



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O Péndulo de Foucault: a xeometría diferencial da forma e do movemento da Terra

Carlos Paz Valiela

2020-2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O Péndulo de Foucault: a xeometría diferencial da forma e do movemento da Terra

Carlos Paz Valiela

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e topoloxía
Título: O Péndulo de Foucault: a xeometría diferencial da forma e do movemento da Terra
Breve descrición do contido
O Péndulo de Foucault é un péndulo esférico que oscila libremente nun plano vertical e utilízase para demostrar a rotación da Terra e o efecto Coriolis. O seu nome débese ao seu inventor, Jean Bernard Léon Foucault. O traballo consistirá, basicamente, na lectura e comprensión dos contidos dos artigos que aparecen na bibliografía co fin de relacionar o Péndulo de Foucault con conceptos de xeometría diferencial estudados no grao como poden ser: transporte paralelo, Teorema de Gauss-Bonnet ou curvatura de Gauss.
Recomendacións
Como complemento, recoméndase a lectura do libro <i>El Péndulo de Foucault</i> de Umberto Eco.

Naquela época feliz, eu aínda cría que a estupidez producía o enigma. A outra tarde no periscopio pensaba que os enigmas máis terríbeis, para non revelarse como tal, disfrázanse de loucura. Agora, en cambio, estou persuadido de que o mundo é un enigma benigno, que a nosa loucura volve terrible porque pretende interpretalo conforme á súa propia verdade.

El Péndulo de Foucault, Umberto Eco, Editorial Lumen.

Índice xeral

Resumo	X
Introdución	XIII
1. Superficies regulares	1
1.1. Aplicacións diferenciables entre superficies	2
1.2. O plano tanxente	2
1.2.1. Base do plano tanxente $T_p\mathcal{S}$	3
1.2.2. Compoñentes dun vector respecto da base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$	4
1.2.3. Vector normal á superficie nun punto p	4
1.3. A diferencial dunha aplicación entre superficies	5
1.4. A Primeira forma fundamental	7
1.5. Segunda forma fundamental	8
1.5.1. Expresións notables	10
1.6. Curvatura xeodésica e curvatura normal	10
1.6.1. Interpretación xeométrica e relación coas curvaturas principais	11
1.6.2. Orientación en superficies	12
2. A derivada covariante	13
2.1. Campos de vectores ao longo dunha curva	13
2.2. A derivada covariante	15
2.2.1. Expresión intrínseca da derivada covariante	15
2.3. Campos de vectores paralelos	17
2.4. Transporte paralelo	19
3. Teorema local de Gauss-Bonnet	23
3.1. Ángulo de rotación dunha curva plana regular	23
3.2. Teorema local de Gauss-Bonnet	27

4. Superficies regradas	29
4.1. Superficies desenvolvibles	30
4.1.1. Caso particular da esfera	33
5. A xeometría do péndulo de Foucault	37
5.1. A holonomía	37
5.2. Relación da holonomía co teorema de Gauss-Bonnet	42
5.3. Obtención da holonomía por medio de isometrías locais	43
5.3.1. Holonomía no ecuador da esfera	44
5.3.2. Holonomía nun paralelo de latitude $\varphi_0 \neq 0$	45
5.4. A Terra rota	49
A. Expresións notables	55
Bibliografía	57

Resumo

Nesta memoria, o noso obxectivo é mostrar o funcionamento do Péndulo de Foucault, o que nos levará a ser capaces de probar a rotación da Terra. Faremos uso de técnicas de xeometría diferencial, coma a derivada covariante ou a holonomía, que nos permitirán unha comprensión da xeometría e dinámica do péndulo.

Abstract

The objective of this report is to show the functioning of the Foucault Pendulum, that will allow us to proof the Earth rotation. We will use differential geometry notions, such as the covariant derivative or the holonomy, which will help us to understand the geometry and dynamics of the pendulum.

Introdución

A Terra rota. É unha idea incuestionable, pois dende idades moi temperás sempre se nos di que a Terra é unha esfera que rota sobre si mesma e que á vez gravita en torno ao Sol. Temos fotografías, milleiros de libros, leis e fórmulas que o avalan, pero ao longo da historia da humanidade non sempre foi así. De feito o primeiro que nos din os nosos sentidos sobre a forma da Terra cando miramos ao horizonte é que é plana. Esta idea estivo vixente ata os tempos clásicos, nos que Pitágoras e Aristóteles defendían que o noso mundo era unha esfera; e posteriormente, por se alguén o dubidaba, Juan Sebastián Elcano circunnavegou o globo entre 1519 e 1523, probando así que o planeta azul era, en efecto, esférico.

O seguinte paso era o lóxico: pensar na forma do Sistema Solar e, novamente, a humanidade obedecía aos sentidos, vendo os astros xirar na esfera do firmamento e xurdindo así o xeocentrismo, con Ptolomeo (século II d.C) como máximo expoñente. Pero a curiosidade humana non ten límites, polo que xurdiron dúbidas de por que o Sol sae a diferentes horas, ou por que as constelacións cambian ao moverse de hemisferio. Todo apuntaba ao heliocentrismo, no que os planetas orbitan arredor do Sol á vez que rotan sobre si mesmos, unha teoría moito máis fermosa á vez que simple e que respondía tódalas cuestións anteriores. Neste marco podemos incluír a Aristarco de Samos (310 a.C-230 a.C), astrónomo grego que se postulou como o primeiro en propoñer dita teoría, posteriormente reafirmada por Copérnico, quen se decatou da súa beleza e de que permitía un cálculo moito máis simple das posicións planetarias. Só faltaba unha proba clara de que a Terra xiraba sobre o seu eixo, e as persoas que se aventuraban a afirmar dita teoría nunca saían ben paradas: véxase Giordano Bruno, un monxe italiano que foi torturado e queimado vivo pola Inquisición en Roma no ano 1600. Esta mesma organización relixiosa tamén levou a xuízo no 1633 a Galileo Galilei pola publicación da súa obra *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632), na que defendía o modelo heliocéntrico de Copérnico. Ao final este científico decidiu rectificar por temor a sufrir o mesmo destino que Giordano.

Pasaron tres séculos ata que chegou a proba definitiva. Era o 2 de febreiro de 1851; un físico e astrónomo francés, Léon Foucault mandou invitacións aos científicos máis destacados da capital francesa para “ver a terra xirar”. Ninguén esperaba que ao día seguinte,

unha das cuestións máis controversiais da historia da humanidade ía ser resolta dunha das maneiras máis elegantes posibles.



Figura 1: Léon Foucault. Imaxe de [3]

O experimento que probou dinámicamente que a Terra rotaba levouse a cabo no Panteón de París o día 3 de Febreiro de 1851. Para a proba, Foucault utilizou un arame de 67 metros de lonxitude para colgar unha bala de canón acabada en punta, que ía debuxando as oscilacións sobre unha superficie de area. O físico francés tiña que actuar con sumo coidado, pois calquera forza externa podía poñer en perigo o experimento. Por iso procedeu do seguinte xeito: moveu o péndulo dende o repouso ata a posición inicial, na que se ía soltar e atouno cunha corda, á que posteriormente lle prendeu lume. Cando a corda ardeu por

completo, o péndulo comezou a oscilar, sen forzas externas actuando sobre el, agás a da gravidade (e a do rozamento co aire, que é despreziable); así que pasados os minutos comezouse a notar que paseniño, o plano de oscilación do péndulo ía rotando respecto á súa posición inicial, de forma lenta pero continua. Era un experimento extremadamente simple, á vez que efectivo, polo que a meirande parte dos científicos da sala preguntábanse como era posible que non se decataran de algo tan sinxelo. Mentres, outros sostían, incrédulos, que o que estaba acontecendo non podía ser posible. Ademais, por se non era suficiente, Foucault aportou unha fórmula para calcular o período do péndulo en calquera posición da Terra: *a lei do seno de Foucault*,

$$T = \frac{24}{\text{sen}(\varphi_0)}, \quad (1)$$

onde T é o período en horas e φ_0 é a latitude.

Ao remate deste traballo seremos capaces de probar a rotación da Terra e dita fórmula. Con este fin utilizaremos técnicas de xeometría diferencial, como a holonomía, que mide canto rota un vector respecto a unha referencia ortonormal fixada a medida que este se move paralelamente ao longo dunha curva.

Para esta introdución histórica baseámonos en información de [1], [2], [6], [7] e [8]. O resto da memoria consta de 5 capítulos, que se estruturan como segue:



Figura 2: Péndulo de Foucault na Facultade de Física da USC. Fotografía orixinal.

Nos capítulos 1, 2 e 3, apoiarémonos nos libros [6] e [5], para dar unha base teórica sobre as superficies regulares e introducir conceptos importantes relacionados coas mesmas, como a derivada covariante. Mencionaremos posteriormente o Teorema local de Gauss-Bonnet, sobre o cal estableceremos unha conexión coa holonomía nos paralelos da esfera. Posteriormente basearémonos en [5] para o capítulo 4, no que trataremos dous casos concretos de superficies regradas, que nos serán de axuda para o capítulo 5. Neste utilizaremos a holonomía, explicada en [6], [5], [8] e [2] como base para tratar o funcionamento do péndulo.

Para a elaboración desta memoria fixen uso de conceptos de xeometría diferencial, que aprendín nas asignaturas de Curvas e Superficies e Teoría Global de Superficies. Tamén utilicei certas nocións de diferenciabilidade de funcións en varias variables, de espazos vectoriais, de xeometría linear e de cálculo vectorial. Ademáis, tódalas figuras son de elaboración propia, inspiradas nas que aparecen en [6] e [5]. Debido á aplicación de tódolos coñecementos mencionados sentínome moi realizado ao facer a memoria, pois fun capaz de relacionar o aprendido nestes últimos anos cun feito que todos damos por certo, pero que non todo o mundo comprobou.

Capítulo 1

Superficies regulares

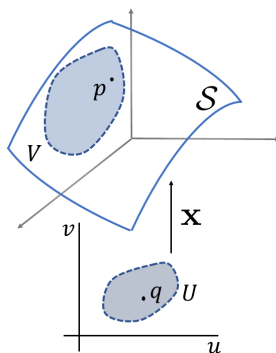
Neste capítulo enunciaremos unha serie de definicións, resultados e expresións que serán necesarios para unha mellor comprensión do traballo. Centrarémonos en introducir as superficies regulares, coas súas propiedades máis relevantes para o estudo que imos facer posteriormente.

Intuitivamente, unha superficie regular é un subconxunto de \mathbb{R}^3 que se forma tomando anacos de planos elásticos, estirándoos e dobrándoos de maneira suave, para logo pegalos sen que se note a unión.

Definición 1.1. Un subconxunto non baleiro $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ é unha *superficie regular* se para todo punto $p \in \mathcal{S}$ existen un aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, unha veciñanza aberta V de p en \mathcal{S} (coa topoloxía relativa de $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$) e unha aplicación $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que:

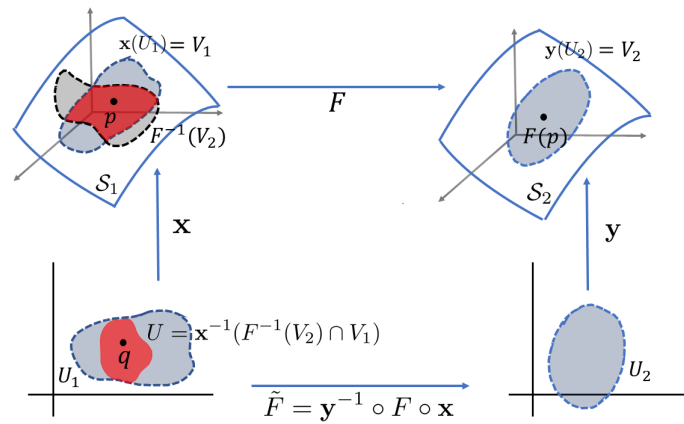
1. $\mathbf{x}(U) = V$ e $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciable como aplicación entre espazos euclidianos.
2. $\mathbf{x} : U \rightarrow V$ é un homeomorfismo.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é inxectiva.

En tal caso diremos que (U, \mathbf{x}) é unha *parametrización* ou un *sistema de coordenadas* de \mathcal{S} en p e V un *entorno coordinado*.



1.1. Aplicacións diferenciables entre superficies

Será de especial importancia estudarmos a diferenciabilidade de aplicacións entre superficies. Para facelo, “levaremos” as aplicacións ao plano de coordenadas e utilizaremos as técnicas do cálculo en varias variables, co que xa estamos familiarizados. Así, se $F : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ é unha aplicación entre superficies regulares, diremos que $\tilde{F} = \mathbf{x}_2^{-1} \circ F \circ \mathbf{x}_1$ é a *expresión en coordenadas* de F . Entón, diremos que F é diferenciable se, para todo $p \in \mathcal{S}_1$ e calquera parametrizacións (U_1, \mathbf{x}_1) de \mathcal{S}_1 en p e (U_2, \mathbf{x}_2) de \mathcal{S}_2 en $F(p)$, a expresión en coordenadas de F é diferenciable sobre un certo aberto $U \subset \mathbb{R}^2$.



Pode comprobarse facilmente que o aberto U da definición é $U = \mathbf{x}_1^{-1}(F^{-1}(V_2) \cap V_1)$, onde $\mathbf{x}_i(U_i) = V_i$, con $i = 1, 2$.

Tamén necesitaremos ver cando dúas superficies son equivalentes dende o punto de vista diferenciable, é dicir, cando son *difeomorfas*. Así pois, dise que unha aplicación $F : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ entre dúas superficies regulares é un *difeomorfismo* se F é un homeomorfismo entre \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 e ademais F e F^{-1} son diferenciables.

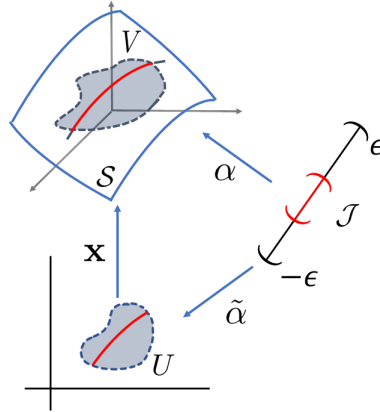
En particular, toda superficie regular é localmente difeomorfa a un plano, xa que dada (U, \mathbf{x}) unha parametrización local de \mathcal{S} , a aplicación $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$ é un difeomorfismo entre as superficies $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$. Por suposto, é necesario probar que todas estas definicións non dependen da parametrización escollida (ver [6] ou [5] para unha demostración deste feito).

1.2. O plano tanxente

Na condición 3 da Definición 1.1 dixemos que a diferencial $d\mathbf{x}_q$ é inxectiva en todo $q \in U$. Este feito vainos asegurar a existencia do plano tanxente en calquera punto da superficie. Para construír dito plano nun punto p da superficie \mathcal{S} , imos considerar tódalas

curvas contidas en \mathcal{S} pasando por p e logo tomar tódolos vectores velocidade de cada unha das curvas en p .

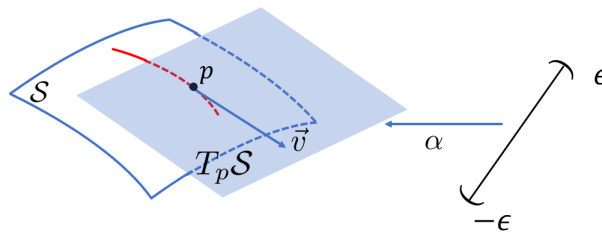
Polo tanto, se consideramos $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S}$ unha curva diferenciable, (U, \mathbf{x}) unha parametrización de \mathcal{S} , con $V = \mathbf{x}(U)$, e supoñemos que $\alpha((-\epsilon, \epsilon)) \cap V \neq \emptyset$; considerando $\mathcal{J} = \{t \in (-\epsilon, \epsilon) \mid \alpha(t) \in V\}$, a aplicación $\tilde{\alpha} : \mathcal{J} \rightarrow U$ dada por $\tilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$ denomínase *expresión en coordenadas da curva* α .



Dicimos que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é un *vector tanxente* a \mathcal{S} en p se existe unha curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S}$ diferenciable e con condicións iniciais $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$.

Entón, definimos o plano tanxente a \mathcal{S} nun punto p como o conxunto de tódolos vectores que son tanxentes a \mathcal{S} en p , de xeito que podemos considerar tódalas curvas pasando por p e quedarnos cos seus vectores velocidade nese punto. Así é sinxelo definir o *plano tanxente* en cada punto dunha superficie regular como:

$$T_p\mathcal{S} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{existe } \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S} \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ e } \alpha'(0) = \vec{v}\}.$$



De feito, se (U, \mathbf{x}) é unha parametrización de \mathcal{S} en $p = \mathbf{x}(q)$, $q \in U$, pódese probar que $T_p\mathcal{S} = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ (ver Lema 2.2.3 de [6]).

1.2.1. Base do plano tanxente $T_p\mathcal{S}$

Como acabamos de mencionar, o plano tanxente é un espazo vectorial, polo que ten sentido buscarlle unha base. Así que imos tomar $q = (u_0, v_0)$ e $p = \mathbf{x}(q)$. É sinxelo construír

dita base utilizando a propiedade de que $d\mathbf{x}_q : T_q\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\mathcal{S}$ é inxectiva, pois como $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é unha base de \mathbb{R}^2 , entón $\{d\mathbf{x}_q(1, 0), d\mathbf{x}_q(0, 1)\} = \{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ é unha base de $T_p\mathcal{S}$. Polo tanto, podemos ver o plano tanxente en p como combinacións lineares dos vectores da súa base:

$$T_p\mathcal{S} = \{a\mathbf{x}_u(q) + b\mathbf{x}_v(q) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1.2.2. Componentes dun vector respecto da base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$

Unha vez que temos a base de $T_p\mathcal{S}$, é importante saber expresar os vectores en función dela. Así pois, consideremos $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S}$ unha curva, con $\alpha((-\epsilon, \epsilon)) \subset \mathbf{x}(U)$, e a súa expresión en coordenadas $\tilde{\alpha}(t) = (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$. Tense que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$, polo que podemos expresar este vector como combinación linear dos vectores da base do plano tanxente no punto $\alpha(t)$, é dicir, da base $\{\mathbf{x}_u(\tilde{\alpha}(t)), \mathbf{x}_v(\tilde{\alpha}(t))\}$. Vemos que

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{x}(\tilde{\alpha}(t)) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \mathbf{x}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathbf{x}_v(u(t), v(t))v'(t) \\ &= u'(t)\mathbf{x}_u(\tilde{\alpha}(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(\tilde{\alpha}(t)), \end{aligned}$$

cuxa expresión matricial vén dada por:

$$\alpha'(t) = (\mathbf{x}_u(\tilde{\alpha}(t)), \mathbf{x}_v(\tilde{\alpha}(t))) \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = d\mathbf{x}_{\tilde{\alpha}(t)}(u'(t), v'(t)) = d\mathbf{x}_{\tilde{\alpha}(t)}(\tilde{\alpha}'(t)). \quad (1.1)$$

En particular, dado $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}$, podemos escribilo na base de vectores coordenados $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$, tomando α unha curva con condicións iniciais $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$; e $\tilde{\alpha}$ a expresión en coordenadas de α , de tal forma que $\tilde{\alpha}(0) = q$. A base do plano tanxente no punto $p = \alpha(0)$ é $\{\mathbf{x}_u(\tilde{\alpha}(0)), \mathbf{x}_v(\tilde{\alpha}(0))\} = \{\mathbf{x}_u(u(0), v(0)), \mathbf{x}_v(u(0), v(0))\} = \{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$, polo que a expresión de \vec{v} en función desta base toma a forma:

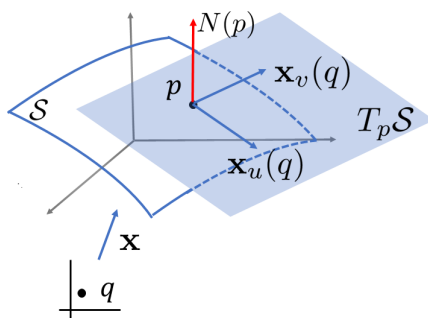
$$\vec{v} = \alpha'(0) = u'(0)\mathbf{x}_u(u(0), v(0)) + v'(0)\mathbf{x}_v(u(0), v(0)) = u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q). \quad (1.2)$$

1.2.3. Vector normal á superficie nun punto p

No referente ao plano tanxente, non podemos pasar por alto o vector que o caracteriza: o *vector normal*. Para calquera punto $p = \mathbf{x}(q) \in \mathcal{S}$ podemos atopalo de forma sinxela, tendo en conta que se é normal á superficie en p , terá que ser ortogonal a $T_p\mathcal{S}$. Polo que podemos utilizar os vectores da base de $T_p\mathcal{S}$ e construírmos dito vector do seguinte xeito:

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u(q) \wedge \mathbf{x}_v(q)}{\|\mathbf{x}_u(q) \wedge \mathbf{x}_v(q)\|},$$

onde \wedge denota o produto vectorial. Denominaremos a este vector como o *vector normal* á superficie en p .



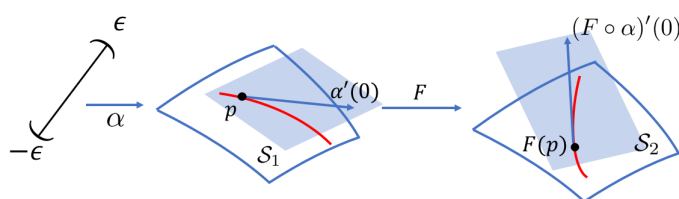
1.3. A diferencial dunha aplicación entre superficies

Grazas ás nocións de plano tanxente e vector tanxente podemos adaptar o concepto da diferencial dunha aplicación ás aplicacións entre superficies.

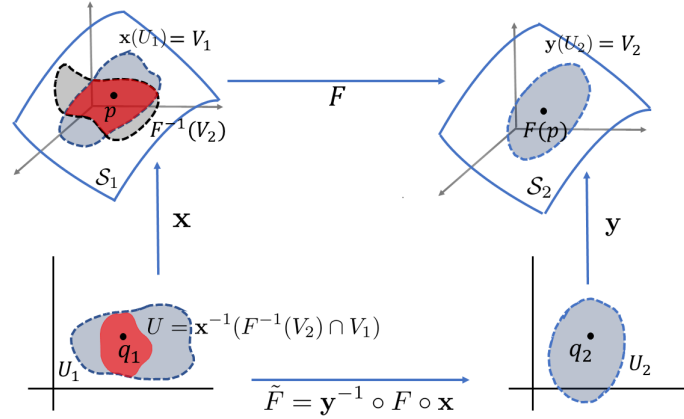
Definición 1.2. Sexan \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 dúas superficies regulares e $F : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ unha aplicación diferenciable. Se tomamos $p \in \mathcal{S}_1$, definimos a *diferencial de F en p* como a aplicación:

$$dF_p : T_p \mathcal{S}_1 \rightarrow T_{F(p)} \mathcal{S}_2$$

tal que $dF_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F \circ \alpha)(t)$, sendo $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S}_1$ calquera curva en \mathcal{S}_1 con condicións iniciais $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$.



Agora ben, necesitamos ver como actúa esta aplicación sobre os vectores $\vec{v} \in T_p \mathcal{S}_1$, e imos facelo vendo como actúa sobre as coordenadas de dito vector nunha base de $T_p \mathcal{S}_1$. Con este obxectivo, tomaremos (U_1, \mathbf{x}) e (U_2, \mathbf{y}) dúas parametrizacións de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 en p e $F(p)$, respectivamente, de xeito que $\mathbf{x}(q_1) = p$ e $\mathbf{y}(q_2) = F(p)$, sendo $q_1 \in U_1$ e $q_2 \in U_2$. As coordenadas no aberto U_1 denotarémolas por (u, v) e no aberto U_2 por (\tilde{u}, \tilde{v}) , de maneira que unha base do plano tanxente $T_p \mathcal{S}_1$ será $\{\mathbf{x}_u(q_1), \mathbf{x}_v(q_1)\}$. Análogamente, unha base para $T_{F(p)} \mathcal{S}_2$ vén dada por $\{\mathbf{y}_{\tilde{u}}(q_2), \mathbf{y}_{\tilde{v}}(q_2)\}$.



Se $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}_1$, existirá unha curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S}_1$ con condicións iniciais $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$. Para expresar \vec{v} na base de $T_p\mathcal{S}_1$ dada polos vectores coordenados, necesitamos a expresión en coordenadas de α , é dicir, $\tilde{\alpha} = (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$. Procedendo de forma análoga a como fixemos na Sección 1.2.2, temos que

$$\vec{v} = \alpha'(0) = \mathbf{x}_u(q_1)u'(0) + \mathbf{x}_v(q_1)v'(0).$$

Utilizando a definición dada anteriormente para a diferencial, é claro que:

$$dF_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F \circ \alpha)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \beta(t) = \beta'(0),$$

onde $\beta(t) = (F \circ \alpha)(t)$ é unha curva en \mathcal{S}_2 con $\beta(0) = F(p)$.

Agora necesitamos escribir $\beta'(0)$ en función dos vectores da base de $T_{F(p)}\mathcal{S}_2$. Como no caso anterior, necesitaremos a expresión en coordenadas de β , é dicir: $\tilde{\beta}(t) = (\mathbf{y}^{-1} \circ \beta)(t) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$. Polo tanto

$$\beta'(0) = \mathbf{y}_{\tilde{u}}(q_2)\tilde{u}'(0) + \mathbf{y}_{\tilde{v}}(q_2)\tilde{v}'(0).$$

Deste xeito as coordenadas de \vec{v} na base $\{\mathbf{x}_u(q_1), \mathbf{x}_v(q_1)\}$ son $(u'(0), v'(0))$ e as coordenadas de $dF_p(\vec{v})$ na base $\{\mathbf{y}_{\tilde{u}}(q_2), \mathbf{y}_{\tilde{v}}(q_2)\}$ son $(\tilde{u}'(0), \tilde{v}'(0))$. Entón xa podemos saber como actúa a diferencial $dF_p : T_p\mathcal{S}_1 \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{S}_2$ sobre un vector $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}_1$, pois sabemos como actúa sobre as súas coordenadas neste espazo tanxente. É dicir,

$$dF_p(u'(0), v'(0)) = (\tilde{u}'(0), \tilde{v}'(0)).$$

O seguinte paso será buscar unha expresión matricial para esta aplicación linear. Con ese fin imos considerar $\tilde{F} = (\mathbf{y}^{-1}) \circ F \circ \mathbf{x} : U_1 \rightarrow U_2$, a expresión en coordenadas de F . Entón:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u(t), v(t)) &= \tilde{F}(\tilde{\alpha}(t)) = (\tilde{F} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) = (\mathbf{y}^{-1} \circ F \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) \\ &= (\mathbf{y}^{-1} \circ F \circ \alpha)(t) = (\mathbf{y}^{-1} \circ \beta)(t) = \tilde{\beta}(t) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)). \end{aligned}$$

Podemos, polo tanto expresar tamén $\tilde{F}(u, v) = (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$, onde u e v dependen á suá vez de t . É dicir, que $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(u(t), v(t))$ e $\tilde{v}(t) = \tilde{v}(u(t), v(t))$.

Se agora derivamos e evaluamos no punto $t = 0$:

$$\tilde{u}'(0) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}(u(0), v(0))u'(0) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}(u(0), v(0))v'(0) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}(q_1)u'(0) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}(q_1)v'(0),$$

$$\tilde{v}'(0) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}(u(0), v(0))u'(0) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}(u(0), v(0))v'(0) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}(q_1)u'(0) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}(q_1)v'(0).$$

Polo tanto, podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}'(0) \\ \tilde{v}'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}(q_1) & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}(q_1) \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}(q_1) & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}(q_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = J\tilde{F}_{q_1} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Entón dF_p é unha aplicación linear cuxa matriz asociada respecto das bases $\{\mathbf{x}_u(q_1), \mathbf{x}_v(q_1)\}$ e $\{\mathbf{y}_{\tilde{u}}(q_2), \mathbf{y}_{\tilde{v}}(q_2)\}$ é a jacobiana da lectura en coordenadas, $J\tilde{F}_{q_1}$.

Como comentamos anteriormente, a continuación, presentamos unha serie de resultados, probados na asignatura de Curvas e Superficies, que son unha xeneralización dos seus análogos para a diferencial usual e poden consultarse en [6] ou [5]. Notar que todo o exposto non depende das parametrizacións escollidas.

Proposición 1.3. (Regra da cadea) Sexan $F : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ e $G : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_3$ aplicacións diferenciables entre superficies. Entón, para todo $p \in \mathcal{S}_1$ tense que $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$

Teorema 1.4. (Teorema da función inversa) Sexa $F : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ unha aplicación diferenciable entre superficies e supoñamos que dF_p é un isomorfismo linear para certo $p \in \mathcal{S}_1$. Entón F é difeomorfismo local en p .

Teorema 1.5. Sexa F un difeomorfismo local en p entre dúas superficies \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Entón a aplicación $dF_p : T_p\mathcal{S}_1 \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{S}_2$ é un isomorfismo linear.

1.4. A Primeira forma fundamental

Denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar usual de \mathbb{R}^3 , defínese a *primeira forma fundamental* en $p = \mathbf{x}(q)$ dunha superficie \mathcal{S} como a forma bilinear simétrica definida positiva $\mathbb{I}_p : T_p\mathcal{S} \times T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathbb{I}_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ sendo $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\mathcal{S}$.

Para obter os coeficientes desta forma bilinear, bastará expresar o produto escalar respecto aos vectores da base de $T_p\mathcal{S}$, $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$. En efecto, consideremos \vec{v} e \vec{w} dous vectores de $T_p\mathcal{S}$ con coordenadas (v_1, v_2) e (w_1, w_2) respectivamente na base mencionada.

Entón:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle v_1\mathbf{x}_u(q) + v_2\mathbf{x}_v(q), w_1\mathbf{x}_u(q) + w_2\mathbf{x}_v(q) \rangle \\ &= v_1w_1\langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle + v_1w_2\langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle \\ &\quad + v_2w_1\langle \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle + v_2w_2\langle \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle. \end{aligned}$$

Polo tanto, os coeficientes da primeira forma fundamental en $p = \mathbf{x}(q)$ pódense expresar do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} g_{11}(q) &= \langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle, & g_{12}(q) &= \langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle, \\ g_{21}(q) &= \langle \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle, & g_{22}(q) &= \langle \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Como o produto escalar é simétrico, $g_{12}(q) = g_{21}(q)$, polo que a matriz de Gram de \mathbb{I}_p na base de vectores coordenados $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ está dada por:

$$\mathbb{I}_p = \begin{pmatrix} g_{11}(q) & g_{12}(q) \\ g_{12}(q) & g_{22}(q) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

1.5. Segunda forma fundamental

A *segunda forma fundamental* é un obxecto matemático que nos vai permitir obter información de como se curvan as superficies no espazo. Para definila necesitamos a que se denomina *aplicación de Gauss*.

Polo tanto, dada \mathcal{S} unha superficie regular e \mathbb{S}^2 a esfera de raio 1, denominamos *aplicación de Gauss* á aplicación $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$, que a cada punto $p = \mathbf{x}(q) \in \mathcal{S}$ lle asigna $N(p) \in \mathbb{S}^2$, o vector normal á superficie en p .

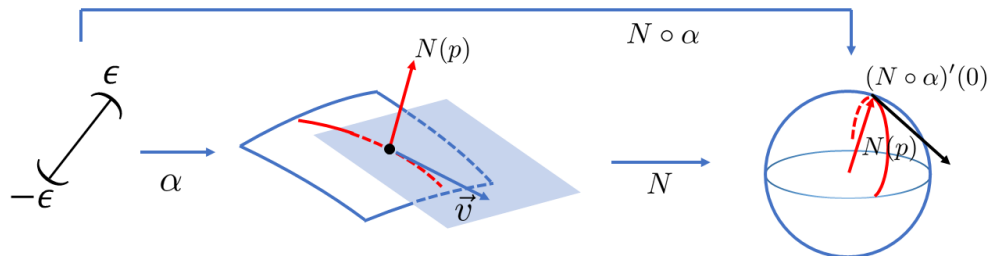
Esta aplicación vai ser diferenciable en p , e a súa diferencial é a aplicación $dN_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_p\mathcal{S}$ de forma que

$$dN_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t),$$

sendo $p \in \mathcal{S}$, $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}$ e α unha curva con condicións iniciais p e \vec{v} .

A oposta desta aplicación, $-dN_p : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_p\mathcal{S}$, recibe o nome de *operador forma* ou *endomorfismo de Weingarten*.

Notar que acabamos de escribir o espazo vectorial de chegada de dN_p como o espazo $T_p\mathcal{S}$. Isto é, pois $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle N(p), \vec{v} \rangle = 0\} = T_p\mathcal{S}$.



O estudo da diferencial da aplicación de Gauss é moi interesante e tamén nos vai permitir o estudo da curvatura da superficie no espazo. Por iso, unha propiedade moi

importante de dN_p , e que se comproba facilmente (ver [6] ou [5]), é que é *autoadxunta* respecto ao produto escalar de \mathbb{R}^3 . É dicir, dados $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\mathcal{S}$, temos que

$$\langle dN_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, dN_p(\vec{w}) \rangle.$$

Notemos que como dN_p é autoadxunta, o operador forma tamén o será. Polo tanto, a matriz asociada a esta aplicación respecto a unha base ortonormal é simétrica e en consecuencia, diagonalizable. Entón, imos denominar *direccións principais* a $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_p\mathcal{S}$, que son os dous autovectores que diagonalizan $-dN_p$. Se os autovalores son distintos, pódese probar que $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. A ditos autovalores, $\chi_1(p)$ e $\chi_2(p)$, dáselles o nome de *curvaturas principais* da superficie en p . As direccións principais determinan as direccións de máxima e mínima curvatura, cuxos valores son as curvaturas principais.

Visto isto, xa estamos en condicións de dar dúas formas de medir a curvatura de S en $p = \mathbf{x}(q)$ utilizando estes dous autovalores:

Curvatura de Gauss:

$$K(p) = \det(-dN_p) = \chi_1(p)\chi_2(p) \quad (1.6)$$

Curvatura media:

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-dN_p) = \frac{1}{2}(\chi_1(p) + \chi_2(p)) \quad (1.7)$$

A partir do operador forma, defínese a *segunda forma fundamental* en $p = \mathbf{x}(q)$ como a forma bilinear simétrica $\mathbb{I}\mathbb{I}_p : T_p\mathcal{S} \times T_p\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbb{I}\mathbb{I}_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle -dN_p(\vec{v}), \vec{w} \rangle,$$

sendo \vec{v} e \vec{w} vectores do plano tanxente. As seguintes expresións para os seus coeficientes en p , veñen dadas pola forma na que actúa sobre os vectores coordenados e poden verse en [6] ou [5].

$$\begin{aligned} L_{11}(q) &= \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_u(q)) = \langle N(p), \mathbf{x}_{uu}(q) \rangle, \\ L_{12}(q) &= \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)) = \langle N(p), \mathbf{x}_{uv}(q) \rangle, \\ L_{21}(q) &= \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_u(q)) = \langle N(p), \mathbf{x}_{vu}(q) \rangle, \\ L_{22}(q) &= \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_v(q)) = \langle N(p), \mathbf{x}_{vv}(q) \rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como o produto escalar é simétrico e o *operador forma* é autoadxunto, a segunda forma fundamental é simétrica e a súa matriz de Gram na base de vectores coordenados $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ vén dada por:

$$\mathbb{I}\mathbb{I}_p = \begin{pmatrix} L_{11}(q) & L_{12}(q) \\ L_{12}(q) & L_{22}(q) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

1.5.1. Expresións notables

Facendo uso dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais é posible obter unha expresión local para a diferencial da aplicación de Gauss en $p = \mathbf{x}(q)$,

$$dN_p = - \begin{pmatrix} g_{11}(q) & g_{12}(q) \\ g_{12}(q) & g_{22}(q) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L_{11}(q) & L_{12}(q) \\ L_{12}(q) & L_{22}(q) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

e consecuentemente, expresións locais para a curvatura de Gauss e a curvatura media.

$$K(p) = \frac{L_{11}(q)L_{22}(q) - L_{12}^2(q)}{g_{11}(q)g_{22}(q) - g_{12}^2(q)} \quad (1.11)$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{L_{11}(q)g_{22}(q) + L_{22}(q)g_{11}(q) - 2L_{12}(q)g_{12}(q)}{g_{11}(q)g_{22}(q) - g_{12}^2(q)} \quad (1.12)$$

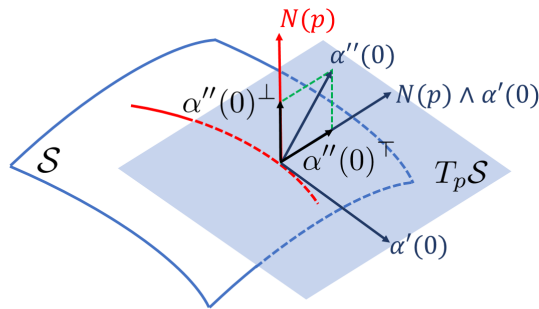
1.6. Curvatura xeodésica e curvatura normal

Consideremos unha curva α na superficie \mathcal{S} parametrizada polo parámetro lonxitude de arco s , tal que $\alpha(0) = p = \mathbf{x}(q) \in \mathcal{S}$. É claro que o vector aceleración, $\alpha''(0) \in \mathbb{R}^3 = T_p\mathcal{S} \oplus \langle\langle N(p) \rangle\rangle$, polo que poderemos descompoñelo en parte tanxencial e parte normal. É dicir

$$\alpha''(0) = (\alpha''(0))^\top + (\alpha''(0))^\perp, \quad (1.13)$$

onde podemos expresar $(\alpha''(0))^\top$ e $(\alpha''(0))^\perp$ do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} (\alpha''(0))^\top &= \langle \alpha''(0), N(p) \wedge \alpha'(0) \rangle N(p) \wedge \alpha'(0), \\ (\alpha''(0))^\perp &= \langle \alpha''(0), N(p) \rangle N(p). \end{aligned} \quad (1.14)$$



Aos valores $\chi_{x\text{eo}}^\alpha(0) = \langle \alpha''(0), N(p) \wedge \alpha'(0) \rangle$ e $\chi_n^\alpha(0) = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle$ denominarémolos curvaturas *xeodésica* e *normal* de α en p , respectivamente. Tomando normas, temos que $\|\alpha''(0)\|^2 = \|(\alpha''(0))^\top\|^2 + \|(\alpha''(0))^\perp\|^2$, é dicir,

$$(\chi^\alpha(0))^2 = (\chi_{x\text{eo}}^\alpha(0))^2 + (\chi_n^\alpha(0))^2, \quad (1.15)$$

sendo $\chi^\alpha(0)$ a curvatura de α en p .

O seguinte resultado, visto na asignatura de Curvas e Superficies pódese consultar en [6] ou [5] e simplifica os cálculos para obter a curvatura normal.

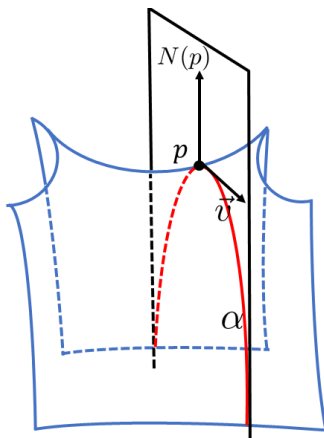
Proposición 1.6. *Sexa \mathcal{S} unha superficie regular, $p = \mathbf{x}(q) \in \mathcal{S}$ e $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}$. Se β é unha curva con condicións iniciais p e \vec{v} , entón $\mathbb{I}\mathbb{I}_p(\vec{v}, \vec{v}) = \langle \beta''(0), N(p) \rangle$.*

Se \vec{v} é un vector unitario, o valor $\mathbb{I}\mathbb{I}_p(\vec{v}, \vec{v})$ denomínase *curvatura normal* de \mathcal{S} en p na dirección de \vec{v} e denótase $\chi_n(p, \vec{v})$. Polo tanto, se tomamos α unha curva en \mathcal{S} parametrizada por lonxitude de arco e con condicións iniciais $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$, este vector \vec{v} será unitario e polo tanto, poderemos utilizar a Ecuación (1.14) para escribir o seguinte:

$$(\alpha''(0))^\perp = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle N(p) = \mathbb{I}\mathbb{I}_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) N(p). \quad (1.16)$$

1.6.1. Interpretación xeométrica e relación coas curvaturas principais

O valor $\chi_n(p, \vec{v})$ representa a curvatura da curva plana que resulta da intersección do plano xerado por $\{N(p), \vec{v}\}$ que pasa por $p = \mathbf{x}(q)$ e a superficie.



Entón, se consideramos \vec{v}_1 e \vec{v}_2 os autovectores que diagonalizan $-dN_p$ e calculamos a *curvatura normal* de \mathcal{S} en p nas direccións \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , temos que:

$$\chi_n(p, \vec{v}_1) = \mathbb{I}\mathbb{I}_p \left(\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \right) = \left\langle -dN_p \left(\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \right), \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \right\rangle = \left\langle \chi_1(p) \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \right\rangle = \chi_1(p),$$

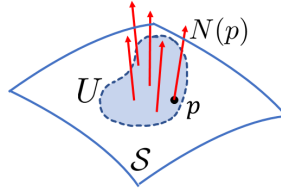
$$\chi_n(p, \vec{v}_2) = \mathbb{I}\mathbb{I}_p \left(\frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \right) = \left\langle -dN_p \left(\frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \right), \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \right\rangle = \left\langle \chi_2(p) \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \right\rangle = \chi_2(p).$$

É dicir, $\chi_1(p)$ e $\chi_2(p)$ son as curvaturas normais nas direccións \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

Ademais, pódese ver en [6] e [5] que $\chi_1(p)$ e $\chi_2(p)$ representan o máximo e o mínimo da forma cuadrática $\vec{v} \mapsto \langle -dN_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle$, sendo $\vec{v} \in T_p\mathcal{S}$ un vector unitario.

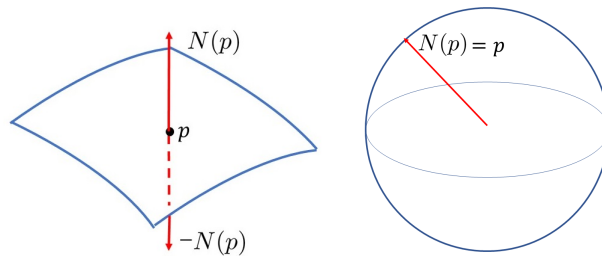
1.6.2. Orientación en superficies

Unha superficie regular \mathcal{S} será orientable se somos capaces de distinguir dúas caras opostas da mesma. Para formalizar este concepto imos necesitar os campos de vectores, que nos axudarán a determinar se a superficie ten dúas caras opostas, en cuxo caso será orientable. Isto ocorrerá no caso de que poidamos definir globalmente un certo campo vectorial sobre a superficie. Así pois, un *campo de vectores* \vec{X} sobre \mathcal{S} é unha función vectorial $\vec{X} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\vec{X}(p)$ é un vector de \mathbb{R}^3 para todo punto $p \in \mathcal{S}$. Diremos que é diferenciable se o é como función de \mathcal{S} en \mathbb{R}^3 . Por outra banda, un *campo de vectores normais* diferenciable nunha superficie regular \mathcal{S} é un campo de vectores diferenciable que lle asigna a cada punto $p \in \mathcal{S}$ un vector $N(p)$ normal a \mathcal{S} en p ; é dicir, $\langle N(p), \vec{v} \rangle = 0 \forall p \in \mathcal{S}$ e $\forall \vec{v} \in T_p\mathcal{S}$.



Deste xeito, unha superficie \mathcal{S} será *orientable* se existe un campo de vectores $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ normais, diferenciable e unitario definido globalmente en toda a superficie. Se \mathcal{S} é orientable, cada campo de vectores normais N diferenciable define unha *orientación* para \mathcal{S} , de maneira que unha superficie orientable \mathcal{S} estará *orientada* cando escollamos unha orientación concreta para \mathcal{S} .

Como mencionamos antes, se unha superficie é orientable, somos capaces de distinguir dúas caras na mesma. Entón pola caracterización que acabamos de dar de superficie orientable, estas dúas caras serán a cara á que apunta N e á que apunta $-N$.



Por exemplo, a esfera \mathbb{S}^2 é orientable, pois podemos tomar o campo de vectores normais e diferenciable $N(p) = p : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ou tamén o campo $-N(p) = -p : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. É claro que podemos distinguir dúas caras: a cara interior e a exterior.

Capítulo 2

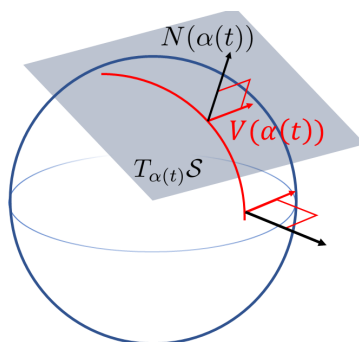
A derivada covariante

O concepto que da nome ao capítulo é un dos máis importantes deste traballo, pois estende a noción de derivada usual de campos de vectores no espazo, dando así lugar aos que denominaremos *campos de vectores paralelos* ao longo dunha curva, que xeneralizan a noción de paralelismo en \mathbb{R}^3 , no sentido de que manteñen unha dirección constante respecto a unha dirección fixada da superficie. Facendo uso deles podemos definir o transporte paralelo, que será fundamental para estudar a holonomía na esfera.

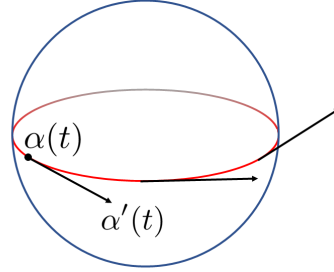
2.1. Campos de vectores ao longo dunha curva

Comecemos tomando \mathcal{S} unha superficie orientada con aplicación de Gauss $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$ unha curva parametrizada regular, sendo I un intervalo aberto.

Un *campo de vectores ao longo de α* é unha aplicación $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $V(t) \in \mathbb{R}^3 = T_{\alpha(t)}\mathcal{S} \oplus \{N(\alpha(t))\}$, para todo $t \in I$. Diremos que V é *diferenciable* se o é como aplicación de I en \mathbb{R}^3 (normalmente consideraremos que $V \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^3)$); e dise que é *tanxente* a \mathcal{S} ao longo de α se $V(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$, para todo $t \in I$. A familia dos campos de vectores diferenciables tanxentes ao longo dunha curva α representarémola por $\mathfrak{X}(\alpha)$.



Un exemplo sería o campo $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vectores velocidade dunha curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$, que é un campo de vectores diferenciables tanxentes a \mathcal{S} ao longo de α ; é dicir, $\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

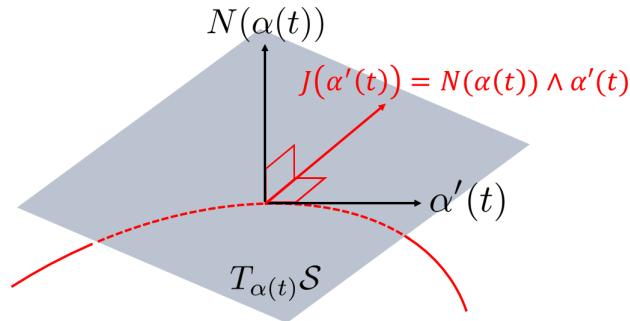


Por outra banda, tamén podemos definir para cada $t \in I$ o campo de vectores dado por $J(\alpha'(t)) = N(\alpha(t)) \wedge \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$, que é un campo diferenciable e forma con $\alpha'(t)$ unha base ortogonal de $T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$ positivamente orientada, $\{\alpha'(t), J(\alpha'(t))\}$. Logo $J\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ e calquera campo tanxente ao longo de α exprésase como combinación linear de α' e $J\alpha'$.

Entón, se $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, é dicir, se $V(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$ para todo $t \in I$, podemos expresar este campo como:

$$V(t) = a^1(t)\alpha'(t) + a^2(t)J(\alpha'(t)) \quad \forall t \in I,$$

sendo $a^1, a^2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ funcións diferenciables.



Notemos que se $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$ é unha curva regular, $\alpha''(t)$ non ten por que ser tanxente a \mathcal{S} ao longo de α . En efecto, como vimos na Expresión (1.13), a aceleración dunha curva α parametrizada polo parámetro lonxitude de arco nun punto $p = \alpha(0)$ pode descompoñerse en parte normal e parte tanxencial:

$$\alpha''(0) = (\alpha''(0))^\top + (\alpha''(0))^\perp.$$

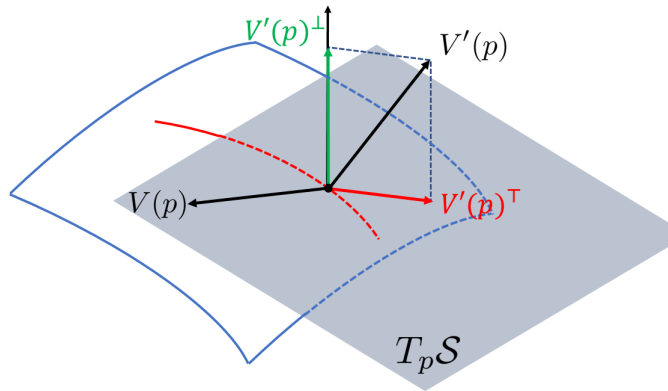
Polo tanto, se $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é un campo de vectores tanxente á superficie ao longo de α , entón V' é un campo de vectores ao longo de α pero non ten por que ser tanxente. Véxase o exemplo anterior con $V = \alpha'$ e $V' = \alpha''$.

2.2. A derivada covariante

Consideremos $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ un campo de vectores tanxente e diferenciable ao longo dunha curva $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$ e denotemos por $N(t)$ o vector normal en $\alpha(t)$; é dicir, $N(\alpha(t))$, sendo $t \in I$. Como acabamos de ver, V' non ten por que ser un campo de vectores tanxente, polo que se pode descompoñer en parte normal e parte tanxencial:

$$V'(t) = V'(t)^\top + V'(t)^\perp = V'(t)^\top + \langle V'(t), N(t) \rangle N(t),$$

dando lugar a un dos conceptos máis importantes que imos tratar.



Definición 2.1. Sexa $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é un campo de vectores tanxente e diferenciable ao longo dunha curva $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$. Definimos a *derivada covariante* de V como a parte tanxente de V' , é dicir,

$$\frac{DV}{dt}(t) := V'(t)^\top = V'(t) - \langle V'(t), N(t) \rangle N(t). \quad (2.1)$$

Notemos que a derivada covariante podemos vela como un operador, que leva un campo de vectores diferenciable tanxente ao longo dunha curva α fixa noutro.

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\alpha) &\rightarrow \mathfrak{X}(\alpha) \\ V &\mapsto \frac{DV}{dt} : I \rightarrow T_{\alpha(t)}\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \\ &t \mapsto V'(t) - \langle V'(t), N(t) \rangle N(t). \end{aligned}$$

2.2.1. Expresión intrínseca da derivada covariante

Nesta parte imos considerar unha curva $C \equiv \alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$ contida nun entorno coordenado $\mathbf{x}(U)$, $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, sendo $\mathbf{x}(U)$ orientado polo vector normal e unitario N . Ocuparémonos de ver que a derivada covariante tamén se pode definir de maneira intrínseca, probando que só depende dos coeficientes da primeira forma fundamental; para o cal necesitaremos certas expresións, que podemos atopar no apéndice A, e cuxa proba podemos ver en [6] e [5].

Consideremos $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, é dicir, $V(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$ para todo $t \in I$. Podemos expresar $V(t)$ na base do plano tanxente en cada punto como $V(t) = a(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t))$, sendo a e b funcións de I en \mathbb{R} . Agora calculamos V' utilizando as expresións (A.2):

$$\begin{aligned} V'(t) &= a'(t)\mathbf{x}_u(t) + a(t)[\mathbf{x}_{uu}(t)u'(t) + \mathbf{x}_{uv}(t)v'(t)] + b'(t)\mathbf{x}_v(t) \\ &\quad + b(t)[\mathbf{x}_{vu}(t)u'(t) + \mathbf{x}_{vv}(t)v'(t)] \\ &= a'(t)\mathbf{x}_u(t) + b'(t)\mathbf{x}_v(t) \\ &\quad + a(t)[(\Gamma_{11}^1(t)\mathbf{x}_u(t) + \Gamma_{11}^2(t)\mathbf{x}_v(t) + L_{11}(t)N(t))u'(t) \\ &\quad + (\Gamma_{12}^1(t)\mathbf{x}_u(t) + \Gamma_{12}^2(t)\mathbf{x}_v(t) + L_{12}(t)N(t))v'(t)] \\ &\quad + b(t)[(\Gamma_{21}^1(t)\mathbf{x}_u(t) + \Gamma_{21}^2(t)\mathbf{x}_v(t) + L_{12}(t)N(t))u'(t) \\ &\quad + (\Gamma_{22}^1(t)\mathbf{x}_u(t) + \Gamma_{22}^2(t)\mathbf{x}_v(t) + L_{22}(t)N(t))v'(t)]. \end{aligned}$$

Agrupando termos na expresión anterior obtemos que

$$\begin{aligned} V'(t) &= (a'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^1(t) + a(t)v'(t)\Gamma_{12}^1(t) + b(t)u'(t)\Gamma_{12}^1(t) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^1(t))\mathbf{x}_u(t) \\ &\quad + (b'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^2(t) + a(t)v'(t)\Gamma_{12}^2(t) + b(t)u'(t)\Gamma_{12}^2(t) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^2(t))\mathbf{x}_v(t) \\ &\quad + (a(t)L_{11}(t)u'(t) + a(t)L_{12}(t)v'(t) + b(t)L_{12}(t)u'(t) + b(t)L_{22}(t)v'(t))N(t). \end{aligned}$$

Agora, como a derivada covariante $\frac{DV}{dt}(t)$ é a compoñente tanxente a \mathcal{S} de $V'(t)$, se prescindimos da compoñente normal da expresión de $V'(t)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt}(t) &= (a'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^1(t) + (a(t)v'(t) + b(t)u'(t))\Gamma_{12}^1(t) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^1(t))\mathbf{x}_u(t) \\ &\quad + (b'(t) + a(t)u'(t)\Gamma_{11}^2(t) + (a(t)v'(t) + b(t)u'(t))\Gamma_{12}^2(t) + b(t)v'(t)\Gamma_{22}^2(t))\mathbf{x}_v(t). \end{aligned}$$

É dicir, temos unha expresión para $\frac{DV}{dt}(t)$ que depende dos símbolos de Christoffel (Expresión (A.1)), e polo tanto da primeira fundamental, probando así que a derivada covariante é un concepto intrínseco, é dicir, só depende da xeometría da propia superficie.

En resumo, temos dous modos de definir a derivada covariante, un extrínseco, coma na Definición 2.1 e outro intrínseco, como acabamos de probar. Ademais, a derivada covariante cumpre as seguintes propiedades, recollidas en [6] ou [5], e probadas na asignatura de Teoría Global de Superficies.

Proposición 2.2. *Sexan $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ e sexa $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Entón:*

1. $\frac{D}{dt}(V(t) + W(t)) = \frac{DV}{dt}(t) + \frac{DW}{dt}(t)$,
2. $\frac{D}{dt}(f(t)V(t)) = f'(t)V(t) + f(t)\frac{DV}{dt}(t)$,
3. $\langle V(t), W(t) \rangle' = \langle \frac{DV}{dt}(t), W(t) \rangle + \langle V(t), \frac{DW}{dt}(t) \rangle$.

2.3. Campos de vectores paralelos

Cando estamos nun plano ou no espazo, referímonos a campos de vectores paralelos como aqueles que apuntan sempre na mesma dirección e teñen norma constante, é dicir, que a súa derivada é nula, pois son constantes. Podemos estender esta idea a superficies dicindo que un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é *paralelo* ao longo de α se $\frac{DV}{dt}(t) = \vec{0}$.

Na Sección 2.2.1 probamos que a derivada covariante dun campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é un concepto intrínseco da superficie. Pois ben, o que nos di esta definición é que dende un punto de vista intrínseco, o campo sempre apunta na mesma dirección. Un habitante 2-dimensional da superficie que se move ao longo de α vería o campo apuntar sempre na mesma dirección.

Nos seguintes exemplos probamos de maneira intrínseca e extrínseca que un campo de vectores no plano é paralelo se e só se é constante.

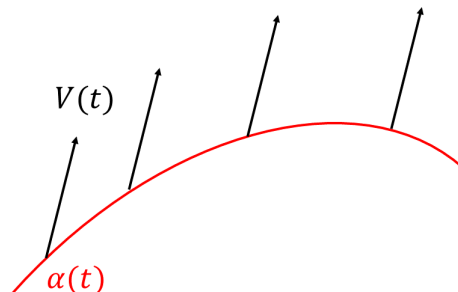
Exemplo 2.3 (Forma intrínseca). Tomemos o plano euclídeo con coordenadas cartesianas (u, v) . Unha posible parametrización deste plano sería $\mathbf{x} : (u, v) \rightarrow (u, v, 0)$, sendo $u, v \in \mathbb{R}^2$. Temos que $\mathbf{x}_u(u, v) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_v(u, v) = (0, 1, 0)$, polo que $g_{ij}(u, v) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} denota a delta de Kronecker, polo tanto $\Gamma_{ij}^k(u, v) = 0$. Entón, dada $\alpha(t) = (u(t), v(t), 0)$ e $V(t) = (V^1(t), V^2(t), 0) \in T_{\alpha(t)}(\mathcal{S})$, o paralelismo de V ao longo de α equivale a que sexa un campo constante. En efecto, escribindo $V(t)$ en función da base $\{\mathbf{x}_u(u(t), v(t)), \mathbf{x}_v(u(t), v(t))\}$, temos que

$$V(t) = a(t)\mathbf{x}_u(t) + b(t)\mathbf{x}_v(t) = a(t)(1, 0, 0) + b(t)(0, 1, 0) = V^1(t)(1, 0, 0) + V^2(t)(0, 1, 0).$$

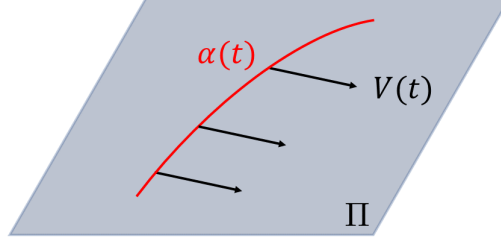
Deste xeito, a súa derivada covariante virá dada por

$$\frac{DV}{dt}(t) = \frac{dV^1}{dt}(t)(1, 0, 0) + \frac{dV^2}{dt}(t)(0, 1, 0) = \left(\frac{dV^1}{dt}(t), \frac{dV^2}{dt}(t), 0\right),$$

e será nula se e só se $V^1(t)$ e $V^2(t)$ son constantes.



Exemplo 2.4 (Forma extrínseca). Sexa Π un plano, $\alpha : I \rightarrow \Pi$ unha curva nel e $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$. Como $T_{\alpha(t)}\Pi \equiv \Pi$ para todo $t \in I$, entón $(V')^\top = V'$. Logo $\frac{DV}{dt}(t) = V'(t)$ é a derivada usual en \mathbb{R}^3 , e así o campo V será paralelo se e só se $\frac{DV}{dt}(t) = V'(t) = \vec{0}$, isto é, só se V é constante.



O seguinte resultado, que está probado en [6] e [5], dinos que nun campo paralelo, o módulo permanece constante, así como a súa dirección respecto a unha dirección fixada, como xa anticipamos ao principio do capítulo.

Proposición 2.5. *Sexan $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ campos paralelos ao longo de $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$.*

1. *Se $a, b \in \mathbb{R}$, entón $aV + bW \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é un campo paralelo.*
2. *O produto $\langle V(t), W(t) \rangle$ é constante e, en particular, $\|V(t)\|$ e o ángulo entre $V(t)$ e $W(t)$ son constantes para todo $t \in I$.*

Demostración:

Se $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ son campos paralelos, tense que $\frac{DV}{dt}(t) = \frac{DW}{dt}(t) = \vec{0}$. Polo tanto, se tomamos $a, b \in \mathbb{R}$, o campo $aV + bW \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tamén é paralelo. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{D(aV+bW)}{dt}(t) &= \left[\frac{d(aV+bW)}{dt}(t) \right]^\top = \left[a \frac{dV}{dt}(t) + b \frac{dW}{dt}(t) \right]^\top = a \left[\frac{dV}{dt}(t) \right]^\top + b \left[\frac{dW}{dt}(t) \right]^\top \\ &= a \frac{DV}{dt}(t) + b \frac{DW}{dt}(t) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Vexamos agora que o produto $\langle V(t), W(t) \rangle$ é constante. Derivando e utilizando a Proposición 2.2, obtemos que:

$$\frac{d\langle V(t), W(t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{dV(t)}{dt}, W(t) \right\rangle + \left\langle V(t), \frac{dW(t)}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{DV(t)}{dt}, W(t) \right\rangle + \left\langle V(t), \frac{DW(t)}{dt} \right\rangle = 0.$$

Polo tanto, o produto $\langle V(t), W(t) \rangle$ é constante, e con el tamén o son $\|V(t)\|$ e o ángulo que forman $V(t)$ e $W(t)$.

□

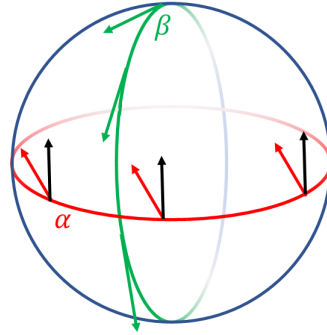
Podemos ver claramente esta propiedade na esfera \mathbb{S}^2 . Se tomamos o vector normal $N(p) = p$ e $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, o ecuador da esfera, temos que $N(\alpha(t)) = \alpha(t) =$

$(\cos t, \sin t, 0)$. Tomemos o campo de vectores constante $V_0(t) = (0, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, que é tanxente á esfera ao longo de α , pois $\langle V_0(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0$. Ademais é paralelo ao longo de α , pois $\frac{DV_0}{dt}(t) = V_0'(t)^\top = (0, 0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Con este campo podemos fixar unha dirección na esfera; a dirección norte, pois se somos habitantes da esfera que nos movemos polo ecuador, este campo apuntaría sempre na mesma dirección. Tomemos agora o campo de vectores $V(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0) + (0, 0, 1) = (-\sin(t), \cos(t), 1) \in \mathfrak{X}(\alpha)$, a suma do campo de vectores velocidade de α e o campo V_0 , ambos tanxentes á superficie ao longo de α . Este campo é paralelo ao longo do ecuador, pois

$$\frac{DV}{dt}(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)^\top = -N(\alpha(t))^\top = (0, 0, 0).$$

Como se pode apreciar na figura, V mantén a dirección noroeste constante respecto á dirección norte marcada por V_0 en todo o ecuador.

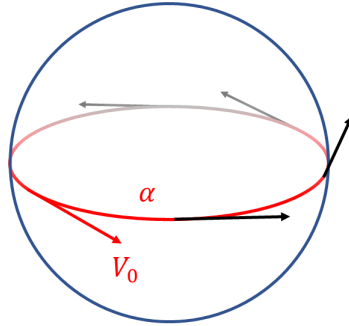
Se tomamos a circunferencia máxima $\beta(t) = (\sin(t), 0, \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$ e o seu campo de vectores velocidade $W(t) = \beta'(t) = (\cos(t), 0, -\sin(t)) \in \mathfrak{X}(\beta)$, este será un campo paralelo, pois $\frac{DW}{dt}(t) = (-\sin(t), 0, -\cos(t))^\top = -N(\beta(t))^\top = (0, 0, 0)$. Ademais apuntaría cara o sur cando $t \in [0, \pi)$ (respecto á dirección norte fixada por V_0).



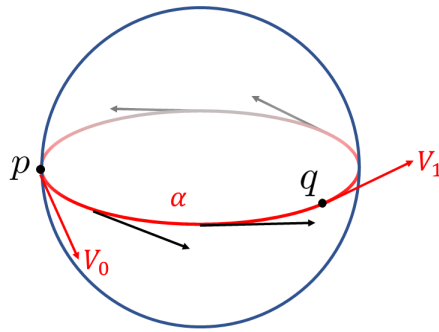
2.4. Transporte paralelo

Comezaremos esta sección cun resultado importante, que nos di que un campo paralelo está totalmente determinado polo seu valor nun só punto da curva sobre a que está definido. A súa demostración é consecuencia do teorema de existencia e unicidade de solución para ecuacións diferenciais e pódese ver en [6] e [5].

Teorema 2.6 (de existencia e unicidade de campos de vectores paralelos). *Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$ unha curva parametrizada nunha superficie regular \mathcal{S} e sexa $\vec{v}_0 \in T_{\alpha(t_0)}\mathcal{S}$ para un certo $t_0 \in I$. Entón existe un único campo paralelo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ con $V(t_0) = \vec{v}_0$.*



Sexa entón $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$ unha curva parametrizada regular e sexan $t_0, t_1 \in I$ con $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha(t_1) = q$. Polo Teorema 2.6, que acabamos de ver, dado un vector $\vec{v}_0 \in T_p\mathcal{S}$, existe un único campo paralelo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ de forma que $V(t_0) = \vec{v}_0$. Definimos o *transporte paralelo* de \vec{v}_0 ao longo de α no punto q como o vector $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\vec{v}_0) = \vec{v}_1 = V(t_1) \in T_q\mathcal{S}$.

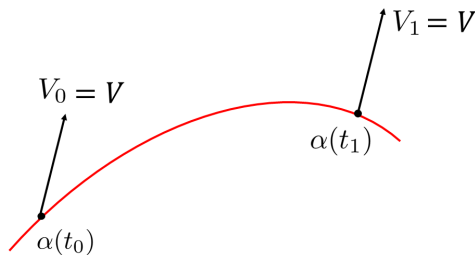


É dicir, o transporte paralelo determina a aplicación:

$$\begin{aligned} P_{t_0}^{t_1}(\alpha) : T_p\mathcal{S} &\rightarrow T_q\mathcal{S} \\ \vec{v}_0 &\mapsto V(t_1) = \vec{v}_1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo $V(t)$ o campo de vectores paralelo ao longo de α que estende a \vec{v}_0 .

Tomemos por exemplo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva plana. Como vimos no Exemplo 2.4, se estamos nun plano e $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ é paralelo, entón V é constante. É dicir, o transporte paralelo nun plano é a aplicación identidade $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V) = V$.



Ademais, a Aplicación (2.2) ten unha serie de propiedades, que enunciaremos a continuación e que nos serán moi útiles no noso posterior estudo da holonomía na esfera. Tamén se poden ver en [6] e [5].

Proposición 2.7. *A aplicación transporte paralelo $P_{t_0}^{t_1}(\alpha) : T_p\mathcal{S} \rightarrow T_q\mathcal{S}$ é unha isometría linear.*

Demostración:

Vexamos primeiro que é unha aplicación linear. Tomemos $\vec{v}_0, \vec{w}_0 \in T_p\mathcal{S}$ e $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ os únicos campos paralelos tales que $V(t_0) = \vec{v}_0$ e $W(t_0) = \vec{w}_0$. Entón $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0) = V(t_1)$ e $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(W_0) = W(t_1)$. Consideremos o campo $V + W \in \mathfrak{X}(\alpha)$, que tamén será paralelo pola Proposición 2.5. Ademais $(V + W)(t_0) = V(t_0) + W(t_0) = \vec{v}_0 + \vec{w}_0$, e polo Teorema de existencia e unicidade, $V + W$ é o único campo paralelo que cumpre esta condición. Por tanto $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\vec{v}_0 + \vec{w}_0) = (V + W)(t_1) = V(t_1) + W(t_1) = P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\vec{v}_0) + P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\vec{w}_0)$. Sexa agora $\lambda \in \mathbb{R}$ e consideremos o campo $\lambda V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, que tamén será paralelo e ademais é o único campo que cumpre que $(\lambda V)(t_0) = \lambda \vec{v}_0$. Entón $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\lambda \vec{v}_0) = (\lambda V)(t_1) = \lambda V(t_1) = \lambda P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\vec{v}_0)$. Probando estas dúas condicións acabamos de ver que é unha aplicación linear.

Agora falta ver que é unha isometría, é dicir, que conserva o produto escalar; pero iso é sinxelo, utilizando a Proposición 2.5. En efecto:

$$\langle P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\vec{v}_0), P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\vec{w}_0) \rangle = \langle V(t_1), W(t_1) \rangle = \langle V(t_0), W(t_0) \rangle = \langle \vec{v}_0, \vec{w}_0 \rangle.$$

□

Unha consecuencia interesante da Proposición 2.7 é que se temos unha curva $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$ con $\alpha(t_0) = p$ e coñecemos o único campo de vectores paralelo $V(t)$ verificando que $V(t_0) = \vec{v}_0 \in T_p\mathcal{S}$, podemos conseguir unha base ortonormal de vectores paralelos ao longo de α que nos facilita o cálculo do transporte paralelo. Sexan entón

$$\vec{E}_1(t) = \frac{V(t)}{\|V(t)\|}, \quad \vec{E}_2(t) = J(\vec{E}_1(t)) = N(t) \wedge \vec{E}_1(t),$$

ambos en $T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$ e ortogonais. Tense que $\langle \vec{E}_1(t), \vec{E}_1(t) \rangle = 1$, de onde obtemos derivando que

$$\langle \vec{E}_1'(t), \vec{E}_1(t) \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Ademais, utilizando que $\vec{E}_1(t)$ é un campo paralelo xunto coa Proposición 2.2, deducimos que $\vec{E}_1'(t)$ é ortogonal a $\vec{E}_2(t)$, é dicir,

$$\langle \vec{E}_1'(t), \vec{E}_2(t) \rangle = \left\langle \frac{D(\vec{E}_1(t))}{dt}, \vec{E}_2(t) \right\rangle = 0, \quad (2.4)$$

polo que $\vec{E}_1'(t)$ está na dirección de $N(t)$.

Por outra banda, tendo en conta que $\frac{dN(t)}{dt} \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$ e facendo uso da Expresión (2.4), é sinxelo comprobar que o campo de vectores $\vec{E}_2(t)$ é paralelo, pois:

$$\frac{D\vec{E}_2(t)}{dt} = \frac{D(N(t)\wedge\vec{E}_1(t))}{dt} = \left[\frac{d(N(t)\wedge\vec{E}_1(t))}{dt} \right]^\top = \left[\frac{dN(t)}{dt} \wedge \vec{E}_1(t) \right]^\top + \left[N(t) \wedge \frac{d\vec{E}_1}{dt} \right]^\top = 0.$$

Deste xeito, se $\vec{w}_0 \in T_p\mathcal{S}$, podemos expresalo na base ortonormal de $T_p\mathcal{S}$ como $\vec{w}_0 = \langle \vec{w}_0, \vec{E}_1(t_0) \rangle \vec{E}_1(t_0) + \langle \vec{w}_0, \vec{E}_2(t_0) \rangle \vec{E}_2(t_0)$. Así, utilizando que o transporte paralelo é unha isometría, temos que:

$$P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(\vec{w}_0) = \langle \vec{w}_0, \vec{E}_1(t_0) \rangle \vec{E}_1(t_1) + \langle \vec{w}_0, \vec{E}_2(t_0) \rangle \vec{E}_2(t_1).$$

Proposición 2.8. *Sexa $\alpha : I \rightarrow \mathcal{S}$ unha curva parametrizada regular. Entón, o transporte paralelo ao longo de α non depende da parametrización da curva.*

Proposición 2.9. *Se \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 son dúas superficies regulares que son tanxentes ao longo dunha curva α , entón o transporte paralelo ao longo de α é independente da superficie, \mathcal{S}_1 ou \mathcal{S}_2 , isto é, é o mesmo para ambas as superficies.*

Demostración:

Para obter a derivada covariante dun campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ xa vimos que temos que tomar a derivada usual do campo $\frac{dV}{dt}(t)$, e proxectar este vector no plano tanxente á superficie. Neste caso, como \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 teñen o mesmo plano tanxente nos puntos de α , a derivada covariante de V é a mesma para as dúas superficies.

□

Capítulo 3

Teorema local de Gauss-Bonnet

Neste capítulo presentaremos o Teorema de Gauss-Bonnet na súa versión local, onde se consideran rexións simples con características moi específicas. Deste xeito, poderemos estudar posteriormente a relación entre este e a holonomía na esfera. Cabe mencionar que o teorema conta cunha versión global, estudada na asignatura de Teoría Global de Superficies e na que conecta de forma elegante a xeometría das superficies coa súa topoloxía. Non o enunciaremos, pois non será necesario para os obxectivos deste traballo, pero pódese atopar en [6] e [5].

3.1. Ángulo de rotación dunha curva plana regular

O ángulo de rotación dunha curva plana regular é unha función que mide a dirección dunha curva respecto a unha dirección fixa do plano. Se somos capaces de medir a dirección da curva en cada punto, poderemos calcular a variación total desta entre dous instantes dados. Este concepto coñécese como ángulo de rotación total dunha curva, que nos proporciona tódalas direccións que abarcamos ao percorrer dita curva.

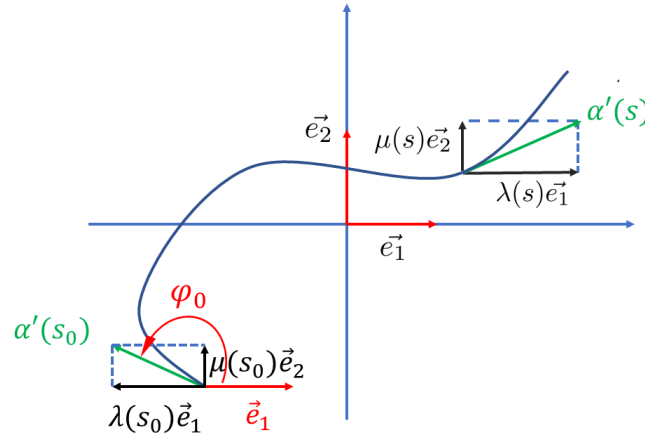
Consideremos entón ${}^1\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha curva regular parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, s , e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ unha base ortonormal de \mathbb{R}^2 . Deste xeito, podemos expresar a derivada da curva en función dos vectores desta base, é dicir, $\alpha'(s) = \lambda(s)\vec{e}_1 + \mu(s)\vec{e}_2$, sendo $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^\infty([0, l])$ certas funcións cumprindo que $\lambda(s)^2 + \mu(s)^2 = 1 = \|\alpha'(s)\|$ para todo $s \in [0, l]$. Fixemos $s_0 \in [0, l]$ e tomemos φ_0 o ángulo que forma \vec{e}_1 con $\alpha'(s_0)$, é dicir, $\varphi_0 = \arccos(\langle \vec{e}_1, \alpha'(s_0) \rangle) \in (-\pi, \pi]$ e, polo tanto, $\lambda(s_0) = \cos \varphi_0$ e $\mu(s_0) = \sin \varphi_0$.

¹Como a curva está definida nun intervalo pechado entenderemos a derivabilidade e regularidade nos extremos do intervalo como unha extensión da derivabilidade e regularidade no interior do intervalo. É dicir, denotaremos por $\alpha'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\alpha(0+h) - \alpha(0)}{h}$ á derivada de α en 0 pola dereita, e $\alpha'(l^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\alpha(l+h) - \alpha(l)}{h}$, a derivada de α en l pola esquerda.

Definimos entón o *ángulo de rotación da curva regular* $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ como o que define a función diferenciable:

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s (\lambda\mu' - \mu\lambda')(u)du + \varphi_0, \quad (3.1)$$

onde se pode probar que $\lambda(s) = \cos \varphi(s)$, $\mu(s) = \sin \varphi(s)$ e $\varphi(s_0) = \varphi_0$, como se ve en [6].



Polo tanto, se $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é unha curva regular parametrizada polo parámetro lonxitude de arco e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ unha base ortonormal de \mathbb{R}^2 , existe unha función diferenciable $\varphi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, de forma que para todo $s \in [0, l]$ podemos expresar a derivada da curva como $\alpha'(s) = \cos \varphi(s)\vec{e}_1 + \sin \varphi(s)\vec{e}_2$.

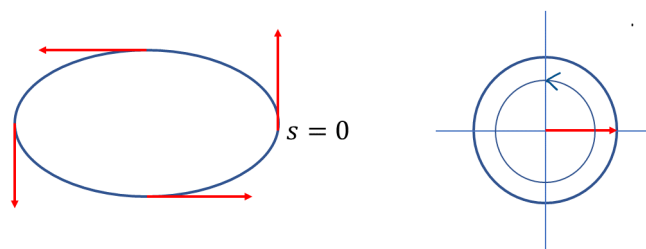
Notemos que o ángulo de rotación $\varphi(s)$ non está determinado de maneira única, pois este tamén se pode expresar como $\varphi(s) + 2\pi n$, sendo $n \in \mathbb{Z}$, pero pola contra a diferenza do ángulo entre os dous extremos da mesma si que está univocamente determinada. En efecto, se $\alpha(s_0)$ e $\alpha(s_1)$ son os extremos da mesma, $\varphi(s_1) + 2\pi n - (\varphi(s_0) + 2\pi n) = \varphi(s_1) - \varphi(s_0)$.

Entón, podemos definir o *ángulo de rotación total* dunha curva regular $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada polo parámetro lonxitude de arco como

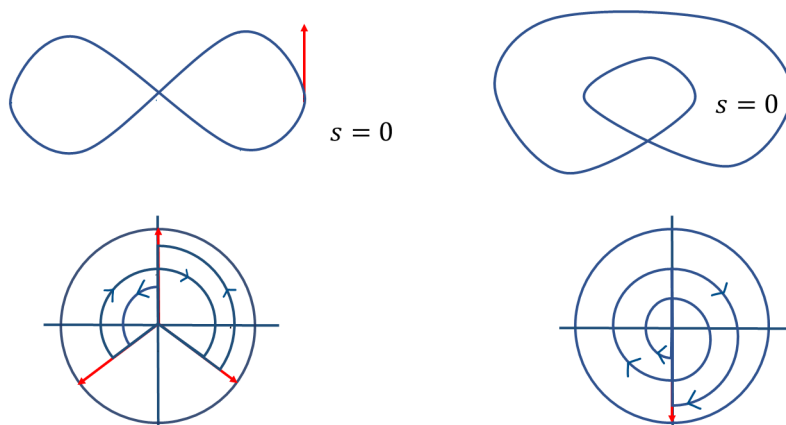
$$Rot(\alpha) = \varphi(l) - \varphi(0).$$

Se α é unha curva pechada, é claro que $\alpha'(0) = \alpha'(l)$, polo que $\cos \varphi(0)\vec{e}_1 + \sin \varphi(0)\vec{e}_2 = \cos \varphi(l)\vec{e}_1 + \sin \varphi(l)\vec{e}_2$, entón $\cos \varphi(0) = \cos \varphi(l)$ e $\sin \varphi(0) = \sin \varphi(l)$, de xeito que $\varphi(l) = \varphi(0) + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Temos entón que:

$$Rot(\alpha) = \varphi(l) - \varphi(0) = \varphi(0) + 2\pi m - \varphi(0) = 2\pi m.$$



Nesta figura, $Rot(\alpha) = 2\pi$.



Nestas outras $Rot(\alpha) = 0$ e $Rot(\alpha) = -4\pi$.

Vendo os exemplos, podemos chegar á conclusión de que se temos unha curva α pechada e simple, é dicir, que é inxectiva en $[0, l]$ e $\alpha(0) = \alpha(l)$, verificase que $Rot(\alpha) = \pm 2\pi$, onde o signo depende da orientación de α .

A continuación, imos xeneralizar estes conceptos para superficies. Polo que será necesario ter en conta a topoloxía dos conxuntos onde traballemos, no sentido de que reflectan a situación topolóxica do plano.

As seguintes definicións e resultados, cuxas demostracións están en [6] ou [5], pódense xeneralizar a curvas regulares a cachos. Mais, no estudo que imos realizar só é necesario considerar curvas regulares.

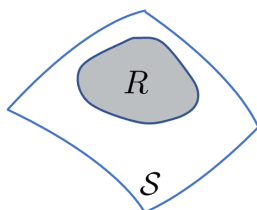
Definición 3.1 (Curva regular, pechada e simple nunha superficie regular S). Sexa S unha superficie regular orientada por N . Unha *curva regular, pechada e simple* é unha aplicación $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ verificando:

1. α é diferenciable e regular en $[0, l]$, normalmente parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, s .
2. α é continua en $[0, l]$.

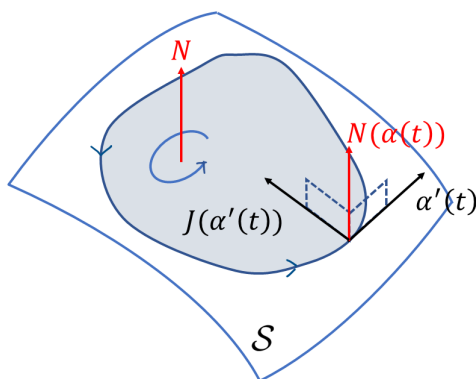
3. $\alpha(0) = \alpha(l)$.
4. α é inxectiva en $[0, l)$, é dicir, non ten autointerseccións.

Entenderemos a derivabilidade e regularidade nos extremos do intervalo como unha extensión da derivabilidade e regularidade no interior do intervalo.

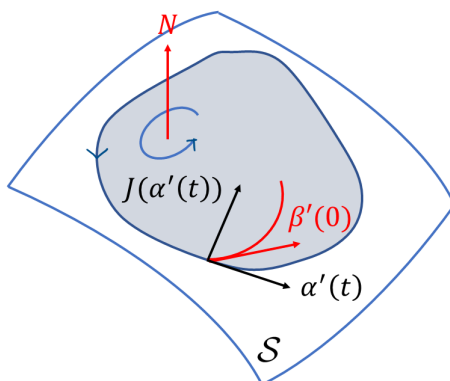
De acordo ao anterior, podemos definir unha *rexión simple* como un subconxunto R dunha superficie regular \mathcal{S} que é homeomorfo a un círculo no plano e ten por fronteira unha curva regular, pechada e simple.



Diremos que a fronteira de R está *ben orientada* (orientada positivamente) coa parametrización $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathcal{S}$, se $J(\alpha'(t))$ apunta hacia o interior da rexión R para todo valor do parámetro $t \in [0, l]$.



Equivalentemente, para calquera curva $\beta : [0, l] \rightarrow R$, con $\beta(0) = \alpha(t)$ e $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$, temos que $\langle \beta'(0), J(\alpha'(t)) \rangle > 0$. Por tanto, é natural tomarmos $\{\alpha'(t), J(\alpha'(t))\}$ como unha base orientada positivamente do plano tanxente en cada punto da curva. Deste xeito, $\alpha'(t) \wedge J(\alpha'(t))$ está na dirección de $N(\alpha(t))$ para todo $t \in [0, l]$. Ou o que é o mesmo, $(\alpha'(t), J(\alpha'(t)), N(\alpha(t))) > 0$, manténdose este signo constante en toda a traza de α .



3.2. Teorema local de Gauss-Bonnet

Nesta sección, veremos o Teorema de Gauss-Bonnet na súa versión local, cuxa demostración se pode ver en [6] ou [5]. O seu dominio de validez son as rexións simples dunha superficie regular, contidas no entorno coordenado dunha parametrización ortogonal. Entón, suporemos que \mathcal{S} é unha superficie regular orientada por N , $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathcal{S}$ unha curva regular, pechada, simple, ben orientada e parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, s , sendo ademais a fronteira dunha rexión simple R . Supoñamos tamén, que a parametrización $\mathbf{x} : (u, v) \in U \rightarrow \mathbf{x}(u, v) \in \mathbf{x}(U) \subset \mathcal{S}$ é unha parametrización ortogonal (isto é, $g_{12}(u, v) = \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = 0$), e que a orientación de \mathcal{S} é compatible coa inducida por \mathbf{x} (é dicir, $N(\mathbf{x}(u, v)) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\|}$).

Teorema 3.2 (Teorema local de Gauss-Bonnet para curvas regulares). *Sexa $R \subset \mathcal{S}$ unha rexión simple dunha superficie regular orientada \mathcal{S} de modo que $R \subset \mathbf{x}(U)$, con (U, \mathbf{x}) unha parametrización ortogonal de \mathcal{S} . Sexa $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathcal{S}$ a curva regular, pechada, simple, ben orientada e parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, s , que limita a rexión simple R . Entón:*

$$\iint_R K d\sigma + \int_{\partial(R)} \chi_{x\epsilon o} ds = 2\pi.$$

Capítulo 4

Superficies regradas

O obxectivo deste capítulo será ir preparando o terreo para facer cálculos sobre o ángulo de holonomía nun paralelo da esfera, apoiándonos nun tipo especial de superficie que imos construír a partir dos planos tanxentes á esfera en cada punto do paralelo.

Comezamos definindo as *superficies regradas*, que son unha clase particular de superficie cumprindo que por cada punto da mesma pasa unha recta que está contida nela. Entón, dita superficie \mathcal{S} podemos parametrizala do seguinte xeito:

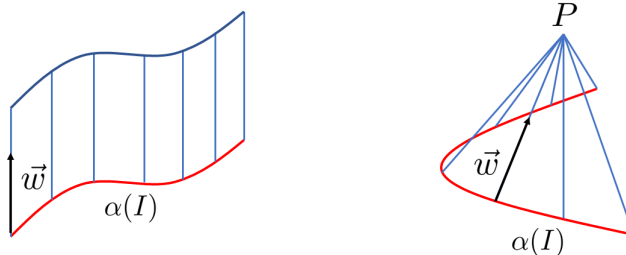
$$\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\vec{w}(t), \quad (4.1)$$

sendo $t \in I$, $v \in \mathbb{R}$ e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é unha curva parametrizada que denominamos *directriz*. O vector \vec{w} márcanos a dirección da recta que pasa polo punto $\alpha(t)$. Deste xeito, unha superficie regrada está xerada pola familia $\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}$. Notemos que \mathbf{x} pode ter puntos singulares, é dicir, puntos tales que $\mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v) = \vec{0}$.

Para o noso estudo da holonomía, serán de gran importancia dous tipos de superficies regradas, como son os cilindros e os conos.

Un *cilindro* é unha superficie regrada xerada por unha familia $\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}$, $t \in I$, onde $\alpha(I)$ está contida nun plano Π e $\vec{w}(t)$ é paralelo a unha dirección fixada do espazo \mathbb{R}^3 .

Por outra banda, un *cono* está xerado por unha familia $\{\alpha(t), \vec{w}(t)\}$, $t \in I$, a curva α tamén está contida nun plano Π e tódolos vectores $\vec{w}(t)$ apuntan cara un mesmo punto $P \notin \Pi$.



En canto á curvatura de Gauss das superficies regradas, esta sempre será non positiva, $K \leq 0$, e para probalo, apoiarémonos nas expresións (1.11) e (1.8). Sexa $p = \mathbf{x}(t, v) \in \mathcal{S}$, como $\mathbf{x}_{vv}(t, v) = 0$, temos que

$$L_{22}(t, v) = \langle N(p), \mathbf{x}_{vv}(t, v) \rangle = 0.$$

Agora vexamos que $g_{11}(t, v)g_{22}(t, v) - g_{12}^2(t, v) \geq 0$. En efecto, tomando ϕ o ángulo que forman $\mathbf{x}_t(t, v)$ e $\mathbf{x}_v(t, v)$, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v)\|^2 + \langle \mathbf{x}_t(t, v), \mathbf{x}_v(t, v) \rangle^2 &= \|\mathbf{x}_t(t, v)\|^2 \|\mathbf{x}_v(t, v)\|^2 \sin^2(\phi) \\ &\quad + \|\mathbf{x}_t(t, v)\|^2 \|\mathbf{x}_v(t, v)\|^2 \cos^2(\phi) \\ &= \|\mathbf{x}_t(t, v)\|^2 \|\mathbf{x}_v(t, v)\|^2. \end{aligned}$$

Entón,

$$\begin{aligned} g_{11}(t, v)g_{22}(t, v) - g_{12}^2(t, v) &= \|\mathbf{x}_t(t, v)\|^2 \|\mathbf{x}_v(t, v)\|^2 - \langle \mathbf{x}_t(t, v), \mathbf{x}_v(t, v) \rangle^2 \\ &= \|\mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v)\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Así, é claro que a curvatura de Gauss é non positiva, pois

$$K(p) = \frac{-L_{12}^2(t, v)}{g_{11}(t, v)g_{22}(t, v) - g_{12}^2(t, v)} \leq 0.$$

4.1. Superficies desenvolvibles

Un caso particular das superficies regradas, son as *superficies desenvolvibles*, que se poden expresar como $\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + v\vec{w}(t)$, con $\|\vec{w}(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, e cumpren que $\det(\vec{w}, \vec{w}', \alpha') = 0$.

Estas superficies podemos reproducilas nun plano de forma que non alteramos nin as distancias nin os ángulos, pois son localmente isométricas a un anaco do plano. Tanto o cilindro coma o cono serán deste tipo.

A curvatura de Gauss destas superficies é nula en tódolos seus puntos regulares. En efecto, sexa $p = \mathbf{x}(t, v)$ un destes puntos, cumprindo que $\|\mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v)\| \neq 0$.

Utilizando as expresións (1.8) para as coordenadas da segunda forma fundamental obtemos que:

$$\begin{aligned} L_{12}(t, v) &= \langle N(p), \mathbf{x}_{tv}(t, v) \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v)\|} \langle \mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v), \mathbf{x}_{tv}(t, v) \rangle \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v)\|} \det(\mathbf{x}_t(t, v), \mathbf{x}_v(t, v), \mathbf{x}_{tv}(t, v)) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v)\|} \det(\alpha'(t) + v\vec{w}'(t), \vec{w}(t), \vec{w}'(t)) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_t(t, v) \wedge \mathbf{x}_v(t, v)\|} \det(\alpha'(t), \vec{w}(t), \vec{w}'(t)) = 0, \end{aligned}$$

$$L_{22}(t, v) = \langle N(p), \mathbf{x}_{vv}(t, v) \rangle = \langle N(p), 0 \rangle = 0.$$

Por tanto, pola Ecuación (1.11), a curvatura de Gauss é

$$K(p) = \frac{L_{11}(t, v)L_{22}(t, v) - L_{12}^2(t, v)}{g_{11}(t, v)g_{22}(t, v) - g_{12}^2(t, v)} = 0.$$

No noso estudo da holonomía na esfera consideraremos un caso moi particular de superficie desenvolvable, aquela que se constrúe “xuntando” tódolos planos tanxentes ao longo dunha curva. Deste xeito poderemos establecer unha isometría entre esta superficie e o plano, e utilizar que o transporte paralelo non depende da superficie no caso que dúas sexan tanxentes ao longo dunha curva.

Exemplo 4.1. Sexa \mathcal{S} unha superficie regular e $\alpha = \alpha(s)$ unha curva (non recta) en \mathcal{S} parametrizada por lonxitude de arco. Supoñamos que α non é tanxente a unha dirección asintótica en ningún punto (polo tanto $N'(s) \neq 0$ para todo s). A superficie regrada parametrizada por

$$\mathbf{y}(s, v) = \alpha(s) + v \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|}, \quad (4.2)$$

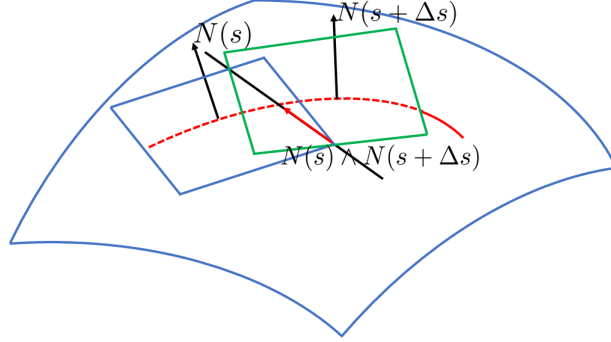
sendo $N(s)$ o vector normal a \mathcal{S} sobre a curva $\alpha(s)$, leva o nome de *envolvente da familia de planos tanxentes a \mathcal{S} ao longo de α* .

Xeometricamente, a superficie nace de considerar a familia $\{T_{\alpha(s)}\mathcal{S}\}$ de planos tanxentes ao longo de α , tomar dous suficientemente próximos e ver como se cortan cando os achegamos indefinidamente.

Entón, dados dous planos $T_{\alpha(s)}\mathcal{S}$ e $T_{\alpha(s+\Delta s)}\mathcal{S}$, se tomamos Δs suficientemente pequeno, estes córtanse nunha recta paralela ao vector $\frac{N(s) \wedge N(s+\Delta s)}{\Delta s}$. A medida que Δs se vai aproximando a cero, a liña recta vaise aproximando a unha posición límite, paralela ao seguinte vector:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{N(s) \wedge N(s+\Delta s)}{\Delta s} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{N(s) \wedge N(s+\Delta s) - N(s) \wedge N(s)}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{N(s) \wedge [N(s+\Delta s) - N(s)]}{\Delta s} \\ &= N(s) \wedge \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{N(s+\Delta s) - N(s)}{\Delta s} \\ &= N(s) \wedge N'(s). \end{aligned}$$

Isto quere dicir que os vectores que nos dan a dirección da recta que pasa por cada punto da curva directriz α , son as posicións límite da intersección de planos veciños de $\{T_{\alpha(s)}\mathcal{S}\}$.



Esta superficie é desenvoluble, pois tomando $w(s) = \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|}$, tense que:

$$\begin{aligned}
 \det(w, w', \alpha') &= \left\langle \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|} \wedge \left(\frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|} \right)', \alpha'(s) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\|N'(s)\|^2} \langle (N(s) \wedge N'(s)) \wedge (N(s) \wedge N''(s)), \alpha'(s) \rangle \\
 &= \frac{1}{\|N'(s)\|^2} \langle N(s) \langle N(s) \wedge N'(s), N''(s) \rangle - N''(s) \langle N(s) \wedge N'(s), N(s) \rangle, \alpha'(s) \rangle \\
 &= \frac{1}{\|N'(s)\|^2} \langle N(s) \langle N(s) \wedge N'(s), N''(s) \rangle, \alpha'(s) \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ademais, vexamos que esta superficie é regular nunha veciñanza de α ($\alpha(s) = \mathbf{y}(s, 0)$).

Teorema 4.2. *Sexa \mathcal{S} unha superficie regular con vector normal N . A superficie parametrizada por $\mathbf{y}(s, v) = \alpha(s) + v \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|}$, sendo α unha curva (non recta) contida en \mathcal{S} que non é tanxente en ningún punto a unha dirección asintótica, e parametrizada por arco, é unha superficie regular nunha veciñanza de $\alpha(s) = \mathbf{y}(s, 0)$. Ademais é tanxente a \mathcal{S} longo de α .*

Demostración:

É claro que $\langle \alpha'(s), N(s) \rangle = 0$, polo que derivando obtemos a seguinte expresión:

$$\langle \alpha''(s), N(s) \rangle + \langle \alpha'(s), N'(s) \rangle = 0,$$

que podemos utilizar para probar a regularidade da superficie nunha veciñanza de $\alpha(s)$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_s(s, 0) \wedge \mathbf{y}_v(s, 0) &= \alpha'(s) \wedge \frac{N(s) \wedge N'(s)}{\|N'(s)\|} = \frac{N(s)}{\|N'(s)\|} \langle \alpha'(s), N'(s) \rangle - \frac{N'(s)}{\|N'(s)\|} \langle \alpha'(s), N(s) \rangle \\
 &= \frac{N(s)}{\|N'(s)\|} \langle \alpha'(s), N'(s) \rangle = -\frac{N(s)}{\|N'(s)\|} \langle \alpha''(s), N(s) \rangle = \frac{-\chi_n^\alpha(s)}{\|N'(s)\|} N(s),
 \end{aligned}$$

sendo $\chi_n^\alpha(s)$ a curvatura normal de α en \mathcal{S} . Como α non é unha recta, $\alpha''(s) \neq 0$ e $\chi_n^\alpha(s) \neq 0$ nunha veciñanza de $\alpha(s) = \mathbf{y}(s, 0)$.

Por último, como o vector normal unitario en \mathcal{S} ao longo de $\mathbf{y}(s, 0)$ ten a mesma dirección que $N(s)$, a superficie parametrizada por $\mathbf{y}(s, v)$ é tanxente a \mathcal{S} ao longo de $\alpha(s) = \mathbf{y}(s, 0)$. \square

4.1.1. Caso particular da esfera

Xa mencionamos ao principio deste capítulo que os cilindros e os conos serán de gran importancia para o estudo da holonomía na esfera. Pois ben, ambos son casos particulares de superficies coma as do Exemplo 4.1, tomando por curvas directrices os paralelos dunha certa latitude.

Sexa pois, unha esfera \mathbb{S}^2 de raio unidade parametrizada en coordenadas xeográficas, $\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\varphi))$, sendo $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Estudaremos dous casos dependendo da latitude do noso paralelo α .

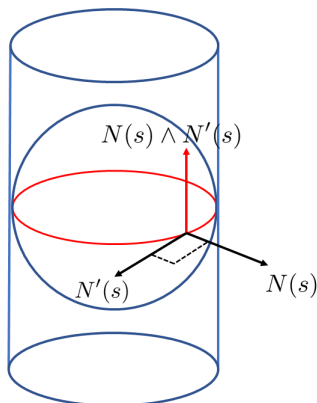
Caso 1. Se α é o ecuador da esfera, é dicir, se ten latitude $\varphi_0 = 0$, podemos parametrizala como $\alpha(s) = \mathbf{x}(s, 0) = (\cos(s), \sin(s), 0)$, con $s \in (0, 2\pi)$. É claro que α está parametrizada por lonxitude de arco, pois $|\alpha'(s)|^2 = 1$. Ademais o vector normal a \mathbb{S}^2 é o vector de posición, así que nos puntos do ecuador este será $N(s) = N(s, 0) = (\cos(s), \sin(s), 0) = \alpha(s)$, mentres que a súa derivada é $N'(s) = \alpha'(s) = (-\sin(s), \cos(s), 0)$. Polo tanto:

$$N(s) \wedge N'(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(s) & \sin(s) & 0 \\ -\sin(s) & \cos(s) & 0 \end{vmatrix} = (\cos^2(s) + \sin^2(s))e_3 = e_3.$$

Entón, a parametrización da superficie buscada é un cilindro, pois:

$$\mathbf{y}(s, v) = \alpha(s) + ve_3 = (\cos(s), \sin(s), 0) + v(0, 0, 1) = (\cos(s), \sin(s), v),$$

con $s \in (0, 2\pi)$ e $v \in \mathbb{R}$.



Caso 2. Agora consideraremos que α é unha circunferencia de latitude $\varphi_0 \neq 0$. Podemos tomar $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, pois se $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ os cálculos apenas varían. Polo tanto, a curva directriz podemos parametrizala como $\alpha(\theta) = \mathbf{x}(\theta, \varphi_0) = (\cos(\theta) \cos(\varphi_0), \sin(\theta) \cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0))$, con $\theta \in (0, 2\pi)$. Pola contra do que acontece no caso anterior, non está parametrizada por arco, pois como $\alpha'(\theta) = (-\sin(\theta) \cos(\varphi_0), \cos(\theta) \cos(\varphi_0), 0) = \cos(\varphi_0)(-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$, entón $\|\alpha'(\theta)\|^2 = \cos^2(\varphi_0) \neq 1$, por ser $\varphi_0 \neq 0$. Para reparametrizala por lonxitude de arco, calculamos a lonxitude de α entre 0 e θ mediante a seguinte integral:

$$s = \int_0^\theta |\alpha'(t)| dt = \int_0^\theta \cos(\varphi_0) dt = \cos(\varphi_0) \int_0^\theta dt = \cos(\varphi_0)[t]_0^\theta = \theta \cos(\varphi_0).$$

De onde obtemos que $\theta = \frac{s}{\cos(\varphi_0)}$ é o parámetro lonxitude de arco, quedando deste xeito a reparametrización de α como $\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \cos(\varphi_0), \sin\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0) \right)$, con $s \in (0, 2\pi)$.

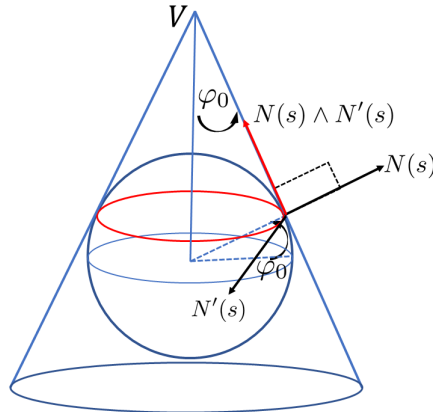
De forma análoga ao caso anterior, o vector normal nos puntos da directriz é o vector de posición, é dicir, $N(s) = \alpha(s)$, polo que o produto vectorial $N(s) \wedge N'(s)$ podemos expresalo como:

$$\begin{aligned} N(s) \wedge N'(s) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \cos(\varphi_0) & \sin\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \cos(\varphi_0) & \sin(\varphi_0) \\ -\sin\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) & \cos\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(-\cos\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \sin(\varphi_0), -\sin\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \sin(\varphi_0), \cos(\varphi_0) \right). \end{aligned}$$

Entón xa podemos obter a parametrización da nosa superficie do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s, v) &= \alpha(s) + v(N(s) \wedge N'(s)) = \cos\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) [\cos(\varphi_0) - v \sin(\varphi_0)] e_1 \\ &\quad + \sin\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) [\cos(\varphi_0) - v \sin(\varphi_0)] e_2 + (\sin(\varphi_0) + v \cos(\varphi_0)) e_3, \end{aligned}$$

sendo $s \in (0, 2\pi)$ e $v \in \mathbb{R}$.



A superficie que obtemos, xeométricamente é un cono e o seu vértice, V será o punto de corte do eixo OZ coa recta $\beta(\lambda) = \alpha(s) + \lambda(N(s) \wedge N'(s))$, que pasa por $\alpha(s)$ e ten por vector director $N(s) \wedge N'(s)$. Por tanto, obtemos que:

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \cos\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) [\cos(\varphi_0) - \lambda \operatorname{sen}(\varphi_0)] e_1 + \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) [\cos(\varphi_0) - \lambda \operatorname{sen}(\varphi_0)] e_2 \\ &\quad + (\operatorname{sen}(\varphi_0) + \lambda \cos(\varphi_0)) e_3. \end{aligned}$$

Igualando a cero a primeira e segunda compoñentes, obtemos que $\cos(\varphi_0) - \lambda \operatorname{sen}(\varphi_0) = 0$ se e só se $\lambda = \lambda_0 = \frac{\cos(\varphi_0)}{\operatorname{sen}(\varphi_0)} = \cot(\varphi_0)$, que é o valor do parámetro λ para o que as dúas rectas se intersecan. Entón, substituíndo na ecuación da recta, podemos obter o vértice do cono,

$$\beta(\lambda_0) = (0, 0, \frac{1}{\operatorname{sen}(\varphi_0)}) = V.$$

Só nos falta comprobar analiticamente que a superficie é un cono de vértice V , é dicir, que $A\sqrt{x^2 + y^2} = z - \frac{1}{\operatorname{sen}(\varphi_0)}$, para algún $A \in \mathbb{R}$. En efecto:

$$\begin{aligned} A[\cos(\varphi_0) - v \operatorname{sen}(\varphi_0)] &= \operatorname{sen}(\varphi_0) + v \cos(\varphi_0) - \frac{1}{\operatorname{sen}(\varphi_0)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi_0) + v \cos(\varphi_0) \operatorname{sen}(\varphi_0) - 1}{\operatorname{sen}(\varphi_0)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi_0) + v \cos(\varphi_0) \operatorname{sen}(\varphi_0) - (\cos^2(\varphi_0) + \operatorname{sen}^2(\varphi_0))}{\operatorname{sen}(\varphi_0)} \\ &= \frac{v \cos(\varphi_0) \operatorname{sen}(\varphi_0) - \cos^2(\varphi_0)}{\operatorname{sen}(\varphi_0)} \\ &= v \cot(\varphi_0) \operatorname{sen}(\varphi_0) - \cos(\varphi_0) \cot(\varphi_0) \\ &= -\cot(\varphi_0)[\cos(\varphi_0) - v \operatorname{sen}(\varphi_0)]. \end{aligned}$$

Polo tanto $A = -\cot(\varphi_0)$, de maneira que a superficie cumpre a ecuación do cono con vértice V .

Capítulo 5

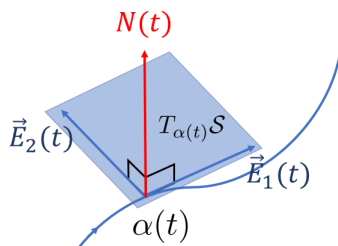
A xeometría do péndulo de Foucault

No que segue, e co obxectivo de describir a xeometría do péndulo de Foucault, comezaremos definindo formalmente o concepto de holonomía. Así poderemos estudala ao longo dos paralelos da esfera por dous métodos distintos; o primeiro será utilizando integración, mentres que o segundo consistirá nun método xeométrico no que utilizaremos as propiedades das isometrías.

5.1. A holonomía

Consideremos \mathcal{S} unha superficie regular orientada polo vector normal N e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S}$ unha curva regular en \mathcal{S} (non necesariamente parametrizada polo parámetro lonxitude de arco). Ao longo de α , sempre seremos capaces de definir dous campos de vectores, $\{\vec{E}_1(t), \vec{E}_2(t)\}$, formando unha base ortonormal positivamente orientada do plano tanxente, $T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$, á que denominaremos *referencia ortonormal*. Por exemplo, podemos tomar

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(t) &= \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}, \\ \vec{E}_2(t) &= J(\vec{E}_1(t)) = N(t) \wedge \vec{E}_1(t).\end{aligned}\tag{5.1}$$



Outra forma, sería considerar $\mathbf{x} : (u, v) \in U \rightarrow \mathbf{x}(u, v) \in \mathbf{x}(U) \subset \mathcal{S}$ unha parametrización de \mathcal{S} , con $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbf{x}(U)$, de xeito que

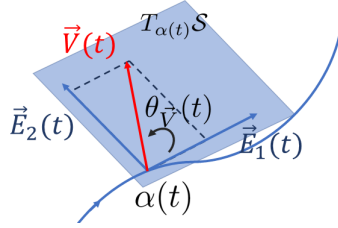
$$\begin{aligned}\vec{E}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}(t)}} \mathbf{x}_u(u(t), v(t)), \\ \vec{E}_2(t) &= J(\vec{E}_1(t)),\end{aligned}\tag{5.2}$$

sendo $(u(t), v(t))$ a expresión en coordenadas da curva.

Polo tanto, tomemos $\vec{V} \in \mathfrak{X}(\alpha)$ un campo de vectores diferenciable, tanxente e unitario ao longo da curva α . Como $\vec{V}(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$, é claro que se pode expresar en función da primeira referencia ortonormal. É dicir,

$$\vec{V}(t) = \cos(\theta_{\vec{V}}(t))\vec{E}_1(t) + \text{sen}(\theta_{\vec{V}}(t))\vec{E}_2(t),\tag{5.3}$$

sendo $\theta_{\vec{V}}(t)$ o ángulo orientado que forman os vectores $\vec{E}_1(t)$ e $\vec{V}(t)$.



Entón, utilizando a Expresión (5.3) e a Proposición 2.2, podemos expresar a derivada covariante de \vec{V} do seguinte xeito:

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{V}}{dt}(t) &= \frac{D(\cos(\theta_{\vec{V}}(t))\vec{E}_1(t))}{dt} + \frac{D(\text{sen}(\theta_{\vec{V}}(t))\vec{E}_2(t))}{dt} \\ &= -\text{sen}(\theta_{\vec{V}}(t))\theta'_{\vec{V}}(t)\vec{E}_1(t) + \cos(\theta_{\vec{V}}(t))\frac{D\vec{E}_1(t)}{dt} \\ &\quad + \cos(\theta_{\vec{V}}(t))\theta'_{\vec{V}}(t)\vec{E}_2(t) + \text{sen}(\theta_{\vec{V}}(t))\frac{D\vec{E}_2(t)}{dt}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Agora ben, necesitamos coñecer o valor da derivada covariante nos vectores da referencia ortonormal. Como $\|\vec{E}_1(t)\|^2 = \|\vec{E}_2(t)\|^2 = 1$, derivando:

$$0 = \langle \vec{E}_i(t), \vec{E}_i(t) \rangle' = \langle \vec{E}'_i(t), \vec{E}_i(t) \rangle + \langle \vec{E}_i(t), \vec{E}'_i(t) \rangle = 2\langle \vec{E}'_i(t), \vec{E}_i(t) \rangle,$$

e polo tanto $\langle \vec{E}'_i(t), \vec{E}_i(t) \rangle = 0$ para $i = 1, 2$.

Por outra banda, utilizando que $\langle \vec{E}_1(t), \vec{E}_2(t) \rangle = 0$ tense que

$$0 = \langle \vec{E}_1(t), \vec{E}_2(t) \rangle' = \langle \vec{E}'_1(t), \vec{E}_2(t) \rangle + \langle \vec{E}_1(t), \vec{E}'_2(t) \rangle,$$

de onde obtemos que $\langle \vec{E}'_1(t), \vec{E}_2(t) \rangle = -\langle \vec{E}_1(t), \vec{E}'_2(t) \rangle$.

Denotemos entón $\omega(t) = \langle \vec{E}'_1(t), \vec{E}_2(t) \rangle$, e vexamos a derivada covariante nos vectores da referencia ortonormal.

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{E}_1(t)}{dt} &= (\vec{E}'_1(t))^\top = \langle \vec{E}'_1(t), \vec{E}_1(t) \rangle \vec{E}_1(t) + \langle \vec{E}'_1(t), \vec{E}_2(t) \rangle \vec{E}_2(t) = \langle \vec{E}'_1(t), \vec{E}_2(t) \rangle \vec{E}_2(t) \\ &= \omega(t) \vec{E}_2(t), \\ \frac{D\vec{E}_2(t)}{dt} &= (\vec{E}'_2(t))^\top = \langle \vec{E}'_2(t), \vec{E}_1(t) \rangle \vec{E}_1(t) + \langle \vec{E}'_2(t), \vec{E}_2(t) \rangle \vec{E}_2(t) = \langle \vec{E}'_2(t), \vec{E}_1(t) \rangle \vec{E}_1(t) \\ &= -\omega(t) \vec{E}_1(t). \end{aligned}$$

Substituíndo na Expresión (5.4) obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{V}}{dt}(t) &= -\operatorname{sen}(\theta_{\vec{V}}(t))\theta'_{\vec{V}}(t)\vec{E}_1(t) + \cos(\theta_{\vec{V}}(t))\omega(t)\vec{E}_2(t) \\ &\quad + \cos(\theta_{\vec{V}}(t))\theta'_{\vec{V}}(t)\vec{E}_2(t) - \operatorname{sen}(\theta_{\vec{V}}(t))\omega(t)\vec{E}_1(t) \\ &= -\operatorname{sen}(\theta_{\vec{V}}(t))(\theta'_{\vec{V}}(t) + \omega(t))\vec{E}_1(t) + \cos(\theta_{\vec{V}}(t))(\theta'_{\vec{V}}(t) + \omega(t))\vec{E}_2(t) \\ &= (\theta'_{\vec{V}}(t) + \omega(t))(\cos(\theta_{\vec{V}}(t))\vec{E}_2(t) - \operatorname{sen}(\theta_{\vec{V}}(t))\vec{E}_1(t)), \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $\theta'_{\vec{V}}(t)$ mide a variación do ángulo orientado que determinan $\vec{E}_1(t)$ e $\vec{V}(t)$, mentres que

$$\omega(t) = \langle \vec{E}'_1(t), \vec{E}_2(t) \rangle = \left\langle \frac{D\vec{E}_1(t)}{dt}, \vec{E}_2(t) \right\rangle,$$

pola Proposición 2.2.

É claro que a norma da derivada covariante é

$$\left\| \frac{D\vec{V}(t)}{dt} \right\| = \left| \theta'_{\vec{V}}(t) + \omega(t) \right|,$$

na que ambas funcións dependen da referencia ortonormal escollida.

Ademais, \vec{V} será paralelo se e só se a súa derivada covariante é nula, o que ocorrerá cando $\theta'_{\vec{V}}(t) + \omega(t) = 0$. Ou o que é o mesmo, se

$$\theta_{\vec{V}}(t) = \theta_{\vec{V}}(t_0) - \int_{t_0}^t \omega(s) ds. \tag{5.6}$$

É moi importante observar que a función $t \mapsto \int_{t_0}^t \omega(s) ds$ non depende do ángulo orientado $\theta_{\vec{V}}(t)$, senón que só o fai da referencia ortonormal escollida, polo que non dependerá do campo paralelo \vec{V} .

Notemos que a diferenca $\theta_{\vec{V}}(t) - \theta_{\vec{V}}(t_0)$ nos proporciona a variación do ángulo orientado que percorreu o campo paralelo dende t_0 ata t respecto a unha referencia ortonormal dada. O sentido de xiro positivo está dado pola orientación da superficie. Podemos polo tanto definir a *holonomía de α entre t_0 e t* como a función dada por

$$\mathfrak{h}_{t_0}(t) = - \int_{t_0}^t \omega(s) ds, \tag{5.7}$$

que non dependerá do campo paralelo considerado.

Se \vec{W} é outro campo paralelo ao longo de α , únicamente se vai diferenciar de \vec{V} na condición inicial $\theta_{\vec{W}}(t_0)$. Deste xeito, calquera campo paralelo $\vec{W} \in \mathfrak{X}(\alpha)$ se pode expresar do seguinte xeito:

$$\begin{aligned}\vec{W}(t) &= \cos(\theta_{\vec{W}}(t))\vec{E}_1(t) + \text{sen}(\theta_{\vec{W}}(t))\vec{E}_2(t) \\ &= \cos(\theta_{\vec{W}}(t_0) + \mathfrak{h}_{t_0}(t))\vec{E}_1(t) + \text{sen}(\theta_{\vec{W}}(t_0) + \mathfrak{h}_{t_0}(t))\vec{E}_2(t).\end{aligned}$$

Como a holonomía $\mathfrak{h}_{t_0}(t)$ non depende do campo paralelo considerado, entón este estará unicamente determinado pola condición inicial $\theta_{\vec{W}}(t_0)$.

Se consideramos $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{S}$ unha curva pechada e simple, é dicir, inxectiva en $[a, b]$ e con $\alpha(a) = \alpha(b)$, á holonomía entre a e b , denominámola *holonomía ao longo de α* .

Exemplo 5.1. Tomemos unha esfera \mathbb{S}^2 , de raio unidade, orientada polo vector normal e parametrizada en coordenadas xeográficas,

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\cos(\theta) \cos(\varphi), \text{sen}(\theta) \cos(\varphi), \text{sen}(\varphi)),$$

sendo $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\theta \in (0, 2\pi)$.

Imos buscar entón a referencia ortonormal dun paralelo de latitude $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, que podemos expresar como $\alpha(\theta) = \mathbf{x}(\theta, \varphi_0) = (\cos(\theta) \cos(\varphi_0), \text{sen}(\theta) \cos(\varphi_0), \text{sen}(\varphi_0))$, con $\theta \in (0, 2\pi)$. Notemos que aínda que a parametrización non cubra $\alpha(0)$ e $\alpha(2\pi)$, a curva α está ben definida e é diferenciable para todo $\theta \in \mathbb{R}$; en particular, $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$ é pechada e simple. Temos polo tanto que:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\theta) &= \frac{\alpha'(\theta)}{\|\alpha'(\theta)\|} = \frac{(-\text{sen}(\theta) \cos(\varphi_0), \cos(\theta) \cos(\varphi_0), 0)}{\cos(\varphi_0)} = (-\text{sen}(\theta), \cos(\theta), 0), \\ \vec{E}_2(\theta) &= N(\alpha(\theta)) \wedge \vec{E}_1(\theta) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\theta) \cos(\varphi_0) & \text{sen}(\theta) \cos(\varphi_0) & \text{sen}(\varphi_0) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\cos(\theta) \text{sen}(\varphi_0), -\text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi_0), \cos(\varphi_0)).\end{aligned}$$

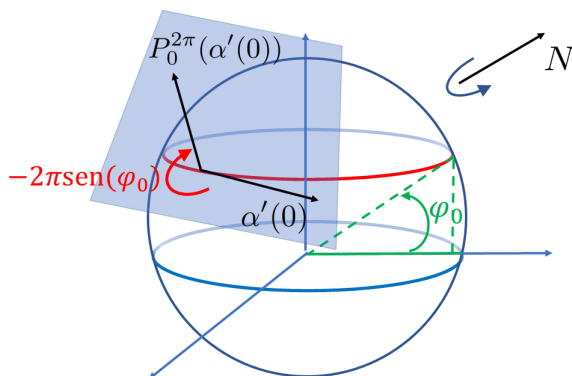
Entón, $\{\vec{E}_1(\theta), \vec{E}_2(\theta)\}$ é unha referencia ortonormal ao longo do paralelo $\varphi = \varphi_0$, de onde obtemos que:

$$\omega(\theta) = \langle \vec{E}_1'(\theta), \vec{E}_2(\theta) \rangle = \text{sen}(\varphi_0).$$

Para calcular a holonomía ao longo do paralelo $\varphi = \varphi_0$, utilizamos a Expresión (5.7), de xeito que:

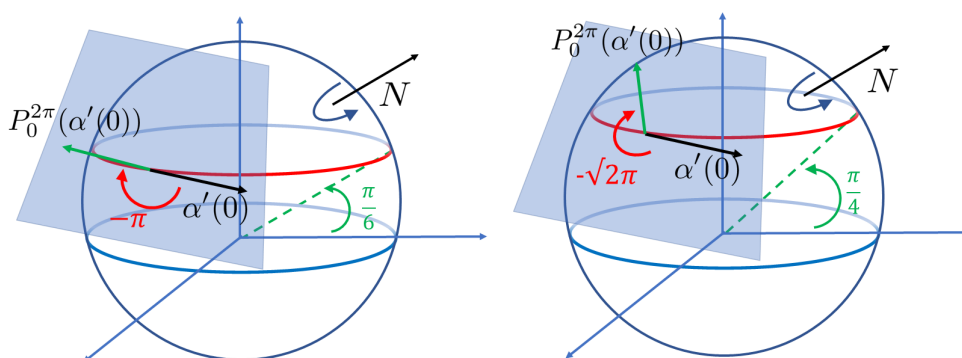
$$\mathfrak{h}_0(\theta) = -\int_0^\theta \omega(t) dt = -\int_0^\theta \text{sen}(\varphi_0) dt = -\text{sen}(\varphi_0) \int_0^\theta dt = -\theta \text{sen}(\varphi_0).$$

En particular, se damos unha volta completa ao paralelo, obtemos que a holonomía é $\mathfrak{h}_0(2\pi) = -2\pi \text{sen}(\varphi_0)$. É dicir, como neste caso o vector normal apunta cara fóra da esfera, o sentido de xiro dado pola orientación é o sentido contrario ás agullas do reloxo. Polo tanto, o signo negativo na holonomía indica que o campo paralelo xira en sentido contrario ao dado pola orientación.

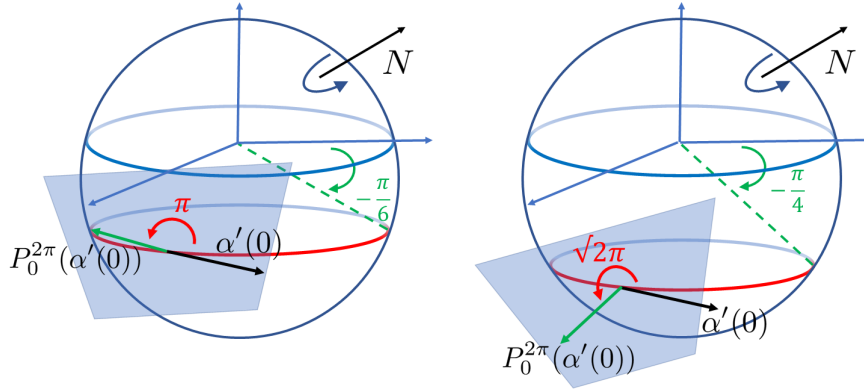


É importante observar que o sentido de xiro do campo paralelo depende do hemisferio no que nos atopamos, por exemplo, no hemisferio norte, este será no sentido das agullas do reloxo, mentres que no sur ($\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$) será no sentido contrario.

En efecto, se tomamos por exemplo os paralelos de latitude $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ou $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, a holonomía ao longo deles é $-\pi$ e $-\sqrt{2}\pi$, respectivamente.



En cambio, tomando os paralelos de latitude $\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$ ou $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$, a holonomía ao longo deles é π e $\sqrt{2}\pi$.



5.2. Relación da holonomía co teorema de Gauss-Bonnet

Consideremos o paralelo $\varphi = \varphi_0$ dado na sección anterior, pero neste caso imos parametrizalo por lonxitude de arco, é dicir,

$$\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \cos(\varphi_0), \sin\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0) \right),$$

con $s \in (0, 2\pi)$.

A continuación, utilizaremos a Expresión (1.15) para calcular a curvatura xeodésica de α . Como a curvatura dunha circunferencia é $1/r$, sendo r o raio da mesma, tense que $(\chi^\alpha(s))^2 = \frac{1}{\cos^2(\varphi_0)}$, pois o raio do paralelo é $\cos(\varphi_0)$.

Agora ben, derivando, obtemos que

$$\alpha''(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \frac{1}{\cos(\varphi_0)}, -\sin\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) \frac{1}{\cos(\varphi_0)}, 0 \right),$$

polo que, utilizando que $N(\alpha(s)) = \alpha(s)$:

$$\chi_n^\alpha(s) = \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle = -\cos^2\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) - \sin^2\left(\frac{s}{\cos(\varphi_0)}\right) = -1.$$

Entón, $(\chi_{x_{eo}}^\alpha(s))^2 = \frac{1}{\cos^2(\varphi_0)} - 1 = \frac{1 - \cos^2(\varphi_0)}{\cos^2(\varphi_0)} = \left(\frac{\sin(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)}\right)^2 = \tan^2(\varphi_0)$, de onde obtemos que $\chi_{x_{eo}}^\alpha(s) = \pm \tan(\varphi_0)$.

Consideremos agora a rexión simple R da esfera, limitada polo paralelo $\varphi = \varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ (podemos tomar tamén $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$), é dicir, o anaco parametrizado por $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$, con $\theta \in (0, 2\pi)$ e $\varphi \in (\varphi_0, \frac{\pi}{2})$. O Teorema de Gauss-Bonnet dinos que

$$\iint_R K d\sigma + \int_{\partial(R)} \chi_{x_{eo}} ds = 2\pi.$$

Como a curvatura de Gauss da esfera é 1, entón a integral $\iint_R K d\sigma = \iint_R d\sigma$ será a área da rexión R . Por outra banda,

$$\int_{\partial(R)} \chi_{x_{eo}} ds = \int_\alpha \pm \tan(\varphi_0) ds = \pm \tan(\varphi_0) \int_\alpha ds = \pm \tan(\varphi_0) 2\pi \cos(\varphi_0) = \pm 2\pi \sin(\varphi_0),$$

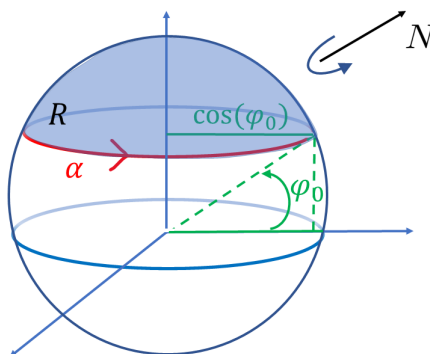
pois $\int_{\alpha} ds$ é a lonxitude do paralelo. Deste xeito, obtemos que

$$\iint_R K d\sigma = 2\pi - \int_{\alpha} \chi_{x\epsilon o} ds = 2\pi - (\pm 2\pi \operatorname{sen}(\varphi_0)) = 2\pi \mp 2\pi \operatorname{sen}(\varphi_0).$$

Pero como $\iint_R K d\sigma$ é a área de R , esta ten que ser menor ou igual que a metade da área da esfera. É dicir, $\iint_R K d\sigma \leq \frac{1}{2}4\pi 1^2 = 2\pi$. Entón, temos que descartar o signo positivo na expresión $2\pi \mp 2\pi \operatorname{sen}(\varphi_0)$, obtendo que

$$\iint_R K d\sigma = 2\pi - 2\pi \operatorname{sen}(\varphi_0) = 2\pi + \mathfrak{h}_0(2\pi), \quad (5.8)$$

sendo $\mathfrak{h}_0(2\pi)$ a holonomía do paralelo $\varphi = \varphi_0$. Notemos que ao descartar o signo positivo na expresión $2\pi \mp 2\pi \operatorname{sen}(\varphi_0)$, estamos descartando o signo negativo en $2\pi - (\pm 2\pi \operatorname{sen}(\varphi_0))$, polo que $2\pi - \int_{\alpha} \chi_{x\epsilon o} ds = 2\pi - 2\pi \operatorname{sen}(\varphi_0)$, de xeito que $\int_{\alpha} \chi_{x\epsilon o} ds = -\mathfrak{h}_0(2\pi)$. Notemos que este signo negativo é debido á orientación da curva que limita a rexión R .



5.3. Obtención da holonomía por medio de isometrías locais

Unha *isometría local* $F : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ entre dúas superficies é un difeomorfismo que conserva a primeira forma fundamental, é dicir, para cada $p \in \mathcal{S}_1$ e calquera $\vec{v}, \vec{w} \in T_p \mathcal{S}_1$,

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p = \langle dF_p(\vec{v}), dF_p(\vec{w}) \rangle_{F(p)}. \quad (5.9)$$

É dicir, F é un difeomorfismo cuxa diferencial, $dF_p : T_p \mathcal{S}_1 \rightarrow T_{F(p)} \mathcal{S}_2$ é unha isometría linear.

Pois ben, nesta sección, utilizaremos que as isometrías locais conservan ángulos e lonxitudes de vectores tanxentes para así obter a holonomía nos distintos paralelos da esfera.

5.3.1. Holonomía no ecuador da esfera

Na Sección 4.1.1, vimos que a envolvente da familia de planos tanxentes ao longo do ecuador é un cilindro. Como a lonxitude do ecuador é 2π , podemos desenrolvelo na porción de plano $\Pi = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Vexamos que existe unha isometría local entre Π e o cilindro, \mathcal{C} . O plano Π podemos parametrizalo por

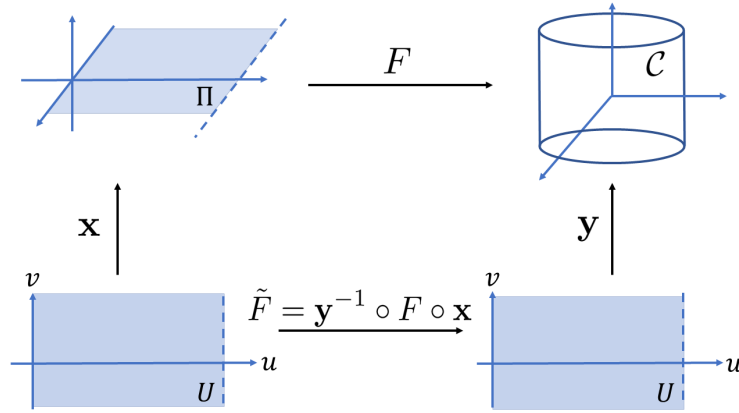
$$\begin{aligned} \mathbf{x} : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \Pi \\ (u, v) &\mapsto \mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0), \end{aligned}$$

mentres que o cilindro parametrizámolo como

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (u, v) &\mapsto \mathbf{y}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v). \end{aligned}$$

Consideremos entón a aplicación $F : \Pi \rightarrow \mathcal{C}$, dada por $F(u, v, 0) = (\cos(u), \sin(u), v)$. Para ver que é unha isometría local, temos que comprobar primeiro que é un difeomorfismo local en $p = \mathbf{x}(u, v) \in \Pi$, para o que necesitaremos a lectura en coordenadas de F :

$$\tilde{F}(u, v) = (\mathbf{y}^{-1} \circ F \circ \mathbf{x})(u, v) = (\mathbf{y}^{-1} \circ F)(u, v, 0) = \mathbf{y}^{-1}(\cos(u), \sin(u), v) = (u, v).$$



Por ser a \tilde{F} diferenciable en (u, v) , F tamén é diferenciable en p , sendo ademais

$$J\tilde{F}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz asociada a dF_p respecto das bases de vectores coordenados, como vimos na Sección 1.3. É claro que, por ser $\det(J\tilde{F}_{(u,v)}) \neq 0$, dF_p é un isomorfismo linear, e polo Teorema 1.4, F é un difeomorfismo local en p .

Falta ver que F é unha isometría local en p , é dicir, que se cumpre a Expresión (5.9) para todos $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Pi = \Pi$. Como $\mathbf{x}_u(u, v) = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{x}_v(u, v) = (0, 1, 0)$, é claro que a

matriz de Gram da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$ do plano Π é

$$\mathbb{I}_{\mathbf{x}(u,v)}^{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, $\mathbf{y}_u(u, v) = (-\text{sen}(u), \cos(u), 0)$ e $\mathbf{y}_v(u, v) = (0, 0, 1)$, polo que a matriz de Gram na base $\{\mathbf{y}_u(u, v), \mathbf{y}_v(u, v)\}$ asociada á primeira forma fundamental do cilindro tamén é a matriz identidade,

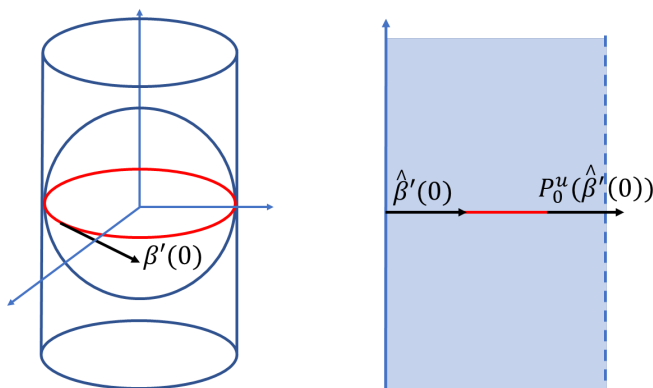
$$\mathbb{I}_{\mathbf{y}(u,v)}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entón, dados $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\Pi$, con coordenadas (v_1, v_2) e (w_1, w_2) na base de vectores coordenados $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$, é claro que:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p = (v_1, v_2) \mathbb{I}_{\mathbf{x}(u,v)}^{\Pi} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \mathbb{I}_{\mathbf{y}(u,v)}^{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \langle dF_p(\vec{v}), dF_p(\vec{w}) \rangle_{F(p)},$$

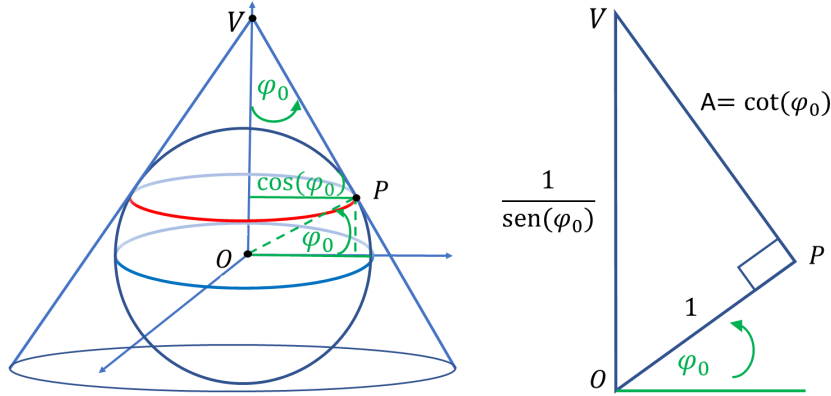
probando así que F é unha isometría local en p .

Como a esfera e o cilindro son tanxentes ao longo do ecuador, facer o transporte paralelo dun vector tanxente ao longo do ecuador da esfera é equivalente a facelo a través da mesma curva no cilindro, é dicir, ao longo da curva $\beta(u) = (\cos(u), \text{sen}(u), 0)$, con $u \in (0, 2\pi)$. Pero acabamos de probar que o cilindro e o plano son localmente isométricos, polo que a holonomía sobre o ecuador podemos calculala de xeito máis sinxelo sobre a curva no plano $\hat{\beta}(u) = F^{-1}(\beta(u)) = (u, 0, 0)$, con $u \in (0, 2\pi)$. Sabemos tamén que o transporte paralelo no plano é a identidade, polo que se tomamos $\hat{\beta}'(u) = (1, 0, 0)$, entón $P_0^{2\pi}(\hat{\beta}'(u)) = (1, 0, 0)$, o que deixa claro que a holonomía sobre $\hat{\beta}$, e por tanto sobre β , é nula.



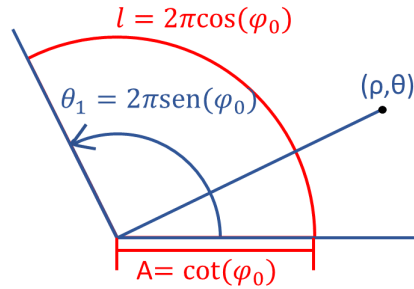
5.3.2. Holonomía nun paralelo de latitude $\varphi_0 \neq 0$

A envolvente da familia de planos tanxentes ao longo dun paralelo de latitude $\varphi_0 \neq 0$ é un cono de vértice $V = \left(0, 0, \frac{1}{\text{sen}(\varphi_0)}\right)$, como xa probamos na Sección 4.1.1. É claro que o raio do paralelo é $\cos(\varphi_0)$, polo que a súa lonxitude será $2\pi \cos(\varphi_0)$.



Consideremos un punto P do paralelo e sexa A a distancia deste punto ao vértice. Dado o triángulo OPV , podemos obter facilmente utilizando o Teorema de Pitágoras que $A = \cot(\varphi_0)$.

Se despregamos o cono no plano, obtemos unha rexión en coordenadas polares (ρ, θ) , con $\rho \in (0, +\infty)$, e $\theta \in (0, \theta_1)$, sendo θ_1 descoñecido. Como sabemos que a lonxitude do paralelo é $2\pi \cos(\varphi_0)$ e a distancia de calquera punto deste ao vértice é $A = \cot(\varphi_0)$. Entón, en vista da seguinte figura, tomando $l = 2\pi \cos(\varphi_0)$ a lonxitude do paralelo, tense que $2\pi \cos(\varphi_0) = \theta_1 \cot(\varphi_0)$, de onde $\theta_1 = 2\pi \sen(\varphi_0)$.



Deste xeito, a porción de plano en coordenadas polares cumpre que $\rho \in (0, \infty)$ e $\theta \in (0, 2\pi \sen(\varphi_0))$.

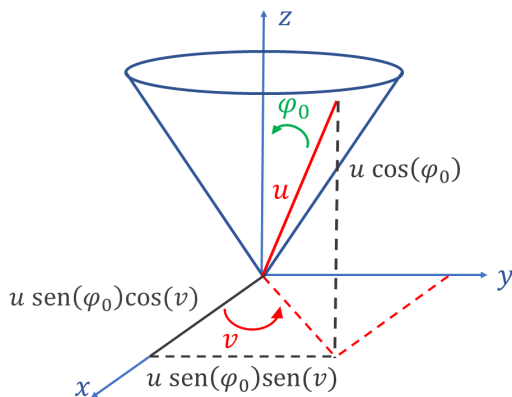
Agora estableceremos unha isometría local, F entre dito anaco de plano e o cono de vértice $(0, 0, 0)$, con apertura φ_0 e orientado cara a parte positiva do eixo OZ , é dicir, o cono de ecuación $A\sqrt{x^2 + y^2} = z$, con $A = \cot(\varphi_0)$.

Consideremos entón o plano, \mathcal{S}_1 , parametrizado por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : U_1 = (0, +\infty) \times (0, 2\pi \sen(\varphi_0)) &\rightarrow \mathcal{S}_1 \\ (\rho, \theta) &\mapsto \mathbf{x}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sen(\theta), 0), \end{aligned}$$

mentres que o cono, \mathcal{S}_2 , podemos parametrizalo como

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : U_2 = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathcal{S}_2 \\ (u, v) &\mapsto \mathbf{y}(u, v) = (u \sen(\varphi_0) \cos(v), u \sen(\varphi_0) \sen(v), u \cos(\varphi_0)). \end{aligned}$$



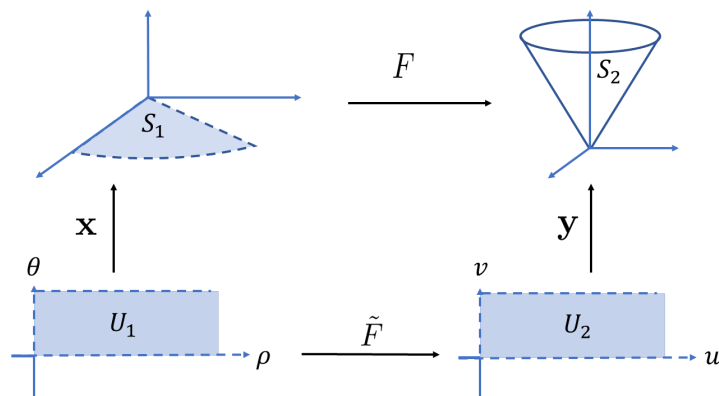
Entón, imos construír a isometría tendo en conta que se a distancia da orixe a un punto $p \in \mathcal{S}_1$ é ρ , a distancia da orixe a $F(p) \in \mathcal{S}_2$ tamén será ρ . Mentres que as razóns $\frac{\theta}{2\pi \text{sen}(\varphi_0)}$ e $\frac{v}{2\pi}$ serán iguais, de onde obtemos que $v = \frac{\theta}{\text{sen}(\varphi_0)}$. Polo tanto, para un punto $\mathbf{x}(\rho, \theta) = p \in \mathcal{S}_1$, a aplicación

$$F(p) = \left(\rho \text{sen}(\varphi_0) \cos\left(\frac{\theta}{\text{sen}(\varphi_0)}\right), \rho \text{sen}(\varphi_0) \text{sen}\left(\frac{\theta}{\text{sen}(\varphi_0)}\right), \rho \cos(\varphi_0) \right)$$

entre \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 é a isometría local que buscamos. Para comprobalo, primeiro temos que ver que é un difeomorfismo local en p . A lectura en coordenadas de F é:

$$\tilde{F}(\rho, \theta) = \mathbf{y}^{-1}(F(\mathbf{x}(\rho, \theta))) = \mathbf{y}^{-1}(F(p)) = \left(\rho, \frac{\theta}{\text{sen}(\varphi_0)} \right),$$

que é diferenciable en (ρ, θ) , polo que F é diferenciable en p .



Ademais, a matriz asociada a dF_p respecto das bases de vectores coordenados é

$$J\tilde{F}_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{sen}(\varphi_0)} \end{pmatrix},$$

que cumpre que $\det(J\tilde{F}_{(\rho, \theta)}) = \frac{1}{\text{sen}(\varphi_0)} \neq 0$. Polo tanto, dF_p é un isomorfismo linear en (ρ, θ) e polo Teorema 1.4, F é un difeomorfismo local en p .

Agora veremos que F é unha isometría local en p comprobando que se cumpre a expresión (5.9).

Dados $\vec{v}, \vec{w} \in T_p \mathcal{S}_1$, con coordenadas (v_1, v_2) e (w_1, w_2) na base de vectores coordenados $\{\mathbf{x}_\rho(\rho, \theta), \mathbf{x}_\theta(\rho, \theta)\}$, temos que:

$$\begin{aligned} dF_p(\vec{v}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{sen}(\varphi_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{v_2}{\text{sen}(\varphi_0)} \end{pmatrix}, \\ dF_p(\vec{w}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{sen}(\varphi_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \frac{w_2}{\text{sen}(\varphi_0)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}_\rho(\rho, \theta) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta), 0)$ e $\mathbf{x}_\theta(\rho, \theta) = (-\rho \text{sen}(\theta), \rho \cos(\theta), 0)$, a matriz de Gram asociada á primeira forma fundamental do plano na base $\{\mathbf{x}_\rho(\rho, \theta), \mathbf{x}_\theta(\rho, \theta)\}$ é

$$\mathbb{I}_{\mathbf{x}(\rho, \theta)}^{\mathcal{S}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_u(u, v) &= (\text{sen}(\varphi_0) \cos(v), \text{sen}(\varphi_0) \text{sen}(v), \cos(\varphi_0)), \\ \mathbf{y}_v(u, v) &= (-u \text{sen}(\varphi_0) \text{sen}(v), u \text{sen}(\varphi_0) \cos(v), 0), \end{aligned}$$

polo que a matriz de Gram asociada á primeira forma fundamental do cono na base $\{\mathbf{y}_u(u, v), \mathbf{y}_v(u, v)\}$ é

$$\mathbb{I}_{\mathbf{y}(u, v)}^{\mathcal{S}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \text{sen}^2(\varphi_0) \end{pmatrix}.$$

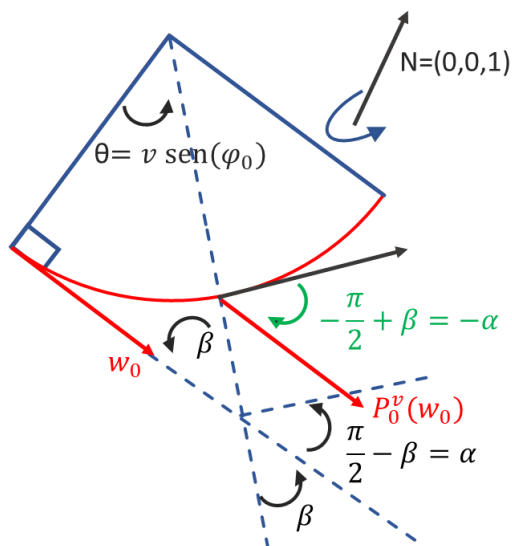
Entón F é unha isometría local en $p = \mathbf{x}(\rho, \theta)$, pois:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p = (v_1, v_2) \mathbb{I}_p^{\mathcal{S}_1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \rho^2 v_2 w_2,$$

$$\begin{aligned} \langle dF_p(\vec{v}), dF_p(\vec{w}) \rangle_{F(p)} &= \left(v_1, \frac{v_2}{\text{sen}(\varphi_0)} \right) \mathbb{I}_{F(p)}^{\mathcal{S}_2} \begin{pmatrix} w_1 \\ \frac{w_2}{\text{sen}(\varphi_0)} \end{pmatrix} = \left(v_1, \frac{v_2}{\text{sen}(\varphi_0)} \right) \mathbb{I}_{\mathbf{y}(\rho, \frac{\theta}{\text{sen}(\varphi_0)})}^{\mathcal{S}_2} \begin{pmatrix} w_1 \\ \frac{w_2}{\text{sen}(\varphi_0)} \end{pmatrix} \\ &= \left(v_1, \frac{v_2}{\text{sen}(\varphi_0)} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \text{sen}^2(\varphi_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \frac{w_2}{\text{sen}(\varphi_0)} \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \rho^2 v_2 w_2. \end{aligned}$$

Para obter a isometría local entre o plano e o cono inicial, de vértice $(0, 0, \frac{1}{\text{sen}(\varphi_0)})$ basta facer unha rotación e unha traslación (isometrías), para poñer o cono boca abaixo e mover o vértice dende $(0, 0, 0)$ ata $(0, 0, \frac{1}{\text{sen}(\varphi_0)})$.

Por último, como a esfera e o cono son tanxentes ao longo do paralelo $\alpha(\theta)$, de latitude $\varphi_0 \neq 0$, facer o transporte paralelo ao longo de $\alpha(\theta)$ na esfera será o mesmo que facelo ao longo da mesma curva no cono. Como no caso anterior, podemos levar α ao plano mediante unha isometría e calcular o ángulo de holonomía no plano, utilizando que o transporte paralelo neste é a identidade.



Como $v \text{ sen}(\varphi_0) + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi$, obtemos que a holonomía no paralelo é

$$-\alpha = \beta - \frac{\pi}{2} = -v \text{ sen}(\varphi_0),$$

polo que ao dar unha volta completa, esta será $-2\pi \text{ sen}(\varphi_0)$.

5.4. A Terra rota

Xa estamos en condicións de probar a rotación do planeta no que habitamos. Con este fin, describiremos o funcionamento do péndulo en detalle, aplicando toda a xeometría diferencial vista ata agora.

Para simplificar, supoñamos que non é a Terra a que rota, senón que é o péndulo o que se move con velocidade constante arredor dun paralelo, completando unha volta cada 24 horas.

Consideremos entón unha esfera \mathbb{S}^2 representando a Terra e unha parametrización da mesma en coordenadas xeográficas: $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$, onde $\theta \in (0, 2\pi)$ e $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ representan lonxitude e latitude respectivamente. Se fixamos unha latitude $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obtemos un paralelo, $\mathbf{x}(\theta, \varphi_0)$, con $\theta \in (0, 2\pi)$. Sobre dito paralelo imos definir un campo de vectores

$\vec{W}(\theta)$ do seguinte xeito: cada vez que o péndulo está no punto máis baixo da traxectoria, tomamos o vector velocidade, que será tanxente á superficie da esfera en cada punto $\mathbf{x}(\theta, \varphi_0)$. Notemos que o plano de oscilación do péndulo está determinado por $\vec{W}(\theta)$ e $N(\theta)$, vector normal á superficie en cada punto do paralelo.

Por outra banda, como o péndulo completa unha volta cada 24 horas a velocidade constante, o parámetro θ é proporcional ao tempo t , é dicir: $\theta = kt$, sendo $k \in \mathbb{R}$. Polo tanto \vec{W} é un campo de vectores velocidade que depende θ e polo tanto de t , así que escribiremos $\vec{W}(\theta) = \vec{W}(kt) = \vec{V}(t)$. A continuación, utilizando a regra da cadea podemos calcular a aceleración do péndulo:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\vec{W}(kt)}{dt} = \frac{d\vec{W}(\theta)}{d\theta} \frac{d(kt)}{dt} = k \frac{d\vec{W}(\theta)}{d\theta}.$$

Como a forza centrípeta do xiro da Terra é despreziable respecto á gravitatoria, consideramos que esta última é a única que actúa sobre o péndulo. Ademais, esta forza é unha forza central que apunta na dirección do vector normal $N(\theta)$ á superficie. Entón, podemos botar man da segunda lei de Newton; que nos di que a forza e a aceleración son proporcionais. Así que a forza e a aceleración que sofre o péndulo están na mesma dirección, é dicir, na dirección de $N(\theta)$, polo que a parte tanxente da aceleración do péndulo é nula. Noutras palabras: a derivada covariante do campo \vec{W} tamén o é,

$$\frac{D\vec{W}(\theta)}{d\theta} = \vec{0}.$$

Entón, como consecuencia, \vec{W} é un campo de vectores paralelo ao longo do paralelo $\varphi = \varphi_0$.

Por outra banda, a medida que transportamos o péndulo ao longo do paralelo $\varphi = \varphi_0$, o ángulo de holonomía de \vec{W} é $-2\pi \text{sen}(\varphi_0)$ radiáns. En particular, a velocidade angular é de

$$\omega = \frac{2\pi \text{sen}(\varphi_0)}{24} \text{ rad/h.}$$

Polo tanto é fácil deducir que o período de precesión do péndulo é

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{\omega} = \frac{24}{\text{sen}(\varphi_0)} \text{ horas} .$$

Entón, como na realidade consideramos que o plano do péndulo é estacionario con respecto á Terra, a única forma de que o plano teña unha certa precesión é que a Terra rote arredor dos seus paralelos.

Para concluír e a modo de exemplo, vexamos o período de precesión en varios puntos da Terra. Comecemos por Santiago de Compostela, onde a latitude é de aproximadamente $0,7484 \text{ rad} = 42,88^\circ$, polo que o período do péndulo serían $35,27$ horas. No experimento orixinal, no Panteón de París, a latitude é de $0,8528 \text{ rad} = 48,86^\circ$, de xeito que o período

é de 31,87 horas. En cambio, no polo norte, a latitude é $\frac{\pi}{2}$ rad = 90° , polo que o período é de $\frac{24}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 24$ horas. Por último, no ecuador o plano de oscilación non cambia, pois xa vimos na Sección 5.3.1 que a holonomía ao longo do ecuador é nula.

*Se permanecese alí, indiferente ao paso das horas, contemplando
aquela cabeza de paxaro, aquela punta de lanza, aquela crista
invertida, mentres trazaba no baleiro as súas diagonais, rasando
os puntos opostos da súa astigmática circunferencia, sucumbiría
a unha miraxe fabuladora, porque o Péndulo faríame crer que o
plano de oscilación completaría unha rotación enteira para
volver, en trinta e dúas horas, ao seu punto de partida,
describindo unha elipse aplanada, a cal xiraba tamén arredor
do seu centro cunha velocidade angular uniforme proporcional
ao seno da latitude.*

El Péndulo de Foucault, Umberto Eco, Editorial Lumen.

Apéndice A

Expresións notables

Sexa \mathcal{S} unha superficie parametrizada por $\mathbf{x} : (u, v) \in U \rightarrow \mathbf{x}(u, v) \in \mathcal{S}$. Os *símbolos de Christoffel*. correspóndense coa seguinte expresión, que só depende da primeira forma fundamental.

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(g_{11})_u & \frac{1}{2}(g_{11})_v & (g_{12})_v - \frac{1}{2}(g_{22})_u \\ (g_{12})_u - \frac{1}{2}(g_{11})_v & \frac{1}{2}(g_{22})_u & \frac{1}{2}(g_{22})_v \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde tódalas funcións están avaliadas en (u, v) , é dicir, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v)$ e $g_{ij} = g_{ij}(u, v)$, con $i, j, k = 1, 2$.

Por outra banda, as *fórmulas de Gauss* xorden de expresar os vectores $\mathbf{x}_{uu}(u, v)$, $\mathbf{x}_{uv}(u, v)$, $\mathbf{x}_{vu}(u, v)$, $\mathbf{x}_{vv}(u, v)$ respecto á base ortonormal de $\mathbb{R}^3 \{ \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v), N(\mathbf{x}(u, v)) \}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}(u, v) &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u(u, v) + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v(u, v) + L_{11} N(\mathbf{x}(u, v)) \\ \mathbf{x}_{uv}(u, v) &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u(u, v) + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v(u, v) + L_{12} N(\mathbf{x}(u, v)) \\ \mathbf{x}_{vu}(u, v) &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u(u, v) + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v(u, v) + L_{12} N(\mathbf{x}(u, v)) \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u(u, v) + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v(u, v) + L_{22} N(\mathbf{x}(u, v)) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Bibliografía

- [1] A. D. Aczel: *Pendulum, Léon Foucault and the Triumph of Science*, Atria Books, New York, NY, 2003.
- [2] J. Bergmann e H. C. Bergmann: *Foucault pendulum through basic geometry*, American Journal of Physics, 888-892, October 2007.
- [3] M. Ruiza, T. Fernández e E. Tamaro, Biografía de Léon Foucault. En Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea. Barcelona (España), 2004. Recuperado de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/f/foucault.htm> o 29 de xuño de 2021.
- [4] J. de Burgos: *Álgebra lineal y geometría cartesiana*, Mc Graw Hill, España, 2006.
- [5] M. P. Do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice- Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [6] M. A. Hernández Cifre e J. A. González: *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*, CSIC, Madrid, 2010.
- [7] J. A. Silva Silva: *Sentencia de la Inquisición contra Galileo Galilei: el dogma contra la razón*, Heurística Jurídica, No. 7, 84-100, 2016.
- [8] J. Oprea: *Geometry and the Foucault Pendulum*, The American Mathematical Monthly, Vol. 102, No. 6, 515-522, 1995.
- [9] J. E. Mansen e A. J. Tromba: *Cálculo vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, New York, 1991.