FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O Teorema de Fubini revisitado

Alicia López Bautista

Curso 2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O Teorema de Fubini revisitado

Alicia López Bautista

29/07/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: O Teorema de Fubini revisitado
Breve descrición do contido:
A idea de obter o volume dun corpo facendo lonchas, data de tempos ben antigos, sendo as distintas versións do Teorema de Fubini as que dan fundamento a esas ideas. O obxectivo deste traballo é afondar neste teorema, que se considerará en distintos contextos.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen

El problema del cálculo del área encerrada por una curva plana fue el origen del concepto de integral en una variable. Con el paso a la integral en dos variables, apareció la idea de calcular el volumen de un cuerpo dividiéndolo en superficies planas y “sumando” el área de cada una de ellas. Esta es la idea que está detrás del teorema de Fubini, una de las herramientas más importantes en Análisis.

Abstract

The problem of area calculation inside a flat curve was the origin of the concept of the integral in one variable. When the integral of two variables started to be used, the idea of calculate the volume of a body dividing it into flat surfaces and adding the area of them came up. This is the idea behind the Fubini’s theorem, which is one of the most important tools in Analysis.

Introducción

Para la teoría de la integración en funciones de varias variables, encontrar la relación entre las integrales dobles y las integrales iteradas supuso un gran avance a la hora de calcular áreas y volúmenes. Es el teorema de Fubini el que establece las condiciones para poder reducir la evaluación de una integral doble a una integral iterada.

En este trabajo se recogen diferentes resultados relacionados con este teorema. Consta de tres capítulos cuyo contenido explicamos brevemente a continuación.

En el primer capítulo se consideran versiones del teorema de Fubini para las integrales de Riemann y de Lebesgue para funciones reales de dos variables.

En el segundo capítulo nos centraremos en las versiones más generales de este teorema tanto para la integral de Riemann como para la de Lebesgue, considerando funciones reales de varias variables reales.

En el tercer capítulo, estudiaremos algunas de las relaciones entre el teorema de Fubini y otros resultados de intercambio de operaciones con límites, como son la regla de Leibniz y la igualdad entre las derivadas parciales mixtas.

Por último, se incluye también un apéndice donde se recogen conceptos que aparecen en el capítulo 1 y resultados que nos serán de ayuda para la comprensión y el seguimiento de los teoremas y demostraciones del capítulo 2.

Además, al final de cada capítulo se recoge la bibliografía usada para su elaboración.

Capítulo 1

Introducción histórica

En la Antigua Grecia, los matemáticos calculaban áreas por el método de exhausción, proceso que consistía en aproximar un área desde el interior por figuras regulares hasta que la diferencia entre el área que querían calcular y el de las figuras regulares fuese tan pequeña como querían. Posteriormente, Arquímedes perfeccionó este método y con él calculó, entre otras cosas, el área debajo de un segmento de parábola.

Durante la época romana no se avanzó mucho en el cálculo, ya que solo estaban interesados en la ingeniería para la construcción. Fue a partir del Renacimiento cuando volvieron a hacerse muchos avances, entre ellos el método de los indivisibles de Cavalieri, método que fue precursor del concepto de integral.

No fue hasta que aparecieron Newton y Leibniz que se descubrió que el proceso de integración era el proceso inverso al de derivación. Aunque fue Cauchy el que dio por primera vez una fundamentación.

Cuando se comenzó a tratar el concepto de medida, la mayoría de los matemáticos lo separaron del concepto de integral definida, a excepción de Weierstrass y de Giuseppe Peano. Fue este último quien, en 1887, expuso la relación entre los conceptos de medida y de integral:

Sea $f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$, y sea E la región acotada por el grafo de f. Entonces se tiene

$$\underline{\int_a^b} f = c_i(E) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f = c_e(E).$$

Así, f es Riemann-integrable si y solo si E es medible, es decir, $c_i(E) = c_e(E)$. [1]

[1] Denotaremos por $c_i(E)$ y $c_e(E)$ el contenido interior y exterior de E, respectivamente. En el apéndice

Entre los años 1850 y 1892 hubo un gran número de trabajos sobre las integrales dobles que usaban la propiedad de medibilidad. Aunque esta proviene del tratamiento que le dio Peano a la medida de los conjuntos, fue Camille Jordan quien, motivado por la teoría de las integrales múltiples y el querer extender la teoría de la integral doble $\int_E f dE$ a un conjunto arbitrario E, estableció la importancia del concepto de conjunto medible.

Antes del trabajo de Jordan con los conjuntos medibles, las discusiones sobre la relación entre la integral doble y las integrales iteradas ya involucraban el concepto de medibilidad:

Supongamos que el plano está dividido por rectas paralelas a los ejes de coordenadas en rectángulos R_{ij} de dimensiones Δx_i y Δy_i, que inducen una partición en subconjuntos E_{ij} del conjunto E. La mayoría de los E_{ij} serán rectángulos, pero algunos serán irregulares y contendrán parte de la frontera de E. Por analogía con el caso unidimensional, la integral $\int_E f(x,y)dE$ puede definirse como el límite de las sumas de Cauchy

$$\sum_{i,j} f(x_i,y_j)a(E_{ij}),\ \ (x_i,y_j) \in E_{ij} \tag{1.1}$$

según las dimensiones de los rectángulos R_{ij} se aproximan a cero, y donde $a(E_{ij})$ denota el área de E_{ij}, aunque su significado se dejó sin cuestionar.

Por otro lado, se definió la integral doble sobre E como el límite de las sumas

$$\sum_{i,j} f(x_i,y_j)a(R_{ij}),\ \ (x_i,y_j) \in R_{ij} \tag{1.2}$$

donde la suma incluía tanto a los rectángulos R_{ij} contenidos totalmente en E, como a todos los R_{ij} cuya intersección con E es no vacía. Para ello se asumía que la suma de las áreas de los R_{ij} que contenían parte de la frontera de E se aproximaba a cero cuando lo hacían las dimensiones de los R_{ij}, es decir, E era medible.

Cuando se demostró que la integral doble tenía el mismo valor que las integrales iteradas, fue conveniente asumir que las sumas de la forma (1.2) se podían usar igual que las de la forma (1.1). Esto, añadido a que $a(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$, permite que (1.2) se pueda expresar como

$$\sum_i \left[\sum_j f(x_i,y_j)\Delta y_j \right] \Delta x_i.$$

pueden encontrarse sus definiciones.

Al usar las sumas de la forma (1.2) en vez de las sumas de la forma (1.1) se asume que la suma de los E_{ij} no rectangulares convergen a cero según lo hacen las dimensiones de los R_{ij}, así que otra vez aparece la idea de medibilidad.

En el año 1876, Thomae extendió la teoría de la integral de Riemann a las funciones de dos variables y, dos años más tarde, dio un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada para la que la segunda integral existe mientras la primera no tiene sentido ya que, excepto para un valor de y, la función definida de la forma $x \longrightarrow f(x, y)$ no es Riemann-integrable. Previamente, Cauchy había señalado que las integrales

$$\int_0^1 dy \left[\int_0^1 f(x,y)dx\right] \text{ y } \int_0^1 dx \left[\int_0^1 f(x,y)dy\right]$$

no necesariamente son iguales cuando f no está acotada.

En 1883, du Bois-Reymond fue aún más allá, ya que encontró un ejemplo de función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrable como función de dos variables, cuyas funciones secciones $x \longrightarrow f(x, y)$ e $y \longrightarrow f(x, y)$ no son Riemann-integrables para todos los valores de y y x respectivamente.

Es decir, que la Riemann-integrabilidad de la función f no implica la Riemann-integrabilidad de las funciones $x \longrightarrow f(x, y)$ e $y \longrightarrow f(x, y)$. Por lo tanto, fue necesario hacer modificaciones en el teorema que complicaron su formulación: la introducción de integrales superiores e inferiores.

Usando las integrales superiores, du Bois-Reymond fue capaz de demostrar la siguiente versión del teorema de Fubini:

Si la función $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable en el conjunto $R = [0, 1] \times [0, 1]$, entonces las funciones

$$y \longrightarrow \overline{\int_0^1} f(x,y)dx \text{ y } x \longrightarrow \overline{\int_0^1} f(x,y)dy$$

son Riemann-integrables y

$$\int_R f(x,y)dR = \int_0^1 dy \left[\overline{\int_0^1} f(x,y)dx\right] = \int_0^1 dx \left[\overline{\int_0^1} f(x,y)dy\right].$$

Para tratar conjuntos cualesquiera, ante la posibilidad de que fuesen muy complicados, Harnack impuso la siguiente condición para el trato del teorema de Fubini:

Denotamos por G_η el conjunto de puntos que pertenecen tanto a la línea $y = \eta$ como al conjunto E, y que es el dominio de integración de la integral interior de $\int d\eta \left[\int f(x,\eta)dx\right]$. La intersección de las líneas $y = \eta$ con el conjunto E debe ser como mucho dos puntos, de forma que G_η sea un intervalo. Varios años después, él mismo añadió que el teorema de Fubini seguía siendo válido para conjuntos cuya frontera es de forma suficientemente simple, es decir, la intersección entre las rectas paralelas a los ejes de coordenadas y la frontera es un número finito de puntos. Por lo tanto, tenemos que las integrales interiores son integrables sobre una suma finita de intervalos, no habiendo ningún problema con su significado.

De esta forma, Jordan estableció la siguiente versión del teorema de Fubini:

Supongamos que E es un subconjunto del plano medible y acotado y que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable sobre E. Denotamos por F el conjunto de los y tales que $(x, y) \in E$ para algún valor de x, y sea G_η definido como la intersección de la línea $y = \eta$ con el conjunto E. Las integrales $\underline{\int_{G_\eta}} f(x,\eta)dx$ y $\overline{\int_{G_\eta}} f(x,\eta)dx$ siempre existen, y se cumple que

$$\int_E f(x,y)dE = \int_F d\eta \left[\underline{\int_{G_\eta}} f(x,\eta)dx\right] = \int_F d\eta \left[\overline{\int_{G_\eta}} f(x,\eta)dx\right].$$

Por otra parte, dejando a un lado la cuestión de la medibilidad, Lebesgue se dio cuenta de que si f es sumable en un conjunto medible E, las funciones $x \longrightarrow f(x, y)$ e $y \longrightarrow f(x, y)$ no necesitan ser medibles, por lo que empezó a introducir integrales superiores e inferiores para tratar con estas funciones que no eran medibles.

Aunque Cauchy ya había afirmado que la integración de $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua puede ser reducida a dos integrales sucesivas: primero en $[c, d]$ y después en $[a, b]$, no fue hasta 1902 que Lebesgue obtuvo una extensión de ese resultado para las funciones medibles acotadas. Para ello, consideró una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida y acotada en un conjunto medible E, y denotó por $\mathcal{L}$ a la clase de todas las funciones acotadas e integrables φ tales que $\varphi(x, y) < f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si llamamos L al supremo de todos los números $\int_E \varphi$ con $\varphi \in \mathcal{L}$ es, por definición, la integral inferior de f: $\underline{\int_E} f = L$. De forma análoga, definimos la integral superior $\overline{\int_E} f$. De estas definiciones, se puede deducir que $\underline{\int_E} f \leq \overline{\int_E} f$ y que f es integrable en E si y solo si $\underline{\int_E} f = \overline{\int_E} f$. De esta forma, Lebesgue pudo probar el siguiente resultado:

Si $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada y medible en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\int_R f(x, y)dR = \underline{\int_c^d} dy \left[\underline{\int_a^b} f(x, y)dx \right] = \underline{\int_a^b} dx \left[\underline{\int_c^d} f(x, y)dy \right] =$$

$$\overline{\int_c^d} dy \left[\overline{\int_a^b} f(x, y)dx \right] = \overline{\int_a^b} dx \left[\overline{\int_c^d} f(x, y)dy \right].$$

En 1907, usando la integral de Lebesgue, Fubini fue capaz de restablecer la simplicidad de la formulación demostrando el siguiente resultado:

Si $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función sumable en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces las funciones $x \longrightarrow f(x, y)$ e $y \longrightarrow f(x, y)$ son sumables para casi todos los valores de y y x, respectivamente. Además, las funciones $y \longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x, y)dx$ y $x \longrightarrow \displaystyle\int_c^d f(x, y)dy$ también son sumables y

$$\int_R f(x, y)dR = \int_c^d dy \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] = \int_a^b dx \left[\int_c^d f(x, y)dy \right].$$

Referencias bibliográficas

La información de este capítulo puede encontrarse en los libros *Historia de la matemática*, de C. B. Boyer [3], *Lebesgue's theory of integration*, de Thomas Hawkins, [6] y *Introduction to Integration*, de H. A. Priestley [7].

Capítulo 2

Teorema de Fubini

En este capítulo nos vamos a centrar en las versiones más generales del teorema de Fubini para la integral de Riemann y la integral de Lebesgue, haciendo también una comparación entre ellas.

Para ello, vamos a considerar $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ tales que $n = p + q$ de forma que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, donde x e y son vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente, definimos las funciones sección de la función f:

- para cada $x \in \mathbb{R}^p$, la función $f_x : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$ se denomina "sección de f por x";
- para cada $y \in \mathbb{R}^q$, la función $f_y : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_y(x) = f(x, y)$ se denomina "sección de f por y".

2.1. Interpretación geométrica

La idea de este teorema es calcular integrales en un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, calculando las integrales en rectángulos de $\mathbb{R}$. Veamos la interpretación en $\mathbb{R}^2$, por ser más fácil de visualizar.

Para ello, consideramos una función continua positiva $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces la integral $\displaystyle\int_{[a,b]\times[c,d]} f$ representa el volumen de la región debajo del grafo de f.

Para cada $x \in [a, b]$, tenemos la función sección $f_x : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$. Por ser f continua en $[a, b] \times [c, d]$, cada función f_x es continua y, por lo tanto, integrable en el intervalo $[c, d]$.

Si escogemos un $x_0 \in [a,b]$, la integral $\displaystyle\int_c^d f_{x_0}(y)dy$ representa el área de la región situada debajo de la gráfica de la función f_{x_0} en el plano $x = x_0$.

Tomamos una partición $\{t_0, ..., t_n\}$ del intervalo $[a,b]$, de forma que se divide $[a,b]\times[c,d]$ en n bandas por medio de los segmentos $\{t_i\} \times [c,d]$.

El volumen debajo de la gráfica de f en cada rectángulo $[t_{i-1}, t_i] \times [c,d]$ se puede aproximar por

$$(t_i - t_{i-1}) \int_c^d f_{x_i}(y)dy = (t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x_i, y)dy$$

con $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., n$.

Si ahora sumamos todos los volúmenes aproximados de las bandas en el intervalo $[a,b]$, tenemos el volumen total aproximado debajo de la gráfica de f, es decir,

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f \simeq \sum_{i=1}^{n} \int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x_i, y)dy$$

con $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

De forma análoga, consideramos una partición $\{t_0, ..., t_m\}$ del intervalo $[c,d]$, y consideramos la función sección $f_y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta función es continua por la continuidad de f, por lo que es integrable en $[a,b]$, y entonces el volumen debajo de la gráfica de f en cada rectángulo $[a,b] \times [t_{j-1}, t_j]$ se puede aproximar por

$$(t_j - t_{j-1}) \int_a^b f_{y_j}(x)dx = (t_j - t_{j-1}) \int_a^b f(x, y_j)dx$$

con $y_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, ..., m$.

Al sumar todos los volúmenes aproximados de las bandas en el intervalo $[c,d]$, el volumen total aproximado debajo de la gráfica de f es

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f \simeq \sum_{j=1}^{m} \int_{[a,b]\times[t_{j-1},t_j]} f = \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1}) \int_a^b f(x, y_j)dx$$

con $y_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

Si llamamos $h(x) = \displaystyle\int_c^d f_x = \int_c^d f(x,y)dy$, es razonable esperar que h sea integrable en $[a,b]$ y que

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b h = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Observemos que, debido a la hipótesis de continuidad de la función f, esta interpretación vale tanto para la integral de Riemann como la de Lebesgue, y el valor de sus integrales coincide.

2.2. Teorema de Fubini para la integral de Riemann

A pesar de tener un origen tan antiguo, la primera definición matemática de la integral no se dio hasta el siglo XIX por Cauchy. La integral propuesta únicamente era válida para funciones continuas en intervalos cerrados y acotados, lo que dejaba fuera muchas funciones, sobre todo con la aparición de las funciones discontinuas en el trabajo de Fourier.

En 1866, Bernard Riemann publicó una disertación donde extendía la definición de integral dada por Cauchy prescindiendo de la hipótesis de continuidad y dejando solo la hipótesis de acotación. De esta forma, se ampliaba la clase de funciones integrables.

La formulación del teorema para esta integral es complicada debido a la necesidad de considerar las integrales superiores e inferiores, como después veremos. Se puede enunciar de la siguiente forma:

Teorema 2.1 (Teorema de Fubini). *Sean $A \subset \mathbb{R}^p$ y $B \subset \mathbb{R}^q$ rectángulos cerrados, y sea $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Para $x \in A$, denotamos*

$$h(x) = \underline{\int_B} f_x = \underline{\int_B} f(x,y)dy \quad \text{y} \quad g(x) = \overline{\int_B} f_x = \overline{\int_B} f(x,y)dy.$$

Entonces las funciones h y g son integrables en A y

$$\int_{A\times B} f = \int_A h = \int_A \left(\underline{\int_B} f(x,y)dy \right) dx$$

y

$$\int_{A\times B} f = \int_A g = \int_A \left(\overline{\int_B} f(x,y)dy \right) dx$$

siendo las integrales del segundo miembro las llamadas integrales iteradas de f.

Demostración. Sean P_A una partición del intervalo A y P_B una partición del intervalo B. Al juntarlas obtenemos una partición P de $A \times B$ de forma que cada subrectángulo

S es de la forma $S_A \times S_B$ donde S_A es un subrectángulo de la partición P_A, y S_B es un subrectángulo de la partición P_B. Así,

$$L(f,P) = \sum_S m_S(f) \cdot v(S) = \sum_{S_A, S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_A \times S_B) =$$

$$\sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \right) \cdot v(S_A).$$

Si $x \in S_A$, entonces $m_{S_A \times S_B}(f) \leq m_{S_B}(f_x)$, de forma que se obtienen las desigualdades

$$\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \leq \sum_{S_B} m_{S_B}(f_x) \cdot v(S_B) \leq \underline{\int_B} f_x = h(x).$$

De donde se deduce que

$$\sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) \cdot v(S_B) \right) \cdot v(S_A) \leq L(h, P_A).$$

Y entonces se obtiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$L(f,P) \leq L(h,P_A) \leq U(h,P_A) \leq U(g,P_A) \leq U(f,P)$$

donde la demostración de la última desigualdad es análoga a la demostración de la primera.

Como f es integrable, se tiene que

$$sup\{L(f,P)\} = inf\{U(f,P)\} = \int_{A \times B} f.$$

Por lo tanto para la función h,

$$sup\{L(h,P_A)\} = inf\{U(h,P_A)\} = \int_{A \times B} f.$$

Es decir, la función h es integrable en A y $\displaystyle\int_{A \times B} f = \int_A h$. La proposición para g se deduce análogamente de la cadena de desigualdades

$$L(f,P) \leq L(h,P_A) \leq L(g,P_A) \leq U(g,P_A) \leq U(f,P).$$

□

Observación 2.2. Intercambiando el papel de x y de y, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\int_{A\times B} f = \int_B \left(\underline{\int_A} f(x,y)dx \right) dy = \int_B \left(\overline{\int_A} f(x,y)dx \right) dy.$$

Observación 2.3. La integrabilidad de la función f no es una condición suficiente para que las funciones secciones sean integrables, por lo que es necesario hablar de integrales superiores e inferiores, ya que estas siempre existen. Se puede ver en el siguiente ejemplo:

Consideramos el cuadrado unidad $R = [0,1] \times [0,1]$ y la función $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_0 \\ 1 & \text{si } x = x_0 \text{ e } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x = x_0 \text{ e } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{2.1}$$

Como el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable, tiene medida nula, por lo que aplicando el criterio de Lebesgue para la integrabilidad en el sentido de Riemann vemos que la función f es integrable en R.

Sin embargo, la integral $\displaystyle\int_0^1 f_{x_0}(y)dy$ no existe, ya que aunque fuera de la recta $x = x_0$ la función f es continua, en la recta $x = x_0$ f no es continua en ningún punto.

No obstante, si la función f es continua las funciones sección también lo son y, por lo tanto, son integrables. En este caso, las integrales superiores e inferiores se pueden sustituir por integrales ordinarias, y se verifica

$$\int_A \left[\int_B f(x,y)dy \right] dx = \int_B \left[\int_A f(x,y)dx \right] dy.$$

2.3. Teorema de Fubini para la integral de Lebesgue

Aunque la integral de Riemann es muy útil, nos encontramos con que es de alcance limitado e insuficiente, puesto que tiene varias deficiencias:

- La clase de todas las funciones Riemann integrables es pequeña.

- Al hacer operaciones de paso al límite, las funciones Riemann integrables tienen un mal comportamiento, ya que la integral de Riemann funciona bien en los casos en los que se considera una única función, pero aparecen muchas dificultades cuando se consideran sucesiones de funciones.

Para suplir estos problemas es necesario construir una nueva integral con mayor alcance que la integral de Riemann: la integral de Lebesgue.

En 1902, Henri Lebesque presentó en su tesis doctoral una integral que se convirtió en la clave del análisis moderno, puesto que es una extensión de la integral de Riemann a una clase más amplia de funciones reales.

Con esta extensión, la mayoría de las excepciones específicas del teorema de Fubini que habían sido construidas dejaron de ser excepciones ya que la integral de Lebesgue elimina algunas de esas deficiencias, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Consideramos la función f definida en el cuadrado unidad $R = [0,1] \times [0,1]$ definida de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases} \tag{2.2}$$

Entonces, por la definición de Riemann,

$$\int_0^1 dx \left[\int_0^1 f(x,y)dy \right] = 1$$

Sin embargo, f es discontinua en todo punto de R excepto en los de la recta $y = 1/2$, y $x \longrightarrow f(x,y)$ no es continua en ningún punto con $y \neq 1/2$. Por lo tanto, las integrales

$$\int_R f(x,y)d(x,y) \quad \text{y} \quad \int_0^1 dy \left[\int_0^1 f(x,y)dx \right]$$

no existen en el sentido de Riemann. Sin embargo, ambas integrales existen en el sentido de Lebesgue, y ambas tienen valor 1.

Además, en esta integral no es necesario considerar las integrales superiores e inferiores, ya que si f es integrable según Lebesgue, casi todas las secciones menos un conjunto de medida nula son integrables.

A continuación, vamos a enunciar y demostrar las diferentes versiones del teorema dependiendo de las hipótesis necesarias. Previamente, enunciamos uno de los teoremas que establece las bases para el teorema de Fubini:

Teorema 2.4. *Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{p+q}$ con $p \geq 1$, $q \geq 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}^p$ consideramos el conjunto*

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in E\}$$

y para cada $y \in \mathbb{R}^q$, el conjunto

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in E\}.$$

Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, $E(x)$ es un conjunto medible de $\mathbb{R}^q$, y para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, $E(y)$ es un conjunto medible de $\mathbb{R}^p$. Además, la función $x \longrightarrow \mu(E(x))$ es una aplicación medible de $\mathbb{R}^p$ en $[0, \infty]$, y $y \longrightarrow \mu(E(y))$ es una aplicación medible de $\mathbb{R}^q$ en $[0, \infty]$. Y se verifica

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E(x)) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(E(y)).$$

Demostración. Esta demostración es constructiva, así que la haremos partiendo de conjuntos medibles sencillos para llegar al caso general.

a) Si E es un intervalo, $E(x)$ o es un intervalo fijo al variar x en la proyección de E sobre $\mathbb{R}^p$, o bien es igual a $\emptyset$ si x no pertenece a dicha proyección. Por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, $E(x)$ es medible. Por otra parte, la función $x \longrightarrow (E(x))$ es la función característica de la proyección de E sobre $\mathbb{R}^p$ por el volumen en $\mathbb{R}^q$ de la proyección de E sobre $\mathbb{R}^q$. Por lo tanto, se trata de una función medible y, además

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E(x)).$$

b) Si E es la unión de una familia finita de intervalos disjuntos dos a dos, es decir, $E = \cup_{m=1}^{N} I_m$ con $I_r \cap I_s = \emptyset$ si $r \neq s$, entonces

$$E(x) = \bigcup_{m=1}^{N} I_m(x)$$

donde cada $I_m(x)$ es un intervalo de $\mathbb{R}^p$ y $I_r(x) \cap I_s(x) = \emptyset$ si $r \neq s$. Por lo tanto,

$$\mu(E(x)) = \sum_{m=1}^{N} \mu(I_m(x))$$

y la función $x \longrightarrow \mu(E(x))$ es medible por ser suma de funciones medibles. Además, se tiene

$$\mu(E) = \sum_{m=1}^{N} \mu(I_m) = \sum_{m=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^p} \mu(I_m(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{m=1}^{N} \mu(I_m(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E(x))$$

Si E es una unión de una familia finita de intervalos sin que estos sean disjuntos dos a dos, se tomaría otra familia, por subdivisiones, también finita de intervalos disjuntos dos a dos y con la misma unión.

c) Si E es un abierto, para cada $x \in \mathbb{R}^p$ $E(x)$ es un abierto de $\mathbb{R}^q$ y, por lo tanto, es medible. Si, además, $E = \cup_{m=1}^{N} I_m$ donde cada I_m es un intervalo de $\mathbb{R}^{p+q}$ y $I_r \cap I_s = \emptyset$ si $r \neq s$, entonces

$$E(x) = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m(x)$$

Si denotamos $E_N = \cup_{m=1}^{N} I_m$ entonces $E_N(x) = \cup_{m=1}^{N} I_m(x)$ y para cada N la función

$$x \longrightarrow \mu(E_N(x)) = \sum_{m=1}^{N} \mu(I_m(x))$$

es no negativa, medible y simple. Además, al variar N, la correspondiente sucesión de funciones es monótona creciente y tiene como límite puntual la función $x \longrightarrow \mu(E(x))$, por lo que esta es medible. Finalmente, por ser $\{E_N\}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles cuya unión es E, aplicando el teorema de la convergencia monótona se tiene:

$$\mu(E) = \lim_{N\to\infty} \mu E_N = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E_N(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \lim_{N\to\infty} \mu(E_N(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E(x)).$$

d) Si E es un conjunto medible y acotado, existen dos sucesiones de conjuntos $\{G_k\}$ y $\{F_k\}$ tales que

$$F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_k \subset ... \subset E \subset ... \subset G_k \subset ... \subset G_2 \subset G_1$$

donde los conjuntos G_k son abiertos y acotados, los F_k son cerrados, y además se verifica $\mu(G_k - F_k) \longrightarrow 0$. La sucesión de funciones representada por $x \longrightarrow \mu(G_k(x) - F_k(x))$ de $\mathbb{R}^p$ en $[0, \infty]$ está formada por funciones medibles, ya que cada $G_k - F_k$ es abierto. Además la sucesión es monótona decreciente, pues para cada x se verifica

$$G_{k+1} - F_{k+1} \subset G_k - F_k$$

y, por tanto, existe la función límite puntual medible y no negativa $\phi : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, \infty]$ con

$$\phi(x) = \lim_{k\to\infty} \mu(G_k(x) - F_k(x)).$$

Como $G_k - F_k$ es abierto, por el caso anterior es:

$$\mu(G_k - F_k) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(G_k(x) - F_k(x))$$

lo que muestra que

$$\int_{\mathbb{R}^p} \mu(G_k(x) - F_k(x)) \longrightarrow 0$$

y, aplicando el teorema de Fatou, se tiene:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^p} \liminf \mu(G_k(x) - F_k(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \liminf \mu(G_k(x) - F_k(x)) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \phi \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^p} \mu(G_k(x) - F_k(x)) = \lim \int_{\mathbb{R}^p} \mu(G_k(x) - F_k(x)) = 0$$

luego ϕ se anula en casi todo punto, por lo que para casi todo x de $\mathbb{R}^p$ es $\mu(G_k(x) - F_k(x)) \longrightarrow 0$, y dado que $F_k(x) \subset E(x) \subset G_k(x)$ con $G_k(x)$ abierto y $F_k(x)$ cerrado, se concluye que $E(x)$ es medible para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, siendo además, para todo x de $\mathbb{R}^p$,

$$\mu(F_k(x)) \leq \mu(E(x)) \leq \mu(G_k(x))$$

y para casi todo x de $\mathbb{R}^p$,

$$\mu(E(x)) = \lim_{k \to \infty} \mu(G_k(x)) = \lim_{k \to \infty} \mu(F_k(x))$$

de forma que la función $x \longrightarrow \mu(E(x))$ está definida para casi todo x, y en su dominio es el límite puntual de la sucesión de funciones medible $x \longrightarrow \mu(G_k(x))$, por lo que es medible y, a efectos de integración puede suponerse definida en todo $\mathbb{R}^p$ como límite puntual de la citada sucesión. Como $\{G_k\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles con

$$\mu(G_1) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(G_1(x)) < \infty$$

y para cada x y cada k es

$$\mu(G_1(x)) \geq \mu(G_k(x))$$

puede aplicarse el teorema de la convergencia dominada para concluir que

$$\mu(E) = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \mu(G_k(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \lim_{k \to \infty} \mu(G_k(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E(x)).$$

e) Si E es un conjunto medible arbitrario, consideramos $\{E_m\}$ con

$$E_m = E \cap [(-m, m) \times ... \times (-m, m)].$$

Como cada función $x \longrightarrow \mu(E_m(x))$ está definida para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$ y es medible, su límite puntual $x \longrightarrow \mu(E(x))$ está definido para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$. Por lo tanto, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, tanto el conjunto $E(x)$ como la función $x \longrightarrow \mu(E(x))$ son medibles.

Además, aplicando el teorema de la convergencia monótona, se tiene:

$$\mu(E) = \lim_{m\to\infty} \mu(E_m) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E_m(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \lim_{m\to\infty} \mu(E_m(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \mu(E(x)).$$

De forma análoga, el conjunto $E(y)$ y la función $y \longrightarrow \mu(E(y))$ son medibles, y se tiene que

$$\mu(E) = \lim_{m\to\infty} \mu(E_m) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \mu(E_m(y)) = \int_{\mathbb{R}^q} \lim_{m\to\infty} \mu(E_m(y)) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(E(y)).$$

□

Observación 2.5. Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ con f medible. Para cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$ se consideran las funciones secciones. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\{y \in \mathbb{R}^q : f_x(y) > \alpha\} = \left(\left\{(t, y) \in \mathbb{R}^{p+q} : f(t, y) > \alpha\right\}\right)(x)$$

$$\{x \in \mathbb{R}^p : f_y(x) > \alpha\} = \left(\left\{(x, v) \in \mathbb{R}^{p+q} : f(x, v) > \alpha\right\}\right)(y)$$

y, dado que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} : f(x, y) > \alpha\}$ es medible, estos conjuntos son medibles para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$ el primero, y para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$ el segundo.

Para el caso particular de las funciones medibles y no negativas se tiene la siguiente versión del teorema de Fubini, también llamado teorema de Tonelli:

Teorema 2.6 (Teorema de Tonelli). *Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow [0, \infty]$ una función medible. Entonces se tiene que:*

a) Para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, f_x es medible.

b) Para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, f_y es medible.

c) La función $\varphi : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, \infty]$ dada por $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)dy$ es medible.

d) La función $\psi : \mathbb{R}^q \longrightarrow [0, \infty]$ dada por $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f_y = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)dx$ es medible.

e) Se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi = \int_{\mathbb{R}^q} \psi = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)dx\right] dy.$$

Demostración. Sea r un número racional, entonces consideramos el conjunto

$$A(r, x) = \{y \in \mathbb{R}^q : f_x(y) > r\}$$

que es medible para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$. El conjunto A_r de los x para los que existe algún racional r de forma que $A(r,x)$ no es medible, es de medida nula. Por lo tanto, $\bigcup_{r\in Q} A_r$ es también de medida nula. Entonces, si $x \in \mathbb{R}^p - \left[\bigcup_{r\in Q} A_r\right]$, para cualquier r racional, $A(r,x)$ es medible. Para estos x consideramos $\{r_k\}$ una sucesión decreciente de números racionales con límite $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces se tiene la relación

$$A(\alpha,x) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(r_k,x)$$

por lo que $A(\alpha,x)$ es medible. Es decir, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$ la función f_x es medible, por lo que queda probado el apartado a).

De modo análogo se prueba que para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$ la función f_y es medible, con lo que se prueba b).

Si f es la función característica de un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$, es decir, $f = \chi_E$, entonces $f_x = \chi_{E(x)}$. Por lo tanto, $\varphi(x) = \mu(E(x))$, así que φ es medible, y además

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi$$

así que c) queda probado.

De forma análoga se tiene que ψ es medible y que

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^q} \psi$$

que es el apartado d).

Si f es una función simple, su forma canónica viene dada por

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

y entonces para f_x,

$$f_x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \chi_{A_i(x)}$$

y por lo tanto, se tiene

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i(x))$$

por lo que φ es medible, y además:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu A_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^p} \mu(A_i(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi.$$

Procediendo de modo análogo para ψ se concluye que el teorema es cierto para funciones medibles simples.

Por último, por ser f no negativa y medible, existe una sucesión $\{S_m\}$ con cada S_m medible y simple de $\mathbb{R}^{p+q}$ en $[0,\infty]$, con $S_m(z) \longrightarrow f(z)$ para cada $z \in \mathbb{R}^{p+q}$ y con $\{S_m\}$ monótona creciente. Si definimos $\varphi_m : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0,\infty]$ con

$$\varphi_m(x) = \int_{\mathbb{R}^q} S_m(x,y)dy$$

tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} S_m = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_m$$

y la sucesión $\{\varphi_m\}$ es también monótona creciente de funciones medibles.

Aplicando el teorema de la convergencia monótona, se tiene para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$ que

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} S_m(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\lim_{m\to\infty} S_m(x,y)\right] dy = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy = \varphi(x)$$

luego φ es medible por ser, en casi todo punto, límite puntual de una sucesión de funciones medibles.

Aplicando de nuevo el teorema de la convergencia monótona a la sucesión $\{\varphi_m\}$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_m = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} S_m(x,y)dy\right] dx =$$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} S_m = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f.$$

De forma totalmente análoga se prueba que ψ es medible y que

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^q} \psi.$$

$\square$

Por último, enunciamos el teorema de Fubini en su forma general:

Teorema 2.7 (Teorema de Fubini). *Sea $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ una función medible y sumable en $\mathbb{R}^{p+q}$. Entonces se tiene:*

a) Para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, f_x es sumable en $\mathbb{R}^q$.

b) Para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, f_y es sumable en $\mathbb{R}^p$.

c) La función $\varphi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} f_x$ es sumable en $\mathbb{R}^p$.

d) La función $\psi : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} f_y$ es sumable en $\mathbb{R}^q$.

e) Se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi = \int_{\mathbb{R}^q} \psi.$$

Demostración. Para demostrar que f_x es sumable, tenemos que ver que las integrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} f_x^+$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} f_x^-$ son finitas, de forma que

$$\int_{\mathbb{R}^q} f_x = \int_{\mathbb{R}^q} f_x^+ - \int_{\mathbb{R}^q} f_x^-.$$

Si definimos

$$\varphi_+(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x^+ \;\text{ y }\; \varphi_-(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x^-$$

como f, y por lo tanto f^+ y f^-, son sumables se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_+ = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_- = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^- < \infty$$

de forma que φ_+ y φ_- son sumables, por lo que para casi todo punto de $\mathbb{R}^p$ ambas funciones son finitas y está definida su diferencia, $\varphi_+ - \varphi_-$, que también es finita. De esta forma, queda probado que f_x es sumable para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, que es el apartado a).

Definiendo las funciones

$$\psi_+(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_y^+ \;\text{ y }\; \psi_-(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_y^-$$

podemos probar de la misma forma que f_y es sumable para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, que es el apartado b).

Por otro lado, la diferencia $\varphi_+ - \varphi_-$ es sumable en $\mathbb{R}^p$, y como $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, φ está definida y es finita en casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, por lo que es sumable en $\mathbb{R}^p$, lo que prueba c).

De manera análoga podemos verlo para la función $\psi = \psi_+ - \psi_-$, por lo que d) queda probado.

Finalmente, se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f^- = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)dy\right] dx - \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)dy\right] dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_+ - \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_- = \int_{\mathbb{R}^p} (\varphi_+ - \varphi_-) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi.$$

Repitiendo este razonamiento para ψ, el teorema queda probado.

□

Referencias bibliográficas

La información para este capítulo está recogida de los libros *Análisis matemático II*, de F. del Castillo [4]; de *Lebesgue Integration*, de Soo Bong Chae [5] y de *Lebesgue's theory of integration*, de Thomas Hawkins [6]. Los teoremas aparecen en los libros *Cálculo en variedades*, de M Spivak [8]; y *Análisis matemático II*, de F. del Castillo [4], respectivamente.

Capítulo 3

El teorema de Fubini, la regla de Leibniz y las derivadas parciales mixtas

Algunos de los teoremas más importantes en Análisis de intercambio de operaciones con límites son el teorema de Fubini, la regla de Leibniz para la derivación bajo el signo integral, y la igualdad entre las derivadas parciales mixtas. Veamos las relaciones que hay entre ellas.

A lo largo de este capítulo, denotaremos por R el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ y usaremos la siguiente versión del teorema de Fubini:

Teorema 3.1. *Si la función f es continua en R, entonces $x \longrightarrow \int_c^d f(x, y)dy$ es una función continua para todo $x \in [a, b]$, $y \longrightarrow \int_a^b f(x, y)dx$ es una función continua para todo $y \in [c, d]$, y se tiene la igualdad*

$$\int_R f dR = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy.$$

Usaremos también el teorema y la fórmula fundamental del cálculo, que recordamos a continuación:

Teorema 3.2. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Definimos*

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds, \;\; x \in [a, b]$$

Entonces F es diferenciable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Teorema 3.3. *Sean $G, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Asumimos que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

3.1. El teorema de Fubini y la regla de Leibniz

La regla de Leibniz para la derivación bajo el signo integral afirma que las operaciones derivación e integración se pueden intercambiar. Lo enunciamos a continuación:

Teorema 3.4 (Regla de Leibniz para la derivación bajo el signo integral)**.** *Si f y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ son funciones continuas en R, entonces para $x \in (a,b)$,*

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

Entonces podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.5. *Si una función f verifica el teorema de Fubini, entonces f verifica la regla de Leibniz.*

Demostración. Aplicando el teorema fundamental del cálculo a $\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$, tenemos:

$$\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \left[\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)ds + f(a,y)\right] dy.$$

Por el teorema de Fubini podemos cambiar el orden de integración, de forma que:

$$\int_c^d \left[\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)ds + f(a,y)\right] dy = \int_a^x \left[\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)dy\right] ds + \int_c^d f(a,y)dy.$$

Aplicando otra vez el teorema de Fubini, tenemos que $\displaystyle\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)dy$ es continua, así que el teorema fundamental del cálculo afirma que la derivada de la expresión anterior es $\displaystyle\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)dy$. Es decir, que

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

□

Observación 3.6. Considerando la versión de los resultados para la integral de Lebesgue y procediendo de la misma forma se puede ver que la relación también se cumple para esta integral.

3.2. El teorema de Fubini y las derivadas parciales mixtas

Para demostrar la equivalencia entre el teorema de Fubini y la igualdad entre las derivadas parciales mixtas podemos actuar de dos formas: a través de la regla de Leibniz para la derivación bajo el signo integral, aplicando dos veces el teorema fundamental del cálculo integral; o demostrándolo con ayuda del teorema y la fórmula fundamental del cálculo integral, que es como lo vamos a ver a continuación.

Para ello nos valdremos del siguiente lema:

Lema 3.7. *Consideramos I y J dos intervalos abiertos no vacíos. Sea g una función real y continua en $I \times J$ y $(a,c) \in I \times J$. Entonces las funciones $f_1(x,y) = \int_a^x g(u,y)du$ y $f_2(x,y) = \int_c^y g(x,v)dv$ son funciones reales y continuas en $I \times J$.*

Denotamos por U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que $R \subset U$, por (i) al teorema de Fubini y enunciamos la igualdad entre derivadas parciales mixtas:

(ii) Sea f una función derivable con derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en U, y con $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continua en U. Entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existe y en U se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Entonces podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 3.8. *Las proposiciones (i) y (ii) son equivalentes.*

Demostración. Veamos que $(i) \Rightarrow (ii)$. Tomamos $(x,y) \in U$, y como U es abierto podemos encontrar $r > 0$ tal que el disco abierto centrado en (x,y) y con radio r está contenido en U. Seleccionamos (a,c) en el disco. Como $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ son continuas, podemos aplicar la fórmula fundamental del cálculo integral, y obtenemos que

$$\int_a^x \int_c^y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u,v)dvdu = f(x,y) - f(x,c) - f(a,y) + f(a,c)$$

Usando ahora el teorema de Fubini, intercambiamos el orden de integración en la parte izquierda, de forma que obtenemos:

$$\int_c^y \int_a^x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u,v)dudv = f(x,y) - f(x,c) - f(a,y) + f(a,c).$$

Derivamos ahora ambos lados de esta igualdad, primero con respecto a y y después con respecto a x. Acto seguido, aplicamos el teorema fundamental del cálculo integral, obteniendo como resultado que la parte izquierda es $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, mientras que la parte derecha es $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Es decir, tenemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en U.

Para ver ahora que $(ii) \Rightarrow (i)$, consideramos g una función real y continua en U. Existen intervalos abiertos acotados I, J tales que $R \subset I \times J = V \subset U$. Definimos $h, f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$h(x,y) = \int_c^y g(x,v)dv \ , \ f(x,y) = \int_a^x h(u,y)du.$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral obtenemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = h$ en V. Aplicando ahora el lema tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es una función real y continua en V. Aplicamos otra vez el teorema del cálculo integral, y tenemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = g$ en V, por lo que es una función real y continua en V.

Para aplicar (ii) a f nos queda ver que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en V. Consideramos $r > 0$ ya que el caso $r < 0$ es análogo. Entonces

$$f(x,y+r) - f(x,y) = \int_a^x (h(u,y+r) - h(u,y))du$$

Por el teorema fundamental del cálculo integral, h es diferenciable respecto a y y $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = g(x,y)$. Aplicando el teorema del valor medio a la función h en $[y, y+r]$ nos da

$$h(u,y+r) - h(u,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(u, y+tr)r = g(y, y+tr)r$$

para algún $t = t(r) \in (0,1)$. Por lo tanto,

$$\frac{f(x,y+r) - f(x,y)}{r} = \int_a^x g(u, y+tr)du.$$

Como $r \to 0$, $t(r) \to 0$ y la continuidad de g implica que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\int_a^x g(u,y)du$. Así, por el lema, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua.

Por lo tanto, se satisfacen todas las hipótesis de (ii). Por consiguiente, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existe y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en V, y además son iguales a g en V. Aplicando entonces la fórmula fundamental del cálculo integral a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ se tiene

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy$$

es decir, el orden de integración puede ser invertido, por lo que se verifica el teorema de Fubini. □

Referencias bibliográficas

La información para este capítulo está recogida del libro *Selected Papers on Calculus*, de Tom M. Apostol [2], y del artículo *Mixed Partial Derivatives and Fubini's Theorem* [1], de la revista College Mathematics Journal of MAA, volumen 33.

Appendices

Apéndice

En este apéndice se incluyen algunos conceptos a los que se hace referencia en la introducción histórica y resultados que son de ayuda para las secciones de la integral de Riemann y de Lebesgue.

Definición .1. Un intervalo o rectángulo de $\mathbb{R}^n$ es un producto de n intervalos unidimensionales acotados de la forma $[a_i, b_i]$.

Definición .2. El volumen n-dimensional del intervalo I, que se denota por $v(I)$, viene dado por la expresión $(b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)$.

Definición .3. Consideramos un conjunto finito de intervalos $I_1, ...I_n$ disjuntos dos a dos y tales que su unión cubre el conjunto E. Entonces el contenido interior del conjunto E, $c_i(E)$, denota la menor cota superior de la suma de las longitudes de los intervalos I_k que únicamente contienen puntos del interior de E. El contenido exterior del conjunto E, $c_e(E)$, es la mayor cota inferior de la suma de las longitud de los intervalos que cubren E.

Definición .4. Un conjunto E se dice medible según Jordan si $c_i(E) = c_e(E)$.

.1. Integral de Riemann en rectángulos acotados

Definición .5. Una partición de un rectángulo $I = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ es una colección $P = (P_1, ..., P_n)$, donde cada P_i es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$.

Definición .6. Definimos la suma de Riemann de la función f relativa a la partición P como:

$$S(f, P, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{p} f(t_k)v(I_k)$$

donde I_k son los rectángulos inducidos por la partición P, y $t_k \in I_k$ para cada $k = 1, .., p$.

Definición .7. Sea I un rectángulo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y P una partición de I. Entonces para cada subrectángulo S de la partición, definimos

$$m_S(f) = inf\{f(x) : x \in S\} \text{ y } M_S(f) = sup\{f(x) : x \in S\}.$$

Definición .8. Denotamos por

$$L\,(f, P) = \sum_S m_S(f) \cdot v(S) \text{ y } U\,(f, P) = \sum_S M_S(f) \cdot v(S)$$

las sumas inferior y superior de f correspondientes a la partición P.

Definición .9. Diremos que una función f es integrable en el sentido de Riemann si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon \in P(I) \ / \ U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

con $P \in P(I)$ y $P \supset P_\varepsilon$.

Para facilitar la comprobación de la Riemann-integrabilidad, recordamos el siguiente criterio:

Teorema .10 (Criterio de Lebesgue para la integrabilidad en el sentido de Riemann)**.** *Sean I un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es Riemann-integrable en I.

b) El conjunto $\{x \in I : f \text{ es discontinua en } x\}$ tiene medida cero.

.2. Medida e integral de Lebesgue

En la integral de Lebesgue, para poder considerar conjuntamente todos los casos, se admite la posibilidad de que en algunas ocasiones se tome el valor $\pm\infty$. Por ello consideramos la recta ampliada, que se construye añadiendo a la recta real los puntos $+\infty$ y $-\infty$, y la denotaremos por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\} = [-\infty, \infty]\,.$$

La aritmética de $\overline{\mathbb{R}}$ se define a partir de la de $\mathbb{R}$ añadiendo las siguientes definiciones:

- Relación de orden: Si $a \in \mathbb{R}$, se define $-\infty < a < \infty$
- Las operaciones: Si $a \in \mathbb{R}$, se define:

  $a + (\pm\infty) = \pm\infty$; $\quad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, si $a > 0$; $\quad a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$, si $a < 0$;

  $a \cdot (\pm\infty) = 0$, si $a = 0$; $\quad \infty \cdot \infty = \infty$; $\quad \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

  Mientras que las expresiones $\infty - \infty$ y $-\infty + \infty$ no se definen.

Su topología se puede definir de la siguiente forma: Dado un subconjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, se dice que A es un abierto de $\overline{\mathbb{R}}$ si para cada punto $x \in A$ se tiene:

- si $x \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $y \in \mathbb{R}$ con $\mid y - x \mid < \varepsilon$, entonces $y \in A$;
- si $x = \infty$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que, si $y \in \mathbb{R}$ con $y > K$, entonces $y \in A$;
- si $x = -\infty$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que, si $y \in \mathbb{R}$ con $y < K$, entonces $y \in A$.

Lo primero que vamos a introducir es el concepto de medida de Lebesgue, y algunos de sus resultados más relevantes.

Definición .11. Para cada subconjunto A consideramos las familias numerables $\{I_i\}$ de intervalos que recubren a A, es decir, tales que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i$. Llamamos medida exterior en el sentido de Lebesgue del conjunto A al elemento de $[0, \infty]$ definido por

$$\mu^* A = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i)$$

Teorema .12. *Sea I un intervalo abierto, y sea A un conjunto verificando $I \subset A \subset \overline{I}$. Entonces $\mu^* A = v(I)$.*

Definición .13. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible según Lebesgue si, para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se verifica la relación:

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap -E)$$

Teorema .14. *La familia de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es una $\sigma-$álgebra, es decir, el complementario de un conjunto medible es medible, y la unión e intersección de una familia numerable de medibles es medible. Además, los conjuntos de medida exterior nula son medibles.*

Definición .15. Si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$, se llama medida de Lebesgue de E a su medida exterior de Lebesgue, y se denota por μE.

Teorema .16. *Si $\{E_i\}$ es una sucesión de conjuntos medibles, entonces se verifica*

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

Si los E_i son disjuntos dos a dos se verifica la igualdad, es decir, la medida de Lebesgue es σ-aditiva.

Destacamos el siguiente resultado por el uso que haremos de él en el teorema de Fubini, ya que proporciona una caracterización de los conjuntos medibles a partir de los abiertos que los contienen y los cerrados que están contenidos en ellos:

Teorema .17. *Para cada subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) E es medible.

b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto G con $E \subset G$ y con $\mu^*(G - E) < \varepsilon$.

c) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un cerrado F con $F \subset E$ y con $\mu^*(E - F) < \varepsilon$.

d) Para cada $\varepsilon > 0$ existen un abierto G y un cerrado F con $F \subset E \subset G$ y con $\mu(G - F) < \varepsilon$.

Teorema .18. *Sean n, p, q naturales tales que $n = p + q$. Sean A y B subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, respectivamente. Entonces $A \times B$ es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y se verifica*

$$\mu(A \times B) = \mu A \cdot \mu B.$$

Una vez introducida la medida y los conjuntos medibles procedemos a introducir las funciones:

Teorema .19. *Sea $f : E \longrightarrow [-\infty, \infty]$ con E medible. Las cuatro afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible.

b) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ es medible.

c) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) < \alpha\}$ es medible.

d) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ es medible.

Además, cualquiera de estas afirmaciones implica que:

e) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$ es medible.

Definición .20. Una función $f : E \longrightarrow [-\infty, \infty]$ se dice medible en el sentido de Lebesgue si se verifica alguna de las cuatro primeras afirmaciones anteriores.

En particular, las funciones continuas son medibles, y la suma y producto de dos funciones medibles o de una función medible y una constante también son medibles. Además, tienen un buen comportamiento al tomar límite, si este existe.

A continuación comenzaremos a definir la integral de forma gradual comenzando por las funciones simples.

Definición .21. Sea $S : E \longrightarrow (-\infty, \infty)$. Se dice que S es simple si $S(E)$ tiene un número finito de puntos. Si $\alpha_1, ..., \alpha_m$ son los distintos valores que toma la función S y $A_i = \{x \in E : S(x) = \alpha_i\}$, entonces definimos la forma canónica de S como

$$S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$$

donde χ_{A_i} es la función característica en A_i.

Teorema .22. *Sea $f : E \longrightarrow [0, \infty]$ una función medible. Entonces existe una sucesión $\{S_m\}$ de funciones simples medibles tales que:*
a) $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq ... \leq S_m \leq ... \leq f$.
b)$S_m(x) \longrightarrow f(x)$ *para cada* $x \in E$.

Definición .23. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Sea $S : D \longrightarrow [0, \infty)$ simple y medible, y sea $S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$ su forma canónica. Si E es un subconjunto medible de D, se define:

$$\int_E S \equiv \int_E S d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap E)$$

Teorema .24. *Sea $S : D \longrightarrow [0, \infty)$ simple y medible. Sea $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ con los E_i contenidos en D y disjuntos dos a dos. Entonces es:*

$$\int_E S d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} S d\mu$$

Además, la suma de funciones simples y medibles es una función simple y medible, y su integral es la suma de las integrales.

Definición .25. Sea $f : D \longrightarrow [0, \infty]$ con f medible. Si E es un conjunto medible contenido en D, se define:

$$\int_E f \equiv \int_E f d\mu = sup \int_E S d\mu$$

con S variando en las funciones medibles simples con $0 \leq S \leq f$. Llamaremos integral de Lebesgue de f sobre E a $\displaystyle\int_E f d\mu$.

Teorema .26 (Teorema de Lebesgue de la convergencia monótona)**.** *Sea $\{f_m\}$ una sucesión de funciones medibles de E en $[0, \infty]$, tales que, para cada $x \in E$, se verifica*
a) $0 \leq f_1(x) \leq ... \leq f_m(x) \leq ... \leq \infty$
b) $f_m(x) \longrightarrow f(x)$
Entonces f es medible y además se verifica

$$\int_E f_m d\mu \longrightarrow \int_E f d\mu.$$

Teorema .27. *Si f y g son funciones de D en $[0,\infty]$ ambas medibles, entonces*

$$\int_D (f+g)d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu.$$

Lema .28 (Lema de Fatou)**.** *Si $\{f_m\}$ es una sucesión de aplicaciones de E en $[0,\infty]$ medibles, entonces*

$$\int_E \liminf f_m d\mu \leq \liminf \int_E f_m d\mu.$$

Definición .29. Definimos la función parte positiva de la función f como $f^+ = max\{f, 0\}$, y la función parte negativa por $f^- = max\{-f, 0\}$.

Definición .30. Diremos que la función f es integrable en el sentido de Lebesgue en un conjunto medible E si alguna de las integrales $\int_E f^+$ y $\int_E f^-$ es un número real, es decir, no son las dos infinito. La integral de Lebesgue de f en E viene dada por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Definición .31. Una función medible f se dice sumable en el conjunto E si

$$\int_E | f | d\mu < \infty.$$

Teorema .32. *Si f, g son funciones sumables en un conjunto E y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces la función $\alpha f + \beta g$ es sumable y además*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

Teorema .33 (Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada)**.** *Sea $\{f_m\}$ una sucesión de aplicaciones de E en $[-\infty,\infty]$ con cada f_m medible. Sea $f : E \longrightarrow [-\infty,\infty]$ con $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ para cada $x \in E$. Si existe una función sumable g tal que $| f_m(x) | \leq g(x)$, para cada $m = 1, 2, ...,$ y cada $x \in E$, entonces f es sumable, y además se verifica que*

$$\lim_{m\to\infty} \int_E | f_m - f | d\mu = 0$$

y que

$$\lim_{m\to\infty} \int_E f_m d\mu = \int_E f d\mu$$

Observación .34. Los valores que toma una función en un conjunto de medida nula no afectan a la integrabilidad o no integrabilidad de la función, ni al valor de la integral cuando esta existe.

Además, si una propiedad se verifica en todo punto de un conjunto A excepto en un subconjunto de medida nula, se dice que la propiedad se verifica para casi todo punto de A.

En los teoremas en los que se pide que se cumpla una condición en todos los puntos, si dicha condición se pide para casi todo punto el resultado sigue siendo válido.

Bibliografía

[1] Aksoy, A.,Martelli, M., *Mixed Partial Derivatives and Fubini's Theorem*, College Mathematics Journal of MAA, vol.33, 2002.

[2] Apostol, T.M., *Selected Papers on Calculus*, 1994.

[3] Boyer, C.B., *Historia de la matemática*, Alianza Universidad, 1994.

[4] Castillo, F. del, *Análisis matemático II*, editorial Alhambra, 1980.

[5] Chae, S.B., *Lebesgue Integration*, New York and Basel, 1980.

[6] Hawkins, T., *Lebesgue's theory of integration*, editorial Board, 1980.

[7] Priestley, H.A., *Introduction to Integration*, Oxford University Press, 1997.

[8] Spivak, M., *Cálculo en variedades*, editorial Reverté, 1988.