

# TOPOLOXÍA DOS ESPAZOS EUCLIDIANOS

---

José Antonio Oubiña Galiñanes e María Elena Vázquez Abal

*Esta é unha versión imprimible das presentacións utilizadas para impartir a materia "Topoloxía dos Espazos Euclidianos" no primeiro curso do Grao de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela en 2022.*

## Contidos

- 1 Os espazos euclidianos
- 2 A topoloxía do espazo euclidiano
- 3 Converxencia e completude
- 4 Continuidade
- 5 Conexión
- 6 Compacidade

## Bibliografía

- 1 Díaz Ramos, J.C., Topoloxía dos espazos euclidianos. Minerva, USC, 2021.  
<http://hdl.handle.net/10347/25150>
- 2 Masa Vázquez, X.M., Curso de topoloxía: dos números reais ao Grupo de Poincaré. USC Editora. Manuais. USC, 2020.

# **1. Os espazos euclidianos**

## 1.1 NOTACIÓN

Recordamos as notacións para os conxuntos

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais,

$\mathbb{Z}$  dos números enteiros,

$\mathbb{Q}$  dos números racionais,

$\mathbb{R}$  dos números reais.

En particular,  $\mathbb{R}$  é un corpo ordenado que ten a propiedade arquimediana, e  $\mathbb{Q}$  é denso en  $\mathbb{R}$ .

Denotaremos  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

## 1.2 (O espazo euclidiano $n$ -dimensional)

O **espazo euclidiano de dimensión  $n$**  (ou  **$n$ -dimensional**) é o conxunto

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \binom{n}{.} \times \mathbb{R} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

A súa estrutura natural de espazo vectorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$  está dada polas operacións de suma en  $\mathbb{R}^n$  e produto por escalares reais:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{+} \mathbb{R}^n$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}),$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},$$

$\mathbf{0} = (0, \binom{n}{.}, 0)$  é o elemento neutro para +,

o elemento oposto de  $\mathbf{x}$  é  $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$ ,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x},$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{x},$$

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### 1.3 DEFINICIÓN (O PRODUTO ESCALAR EUCLIDIANO)

O *produto escalar euclidiano* en  $\mathbb{R}^n$  é a aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

### 1.4 PROPIEDADES (DO PRODUTO ESCALAR)

(a) É unha aplicación bilineal:  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle,$$

$$\langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \cdot \mathbf{y} \rangle.$$

(b) É unha aplicación simétrica:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

(c) É unha aplicación definida positiva:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$(a) \implies \langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mu \cdot \mathbf{y} \rangle = \lambda \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$(c) \implies \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

## 1.5 TEOREMA (Desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ)

Para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , tense

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle,$$

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right), \quad \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}.$$

### DEMOSTRACIÓN

Se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , a desigualdade verificase de maneira trivial:  $0 \leq 0$ . Podemos supoñer que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ . Agora, para calquera  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tense

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Se consideramos

$$\lambda = - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \in \mathbb{R},$$

entón

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2 \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle^2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}, \end{aligned}$$

e ao multiplicar os dous membros da desigualdade por o número real positivo  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ , obtense

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2,$$

equivalentemente,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle. \quad \blacksquare$$

## 1.6 DEFINIÇÃO (A NORMA EUCLIDIANA)

A *norma euclidiana* em  $\mathbb{R}^n$  é a aplicação

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz agora pôde-se escrever

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

## 1.7 PROPIEDADES (DA NORMA)

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(1) \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0; \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$(2) \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \quad \text{(homogeneidade)}$$

$$(3) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \text{(desigualdade de MINKOWSKI).}$$

### DEMOSTRAÇÃO

Imos usar as propriedades (a)-(c) do produto escalar, e a desigualdade de Minkowski vai ser consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

$$(1) \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq 0;$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = 0 \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \stackrel{(c)}{\iff} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$(2) \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} \stackrel{(a)}{=} \sqrt{\lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|.$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \stackrel{(a)}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &\stackrel{(a)}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &\stackrel{(C-S)}{\leq} \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \end{aligned}$$

$$\implies \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$



## 1.8 DEFINIÇÃO (A DISTANCIA EUCLIDIANA)

A *distancia euclidiana* en  $\mathbb{R}^n$  é a aplicación

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

e dise que  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é a **distancia entre os puntos**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

## 1.9 PROPIEDADES (DA DISTANCIA)

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

$$(I) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0; \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

$$(II) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad (\text{simetría})$$

$$(III) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad (\text{desigualdade triangular}).$$

### DEMOSTRACIÓN

Imos probalo como consecuencia das propiedades (1)-(3) da norma. En particular, a desigualdade triangular séguese da desigualdade de Minkowski.

$$(I) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \stackrel{(1)}{\geq} 0;$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \stackrel{(1)}{\iff} \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

$$(II) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \stackrel{(2)}{=} \|(-1)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

$$(III) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\| \\ \stackrel{(3)}{\leq} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$



## 1.10 DEFINICIÓNS (BÓLAS ABERTAS, BÓLAS PECHADAS)

Sexan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ .

A **bóla aberta** en  $\mathbb{R}^n$  de **centro**  $\mathbf{x}$  e **raio**  $r$  é o conxunto

$$B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) = B(\mathbf{x}, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, y) < r\}.$$

A **bóla pechada** en  $\mathbb{R}^n$  de **centro**  $\mathbf{x}$  e **raio**  $r$  é o conxunto

$$B_{\mathbb{R}^n}[\mathbf{x}, r] = B[\mathbf{x}, r] := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, y) \leq r\}.$$

## 1.11 OBSERVACIÓNS

- Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , entón  $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ .
- Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r, s \in \mathbb{R}^+$ ,  $r < s$ , entón

$$B(\mathbf{x}, r) \subset B[\mathbf{x}, r] \subset B(\mathbf{x}, s) \subset B[\mathbf{x}, s].$$

- Caso  $n = 1$ .
  - Se  $x \in \mathbb{R}$ , entón  $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$ ;  
para cada  $x, y \in \mathbb{R}$ , é  $d(x, y) = |x - y|$ .
  - Se  $x \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ , entón

$$B(x, r) = (x - r, x + r), \quad B[x, r] = [x - r, x + r].$$

Se  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , entón os intervalos abertos  $(a, b)$  e  $[a, b]$  son

$$(a, b) = (x - r, x + r), \quad [a, b] = [x - r, x + r],$$

onde

$$x = \frac{a + b}{2}, \quad r = x - a = b - x = \frac{b - a}{2}.$$

### 1.12 DEFINICIÓN (CONXUNTO ACOUTADO)

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $A$  é un conxunto **acoutado** se existen  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^+$ , tales que  $A \subset B(\mathbf{x}_0, r_0)$ .

### 1.13 PROPOSICIÓN (Caracterizacións dos conxuntos acoutados)

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ , as seguintes condicións son equivalentes:

- (i)  $A$  é acoutado,
- (ii)  $\exists r \in \mathbb{R}^+ \mid A \subset B(\mathbf{0}, r)$ ,
- (iii)  $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \|x\| \leq M \quad \forall x \in A$ .

#### DEMOSTRACIÓN

**(i)  $\Rightarrow$  (ii)**  $A$  acoutado  $\implies \exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, r_0 \in \mathbb{R}^+ \mid A \subset B(\mathbf{x}_0, r_0)$ .

Se  $\mathbf{x} \in A$ , pola desigualdade triangular da distancia,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) < r_0 + \|\mathbf{x}_0\|,$$

así que  $r = r_0 + \|\mathbf{x}_0\| > 0$  é tal que  $A \subset B(\mathbf{0}, r)$ .

**(ii)  $\Rightarrow$  (iii)**  $\mathbf{x} \in A \implies \|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < r$

$$\implies M = r \in \mathbb{R}^+ \text{ é tal que } \|\mathbf{x}\| \leq M \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

**(iii)  $\Rightarrow$  (i)** Se tomamos  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , entón  $r_0 = M + 1$  é tal que

$$\mathbf{x} \in A \implies d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\| \leq M < M + 1 \implies \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, M + 1),$$

logo, se poñemos  $r_0 = M + 1$ , tense que  $A \subset B(\mathbf{0}, r_0)$ , conque  $A$  é acoutado.

### 1.14 CUESTIÓN

¿É o conxunto baleiro  $\emptyset$  un conxunto acoutado?

### 1.15 DEFINIÇÃO (DIÁMETRO DUN CONXUNTO)

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é un conxunto acoutado,  $A \neq \emptyset$ , o *diámetro* de  $A$  é

$$\delta(A) = \sup\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}.$$

### 1.16 DEFINIÇÃO (DISTANCIA ENTRE CONXUNTOS)

Se  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ , a *distancia entre os conxuntos*  $A$  e  $B$  é

$$d(A, B) = \inf\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}.$$

## **2. A topoloxía do espazo euclidiano**

## 2.1 DEFINIÇÃO (CONJUNTO ABERTO)

Se  $U \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $U$  é un conxunto **aberto** en  $\mathbb{R}^n$  se cada punto de  $U$  é centro dunha bóla aberta contida en  $U$ , é dicir, se

$$\forall \mathbf{x} \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B(\mathbf{x}, r) \subset U.$$

Se dicimos que un subconxunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  é un **aberto** entenderemos que é aberto en  $\mathbb{R}^n$ . Consideraremos tamén abertos en subconxuntos de  $\mathbb{R}^n$ , pero en caso necesario especificaremos *onde un conxunto é aberto* para evitar ambigüidades.

## 2.2 PROPOSICIÓ

*Toda bóla aberta en  $\mathbb{R}^n$  é un conxunto aberto.*

### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^+$ . Para ver que  $U = B(\mathbf{x}_0, r_0)$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$  tomamos un punto arbitrario  $\mathbf{x} \in U$ , así que  $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < r_0$ , e vemos que se  $r = r_0 - d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) > 0$ , entón  $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r) &\implies \begin{cases} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r \quad (*) \\ d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \underbrace{d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + r}_{r = r_0 - d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} = r_0 \end{cases} \\ &\implies \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, r_0) = U. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.3 COROLARIO

*Calquera intervalo aberto acoutado  $(a, b)$  de números reais é aberto en  $\mathbb{R}$ .*

En efecto, se  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , e tomamos  $x_0 = (a + b)/2$  e  $r_0 = (b - a)/2$ , entón  $(a, b) = (x_0 - r_0, x_0 + r_0) = B_{\mathbb{R}}(x_0, r_0)$  é una bóla aberta en  $\mathbb{R}$ .

## 2.4 TEOREMA (Propiedades fundamentais dos conjuntos abertos)

- (i)  $\mathbb{R}^n$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $\emptyset$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) A unión de calquera familia de abertos en  $\mathbb{R}^n$  é un aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- (iv) A intersección finita de abertos en  $\mathbb{R}^n$  é un aberto en  $\mathbb{R}^n$ .

### DEMOSTRACIÓN

(i)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n$  (basta tomar  $r = 1$ )  
 $\implies \mathbb{R}^n$  é aberto.

(ii)  $\nexists \mathbf{x} \in \emptyset \mid \mathbf{x}$  non é centro de ningunha bóla aberta contida en  $\emptyset$   
 $\implies \emptyset$  é aberto.

(iii) Sexa  $\{U_i\}_{i \in I}$  unha familia de abertos e  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ .  
 $\mathbf{x} \in U \implies \exists j \in I \mid \mathbf{x} \in U_j \implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset U_j$   
 $\implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset U$   
 $\implies U = \bigcup_{i \in I} U_i$  é aberto.

(iv) Sexan  $U_1, \dots, U_k$  abertos e  $V = U_1 \cap \dots \cap U_k$ .  
 $\mathbf{x} \in V \implies \mathbf{x} \in U_i \quad \forall i = 1, \dots, k$   
 $\implies \exists r_i \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_i) \subset U_i \quad (\forall i = 1, \dots, k)$   
 $\implies r = \min \{r_1, \dots, r_k\} > 0$  é tal que  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset U_i \quad (\forall i)$   
 $\implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r) \subset V$ .  
 $\implies V = U_1 \cap \dots \cap U_k$  é aberto. ■

## 2.5 OBSERVACIÓN

A intersección dunha familia arbitraria de abertos non é necesariamente un aberto. Por exemplo,  $\{(-1/n, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é unha familia de abertos en  $\mathbb{R}$ , pero

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

non é aberto en  $\mathbb{R}$ .

## 2.6 EXEMPLO

Os intervalos abertos non acoutados de números reais son abertos en  $\mathbb{R}$ , xa que son unións de bólas abertas, logo unións de abertos:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, a + n),$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (b - n, b).$$

## 2.7 PROPOSICIÓN

Se  $U \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$U$  é aberto en  $\mathbb{R}^n \iff U$  é unión de bólas abertas en  $\mathbb{R}^n$ .

### DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad U \text{ aberto} &\implies \forall \mathbf{x} \in U \exists r_x \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x) \subset U \\ &\implies \{\mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x)\}_{\mathbf{x} \in U} \text{ familia de abertos, } \bigcup_{\mathbf{x} \in U} \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x) \subset U \\ &\implies \bigcup_{\mathbf{x} \in U} \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x) = U \text{ xa que} \\ &\quad \mathbf{y} \in U \implies \mathbf{y} \in \mathbf{B}(\mathbf{y}, r_y) \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in U} \mathbf{B}(\mathbf{x}, r_x). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Dado que as bólas abertas en  $\mathbb{R}^n$  son abertos e a unión de abertos é aberto, conclúese que  $U$  é aberto. ■

## 2.8 NOTA

Sexa  $X$  un conxunto e  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ .

Dise que  $\mathcal{T}$  é unha **topoloxía** en  $X$  se se verifican as seguintes condicións:

- (i)  $X \in \mathcal{T}$ ,
- (ii)  $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,
- (iii)  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $U_i \in \mathcal{T} \ \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ ,
- (iv)  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{T}$ .

Se  $\mathcal{T}$  é unha topoloxía en  $X$  dise que  $(X, \tau)$  é un **espazo topolóxico**, e os membros de  $\mathcal{T}$  chámanse **abertos** no espazo topolóxico  $(X, \mathcal{T})$ .

En particular,  $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n\}$  é unha topoloxía en  $\mathbb{R}^n$  que se chama a **topoloxía euclidiana** de  $\mathbb{R}^n$ . Así,  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$  é un espazo topolóxico, que se chama o **espazo topolóxico euclidiano**  $n$ -dimensional.

Se  $X$  é un conxunto calquera,  $\mathcal{P}(X)$  é unha topoloxía en  $X$  que se chama a **topoloxía discreta** de  $X$ , e  $(X, \mathcal{P}(X))$  dise que é un **espazo discreto**.

A **topoloxía indiscreta** dun conxunto  $X$  é  $\{X, \emptyset\}$ , e  $(X, \{X, \emptyset\})$  dise que é un **espazo indiscreto**.

## 2.9 DEFINICIÓN (CONXUNTO PECHADO)

Se  $F \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $F$  é un conxunto *pechado* en  $\mathbb{R}^n$  se o seu complementario  $\mathbb{R}^n \setminus F$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.10 OBSERVACIÓN

As propiedades de ser abertos e de ser pechados non son excluíntes: un conxunto pode ser aberto e pechado á vez, e pode non ser nin aberto nin pechado.

## 2.11 TEOREMA (Propiedades fundamentais dos conxuntos pechados)

- (i)  $\emptyset$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $\mathbb{R}^n$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) A intersección de calquera familia de pechados en  $\mathbb{R}^n$  é un pechado en  $\mathbb{R}^n$ .
- (iv) A unión finita de pechados en  $\mathbb{R}^n$  é un pechado en  $\mathbb{R}^n$ .

### DEMOSTRACIÓN

- (i)  $\emptyset$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  porque  $\mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n$  é aberto.
- (ii)  $\mathbb{R}^n$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  porque  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset$  é aberto.
- (iii) Se  $\{F_i\}_{i \in I}$  é unha familia de pechados en  $\mathbb{R}^n$ , por unha das leis de De Morgan,

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R}^n \setminus F_i)$$

é aberto en  $\mathbb{R}^n$  por ser unión de abertos, logo  $\bigcap_{i \in I} F_i$  é pechado.

- (iv) Se  $F_1, \dots, F_k$  son pechados en  $\mathbb{R}^n$ , entón  $F_1 \cup \dots \cup F_k$  é pechado, xa que o seu complementario é intersección finita de abertos:

$$\mathbb{R}^n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_k) = (\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cap \dots \cap (\mathbb{R}^n \setminus F_k).$$



## 2.12 PROPOSICIÓN

Toda bóla pechada en  $\mathbb{R}^n$  é un conxunto pechado.

### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^+$ , e consideremos a bóla pechada  $F = B[\mathbf{x}_0, r_0]$ . Debemos comprobar que  $\mathbb{R}^n \setminus F$  é aberto, así que tomamos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F$  e imos ver que é o centro dunha bóla aberta contida en  $\mathbb{R}^n \setminus F$ .

Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F$ , entón  $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) > r_0$ , e tense que se  $r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - r_0$ , entón  $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ , xa que

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r) &\implies d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) + r \\ &\implies d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) > d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - r = r_0 \\ &\implies \mathbf{y} \notin B[\mathbf{x}_0, r_0] \implies \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus B[\mathbf{x}_0, r_0]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.13 EXEMPLO

Calquera intervalo pechado de números reais  $[a, b]$  é un pechado en  $\mathbb{R}$ . Os intervalos  $[a, +\infty)$  e  $(-\infty, b]$  tamén son pechados en  $\mathbb{R}$ .

## 2.14 OBSERVACIÓN

A unión dunha familia arbitraria de pechados pode non ser un pechado. Por exemplo,  $\{[a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}^+}$  é unha familia de pechados en  $\mathbb{R}$ , pero a súa unión

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} [a, +\infty) = (0, +\infty)$$

non é pechado en  $\mathbb{R}$ .

### 2.15 DEFINICIÓN

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{x} \in X$  e  $r \in \mathbb{R}^+$ , a **bóla aberta en  $X$**  (ou bóla aberta *relativa* a  $X$ ) de **centro  $\mathbf{x}$**  e **raio  $r$**  é o conxunto

$$B_X(\mathbf{x}, r) := \{\mathbf{y} \in X \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\} = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \cap X.$$

### 2.16 DEFINICIÓN (ABERTO RELATIVO)

Se  $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $U$  é **aberto en  $X$**  (ou aberto *relativo* de  $X$ ) se

$$\forall \mathbf{x} \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_X(\mathbf{x}, r) \subset U.$$

### 2.17 PROPOSICIÓN

Se  $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$$U \text{ é aberto en } X \iff \exists V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid U = V \cap X.$$

### DEMOSTRACIÓN

$$\Rightarrow U \text{ aberto en } X \implies \forall \mathbf{x} \in U \exists r_x \in \mathbb{R}^+ \mid B_X(\mathbf{x}, r_x) \subset U.$$

O conxunto  $V = \bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_x)$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ , e tense:

$$V \cap X = \left( \bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_x) \right) \cap X = \bigcup_{\mathbf{x} \in U} (B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_x) \cap X) = \bigcup_{\mathbf{x} \in U} B_X(\mathbf{x}, r_x) = U.$$

$\Leftarrow$  Supoñemos  $U = V \cap X$ , onde  $V$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ . Entón

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in U &\implies \mathbf{x} \in V \xRightarrow{\substack{\text{V abto en } \mathbb{R}^n}} \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \subset V \\ &\implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_X(\mathbf{x}, r) = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \cap X \subset V \cap X = U, \end{aligned}$$

logo  $\forall \mathbf{x} \in U \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B_X(\mathbf{x}, r) \subset U$ , así que  $U$  é aberto en  $X$ . ■

## 2.18 DEFINICIÓN (PECHADO RELATIVO)

Se  $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , dise que  $F$  é **pechado en**  $X$  (ou pechado **relativo** de  $X$ ) se  $X \setminus F$  é aberto en  $X$ .

## 2.19 PROPOSICIÓN

Se  $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$$F \text{ é pechado en } X \iff \exists G \text{ pechado en } \mathbb{R}^n \mid F = G \cap X.$$

### DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad F \text{ é pechado en } X &\implies X \setminus F \text{ é aberto en } X \\ &\implies \exists V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid X \setminus F = V \cap X \\ &\implies F = X \setminus (V \cap X) = (\mathbb{R}^n \setminus V) \cap X \\ &= G \cap X, \quad G = \mathbb{R}^n \setminus V \text{ pechado en } \mathbb{R}^n. \\ \Leftarrow \quad F = G \cap X, \quad G \text{ pechado en } \mathbb{R}^n &\implies X \setminus F = X \setminus (G \cap X) \\ &= (\mathbb{R}^n \setminus G) \cap X, \quad \mathbb{R}^n \setminus G \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \\ &\implies X \setminus F \text{ aberto en } X \\ &\implies F \text{ pechado en } X. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.20 NOTA

Se  $C \subset X \subset \mathbb{R}^n$  e  $U$  é aberto en  $X$ , entón  $U \cap C$  é aberto en  $C$ , xa que

$$\begin{aligned}U \text{ aberto en } X &\implies \exists V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid U = V \cap X \\&\implies U \cap C = (V \cap X) \cap C = V \cap (X \cap C) = V \cap C \\&\implies U \cap C \text{ é aberto en } C.\end{aligned}$$

Analogamente, a intersección de calquera pechado en  $X$  con un subconxunto  $C$  de  $X$  é un pechado en  $C$ .

## 2.21 EXERCICIO

- ◇  $U$  aberto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset X \implies U$  aberto en  $X$ .
- ◇  $U$  aberto en  $X$ ,  $X$  aberto en  $\mathbb{R}^n \implies U$  aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- ◇  $F$  pechado en  $\mathbb{R}^n$ ,  $F \subset X \implies F$  pechado en  $X$ .
- ◇  $F$  pechado en  $X$ ,  $X$  pechado en  $\mathbb{R}^n \implies F$  pechado en  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.22 OBSERVACIÓN

A familia de abertos relativos dun subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é a **topoloxía relativa** de  $X$ :  $X$  e  $\emptyset$  son abertos en  $X$ , a unión de abertos en  $X$  é aberto en  $X$ , e a intersección finita de abertos en  $X$  é aberto en  $X$ .

As propiedades fundamentais dos pechados tamén se trasladan a  $X$ : o conxunto baleiro e  $X$  son pechados en  $X$ , a intersección arbitraria de pechados en  $X$  é pechado en  $X$ , e a unión finita de pechados en  $X$  é pechado en  $X$ .

## 2.23 NOTA

Un subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é un **conxunto discreto** se todos os subconxuntos de  $X$  son abertos en  $X$  (e, polo tanto, todos os subconxuntos de  $X$  tamén son pechados en  $X$ ), é dicir, se a topoloxía relativa de  $X$  é a topoloxía discreta.

## 2.24 EXERCICIO

Estúdese cales dos seguintes subconxuntos de  $\mathbb{R}$  son conxuntos discretos:

- $\{1, 2\}$ ,
- $\mathbb{N}$ ,
- $\mathbb{Z}$ ,
- $\mathbb{Q}$ ,
- $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,
- $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ .

## 2.25 DEFINICIÓNS

Sexan  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbf{x}$  é **punto interior** de  $A$  :  $\iff \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B(\mathbf{x}, r) \subset A$ ,

$\mathbf{x}$  é **punto clausura** (ou **adherente**) de  $A$  :  $\iff \forall r \in \mathbb{R}^+, B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Interior** de  $A$  :  $\text{Int}(A) = \overset{\circ}{A} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ é punto interior de } A\}$ ,

**Clausura** de  $A$  :  $\text{Cl}(A) = \bar{A} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ é punto clausura de } A\}$ .

## 2.26 EXERCICIO

$$\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A},$$

$$\mathbb{R}^n \setminus \bar{A} = (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$$

## 2.27 PROPIEDADES

Sexa  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

- O interior de  $A$  é o maior aberto en  $\mathbb{R}^n$  contido en  $A$ :
  - ◇  $\overset{\circ}{A} \subset A$ ,
  - ◇ Se  $U$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset A \Rightarrow U \subset \overset{\circ}{A}$ .
  - ◇  $\overset{\circ}{A}$  é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .
- $A$  é aberto en  $\mathbb{R}^n \iff A = \overset{\circ}{A}$ .
- A clausura de  $A$  é o menor pechado en  $\mathbb{R}^n$  que contén a  $A$ :
  - $A \subset \bar{A}$ ,
  - Se  $F$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$ .
  - $\bar{A}$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .
- $A$  é pechado en  $\mathbb{R}^n \iff A = \bar{A}$ .

## 2.28 DEFINICIÓN

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$x$  é **punto fronteira** de  $A$  :  $\iff \forall r \in \mathbb{R}^+$ ,  $\begin{matrix} B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset \\ B(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset. \end{matrix}$

**Fronteira** de  $A$ :  $\text{Fr}(A) = \partial(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ é punto fronteira de } A\}$ .

Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ , a **bóla perforada** de centro  $\mathbf{x}$  e raio  $r$  é

$$B^*(\mathbf{x}, r) = B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}.$$

## 2.29 DEFINICIÓN

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbf{x}$  é **punto de acumulación** de  $A$  :  $\iff \forall r \in \mathbb{R}^+$ ,  $B^*(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$

**Conxunto derivado** de  $A$ :  $A' := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ é punto de acumulación de } A\}$ .

## 2.30 EXERCICIO

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{x}$  é un punto de acumulación de  $A$ , entón toda bóla aberta en  $\mathbb{R}^n$  de centro  $\mathbf{x}$  contén infinitos puntos de  $A$ .

## 2.31 DEFINICIÓN

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$\mathbf{x}$  é **punto illado** de  $A$  :  $\iff \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid B(\mathbf{x}, r) \cap A = \{\mathbf{x}\}$ .

### **3. Converxencia e completude**

## 3.1 DEFINICIÓN (SUCESIÓN)

Unha **sucesión** nun conxunto  $X$  é unha aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{x}: \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ k &\longmapsto \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

e dise que  $\mathbf{x}_k$  é o *termo*  $k$ -ésimo da sucesión.

## 3.2 OBSERVACIÓN

A sucesión  $\mathbf{x}$  denotarase  $\{\mathbf{x}_k\}$ , e diremos que  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión en  $X$ .

O conxunto imaxe da sucesión  $\mathbf{x}: \mathbb{N} \longrightarrow X$  é  $\{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , e é habitual escribir  $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$  para dicir que o conxunto  $\{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  de termos da sucesión está contido nun subconxunto  $A$  de  $X$ .

## 3.3 DEFINICIÓN (CONVERXENCIA)

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Dise que a sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  **converxe** a  $\mathbf{x}_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \quad \forall k \geq N,$$

equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \forall k \geq N,$$

e escríbese  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0$  ou  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ .

Se unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X$  converxe a un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  dise que

$\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión **converxente**,  
 $\mathbf{x}_0$  é o **límite** da sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$ ,

e se  $\mathbf{x}_0 \in X$ , tamén diremos que  $\{\mathbf{x}_k\}$  é **converxente en  $X$**  ou que **converxe en  $X$** .

### 3.4 PROPOSICIÓN

Se unha sucesión é converxente, entón ten un único límite.

#### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X \subset \mathbb{R}^n$  e supoñamos que existen  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  que son límites de  $\{\mathbf{x}_k\}$ . Se  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{y}_0$ , entón  $r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) > 0$ , logo

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \implies \text{dado } \varepsilon = \frac{r}{2} > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \forall k \geq N_1,$$

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{y}_0 \implies \text{dado } \varepsilon = \frac{r}{2} > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in \mathbf{B}(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \forall k \geq N_2.$$

Polo tanto, se  $k \geq \max\{N_1, N_2\}$ , utilizando a desigualdade triangular, tense

$$r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_0) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

conque chegamos a unha contradición, así que debe ser  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$ . ■

### 3.5 PROPOSICIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Entón,

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \iff \forall U \text{ aberto en } \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_0 \in U, \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in U \forall k \geq N.$$

#### DEMOSTRACIÓN

⇒

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } U \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_0 \in U \implies \exists r \in \mathbb{R}^+ \mid \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, r) \subset U \\ \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \implies \text{dado } \varepsilon = r > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, r) \forall k \geq N \end{array} \right\} \\ \implies \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in U \forall k \geq N.$$

⇐

Dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar o aberto  $U = \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ , e ao aplicar a hipótese,

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in U = \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \forall k \geq N, \text{ logo } \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad \blacksquare$$

## PROPIEDAD DE HAUSDORFF

A unicidade do límite dunha sucesión converxente séguese da **propiedade de separación de Hausdorff**:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \exists U, V \text{ abertos} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \in U, \\ \mathbf{y} \in V, \end{array} \right. U \cap V = \emptyset,$$

polo que dicimos que o espazo euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é un **espazo Hausdorff**.

En efecto, se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , entón  $r = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ , e se tomamos  $\varepsilon = r/2 > 0$ , entón  $U = B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  e  $V = B(\mathbf{y}, \varepsilon)$  son abertos en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\mathbf{x} \in U, \mathbf{y} \in V, U \cap V = \emptyset$ .

### 3.6 OBSERVACIÓN

A converxencia dunha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X$  a un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  pódese expresar en termos da converxencia a 0 da sucesión de números reais  $\{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\}$ .

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 : &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \quad \forall k \geq N \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \forall k \geq N \\ &\iff \{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Por outra parte, imos ver que a converxencia dunha sucesión no espazo euclidiano  $\mathbb{R}^n$  está determinada pola converxencia de  $n$  sucesións de números reais.

Utilizaremos na proba un lema que relaciona a norma dun vector de  $\mathbb{R}^n$  e os valores absolutos das súas compoñentes.

### 3.7 LEMA

Se  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , entón

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |x_i| \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Polo tanto, se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , para cada  $i = 1, \dots, n$  tense

$$|x_i - y_i| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

### DEMOSTRACIÓN

A primeira desigualdade é inmediata:

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2} = \|\mathbf{x}\|.$$

Para probar a segunda desigualdade, se temos en conta que, para algún  $j = 1, \dots, n$ , é  $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |x_j|$ , tense

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{x_j^2 + \overset{(n)}{\dots} + x_j^2} \\ &= \sqrt{nx_j^2} = \sqrt{n} |x_j| = \sqrt{n} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.\end{aligned}$$



### 3.8 TEOREMA

Sea  $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\}$  una sucesión en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  un punto de  $\mathbb{R}^n$ . Entón,

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a} \iff \{x_{ki}\} \rightarrow a_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

#### DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$  Polo lema previo,  $|x_{ki} - a_i| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \quad \forall i = 1, \dots, n$ , logo

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a} &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \varepsilon \quad \forall k \geq N \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid |x_{ki} - a_i| \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \varepsilon \quad \forall k \geq N \\ &\implies \{x_{ki}\} \rightarrow a_i. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Dado  $\varepsilon > 0$ , consideramos  $\varepsilon/\sqrt{n} > 0$ , e usamos a hipótese: Para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\{x_{ki}\} \rightarrow a_i \implies \text{dado } \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0, \exists N_i \in \mathbb{N} \mid |x_{ki} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall k \geq N_i,$$

así que se tomamos  $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$ ,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) &\stackrel{3.7}{\leq} \sqrt{n} \max\{|x_{k1} - a_1|, \dots, |x_{kn} - a_n|\} \\ &< \sqrt{n} \max\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\} = \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

logo  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a}$ . ■

## 3.9 DEFINICIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión nun conxunto  $X$ , definida por  $\mathbf{x}: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

Se  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é unha aplicación estritamente crecente consideramos a composición

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \circ \varphi: \mathbb{N} &\rightarrow X \\ k &\mapsto \mathbf{x}_{\varphi(k)},\end{aligned}$$

e dise que  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  é unha **subsucesión** de  $\{\mathbf{x}_k\}$  (ou que  $\mathbf{x} \circ \varphi$  é unha **subsucesión** de  $\mathbf{x}$ ).

## 3.10 NOTA

Se  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é estritamente crecente, entón  $\varphi(k) \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

En efecto, por indución:

$\varphi(1) \geq 1$ , e se supoñemos que  $\varphi(k-1) \geq k-1$ , entón

$$k > k-1 \implies \varphi(k) > \varphi(k-1) \geq k-1 \implies \varphi(k) > k-1 \implies \varphi(k) \geq k.$$

## 3.11 PROPOSICIÓN

Se unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X \subset \mathbb{R}^n$  converge a  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , entón calquera subsucesión  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  de  $\{\mathbf{x}_k\}$  tamén converge a  $\mathbf{x}_0$ .

## DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \quad \forall k \geq N \\ &\quad \downarrow \varphi(k) \geq k \geq N \\ \mathbf{x}_{\varphi(k)} &\in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \quad \forall k \geq N \\ &\implies \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$



## 3.12 LEMA (Construción de sucesións converxentes)

Sexa  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sexa  $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, 1/k)$ . Entón,  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión que converxe a  $\mathbf{x}_0$ .

DEMOSTRACIÓN

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_k \in B\left(\mathbf{x}_0, \frac{1}{k}\right) \implies d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \frac{1}{k},$$

e polo teorema de compresión,

$$\begin{aligned} 0 \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \frac{1}{k} &\implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \text{ e } 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \\ &\implies \{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\} \rightarrow 0 \implies \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 3.13 PROPOSICIÓN

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , entón

$$\mathbf{x}_0 \in \bar{A} \iff \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } A \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \implies \mathbf{x}_0 \in \bar{A} &\implies \forall r > 0, B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset \implies \forall k \in \mathbb{N}, B(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \neq \emptyset \\ &\implies \forall k \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \\ &\implies \{\mathbf{x}_k\} \subset A \text{ es tal que } \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Lema 3.12

$$\begin{aligned} \impliedby \text{Para probar que } \mathbf{x}_0 \in \bar{A} \text{ imos ver que } \forall r > 0, B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset. \text{ Para isto,} \\ \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\implies \text{ dado } \varepsilon = r > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \forall k \geq N \\ &\implies \mathbf{x}_N \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \cap A \xrightarrow{\varepsilon=r} B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.14 COROLARIO

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$$A \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n \iff \forall \{x_k\} \text{ sucesión en } A, [ \{x_k\} \rightarrow x_0 \Rightarrow x_0 \in A ]$$

DEMOSTRACIÓN

$$\Rightarrow \text{ Se } \{x_k\} \text{ é sucesión en } A, \{x_k\} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^n \xRightarrow{\text{Proposición 3.13}} x_0 \in \bar{A} \xRightarrow{A \text{ pechado}} x_0 \in A.$$

$\Leftarrow$  Basta ver que  $\bar{A} = A$ , é dicir, que  $\bar{A} \subset A$ . Pois ben,

$$x_0 \in \bar{A} \xRightarrow{\text{Proposición 3.13}} \exists \{x_k\} \subset A \mid \{x_k\} \rightarrow x_0 \xRightarrow{\text{hipótese}} x_0 \in A. \quad \blacksquare$$

$$A \text{ non é pechado en } \mathbb{R}^n \iff \exists \{x_k\} \text{ sucesión en } A \mid \{x_k\} \rightarrow x_0 \notin A.$$

### 3.15 COROLARIO

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$$A \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n \iff \forall \{x_k\} \text{ sucesión en } \mathbb{R}^n \setminus A, [ \{x_k\} \rightarrow x_0 \Rightarrow x_0 \notin A ]$$

$$A \text{ non é aberto en } \mathbb{R}^n \iff \exists \{x_k\} \text{ sucesión en } \mathbb{R}^n \setminus A \mid \{x_k\} \rightarrow x_0 \in A.$$

### 3.16 COROLARIO

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , entón

$$x_0 \notin \overset{\circ}{A} \iff \exists \{x_k\} \text{ sucesión en } \mathbb{R}^n \setminus A \mid \{x_k\} \rightarrow x_0,$$

$$x_0 \in \overset{\circ}{A} \iff \forall \{x_k\} \text{ sucesión en } \mathbb{R}^n \setminus A, \{x_k\} \not\rightarrow x_0.$$

Séguese da proposición 3.13 e da igualdade  $\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ .

### 3.17 PROPOSICIÓN

Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A'$  o conjunto derivado de  $A$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Entón,

$$\mathbf{x}_0 \in A' \iff \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } A \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \end{array} \right.$$

DEMOSTRACIÓN



$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \text{ punto de acumulación de } A &\implies \forall r > 0, B^*(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset \\ &\implies \forall k \in \mathbb{N}, B^*(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \neq \emptyset \\ &\implies \forall k \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{x}_k \in B^*(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \\ &\implies \{\mathbf{x}_k\} \subset A \text{ é tal que } \begin{cases} \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0. \end{cases} \end{aligned}$$



Para comprobar que  $\mathbf{x}_0$  é punto de acumulación de  $A$  temos que ver que  $\forall r > 0, B^*(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset$ . Para isto, como por hipótese existe unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  que converge a  $\mathbf{x}_0$  e tal que os seus termos están todos en  $A$  e son todos distintos de  $\mathbf{x}_0$ , fixado  $\varepsilon = r > 0$  temos

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N} &\implies \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B^*(\mathbf{x}_0, r) \quad \forall k \geq N \\ &\implies \mathbf{x}_k \in B^*(\mathbf{x}_0, r) \cap A \quad \forall k \geq N \\ &\implies B^*(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$



## 3.18 DEFINICIÓN (SUCESIÓN DE CAUCHY)

Unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X \subset \mathbb{R}^n$  dise que é unha *sucesión de Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N.$$

## 3.19 PROPOSICIÓN

*Toda sucesión converxente é unha sucesión de Cauchy.*

### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X \subset \mathbb{R}^n$  converxente a un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , e fixamos  $\varepsilon > 0$ . Entón,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\implies \text{dado } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N \\ &\implies \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall k, l \geq N. \blacksquare \end{aligned}$$

## 3.20 PROPOSICIÓN

*O conxunto de puntos de calquera sucesión de Cauchy (e, polo tanto, de calquera sucesión converxente) é un conxunto acoutado.*

### DEMOSTRACIÓN

Se  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión de Cauchy,

$$\begin{aligned} \text{dado } \varepsilon = 1 &\implies \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < 1 \quad \forall k, l \geq N \\ &\implies d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_N) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N\| < 1 \quad \forall k \geq N \\ &\implies \|\mathbf{x}_k\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N\| + \|\mathbf{x}_N\| < 1 + \|\mathbf{x}_N\| \quad \forall k \geq N \\ &\implies \|\mathbf{x}_k\| \leq \max\{\|\mathbf{x}_1\|, \dots, \|\mathbf{x}_{N-1}\|, 1 + \|\mathbf{x}_N\|\} = M \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &\implies \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, M + 1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.21 PROPOSICIÓN

*Toda subsucesión dunha sucesión de Cauchy é unha sucesión de Cauchy*

#### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión de Cauchy e  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  unha subsucesión de  $\{\mathbf{x}_k\}$ , (onde  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é unha aplicación estritamente crecente).

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N \\ &\qquad\qquad\qquad \Downarrow \begin{array}{l} \varphi(k) \geq k \geq N \\ \varphi(l) \geq l \geq N \end{array} \\ &\qquad\qquad\qquad d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_{\varphi(l)}) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N \\ &\Rightarrow \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \text{ sucesión de Cauchy} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.22 PROPOSICIÓN

*Se unha sucesión de Cauchy  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X \subset \mathbb{R}^n$  ten unha subsucesión  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  que converxe a un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , entón  $\{\mathbf{x}_k\}$  tamén converxe a  $\mathbf{x}_0$ .*

#### DEMOSTRACIÓN

Temos que demostrar que  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \forall k \geq N$ .

Fixamos  $\varepsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} &\Rightarrow \text{dado } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k, l \geq N_1 \\ \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\Rightarrow \text{dado } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N_2. \end{aligned}$$

Se  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , e  $k \geq N$ , entón  $\varphi(k) \geq k \geq \max\{N_1, N_2\}$ , así que

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \leq \underbrace{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{\varphi(k)})}_{k, \varphi(k) \geq N_1} + \underbrace{d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_0)}_{\varphi(k) \geq N_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

### 3.23 DEFINICIÓN

Dise que un conxunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é **completo** se toda sucesión de Cauchy en  $X$  é converxente en  $X$ .

### 3.24 EXEMPLOS

- (a)  $\mathbb{Q}$  non é completo.
- (b)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  non é completo.
- (c)  $\mathbb{R}^+$  non é completo.
- (d)  $\mathbb{R}$  é completo.

### 3.25 TEOREMA (Completeness of $\mathbb{R}^n$ )

*O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é completo.*

#### DEMOSTRACIÓN

Consideramos unha sucesión de Cauchy  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $\mathbb{R}^n$ , e imos comprobar que existe  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a}$ , para o que utilizaremos o carácter completo de  $\mathbb{R}$ .

Poñemos  $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\}$ , e temos as sucesións  $\{x_{ki}\}$  de números reais,  $1 \leq i \leq n$ . Polo lema 3.7, tense

$$|x_{ki} - x_{li}| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\| = d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \quad \forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (\star)$$

e polo teorema 3.8,

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \iff \{x_{ki}\} \rightarrow a_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (\star\star)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N \\ &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid |x_{ki} - x_{li}| < \varepsilon \quad \forall k \geq N \\ &\quad (*) \\ &\implies \{x_{ki}\} \text{ é unha sucesión de Cauchy en } \mathbb{R}, \quad \forall i \\ &\implies \exists a_i \in \mathbb{R} \mid \{x_{ki}\} \rightarrow a_i, \quad \forall i \\ &\quad \mathbb{R} \text{ é completo} \\ &\implies \{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\} \rightarrow (a_1, \dots, a_n) = \mathbf{a}. \quad \blacksquare \\ &\quad (\star\star) \end{aligned}$$

### 3.26 PROPOSICIÓN

Se  $X$  é un subconxunto de  $\mathbb{R}^n$ , entón

$$X \text{ é completo} \iff X \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n.$$

#### DEMOSTRACIÓN

É consecuencia inmediata da caracterización ([corolario 3.14](#)) dun conxunto pechado en  $\mathbb{R}^n$  como aquel que contén ao límite de cada sucesión converxente de puntos no conxunto e de que  $\mathbb{R}^n$  é completo:

Se  $X$  é un subconxunto de  $\mathbb{R}^n$ , entón

$$X \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n \iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in X]$$

$$\iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \text{ converxente} \Rightarrow \{\mathbf{x}_k\} \text{ converge en } X]$$

$$\stackrel{\mathbb{R}^n \text{ completo}}{\iff} \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} \Rightarrow \{\mathbf{x}_k\} \text{ converge en } X]$$

$$\iff X \text{ é completo.}$$



## **4. Continuidade**

### 4.1 DEFINICIÓN (APLICACIÓN CONTINUA NUN PUNTO)

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación,  $\mathbf{x}_0 \in X$ .

Dise que  $f: X \rightarrow Y$  é **continua en  $\mathbf{x}_0$**  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \mathbf{x} \in X, d_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^m}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \varepsilon,$$

equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

### 4.2 OBSERVACIÓN

A continuidade de  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  non depende do codominio de  $f$ .

Se consideramos a aplicación

$$\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

e  $\mathbf{x}_0 \in X$ , tense que  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$  se, e só se,  $\tilde{f}$  é continua en  $\mathbf{x}_0$ , xa que, posto que  $f(X) \subset Y$ ,

$$f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \iff f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_{\mathbb{R}^m}(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Se, ademais,  $f(X) \subset Z \subset \mathbb{R}^m$ , xtamén ten sentido considerar a aplicación

$\bar{f}: X \rightarrow Z$  dada por  $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ , e tamén se ten

$$f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \iff \tilde{f} \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \iff \bar{f} \text{ é continua en } \mathbf{x}_0,$$

xa que

$$f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \iff f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Z(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

### 4.3 DEFINICIÓN (APLICACIÓN CONTINUA (globalmente))

Unha aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é **continua** se  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$  para cada punto  $\mathbf{x}_0 \in X$ .

### 4.4 EXEMPLOS

Son aplicacións continuas:

- Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , a aplicación **identidade** en  $X$ ,

$$\begin{aligned}\text{id}_X: X &\longrightarrow X \\ \mathbf{x} &\longmapsto \text{id}_X(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.\end{aligned}$$

- Se  $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ , a **inclusión** de  $X$  en  $Y$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{i}: X &\hookrightarrow Y \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{i}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.\end{aligned}$$

En particular, a inclusión de  $X$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{i}: X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ .

- As **aplicacións constantes**: se  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ , para calquera punto  $\mathbf{y}_0 \in Y$ , a aplicación constante

$$\begin{aligned}\text{cte}_{\mathbf{y}_0}: X &\longrightarrow Y \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{y}_0.\end{aligned}$$

O seguinte teorema será moi útil para comprobar, dunha forma simple, o carácter aberto e o carácter pechado de subconxuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

## 4.5 TEOREMA (Caracterizacións da continuidade global)

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  unha aplicación. Entón, as seguintes propiedades son equivalentes:

- (a) A aplicación  $f: X \rightarrow Y$  é continua.
- (b) A imaxe inversa  $f^{-1}(V)$  de cada aberto  $V$  en  $Y$  é un aberto en  $X$ .
- (c) A imaxe inversa  $f^{-1}(F)$  de cada pechado  $F$  en  $Y$  é un pechado en  $X$ .

### DEMOSTRACIÓN

(a)  $\Rightarrow$  (b) Consideramos un aberto  $V$  en  $Y$  e imos comprobar que  $f^{-1}(V)$  é aberto en  $X$ , é dicir, que todo punto  $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V)$  é centro dunha bóla aberta relativa a  $X$  contida en  $f^{-1}(V)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V) &\implies f(\mathbf{x}_0) \in V \implies \exists \varepsilon > 0 \mid \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \subset V \\ &\stackrel{(a)}{\implies} \exists \delta > 0 \mid f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \subset V \\ &\implies \exists \delta > 0 \mid \mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}\left(f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta))\right) \subset f^{-1}(V). \end{aligned}$$

(b)  $\Rightarrow$  (a) Sexa  $\mathbf{x}_0 \in X$ , e dado  $\varepsilon > 0$  imos comprobar que existe  $\delta > 0$  tal que  $f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$ .

$$\begin{aligned} V = \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \text{ aberto en } Y, f(\mathbf{x}_0) \in V &\stackrel{(b)}{\implies} \mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V) \text{ aberto en } X \\ &\implies \exists \delta > 0 \mid \mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(V) \\ &\implies f(\mathbf{B}_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V = \mathbf{B}_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon). \end{aligned}$$

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) séguese de que  $\forall C \subset Y, f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$  e de que os subconjuntos pechados de  $Y$  (e de  $X$ ) son complementarios dos abertos en  $Y$  (e en  $X$ , respectivamente). ■

## 4.6 PROPOSICIÓN

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ ,  $Z \subset \mathbb{R}^l$ , e consideremos as aplicacións  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ . Se  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0 \in X$  e  $g$  é continua en  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in Y$ , entón  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é continua en  $\mathbf{x}_0$ .

### DEMOSTRACIÓN

Temos que probar que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid (g \circ f)(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Z((g \circ f)(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Para isto tomamos  $\varepsilon > 0$ , e temos:

$$g \text{ continua en } \mathbf{y}_0 \implies \exists \eta > 0 \mid g(B_Y(\mathbf{y}_0, \eta)) \subset B_Z((g(\mathbf{y}_0), \varepsilon)), \quad (*)$$

e se agora tomamos  $\eta > 0$ ,

$$f \text{ continua en } \mathbf{x}_0 \implies \exists \delta > 0 \mid f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y((f(\mathbf{x}_0), \eta). \quad (**)$$

Polo tanto,

$$(g \circ f)(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) = g\left(f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta))\right) \underset{(**)}{\subset} g(B_Y(f(\mathbf{x}_0), \eta)) \underset{(*)}{\subset} B_Z(g(f(\mathbf{x}_0)), \varepsilon). \quad \blacksquare$$

## 4.7 COROLARIO

Se  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  e  $g: Y \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^l$  son aplicacións continuas, entón a composición  $g \circ f: X \rightarrow Z$  tamén é continua.

4.8 TEOREMA (Caracterización secuencial da continuidade)

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  unha aplicación e  $\mathbf{x}_0 \in X$ . Entón,  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$  se, e só se,  $f$  é **secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$** , é dicir,

$$\forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \Rightarrow \{f(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow f(\mathbf{x}_0)].$$

DEMOSTRACIÓN

Supoñamos que  $f: X \rightarrow Y$  é continua en  $\mathbf{x}_0$ . Consideramos unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X$  que converxe a  $\mathbf{x}_0$  e imos comprobar que a sucesión  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  en  $Y$  converxe a  $f(\mathbf{x}_0)$ . Para isto, tomamos  $\varepsilon > 0$  e temos que atopar un número natural  $N$  tal que, a partir del, todos os termos da sucesión  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  están en  $B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$ :

$$\left. \begin{aligned} f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 &\implies \text{ dado } \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \\ \{\mathbf{x}_k\} \subset X, \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 &\implies \text{ dado } \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \forall k \geq N \end{aligned} \right\}$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid f(\mathbf{x}_k) \in B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \forall k \geq N$$

$$\implies \{f(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow f(\mathbf{x}_0).$$

Para probar a implicación recíproca, supoñemos que  $f$  non é continua en  $\mathbf{x}_0$  e imos ver que nese caso  $f$  non é secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$ . Usaremos a construción de sucesións converxentes no lema 3.9 para obter unha sucesión en  $X$  que converxe a  $\mathbf{x}_0$  pero tal que a sucesión das imaxes non converxe a  $f(\mathbf{x}_0)$ :

$$\begin{aligned} f \text{ non é continua en } \mathbf{x}_0 &\implies \exists \varepsilon > 0 \mid \forall \delta > 0, f(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)) \not\subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \\ &\implies \forall k \in \mathbb{N}, \text{ dado } \delta_k = \frac{1}{k} \exists \mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0, \delta_k) \mid f(\mathbf{x}_k) \notin B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon) \\ &\stackrel{3.9}{\implies} \exists \varepsilon > 0 \text{ e } \exists \{\mathbf{x}_k\} \subset X \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0, \text{ pero } d(f(\mathbf{x}_k), f(\mathbf{x}_0)) \geq \varepsilon \forall k \\ &\implies \exists \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X \mid \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \text{ pero } \{f(\mathbf{x}_k)\} \not\rightarrow f(\mathbf{x}_0) \\ &\implies f \text{ non é secuencialmente continua en } \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

#### 4.9 DEFINICIÓN (PROYECCIONES)

Para cada  $i = 1, \dots, n$ , a **proyección**  $i$ -ésima de  $\mathbb{R}^n$  é a aplicación

$$\begin{aligned}\pi_i: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \pi_i(\mathbf{x}) = x_i.\end{aligned}$$

#### 4.10 PROPOSICIÓN

Cada proyección  $\pi_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  é unha aplicación continua.

#### DEMOSTRACIÓN

Para probar que cada  $\pi_i$  é secuencialmente continua imos utilizar que unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $\mathbb{R}^n$  converge a un punto  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  se, e só se, cada sucesión de compoñentes  $i$ -ésimas  $\{\mathbf{x}_{ki}\}$  converge a  $a_i$  (teorema 3.8).

Sexa  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  e sexa  $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\}$  unha sucesión en  $\mathbb{R}^n$  que converge a  $\mathbf{a}$ . Entón

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{a} \xrightarrow[3.8]{\implies} \{\mathbf{x}_{ki}\} \rightarrow a_i \quad \forall i \implies \{\pi_i(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow \pi_i(\mathbf{a}) \quad \forall i,$$

logo  $\pi_i$  é secuencialmente continua para cada  $i = 1, \dots, n$ . ■

#### 4.11 DEFINICIÓN (COMPOÑENTES DUNHA APLICACIÓN)

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  unha aplicación. Para cada  $j = 1, \dots, m$ , a **compoñente**  $j$ -ésima de  $f$  é a composición

$$\begin{array}{ccc} & \overset{f_j = \pi_j \circ f}{\frown} & \\ X \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{R} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{x} \longmapsto & f(\mathbf{x}) \longmapsto f_j(\mathbf{x}) = \pi_j(f(\mathbf{x})), \end{array}$$

así que  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ , e tamén se escribe  $\underline{f} = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m)$ .

## 4.12 PROPOSICIÓN

Sea  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{x}_0 \in X$ , entón  $f$  é continua en  $\mathbf{x}_0$  se, e só se, o é cada compoñente:

$$f = (f_1, \dots, f_m) \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \iff f_j = \pi_j \circ f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \quad \forall j.$$

### DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^n \\ \pi_j \text{ é continua en } f(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\} \implies f_j = \pi_j \circ f \text{ é continua en } \mathbf{x}_0.$$

$\Leftarrow$  Supoñemos que cada  $f_j$  é continua ( $j = 1, \dots, m$ ) en  $\mathbf{x}_0$  e imos ver que o é  $f$  comprobando que é secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ f_j \text{ é continua en } \mathbf{x}_0 \in X \end{array} \right\} \implies \{f_j(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow f_j(\mathbf{x}_0)$$
$$\stackrel{3.8}{\implies} \{f(\mathbf{x}_k)\} = \{(f_1(\mathbf{x}_k), \dots, f_m(\mathbf{x}_k))\} \rightarrow (f_1(\mathbf{x}_0), \dots, f_m(\mathbf{x}_0)) = f(\mathbf{x}_0),$$

conque  $f$  é secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$ . ■

## 4.13 COROLARIO

Unha aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é continua se, e só se, o é cada compoñente  $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

#### 4.14 OBSERVACIÓN

Como consecuencia da proposición e corolario anteriores, estudar a continuidade de aplicacións definidas en subconxuntos de  $\mathbb{R}^n$  con valores en  $\mathbb{R}^m$  (ou en subconxuntos de  $\mathbb{R}^m$ ) equivale a estudar a continuidade de funcións con valores en  $\mathbb{R}$ . Para isto, é útil ter en conta que se  $f, g: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funcións continuas (en  $\mathbf{x}_0 \in X$ ) tamén son continuas (en  $\mathbf{x}_0$ ) as funcións

$$X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f + g: \mathbf{x} \mapsto (f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}),$$

$$f \cdot g: \mathbf{x} \mapsto (f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}),$$

$$\text{se } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda f: \mathbf{x} \mapsto (\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}),$$

$$\text{se } g(\mathbf{x}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in X, \quad \frac{f}{g}: \mathbf{x} \mapsto \frac{f}{g}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}.$$

En efecto, por exemplo  $f + g$  é secuencialmente continua en  $\mathbf{x}_0$ , xa que para calquera sucesión en  $X$  tal que  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , tense

$$\{(f + g)(\mathbf{x}_k)\} = \{f(\mathbf{x}_k) + g(\mathbf{x}_k)\} \rightarrow f(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0) = (f + g)(\mathbf{x}_0),$$

posto que o límite da suma de dúas sucesións converxentes de números reais é a suma dos límites. De modo análogo, tense a continuidade en cada un dos outros casos.

#### 4.15 PROPOSICIÓN

Se  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua e  $A \subset X$ , entón a **restrición** de  $f$  a  $A$ ,  $f|_A: A \rightarrow Y$ , tamén é continua.

#### DEMOSTRACIÓN

É consecuencia inmediata de que  $f|_A = f \circ i$  é composición de dúas aplicacións continuas,

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{i} & X \xrightarrow{f} Y \\ x & \longmapsto & x \longmapsto f(x) \end{array}$$

■

#### 4.16 OBSERVACIÓN

Se  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua, entón a súa restrición a calquera subconxunto  $A$  de  $X$  é continua en todos os puntos de  $A$ .

Agora ben, pode suceder que  $f: X \rightarrow Y$  sexa tal que a súa restrición  $f|_A: A \rightarrow Y$  sexa continua para algún subconxunto  $A$  de  $X$  pero que  $f$  non sexa continua en puntos de  $A$ .

Por exemplo, a función de Dirichlet

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

é tal que as súas restricións  $f|_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas (son aplicacións constantes) pero  $f$  non é continua en ningún punto de  $\mathbb{R}$ .

Non obstante, cúmprese que se  $A$  é aberto en  $X$  e  $f|_A$  é continua, entón  $f$  é continua en todos os puntos de  $A$ , como se ve na seguinte proposición.

## 4.17 PROPOSICIÓN

Sea  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$  unha aplicación.

Se  $A$  é aberto en  $X$  e  $f|_A: A \rightarrow Y$  é continua, entón  $f$  é continua en todos os puntos de  $A$ .

### DEMOSTRACIÓN

Sea  $x_0 \in A$  e vexamos que se  $f|_A$  é continua en  $x_0$ , entón  $f$  é continua en  $x_0$ , é dicir, que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$f|_A \text{ continua en } x_0 \implies \exists \delta_1 > 0 \mid f|_A(B_A(x_0, \delta_1)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Agora,

$B_A(x_0, \delta_1) = B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta_1) \cap A \stackrel{A \subseteq X}{=} B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta_1) \cap X \cap A = B_X(x_0, \delta_1) \cap A$  é aberto en  $X$ , (porque é a intersección de dous abertos en  $X$ ), logo

$$\exists \delta > 0 \mid B_X(x_0, \delta) \subset B_A(x_0, \delta_1)$$

$\Downarrow$

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(B_A(x_0, \delta_1)) = f|_A(B_A(x_0, \delta_1)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon). \quad \blacksquare$$

## 4.18 EXEMPLO

A aplicación

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

é continua en todos os puntos de  $A = (0, +\infty)$  e de  $B = (-\infty, 0)$ , posto que  $A$  e  $B$  son abertos en  $\mathbb{R}$  e

$$f|_A: x \in A \mapsto 1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f|_B: x \in B \mapsto 0 \in \mathbb{R}$$

son aplicacións continuas, xa que son constantes.

## 4.19 EXERCICIO

Consideramos a aplicación  $f: X = \mathbb{R}^2 \rightarrow Y = \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } xy > 0, \\ 0 & \text{se } xy \leq 0. \end{cases}$$

Utilizando a proposición anterior próbase que  $f$  é continua en todos os puntos de  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ .

### SOLUCIÓN

Sexan

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}, \quad V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}.$$

Estos dous conxuntos son abertos en  $\mathbb{R}^2$ ; un modo de comprobalo consiste en utilizar a caracterización da continuidade (teorema 4.5), mostrando que se poden escribir como imaxes inversas de abertos, neste caso en  $\mathbb{R}$ , por algunha aplicación continua. En efecto, se consideramos a aplicación  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x, y) = xy,$$

entón  $h$  é continua, xa que  $h = \pi_1 \pi_2$  é produto de dúas aplicacións continuas, e

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) \in (0, +\infty)\} = h^{-1}(0, +\infty),$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) \in (-\infty, 0)\} = h^{-1}(-\infty, 0).$$

Agora,  $f|_U = (\pi_1)|_U$  é continua xa que é a restricción da proxección  $\pi_1$  a  $U$ , e posto que  $U$  é aberto en  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  é continua en todos os puntos de  $U$ .

Ademais,  $f|_V$  é a aplicación constante 0, logo é continua e, posto que  $V$  é aberto en  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  tamén é continua en todos os puntos de  $V$ .

Conclúese que  $f$  é continua en cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $xy \neq 0$  (aínda que hai máis puntos de  $\mathbb{R}^2$  nos que  $f$  é continua!).

#### 4.20 DEFINICIÓN (APLICACIÓN COMBINADA)

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ , e supoñamos que  $A$  e  $B$  son subconxuntos de  $X$  tales que  $A \cup B = X$ . Se  $g: A \rightarrow Y$  e  $h: B \rightarrow Y$  son aplicacións tales que  $g|_{A \cap B} = h|_{A \cap B}$ , entón está ben definida a aplicación  $f: X \rightarrow Y$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in A, \\ h(x) & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

e dise que  $f$  é a **aplicación combinada** de  $g$  e  $h$ .

#### 4.21 EXEMPLO

A aplicación

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 - y^2 + 1 & \text{se } y \geq x, \\ e^{x-y} & \text{se } y \leq x, \end{cases}$$

é a aplicación combinada das aplicacións

$$g: A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 1,$$

e

$$h: B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto e^{x-y}.$$

## 4.22 PROPOSICIÓN

Sexa  $f: X = A \cup B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  a aplicación combinada de  $g: A \rightarrow Y$  e  $h: B \rightarrow Y$  e supoñamos que  $g$  e  $h$  son continuas.

- (1) Se  $A$  e  $B$  son pechados en  $X$ , entón  $f$  é continua.
- (2) Se  $A$  e  $B$  son abertos en  $X$ , entón  $f$  é continua.

### DEMOSTRACIÓN

(1) Sexa  $F$  un pechado en  $Y$  e vexamos que a súa imaxe inversa por  $f$  é un pechado en  $X$ .

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{ \mathbf{x} \in X = A \cup B \mid f(\mathbf{x}) \in F \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \in F \} \cup \{ \mathbf{x} \in B \mid f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \in F \} \\ &= g^{-1}(F) \cup h^{-1}(F). \end{aligned}$$

Agora,

$$\left. \begin{array}{l} g: A \rightarrow Y \text{ continua} \xRightarrow[F \text{ pechado en } Y]{} g^{-1}(F) \text{ pechado en } A \xRightarrow[A \text{ pechado en } X]{} g^{-1}(F) \text{ pechado en } X \\ h: B \rightarrow Y \text{ continua} \xRightarrow[F \text{ pechado en } Y]{} h^{-1}(F) \text{ pechado en } B \xRightarrow[B \text{ pechado en } X]{} h^{-1}(F) \text{ pechado en } X \end{array} \right\}$$
$$\implies f^{-1}(F) = g^{-1}(F) \cup h^{-1}(F) \text{ é pechado en } X.$$

(2) A proba sería como a anterior cambiando “pechado” por “aberto”. Ou ben, pode obterse directamente como consecuencia de que  $g = f|_A$ ,  $h = f|_B$  e da proposición 4.17, é dicir, usando que se a restrición de  $f$  ao aberto  $A$  e ao aberto  $B$  en  $X$  é continua, entón  $f$  é continua en todos os puntos de cada aberto. ■

#### 4.23 DEFINIÇÃO (APLICACIÓN UNIFORMEMENTE CONTINUA)

Unha aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é *uniformemente continua* se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, d_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^m}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon.$$

#### 4.24 OBSERVACIÓNS

Toda aplicación uniformemente continua é continua xa que se  $f: X \rightarrow Y$  é uniformemente continua, entón, para cada punto  $\mathbf{x} \in X$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \mathbf{y} \in X, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon.$$

Ademais, dise que  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é *lipschitziana* se existe  $M \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 0$ , tal que

$$d_{\mathbb{R}^m}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq M d_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X,$$

e  $M$  chámase unha *constante de Lipschitz*; se  $M < 1$  tamén se di que  $f$  é unha *aplicación contractiva*.

Toda aplicación lipschitziana é uniformemente continua.

#### 4.25 EXERCICIO

Se  $f: X \rightarrow Y$  é unha aplicación uniformemente continua e  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión de Cauchy en  $X$ , entón  $\{f(\mathbf{x}_k)\}$  é unha sucesión de Cauchy en  $Y$ .

## 4.26 OBSERVACIÓN

Se unha aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é continua, entón a imaxe inversa de calquera aberto (ou pechado) en  $Y$  é un aberto (ou pechado) en  $X$ . Pero a imaxe directa dun aberto ou pechado en  $X$  por unha aplicación continua pode non ser nin aberto nin pechado en  $Y$ .

## 4.27 EXEMPLOS

- A aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  é continua e  $A = (-1, 1)$  é aberto en  $\mathbb{R}$ , pero  $f(A) = [0, 1)$  non é aberto en  $\mathbb{R}$ .
- A aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = e^x$  é continua e  $B = (-\infty, 0]$  é pechado en  $\mathbb{R}$ , pero  $f(B) = (0, 1]$  non é pechado en  $\mathbb{R}$ .

## 4.28 DEFINICIÓNS (APLICACIÓNS ABERTAS, PECHADAS)

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ .

$f$  é unha aplicación **aberta** : $\iff [\forall U$  aberto en  $X \Rightarrow f(U)$  aberto en  $Y$ ];

$f$  é unha aplicación **pechada** : $\iff [\forall F$  pechado en  $X \Rightarrow f(F)$  pechado en  $Y$ ].

## 4.29 EXEMPLO

Sexa  $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$  e  $i: A \rightarrow X$  a inclusión.

- Se  $A$  é aberto en  $X$ , entón a inclusión  $i$  é aberta.
- Se  $A$  é pechado en  $X$ , entón a inclusión  $i$  é pechada.

## 4.30 NOTA

Se a aplicación  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é bixectiva, entón  $f$  é aberta se, e só se,  $f$  é pechada. Isto é consecuencia inmediata de que para unha aplicación bixectiva  $f: X \rightarrow Y$ , tense

$$\forall A \subset X, \quad f(X \setminus A) = Y \setminus f(A).$$

## 4.31 DEFINICIÓN (HOMEOMORFISMO)

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Unha aplicación  $f: X \rightarrow Y$  dise que é un **homeomorfismo** se é bixectiva, continua e a súa inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  tamén é continua.

## 4.32 NOTA

$$f: X \rightarrow Y \text{ é un homeomorfismo} \iff \begin{cases} f \text{ é bixectiva} \\ f \text{ é continua} \\ f \text{ é aberta} \end{cases} \iff \begin{cases} f \text{ é bixectiva} \\ f \text{ é continua} \\ f \text{ é pechada.} \end{cases}$$

## 4.33 DEFINICIÓN (CONXUNTOS HOMEOMORFOS)

Se existe un homeomorfismo  $f: X \rightarrow Y$  dise que os conxuntos  $X$  e  $Y$  son **homeomorfos** e escribiremos  $X \approx Y$ .

## 4.34 NOTA

A relación  $\approx$  (“*ser homeomorfos*”) é unha relación de equivalencia na familia de todos os subconxuntos de todos os espazos euclidianos; é dicir, se  $X, Y, Z$  son subconxuntos de espazos euclidianos de calquera dimensión, tense

$$(1) X \approx X; (2) X \approx Y \Rightarrow Y \approx X; (3) X \approx Y, Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z,$$

como consecuencia, respectivamente, de que **a identidade é un homeomorfismo**, **a inversa dun homeomorfismo tamén o é**, e **a composición de homeomorfismos é un homeomorfismo** (téñase en conta que se  $f$  e  $g$  son bixectivas, entón  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ).

### 4.35 EXEMPLO

Todos os intervalos pechados acoutados en  $\mathbb{R}$  son homeomorfos entre si.

Posto que a relación  $\approx$  é de equivalencia, basta comprobar que todos os intervalos pechados son homeomorfos ao intervalo  $[0, 1]$ .

Pois ben, para cada  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , as aplicacións

$$\begin{aligned} [0, 1] &\xrightarrow{f} [a, b] & [a, b] &\xrightarrow{g} [0, 1] \\ t &\mapsto a + t(b - a), & s &\mapsto \frac{s - a}{b - a}, \end{aligned}$$

son tales que  $g = f^{-1}$ , así que son bixectivas; e tamén son continuas, logo  $f$  é un homeomorfismo e  $[0, 1] \approx [a, b]$ .

### 4.36 EXEMPLO

Todos os intervalos abertos (acoutados ou non) de números reais son homeomorfos entre si e homeomorfos a  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .

En efecto, téñense os seguintes homeomorfismos:

$$\begin{aligned} (0, 1) &\xrightarrow{f} (a, b) & \mathbb{R} &\xrightarrow{g} (-1, 1) \\ t &\mapsto a + t(b - a), & x &\mapsto \frac{x}{1 + |x|}, \\ \frac{s - a}{s - b} &\longleftarrow s & \frac{y}{1 - |y|} &\longleftarrow y \end{aligned}$$

que mostran que todos os intervalos abertos acoutados son homeomorfos entre si e homemorfos a  $\mathbb{R}$ . E tamén son homeomorfos a todos os intervalos abertos non acoutados:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow (0, +\infty) \longrightarrow (a, +\infty) \longrightarrow (-\infty, -a) \\ t &\mapsto e^t & y &\mapsto -y \\ \log x &\longleftarrow x & \mapsto &x + a \end{aligned}$$

#### 4.37 EJEMPLO

Un homeomorfismo entre los intervalos  $(0, 1]$  e  $[1, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} (0, 1] &\xrightarrow{h} [1, +\infty) \\ t &\mapsto 1/t \\ 1/s &\longleftarrow s \end{aligned}$$

#### 4.38 EJERCICIO

Todos los intervalos de la forma  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, +\infty)$  e  $[-\infty, b)$  son homeomorfos entre sí.

#### 4.39 EJEMPLO

Son homeomorfismos:

- $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , a *traslación* (con respecto a  $\mathbf{v}$ )  $T_{\mathbf{v}}: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}$ ,  $T_{\mathbf{v}}^{-1} = T_{-\mathbf{v}}$ ,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ , a *homotecia* (de razón  $\lambda$ )  $H_{\lambda}: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \lambda \cdot \mathbf{x}$ ,  $H_{\lambda}^{-1} = H_{1/\lambda}$ .

#### 4.40 EJEMPLO

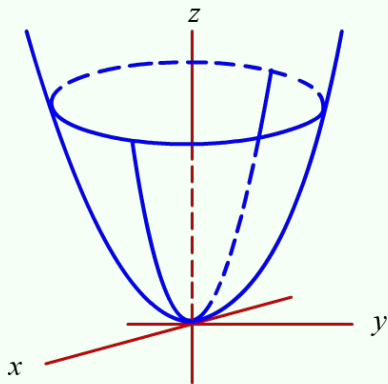
Todas las bolas abiertas en  $\mathbb{R}^n$  son homeomorfas entre sí e homeomorfas a  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} f: B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, 1) &\xrightarrow{\approx} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{a}, r) & g: B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, 1) &\xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto r\mathbf{x} + \mathbf{a}, & \mathbf{x} &\longmapsto \frac{\mathbf{x}}{1 - \|\mathbf{x}\|}, \\ \frac{1}{r}(\mathbf{y} - \mathbf{a}) &\longleftarrow \mathbf{y} & \frac{\mathbf{y}}{1 + \|\mathbf{y}\|} &\longleftarrow \mathbf{y} \end{aligned}$$

#### 4.41 EJERCICIO

Todas las bolas cerradas en  $\mathbb{R}^n$  son homeomorfas entre sí.

#### 4.42 EJEMPLO



$\mathbb{R}^2$  e o paraboloides  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$  son homeomorfos. En efecto, a aplicación

$$f: P \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x, y),$$

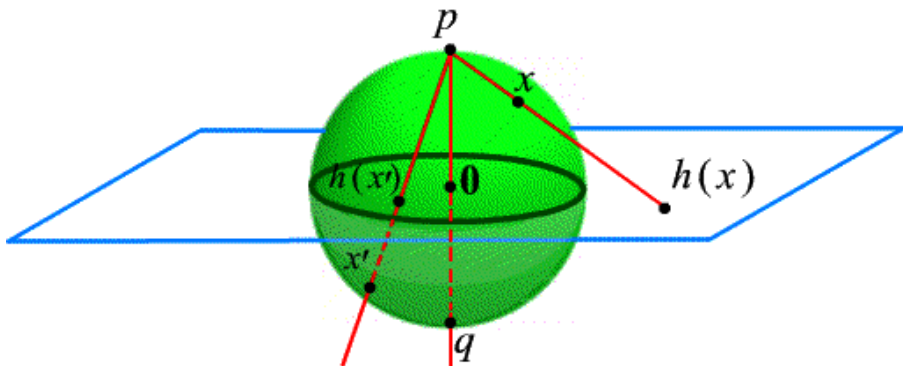
é bixectiva: A aplicación

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow P \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$

é tal que  $g \circ f = \text{id}_P$  e  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ , así que  $g = f^{-1}$ , e tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son continuas (o son as componentes de cada unha). Logo  $f$  é un homeomorfismo (e tamén  $f^{-1}$ ) e  $P \approx \mathbb{R}^2$ .

#### 4.43 EXERCICIO

Sexa  $\mathbf{p} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  o polo norte da esfera  $\mathbb{S}^n$ . Defínese unha aplicación  $h: \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{p}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , chamada *proxección estereográfica*, como segue: se  $\mathbf{x}$  é un punto de  $\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{p}\}$ , entón  $h(\mathbf{x})$  é o punto de intersección da recta determinada por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{x}$  con  $\mathbb{R}^n$  (considerado como o subconxunto  $\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Constrúe  $h$  e probade que é un homeomorfismo.



### 4.44 NOTA

Unha propiedade  $\mathcal{P}$  aplicable a subconxuntos de espazos euclidianos (ou, dun modo máis xeral, a espazos topolóxicos) dise que é unha **propiedade topolóxica** se é invariante por homeomorfismos, é dicir, se se verifica

$$X \text{ satisface } \mathcal{P}, X \approx Y \Rightarrow Y \text{ satisface } \mathcal{P}.$$

### 4.45 EXEMPLOS

- “Ser finito” e “ser numerable” son propiedades topolóxicas, xa que se existe unha aplicación bixectiva entre dous conxuntos, entón ambos teñen o mesmo cardinal.
- “Ser acoutado” non é unha propiedade topolóxica. Por exemplo,  $\mathbb{R} \approx (-1, 1)$ , pero  $(-1, 1)$  é acoutado e  $\mathbb{R}$  non é acoutado.
- “Ser completo” non é unha propiedade topolóxica. Por exemplo,  $\mathbb{R} \approx (-1, 1)$ , pero  $\mathbb{R}$  é completo e  $(-1, 1)$  non é completo (xa que non é pechado en  $\mathbb{R}$ ).
- “Ser discreto” é unha propiedade topolóxica, xa que se  $X \approx Y$  e  $X$  é discreto, entón  $Y$  tamén é discreto, pois se  $f: X \rightarrow Y$  é un homeomorfismo, en particular  $f$  é bixectiva, e calquera subconxunto de  $Y$  é imaxe directa por  $f$  (aberta) dalgún subconxunto de  $X$  (que sempre é aberto en  $X$ ), así que todo subconxunto de  $Y$  é aberto en  $Y$ .

## **5. Conexión**

Ser **conexo** significa “non estar separado” en partes disxuntas. Houbo diversas definicións matemáticas deste concepto, pero hoxe en día hai unha definición universalmente aceptada, segundo a cal,

un subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  **non é conexo** se se pode separar dunha forma natural por certo tipo de subconxuntos disxuntos non baleiros  $U$  e  $V$  tales que a súa unión é  $X$ , así que vai ser que  $X$  **non é conexo** se

$$\exists U, V \text{ abertos en } X \text{ tales que } \begin{aligned} X &= U \cup V, & U \cap V &= \emptyset \\ U &\neq \emptyset, & V &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

### 5.1 DEFINICIÓN (SEPARACIÓN)

Unha **separación** dun conxunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é un par (non ordenado)  $U|V$  de subconxuntos de  $X$  tales que

- $U$  e  $V$  son abertos en  $X$ ,
- $X = U \cup V$ ,
- $U \cap V = \emptyset$ .

### 5.2 NOTA

Unha separación  $U|V$  de  $X$  dise que é **a separación trivial** de  $X$  se

$$U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset,$$

(logo  $V = X$  ou  $U = X$ , respectivamente); é dicir, a separación trivial de  $X$  é  $\emptyset|X = X|\emptyset$ .

### 5.3 DEFINICIÓN (CONJUNTO CONEXO)

Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Dese que  $X$  é **conexo** se a única separación que admite é a separación trivial.

$$\begin{aligned} X \text{ é conexo} &\iff [U|V \text{ separación de } X \Rightarrow U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset] \\ &\iff \nexists U, V \text{ abertos en } X \left\{ \begin{array}{l} X = U \cup V, U \cap V = \emptyset \\ U \neq \emptyset, V \neq \emptyset. \end{array} \right. \end{aligned}$$

### 5.4 PROPOSICIÓN

Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é conexo se, e só se, os únicos subconjuntos de  $X$  que son á vez abertos e pechados en  $X$  son  $X$  e  $\emptyset$ .

#### DEMOSTRACIÓN

Imos probar a equivalencia

$$X \text{ conexo} \iff [U \text{ aberto e pechado en } X \Rightarrow U = \emptyset \text{ ou } U = X].$$

$\Rightarrow$  Se  $U$  é aberto e pechado en  $X$ , entón  $U|X \setminus U$  é unha separación de  $X$ . Como, por hipótese,  $X$  é conexo, a separación  $U|X \setminus U$  é a separación trivial, logo  $U = \emptyset$  ou  $X \setminus U = \emptyset$ , é dicir,  $U = \emptyset$  ou  $U = X$ .

$\Leftarrow$  Supoñemos que os únicos abertos e pechados en  $X$  son  $\emptyset$  e  $X$ , e sexa  $U|V$  unha separación de  $X$ ; dado que  $U$  e  $V$  son complementarios en  $X$  ambos son tamén pechados en  $X$ . Entón,

$$\left. \begin{array}{l} U \text{ aberto en } X \\ U \text{ pechado en } X \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{hipótese}} U = \emptyset \text{ ou } U = X \xRightarrow{V = X \setminus U} U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset,$$

é dicir,  $U|V = \emptyset|X$  é a separación trivial. ■

## 5.5 EXEMPLOS

- $\emptyset$  é conexo.
- Para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , o conxunto unitario  $\{\mathbf{x}\}$  é conexo.
- Calquera subconxunto discreto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  con máis dun punto non é conexo: se  $\mathbf{p} \in X$ , entón  $\{\mathbf{p}\} | X \setminus \{\mathbf{p}\}$  é unha separación non trivial de  $X$ .  
En particular, calquera subconxunto finito de  $\mathbb{R}^n$  con máis dun punto non é conexo;  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  non son conexos.
- $\mathbb{Q}$  non é conexo: por exemplo,  $(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} | (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$  é unha separación non trivial de  $\mathbb{Q}$ .

Os únicos subconxuntos conexos de  $\mathbb{Q}$  son os conxuntos unitarios:

en efecto, se  $X \subset \mathbb{Q}$  non é unitario, entón

$$\exists a, b \in X, a < b$$



$$\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid a < r < b \implies (-\infty, r) \cap X | (r, +\infty) \cap X \text{ é unha separación non trivial de } X,$$

$$\implies X \text{ non é conexo.}$$

## 5.6 TEOREMA

O intervalo pechado  $\mathbb{I} = [0, 1]$  é conexo.

### DEMOSTRACIÓN

Supoñemos que  $U|V$  é unha separación non trivial de  $\mathbb{I} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  e imos chegar a unha contradición.

$$\begin{aligned} 1 \in \mathbb{I} = U \cup V &\implies 1 \in U \text{ ou } 1 \in V; \text{ supoñemos } 1 \in V \\ &\implies \exists r > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(1, r) \subset V \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad (1 - r, 1 + r) \cap \mathbb{I} = (1 - r, 1] \end{aligned}$$

Por outra parte,

$$\left. \begin{array}{l} U \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}, \quad U \neq \emptyset \implies \exists a = \sup U \\ U \text{ acoutado superiormente} \\ \forall x \in U, x \leq 1 - r \end{array} \right\} \implies a \leq 1 - r < 1.$$

Ademais  $a > 0$ , xa que se  $a = 0$  tense que  $U = \{0\}$ , que non é aberto en  $[0, 1]$ . Logo  $0 < a < 1$ ,  $a \in \mathbb{I} = U \cup V$ , e caben dúas posibilidades:

$$\begin{aligned} a \in U &\implies \exists \varepsilon > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U \\ &\quad \quad \quad (\text{contradí } a = \sup U: a + \varepsilon/2 \text{ sería un elemento de } U \text{ maior que } a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \in V &\implies \exists \varepsilon > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V \\ &\quad \quad \quad (\text{contradí } a = \sup U: a - \varepsilon/2 \text{ sería cota superior de } U \text{ menor que } a), \end{aligned}$$

conque chegamos a unha contradición, logo a separación  $U|V$  de  $\mathbb{I} = [0, 1]$  ten que ser a separación trivial. Polo tanto, o intervalo pechado  $[0, 1]$  é conexo. ■

## 5.7 TEOREMA

Se  $X$  é un subconxunto conexo de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua, entón o subconxunto  $f(X)$  de  $\mathbb{R}^m$  é conexo.

### DEMOSTRACIÓN

Consideramos unha separación  $U|V$  de  $f(X)$  e debemos ver que é a separación trivial de  $f(X)$ .

Como a continuidade de  $f$  non depende do codominio, considerada con valores no conxunto imaxe a aplicación  $f: X \rightarrow f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$  é continua e ademais é sobrexectiva. Entón,

$$\begin{aligned}
 U|V \text{ separación de } f(X) &\implies \begin{cases} f^{-1}(U) \text{ e } f^{-1}(V) \text{ son abertos en } X \\ f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(f(X)) = X \\ f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \end{cases} \\
 &\implies f^{-1}(U)|f^{-1}(V) \text{ é unha separación de } X \\
 &\stackrel{\text{X conexo}}{\implies} f^{-1}(U) = \emptyset \text{ ou } f^{-1}(V) = \emptyset \\
 &\stackrel{f: X \rightarrow f(X) \text{ sobrexectiva}}{\implies} U = f(f^{-1}(U)) = \emptyset \text{ ou } V = f(f^{-1}(V)) = \emptyset \\
 &\implies U|V \text{ é a separación trivial de } f(X). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

## 5.8 COROLARIO

A conexión é unha propiedade topolóxica.

### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , e supoñamos que  $X$  é conexo e  $X \approx Y$ , é dicir, que existe un homeomorfismo  $f: X \rightarrow Y$ . Debemos ver que  $Y$  é conexo. Agora ben, se  $f$  é un homeomorfismo, é continua e sobrexectiva. Polo tanto,  $Y = f(X)$  é conexo, polo teorema anterior. \blacksquare

## 5.9 COROLARIO

Calquera intervalo pechado  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ) é conexo.

DEMOSTRACIÓN

$$[0, 1] \approx [a, b], [0, 1] \text{ conexo} \implies [a, b] \text{ conexo} \quad \blacksquare$$

## 5.10 COROLARIO

Se  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , o *segmento* de extremos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$

$$L[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{ \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in [0, 1] \}$$

é conexo.

DEMOSTRACIÓN

Basta escribir  $L[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  como a imaxe por unha aplicación continua dun conxunto conexo. Pois ben, fixados  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_n + t(b_n - a_n)) \end{aligned}$$

é unha aplicación continua e  $[0, 1]$  é conexo, logo

$$f([0, 1]) = \{ f(t) \mid t \in [0, 1] \} = \{ \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in [0, 1] \} = L[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

é conexo. \blacksquare

Imos ver unha caracterización da conexión, segundo a cal un subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é conexo se, e só se, cada par de puntos distintos de  $X$  pertencen a un mesmo subconxunto conexo de  $X$ . Será consecuencia do seguinte lema.

## 5.11 LEMA

Sexa  $X$  un subconxunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $C \subset X$ . Se  $U|V$  é unha separación de  $X$ , entón  $(U \cap C)|(V \cap C)$  é unha separación de  $C$  (é a separación **inducida** pola separación  $U|V$  de  $X$ ).

### DEMOSTRACIÓN

Se  $U|V$  é unha separación de  $X$ , entón

$U, V$  abertos en  $X \Rightarrow U \cap C$  e  $V \cap C$  son abertos en  $C$

$U \cup V = X \Rightarrow (U \cap C) \cup (V \cap C) = (U \cup V) \cap C = X \cap C = C$

$U \cap V = \emptyset \Rightarrow (U \cap C) \cap (V \cap C) = (U \cap V) \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset$ ,

logo  $(U \cap C)|(V \cap C)$  é unha separación de  $C$ . ■

## 5.12 PROPOSICIÓN

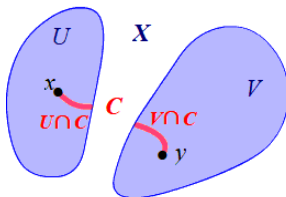
Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , entón

$X$  é conexo  $\iff \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \exists C \subset X, C$  conexo,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ .

### DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$  Inmediato, xa que se  $X$  é conexo basta tomar  $C = X$ .

$\Leftarrow$  Probaremos o contrarrecíproco desta implicación. Supoñemos que  $X$  non é conexo, logo existe unha separación non trivial  $U|V$  de  $X$ ; isto é,  $U|V$  é unha separación de  $X$  tal que  $U \neq \emptyset$  e  $V \neq \emptyset$ , así que podemos tomar  $\mathbf{x} \in U$  e  $\mathbf{y} \in V$ .



Supoñamos que existe un subconxunto  $C$  de  $X$  tal que  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ , e imos ver que  $C$  non pode ser conexo.

Polo lema previo,  $(U \cap C)|(V \cap C)$  é unha separación de  $C$ , e ademais  $\mathbf{x} \in U \cap C, \mathbf{y} \in V \cap C$ , logo tense que  $(U \cap C)|(V \cap C)$  é unha separación non trivial de  $C$ , así que  $C$  non pode ser conexo. ■

Observamos que o anterior resultado inclúe como conexos ao conxunto baleiro e aos conxuntos unitarios, xa que estes non conteñen ningún par de puntos distintos.

### 5.13 COROLARIO

*O espazo euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é conexo.*

#### DEMOSTRACIÓN

É consecuencia inmediata da proposición anterior, dado que dous puntos calquera  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , pertencen ao segmento de extremos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ . Así,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C = L[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \mathbb{R}^n$ , que é un conexo. ■

### 5.14 COROLARIO

*Os subconxuntos conexos de  $\mathbb{R}$  son os **intervalos xeneralizados**, é dicir, os conxuntos  $J \subset \mathbb{R}$  tales que*

$$x, y \in J, x < y \Rightarrow [x, y] \subset J.$$

#### DEMOSTRACIÓN

Se  $J$  é un intervalo xeneralizado, é inmediato que é conexo, pola proposición 5.12, dado que dous puntos calquera  $x, y \in J$ ,  $x \neq y$ , están no intervalo pechado que ten por extremos  $x$  e  $y$ , o cal está contido en  $J$ .

E estes son os únicos subconxuntos conexos de  $\mathbb{R}$ , xa que no caso de que  $J$  non sexa un intervalo xeneralizado existen  $x, y \in J$ ,  $x < y$ , pero  $[x, y] \not\subset J$ , é dicir,

$$\exists z \in \mathbb{R} \mid x < z < y, z \notin J,$$

logo  $(-\infty, z) \cap J \mid (z, +\infty) \cap J$  é unha separación non trivial de  $J$ , e  $J$  non sería conexo. ■

### 5.15 COROLARIO (Teorema dos valores intermedios)

*Sexa  $X$  un subconxunto conexo de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  unha aplicación continua. Sexan  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ ,  $y \in \mathbb{R}$  tales que  $f(\mathbf{a}) < y < f(\mathbf{b})$ . Entón existe  $\mathbf{x} \in X$  tal que  $f(\mathbf{x}) = y$ .*

#### DEMOSTRACIÓN

Dado que  $X$  é conexo e  $f$  continua,  $f(X)$  é un subconxunto conexo de  $\mathbb{R}$ , logo é un intervalo xeneralizado  $J$ , e como  $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}) \in f(X)$ ,

$$f(\mathbf{a}) < y < f(\mathbf{b}) \implies y \in [f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})] \subset J = f(X) \implies \exists \mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) = y. \quad \blacksquare$$

## 5.16 PROPIEDAD

Os intervalos xeneralizados, que son os conexos contidos en  $\mathbb{R}$ , son os subconxuntos de  $\mathbb{R}$  da forma

$$\emptyset, \{a\}, (a, b), [a, b), (a, b], [a, b], \\ (a, +\infty), (-\infty, b), [a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Se  $J \subset \mathbb{R}$  é un intervalo xeneralizado, satisfai a propiedade:

$$x, y \in J, x < y \Rightarrow [x, y] \subset J$$

Tódolos conxuntos antes enumerados a verifican. Reciprocamente, para comprobar que se  $J$  é un intervalo xeneralizado (\*), é necesariamente un destes conxuntos, imos ver que  $J$  é tal que  $(a, b) \subset J \subset [a, b]$ , onde

$$a = \begin{cases} \inf J & \text{se } J \text{ está acoutado inferiormente,} \\ -\infty & \text{noutro caso,} \end{cases} \\ b = \begin{cases} \sup J & \text{se } J \text{ está acoutado superiormente,} \\ +\infty & \text{noutro caso,} \end{cases}$$

e supoñemos que

$$(a, b) = [a, b) = (a, b] = \emptyset \quad \text{se } a = b,$$

$$[a, b] = \{a\} \quad \text{se } a = b,$$

un corchete xunto a  $-\infty$  ou  $+\infty$  interprétase como unha paréntese.

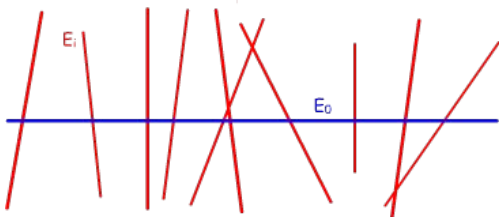
Pois ben,

$$t \in (a, b) \iff \begin{cases} a < t \implies \exists x \in J \mid x < t \\ t < b \implies \exists y \in J \mid t < y \end{cases} \xrightarrow{t \in [x, y]} t \in J \xrightarrow{(*)} t \in [a, b]. \quad \blacksquare$$

def de a  
def de b  
(\*)  
def de a, b



A unión  $\bigcup_{i \in I} E_i$  de conjuntos convexos  
non é necesariamente conexo



O conxunto  $X = E_0 \cup \left( \bigcup_{i \in I} E_i \right)$  é conexo

## 5.17 PROPOSICIÓN

Sexa  $\{E_i\}_{i \in I}$  unha familia de subconxuntos conexos de  $\mathbb{R}^n$  e  $E_0 \subset \mathbb{R}^n$  un conxunto conexo tal que  $E_0 \cap E_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in I$ .

Entón, o conxunto  $X = E_0 \cup (\cup_{i \in I} E_i)$  é conexo.

### DEMOSTRACIÓN

Imos probar que a única separación que admite  $X$  é a separación trivial. Sexa  $U|V$  unha separación de  $X$ . Entón,

$U \cap E_0 | V \cap E_0$  é unha separación de  $E_0 \xRightarrow{E_0 \text{ conexo}} U \cap E_0 = E_0$  ou  $V \cap E_0 = E_0$ .

Supoñamos  $U \cap E_0 = E_0$ . Entón,  $E_0 \subset U$ . Por outra parte, para cada  $i \in I$ ,

$U \cap E_i | V \cap E_i$  é unha separación de  $E_i \xRightarrow{E_i \text{ conexo}} U \cap E_i = E_i$  ou  $V \cap E_i = E_i$   
 $\forall i \in I$

$E_0 \subset U \Downarrow E_0 \cap E_i \neq \emptyset$

$\cup_{i \in I} E_i \subset U$   $\longleftarrow E_i \subset U \longleftarrow U \cap E_i = E_i \longleftarrow U \cap E_i \neq \emptyset$   
 $\forall i \in I \quad \forall i \in I \quad \forall i \in I$

Logo  $X = E_0 \cup (\cup_{i \in I} E_i) \subset U$ , é dicir,  $X = U$  e  $V = \emptyset$ , así que  $U|V$  é a separación trivial. ■

## 5.18 COROLARIO

- Se  $\{X_i\}_{i \in I}$  é unha familia de subconxuntos conexos de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\cap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ , entón  $\cup_{i \in I} X_i$  é conexo.
- Se  $A$  e  $B$  son dous subconxuntos conexos de  $X$  tales que  $A \cap B \neq \emptyset$ , entón  $A \cup B$  é conexo.

### 5.19 TEOREMA

*Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  son conxuntos conexos, entón o seu produto cartesiano  $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$  é conexo.*

#### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in X \times Y$  e imos ver que ambos pertencen a un mesmo subconxunto conexo  $C$  de  $X \times Y$  (e bastará aplicar a proposición 5.12 para concluír).

Xa que a aplicación  $f: \mathbf{x} \in X \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{b}) \in X \times Y$  é continua e  $X$  é conexo, tense que  $f(X) = X \times \{\mathbf{b}\}$  é un subconxunto conexo de  $X \times Y$ .

E dado que  $g: \mathbf{y} \in Y \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{y}) \in X \times Y$  é continua e  $Y$  é conexo, tamén  $g(Y) = \{\mathbf{p}\} \times Y$  é un subconxunto conexo de  $X \times Y$ .

Agora, a intersección destes dous conxuntos é non baleira, xa que

$$(\mathbf{p}, \mathbf{b}) \in (X \times \{\mathbf{b}\}) \cap (\{\mathbf{p}\} \times Y),$$

logo  $C = (X \times \{\mathbf{b}\}) \cup (\{\mathbf{p}\} \times Y)$  é un subconxunto conexo de  $X \times Y$  que contén aos dous puntos  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ .

Polo tanto,  $X \times Y$  é conexo. ■

## 5.20 PROPOSICIÓN

Sea  $C$  un subconjunto conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $X$  es un conjunto tal que  $C \subset X \subset \bar{C}$ , entonces  $X$  es conexo. En particular, la clausura de un conjunto conexo también es conexo.

### DEMOSTRACIÓN

Consideramos una separación  $U|V$  de  $X$  e imos ver que es una separación trivial.

$$U|V \text{ separación de } X \implies U \cap C | V \cap C \text{ separación de } C \xRightarrow{C \text{ conexo}} U \cap C | V \cap C = \emptyset | C.$$

Suponemos  $U \cap C = \emptyset$  e queremos ver que  $U = \emptyset$ .

Se existe  $x \in U \subset X \subset \bar{C}$ , entonces

$$x \in U \xRightarrow{U \text{ abierto en } X} \exists r > 0 \mid B_X(x, r) \subset U \subset X$$

$$x \in \bar{C} \implies \text{dado } r > 0, \quad B_{\mathbb{R}^n}(x, r) \cap C \neq \emptyset$$

$$\stackrel{\parallel C \subset X}{=} B_{\mathbb{R}^n}(x, r) \cap X \cap C = B_X(x, r) \cap C \subset U \cap C,$$

luego sería  $U \cap C \neq \emptyset$ , que es una contradicción; por lo tanto,  $U = \emptyset$ , y la separación  $U|V$  de  $X$  es una separación trivial. ■

## 5.21 DEFINICIÓN (CAMIÑO)

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Un **camiño** en  $X$  é unha aplicación continua

$$\alpha: \mathbb{I} = [0, 1] \longrightarrow X.$$

Se  $\alpha(0) = \mathbf{x}$ ,  $\alpha(1) = \mathbf{y}$ , dise que  $\alpha$  é un *camiño en  $X$  que une  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$* , e que  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  están conectados por camiños en  $X$ .

## 5.22 PROPOSICIÓN

A relación “*estar conectados por camiños en  $X$* ” é unha relación de equivalencia.

### DEMOSTRACIÓN

Poñemos  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists \alpha: \mathbb{I} \rightarrow X$  continua  $\mid \alpha(0) = \mathbf{x}, \alpha(1) = \mathbf{y}$ .

**Reflexiva**  $\forall \mathbf{x} \in X, \alpha: t \in \mathbb{I} \mapsto \alpha(t) = \mathbf{x} \in X$  é unha aplicación continua (un **camiño constante**) tal que  $\alpha(0) = \mathbf{x} = \alpha(1)$ , logo  $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$ .

**Simétrica**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \implies \exists \alpha: \mathbb{I} \rightarrow X$  camiño  $\mid \alpha(0) = \mathbf{x}, \alpha(1) = \mathbf{y}$ . O **camiño inverso** de  $\alpha$  é  $\bar{\alpha}: \mathbb{I} \rightarrow X$ , dado por  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ , que é unha aplicación continua, xa que é composición de aplicacións continuas:

$t \in \mathbb{I} \mapsto 1 - t \in \mathbb{I} \mapsto \alpha(1 - t) \in X$ ,  $\bar{\alpha}(0) = \alpha(1) = \mathbf{y}$ ,  $\bar{\alpha}(1) = \alpha(0) = \mathbf{x}$ , logo  $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ .

**Transitiva**  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X, \mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \mathbf{y} \sim \mathbf{z} \implies \exists \alpha, \beta: \mathbb{I} \rightarrow X$  camiños tales que  $\alpha(0) = \mathbf{x}, \alpha(1) = \mathbf{y} = \beta(0), \beta(1) = \mathbf{z}$ . O **camiño produto** de  $\alpha$  e  $\beta$  é a aplicación  $\alpha \star \beta: \mathbb{I} \rightarrow X$  dada por

$$(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

que está ben definida, e é continua por ser a aplicación combinada de dúas aplicacións continuas definidas en pechados de  $[0, 1]$ .

Ademais,  $(\alpha \star \beta)(0) = \alpha(0) = \mathbf{x}$ ,  $(\alpha \star \beta)(1) = \beta(1) = \mathbf{z}$ , logo  $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$ . ■

### 5.23 DEFINICIÓN (CONXUNTO CONEXO POR CAMIÑOS)

Dise que un subconxunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é **conexo por camiños** se, para cada par de puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ , existe un camiño en  $X$  que une  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

### 5.24 EXEMPLO

Calquera intervalo xeneralizado  $J \subset \mathbb{R}$  é conexo por camiños.

En efecto, se  $x, y \in J$  imos ver que existe un camiño que une  $x$  e  $y$ .

Se  $x = y$  valería o camiño constante (a relación “estar conectados por camiños” é reflexiva), así que podemos supoñer  $x \neq y$ , e ademais que  $x < y$  (xa que a relación é simétrica).

Así, a aplicación  $\alpha: \mathbb{I} = [0, 1] \rightarrow J \subset \mathbb{R}$  definida por

$$\alpha(t) = x + t(y - x),$$

é unha aplicación continua e  $\alpha(\mathbb{I}) = [x, y] \subset J$ , xa que  $J$  é un intervalo xeneralizado, e ademais  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ . Logo  $J$  é conexo por camiños.

### 5.25 TEOREMA

*Todo conxunto conexo por camiños é conexo.*

#### DEMOSTRACIÓN

Supoñamos que  $X$  é un subconxunto conexo por camiños de  $\mathbb{R}^n$ . De acordo cunha proposición anterior (proposición 5.12) para ver que  $X$  é conexo basta ver que dous puntos distintos calquera pertencen a un mesmo subconxunto conexo de  $X$ .

Sexan  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Xa que  $X$  é conexo por camiños,

$$\exists \alpha: \mathbb{I} \longrightarrow X \text{ camiño} \mid \alpha(0) = \mathbf{x}, \alpha(1) = \mathbf{y}.$$

Ademais,

$$\mathbb{I} = [0, 1] \text{ conexo, } \alpha: \mathbb{I} \rightarrow X \text{ continua} \implies \alpha(\mathbb{I}) \text{ conexo,}$$

logo  $C = \alpha(\mathbb{I})$  é un conxunto conexo,  $C \subset X$  e  $\mathbf{x} = \alpha(0), \mathbf{y} = \alpha(1) \in C$ .

Polo tanto,  $X$  é conexo. ■

### 5.26 PROPOSICIÓN

Se  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua e  $X$  é un conxunto conexo por camiños, entón o subconxunto  $f(X)$  de  $\mathbb{R}^m$  é conexo por camiños.

#### DEMOSTRACIÓN

Sexan  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in f(X)$  e vexamos que existe un camiño en  $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$  que une  $\mathbf{y}_0$  e  $\mathbf{y}_1$ .

Sexan  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in X$  tales que  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}_1 = f(\mathbf{x}_1)$ . Como  $X$  é conexo por camiños,

$$\exists \alpha: \mathbb{I} \rightarrow X \text{ camiño} \mid \alpha(0) = \mathbf{x}_0, \alpha(1) = \mathbf{x}_1,$$

e, por tanto,

$$f \circ \alpha: \mathbb{I} \rightarrow f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$$

é unha aplicación continua, por ser a composición de dúas aplicacións continuas, e ten a imaxe contida en  $f(X)$ , así que é un camiño en  $f(X)$ , e tal que

$$(f \circ \alpha)(0) = f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0, \quad (f \circ \alpha)(1) = f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1.$$

Polo tanto,  $f(X)$  é conexo por camiños. ■

### 5.27 COROLARIO

*A conexión por camiños é unha propiedade topolóxica.*

## 5.28 OBSERVACIÓN

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X$  é conexo por camiños se, e só se, hai unha única clase de equivalencia para a relación “estar conectados por camiños en  $X$ ”.

Así, fixado un punto  $\mathbf{x}_0 \in X$ ,  $X$  é conexo por camiños se, e só se, para cada punto  $\mathbf{x} \in X$  existe un camiño en  $X$  que une  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ .

## 5.29 EXEMPLO

Calquera bóla (aberta ou pechada) en  $\mathbb{R}^n$  é un conxunto conexo por camiños.

Vémolo para o caso das bólas abertas (e da mesma maneira faise para as bólas pechadas).

Dado que a conexión por camiños é unha propiedade topolóxica e todas as bólas abertas son homeomorfas entre si, basta ver que a bóla aberta  $B = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, 1)$  é conexa por camiños.

Agora, como a relación “estar conectados por camiños” é de equivalencia, basta ver que  $\mathbf{0} \sim \mathbf{x}$  para cada  $\mathbf{x} \in B$ , é dicir, basta ver que existe un camiño en  $B$  que une  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}$ . Pois ben, fixado  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B$ , tense que

$$\begin{aligned}\alpha: [0, 1] &\longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \alpha(t) = t\mathbf{x} = (tx_1, \dots, tx_n)\end{aligned}$$

é unha aplicación: está bien definida xa que toma valores en  $B$ , dado que se  $0 \leq t \leq 1$ , entón

$$d(\alpha(t), \mathbf{0}) = \|\alpha(t)\| = \|t\mathbf{x}\| = \underbrace{|t|}_{|t| \leq 1} \underbrace{\|\mathbf{x}\|}_{\|\mathbf{x}\| < 1} < 1,$$

é continua (o é cada compoñente  $t \in [0, 1] \rightarrow x_j t \in \mathbb{R}$ ), e une  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}$ , xa que  $\alpha(0) = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\alpha(1) = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

## **6. Compacidade**

### 6.1 DEFINICIÓN (RECUBRIMENTO)

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Un **recubrimento aberto** de  $X$  é unha familia  $\mathcal{U}$  de conxuntos abertos en  $X$  tales que

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Se  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}'$  é un recubrimento de  $X$ , é dicir,  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$ , dise que  $\mathcal{U}'$  é un **subrecubrimento** de  $\mathcal{U}$ .

Un recubrimento aberto  $\mathcal{U}$  de  $X$  (ou un subrecubrimento  $\mathcal{U}'$  de  $\mathcal{U}$ ) dise que é un recubrimento (ou un subrecubrimento) **finito** se é unha familia finita de conxuntos.

### 6.2 DEFINICIÓN (CONXUNTO COMPACTO)

Un conxunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  dise que é **compacto** se todo recubrimento aberto de  $X$  admite un subrecubrimento finito.

### 6.3 NOTA

A propiedade que define a un conxunto compacto chámase propiedade de Heine-Borel, e é equivalente considerar recubrimentos abertos de  $X$  ou recubrimentos de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ .

Un *recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$*  é unha familia  $\mathcal{V}$  de abertos en  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Se  $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$  é tal que  $X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}'} V$ , tamén dicimos que  $\mathcal{V}'$  é un **subrecubrimento** de  $\mathcal{V}$ .

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , as siguientes propiedades son equivalentes:

$$(a) \forall \mathcal{U} \text{ recubrimiento abierto de } X \exists U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U} \mid X = U_1 \cup \dots \cup U_m$$

$$(b) \forall \mathcal{V} \text{ recubrimiento de } X \text{ por abiertos en } \mathbb{R}^n \exists V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V} \mid X \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$$

**(a) $\Rightarrow$ (b)** Supoñemos (a), e consideramos un recubrimiento  $\mathcal{V}$  de  $X$  por abiertos en  $\mathbb{R}^n$ .

Entón,

$$X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \Rightarrow X = \left( \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right) \cap X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (V \cap X) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

onde  $\mathcal{U} = \{U \subset X \mid U = V \cap X, V \in \mathcal{V}\}$ , que é un recubrimiento abierto de  $X$ .

Por (a),

$$\exists U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U} \mid X = U_1 \cup \dots \cup U_m \subset \bigcup_{\exists V_i \in \mathcal{V} \mid V_i \cap X = U_i} V_1 \cup \dots \cup V_m.$$

**(b) $\Rightarrow$ (a)** Supoñemos (b), e consideramos un recubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  de  $X$ ,

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U, \quad U \in \mathcal{U} \Rightarrow U \text{ aberto en } X \Rightarrow \exists V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid U = V \cap X,$$

e se poñemos  $\mathcal{V} = \{V \text{ aberto en } \mathbb{R}^n \mid V \cap X \in \mathcal{U}\}$ , entón  $\mathcal{V}$  é un recubrimiento de  $X$  por abiertos en  $\mathbb{R}^n$  e podemos aplicar (b):

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \exists V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V} \mid X \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$$

$$\Rightarrow X = (V_1 \cup \dots \cup V_m) \cap X = (V_1 \cap X) \cup \dots \cup (V_m \cap X) = U_1 \cup \dots \cup U_m,$$

onde  $U_i = V_i \cap X \in \mathcal{U}$  (pola construción de  $\mathcal{V}$ )  $\forall i = 1, \dots, m$ . ■

## 6.4 PROPOSICIÓN

Sexa  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  unha aplicación continua. Se  $X$  é compacto, entón  $f$  é uniformemente continua.

### DEMOSTRACIÓN

Para probar que  $f: X \rightarrow Y$  é uniformemente continua temos que demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon.$$

Sexa  $\varepsilon > 0$ . Por hipótese,  $f$  é continua en cada punto  $\mathbf{a} \in X$ , logo

$$\forall \mathbf{a} \in X, \text{ dado } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_{\mathbf{a}} > 0 \mid f(B_X(\mathbf{a}, \delta_{\mathbf{a}})) \subset B_Y\left(f(\mathbf{a}), \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (*)$$

Agora,

$$X = \bigcup_{\mathbf{a} \in X} B_X\left(\mathbf{a}, \frac{\delta_{\mathbf{a}}}{2}\right),$$

logo  $\mathcal{U} = \{B_X(\mathbf{a}, \delta_{\mathbf{a}/2})\}_{\mathbf{a} \in X}$  é un recubrimento aberto de  $X$ . Polo tanto, se  $X$  é compacto,

$$\exists \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in X \mid X = B_X\left(\mathbf{a}_1, \frac{\delta_{\mathbf{a}_1}}{2}\right) \cup \dots \cup B_X\left(\mathbf{a}_m, \frac{\delta_{\mathbf{a}_m}}{2}\right).$$

Tomamos  $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{\mathbf{a}_1}, \dots, \delta_{\mathbf{a}_m}\}$ , e sexan  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ . Imos comprobar que se  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$  (neste caso  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  van a estar nunha mesma bóla aberta  $B_X(\mathbf{a}_i, \delta_{\mathbf{a}_i})$ ), entón  $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon$ . En efecto,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} \in X &\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, m\} \mid \mathbf{x} \in B\left(\mathbf{a}_j, \frac{\delta_{\mathbf{a}_j}}{2}\right) \subset B(\mathbf{a}_j, \delta_{\mathbf{a}_j}) \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a}_j)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \mathbf{y} \in X &\Rightarrow d(\mathbf{y}, \mathbf{a}_j) \leq d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{a}_j) < \delta + \frac{\delta_{\mathbf{a}_j}}{2} \leq \delta_{\mathbf{a}_j} \Rightarrow d(f(\mathbf{y}), f(\mathbf{a}_j)) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\}$$
$$\Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a}_j)) + d(f(\mathbf{a}_j), f(\mathbf{y})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## 6.5 EXEMPLOS

- Todo subconjunto finito  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é compacto.

Se  $X = \emptyset$ , é trivial. Se  $X \neq \emptyset$ , supoñamos que  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$  e sexa  $\mathcal{V}$  un recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ . Entón,

$$\begin{aligned} X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V &\implies \forall i = 1, \dots, m \exists V_i \in \mathcal{V} \mid \mathbf{x}_i \in V_i \\ &\implies X = \{\mathbf{x}_1\} \cup \dots \cup \{\mathbf{x}_m\} \subset V_1 \cup \dots \cup V_m. \end{aligned}$$

Ou ben, se houbésemos tomado un recubrimento aberto  $\mathcal{U}$  do conxunto finito  $X$ , entón  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  é finito, logo o mesmo  $\mathcal{U}$  valería como subrecubrimento finito de  $\mathcal{U}$ .

- Ningún subconjunto discreto infinito de  $\mathbb{R}^n$  é compacto.

Se  $X$  é discreto, entón  $\mathcal{U} = \{\{\mathbf{x}\} \mid \mathbf{x} \in X\}$  é un recubrimento aberto de  $X$ , xa que  $X = \bigcup_{\mathbf{x} \in X} \{\mathbf{x}\}$ . Se  $X$  é compacto, entón

$$\exists \{\mathbf{x}_1\}, \dots, \{\mathbf{x}_m\} \in \mathcal{U} \mid X = \{\mathbf{x}_1\} \cup \dots \cup \{\mathbf{x}_m\} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\},$$

é dicir, calquera subconjunto compacto discreto de  $X$  é necesariamente finito. Por exemplo,  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  non son compactos.

- O subconjunto  $X = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}$  non é compacto.

En efecto, da propiedade arquimediana de  $\mathbb{R}$ , séguese que

$$(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n}, 1\right),$$

así que  $\mathcal{U} = \{(1/n, 1) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$  é un recubrimento aberto de  $X$ .

Se  $\mathcal{U}$  tivese un subrecubrimento finito  $\mathcal{U}' = \{(1/n_i, 1) \mid i = 1, \dots, m\}$ , sería

$$(0, 1) = \left(\frac{1}{n_1}, 1\right) \cup \dots \cup \left(\frac{1}{n_m}, 1\right) = \left(\frac{1}{N}, 1\right) \neq (0, 1), \quad N = \max\{n_1, \dots, n_m\}.$$

- $\mathbb{R}^n$  no é compacto, como se segue da seguinte proposición.

## 6.6 PROPOSICIÓN

*Todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  é acoutado.*

DEMOSTRACIÓN

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

$$X \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(\mathbf{0}, k),$$

como consecuencia da propiedade arquimediana de  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \implies \|\mathbf{x}\| \geq 0 \implies \exists k \in \mathbb{N}, \|\mathbf{x}\| < k \implies \exists k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, k),$$

logo  $\mathcal{V} = \{ B(\mathbf{0}, k) \mid k \in \mathbb{N} \}$  é un recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $X$  é compacto, entón

$$\exists k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N} \mid X \subset B(\mathbf{0}, k_1) \cup \dots \cup B(\mathbf{0}, k_m) = B(\mathbf{0}, r),$$

onde  $r = \max\{k_1, \dots, k_m\}$ , e polo tanto  $X$  é acoutado.

## 6.7 COROLARIO

*$\mathbb{R}^n$  non é compacto.*

## 6.8 PROPOSICIÓN

Todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ .

DEMOSTRACIÓN

Paso 1

$$\left. \begin{array}{l} X \subset \mathbb{R}^n, X \text{ compacto} \\ y \in \mathbb{R}^n \setminus X \end{array} \right\} \Rightarrow \exists U, V \text{ abertos en } \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} X \subset U, \\ y \in V, \end{array} \quad U \cap V = \emptyset,$$

pois

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in X \\ y \notin X \end{array} \right\} \Rightarrow x \neq y \xrightarrow{\mathbb{R}^n \text{ Hausdorff}} \exists U_x, V_x \text{ abertos en } \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} x \in U_x \\ y \in V_x \end{array} \quad U_x \cap V_x = \emptyset,$$

logo

$$X \subset \bigcup_{x \in X} U_x, \quad y \in \bigcap_{x \in X} V_x.$$

conque se ten

$$X \subset \bigcup_{x \in X} U_x \xrightarrow{X \text{ compacto}} \exists x_1, \dots, x_m \in X \mid \begin{array}{l} X \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m} = U \\ y \in V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_m} = V, \end{array}$$

onde  $U$  e  $V$  son abertos en  $\mathbb{R}^n$ , e son disjuntos:

$$\begin{aligned} U \cap V &= (U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}) \cap V = (U_{x_1} \cap V) \cup \dots \cup (U_{x_m} \cap V) \\ &\subset (U_{x_1} \cap V_{x_1}) \cup \dots \cup (U_{x_m} \cap V_{x_m}) = \underset{=\emptyset}{\emptyset} \cup \dots \cup \underset{=\emptyset}{\emptyset} = \emptyset \implies U \cap V = \emptyset. \end{aligned}$$

Paso 2

Polo paso anterior, se  $X$  é compacto, entón é pechado en  $\mathbb{R}^n$ , xa que

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{R}^n \setminus X &\implies \exists U, V \text{ abertos en } \mathbb{R}^n \mid y \in V \subset \mathbb{R}^n \setminus U \subset \mathbb{R}^n \setminus X \\ &\implies \exists r > 0 \mid B(y, r) \subset V \subset \mathbb{R}^n \setminus X \\ &\implies \mathbb{R}^n \setminus X \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

■

## 6.9 TEOREMA

O intervalo pechado  $\mathbb{I} = [0, 1]$  é compacto.

DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\mathcal{U}$  un recubrimento aberto do intervalo pechado  $\mathbb{I} = [0, 1]$ , é dicir,

$$\mathbb{I} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U, \quad U \text{ aberto en } \mathbb{I} \quad \forall U \in \mathcal{U},$$

e debemos ver que  $\mathbb{I}$  está contido nunha unión finita de membros de  $\mathcal{U}$ .

Para isto, consideramos o conxunto

$$E = \{x \in \mathbb{I} \mid [0, x] \text{ está contido nunha unión finita de membros de } \mathcal{U}\},$$

e debemos ver que  $1 \in E$ , é dicir, que  $E = \mathbb{I}$ , para o que probaremos que é un conxunto non baleiro que é aberto e pechado en  $\mathbb{I}$ ; posto que  $\mathbb{I}$  é conexo será  $E = \mathbb{I}$ .  
En primeiro lugar,  $E$  é non baleiro, xa que

$$0 \in \mathbb{I} \implies \exists U \in \mathcal{U} \mid 0 \in U \implies \exists r > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(0, r) = [0, r] \subset U \implies [0, r] \subset E.$$

$[0, x] \subset U \quad \forall x \in [0, r]$

$E$  é aberto en  $\mathbb{I}$ :

$$x \in E \subset \mathbb{I} \implies \exists U_0 \in \mathcal{U} \mid x \in U_0 \implies \exists r > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(x, r) = (x - r, x + r) \cap \mathbb{I} \subset U_0$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\exists U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U}, \quad \forall y \in B_{\mathbb{I}}(x, r),$$

$$[0, x] \subset U_1 \cup \dots \cup U_m \implies [0, y] \subset U_1 \cup \dots \cup U_m \cup U_0 \implies B_{\mathbb{I}}(x, r) \subset E.$$

$E$  é pechado en  $\mathbb{I}$ :

$$x \in \mathbb{I} \setminus E \subset \mathbb{I} \implies \exists \tilde{U}_0 \in \mathcal{U} \mid x \in \tilde{U}_0 \implies \exists s > 0 \mid B_{\mathbb{I}}(x, s) = (x - s, x + s) \cap \mathbb{I} \subset \tilde{U}_0,$$

logo  $B_{\mathbb{I}}(x, s) \subset \mathbb{I} \setminus E$ , xa que se existe  $y \in B_{\mathbb{I}}(x, s)$  tal que  $y \in E$ , entón

$$\exists \tilde{U}_i \in \mathcal{U} \mid [0, y] \subset \tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_l \implies [0, x] \subset \tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_l \cup \tilde{U}_0 \implies x \in E.$$



### 6.10 TEOREMA

Se  $X$  é un subconxunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua e sobreactiva, entón o subconxunto  $Y$  de  $\mathbb{R}^m$  é compacto.

#### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $\mathcal{U}$  un recubrimento aberto de  $Y$ , isto é,

$$Y = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U, \quad U \text{ aberto en } Y \quad \forall U \in \mathcal{U},$$

e debemos ver que  $\mathcal{U}$  ten un subrecubrimento finito. Agora,

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U),$$

e cada  $f^{-1}(U)$  é aberto en  $X$  porque  $U$  é aberto en  $Y$  e  $f: X \rightarrow Y$  é continua. Logo  $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$  é un recubrimento aberto de  $X$ . Como  $X$  é compacto, existen  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$  tales que

$$X = f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k),$$

logo

$$\begin{aligned} Y &= f(X) = f(f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k)) \\ &= f(f^{-1}(U_1)) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_k)) = U_1 \cup \dots \cup U_k. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### 6.11 COROLARIO

Se  $X$  é un subconxunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$  é unha aplicación continua, entón o subconxunto  $f(X)$  de  $\mathbb{R}^m$  é compacto.

### 6.12 COROLARIO

A compacidade é unha propiedade topolóxica.

### 6.13 COROLARIO

Calquera intervalo pechado  $[a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ) é compacto.

## 6.14 EXERCICIO

(1) Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , entón

$$B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r/\sqrt{2}) \times B_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{y}, r/\sqrt{2}) \subset B_{\mathbb{R}^{n+m}}((\mathbf{x}, \mathbf{y}), r).$$

(2) Se  $W$  é un aberto en  $\mathbb{R}^{n+m}$  e  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$ , entón existe un aberto  $U$  en  $\mathbb{R}^n$  e un aberto  $V$  en  $\mathbb{R}^m$  tal que  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \subset W$ .

## 6.15 TEOREMA

*O produto cartesiano de conxuntos compactos é un conxunto compacto.*

DEMOSTRACIÓN

**Paso 1** (Lema do tubo) *Sexan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m, Y$  compacto. Sexa  $W$  un aberto en  $\mathbb{R}^{n+m}$  tal que  $\{\mathbf{x}\} \times Y \subset W$ . Entón existe un aberto  $U$  en  $\mathbb{R}^n$  que contén a  $\mathbf{x}$  tal que  $\{\mathbf{x}\} \times Y \subset U \times Y \subset W$ .*

PROBA. Para cada  $\mathbf{y} \in Y, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$ , logo (exercicio anterior)

$$\begin{array}{l} \exists U_{\mathbf{y}} \text{ aberto en } \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in U_{\mathbf{y}} \\ \exists V_{\mathbf{y}} \text{ aberto en } \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in V_{\mathbf{y}} \end{array} \left| (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_{\mathbf{y}} \times V_{\mathbf{y}} \subset W. \right.$$

Agora,  $\mathcal{V} = \{V_{\mathbf{y}} \mid \mathbf{y} \in Y\}$  é un recubrimento do compacto  $Y$  por abertos en  $\mathbb{R}^m$ , logo

$$\exists \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \in Y \mid Y \subset V_{\mathbf{y}_1} \cup \dots \cup V_{\mathbf{y}_k}.$$

Se  $U = U_{\mathbf{y}_1} \cap \dots \cap U_{\mathbf{y}_k}$ , entón  $U$  é un aberto en  $\mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in U$ , e tense

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}\} \times Y &\subset U \times Y \subset U \times (V_{\mathbf{y}_1} \cup \dots \cup V_{\mathbf{y}_k}) \\ &= (U \times V_{\mathbf{y}_1}) \cup \dots \cup (U \times V_{\mathbf{y}_k}) \\ &\subset (U_{\mathbf{y}_1} \times V_{\mathbf{y}_1}) \cup \dots \cup (U_{\mathbf{y}_k} \times V_{\mathbf{y}_k}) \\ &\subset W. \end{aligned}$$

**Paso 2** Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$  son conjuntos compactos, entón  $X \times Y$  é un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

PROBA. Sexa  $\mathcal{W}$  un recubrimento de  $X \times Y$  por abertos en  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Dado  $\mathbf{x} \in X$ ,  $\{\mathbf{x}\} \times Y \approx Y$ , logo  $\{\mathbf{x}\} \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$  é compacto, e  $\mathcal{W}$  tamén recubre  $\{\mathbf{x}\} \times Y$ ,

$$\{\mathbf{x}\} \times Y \subset \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \implies \exists W_1, \dots, W_l \in \mathcal{W} \mid \{\mathbf{x}\} \times Y \subset W_1 \cup \dots \cup W_l = \widetilde{W}_x$$

$\{\mathbf{x}\} \times Y$  compacto notación  $\nearrow$

así que  $\widetilde{W}_x$  é un aberto en  $\mathbb{R}^{n+m}$  que contén a  $\{\mathbf{x}\} \times Y$ , conque polo lema do tubo,

$$\exists U_x \text{ aberto en } \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in U_x \mid \{\mathbf{x}\} \times Y \subset U_x \times Y \subset \widetilde{W}_x \text{ unión finita de membros de } \mathcal{W}.$$

Agora, a familia  $\mathcal{U} = \{U_x \mid \mathbf{x} \in X\}$  é un recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ , e dado que  $X$  é compacto,

$$\exists \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \in X \mid X \subset U_{\mathbf{x}_1} \cup \dots \cup U_{\mathbf{x}_r},$$

e, polo tanto,

$$X \times Y \subset (U_{\mathbf{x}_1} \times Y) \cup \dots \cup (U_{\mathbf{x}_r} \times Y) \subset \widetilde{W}_{\mathbf{x}_1} \cup \dots \cup \widetilde{W}_{\mathbf{x}_r},$$

onde cada  $\widetilde{W}_{\mathbf{x}_i}$  é unha unión finita de membros de  $\mathcal{W}$ , do que se segue que, en efecto,  $\mathcal{W}$  ten un subrecubrimento finito. Logo  $X \times Y$  é compacto.

**Paso 3** Se  $X_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, \dots, X_k \subset \mathbb{R}^{n_k}$  son conjuntos compactos, entón  $X_1 \times \dots \times X_k$  é un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k}$ .

PROBA. Por indución: para  $k = 2$  verificase polo paso 2. Supoñemos que se verifica por  $k - 1$  e é inmediato que se verifica para  $k$ , xa que

$$X_1 \times \dots \times X_k \approx (X_1 \times \dots \times X_{k-1}) \times X_k$$

compacto  
por hipótese indución

é compacto, outra vez polo paso 2. ■

## 6.16 COROLARIO

Para cada  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ , onde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i < b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , o *rectángulo pechado* de  $\mathbb{R}^n$ , de extremos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , definido por

$$R[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i; i = 1, \dots, n \},$$

é compacto.

### DEMOSTRACIÓN

Todo rectángulo pechado é produto cartesiano de intervalos pechados, que son compactos,

$$R[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]. \quad \blacksquare$$

## 6.17 LEMA

Todo subconxunto pechado dun compacto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto.

### DEMOSTRACIÓN

Sexa  $F \subset X$ ,  $X$  compacto e  $F$  pechado en  $\mathbb{R}^n$  (equivalentemente, pechado en  $X$ , xa que  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ ). Consideramos un recubrimento  $\mathcal{V}$  de  $F$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$F \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \implies X \subset F \cup (\mathbb{R}^n \setminus F) \subset \left( \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right) \cup (\mathbb{R}^n \setminus F),$$

logo  $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \{ \mathbb{R}^n \setminus F \}$  é un recubrimento de  $X$  por abertos en  $\mathbb{R}^n$ , e xa que  $X$  é compacto, tense

$$\begin{aligned} \exists V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}} \mid X \subset V_1 \cup \dots \cup V_m \cup (\mathbb{R}^n \setminus F) \\ \implies \exists V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V} \mid F \subset V_1 \cup \dots \cup V_m. \end{aligned}$$

Polo tanto,  $F$  é compacto. \blacksquare

## 6.18 TEOREMA (Teorema de HEINE-BOREL (1ª versión))

Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é compacto se, e só se, é pechado en  $\mathbb{R}^n$  e acoutado.

### DEMOSTRACIÓN

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é compacto xa temos visto que  $X$  é acoutado (proposición 6.6) e pechado en  $\mathbb{R}^n$  (proposición 6.8).

Reciprocamente, supoñamos que  $X$  é acoutado e pechado en  $\mathbb{R}^n$ . Entón,

$$X \text{ acoutado} \implies \exists r > 0 \mid X \subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, r) \subset [-r, r] \times \dots \times [-r, r] \text{ compacto,}$$

e como  $X$  é un pechado contido nun rectángulo pechado, que é compacto, entón, polo lema anterior,  $X$  é compacto. ■

## 6.19 PROPOSICIÓN

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é un conxunto compacto non baleiro, toda función continua  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  “alcanza” o seu máximo e o seu mínimo.

### DEMOSTRACIÓN

Dado que  $X$  é compacto,  $X \neq \emptyset$ , e  $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é unha aplicación continua, o subconjunto  $f(X)$  de  $\mathbb{R}$  é compacto, logo é un subconjunto (non baleiro) acoutado e pechado en  $\mathbb{R}$ ,

$$f(X) \text{ acoutado, } f(X) \neq \emptyset \implies \begin{matrix} \exists M = \sup f(X) \\ \exists m = \inf f(X) \end{matrix} \implies \begin{matrix} M \in f(X) \\ m \in f(X) \end{matrix}$$

xa que se  $M \notin f(X)$ , como  $f(X)$  é pechado en  $\mathbb{R}$ ,

$$\exists r > 0 \mid (M - r, M + r) \subset \mathbb{R} \setminus f(X),$$

o que contradí a definición de supremo, xa que  $M - r/2$  sería unha cota superior de  $f(X)$  menor que  $M$ , así que  $M \in f(X)$ . Análogamente,  $m \in f(X)$ . ■

## 6.20 TEOREMA (Teorema de HEINE-BOREL: Caracterización da compacidade)

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ , as seguintes propiedades son equivalentes:

- (a)  $X$  é compacto ( $X$  ten a [propiedade de Heine-Borel](#)).
- (b) Todo subconxunto infinito de  $X$  ten un punto de acumulación en  $X$  ( $X$  satisfai a [propiedade de Bolzano-Weierstrass](#)).
- (c) Toda sucesión en  $X$  ten unha subsucesión converxente en  $X$  ( $X$  é [secuencialmente compacto](#)).
- (d)  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  e acoutado.

### DEMOSTRACIÓN

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sexa  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X$  compacto, e supoñamos que  $A$  é un subconxunto de  $X$  que non ten ningún punto de acumulación en  $X$ . Tense:

$$\forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \notin A' \implies \forall \mathbf{x} \in X \exists r_x > 0 \mid B^*(\mathbf{x}, r_x) \cap A = \emptyset,$$

é dicir,  $B(\mathbf{x}, r_x)$  contén como moito un punto en  $A$  (o punto  $\mathbf{x}$ , se  $\mathbf{x} \in A$ ). Agora,

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B(\mathbf{x}, r_x) \stackrel{(a)}{\implies} \exists \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in X \mid X \subset B(\mathbf{x}_1, r_{\mathbf{x}_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{\mathbf{x}_m})$$

$$\implies A \subset X \subset B(\mathbf{x}_1, r_{\mathbf{x}_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{\mathbf{x}_m})$$

$$\implies A = A \cap (B(\mathbf{x}_1, r_{\mathbf{x}_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{\mathbf{x}_m}))$$

$$\implies A \subset \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} \implies A \text{ é finito.}$$

Logo  $X$  satisfai a propiedade de B-W.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Supoñemos que  $X$  satisfaí a propiedade de B-W, consideramos unha sucesión  $\{\mathbf{x}_k\}$  en  $X$  e imos ver que ten unha subsucesión converxente a un punto de  $X$ .

Para isto, tomamos o conxunto

$$A = \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset X.$$

Se  $A$  é finito, ao menos un termo da sucesión repítese infinitamente, logo  $\{\mathbf{x}_k\}$  ten unha subsucesión constante, que é converxente en  $X$ .

Se  $A$  é infinito, pola hipótese existe polo menos un punto  $\mathbf{x} \in X$  tal que  $\mathbf{x}$  é punto de acumulación de  $A$ . Pois ben, imos ver que  $\{\mathbf{x}_k\}$  ten unha subsucesión que converxe a  $\mathbf{x}$ , para o que imos construír unha aplicación estritamente crecente  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que defina unha tal subsucesión. Xa que  $\mathbf{x} \in A'$ , cada bóla aberta en  $\mathbb{R}^n$  de centro  $\mathbf{x}$  contén infinitos puntos de  $A$ , e imos utilizar que, en particular, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B(\mathbf{x}, 1/k) \cap A$  é infinito:

$$k = 1 \implies \exists m_1 \in \mathbb{N} \mid \mathbf{x}_{m_1} \in B(\mathbf{x}, 1) \cap A, \quad \text{poñemos } \varphi(1) = m_1,$$

$$k = 2 \implies \exists m_2 \in \mathbb{N}, m_2 > m_1 \mid \mathbf{x}_{m_2} \in B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{2}\right) \cap A, \quad \text{poñemos } \varphi(2) = m_2,$$

e procedemos por indución. Se supoñemos definidos  $\varphi(1), \dots, \varphi(k-1)$ ,

$$\exists m_k > m_{k-1} \mid \mathbf{x}_{m_k} \in B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{k}\right) \cap A, \quad \text{poñemos } \varphi(k) = m_k.$$

Así,  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$  é unha subsucesión de  $\{\mathbf{x}_k\}$ , e dado que  $\mathbf{x}_{\varphi(k)} \in B(\mathbf{x}, 1/k)$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , séguese que  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}$  (lema 3.12 de construción de sucesións converxentes). Logo  $X$  é secuencialmente compacto.

(c)⇒(d)

Supoñemos que  $X$  é secuencialmente compacto e imos ver que  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  e acoutado.

Se  $X$  no é acoutado,

$$\forall k \in \mathbb{N}, X \not\subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, k) \implies \exists \mathbf{x}_k \in X \mid \|\mathbf{x}_k\| \geq k.$$

Tense que  $\{\mathbf{x}_k\}$  é unha sucesión en  $X$  e, pola hipótese, debe ter unha subsucesión converxente  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$ . Agora ben,

$$\|\mathbf{x}_{\varphi(k)}\| \geq \varphi(k) \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

logo o conxunto  $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$  non é acoutado, o que contradí que o conxunto de puntos de calquera sucesión converxente debe ser acoutado (proposición 3.20).

Polo tanto, se  $X$  é secuencialmente compacto, entón é acoutado.

Para probar que  $X$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  imos utilizar a caracterización secuencial dos pechados en  $\mathbb{R}^n$  (corolario 3.14), é dicir,

$$X \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n \iff \forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, [\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in X].$$

Pois ben, sexa  $\{\mathbf{x}_k\}$  unha sucesión en  $X$  tal que  $\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Debemos ver que  $\mathbf{x}_0 \in X$ . Tense

$$\left. \begin{array}{l} \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X \xrightarrow{\text{hipótese}} \exists \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \text{ subsucesión de } \{\mathbf{x}_k\} \mid \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{y}_0 \in X \\ \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \text{ subsucesión de } \{\mathbf{x}_k\}, \{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \xrightarrow{3.11} \{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \rightarrow \mathbf{x}_0 \end{array} \right\}$$
$$\implies \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 \in X. \quad \text{Logo } X \text{ é pechado en } \mathbb{R}^n.$$

(d)⇒(a)

Está na 1ª versión do teorema de Heine-Borel. ■

## 6.21 COROLARIO

*Todo subconjunto infinito acotado  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  ten ao menos un punto de acumulación (en  $\mathbb{R}^n$ ).*

### DEMOSTRACIÓN

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é acotado, entón a súa clausura  $X = \bar{A}$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$  e acotado, logo compacto, e polo tanto o subconjunto infinito  $A$  e  $X$  ten algún punto de acumulación en  $X \subset \mathbb{R}^n$ . ■