1 (A.16).*

(É o teorema 2.9 de [12] considerando un paso fixo.)

Observación 1.8. Na práctica, os métodos de aproximación da solución do problema de optimización son aplicables aínda que non se verifiquen as hipóteses de Lipschitzianidade e elipticidade, mais non se garante a converxencia do método. Se tampouco se cumpre a convexidade de \tilde{J} , aínda que o método converxa, non ten porque facelo a un mínimo.

O único que se precisa para a aplicación do algoritmo é calcular o gradiente de \tilde{J} , polo que ao considerar funcionais para os que se poida calcular o gradiente nun punto dado, estes permitirán a aplicación do método e polo tanto, en moitos casos, unha aproximación da solución do problema (1.1).

1.2. Control óptimo discreto

Nesta sección consideraranse problemas da forma (1.1), onde $\tilde{J}(v)$ teña unha forma demasiado complexa, de maneira que, ou non se teña unha expresión explícita, ou non se poida calcular o gradiente por elevados custos computacionais. No marco deste traballo, esta complexidade do custo será debida a non ter en consideración outra variable, que aínda que estea determinada polo

valor do control (a variable de optimización nesta clase de problemas), permite a simplificación do custo. Está nova variable recibe o nome de estado, y , e é interpretable coma un elemento esencial do modelo a considerar, pero sobre as que non se poidan tomar decisións de maneira directa.

Un exemplo de control e estado pode verse no caso de estudar o movemento dun obxecto, no que as decisións so se poderán tomar sobre a forza aplicada (o control), pero nestes casos as variables que mellor permiten observar o movemento serán a velocidade ou a posición (os estados).

Os problemas de control óptimo discretos, os tratados nesta sección, serán aqueles onde se considere que tanto o control como o estado son vectores (que non teñen porque compartir dimensión), e estean ligados por unha ecuación alxébrica. Estes serán da forma:

$$\begin{aligned} & \text{Atopar } u \in \mathbb{R}^{n_v}, \text{ tal que} \\ \tilde{J}(u) &= \min_{v \in \mathbb{R}^{n_v}} \tilde{J}(v) = \min_{v \in \mathbb{R}^{n_v}} J(v, y(v)), \\ & \text{onde } y(v) \in \mathbb{R}^{n_y} \text{ é a solución de } F(v, y) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Enténdase respecto á notación neste novo problema, que:

- $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ e \tilde{J} interpretaranse da mesma forma que no problema (1.1), só que neste caso haberá que ter en conta as limitacións de \tilde{J} anteriormente mentadas.
- A dependencia do estado respecto do control virá representado pola ecuación $F(v, y(v)) = 0$, de maneira que para un $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ fixado suporase que admitirá coma única solución $y(v)$. $F : \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a función sobre a que se define o sistema anterior (sistema de estado) e que se suporá de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{n_y}, \mathbb{R}^{n_y})$.
- O funcional $J : \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}$ é a extensión de \tilde{J} que resulta ao ter en consideración $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, xa que ambas son equivalentes: $\tilde{J}(v) = J(v, y(v))$.

Observación 1.9. Considerarase ao longo deste traballo que $\det(d_y F(v, y)) \neq 0$, para calquera $(v, y) \in \mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{n_y}$ tal que $F(v, y) = 0$. Baixo estas hipóteses, e como xa se supón que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n_v} \times \mathbb{R}^{n_y})$, cúmprense as condicións do teorema da función implícita (A.8), que garante a unicidade local da solución, e que $y : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ sexa $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n_v}, \mathbb{R}^{n_y})$.

Observación 1.10. Se ben non se terá un resultado que as garanta en xeral, en moitos problemas como será o caso de todos os tratados neste traballo, a propia forma do sistema de estado permite asegurar a existencia e unicidade de solución do sistema de estado para calquera control dado. Algúns exemplos disto poden ser: cando o estado ven dado en forma $y = f(v)$, cando o sistema de estado é linear e a matriz do sistema é inxectiva (A.2). A maiores, todos os problemas que encaixen no marco do capítulo 2 terán solución única pola estrutura do problema.

Como xa se viu na sección anterior, unha ferramenta fundamental para estudar os problemas (1.1) é o gradiente, xa que este permite caracterizar se un punto é unha solución (proposición 1.1), ou aplicar un método numérico para a aproximar esta (1.5). Xa se comentaron as posibles dificultades para a obtención do gradiente de \tilde{J} en v a partir da súa propia expresión, polo que na seguinte sección plantexaranse métodos para este cálculo empregando a forma simplificada de J .

1.3. Cálculo do gradiente

1.3.1. Método do linearizado

A forma do custo en (1.2) permite obter o seguinte resultado de maneira directa ao empregar a regra da cadea (A.5):

Lema 1.11. *Nas condicións do problema (1.2) e se a solución do sistema de estado $y : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é diferenciable, $d\tilde{J}(v) = d_v J(v, y(v)) + d_y J(v, y(v)) d_v y(v)$.*

Observación 1.12. Como $d\tilde{J}(v) = \nabla \tilde{J}(v)'$, o cálculo de $d\tilde{J}(v)$ equivale ao cálculo do gradiente. Por outra parte, a diferenciabilidade de $y(v)$ cúmprese baixo as suposicións da observación 1.9.

Observación 1.13. As condición necesaria de mínimo (1.1) trasládase para o problema (1.2) como: $d_v J(v, y(v)) = -d_y J(v, y(v)) d_v y(v)$.

Como se supuxera unha maior simplicidade en J , tanto $d_v J(v, y(v))$ coma $d_y J(v, y(v))$ consideraranse datos do problema, polo que a estratexia máis natural para o cálculo do gradiente consiste en obter $d_v y(v)$, xa que é o único dato faltante.

Lema 1.14. *Nas condicións do problema (1.2) coa hipótese de que $y : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ sexa diferenciable, cúmprese a seguinte igualdade: $d_y F(v, y(v)) d_v y(v) = -d_v F(v, y(v))$. Se se supón que $d_y F(v, y(v))$ é inxectiva, entón ademais cúmpriase que $d_v y(v) = -d_y F(v, y(v))^{-1} d_v F(v, y(v))$.*

Demostración. Basta ver que, como $F(v, y(v)) = 0$, tense que, $0 = d_v(F(\cdot, y(\cdot)))(v) = d_v F(v, y(v)) + d_y F(v, y(v)) d_v y(v)$, a segunda parte do lema é inmediata a partir da primeira, pero tamén pode verse coma unha das consecuencias do teorema da función implícita (A.8), que tamén permite garantir a diferenciabilidade de y se $d_y F(v, y(v))$ é inxectiva. \square

Observación 1.15. A primeira ecuación do lema inmediatamente anterior chámase sistema linealizado, onde a incógnita a calcular é $d_v y(v)$. Véxase que este sistema é linear e que a dimensión da incógnita é $n_y \times n_v$. Por outra banda, a matriz que haberá que invertir será $d_y F(v, y(v))$ e a súa dimensión é $n_y \times n_y$. Este sistema non será tan custoso coma resolver n_v sistemas vectoriais

de dimensión n_y , xa que a matriz a invertir é a mesma; pero aínda así, a resolución será moito máis custosa que a dun único sistema de dimensión n_y .

Ao cálculo do gradiente de \tilde{J} en v despexando $d_v y(v)$ denominaráselle como método do linearizado e consiste na aplicación do seguinte algoritmo:

Algoritmo 1.16 (Método do linearizado).

- 1: Calcular $y(v)$ no sistema de estado $F(v, y(v)) = 0$.
- 2: Resolver $d_y F(v, y(v)) d_v y(v) = -d_v F(v, y(v))$.
- 3: Calcular $d_v \tilde{J}(v) = d_v J(v, y(v)) + d_y J(v, y(v)) d_v y(v)$.

1.3.2. Método do adxunto

Como xa se mencionou na observación 1.15, o método do linearizado pode resultar computacionalmente moi custoso para a resolución de problemas nos que a dimensión do control sexa considerable. Isto motiva a búsqueda de alternativas máis eficientes para o cálculo do gradiente, como será o método do adxunto, que consistirá en substituír na expresión do gradiente, $d_y J(v, y(v)) d_v y(v)$ por outra expresión equivalente que dependa dunha nova incógnita vectorial.

Para a obtención desta expresión alternativa, verase primeiro que partindo do sistema linearizado, pode deducirse que para calquera $\mu \in \mathbb{R}^{n_y}$ cúmprese que:

$$\mu' d_y F(v, y(v)) d_v y(v) = -\mu' d_v F(v, y(v)). \quad (1.3)$$

Observación 1.17. Ao longo deste traballo considerarase que v' e A' representan vectores e matrices traspostos respectivamente (A.1).

Considerando a expresión do sistema linearizado que inclúe $d_v y(v)$, para obter a igualdade buscada, precisarase un $\lambda \in \mathbb{R}^{n_y}$, que resolva o seguinte sistema:

$$d_y F(v, y(v))' \lambda = d_y J(v, y(v))'. \quad (1.4)$$

Ao sistema anterior chamaráselle, sistema adxunto, e cando este teña solución única, o vector solución será a variable adxunta. Véxase que a matriz do sistema adxunto é a do sistema linearizado pero trasposta, polo que a invertibilidade de ambas matrices é equivalente.

Proposición 1.18. *Nas condicións do lema 1.11, se $\lambda \in \mathbb{R}^{n_y}$ é solución do sistema adxunto, cúmprese que $d\tilde{J}(v) = d_v J(v, y(v)) - \lambda' d_v F(v, y(v))$.*

Demostración. Como cumpre λ o sistema adxunto, téñense as seguintes igualdades:

$$\lambda' d_y F(v, y(v)) d_v y(v) = (d_y F(v, y(v))' \lambda)' d_v y(v) = d_y J(v, y(v)) d_v y(v).$$

Xa que o primeiro membro da igualdade coincide co da ecuación (1.3), para $\mu = \lambda$, cúmprese a igualdade enunciada. \square

Observación 1.19. Para o problema (1.2) mantense a proposición 1.1 substituindo $\nabla\tilde{J}(v) = 0$ por $d_v J(v, y(v)) = \lambda' d_v F(v, y(v))$, onde λ verifica (1.4).

Dada $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ variable de control, o cálculo de $d_v \tilde{J}(v)$ polo método do adxunto consistirá na aplicación do seguinte algoritmo:

Algoritmo 1.20 (Método do adxunto).

- 1: Calcular $y(v)$ no sistema de estado $F(v, y(v)) = 0$.
- 2: Resolver $d_y F(v, y(v))' \lambda = d_y J(v, y(v))'$.
- 3: Calcular $d\tilde{J}(v) = d_v J(v, y(v)) - \lambda' d_v F(v, y(v))$.

Pode verse como o método do adxunto cumpre o seu obxectivo de reducir a dimensionalidade da incógnita do sistema a resolver, xa que a variable adxunta é un vector de dimensión n_y . Ademais, como se mencionou anteriormente, é aplicable nas mesmas condicións ($d_y F(v, y(v))$ invertible) que o linearizado.

1.4. Exemplos

Para validar os métodos propostos neste capítulo para o cálculo do gradiente e aproximación das solucións mediante o método do gradiente, presentarase un test académico cun funcional cadrático.

Tamén se presentará un exemplo de estimación de parámetros para ver un caso de aplicación práctica onde aparecen problemas coma os formulados.

No caso do test académico desenvolveranse os cálculos de maneira explícita para ver que o gradiente coincide co que resultaría de non considerar o estado, e en ambos casos aproximarase a solución empregando o código desenvolto en Matlab para este traballo.

1.4.1. Funcional cadrático

Considerarase un funcional cadrático da forma $J(v, y) = \frac{1}{2} (v'Av + y'By) - a'u - b'y$, onde $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ é o control e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o estado. Ademais, a dependencia do estado respecto do control será linear, $Cy(v) = Dv$, onde $C \in \mathcal{M}_{n_y \times n_v}$ é unha matriz invertible.

Observación 1.21. Podería considerarse o caso no que C é inxectiva se tivese máis filas, pero nese caso, as filas sobrantas serían linearmente dependentes. Isto fai que, ao supoñer que o sistema é

compatible, estas non aporten nova información, polo que poderán suprimirse volvendo a unha matriz cadrada.

Ao ser C invertible, o sistema de estado poderá entenderse tamén coma: $y(v) = C^{-1}Dv$, polo que o funcional custo poderá reescribirse coma:

$$\tilde{J}(v) = J(v, y(v)) = \frac{1}{2}v'(A + D'C'^{-1}BC^{-1}D)v - (a' - b'C^{-1}D)v.$$

Enténdese que $A \in \mathcal{M}_{n_v \times n_v}^{Sim}$, $B \in \mathcal{M}_{n_y \times n_y}^{Sim}$, $a \in \mathbb{R}^{n_v}$, $b \in \mathbb{R}^{n_y}$ e $D \in \mathcal{M}_{n_y \times n_v}$.

Para garantir a convexidade estrita do funcional cadrático precisarase que a matriz $\tilde{A} = A + D'C'^{-1}BC^{-1}D$ sexa definida positiva (pode verse que son equivalentes no corolario 2.3 de [12]). Isto cumprirase no caso no que A sexa definida positiva e B semidefinida positiva, xa que se ambas son simétricas, e se $v \neq 0$, $v'Av > 0$ por ser A definida positiva, e $v'D'C'^{-1}BC^{-1}Dv = y'By \geq 0$ por ser B semidefinida positiva. O test realizarase para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores de A son 2 e 7, e os de B , 1 e 3, a matriz \tilde{A} é definida positiva e, por tanto o funcional \tilde{J} é estritamente convexo. Como xa se mencionara antes, $\tilde{J}(v) = J(v, y(v)) = \frac{1}{2}v'\tilde{A}v - (a' - b'C^{-1}D)v$, polo que: $\nabla\tilde{J}(v) = \tilde{A}v - a - D'(C^{-1})'b$.

Coma \tilde{A} é invertible (por ser semidefinida positiva), $\nabla\tilde{J}(u) = 0$ en $u = \tilde{A}^{-1}(a + D'(C^{-1})'b)$, que ademais, por ser \tilde{J} estritamente convexo, será o único mínimo (ademais será absoluto). Ao realizar este cálculo conclúese que este mínimo está en: $u = \begin{pmatrix} -70,5 \\ 47,75 \end{pmatrix}$.

Agora empregaranse os métodos anteriores para o cálculo do gradiente:

Dado $v \in \mathbb{R}^2$, pola expresión de J , $\nabla_v J(v, y(v)) = Av - a$ e $\nabla_y J(v, y(v)) = By - b$. Ademais, da expresión do sistema de estado $F(v, y) = Cy - Dv$, dedúcese que, $d_v F(v, y) = -D$ e $d_y F(v, y) = C$.

Polo método do linearizado: $d_y F(v, y(v))d_v y(v) = Cd_v y(v) = -d_v F(v, y(v)) = D$, polo que $d_v y(v) = C^{-1}D$, que ao substituír na expresión do gradiente,

$$\nabla\tilde{J}(v) = \nabla_v J(v, y(v)) + d_v y(v)' \nabla_y J(v, y(v)) = Av - a + (C^{-1}D)'(By - b) =$$

$$Av - a + D'(C^{-1})'(BC^{-1}Dv - b).$$

Polo método do adxunto: $d_y F(v, y(v))'\lambda = C'\lambda = \nabla_y J(v, y(v)) = By - b$, polo que $\lambda =$

$(C^{-1})'(By - b)$, o que permite concluir:

$$\begin{aligned}\nabla \tilde{J}(v) &= \nabla_v J(v, y(v)) - d_v F(v, y(v))' \lambda = Av - a + D'(C^{-1})'(By - b) = \\ &= Av - a + D'(C^{-1})'(BC^{-1}Dv - b)\end{aligned}$$

Pode verse que ambos métodos chegan á expresión correcta do gradiente, polo que poderán empregarse para calculalo no método do gradiente implementado. Ademais, nos casos onde a dimensión de y sexa demasiado grande, a inversión de C será computacionalmente moito máis custosa que a resolución dos sistemas $Cy = Dv$, $Cd_v y = D$ e $C'\lambda = By - b$, polo que a aplicación destes métodos para o cálculo do gradiente pode supoñer unha redución considerable do custo computacional.

A implementación levouse a cabo cun iterante inicial $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}'$ e un paso $\rho = 0,01$, e na figura 1.1, pode verse á velocidade de converxencia á solución.

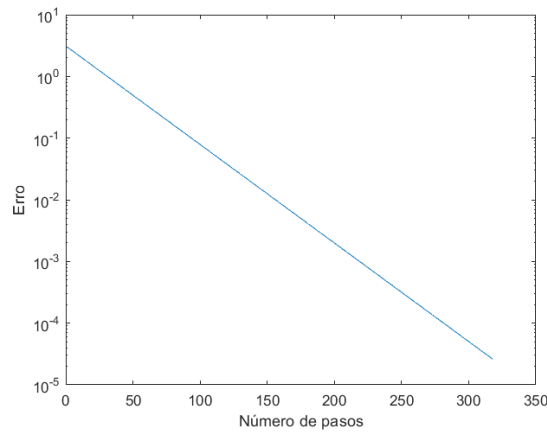


Figura 1.1: Converxencia do erro para un funcional cadrático

1.4.2. Estimación de parámetros na ecuación da calor estacionaria

Neste exemplo tratarase de estudar a temperatura dunha barra metálica, suxeita por un dos lados e co outro exposto á intemperie. Considerarase que a temperatura será a mesma para todos os puntos dunha sección transversal da barra, de maneira que o modelo a considerar será unidimensional.

A modelización deste exemplo consiste na ecuación da calor:

$$-d_{xx}T(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, L], \quad T(0) = T_0, \quad d_x T(L) = \alpha(T_L - T(L)),$$

onde $\alpha \in (0, 1)$ é a difusividade térmica, T_0 a temperatura do material que soporta a barra no extremo esquerdo, T_L é a temperatura ambiente do exterior no extremo dereito e $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$

a fonte de calor. Desta maneira, a condición tipo Dirichlet representa que a barra e o seu soporte teñen a mesma temperatura na zona onde entran en contacto, mentres que a tipo Robin expresa que o fluxo de calor no extremo dereito, que é proporcional á diferenza entre a temperatura da barra e a do exterior nese punto.

Neste exemplo realizaranse medidas da temperatura en puntos intermedios da barra, co obxectivo de estimar a temperatura do soporte, T_0 , e a difusividade térmica, α , en base a esas observacións. Neste modelo suporase ademais que hai condicións normais (a temperatura ambiente $T_L = 25^\circ C$) e que a fonte de calor é desprezable, esta fonte considérase nula ao facer o modelo, pero a súa influencia real representarase coma unha lixeira desviación aleatoria ao construír as observacións.

Como a derivada segunda é nula, o modelo estimado será linear, de maneira que a temperatura esperada en calquera punto pode calcularse coma: $\hat{T}(x) = T_0 - \alpha(T_L - \hat{T}(L))x$. Dada a temperatura do soporte, e a difusividade térmica, será posible despegar a temperatura final:

$$\hat{T}(L) = T_0 + \alpha(T_L - \hat{T}(L))L \implies \hat{T}(L) = \frac{T_0 + \alpha L T_L}{1 + \alpha L},$$

co que a temperatura da barra estimada en calquera punto poderá reescribirse coma:

$$\hat{T}(x) = T_0 - \alpha \left(T_L - \frac{T_0 + \alpha L T_L}{1 + \alpha L} \right) x.$$

Consideraranse os puntos $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < L$ onde se toman as observacións $T_{obs}^1, T_{obs}^2, \dots, T_{obs}^m$, que serán as xeradas polo modelo suposto, máis unhas lixeiras desviacións que representarán a inexactitude de desprezar o fluxo de calor (as desviacións seguirán unha distribución normal (0,1) xerada pola librería *Statistics and Machine Learning Toolbox*).

Neste contexto, dado $v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}'$ control, onde v_1 representa a T_0 , e v_2 a α , xerárase $y_i = \hat{T}(x_i)$, onde $\hat{T}(x) = v_1 + v_2(T_L - \frac{v_1 + v_2 L T_L}{1 + v_2 L})x$, e para estimar T_0 e α , buscarase que v minimize $\tilde{J}(v) = J(v, y) = \sum_{i=0}^m (y_i - T_{obs}^i)^2$. Este problema entra no marco dos descritos neste capítulo, polo que se poderán empregar os métodos anteriormente plantexados.

O modelo suposto é aquel onde $T_0 = 3$, $\alpha = 0,5$, $L = 4$ e se toman 10 observacións equiespaciadas entre 1 e 3.

Veranse a continuación as formas dos gradientes do custo e do sistema de estado: $d_v J(v, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $d_y J(v, y) = 2(y - T_{obs})'$, $d_y F(v, y) = I_{m \times m}$ e $d_v F(v, y) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{v_2 x_{obs}}{1 + L v_2} & x_{obs} \frac{T_L - T_0}{1 + L v_2} \end{pmatrix}$.

Ao aplicar os métodos presentados neste traballo, obtense a estimación dos parámetros: $\hat{\alpha} = 0,690$, $\hat{T}_0 = 2,533$, que se ben non son unha boa aproximación dos orixinais, vendo a gráfica 1.2, pode observarse que o modelo cos parámetros estimados aproxímase máis aos datos observados que os parámetros orixinais. Isto corrobórase ao calcular o custo de $v = \begin{pmatrix} T_0 & \alpha \end{pmatrix}'$

e de $\hat{v} = \left(\hat{T}_0 \quad \alpha \right)'$, $\tilde{J}(v) = 0,308$ e $\tilde{J}(\hat{v}) = 0,280$. Cunha mostra máis grande, a recta de regresión converxerá á teórica, polo que a construción do modelo que minimize a diferenza coas observacións permitirá unha boa aproximación dos parámetros a estimar.

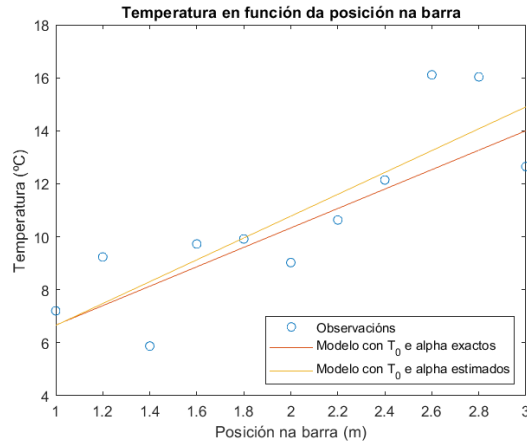


Figura 1.2: Representación das temperaturas observadas, teóricas e estimadas ao longo da barra

Observación 1.22. Se ben neste exemplo, o problema a estudar é equivalente ao cálculo dunha recta de regresión, de maneira análoga poderás considerarse un fluxo de calor constante ou con outra forma ca que o modelo fose definible cunha cantidade limitada de parámetros, aínda que nestes casos podería ser necesario resolver a EDO do modelo mediante métodos numéricos. Un desenvolvemento análogo ao deste exemplo poderás levarse a cabo para estimar os parámetros que definen un modelo, sempre que se teña unha expresión o suficientemente simple do gradiente do sistema que define os valores estimados, haberás un caso semellante no exemplo 2.3.

1.5. Interpretacións: Restricións de igualdade

Coma a forma de definir o estado é mediante a igualdade dun sistema, o problema (1.2) pode verse coma un caso particular da optimización con restricións de igualdade, onde tanto o control coma o estado se consideren como variables de optimización. Por isto, estudaranse este tipo de problemas, e os resultados que se obteñan no caso xeral terán relación cos que se obtiveron nas seccións previas.

Ao tratar o problema con restricións considerárase que a variable de optimización é $w = \left(u' \quad y' \right)'$ e o sistema de estado convértese nas restricións do problema, mantendo a notación para a función que a define, F . Coas restricións, a variable de optimización non tomarás valores en todo $\mathbb{R}^{n_v+n_y}$, senón que so o fará en $X_{Res} = \{w \in \mathbb{R}^{n_v+n_y} \mid F(w) = 0\}$.

Tendo todo isto en consideración, pode plantexarse o seguinte problema restrinxido que xe-

raliza o anteriormente presentado:

$$\begin{aligned}
 & \text{Atopar } w^* \in X_{Res}, \text{ tal que} \\
 & J(w^*) = \min_{w \in X_{Res}} J(w), \\
 & \text{onde } X_{Res} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid F(w) = 0\} \\
 & \text{e } F(w) \in \mathbb{R}^m, m < n.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Observación 1.23. Supoñendo que, $F, J \in \mathcal{C}^1$ e que haxa m vectores linearmente independentes de \mathbb{R}^n , denotarase a este conxunto linearmente independente por \mathcal{B} , de maneira que $\det(d_{\mathcal{B}}F(w)) \neq 0$, para calquera $w \in X_{Res}$, cúmprense as hipóteses das seccións anteriores. Ademais, é posible definir de maneira local a variable de estado polo teorema da función implícita (A.8).

Para o estudo dos problemas de optimización con restricións, empregaranse as condicións necesarias para que un punto sexa mínimo, aportadas polos multiplicadores de Lagrange. A continuación, verase a dedución deste método:

Obsérvese que neste tipo de problemas, $\nabla J(w^*)$ non ten porque anularse, pero si que se cumprirá que para calquera vector $\mu \in \Pi$, sendo $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ o espazo dos vectores tanxentes a X_{Res} en w^* , $dJ(w^*)\mu = 0$. Ademais os vectores tanxentes a X_{Res} en calquera punto cumpren que $dF(w)\mu = 0$, polo que, como se pode ver argumentando polas dimensións dos espazos, $\Pi = \ker(dF(w^*))$. Coma xa se viu que $\nabla J(w^*) \in \Pi^\perp = [\ker(dF(w^*))]^\perp$, e que $[\ker(dF(w^*))]^\perp = \text{Im}(dF(w^*)')$, dedúcese que $\nabla J(w^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla F_i(w^*) = dF(w^*)'\lambda$, para certo $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

De todo isto pódese concluír que $\nabla J(w^*) - dF(w^*)'\lambda = 0$, que pode ser interpretado coma o gradiente respecto de w do seguinte funcional $\mathcal{L}(w, \mu) = J(w) - F(w)'\mu$ no mínimo w^* . O funcional anterior denominarase Lagrangiano e cumprirá que $\nabla_\mu \mathcal{L}(w, \mu) = F(w)$, polo que, $\nabla_\mu \mathcal{L}(w, \mu) = 0$ equivale a que, $w \in X_{Ref}$.

Teorema 1.24 (Condición necesaria de mínimo en problemas con restricións de igualdade). *Supóñase o problema (1.5) coas hipóteses da observación 1.23, onde w^* é un mínimo de J en X_{Ref} e $\mathcal{L}(w, \mu)$ está definida da maneira anterior. Entón, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que, $\nabla \mathcal{L}(w, \lambda) = 0$. Ademais, $\nabla \mathcal{L}(w, \lambda) = 0$ só se cumpre se $w \in X_{Ref}$.*

Observación 1.25. A resolución do sistema $\nabla \mathcal{L}(w, \mu)$ non é unha boa estratexia para a resolución do problema (1.5), xa que a solución do sistema non ten porque ser única, ademais por non ser unha condición necesaria, unha solución dese sistema pode ser un punto de sela ou un máximo. Por outra banda, nos métodos de descenso, esta problemática evítase en parte, xa que non poden converxer a máximos do custo.

Nun problema de control óptimo con sistema de estado discretos, o Lagrangiano pode expresarse en función do control e do estado $\mathcal{L}(w, \mu) = \mathcal{L}(v, y, \mu)$. Polo que, a condición necesaria de

mínimo que da o resultado anterior ten a seguinte forma:

$$\nabla \mathcal{L}(w, \mu) = \nabla \mathcal{L}((v, y), \mu) = \begin{pmatrix} \nabla_v \mathcal{L}((v, y), \mu) \\ \nabla_y \mathcal{L}((v, y), \mu) \\ \nabla_\mu \mathcal{L}((v, y), \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Estudando a igualdade anterior termo a termo, vese que esta correspóndese coas tres seguintes igualdades:

$$d_v \mathcal{L}((v, y), \mu) = d_v J(v, y) - d_v F(v, y)' \mu = 0$$

$$d_y \mathcal{L}((v, y), \mu) = d_y J(v, y) - d_y F(v, y)' \mu = 0$$

$$d_\mu \mathcal{L}((v, y), \mu) = F(v, y) = 0$$

Nas ecuacións anteriores, o último sistema é o sistema de estado, mentres que o segundo é o sistema adxunto que se plantexou na sección anterior e o primeiro é a expresión do gradiente no método do adxunto. Isto fai que o estudo destes problemas polos multiplicadores de Lagrange sexa equivalente ao da observación 1.19.

Disto conclúese que interpretar o problema (1.2) como un con restricións de igualdade dá lugar de maneira natural ao método do adxunto para o cálculo do gradiente.

Capítulo 2

Control óptimo de sistemas dinámicos discretos

Os casos máis interesantes e frecuentes nos que aparecen os problemas de control con sistemas de estado discretos, son aqueles, onde se ten en conta algunha clase de estrutura temporal, de maneira que o estado e o control se consideran por etapas.

Nos casos aquí tratados, tamén se considerará un custo aditivo, onde cada sumando só depende do control e estado asociados a cada etapa. Esta estrutura temporal asociada ao problema de optimización pode vir dada, pola propia natureza deste, ou como resultado dunha estratexia para reducir o seu custo computacional (como será o caso do exemplo tratado neste capítulo).

En [2] poden verse moitos resultados que estudan a dependencia temporal nos problemas de optimización en casos moi xerais: tratando con variables restrinxidas, categóricas ou estocásticas. Porén, ao longo deste capítulo tratarase o caso no que a regularidade dos elementos involucrados no problema permita realizar un estudo analítico semellante ao do capítulo anterior. Para isto, suporase que: tanto o estado coma o control son variables vectoriais reais sen restricións e que tanto no funcional custo coma no sistema de estado darase certa regularidade, que se indicará nos resultados que se presentarán.

2.1. Notación e formulación do problema

Ao tratar estes problemas coma no capítulo anterior, poderá destacarse a forma que adopta cada termo debido á estrutura temporal do problema, dando lugar a unha simplificación dos mesmos que reduza considerablemente o custo computacional.

Para a boa formulación do problema introdúcese a seguinte notación:

- $t = 0, \dots, T$ son os $T + 1$ instantes de tempo considerados, sendo T , o tempo final.
- $v^t \in \mathbb{R}^{n_t}$ é o control seleccionado no instante $t = 0, \dots, T - 1$, sendo $n_v = \sum_{t=0}^{T-1} n_t$.
- $y^t = f_{t-1}(v^{t-1}, y^{t-1}) \in \mathbb{R}^{m_t}$, o estado no instante $t = 1, \dots, T$; e $y^0 = y_{in} \in \mathbb{R}^{m_0}$ o estado inicial dado como dato no problema.
- $g_t(v^t, y^t)$ o custo asociado ao instante $t = 0, \dots, T - 1$, e $g_T(y^T)$ o custo terminal, de xeito que:

$$J(v, y) = \sum_{t=0}^{T-1} g_t(v^t, y^t) + g_T(y^T),$$

$$\text{sendo } v = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ \vdots \\ v^{T-1} \end{pmatrix} \text{ e } y = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^T \end{pmatrix}.$$

Observación 2.1. Ao presentar a notación a empregar, non se considera o control no instante final, isto débese a que ao non haber estados posteriores sobre os que influír, este non ten interese no problema.

Observación 2.2. Asumiuse que y^t só depende do control e estado inmediatamente anteriores, o que non restrinxe a xeralidade do problema, xa que é posible incorporar todos os controis e estados anteriores en y^{t-1} aumentando a súa dimensión (e posiblemente a doutros pasos anteriores, pode verse este razoamento na sección 1.4 de [2]).

Observación 2.3. Todos os problemas que se tratarán neste traballo terán custos aditivos, o que se ben pode non ser sempre o caso na practica, é moi frecuente. Ademais, outros tipos de custo, coma por exemplo, os multiplicativos, poderán expresarse coma aditivos ao realizar unha transformación que non modifica o problema.

Observación 2.4. Para simplificar a notación, non se representará de maneira explícita, como xa se puido ver na descrición inicial, que y^t depende de v^{t-1} e de y^{t-1} . Ademais, coma a dependencia de f_t, g_t respecto de y ou v , ven dada pola dependencia respecto de y^t ou v^t , denotarase $\nabla_y f_t(v^t, y^t) = \nabla_{y^t} f_t(v^t, y^t)$, e analogamente para $\nabla_v f_t(v^t, y^t)$, $\nabla_y g_t(v^t, y^t)$ e $\nabla_v g_t(v^t, y^t)$.

Con toda a notación xa introducida, pódese proceder a formular o problema en cuestión:

$$\begin{aligned}
 & \text{Atopar } u^t \in \mathbb{R}^{n_t}, \quad t = 0, \dots, T-1, \text{ tal que,} \\
 \tilde{J}(u) = \min_{v \in \mathbb{R}^{n_v}} \tilde{J}(v) &= \min_{v \in \mathbb{R}^{n_v}} J(v, y(v)) = \min_{v \in \mathbb{R}^{n_v}} \sum_{t=0}^{T-1} g_t(v^t, y^t) + g_T(y^T), \\
 \text{onde } \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_{in} \\ f_0(v^0, y^0) \\ \vdots \\ f_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1}) \end{pmatrix}. \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

Observación 2.5. Os problemas anteriormente formulados son un caso particular dos da forma (1.2), ao considerar:

$$F(v, y) = \begin{pmatrix} y^0 - y_{in} \\ y^1 - f_0(v^0, y^0) \\ \vdots \\ y^T - f_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1}) \end{pmatrix}.$$

2.2. Cálculo do gradiente

Do mesmo xeito que no capítulo anterior, o cálculo do gradiente será esencial no estudo desta clase de problemas, este realizarase mediante os dous métodos xa tratados (o do linearizado e o do adxunto). Aínda que os métodos sexan os mesmos, a estrutura temporal fai que a forma do sistema de estado e do funcional custo sexan máis simples, reducindo bastante o custo computacional se se teñen en conta estas particularidades.

2.2.1. Consideracións xerais

O primeiro que hai que destacar con respecto ao caso xeral é que o estado é facilmente calculable por etapas, o cal pode dar lugar a situacións onde non fose necesario almacenar o vector completo, o que pode supoñer un gran aforro no uso de memoria cando o número de pasos fose considerable. Ademais, da súa expresión pode probarse por inducción sobre o número de etapas que o sistema de estado ten solución e que esta é única para cada control.

Outro elemento que cambia considerablemente con respecto ao caso xeral é a expresión que teñen as jacobianas do sistema de estado, sendo ambas matrices dispersas. No caso de $d_y F(v, y)$, esta é bidiagonal inferior por bloques, onde os bloques diagonais son identidades, o que garante

a inxectividade da matriz:

$$d_y F(v, y) = \begin{pmatrix} I_{m_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -d_y f_0(v^0, y^0) & I_{m_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d_y f_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1}) & I_{m_T} \end{pmatrix}.$$

Por outra parte, $d_v F(v, y)$ é unha matriz subdiagonal por bloques:

$$d_v F(v, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d_v f_0(v^0, y^0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d_v f_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1}) \end{pmatrix}.$$

Respecto aos gradientes do custo respecto de v e de y , a principal diferenza que xorde é que estes se escriben en función dos funcionais g_0, \dots, g_T :

$$\begin{aligned} d_v J(v, y) &= \left(d_v g_0(v^0, y^0) \quad d_v g_1(v^1, y^1) \quad \cdots \quad d_v g_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1}) \right) \\ d_y J(v, y) &= \left(d_y g_0(v^0, y^0) \quad d_y g_1(v^1, y^1) \quad \cdots \quad d_y g_T(y^T) \right) \end{aligned}$$

2.2.2. Método do linearizado

Substituíndo en 1.14 os gradientes de F coma se expuxeron anteriormente, obtense que:

$$d_y F(v, y(v)) d_v y(v) = -d_v F(v, y(v))$$

$$\begin{pmatrix} I_{m_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -d_y f_0(v^0, y^0) & I_{m_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d_y f_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1}) & I_{m_T} \end{pmatrix} d_v y(v) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_v f_0(v^0, y^0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_v f_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1}) \end{pmatrix}$$

Por inducción na expresión anterior pode verse que, $d_{v^i} y^t = 0$ se $t < i$. Isto, xunto con que $d_v y^t = (d_{v^0} y^t | d_{v^1} y^t | \dots | d_{v^T} y^t)$ permite concluír que:

$$d_{v^i} y^t = \begin{cases} d_y f_{t-1}(v^{t-1}, y^{t-1}) d_{v^i} y^{t-1} & \text{se } i = 0, \dots, t-2 \\ d_y f_{t-1}(v^{t-1}, y^{t-1}) & \text{se } i = t-1 \\ 0 & \text{se } i \geq t \end{cases}$$

Substituíndo en 1.11 coa forma das diferenciais de J exposta anteriormente, e co $d_v y$ que se acaba de calcular, obtense:

$$\begin{aligned} d\tilde{J}(v) &= d_v J(v, y(v)) + d_y J(v, y(v)) d_v y(v) \implies \\ d_{v,i} \tilde{J}(v) &= d_v g_i(v^i, y^i) + \sum_{t=i+1}^T d_y g_t(v^t, y^t) d_{v,i} y^t. \end{aligned}$$

Observación 2.6. Na igualdade anterior pode verse que non é preciso almacenar todos os valores de $y(v)$, xa que, tanto y^t coma $d_v y^t$ só se empregan no cálculo de y^{t+1} , $d_v y^{t+1}$, $d_v g_t(v^t, y^t)$ e $d_y g_t(v^t, y^t) d_v y^t$. Todos estes cálculos poden realizarse na mesma etapa, e incorporando os dous últimos a $d\tilde{J}(v)$, non se precisarán en etapas posteriores.

Observación 2.7. Ao indicar que se incorporan $d_v g_t(v^t, y^t)$ e $d_y g_t(v^t, y^t) d_v y^t$, enténdese que se engaden como $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \nabla_v g_t(v^t, y^t) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} d_y g_t(v^t, y^t) d_{v,1} y^t & \dots & d_y g_t(v^t, y^t) d_{v,t-1} y^t & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, comezando a primeira na posición $\sum_{i=0}^{t-1} n_i$.

Algoritmo 2.8 (Método do linearizado evolutivo).

Avaliar $dif = d_v g_0(v^0, y^0)$.

Definir $d_v y^0 = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$.

for $t = 0$ to $T - 1$ **do**

Calcular $d_v y^{t+1} = \begin{pmatrix} d_y f_t(v^t, y^t) d_v y^t & d_v f_t(v^t, y^t) \end{pmatrix}$.

Calcular $y^{t+1} = f_t(v^t, y^t)$.

if $t \neq T - 1$ **then**

Calcular $dif = \begin{pmatrix} dif + d_y g_t(v^{t+1}, y^{t+1}) d_v y^{t+1} & d_v g_{t+1}(v^{t+1}, y^{t+1}) \end{pmatrix}$.

else

Calcular $dif = dif + d_y g_T(y^T) d_v y^T$.

return dif

end if

end for

Observación 2.9. As expresións do tipo:

$$dif = \begin{pmatrix} dif + d_y g_t(v^{t+1}, y^{t+1}) d_v y^{t+1} & d_v g_{t+1}(v^{t+1}, y^{t+1}) \end{pmatrix}$$

representan a concatenación de vectores ou matrices, podendo entenderse estas como productos cartesianos. Por outra banda, a jacobiana baleira $d_v y^0$ indícase para representar que:

$$d_v y^1 = \begin{pmatrix} d_y f_0(v^0, y^0) d_v y^0 & d_v f_0(v^0, y^0) \end{pmatrix} = d_v f_0(v^0, y^0)$$

Observación 2.10. A dif devolta polo algoritmo anterior será a jacobiana de $\tilde{J}(v)$, polo que o gradiente será o seu transposto.

2.2.3. Método do adxunto

Substituíndo en 1.4 de forma análoga ao caso anterior:

$$d_y F(v, y(v))' \lambda = d_y J(v, y(v))' = \nabla_y J(v, y(v)) =$$

$$\begin{pmatrix} I_{m_0} & -d_y f'_0(v^0, y^0)' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{m_{T-1}} & -d_y f'_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1})' \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{m_T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^{T-1} \\ \lambda^T \end{pmatrix}$$

$$\implies \lambda^i = \begin{cases} \nabla_y g_i(v^i, y^i) + d_y f_i(v^i, y^i)' \lambda^{i+1} & \text{se } i = 0, \dots, T-1. \\ \nabla_y g_T(y^T) & \text{se } i = T. \end{cases}$$

Observación 2.11. Neste caso, ao calcular o adxunto, a matriz é invertible, ademais, por ser triangular superior, o sistema resólvese de maneira retrógrada (calcularanse de maneira sucesiva $\lambda^T, \lambda^{T-1}, \dots, \lambda^0$). Por isto, primeiro haberá que resolver todos os sistemas de estado, almacenar todos os valores de cada etapa, e despois calcular o adxunto.

De novo, procedendo de maneira análoga á sección anterior:

$$\nabla \tilde{J}(v) = \nabla_v J(v, y) - d_v F(v, y)' \lambda =$$

$$\nabla_v J(v, y) + \begin{pmatrix} 0 & d_v f_0(v^0, y^0)' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & d_v f'_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1})' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^{T-1} \\ \lambda^T \end{pmatrix}$$

o que permite unha expresión moi sinxela da diferencial de \tilde{J} en v : $\nabla_v \tilde{J}(v) = \nabla_v J(v, y) + d_v f_t(v^t, y^t)' \lambda^{t+1}$, onde $d_v \tilde{J}(v) = \begin{pmatrix} d_{v^0} \tilde{J}(v) & d_{v^1} \tilde{J}(v) & \cdots & d_{v^{T-1}} \tilde{J}(v) \end{pmatrix}$.

Observación 2.12. Da mesma forma que no capítulo 1, este método é computacionalmente menos custoso que o do linearizado, aínda que se precisa garda todo o estado (Observación 2.11), mentres que no do linearizado non. Isto pode ser unha desvantaxe considerable respecto do método do linearizado, sobre todo cando haxa moitos pasos de tempo.

Algoritmo 2.13 (Método do adxunto evolutivo).

for $t = 1$ to $T - 1$ **do**

 Calcular $y^{t+1} = f_t(v^t, y^t)$.

end for

Calcular $\lambda^T = \nabla_y g_T(y^T)$.

Calcular $\text{grad} = d_v g_{T-1} + d_v f_{T-1}(v^{T-1}, y^{T-1})' \lambda^T$.

for $t=T-1$ to 1 **do**

 Calcular $\lambda^t = \nabla_y g_t(v^t, y^t) + d_y f_t(v^t, y^t)' \lambda^{t+1}$.

 Calcular $grad = \begin{pmatrix} \nabla_v g_{t-1}(v^{t-1}, y^{t-1}) + d_v f_{t-1}(v^{t-1}, y^{t-1})' \lambda^t \\ grad \end{pmatrix}$.

end for

2.3. Exemplo do crecemento dunha poboación bacteriana

O obxectivo desta sección será estudar o crecemento dunha poboación bacteriana, onde ao tamaño desta poboación no instante x se lle denotará por $y(x)$. Como se pode ver en [8], é habitual que se modele o crecemento (nun tempo continuo) mediante un modelo loxístico:

$$d_x y(x) = y(x)(a - by(x)).$$

Neste modelo a é o ratio de crecemento e b é o ratio de decaemento. Considerando unha discretización uniforme do intervalo onde y esta definida, $x_0 < x_1 < \dots < x_T$, poderá empregarse o método de Euler explícito para aproximar o valor do tamaño nun instante x_{t+1} , $y(x_t) = y^t$, en base ao do tamaño anterior:

$$y^{t+1} \approx y^t((a + 1) - by^t).$$

Observación 2.14. Habería que multiplicar a e b pola distancia entre os puntos da discretización, h , pero este modelo é o mesmo que ao considerar a ecuación anterior con $\tilde{a} = ha$ e $\tilde{b} = hb$.

Consideraranse como variables de estado os tamaños poboacionais estimados polo modelo anterior, $y^{t+1} = f(v^t, y^t) = y^t((1 + v_1) - v_2 y^t)$, onde o control consiste nos ratios de crecemento e decaemento, que se pretenderán estimar: $v^t = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}'$, v_1 representa o ratio de crecemento, e v_2 o de decaemento.

Neste contexto realizarase un estudo semellante ao do Exemplo 1.4.2, considerando observacións tomadas nos puntos da discretización anterior: $y_{obs}^0, \dots, y_{obs}^T$, obtidas tomando os valores estimados polo modelo anterior para $a = 0,5$ e $b = 0,3$, e engadíndolles ruído, en forma de normal de media 0 e desviación típica 0.1 (empregarase a mesma librería de Matlab que no exemplo anterior). Ao tomar a observación inicial coma un dato do modelo sobre o que non se considerará o ruído (tomarase $y_{obs}^0 = 0,25$), xa que será necesaria para a boa definición do estado. Entón, a construción das observacións consiste en: $y_{obs}^{t+1} = f\left(\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}', y_{obs}^t\right) + N(0, 0,1)$, para $t = 0, \dots, T - 1$.

Da mesma forma que no exemplo anteriormente mencionado, o funcional custo será o que da lugar á minimización por mínimos cadrados: $\tilde{J}(v) = J(v, y) = \sum_{t=1}^T (y^t - y_{obs}^t)^2$. Co que os custos asociados a cada instante serán: $g_0(v^0, y^0) = 0$, $g_t(v^t, y^t) = (y^t - y_{obs}^t)^2$ para $t = 1, \dots, T - 1$ e $g_T(y^T) = (y^T - y_{obs}^T)$.

A continuación calcularanse os gradientes dos custos asociados a cada instante: $d_y g_0(v^0, y^0) = 0$, $d_y g_t(v^t, y^t) = 2(y^t - y_{obs}^t)$ para $t = 1, \dots, T-1$, $d_y g_T(y^T) = 2(y^T - y_{obs}^T)$ e $d_v g(v^t, y^t) = 0$ para $t = 0, \dots, T-1$.

As jacobianas do sistema de estado en cada etapa serán: $d_v f_t(v^t, y^t) = \begin{pmatrix} y^t & -(y^t)^2 \end{pmatrix}$ e $d_y f_t(v^t, y^t) = (a+1) - 2by^t$, para $t = 0, \dots, T-1$.

Observación 2.15. Este problema non encaixa exactamente nos presentados neste capítulo, posto que o control non depende da etapa, polo que podería definirse $\hat{J} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que cumpre que $\hat{J}(\tilde{v}) = \tilde{J}(v)$, onde $v^t = \tilde{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}'$ para todo $t = 0, \dots, T-1$. Tendo isto en conta, é facilmente demostrable que: $\nabla \hat{J}(\tilde{v}) = \sum_{t=0}^{T-1} \nabla_{v_t} \tilde{J}(v)$.

Ao implementar este exemplo, a estimación que se ten dos ratios de crecemento e decaemento son: $\hat{a} = 0,516$, e $\hat{b} = 0,282$, que constitúen boas aproximacións dos parámetros reais ($a = 0,5$ e $b = 0,3$). Na figura 2.1 poden verse representados os modelos que resultan de considerar os ratios estimados e os orixinais, ademais de comprobarse que o modelo estimado aproxima mellor os valores observados ($\hat{J}(\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}') = 0,732$ mentres que $\hat{J}(\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \end{pmatrix}') = 0,356$).

Observando o crecemento da poboación bacteriana, pode verse o comportamento clásico dun modelo loxístico, xa que a poboación comeza crecendo a gran velocidade nas primeiras etapas, pero unha vez chega a un tamaño poboacional suficientemente grande estabilízase (1,8 aproximadamente no modelo estimado e 1,6 no modelo exacto), reducindo o crecemento ata chegar a un punto case estacionario.

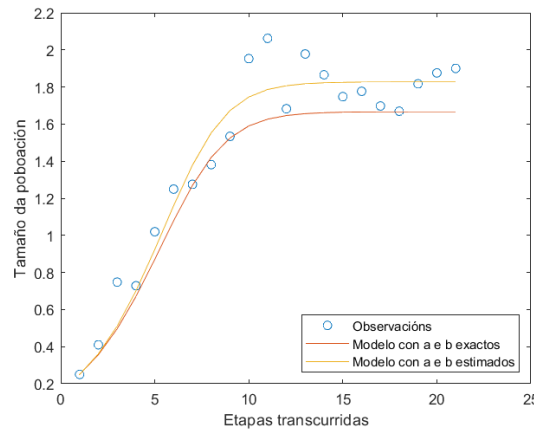


Figura 2.1: Comparación dos modelos teórico e estimado para o axuste da poboación bacteriana

Capítulo 3

Control óptimo en ecuacións diferenciais ordinarias

Os problemas de optimización que se tratarán neste capítulo serán aqueles onde tanto o control coma o estado son funcións definidas nun intervalo. De igual forma que nos capítulos anteriores, estes terán as súas respectivas dimensións, mais neste caso, o sistema de estado virá dado coma unha ecuación diferencial ordinaria (EDO) dependente do control.

Estes problemas poderán verse coma unha extensión dos tratados no capítulo anterior, tendo un estado e control para cada valor temporal dun intervalo, en lugar de para unha cantidade discreta deles. Baixo esta interpretación, a expresión do sistema de estado resulta natural, por ser a mellor maneira de expresar en tempo continuo a dependencia do estado nun instante respecto de si mesmo e do control no “instante inmediatamente anterior”. Da mesma forma, a aditividade do funcional custo nun intervalo representarase mediante unha integral.

3.1. Notación e formulación do problema

Tendo en conta as consideracións anteriores, os problemas de control óptimo continuos que se tratarán poderán formularse como:

Atopar $u \in \mathcal{A} \subset \{v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n_v}\}$, tal que :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u) &= \min_{v \in \mathcal{A}} \tilde{J}(v) = \min_{v \in \mathcal{A}} J(v, y), \\ \text{con } J(v, y) &= \int_a^b g(x, v(x), y(x)) dx + g_T \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{e onde } y(\cdot) \text{ é a solución de : } \begin{cases} d_x y(x) = f(x, v(x), y(x)) \\ y(a) = y_a \text{ dado.} \end{cases}$$

Observación 3.1. A función de estado depende do control, pero aínda así na notación non aparecerá indicado, denotando esta función por y , e $y(x)$ cando se avalie nun instante.

Da mesma forma que no caso discreto evolutivo, engádese un custo terminal dependente unicamente do estado, xa que é frecuente buscar a proximidade a un estado final desexado. Ademais, neste caso, considérase que o control esta definido en todo o intervalo pechado, mais non hai diferencias entre considerar o control final ou non, xa que un único valor non modificará a EDO nin a integral.

Observación 3.2. O problema a resolver depende considerablemente de cal sexa o espazo de control \mathcal{A} . Para os resultados teóricos supórase que o espazo de control sexa $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^{n_v})$.

Observación 3.3. Supoñendo que $v \in \mathcal{C}$ e que $f \in \mathcal{C}^1$, estaranse nas condicións do teorema de Picard (A.18), polo que existirá un único estado que se corresponda co control v .

Neste caso, non se ten unha ferramenta tan útil coma o gradiente, xa que o problema se plantexa nun espazo vectorial de dimensión infinita. O modo polo que se abordará esta cuestión ao longo deste traballo consiste en aproximar o problema por outro onde si que se considere un espazo de control finitamente xerado, para o que se considerarán dúas estratexias posibles.

A primeira que se explorará, consistirá en considerar o problema que xorxe ao discretizar o problema continuo, e como este entrará no marco dos capítulos anteriores, poderá estudarse empregando os métodos propostos. A segunda estratexia consistirá en dar unha fórmula xeral para o cálculo da derivada direccional respecto a unha dirección, de maneira que ao aproximar o espazo do control por un de dimensión finita o cálculo do gradiente nese novo espazo realizarase calculando as direccionais respecto ás direccións da base. Algúns exemplos de espazos que aproximarán o do control poderán ser: o formado polos primeiros n termos dunha serie de Fourier, ou o dos splines de grao 1 para unha discretización dada.

Observación 3.4. Tanto f coma g dependen do estado e do control no instante x , polo que para abreviar notación obtarase por escribir $f(x, v, y) = f(x, v(x), y(x))$ e $g(x, v, y) = g(x, v(x), y(x))$, indicando unicamente a dependencia respecto da función, aínda que quedará implícita a avaliación destas no instante en cuestión. Ademais as diferenciais manterán este cambio na notación, xa que:

$$d_v f(x, v, y) (\delta v) = d_v f(x, v(x), y(x)) (\delta v(x)),$$

tamén cumpren isto da mesma forma $d_y f$, $d_v g$ e $d_y g$.

3.2. Tratamento discreto do problema

Como ben se dixo antes, a procura dun gradiente para a aproximación da solución desta clase de problemas provoca a necesidade de reducir a dimensión do espazo de control. Para isto, nesta sección o obxectivo será plantexar un problema discreto nos termos do capítulo 2, onde o novo problema será unha aproximación do problema continuo orixinal.

Para poder aproximar o problema (3.1) precisarase: discretizar o dominio, aproximar o valor tanto da integral (mediante un método de integración numérico que empregue o valor da función nes puntos) como do estado (mediante un método numérico de resolución de EDOs).

Os puntos da discretización escollida denotaranse por $a = x^0 < x^1 < \dots < x^T = b$, onde se introducirá a seguinte notación: $v^t = v(x^t)$ e $y^t = y(x^t)$.

Observación 3.5. Cando se vaia a implementar o método que se tratará nesta sección, empregárase a discretización onde os pasos estén equiespaciados: $x^t = a + h * t$, polo que $x^{t+1} - x^t = h \forall t = 0, \dots, T - 1$. Pero aínda así, os códigos e o desenvolvemento teórico realizarase de maneira que sexan compatibles con calquera discretización.

A aproximación da integral que aparece no custo realizarase mediante a regra do rectángulo no extremo esquerdo: $\int_a^b g(x, v(x), y(x)) dx \approx \sum_{t=0}^{T-1} g(x^t, v^t, y^t)(x^{t+1} - x^t)$. O custo obtido aproximando a integral por este método de integración numérica denotarase por \tilde{J}_h ou J_h segundo dependa do control unicamente, ou tamén do estado.

Observación 3.6. Este método de aproximación numérica ten orde 1 se $g \in \mathcal{C}^1$ (A.23), e empregar o extremo esquerdo permite que non apareza o control no custo terminal, J_h , que mantén a forma do capítulo anterior.

Finalmente, tamén será preciso unha aproximación dos valores que toma o estado nos puntos da discretización. O método empregado será o de Euler explícito: $\frac{y^{t+1} - y^t}{x^{t+1} - x^t} \approx d_x y(x^t) = f(x^t, v^t, y^t)$. Este método é de orde 1 e permite chegar á seguinte expresión: $y^{t+1} \approx y^t + (x^{t+1} - x^t)f(x^t, v^t, y^t)$. Como non se obterán os valores exactos de y^t para $t = 1, \dots, T$, a partir deste punto, y^t denotará á aproximación presentada anteriormente.

Observación 3.7. A aproximación polo método de Euler explícito é de orde 1 (A.24) e só depende dos valores do estado e control na etapa inmediatamente anterior, polo que de novo, o sistema de estado está dentro dos tratados en (2.1).

Denotando por

$$u_h = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \vdots \\ u^{T-1} \end{pmatrix}, v_h = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ \vdots \\ v^{T-1} \end{pmatrix} \text{ e } y_h = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^T \end{pmatrix},$$

O problema obtido ao discretizar 3.1 será o seguinte:

$$\begin{aligned} & \text{Ato par } u^0, \dots, u^{T-1} \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que} \\ & \tilde{J}_h(u_h) = \min_{v_h \in \mathbb{R}^{nT}} \tilde{J}_h(v_h) = J_h(v_h, y_h), \\ & \text{con } J_h(v_h, y_h) = \sum_{t=0}^{T-1} (x^{t+1} - x^t)g(x^t, v^t, y^t) + g_T(y^T), \\ & \text{e onde } y^0 = y_a, \quad y^{t+1} = y^t + (x^{t+1} - x^t)f(x^t, v^t, y^t) \text{ para } t = 0, \dots, T-1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observación 3.8. O problema anterior entra no marco dos problemas do capítulo 2 con $g_t(v^t, y^t) = (x^{t+1} - x^t)g(x^t, v^t, y^t)$ e $f_t(v^t, y^t) = y^t + (x^{t+1} - x^t)f(x^t, v^t, y^t)$. Isto permite a aplicación dos métodos presentados no capítulo anterior para a resolución deste problema discretizado, aproximando así a solución do problema continuo.

Observación 3.9. Tomando outras fórmulas de integración ou método de resolución de EDOs, poderíase mellorar a orde da aproximación. Para as EDOs existen múltiples métodos de Runge-Kutta que terían mellores propiedades, mentres que para a integración existen aproximacións cadráticas, entre outras. Por outra banda, ao empregar outros métodos é posible que tras a discretización non se estea no caso do capítulo 2, polo que habería que calcular o gradiente mediante as fórmulas do capítulo 1 ou estudar a forma que resultaría destas aproximacións para aproveitar as súas propiedades.

3.3. Tratamento continuo do problema

O enfoque anterior consistiu en aproximar o problema continuo mediante unha discretización do dominio, pero agora tratarase de estudar o problema orixinal mantendo a súa natureza continua.

A principal diferenza respecto ao enfoque anterior é que, ao non discretizar o dominio da función, non será posible obter un gradiente, como xa se mencionara. O que se poderá estudar neste caso será a derivada de $\tilde{J}(v)$ na dirección de $\delta v \in \mathcal{A}$, obsérvese que esta última tamén é unha función $\delta v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$.

A derivada direccional de \tilde{J} respecto de δv coincide, por definición, co resultado de aplicar a diferencial $d_v \tilde{J}(v)$ sobre δv . Aplicando as regras usuais de diferenciación chégase ao seguinte

resultado:

$$d_v \tilde{J}(v)(\delta v) = d_v J(v, y)(\delta v) + d_y J(v, y)(d_v y(\delta v)) \quad (3.3)$$

Ademais, as dúas derivadas direccionais do custo son facilmente obtibles a partir da fórmula de $J(v, y)$ que se presentou en (3.1):

$$\begin{aligned} d_v J(v, y)(\delta v) &= \int_a^b d_v g(x, v, y)(\delta v) dx \\ d_y J(v, y)(\delta y) &= \int_a^b d_y g(x, v, y)(\delta y) dx + d_y g_b(y(b))(\delta y(b)). \end{aligned}$$

Co que o custo pode expresarse como:

$$d_v \tilde{J}(v)(\delta v) = \int_a^b d_v g(x, v, y)(\delta v) dx + \int_a^b d_y g(x, v, y)(\delta y) dx + d_y g_b(y(b))(\delta y(b)). \quad (3.4)$$

Na ecuación anterior considerouse que $\delta y = d_v y(\delta v)$ para simplificar a notación, como $d_v J(v, y)$ e $d_y J(v, y)$ son coñecidos, esta é a única incógnita que hai que calcular para poder obter $d_v \tilde{J}(v)(\delta v)$ para δv dirección dada. Calcular δy para poder obter a derivada na dirección de δv pode considerarse coma unha interpretación continua do método do linearizado (1.3.1).

3.3.1. Método do linearizado continuo

Da mesma forma que no método do linearizado discreto obtíñase a expresión de $d_v y$ a partir do sistema de estado, no caso continuo obterase δy a partir da EDO que define o estado. Para isto, empregárase o seguinte resultado:

Teorema 3.10. *No problema (3.1) supoñendo que δy é a derivada direccional que se definiu antes, e que se cumpre a condición A.25, tense que δy é a única solución da seguinte EDO.*

$$\begin{aligned} d_x \delta y(x) &= d_v f(v, y, x)(\delta v(x)) + d_y f(v, y, x)(\delta y(x)), \\ \delta y(a) &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. A demostración deste teorema incluírase no anexo A.7 dada a súa tecnicidade. \square

Ao cálculo da derivada direccional mediante a substitución en (3.4) de δy pola obtida mediante o teorema anterior, chamaráselle método do linearizado continuo. A principal limitación deste método é que para o cálculo de cada direccional, este precisa resolver unha EDO multidimensional ($n_y \times n_v$) linear. Isto adoita ser un proceso bastante custoso, e volverá a motivar a busca dun método que reduza este custo.

3.3.2. Método do adxunto continuo

Da mesma maneira que no caso discreto, buscarase unha expresión que, dependa dunha función adxunta de menor dimensión que δy , e que permita substituír a parte da direccional de \tilde{J} respecto de δv que depende de δy .

Se no caso discreto para isto multiplicábase o sistema linearizado polo vector $\mu \in \mathbb{R}^{n_y}$, no caso continuo o procedemento será semellante, empregarase o produto escalar do espazo $L^2[a, b]$ coa derivada de δy respecto de x :

$$\int_a^b \mu'(x) d_x \delta y(x) dx \stackrel{(3.10)}{=} \int_a^b \mu' f_y(v, y, x)(\delta y) dx + \int_a^b \mu'(x) f_v(v, y, x)(\delta v) dx \quad (3.5)$$

Ao integrar por partes o termo á esquerda da igualdade, resulta:

$$\int_a^b \mu'(x) d_x(\delta y)(x) dx = \mu'(b) \delta y(b) - \int_a^b d_x \mu'(x) \delta y(x) dx.$$

Substituíndo e reagrupando en (3.5) obtense:

$$\int_a^b [d_x \mu'(x) + \mu'(x) d_y f(x, v, y)](\delta y) dx - \mu'(b) \delta y(b) = - \int_a^b \mu'(x) f_v(x, v, y)(\delta v) dx. \quad (3.6)$$

Observación 3.11. Ao integrar por partes, habería que engadir un termo $-\mu'(a) \delta y(a)$, pero este é nulo por selo $\delta y(a)$.

Lema 3.12. Ao considerar o problema (3.1) baixo a condición A.25 e considerar $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ como a única solución da seguinte EDO:

$$\begin{aligned} d_x \lambda'(x) + \lambda'(x) d_y f(x, v, y) &= d_y g(x, v, y) \\ \lambda'(b) &= -d_y g_b(y(b)), \end{aligned}$$

cúmprese a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \int_a^b [d_x \lambda'(x) + \lambda'(x) d_y f(x, v, y)](\delta y) dx - \lambda'(b) \delta y(b) &= \\ \int_a^b d_y g(x, v, y) (\delta y) dx + d_y g_b(y(b)) (\delta y(b)) & \end{aligned}$$

Á función solución da EDO do lema anterior chamaráselle estado adxunto e á EDO, sistema adxunto. Como se buscaba, o termo á esquerda da igualdade do lema anterior é a parte da direccional de \tilde{J} que depende de δy en (3.4), mentres que o da dereita coincide co de (3.6). Disto pode concluírse que ambos son iguais ao outro termo da igualdade desa observación, que cumprindo o desexado, non depende de δy .

Observación 3.13. A EDO anterior é linear, multidimensional vectorial (n_y) e retrógrada, xa que a condición inicial está no tempo final, $x = b$. Baixo a condición A.25, esta EDO sempre terá solución única pola proposición A.19. A diferenza de δy , λ non depende de δv , polo que só será preciso resolver unha EDO para poder calcular todas as direccionais nun punto.

Teorema 3.14. *No problema (3.1) baixo a condición A.25, e onde $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ esta definida segundo a EDO da observación anterior, tense a seguinte expresión da derivada direccional de \tilde{J} na dirección de δv :*

$$d_v \tilde{J}(v)(\delta v) = \int_a^b d_v g(x, v, y)(\delta v) dx - \int_a^b \mu'(x) d_v f(x, v, y)(\delta v) dx.$$

3.3.3. Aproximación do espazo de control

Coma xa se mencionara na sección 3.1, haberá que aproximar o espazo de control por un finitamente xerado \mathcal{A}_h , con base $\{\phi_i\}_{i=1}^n$.

En xeral, o gradiente nun espazo desta forma será:

$$\nabla \tilde{J}(v) = \begin{pmatrix} d_v \tilde{J}(v)(\phi_1) \\ d_v \tilde{J}(v)(\phi_2) \\ \vdots \\ d_v \tilde{J}(v)(\phi_n) \end{pmatrix}.$$

Observación 3.15. Nesta expresión pode verse a vantaxe que ten o método do adxunto respecto do linearizado, xa que como se viu na súa sección, o adxunto non depende da dirección dada, polo que so habería que resolver unha EDO linear. Por outra banda, no linearizado hai que resolver n EDOs lineares.

Dependendo do espazo considerado e do problema a tratar, pode haber casos onde o cálculo do gradiente anterior poida levarse a cabo de maneira exacta resolvendo de maneira analítica a EDO do estado adxunto e as integrais das direccionais do custo.

Por outra banda, en xeral, a resolución da EDO do estado adxunto pode realizarse empregando un método numérico e a integral das direccionais por un método de integración numérica. Ao elixir o método de integración numérica para empregar neste problema, haberá que ter en conta cal é o espazo de dimensión finita que se empregará para aproximar o de control, xa que a base deste pode permitir implementar o método de maneira máis eficiente (considerando o soporte dos elementos da base e propiedades semellantes).

Observación 3.16. Ao empregar para a resolución da EDO de calquera dos métodos presentados nesta sección o método de Euler explícito, chegarase a que o adxunto ou o linearizado serán os mesmos que ao considerar o problema discretizado. Se a maiores a integración se resolvese mediante a regra do rectángulo, o gradiente será o mesmo que o do problema da sección 3.2.

3.4. Exemplo: Modelo Carro-Péndulo

Neste exemplo considerarase un modelo carro-péndulo (en inglés, *cart-pole*), onde un vehículo que se mova nunha única dirección ten incorporado un péndulo, cuxo soporte é ríxido (a distancia entre o péndulo e o centro do carro é constante, l).

3.4.1. Formulación do problema

Ao estudar o movemento do sistema carro-péndulo, a variable sobre a que se poderán tomar decisións será a forza horizontal v que se aplica sobre o carro, pero as que permitirán unha observación máis directa do comportamento do sistema serán, tanto o ángulo θ do péndulo coma a posición no eixo de movemento do carro, p . Este modelo representase na figura 3.1:

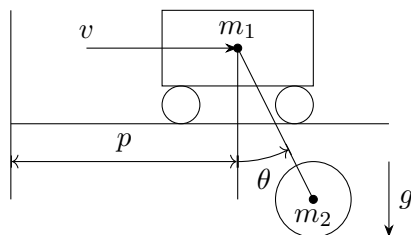


Figura 3.1: Diagrama de forzas do modelo carro-péndulo

Considerando que g é a gravidade, e que l é a lonxitude do soporte que conecta o péndulo ao carro, o modelo matemático que relaciona a forza, a posición e o ángulo, será o seguinte (estas ecuacións poden verse en [7]):

$$d_{xx}p(x) = \frac{lm_2 \operatorname{sen}(\theta)d_x\theta^2 + v + m_2g \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{m_1 + m_2(1 - \cos(\theta)^2)}$$

$$d_{xx}\theta(x) = -\frac{lm_2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)d_x\theta^2 + v \cos(\theta) + (m_1 + m_2)g \operatorname{sen}(\theta)}{l(m_1 + m_2(1 - \cos(\theta)^2))}$$

Observación 3.17. Neste modelo aparece a gravidade, denotada por g , o que podería causar confusión por empregar a mesma notación que para o custo, pero estes casos distinguíranse pola presenza ou ausencia de argumentos, xa que isto indicará se se trata dun funcional ou dun número real.

Para poder considerar este problema dentro dos tratados nesta sección haberá que incorporar as derivadas primeiras, xa que a EDO que se consideraba no estado era de segunda orde:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x) \\ d_x p(x) \\ \theta(x) \\ d_x \theta(x) \end{pmatrix}, \text{ onde o sistema de estado é:}$$

$$\begin{pmatrix} d_x y_1(x) \\ d_x y_2(x) \\ d_x y_3(x) \\ d_x y_4(x) \end{pmatrix} = f(x, v, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{lm_2 \operatorname{sen}(y_3) y_4^2 + v + m_2 g \cos(y_3) \operatorname{sen}(y_3)}{m_1 + m_2 (1 - \cos(y_3)^2)} \\ y_4 \\ -\frac{lm_2 \cos(y_3) \operatorname{sen}(y_3) y_4^2 + v \cos(y_3) + (m_1 + m_2) g \operatorname{sen}(y_3)}{l(m_1 + m_2 (1 - \cos(y_3)^2))} \end{pmatrix}.$$

Neste problema, o que se buscará será minimizar a forza aplicada ao longo do tempo, á vez que se busca que o péndulo remate nunha posición estable enriba do carro, con este nunha posición determinada d . Isto podería considerarse coma unha restrición, pero nesta implementación optouse por incorporalo coma unha penalización sobre o funcional custo no tempo final ($k_1 = k_2 = k_3 = 500$):

$$\tilde{J}(v) = J(v, y) = \int_a^b v(x)^2 dx + k_1 (y_1(b) - d)^2 + k_2 (y_3(b) - \pi)^2 + k_3 (y_4(b))^2.$$

Observación 3.18. Baixo estas condicións, o problema xa esta formulado de maneira que encaixa no marco deste capítulo, onde $g(x, v, y) = v(x)^2$ e $g_b(y(b)) = k_1 (y_1(b) - d)^2 + k_2 (y_3(b) - \pi)^2 + k_3 (y_4(b))^2$.

O único que se precisará para unha correcta implementación do método será a expresión das diferenciais das funcións que aparecen no custo e na ecuación do estado. Ao ter estas unhas expresións moi extensas, optouse por incluír estas diferencias no anexo A.8.

3.4.2. Implementación e interpretación dos resultados

Para a implementación do modelo consideráronse: $m_1 = 1kg$, $m_2 = 0,3kg$, $l = 0,5m$, $a = 0s$, $b = 2s$, $d = 1m$ e $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$, xa que son os que se empregan no exemplo de [7], o que permitirá comparar os resultados cos do artigo. Para a súa resolución considerárase o problema discretizado (a discretización do intervalo é uniforme con paso $h = 0,01$) coma se viu na sección 3.2.

Na figura 3.2 represéntase a evolución das variables do estado do modelo anterior (excepto a velocidade do carro), e neste pode verse que as restricións impostas cúmprense de maneira aproximada: $y_1(b) - d = -0,002$, $y_3(b) - \pi = -0,049$ e $y_4(b) = 0,008$.

Comparando a figura 3.3 coa que aparece na sección 6.8 de [7], pode verse que o control ten un comportamento cualitativo e magnitude semellante, sendo a principal diferenza que o aquí implementado ten un descenso máis abrupto ao final. Este parecido tamén se conserva na gráfica

de evolución do ángulo (3.2), habendo no caso da posición do carro diferencias máis notables. Podendo deberse estas á escolla de diferentes pasos de discretización ou ao non cumprimento estrito das restricións finais.

Complétase o estudo do movemento do sistema coa figura 3.4, onde se pode ver o movemento óptimo calculado e como coincide co representado no artigo en cuestión.

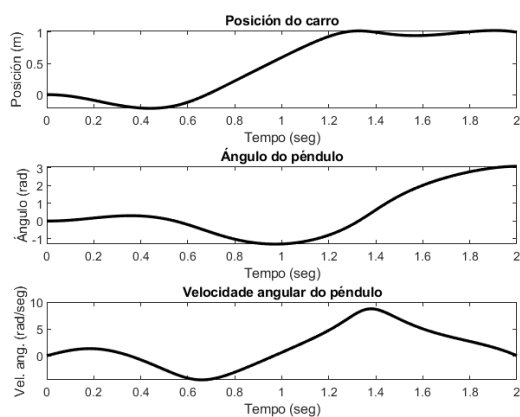


Figura 3.2: Representación das principais variables de estado do modelo carro-péndulo en función do tempo

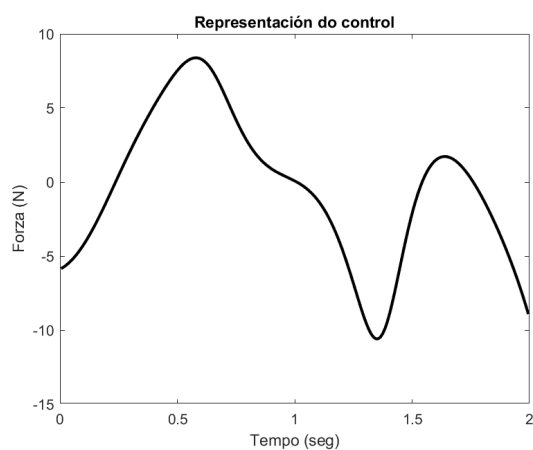


Figura 3.3: Representación da forza aplicada sobre o modelo carro-péndulo en función do tempo

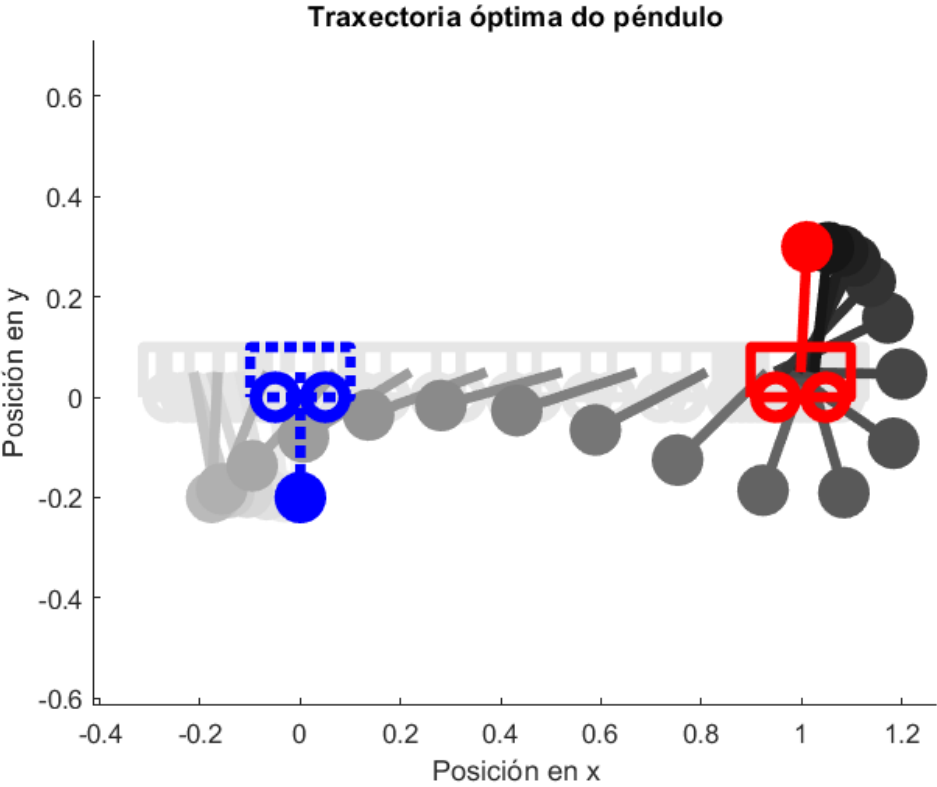


Figura 3.4: Movimento óptimo do modelo carro-péndulo

Anexo A

Anexo de contidos

A.1. Notación matricial

Notación A.1. Sexan $v \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, entón denótanse por v' e A' aos seus respectivos traspostos, da mesma forma, se $n = m$ e A é invertible, denotarase por A^{-1} á súa inversa.

Teorema A.2. *Sexa $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, as seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. *A matriz A é invertible.*
2. *O rango de A é n .*
3. *A matriz A é inxectiva.*
4. $\det(A) \neq 0$.

(Este resultado é o teorema 2.4.1 de [6], a inxectividade dedúcese da definición de rango).

A.2. Notación e resultados de cálculo diferencial

Notación A.3. Cando se teña unha función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, á súa matriz jacobiana en $v \in \mathbb{R}^n$ denotáraselle por $df(v) = \begin{pmatrix} d_1 f_1(v) & \dots & d_n f_1(v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 f_m(v) & \dots & d_n f_m(v) \end{pmatrix}$, onde $d_i f_j(v) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(v)$.

A súa vez, se $v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, con $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, entón

$$d_u f(v) = \begin{pmatrix} d_1 f_1(v) & \dots & d_{n_u} f_1(v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 f_m(v) & \dots & d_{n_u} f_m(v) \end{pmatrix}, d_w f(v) = \begin{pmatrix} d_{n_u+1} f_1(v) & \dots & d_n f_1(v) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n_u+1} f_m(v) & \dots & d_n f_m(v) \end{pmatrix}.$$

Notación A.4. Cando un funcional $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sexa diferenciable, ao seu gradiente denotáraselle

$$\text{por } \nabla J(v) = \begin{pmatrix} d_1 J(v) \\ \vdots \\ d_n J(v) \end{pmatrix} = dJ(v)'.$$

Proposición A.5 (Regra da cadea). *Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ son diferenciables e $f(U) \subset V$, entón $dh(u) = dg(g(u))df(u)$ para calquera $u \in U$, onde $h = g \circ f$.*

(É o teorema 9.15 de [10].)

Teorema A.6 (Teorema dos incrementos finitos de Lagrange). *Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U , que é un conxunto aberto e convexo, entón, $f(u) - f(v) = df(w)(u - v)$ para algún $w \in [u, v]$, entendendo que $[u, v] = \{\alpha u + (1 - \alpha)v : \alpha \in (0, 1)\}$.*

(É o teorema 5.9 de [10] considerando a derivada direccional.)

Teorema A.7 (Teorema de Taylor de primeira orde). *Sexa $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en $u_0 \in U$, entón $f(u_0 + u) = f(u_0) + df(u_0)u + o(u)$, onde o representa unha función que cumpre que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{o(u)}{\|u\|} = 0$.*

(É o teorema 2 do capítulo 3 de [9].)

Teorema A.8 (Teorema da función implícita). *Sexa $f \in C^1(E, \mathbb{R}^{n_v})$, onde $E \subset \mathbb{R}^{n_v+n_w}$ é un conxunto aberto. Se para un $(a, b) \in E$, con $a \in \mathbb{R}^{n_v}$ e $b \in \mathbb{R}^{n_w}$, $f(a, b) = 0$ e $d_v f(a, b)$ é invertible, entón existen abertos $U \subset \mathbb{R}^{n_v+n_w}$ e $W \subset \mathbb{R}^{n_w}$ que conteñen respectivamente a (a, b) e b , e unha aplicación $g \in C^1(W, \mathbb{R}^{n_v})$, de maneira que:*

1. $f(g(w), w) = 0$ para calquera $w \in W$.
2. Se $f(v, w) = 0$ para $(v, w) \in U$, entón $v = g(w)$.
3. $d_w g(b) = -d_v f(a, b)^{-1} d_y f(a, b)$.

(É o teorema 9.28 de [10].)

A.3. Definicións relativas a funcionais

Definición A.9. Un funcional $J : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ten un mínimo relativo en $u \in U$ se existe un aberto V en U que contén a u , tal que, $J(u) \leq J(v)$ para todo $v \in V$. O mínimo é absoluto se $J(u) \leq J(v)$ para todo $v \in U$.

Definición A.10. Un subconxunto C dun \mathbb{R} -espazo vectorial é convexo, se dados $x, y \in C$, entón $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$ para calquera $\alpha \in [0, 1]$.

Definición A.11. Un funcional $J : C \rightarrow \mathbb{R}$, onde C é un conxunto convexo, é convexo se, para todo $x, y \in C$, $J(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha J(x) + (1 - \alpha)J(y)$ para calquera $\alpha \in [0, 1]$. Se a desigualdade anterior é estrita para calquera $x \neq y$ e $\alpha \in (0, 1)$, dise que o funcional é estritamente convexo.

Definición A.12. Un funcional $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con Ω aberto, é coercivo se

$$\lim_{d(v, \delta\Omega) \rightarrow 0} J(v) = \infty, \quad \lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J(v) = \infty$$

Definición A.13. Unha función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é Lipschitziana en Ω se existe un $L > 0$ tal que: $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ para todo $x, y \in \Omega$. Se f é Lipschitziana en \mathbb{R} dirase que f é Lipschitziana.

Definición A.14. Un funcional $J \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é elíptico se existe $\alpha > 0$ tal que, $(dJ(v) - dJ(w))(v - w) \geq \alpha\|v - w\|^2$ para calquera $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.15. *Un funcional elíptico é coercivo e estritamente convexo.*

(É o teorema 2.7 de [12]).

Definición A.16. Dirase que un método de aproximación numérica iterativo ten un orde de converxencia linear con constante $0 < \beta < 1$ se:

$$\|u_{k+1} - u\| \leq \beta\|u_k - u\|,$$

onde u_k é a aproximación realizada na iteración k , e u á solución do problema a aproximar.

A.4. Resultados de EDOs

Proposición A.17. *Dada unha función $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $(x_0, y_0) \in A$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo I un intervalo, tal que $(x, \varphi(x)) \in A$ para todo $x \in I$. Entón, que φ sexa solución de:*

$$d_t y(x) = f(x, y(x))$$

$$y(x_0) = y_0,$$

equivale a que, $\varphi(x) = y_0 + \int_{t_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$.

(Este resultado coméntase antes da sección 6 de [13].)

Teorema A.18 (Teorema de existencia e unicidade de Picard). *Se $f \in \mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathbb{R}^n)$ e $d_y f \in \mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathcal{M}_{n \times n})$, onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b, \|y - y_0\| \leq M\}$, entón o problema de valor inicial:*

$$\begin{aligned} d_t y(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

ten unha única solución en $[a, b]$.

(A continuidade da jacobiana permite deducilo a partir da sección 3 do capítulo 6 de [11].)

Proposición A.19 (Existencia e unicidade da solución dunha EDO linear de primeira orde). *Sexan $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in [a, b]$. Entón, o problema de valor inicial:*

$$d_x y + g(x)y = h(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

ten unha única solución.

(É consecuencia inmediata do teorema anterior.)

A.5. Converxencia uniforme é integración

Definición A.20. Unha sucesión de funcións $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ converxe uniformemente a f en $I \subset [a, b]$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que: $\|f_m(x) - f(x)\| < \varepsilon$ para calquera $m \geq M$ e $x \in I$. Denotarase por $f_k \rightrightarrows f$.

Teorema A.21 (Converxencia uniforme e integración). *Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é unha sucesión de funcións Riemann-integrables nun intervalo $[a, b]$ e $f_n \rightrightarrows f$ en $[a, b]$, entón f é Riemann-integrable en $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$.*

(É o teorema 7.16 de [10], considerando a integral de Riemann.)

A.6. Métodos numéricos de integración e resolución de EDOs

Definición A.22. Un método de aproximación numérica, onde se realiza unha discretización $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, ten unha orde de converxencia k se, para h diámetro de discretización suficientemente pequeno, cúmprese que $\|u_h - u\| \leq Ch^k$ para algunha $C > 0$ constante (para todos os h suficientemente pequenos), onde u_h é o valor aproximado de u polo método numérico.

Dado un intervalo $[a, b]$, unha función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e unha discretización $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, a regra do rectángulo será un método numérico de integración que aproximará á integral de f no intervalo pola seguinte fórmula:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) f(\alpha_i),$$

onde $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Este método representará a aproximación mediante rectángulos de base $[x_i, x_{i+1}]$, e altura $f(\alpha_i)$.

Proposición A.23. *Se $f \in \mathcal{C}^1([x_i, x_{i+1}], \mathbb{R}^n)$ a regra do rectángulo ten unha orde de converxencia 1 (A.22).*

(Na sección 4.3 de [4] considerando un método de cadratura cun único punto.)

O método de Euler explícito será un método para a resolución do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} d_x y &= f(x, y) \\ y(a) &= y_a, \end{aligned}$$

definido no intervalo $[a, b]$, que para unha discretización $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, aproximará a derivada $d_x y(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$. Polo que se y_i é a aproximación que este método proporciona de $y(x_i)$, entón a contrución destas aproximacións consistirá en:

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) f(x_i, y_i).$$

Proposición A.24. *Se $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^n)$, entón o método de Euler explícito ten unha orde de converxencia 1 (A.22).*

(Dedúcese do desenvolvemento levado a cabo en 5.2 de [4].)

A.7. Demostración do teorema 3.10

Condición A.25. *Para a demostración deste teorema, ou en xeral, todo o tratamento continuo do capítulo 3, suporanse as seguintes hipóteses:*

- $f, g \in \mathcal{C}^1$.
- $n(\tilde{y}_n - y) \rightrightarrows \delta y$, onde \tilde{y}_n defínirase na demostración seguinte.
- A EDO do teorema 3.10 é linear, polo que terá solución única ao supoñer que o control é continuo, e que $f \in \mathcal{C}^2$, pola proposición A.19.

Notación A.26. Na demostración seguinte considerarase que:

$$f(x, v, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, v, y) \\ f_2(x, v, y) \\ \vdots \\ f_{n_y}(x, v, y) \end{pmatrix} \left| \right. y(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) \\ y^2(x) \\ \vdots \\ y^{n_y}(x) \end{pmatrix},$$

pero f_1 e y^1 non se deberán confundir cos que aparecen no contexto dos problemas de control dinámico discretos.

Algunhas ideas para esta demostración tomaronse do desenvolvemento realizado no capítulo 10 de [1].

Demostración. Sexan $y, \tilde{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ as respectivas solucións de:

$$\begin{array}{l|l} d_x y(x) = f(x, v, y) & d_x \tilde{y}_n(x) = f(x, v + \frac{\delta v}{n}, \tilde{y}_n) \\ y(a) = y_a, & \tilde{y}_n(a) = y_a. \end{array}$$

Vese claramente que $\delta y = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\tilde{y}_n - y)$, polo que para o cálculo de δy haberá que estudar a diferenca $\tilde{y}_n - y$.

Pola proposición A.17, tense que:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_a + \int_a^x f(s, v, y) ds, \\ \tilde{y}_n(x) &= y_a + \int_a^x f(s, v + \frac{\delta v}{n}, \tilde{y}_n) ds, \end{aligned}$$

polo que

$$\tilde{y}_n(x) - y(x) = \int_a^x f(s, v + \frac{\delta v}{n}, \tilde{y}_n) - f(s, v, y) ds.$$

Polo teorema dos incrementos finitos de Lagrange (A.6), tense que:

$$f_i(s, v + \frac{\delta v}{n}, \tilde{y}_n) = f_i(s, v + \frac{\delta v}{n}, y + (\tilde{y}_n - y)) = f_i(s, v + \frac{\delta v}{n}, y) + d_y f_i(s, v + \frac{\delta v}{n}, y + \alpha_n^i (\tilde{y}_n - y)) (\tilde{y}_n - y),$$

onde $\alpha_n^i \in [0, 1]$. Á súa vez, aplicando o teorema de Taylor de primeira orde (A.7), obtense que:

$$f_i(s, v + \frac{\delta v}{n}, y) = f_i(s, v, y) + d_v f_i(s, v, y) \left(\frac{\delta v}{n} \right) + o \left(\frac{1}{n} \right).$$

Ao aplicar estas igualdades na forma integral da diferenca entre $\tilde{y}_n^i(x) - y^i(x)$, obtense:

$$\tilde{y}_n^i(x) - y^i(x) = \int_a^b d_v f_i(s, v, y) \left(\frac{\delta v}{n} \right) + d_y f_i(s, v + \frac{\delta v}{n}, y + \alpha_n^i (\tilde{y}_n - y)) (\tilde{y}_n - y) ds$$

Para obter δy será preciso multiplicar por n a ambos lados e facer o límite:

$$\delta y^i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b d_v f_i(s, v, y) \delta v + d_y f_i(s, v + \frac{\delta v}{n}, y + \alpha_n^i (\tilde{y}_n - y)) n(\tilde{y}_n - y) ds.$$

Para poder chegar á EDO do enunciado do problema abondará con aplicar un resultado que permita introducir o límite dentro da integral, xa que a expresión integral é equivalente á EDO pola proposición A.17.

O teorema que se empregará para isto será o da converxencia uniforme e integración A.21, que se cumprirá neste caso, xa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_v f_i(s, v, y) \delta v + d_y f_i(s, v + \frac{\delta v}{n}, y + \alpha_n^i(\tilde{y}_n - y)) n(\tilde{y}_n - y) = d_v f_i(s, v, y) \delta v + d_y f_i(s, v, y) (\delta y)$$

é límite uniforme por selo $n(\tilde{y}_n - y) \rightrightarrows \delta y$, e $d_y f_i$ continua. \square

A.8. Expresión dos gradientes do exemplo 3.4

$$d_v g(x, v, y) = 2v, \quad d_y g(x, v, y) = 0, \quad d_x g(x, v, y) = 0,$$

$$d_y g(x, v, y)(\delta y) = \begin{pmatrix} 2k_1(y_1(b) - d) & 0 & 2k_2(y_3(b) - \pi) & 2k_3 y_4(b) \end{pmatrix}$$

$$d_v f(x, v, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1 + m_2(1 - \cos(y_3)^2)} \\ 0 \\ -\frac{\cos(y_3)}{l(m_1 + m_2(1 - \cos(y_3)^2))} \end{pmatrix},$$

$$d_y f_1(x, v, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_y f_3(x, v, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d_{y_1} f_2(x, v, y) = d_{y_1} f_4(x, v, y) = d_{y_2} f_2(x, v, y) = d_{y_2} f_4(x, v, y) = 0,$$

$$d_{y_3} f_2(x, v, y) = \frac{lm_2 \cos(y_3)(y_4)^2 + m_2 g \cos(y_2)^2 - m_2 g \sin(y_2)^2}{m_1 + m_2(1 - \cos(y_3))}$$

$$m_2 \cos(y_3) \sin(y_3) \frac{lm_2 \sin(y_3) y_4^2 + v + m_2 g \cos(y_3) \sin(y_3)}{(m_1 + m_2(1 - \cos(y_3)^2))^2}$$

$$d_{y_4} f_2(x, v, y) = \frac{2lm_2 \sin(y_3) y_4}{(m_1 + m_2(1 - \cos(y_3)^2))^2}$$

$$d_{y_3} f_4(x, v, y) = \frac{lm_2 \sin(y_3)^2 y_4^2 + v \sin(y_3) - lm_2 \cos(y_3)^2 y_4^2 - (m_1 + m_2)g \cos(y_3)}{l(m_1 + m_2(1 - \cos(y_3)^2))}$$

$$+ m_2 \sin(y_3) \cos(y_3) \frac{lm_2 \cos(y_3) \sin(y_3) y_4^2 + v \cos(y_3) + (m_1 + m_2)g \sin(y_3)}{l(m_1 + m_2(1 - \cos(y_3)^2))^2}$$

$$d_{y_4} f_4(x, v, y) = \frac{-2m_2 \cos(y_3) \sin(y_3) y_4}{m_1 + m_2(1 - \cos(y_3)^2)}$$

Bibliografía

- [1] L. T. Ashchepkov. *Optimal control*. Second edition. Cham, Switzerland: Springer, 2022.
- [2] D. P. Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control*. Belmont (Massachusetts): Athena Scientific, 1995.
- [3] D. P. Bertsekas. *Nonlinear programming*. 2nd ed. Belmont (Massachusetts): Athena Scientific, 1999 - 1995.
- [4] R. L. Burden e J. D. Faires. *Numerical analysis*. 7th. ed. Boston: Prindle, Weber Schmidt, 1985.
- [5] E. Cerdá Tena. *Optimización dinámica*. Madrid: Garceta, 2011.
- [6] E. Hernández Rodríguez et al. *Algebra lineal y geometría*. Tercera edición. Always learning. México D.F: Pearson Educación, 2012.
- [7] M. Kelly. “An Introduction to Trajectory Optimization: How to Do Your Own Direct Collocation.” En: *SIAM Review* 59.4 (2017), pp. 849–904.
- [8] H.-Y. Liao, B.-Q. Ai e L. Hu. “Effects of multiplicative colored noise on bacteria growth”. En: *Brazilian Journal of Physics* 37 (set. de 2007), pp. 1125–1128.
- [9] J. E. Marsden e A. Tromba. *Cálculo vectorial*. 6ª ed. Ciudad de México: Pearson Educación, 2018.
- [10] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd. New York: McGraw-Hill, 1976.
- [11] G. F. Simmons. *Differential equations : with applications and historical notes*. Third edition. Textbooks in mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2017 - 2017.
- [12] J. M. Viaño Rey e M. Burguera González. *Lecciones de métodos numéricos. 4, Optimización*. Santiago de Compostela: Andavía Editora, 2013.
- [13] W. Walter. *Ordinary Differential Equations*. 1st ed. 1998. Graduate Texts in Mathematics, 182. New York, NY: Springer New York, 1998.