Variedades Diferenciables

José Antonio Oubiña Galiñanes

Esta é a versión imprimible das presentacións utilizadas para impartir a materia "Variedades Diferenciables" durante os cursos 2020-21 e 2021-22 no Grao de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela.

Contidos

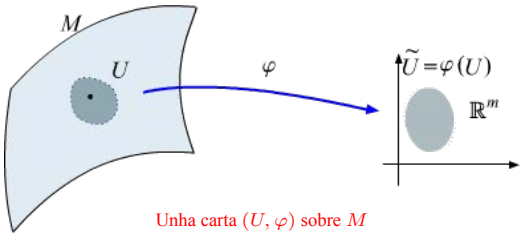
1. Variedades diferenciables. Aplicacións diferenciables entre variedades.
2. O espazo vectorial tanxente. Aplicación lineal tanxente.
3. Subvariedades regulares.
4. Campos de vectores sobre variedades diferenciables. Curvas integrais.
5. Formas diferenciais. A diferencial exterior.
6. Orientacións nas variedades diferenciables.
7. Integración de formas en variedades. Teorema de Stokes. Aplicacións.

1. Variedades diferenciables e aplicacións diferenciables

1.1 Definición (variedade topolóxica)

Un ***espazo localmente euclidiano*** de dimensión $m \in \mathbb{N}$ é un espazo topolóxico M tal que todo punto $p \in M$ ten unha veciñanza aberta homeomorfa a un aberto en $\mathbb{R}^m$.

Unha ***variedade topolóxica de dimensión*** m é un espazo Hausdorff e localmente euclidiano de dimensión m.



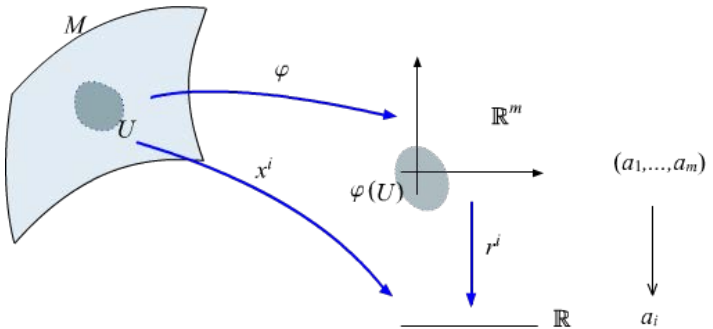
Unha carta (U, φ) sobre M

1.2 Definicións (aberto coordenado, carta)

Sexa M unha variedade topolóxica de dimensión m,
U un aberto en M, $\tilde{U} = \varphi(U)$ un aberto en $\mathbb{R}^m$,
e $\varphi : U \to \tilde{U}$ un homeomorfismo.

U é un ***aberto coordenado***,

(U, φ) é unha ***carta*** sobre a variedade topolóxica M.



Notacións

$r^i : (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m \to a_i \in \mathbb{R}$ é a proxección i-ésima.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, $x^i = r^i \circ \varphi$ son as compoñentes de φ.

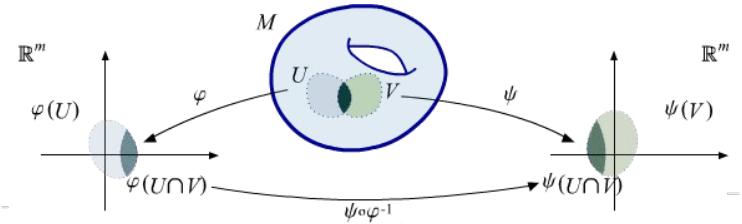
$x^1, \ldots, x^m : U \to \mathbb{R}$ chámanse ***funcións coordenadas***,

$\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ chámase ***sistema de coordenadas***.

Se $p \in U$ tamén diremos que: (U, φ) é unha carta en p,

U é unha veciñanza coordenada de p,

φ é un sistema de coordenadas en p.



Un cambio de cartas

1.3 DEFINICIÓN (CAMBIO DE CARTAS)

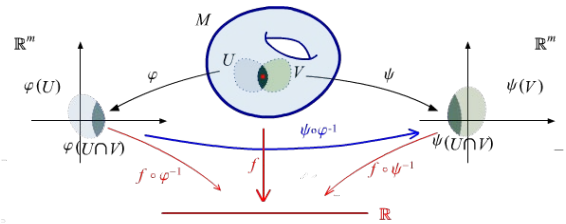
Sexan (U,φ) e (V,ψ) dúas cartas sobre unha variedade topolóxica M de dimensión m tales que $U\cap V\neq\emptyset$. A aplicación

$$\psi\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^m\to\psi(U\cap V)\subset\mathbb{R}^m$$

entre os abertos $\varphi(U\cap V)$ e $\psi(U\cap V)$ de $\mathbb{R}^m$ é un homeomorfismo, e dise que é un ***cambio de cartas*** ou ***cambio de coordenadas***.

$$\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\varphi^{-1})_{|\varphi(U\cap V)}=\psi_{|U\cap V}\circ(\varphi^{-1})_{|\varphi(U\cap V)}\colon\varphi(U\cap V)\longrightarrow\psi(U\cap V)$$

¿Definición de función diferenciable?



Se M é unha variedade topolóxica, pódese falar da diferenciabilidade dunha función $f\colon M \to \mathbb{R}$?

Se $p \in M$, como poderiamos dicir se $f\colon M \to \mathbb{R}$ é diferenciable en p?

Se (U, φ) é unha carta sobre M, con $p \in U$, poderíase pensar en estudar se $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciable en $\varphi(p)$.

E se se toma outra carta (V, ψ) tal que $p \in V$?

Hai algunha relación entre a diferenciabilidade de $f \circ \varphi^{-1}$ e a de $f \circ \psi^{-1}$?

$$(f \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(U\cap V)} = (f \circ \psi^{-1})_{|\psi(U\cap V)} \circ (\psi \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(U\cap V)}.$$

1.4 Definición (cartas compatibles)

Dúas cartas (U, φ) e (V, ψ) sobre a variedade topolóxica M son ***compatibles*** se, ou ben $U \cap V = \emptyset$, ou ben os cambios de cartas $\psi \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}$ son aplicacións C^∞ entre abertos de $\mathbb{R}^m$.

1.5 Definición (atlas, atlas diferenciable)

Un ***atlas*** sobre unha variedade topolóxica M é unha familia de cartas $\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ sobre M tal que $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Un atlas $\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ sobre M é un ***atlas diferenciable*** se

$$\forall\ \alpha, \beta \in A,\ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \text{ e } (U_\beta, \varphi_\beta) \text{ son cartas compatibles.}$$

1.6 Definición (atlas completo)

Un atlas diferenciable $\mathcal{A}_0$ sobre unha variedade topolóxica M dise que é un ***atlas completo*** ou un ***atlas maximal*** se non está contido en ningún outro atlas diferenciable sobre M.

1.7 Exercicio

Se $\mathcal{A}_0$ é un atlas completo sobre unha variedade topolóxica M, e (U, φ) é unha carta sobre M que é compatible con tódalas cartas en $\mathcal{A}_0$, entón $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_0$.

1.8 Teorema

Sexa M unha variedade topolóxica de dimenión m e $\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ un atlas diferenciable sobre M. Entón existe un único atlas completo $\mathcal{A}_0$ sobre M tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$. Ademais,

$$\mathcal{A}_0 = \{ (U, \varphi) \text{ carta sobre } M \mid (U, \varphi) \text{ e } (U_\alpha, \varphi_\alpha) \text{ son compatibles } \forall\, \alpha \in A \}$$

Proba

Imos probar

(1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$,
(2) $\mathcal{A}_0$ é un atlas diferenciable sobre M,
(3) se $\mathcal{B}$ atlas diferenciable sobre M, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_0$,
(4) o atlas diferenciable $\mathcal{A}_0$ sobre M é completo,
(5) unicidade.

Demostración

(1) $\boxed{\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0}$

$$(U, \varphi) \in \mathcal{A} \Longrightarrow \exists \gamma \in A \mid (U, \varphi) = (U_\gamma, \varphi_\gamma),$$

logo $(U, \varphi) = (U_\gamma, \varphi_\gamma)$ e $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ son compatibles $\forall\, \alpha \in A$, por ser $\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ un atlas diferenciable sobre M.
Polo tanto $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_0$, pola descrición de $\mathcal{A}_0$ no enunciado.

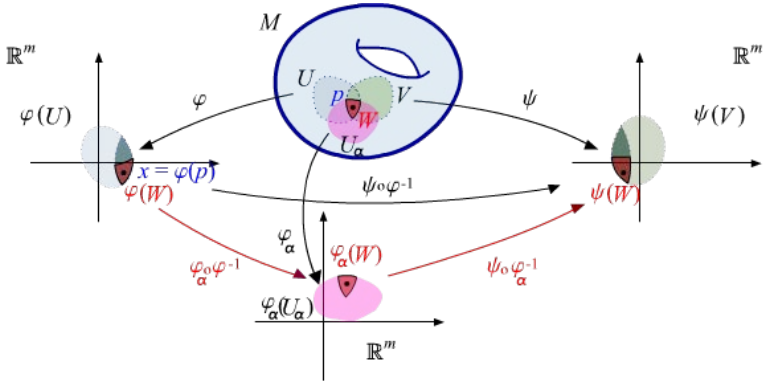
(2) $\boldsymbol{a}_0$ é un atlas diferenciable sobre M

(a) $\boldsymbol{a}_0$ é un atlas sobre M:

Dado que $\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{a}_0$ por (1), e como $\boldsymbol{a}$ é un atlas sobre M,

$$M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \subset \bigcup_{(U,\varphi)\in \boldsymbol{a}_0} U, \quad \text{logo} \quad M = \bigcup_{(U,\varphi)\in \boldsymbol{a}_0} U.$$

(b) Dúas cartas calquera (U,φ) e (V,ψ) en $\boldsymbol{a}_0$ son compatibles:



Basta ver que se $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicación

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

é C^∞ nunha veciñanza aberta de cada punto $x \in \varphi(U \cap V)$; tense $x = \varphi(p)$, onde $p \in U \cap V$,

$$M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \Rightarrow \exists\, \alpha \in A \mid p \in U_\alpha.$$

$W = U_\alpha \cap U \cap V$ é un aberto en M que contén a p, logo

$$x = \varphi(p) \in \varphi(W) \subset \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m, \quad \varphi(W) \text{ veciñanza aberta de } x,$$

e $\psi \circ \varphi^{-1}$ é C^∞ en $\varphi(W)$ por ser a composición de aplicacións C^∞

$$(\psi \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(W)} = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1})_{|\varphi_\alpha(W)} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(W)}.$$

(3) Se $\mathcal{B}$ atlas diferenciable sobre M, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_0$

isto é, $\mathcal{A}_0$ é o atlas diferenciable máis grande sobre M que contén a $\mathcal{A}$, xa que

$$(U,\varphi) \in \mathcal{B} \Longrightarrow \forall \alpha \in A, (U_\alpha,\varphi_\alpha), (U,\varphi) \in \mathcal{B}$$
$$\Longrightarrow (U_\alpha,\varphi_\alpha), (U,\varphi) \text{ son compatibles} \Longrightarrow (U,\varphi) \in \mathcal{A}_0.$$

(4) O atlas $\mathcal{A}_0$ sobre M é completo

xa que se $\mathcal{B}$ é un atlas diferenciable sobre M tal que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}$, entón

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B} \xrightarrow{(1)} \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \xrightarrow{(3)} \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}} \mathcal{A}_0 = \mathcal{B}.$$

(5) Unicidade

Se $\mathcal{A}'_0$ é un atlas completo tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'_0$, entón

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'_0 \xrightarrow{(3)} \mathcal{A}'_0 \subset \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\mathcal{A}'_0 \text{ completo}} \mathcal{A}'_0 = \mathcal{A}_0.$$

■

1.9 Definición (atlas equivalentes)

Dous atlas diferenciables $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sobre unha variedade topolóxica M son ***equivalentes***, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, se $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0$, onde $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{B}_0$ son os (únicos) atlas completos sobre M que conteñen a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente.

1.10 Proposición

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ son dous atlas diferenciables sobre unha variedade topolóxica M, as seguintes propiedades son equivalentes:

(i) $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$,

(ii) $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B} \Rightarrow (U, \varphi)$ *e* (V, ψ) *son compatibles,*

(iii) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *é un atlas diferenciable sobre* M.

1.11 Definición (estrutura diferenciable)

Unha ***estrutura diferenciable*** sobre unha variedade topolóxica M é unha clase de equivalencia

$$[\mathcal{A}]_\infty = \{\, \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ atlas diferenciable sobre } M,\, \mathcal{A} \sim \mathcal{B} \,\}\,.$$

1.12 Variedade diferenciable

Unha ***variedade diferenciable*** de dimensión m é un par $(M, [\mathcal{A}]_\infty)$, onde
M é unha variedade topolóxica de dimensión m,
$[\mathcal{A}]_\infty$ é unha estrutura diferenciable sobre M.

M abrevia o par $(M, [\mathcal{A}]_\infty)$, e diremos que
$[\mathcal{A}]_\infty$ é a estrutura diferenciable da variedade diferenciable M,
calquera atlas na estrutura diferenciable de M é un atlas de M,
o atlas completo $\mathcal{A}_0$ que contén a $\mathcal{A}$ é o atlas completo de M,
calquera carta no atlas completo $\mathcal{A}_0$ de M é unha carta de M.

1.13 Exercicio

Se (U,φ) é unha carta dunha variedade diferenciable M e W é un aberto en M contido en U entón $\big(W,\varphi_{|W}\colon W\to\varphi(W)\big)$ tamén é unha carta de M.

Solución:

Sexa (U,φ) unha carta de M, é dicir, (U,φ) está no atlas completo $\boldsymbol{a}_0$ da variedade diferenciable M; e sexa W un aberto en M, $W\subset U$.

$$(U,\varphi)\in\boldsymbol{a}_0 \Longrightarrow [\,\forall\,(V,\psi)\in\boldsymbol{a}_0, U\cap V\neq\emptyset\Rightarrow \psi\circ\varphi^{-1} \text{ e } \varphi\circ\psi^{-1} \text{ son } C^\infty\,]$$
$$\underset{\substack{W\subset U\\ \text{abto}}}{\Longrightarrow} [\,\forall\,(V,\psi)\in\boldsymbol{a}_0, W\cap V\neq\emptyset\Rightarrow \psi\circ\varphi_{|W}^{-1} \text{ e } \varphi_{|W}\circ\psi^{-1} \text{ son } C^\infty\,]$$

xa que, se $W\cap V\neq\emptyset$ entón

$$\psi\circ\varphi_{|W}^{-1}=(\psi\circ\varphi^{-1})_{|\varphi(W\cap V)},\qquad \varphi_{|W}\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\psi^{-1})_{|\psi(W\cap V)}.$$

e, polo tanto $\boldsymbol{a}_0\cup\{(W,\varphi_{|W})\}$ tamén é un atlas diferenciable sobre M.Así,

$$\boldsymbol{a}_0\subset\boldsymbol{a}_0\cup\{(W,\varphi_{|W})\}\underset{\boldsymbol{a}_0 \text{ maximal}}{\Longrightarrow}\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{a}_0\cup\{(W,\varphi_{|W})\}\Longrightarrow(W,\varphi_{|W})\in\boldsymbol{a}_0,$$

é dicir, $(W,\varphi_{|W})$ tamén é unha carta da variedade diferenciable M.

1.14 Exemplos

1. *A variedade diferenciable* $\mathbb{R}^n$.

O atlas $\mathcal{A} = \{ (\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \}$ é un atlas diferenciable sobre o espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$.

$[\mathcal{A}]_\infty$ é a estrutura diferenciable usual de $\mathbb{R}^n$

A variedade diferenciable $\mathbb{R}^n$ é $(\mathbb{R}^n, [\mathcal{A}]_\infty)$.

O atlas completo da variedade diferenciable $\mathbb{R}^n$ é

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= \{(U,\varphi) \text{ carta sobre } \mathbb{R}^n \mid (U,\varphi) \text{ e } (\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \text{ son compatibles } \} \\ &= \{(U,\varphi) \mid U \text{ aberto en } \mathbb{R}^n, \varphi\colon U \to \varphi(U) \text{ homeomorfismo, } \varphi \text{ e } \varphi^{-1} \text{ son } C^\infty\}.\end{aligned}$$

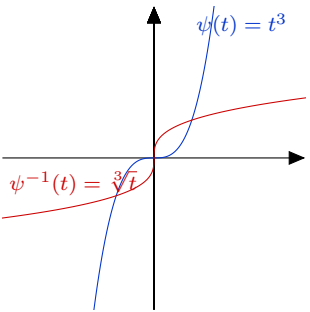
2. *Estruturas diferenciables sobre* $\mathbb{R}$.

$\mathcal{A} = \{ (\mathbb{R}, \varphi) \}$, $\varphi(t) = t$, e $\mathcal{B} = \{ (\mathbb{R}, \psi) \}$, $\psi(t) = t^3$, son atlas sobre $\mathbb{R}$.

¿Son $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ atlas equivalentes?

$\psi \circ \varphi^{-1}\colon t \to t^3$ é C^∞, $\qquad \varphi \circ \psi^{-1}\colon t \to t^{1/3}$ non é diferenciable:

$(\mathbb{R}, [\mathcal{A}]_\infty)$ e $(\mathbb{R}, [\mathcal{B}]_\infty)$ son dúas variedades diferenciables distintas.



$(\mathbb{R}, \psi)$ é unha carta **sobre a** variedade topolóxica $\mathbb{R}$,

pero non é unha carta **da** variedade diferenciable $\mathbb{R}$.

1.14 Exemplos

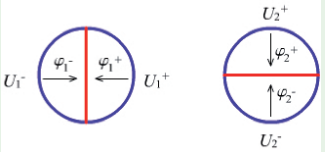
3. *A esfera*

$$\mathbb{S}^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \right\}.$$

$$U_i^+ = \{ x \in \mathbb{S}^n \mid x_i > 0 \}, \qquad U_i^- = \{ x \in \mathbb{S}^n \mid x_i < 0 \},$$

$$\begin{aligned} \varphi_i^{\pm} \colon U_i^{\pm} &\longrightarrow \mathbb{B}^n = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}, 1) \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a} = \left\{ (U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-) \;\middle|\; i = 1, \ldots, n+1 \right\}$ é un atlas diferenciable sobre $\mathbb{S}^n$; define a estrutura diferenciable da variedade diferenciable n-dimensional $\mathbb{S}^n$.



4. *O espazo proxectivo* $\mathbb{R}P^n$.

$$X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}), \quad \mathbb{R}P^n = X/\!\sim, \quad x \sim y \iff y = tx,\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\pi \colon X \to \mathbb{R}P^n = X/\!\sim,\ \pi(x) = [x],$ é a proxección natural.
Se $U \subset \mathbb{R}P^n$, U é aberto en $\mathbb{R}P^n \Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ é aberto en X.
$V_i = \{ [x] = [x_1, \ldots, x_{n+1}] \mid x_i \neq 0 \}$ é aberto en $\mathbb{R}P^n$,

$$\psi_i \colon [x] \in V_i \longmapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$$

é un homeomorfismo, e $\boldsymbol{a} = \{ (V_1, \psi_1), \ldots, (V_{n+1}, \psi_{n+1}) \}$ é un atlas diferenciable sobre $\mathbb{R}P^n$. Coa estrutura diferenciable definida por este atlas, $\mathbb{R}P^n$ é unha variedade diferenciable de dimensión n.

1.14 Exemplos

5. *Subvariedades abertas.*

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m e W un subconxunto aberto de M, $W \neq \emptyset$.

Se $\boldsymbol{a}$ é un atlas da variedade diferenciable M entón

$$\boldsymbol{a}_W = \left\{ (U \cap W,\, \varphi_{|U\cap W}) \mid (U,\varphi) \in \boldsymbol{a}\,,\; U \cap W \neq \emptyset \right\}$$

é un atlas diferenciable sobre W.

Se $\mathcal{B}$ é outro atlas na estrutura diferenciable $[\boldsymbol{a}]_\infty$ de M, isto é, $\boldsymbol{a} \sim \mathcal{B}$, entón os atlas $\boldsymbol{a}_W$ e $\mathcal{B}_W$ tamén son equivalentes. é dicir,

$$\boldsymbol{a} \sim \mathcal{B} \Longrightarrow \boldsymbol{a}_W \sim \mathcal{B}_W \Longrightarrow [\boldsymbol{a}_W]_\infty = [\mathcal{B}_W]_\infty.$$

A *subvariedade aberta* W de M é $(W, [\boldsymbol{a}_W]_\infty)$.

6. *Espazos vectoriais reais.*

Sexa V un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita $n \geq 1$ e $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo.

Dótase a V da (única) topoloxía que fai que φ sexa un homeomorfismo de espazos topolóxicos,

$$\tau_\varphi = \{U \subset V \mid U = \varphi^{-1}(\tilde{U}),\, \tilde{U} \text{ aberto en } \mathbb{R}^n\}$$
$$\underset{\varphi \text{ bix}}{=} \{U \subset V \mid \varphi(U) \text{ é aberto en } \mathbb{R}^n\}.$$

Esta topoloxía é independente do isomorfismo de V en $\mathbb{R}^n$.

(V,φ) é unha carta sobre V e é compatible con calquera carta (V,ψ) se $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ é un isomorfismo, así que os atlas diferenciables $\boldsymbol{a} = \{(V,\varphi)\}$ e $\mathcal{B} = \{(V,\psi)\}$ son equivalentes, polo que definen unha mesma estrutura diferenciable, e con ela V é unha variedade diferenciable de dimensión n.

1.14 Exemplos

7. *Variedade de matrices reais* $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

O espazo vectorial $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ de matrices reais $n \times m$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{nm}$.
A aplicación $\varphi\colon M_{n\times m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ dada por

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \longmapsto \varphi(a) = \left(a_1^1, \dots, a_m^1, \dots, \dots, a_1^n, \dots, a_m^n\right),$$

é un isomorfismo.

Coa estrutura diferenciable está definida polo atlas $\{ (M_{n\times m}(\mathbb{R}), \varphi) \}$, o espazo vectorial real $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ convértese nunha variedade diferenciable de dimensión nm.
O sistema de coordenadas φ pódese escribir

$$\varphi = (x^{11}, \dots, x^{1m}, \dots, \dots, x^{n1}, \dots, x^{nm}),$$

con funcións coordenadas $x^{ij} : a \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) \to x^{ij}(a) = a_j^i \in \mathbb{R}$.

8. *O grupo linear xeral* $GL(n;\mathbb{R})$.

O conxunto das matrices reais $n \times n$ non singulares é unha subvariedade aberta de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, logo é unha variedade diferenciable de dimensión n^2.

Se $\{ (M_{n\times n}(\mathbb{R}), \varphi) \}$ é un atlas de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ como no exemplo anterior entón $\left\{ \left(GL(n;\mathbb{R}), \varphi_{|GL(n,\mathbb{R})}\right) \right\}$ é un atlas da variedade diferenciable $GL(n;\mathbb{R})$.

1.14 EXEMPLOS

9. *Variedades produto.*
Sexan M e N variedades diferenciables de dimensións m e n,
$\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ un atlas de M e $\mathcal{B} = \{ (V_i, \psi_i) \}_{i \in I}$ un atlas de N.

$$\varphi_\alpha \times \psi_i \colon (x, y) \in U_\alpha \times V_i \subset M \times N \to (\varphi_\alpha(x), \psi_i(y)) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_i(V_i) \subset \mathbb{R}^{m+n}$$

Entón $\mathcal{A} \star \mathcal{B} = \{ (U_\alpha \times V_i, \varphi_\alpha \times \psi_i) \}_{(\alpha,i) \in A \times I}$ é un atlas diferenciable sobre o espazo topolóxico produto $M \times N$.
↖ compróbese ↗
(e véxase que $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}', \mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Rightarrow \mathcal{A} \star \mathcal{B} \sim \mathcal{A}' \star \mathcal{B}'$)

O espazo produto $M \times N$, coa estrutura diferenciable definida por $\mathcal{A} \star \mathcal{B}$, é unha variedade diferenciable de dimensión $m + n$, que se chama a variedade produto de M e N.

En xeral, se $M_1, \ldots, M_k$ son variedades diferenciables de dimensións $m_1, \ldots, m_k$, o espazo topolóxico produto $M_1 \times \cdots \times M_k$ convértese nunha variedade diferenciable de dimensión $m_1 + \cdots + m_k$.

O cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e o toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son variedades diferenciables de dimensión 2, e os cilindros e toros xeneralizados $\mathbb{S}^1 \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-k}$ e $\mathbb{S}^1 \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{S}^1$ son variedades diferenciables de dimensión n.

1.15 Proposición

Toda variedade topolóxica M é un espazo topolóxico
localmente conexo por camiños,
localmente conexo,
localmente compacto.

1.16 Corolario

Unha variedade topolóxica é un espazo conexo se, e só se, é conexo por camiños.

Proba da Proposición 1.15

Sexa M unha variedade topolóxica de dimensión m, p un punto de M e V unha veciñanza aberta de p.

$$M \text{ localmente euclidiano} \Longrightarrow \exists\ (U,\varphi) \text{ carta de M } \mid p \in U.$$

Tense que $\varphi\colon U \to \varphi(U) \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^m$ é un homeomorfismo e $p \in U \cap V$, e

$\varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ abto en $\mathbb{R}^m \Longrightarrow \exists\, r > 0 \mid \varphi(p) \in B = B(\varphi(p), r) \subset \varphi(U \cap V)$.

Como B é conexo por camiños e $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ é continua, o conxunto $C = \varphi^{-1}(B)$ é conexo por camiños e

$$p \in C = \varphi^{-1}(B) \subset U \cap V \subset V,$$

logo C é unha veciñanza conexa por camiños de p contida en V. Polo tanto M é localmente conexo por camiños (e localmente conexo).

Agora, se $s \in \mathbb{R}$, $0 < s < r \Rightarrow \varphi(p) \in \tilde{B} = B[\varphi(p), s] \subset \varphi(U \cap V)$, e como $\tilde{B}$ é compacto e $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ é un homeomorfismo, tense que $K = \varphi^{-1}(\tilde{B})$ é unha veciñanza compacta de p contida en $U \cap V$, logo existe unha veciñanza compacta de p contida en V, e M é localmente compacto. ■

1.17 PROPOSICIÓN

Sexa M unha variedade topolóxica de dimensión m, β unha base da topoloxía de $\mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{a} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ un atlas sobre M. Entón

$$\beta^* = \left\{ B^*_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(B) \mid B \in \beta,\, B \subset \varphi_\alpha(U_\alpha),\, \alpha \in A \right\}$$

é unha base da topoloxía de M.

PROBA

(i) $B^*_\alpha \in \beta^* \Longrightarrow B^*_\alpha$ é aberto en M,

xa que $B^*_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(B)$, onde B é un aberto en $\mathbb{R}^m$, $B \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$, e $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é continua.

(ii) $\forall\, V$ aberto en M, $\forall\, p \in V$, $\exists\, B^*_\alpha \in \beta^* \mid p \in B^*_\alpha \subset V$,

xa que

$$p \in V \subset M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha \Longrightarrow \exists\, \alpha \in A \mid p \in U_\alpha,$$

$$\varphi_\alpha(p) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^m \Longrightarrow \exists\, B \in \beta \mid \varphi_\alpha(p) \in B \subset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V),$$

$$\Longrightarrow p \in \varphi_\alpha^{-1}(B) = B^*_\alpha \subset U_\alpha \cap V \subset V. \qquad \blacksquare$$

1.18 COROLARIO

Se unha variedade topolóxica M admite un atlas numerable entón M é segundo numerable (é dicir, satisfai o segundo axioma de numerabilidade: a topoloxía de M admite unha base numerable).

PROBA

Sexa $\boldsymbol{a} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ un atlas numerable sobre a variedade topolóxica M de dimensión m (supoñemos que o conxunto de índices A é numerable) e sexa β unha base numerable da topoloxía de $\mathbb{R}^m$.

Entón

$$\beta^* = \left\{ B^*_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(B) \mid B \in \beta,\, B \subset \varphi_\alpha(U_\alpha),\, \alpha \in A \right\}$$

é unha base da topoloxía de M que está indicada por un subconxunto do conxunto numerable $\beta \times A$, logo β^* é unha base numerable da topoloxía de M. $\blacksquare$

1.19 Corolario

Toda variedade topolóxica compacta é segundo numerable.

Proba

Basta ver que toda variedade topolóxica compacta admite un atlas finito (logo numerable) e aplicar o corolario anterior.

En efecto, por ser M un espazo topolóxico localmente euclidiano de dimensión m,

$$\forall\, p \in M\ \exists\, (U_p, \varphi_p) \text{ carta sobre } M \mid p \in U_p.$$

Polo tanto

$$\left.\begin{array}{c} M = \bigcup_{p\in M} U_p \\ M \text{ compacto} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, p_1, \ldots, p_k \in M \mid M = U_{p_1} \cup \cdots \cup U_{p_k}$$

$$\Longrightarrow \{(U_{p_1}, \varphi_{p_1}), \ldots, (U_{p_k}, \varphi_{p_k})\} \text{ é un atlas sobre } M.$$

■

1.20 Exercicio

Se $\boldsymbol{a}_0$ é o atlas completo dunha variedade diferenciable M entón

$$\beta_0 = \{\, U_0 \mid (U_0, \varphi_0) \in \boldsymbol{a}_0 \,\}$$

é unha base da topoloxía de M.

Solución

(i) $U_0 \in \beta_0 \Longrightarrow U_0$ é aberto en M,

xa que se $U_0 \in \beta_0$ entón U_0 é un aberto coordenado.

(ii) $\forall\, V$ aberto en $M, \forall\, p \in V, \exists\, U_0 \in \beta_0 \mid p \in U_0 \subset V$,

xa que dado $p \in V \subset M$ se consideramos unha carta (U, φ) de M (isto é, (U, φ) está no atlas completo $\boldsymbol{a}_0$ de M) tal que $p \in U$,

$$p \in U \cap V \subset U, \underline{(U, \varphi) \in \boldsymbol{a}_0} \underset{1.13}{\Longrightarrow} p \in U_0 = U \cap V \subset V, \underline{(U_0, \varphi_{|U_0}) \in \boldsymbol{a}_0}$$
$$\Longrightarrow U_0 \in \beta_0 \ \text{ e } \ p \in U_0 \subset V.$$

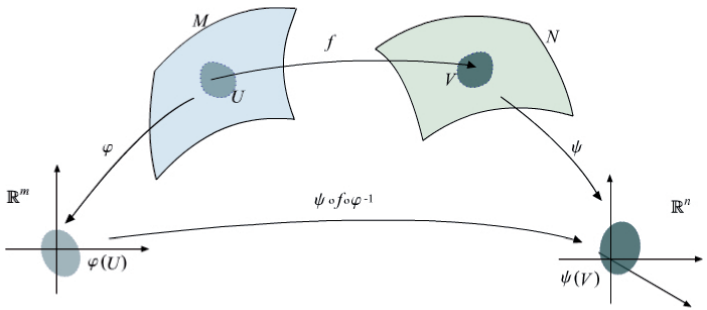
1.21 Definición (expresión local dunha aplicación)

Sexan M e N variedades diferenciables de dimensións m e n, resp., $f\colon M \to N$ unha aplicación.

Unha ***expresión local*** de f é unha aplicación

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n,$$

onde (U,φ) carta de M, (V,ψ) carta de N, $f(U) \subset V$.



Se $p \in U$, tamén se di que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é unha expresión local de f en p.

1.22 Nota

Se M e N son variedades diferenciables e $f\colon M \to N$ é unha aplicación continua, entón para cada $p \in M$ existe unha expresión local de f en p.

En efecto, $\beta_0 = \{\, U \mid (U,\varphi) \text{ carta de } M \,\}$ é base da topoloxía de M, e se $p \in M$,

$$f(p) \in N \Longrightarrow \exists\, (V,\psi) \text{ carta de } N \mid f(p) \in V \underset{f \text{ continua}}{\Longrightarrow} p \in f^{-1}(V) \text{ é aberto en } M$$

$$\underset{\beta_0 \text{ base top } M}{\Longrightarrow} \exists\, (U,\varphi) \text{ carta de } M \mid p \in U \subset f^{-1}(V)$$

$$\Longrightarrow p \in U,\ f(U) \subset V,\ \text{e } \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \text{ é unha expresión local de } f \text{ en } p.$$

1.23 DEFINICIÓN (APLICACIÓN DIFERENCIABLE C^r)

Unha aplicación entre variedades diferenciables $f: M \to N$ é ***diferenciable*** C^r ($1 \leq r \leq \infty$) se, para cada $p \in M$ existe unha expresión local de f en p que é unha aplicación de clase r entre abertos de espazos euclidianos.

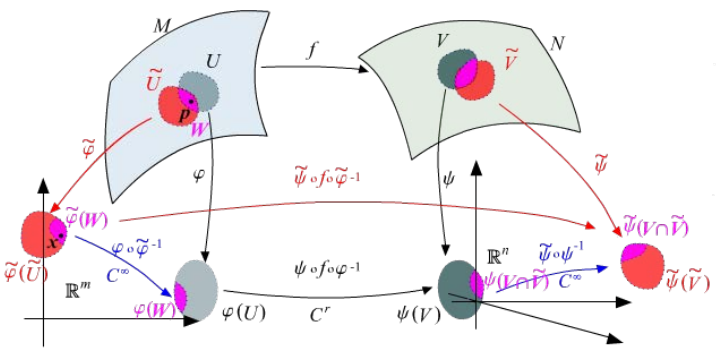
Isto é, $f: M \to N$ é diferenciable C^r se, e só se,

$$\forall p \in M \quad \begin{array}{l} \exists\,(U,\varphi) \text{ carta de } M, p \in U \\ \exists\,(V,\psi) \text{ carta de } N, f(U) \subset V \end{array} \;\Big|\; \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ é } C^r.$$

1.24 PROPOSICIÓN

Unha condición necesaria para que unha aplicación entre variedades diferenciables $f: M \to N$ sexa diferenciable C^r é que tódalas expresións locais de f sexan aplicacións de clase r.

$$\left[\forall p \in M \quad \begin{array}{l} \exists\,(U,\varphi) \text{ carta de } M, p \in U \\ \exists\,(V,\psi) \text{ carta de } N, f(U) \subset V \end{array} \;\Big|\; \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ é } C^r\right]$$



$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall\,(\tilde{U},\tilde{\varphi}) \text{ carta de } M, \\ \forall\,(\tilde{V},\tilde{\psi}) \text{ carta de } N, f(\tilde{U}) \subset \tilde{V} \end{array} \;\Big|\; \Rightarrow \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \to \tilde{\psi}(\tilde{V}) \text{ é } C^r\right]$$

PROBA

$$f \text{ difble } C^r \overset{?}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{l} \forall\, (\tilde{U},\tilde{\varphi}) \text{ carta de } M, \\ \forall\, (\tilde{V},\tilde{\psi}) \text{ carta de } N,\ f(\tilde{U}) \subset \tilde{V} \end{array} \;\middle|\; \Rightarrow \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \to \tilde{\psi}(\tilde{V}) \text{ é } C^r \right]$$

Supoñemos $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ e $(\tilde{V},\tilde{\psi})$ son cartas de M e N, respectivamente, tales que $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$, e imos probar que $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ é C^r nunha veciñanza aberta de cada punto $x \in \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^m$.

$$x \in \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \Longrightarrow \exists\, p \in \tilde{U} \mid x = \tilde{\varphi}(p)$$

$$\overset{\text{hipótese}}{\Longrightarrow} \exists\, \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ expresión local } C^r \text{ de } f \text{ en } p$$

Entón $W = U \cap \tilde{U}$ é unha veciñanza aberta de p, logo $\varphi(W)$ é unha veciñanza aberta de $x = \tilde{\varphi}(p)$ e tense que

$$(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{|\tilde{\varphi}(W)} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})_{|\,\psi(V \cap \tilde{V})} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{|\,\varphi(W)} \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{|\tilde{\varphi}(W)}.$$

Agora, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é C^r por hipótese, e $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ e $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ son cambios de cartas das variedades diferenciables M e N, respectivamente, logo son C^∞. Polo tanto, $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ é C^r nunha veciñanza aberta de x. ■

Un esquema do estudo da diferenciabilidade C^r $(1 \leq r \leq \infty)$ dunha aplicación entre variedades diferenciables:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \varphi(U) & \xrightarrow[\psi \circ f \circ \varphi^{-1}]{} & \psi(V) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(x) & \longmapsto & f(\varphi^{-1}(x)) \\ \uparrow & & \downarrow \\ x & \dashrightarrow & (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \end{array}$$

1.25 CUESTIÓN

A condición necesaria na proposición anterior, é tamén condición suficiente?

1.26 Proposición

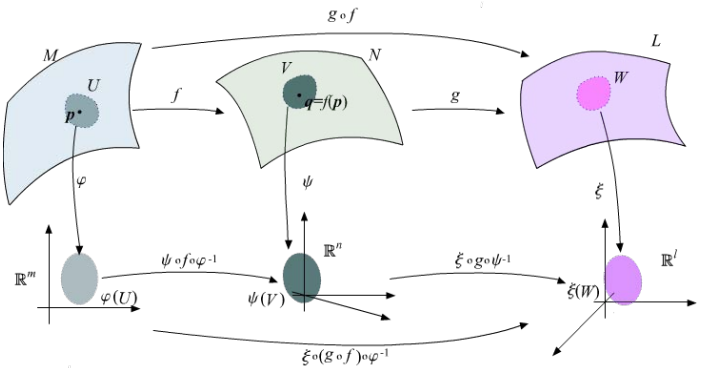
(1) *Toda aplicación $f\colon M \to N$ diferenciable C^r é unha aplicación continua, e é diferenciable C^s se $1 \leq s \leq r$.*

(2) *Se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to L$ son diferenciables C^r entón $g \circ f\colon M \to L$ é diferenciable C^r.*

PROBA

(1) Se unha expresión local $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ é C^r, $r \geq 1$, tamén é C^s se $1 \leq s \leq r$, e é continua, logo $f_{|U}\colon U \to N$ é continua.

(2) Sexan $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to L$ diferenciables C^r, $p \in M$ e $q = f(p) \in N$.



Como $q = f(p) \in N$, existe unha expresión local de g que é C^r,

$$\left.\begin{array}{l}\exists\,(V,\psi) \text{ carta de } N, q \in V\\ \exists\,(W,\xi) \text{ carta de } N, g(V) \subset W\end{array}\right| \xi \circ g \circ \psi^{-1}\colon \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \to \xi(W) \subset \mathbb{R}^l \text{ é } C^r.$$

Xa que f é diferenciable C^r, é continua por (1), logo

$$\exists\,(U,\varphi) \text{ carta de } M \mid f(U) \subset V,\ \text{e } \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \text{ é } C^r$$

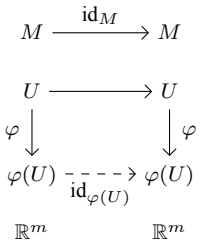
Polo tanto, como $(g \circ f)(U) = g\big(f(U)\big) \subset g(V) \subset W$, concluímos que

$$\left.\begin{array}{l}\exists\,(U,\varphi) \text{ carta de } M, p \in U\\ \exists\,(W,\xi) \text{ carta de } L, (g \circ f)(U) \subset W\end{array}\right| \xi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\xi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \text{ é } C^r. \quad \blacksquare$$

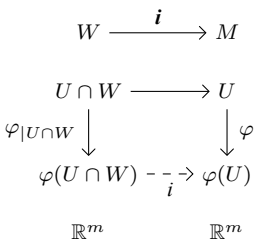
1.27 Exemplos

1. Se M é unha variedade diferenciable, a aplicación identidade $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ é diferenciable C^∞.
2. Se W é unha subvariedade aberta de M, a inclusión $i \colon W \to M$ é diferenciable C^∞.
3. Toda aplicación constante entre dúas variedades diferenciables é diferenciable C^∞.

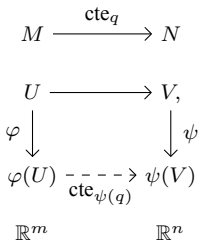
1. (U, φ) carta de M, $p \in U$,



2. (U, φ) carta de M, $p \in U \cap W$,



3. (U, φ) carta de M, $p \in U$ (V, ψ) carta de N, $q \in V$,

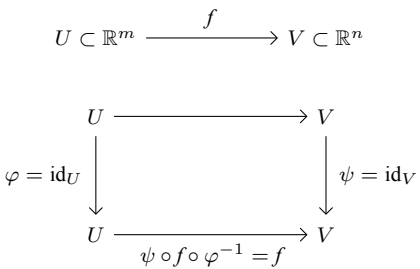


1.28 Exercicio

Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación entre variedades diferenciables entón f é diferenciable C^r se, e só se, para todo punto $p \in M$ existe unha veciñanza aberta W de p tal que $f_{|W}\colon W \to N$ é diferenciable C^r.

1.29 Nota

Se U é un aberto en $\mathbb{R}^m$, V un aberto en $\mathbb{R}^n$ e $f\colon U \to V$ é unha aplicación, entón f é diferenciable C^r como aplicación entre variedades diferenciables se, e só se, f é de clase r como aplicación entre subconxuntos abertos de espazos euclidianos.



f é diferenciable C^r como aplicación entre variedades diferenciables

$\Updownarrow$

a expresión local $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = f$ en cada punto de U é C^r

1.30 DEFINICIÓN (DIFEOMORFISMO)

Unha aplicación $f\colon M \to N$ é un ***difeomorfismo*** C^r se é bixectiva, diferenciable C^r e a súa inversa $f^{-1}\colon N \to M$ tamén é diferenciable C^r.

Se $f\colon M \to N$ é un difeomorfismo C^∞ dise que f é un ***difeomorfismo*** e que as variedades diferenciables M e N son variedades ***difeomorfas***, $M \approxeq N$.

$$M \approxeq N \Longrightarrow M \approx N$$

1.31 Exercicio

A identidade $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ é un difeomorfismo,
a aplicación inversa dun difeomorfismo é un difeomorfismo,
a composición de dous difeomorfismos é un difeomorfismo.

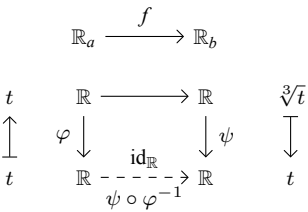
$$M \approxeq M; \qquad M \approxeq N \Longrightarrow N \approxeq M; \qquad M \approxeq N, N \approxeq L \Longrightarrow M \approxeq L.$$

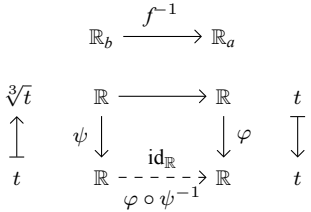
1.32 Exemplo

Consideramos os atlas $\mathcal{A} = \{ (\mathbb{R}, \varphi) \}$ e $\mathcal{B} = \{ (\mathbb{R}, \psi) \}$ sobre a recta real, onde $\varphi(t) = t$, e $\psi(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$. Entón $\mathbb{R}_a = (\mathbb{R}, [\mathcal{A}]_\infty)$ e $\mathbb{R}_b = (\mathbb{R}, [\mathcal{B}]_\infty)$ son variedades diferenciables distintas pero difeomorfas.

$$\varphi \circ \psi^{-1} \text{ non é } C^\infty \Longrightarrow \mathcal{A} \not\sim \mathcal{B} \Longrightarrow [\mathcal{A}]_\infty \neq [\mathcal{B}]_\infty \Longrightarrow \mathbb{R}_a \neq \mathbb{R}_b,$$

pero a aplicación $f\colon x \in \mathbb{R}_a \mapsto \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}_b$ é un difeomorfismo, xa que ten expresións locais (globais) que son a identidade:





1.33 Definición (estruturas diferenciables difeomorfas)

Dúas estruturas diferenciables $[\mathcal{A}]_\infty$ e $[\mathcal{B}]_\infty$ sobre unha variedade topolóxica M son estruturas diferenciables ***difeomorfas*** se existe un difeomorfismo $f\colon (M, [\mathcal{A}]_\infty) \to (M, [\mathcal{B}]_\infty)$.

1.34 Exercicio

Sexan M unha variedade diferenciable de dimensión m, U un aberto en M, A un aberto en $\mathbb{R}^m$ e $\varphi\colon U \to A$ unha aplicación bixectiva. Entón (U, φ) é unha carta de M se, e só se, $\varphi\colon U \to A$ é un difeomorfismo.

1.35 Exercicio

Dous atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sobre unha variedade topolóxica M son atlas equivalentes se, e só se, a aplicación identidade $\mathrm{id}_M\colon (M, [\mathcal{A}]_\infty) \to (M, [\mathcal{B}]_\infty)$ é un difeomorfismo.

1.36

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m, e $1 \leq r \leq \infty$.

$$\mathfrak{F}^r(M) = \{\, f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ é diferenciable } C^r \,\}$$

Se $f\colon M \to \mathbb{R}$ é unha aplicación, entón

$$f \in \mathfrak{F}^r(M) \iff \forall\, p \in M\ \exists\, (U,\varphi) \text{ carta de } M, p \in U, \text{ tal que } f \circ \varphi^{-1} \text{ é } C^r$$

$$\iff \forall\, (U,\varphi) \text{ carta de } M,\ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R} \text{ é de clase } r.$$

O conxunto $\mathfrak{F}^r(M)$ ten estructura de anel (coa suma e o producto de funcións) e de espazo vectorial real.

$\mathfrak{F}^r(M)$ é unha álxebra (asociativa, conmutativa e unitaria).

Notación: $\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{F}^\infty(M)$.

1.37 Exemplo

Se (U,φ) é unha carta dunha variedade diferenciable M, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, cada función coordenadas $x^i\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciable C^∞, $x^i = r^i \circ \varphi \in \mathfrak{F}(U)$, xa que $x^i \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é a restrición da proxección r^i.

1.38 LEMA

Se W é un aberto dunha variedade diferenciable M de dimensión m e $p \in W$, dado $r > 0$ existe unha carta (U, φ) de M, $p \in U \subset W$, tal que $\varphi(U) = B_{\mathbb{R}^m}(0, r)$ e $\varphi(p) = 0$. Dise que (U, φ) é unha carta de M centrada en p.

PROBA

Dado que $\beta_0 = \{U_0 \mid (U_0, \varphi_0) \text{ é carta de } M\}$ é unha base da topoloxía de M,

$$p \in W \underset{\text{abto}}{\subset} M \Longrightarrow \exists\, (U_0, \varphi_0) \text{ carta de } M \mid p \in U_0 \subset W,$$

$$\varphi_0(p) \in \varphi_0(U_0) \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^m \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \mid B = B_{\mathbb{R}^m}(\varphi_0(p), \varepsilon) \subset \varphi_0(U_0),$$

$U = \varphi_0^{-1}(B) \underset{\text{abto}}{\subset} U_0 \underset{\text{abto}}{\subset} W$, e (U, φ) carta de M, onde φ é o difeomorfismo

$$\varphi \approx$$

$$U \xrightarrow[\varphi_{0|U}]{} B \xrightarrow[\approx]{} B_{\mathbb{R}^m}(0, \varepsilon) \xrightarrow[\approx]{} B_{\mathbb{R}^m}(0, r),$$

$$x \longmapsto \varphi_0(x) \qquad z \longmapsto \frac{r}{\varepsilon} z$$

$$y \longmapsto y - \varphi_0(p) \qquad \varphi(p) = 0$$

■

1.39 TEOREMA (**Existencia de funcións meseta**)

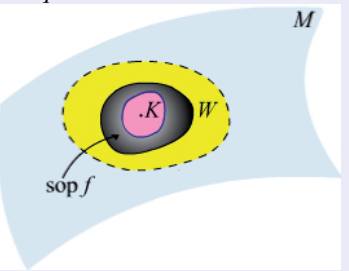
Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m, W un aberto en M e $p_0 \in W$. Entón existe unha veciñanza compacta K de p_0, $K \subset W$, e existe unha función $f\colon M \to \mathbb{R}$ diferenciable C^∞ tal que

$$0 \le f(x) \le 1 \qquad \forall\, x \in M,$$

$$f(x) = 1 \qquad \forall\, x \in K,$$

$\operatorname{sop} f = \overline{\{\, x \in M \mid f(x) \neq 0 \,\}}$ *é compacto,*

$\operatorname{sop} f \subset W$.

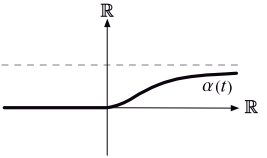


f é unha función meseta para $K \subset W$.

PROBA

Comezamos coa seguinte función $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é diferenciable C^∞,

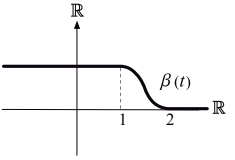
$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t \le 0. \end{cases}$$



Construímos unha función $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que satisfai

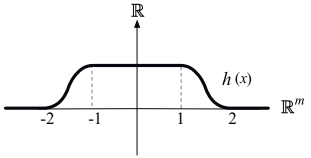
$$\beta(t) = 1 \text{ se } t \le 1, \quad \beta(t) = 0 \text{ se } t \ge 2, \quad 0 < \beta(t) < 1 \text{ se } 1 < t < 2.$$

$$\beta(t) = \frac{\alpha(2-t)}{\alpha(2-t) + \alpha(t-1)},$$



Definimos $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \beta(\|x\|),$$



Entón h é diferenciable C^∞ (o é en $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ porque neste aberto de $\mathbb{R}^m$ é diferenciable C^∞, e tamén o é na bóla aberta $B_m(0,1)$ porqué aquí é a función constante 1), e satisfai

$$0 \le h \le 1, \qquad h_{|B_m[0,1]} = 1, \qquad \operatorname{sop} h = B_m[0,2].$$

Sexa (U,φ) unha carta de M, $p_0 \in U \subset W$, tal que $\varphi(U) = B_m(0,3)$, (que existe polo lema 1.38), poñemos $K = \varphi^{-1}(B_m[0,1])$, e tense

$$p_0 \in \varphi^{-1}\big(B_m(0,1)\big) \subset K \subset \varphi^{-1}\big(B_m(0,2)\big) \subset \varphi^{-1}\big(B_m[0,2]\big) = \varphi^{-1}(\operatorname{sop} h) \subset U.$$

Defínese finalmente $f\colon M \to \mathbb{R}$ por

$$f(p) = \begin{cases} h\big(\varphi(p)\big) & \text{se } p \in U, \\ 0 & \text{se } p \notin U, \end{cases}$$

que satisfai

$$0 \le f \le 1, \quad f_{|K} = 1, \quad \operatorname{sop} f = \varphi^{-1}\big(B_m[0,2]\big) \underset{\text{compacto}}{\subset} \varphi^{-1}\big(B_m(0,3)\big) = U \subset W,$$

e é diferenciable C^∞, porque

$$f_{|U} = h \circ \varphi, \quad f_{|M \setminus \operatorname{sop} f} = 0 \quad \text{son diferenciables } C^\infty,$$

e U e $M \setminus \operatorname{sop} f$ son dous abertos que recobren M. ■

1.40 *Propiedade de extensión local de funcións diferenciables*

Sexa M unha variedade diferenciable, W un aberto en M, $p_0 \in W$, e $h\colon W \to \mathbb{R}$ unha función diferenciable C^r.

Entón existe unha veciñanza aberta V de p_0, con clausura compacta $\overline{V} \subset W$, e existe $g \in \mathfrak{F}^r(M)$, tal que

$$g_{|V} = h_{|V}, \qquad g_{|M\setminus W} = 0.$$

Proba

$$p_0 \in W \xRightarrow{1.39} \begin{array}{l} \exists\, K \text{ veciñanza compacta de } p_0,\ K \subset W \\ \exists\, f\colon M \to \mathbb{R} \text{ diferenciable } C^\infty \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 \le f \le 1 \\ f_{|K} = 1 \\ \operatorname{sop} f \subset W \end{array} \right.$$

Se V é aberto en M tal que $p \in V \subset K$, tense que $\bar{V} \subset \bar{K} = K \subset W$, pois K é pechado en M, por ser K compacto e M Hausdorff. Defínese $g\colon M \to \mathbb{R}$ por

$$g(p) = \begin{cases} f(p)h(p) & \text{se } p \in W, \\ 0 & \text{se } p \notin W, \end{cases}$$

e entón $g_{|V} = h_{|V}$ e $g_{|M\setminus W} = 0$ porque $\operatorname{sop} h \subset W$.
Ademais, $g_{|W} = f_{|W}h$ é dif C^r porque h é dif C^r e f é dif C^∞; $g_{|M\setminus \operatorname{sop} f} = 0$. E estes dous abertos nos que g é diferenciable C^r recobren M, logo g é diferenciable C^r. ■

1.41 Definición

Sexa M unha variedade diferenciable e $\left\{ U_\alpha \right\}_{\alpha \in A}$ un recubrimento aberto *localmente finito* de M (i.e., cada punto $p \in M$ ten unha veciñanza que corta soamente a un número finito de abertos U_α). Unha ***partición da unidade*** subordinada a $\left\{ U_\alpha \right\}_{\alpha \in A}$ é unha familia $\left\{ f_\alpha \colon M \to \mathbb{R} \right\}_{\alpha \in A}$ de funcións diferenciables C^∞ que verifica as seguintes condicións:

(a) $f_\alpha \geq 0 \quad \forall\, \alpha \in A$,

(b) $\operatorname{sop} f_\alpha \subset U_\alpha \ \ \forall\, \alpha \in A$,

(c) $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) = 1 \ \ \forall\, p \in M$.

1.42 Teorema

Se M é unha variedade diferenciable segundo numerable entón para cada recubrimento aberto localmente finito $\left\{ U_\alpha \right\}_{\alpha \in A}$ existe unha partición da unidade subordinada a $\left\{ U_\alpha \right\}_{\alpha \in A}$.

2. O espazo tanxente

2.1 Definición (curva diferenciable)

Unha ***curva*** nunha variedade diferenciable M é unha aplicación continua $\alpha\colon I=(a,b)\to M$.

Unha ***curva diferenciable*** en M é unha curva en M que é unha aplicación diferenciable C^∞.

2.2

Unha curva $\alpha\colon I\to M$ é unha curva diferenciable en M se, e só se,

$$\forall\, t_0\in I\ \ \exists\,(U,\varphi) \text{ carta de } M,\ \alpha(t_0)\in U,$$
$$\text{tal que } \varphi\circ\alpha\colon \alpha^{-1}(U)\subset I\to\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m \text{ é } C^\infty,$$

ou, equivalentemente, se, e só se,

$$\forall\,(U,\varphi) \text{ carta de } M,\ \varphi\circ\alpha\colon \alpha^{-1}(U)\subset I\to\mathbb{R}^m \text{ é } C^\infty.$$

2.3

$$C_p(M)=\{\,\alpha\mid \alpha\colon(a,b)\to M, a<0<b, \alpha \text{ curva diferenciable}, \alpha(0)=p\,\}$$

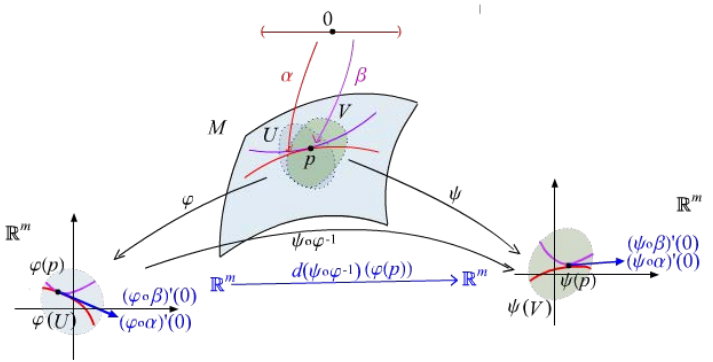
é o conxunto de tódalas curvas diferenciables en M con punto inicial p.

2.4 Cuestión

Se (U, φ) é unha carta de M, $p \in U$, e $\alpha \in C_p(M)$, o *vector velocidade* de α en 0 respecto de φ é $(\varphi \circ \alpha)'(0)$.

Se (V, ψ) é outra carta de M tal que $p \in V$, que relación hai entre as velocidades $(\varphi \circ \alpha)'(0)$ e $(\psi \circ \alpha)'(0)$?

$$(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) = d(\psi \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)\big((\varphi \circ \alpha)'(0)\big)$$

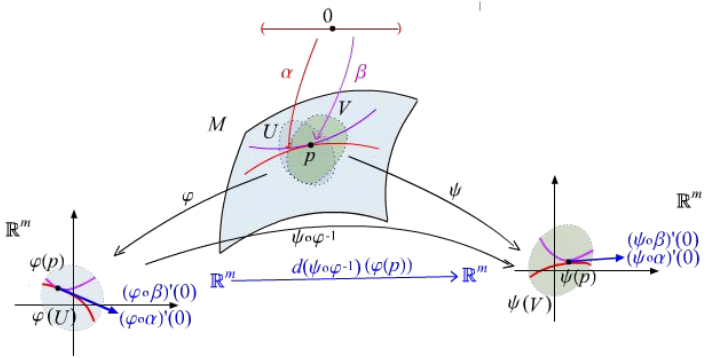


Definición do xeómetra:

Un vector tanxente a M en p é unha clase de equivalencia $[\alpha]_p$ de curvas diferenciables, onde a relación está dada por

$$\alpha, \beta \in C_p(M), \alpha \sim \beta \text{ se } (\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0),$$

isto é, $\alpha \sim \beta$ se α e β teñen a mesma velocidade nun sistema de coordenadas φ en p (e, polo tanto, en calquera outro sistema de coordenadas en p).



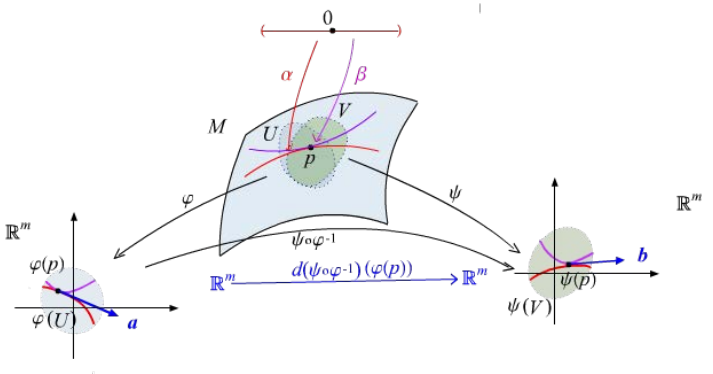
Definición do físico:

Un vector tanxente a unha variedade m-dimensional M en p consiste en asignar a cada sistema de coordenadas unha m-tupla de números reais, tales que a relación desta asignación ao cambiar de coordenadas está dada pola matriz jacobiana do cambio de cartas.

$$\Phi_p(M) = \{(p, \varphi, a) \mid \varphi \text{ sistema de coordenadas en } p, a \in \mathbb{R}^m\},$$

$$(p, \varphi, a) \sim (p, \psi, b) \iff b = d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(a)$$

Así, un vector tanxente a M en p é unha clase de equivalencia $[(p, \varphi, a)]$.



A definición de vector tanxente que imos dar baséase na idea de que un vector en $\mathbb{R}^m$ está determinado completamente pola actuación sobre funcións dunha derivada direccional.

A un vector $a \in \mathbb{R}^m$ correspóndelle en cada punto $p \in \mathbb{R}^m$ unha derivada direccional, que a cada función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fai corresponder a "derivada direccional" de f en p segundo a,

$$(D_a f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + ta) - f(p)}{t} = df(p)(a).$$

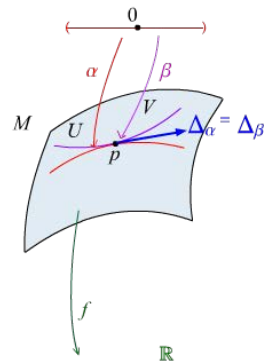
Pois ben, a actuacción desta derivada direccional determina o vector,

$$(D_a f)(p) = (D_b f)(p) \ \ \forall f \implies a = b.$$

Se $f \in \mathfrak{F}^1(M)$ terá sentido uha "derivada de f en p segundo unha curva" $\alpha \in C_p(M)$,

$$\Delta_\alpha(f) = \lim_{t\to 0} \frac{(f\circ\alpha)(t) - f(p)}{t} = (f\circ\alpha)'(0) \in \mathbb{R},$$

e se $\alpha \sim \beta$ entón $(f\circ\alpha)'(0) = (f\circ\beta)'(0)\ \forall\, \alpha \in \mathfrak{F}^1(M)$, logo $\Delta_\alpha(f) = \Delta_\beta(f)$.



Isto leva á *definición do alxebrista.*

2.5

Se $\alpha \in C_p(M)$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$, a derivada de f en p segundo a curva α é

$$\Delta_\alpha(f) = \lim_{t\to 0} \frac{(f\circ\alpha)(t) - f(p)}{t} = (f\circ\alpha)'(0) \in \mathbb{R}.$$

A aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Delta_\alpha\colon & \mathfrak{F}(M) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \Delta_\alpha(f) \end{array}$$

satisfai as seguintes propiedades, para $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\Delta_\alpha(f+g) = \Delta_\alpha(f) + \Delta_\alpha(g), \quad \Delta_\alpha(\lambda f) = \lambda\Delta_\alpha(f),$

(b) $\Delta_\alpha(fg) = \Delta_\alpha(f)g(p) + f(p)\Delta_\alpha(g),$

2.7 VECTORES TANXENTES

Un ***vector tanxente*** a unha variedade diferenciable M en $p \in M$ é unha aplicación

$$v\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R},$$

que satisfai:

(a) $\quad v(f+g) = v(f) + v(g), \quad v(\lambda f) = \lambda v(f),$

(b) $\quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ (regra do produto),

para cada $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Defínese

$$(v+w)(f) = v(f) + w(f), \qquad (\lambda v)(f) = \lambda v(f),$$

e $v + w$ e λv tamén son vectores tanxentes a M en p.

O ***espazo tanxente*** a M en p é o conxunto $T_p(M)$ de tódolos vectores tanxentes a M en p con estas operacións, e é un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$.

2.7 NOTA

$$\forall\, p \in M,\ \forall\, \alpha \in C_p(M) \Longrightarrow \Delta_\alpha \in T_p(M).$$

2.8 PROPOSICIÓN (Comportamento local dos vectores tanxentes)

Sexan M unha variedade diferenciable de dimensión m, $p \in M$, $v \in T_p(M)$.

(1) *Se $f \in \mathfrak{F}(M)$ se anula nunha veciñanza de p entón $v(f) = 0$.*

(2) *Se $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ coinciden nunha veciñanza de p entón $v(f) = v(g)$.*

(3) *Se $f \in \mathfrak{F}(M)$ é constante nunha veciñanza de p entón $v(f) = 0$.*

PROBA

(1) Sexa W un aberto en M, $p \in W$, tal que $f_{|W} = 0$.
Polo teorema de existencia de funcións meseta,

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, K \text{ veciñanza compacta de } p,\ K \subset W \\ \exists\, \alpha\colon M \to \mathbb{R} \text{ diferenciable } C^\infty \end{array}\right| \begin{array}{l} 0 \le \alpha \le 1 \\ \alpha_{|K} = 1 \\ \operatorname{sop}\alpha \subset W, \quad \text{logo} \quad \alpha_{|M\setminus W} = 0. \end{array}$$

Se $\beta = 1 - \alpha$, entón $\beta \in \mathfrak{F}(M),\ \beta_{|K} = 0,\ \beta_{|M\setminus W} = 1$, e polo tanto $f = \beta f$.
Pola regra do produto,

$$v(f) = v(\beta f) = v(\beta)\underset{=0}{f(p)} + \underset{=0}{\beta(p)}v(f) = 0.$$

(2) Supoñemos $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ coinciden nunha veciñanza aberta W de p, e poñemos $h = f - g$. Entón

$$\begin{aligned} f_{|W} = g_{|W} \Longrightarrow h_{|W} = 0 &\overset{(1)}{\Longrightarrow} v(h) = 0 \\ \Longrightarrow 0 = v(f-g) = v(f) - v(g) &\Longrightarrow v(f) = v(g). \end{aligned}$$

(3) Supoñemos $f \in \mathfrak{F}(M)$ é constante nunha veciñanza aberta W de p.
Se $f(x) = \lambda \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in W$, entón $f_{|W} = (\lambda \cdot \mathbf{1})_{|W}$, onde $\mathbf{1}\colon x \in M \mapsto 1 \in \mathbb{R}$.
Pola regra do produto,

$$v(\mathbf{1}) = v(\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}) = v(\mathbf{1})\mathbf{1}(p) + \mathbf{1}(p)v(\mathbf{1}) = 2v(\mathbf{1}) \Longrightarrow v(\mathbf{1}) = 0,$$

e, polo tanto,

$$v(f) = v(\lambda\cdot\mathbf{1}) \underset{\substack{v\ \mathbb{R}\text{-lineal}}}{=} \lambda v(\mathbf{1}) = 0. \qquad \blacksquare$$

2.9 PROPOSICIÓN

Se W é unha subvariedade aberta dunha variedade diferenciable M e $p \in W$, tense unha aplicación $\boldsymbol{\iota}\colon T_p(W) \to T_p(M)$ dada por

$$\boldsymbol{\iota}(v)(f) = v(f_{|W}), \qquad v \in T_p(W), \quad f \in \mathfrak{F}(M),$$

que é un isomorfismo.

PROBA

1^{o} $\boldsymbol{\iota}$ está ben definida, é dicir, se $v \in T_p(W)$ entón $\boldsymbol{\iota}(v) \in T_p(M)$.

2^{o} $\boldsymbol{\iota}$ é lineal.

3^{o} $\boldsymbol{\iota}$ é inxectiva: Sexa $v \in T_p(W)$ tal que $\boldsymbol{\iota}(v) = 0$ e vexamos que $v = 0$. Tomamos $h \in \mathfrak{F}(W)$ e debemos comprobar que $v(h) = 0$. Pola propiedade de extensión local de funcións diferenciables,

$$h \in \mathfrak{F}(W) \Longrightarrow \left[\begin{array}{l|l} \exists V \text{ aberto en } M, p \in V \subset W & \\ \exists\, g \in \mathfrak{F}(M) & g_{|V} = h_{|V} \end{array} \right]$$

$$h, g_{|W} \text{ coinciden en } V \subset W \overset{2.8(2)}{\Longrightarrow} v(h) = v(g_{|W}) = \boldsymbol{\iota}(v)(g) = 0.$$

4^{o} $\boldsymbol{\iota}$ é sobrexectiva: Dado $\tilde{v} \in T_p(M)$ definimos

$$\begin{aligned} v\colon \mathfrak{F}(W) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto v(h) = \tilde{v}(g), \text{ onde } g \in \mathfrak{F}(M) \text{ é tal que } g_{|V} = h_{|V}, p \in V \underset{\text{abto}}{\subset} W. \end{aligned}$$

v está ben definida: se $g_1, g_2 \in \mathfrak{F}(M)$ son tales que $g_{1|V_1} = h_{|V_1}$, $g_{2|V_2} = h_{|V_2}$, onde V_1 e V_2 son veciñanzas abertas de p contidas en W, entón

$$g_{1|V_1 \cap V_2} = g_{2|V_1 \cap V_2},\ p \in V_1 \cap V_2 \underset{\text{abto}}{\subset} M \overset{2.8(2)}{\underset{\tilde{v} \in T_p(M)}{\Longrightarrow}} \tilde{v}(g_1) = \tilde{v}(g_2).$$

É unha rutina comprobar que $v \in T_p(W)$, isto é, que é lineal e satisfai a regra do produto.

Finalmente, $\boldsymbol{\iota}(v) = \tilde{v}$, xa que se $f \in \mathfrak{F}(M)$ entón

$$\boldsymbol{\iota}(v)(f) \overset{\text{def de } \boldsymbol{\iota}}{=} v(f_{|W}) \underset{f \in \mathfrak{F}(M)}{\overset{\text{def de } v}{=}} \tilde{v}(f). \qquad \blacksquare$$

O isomorfismo $\boldsymbol{\iota}\colon T_p(W) \to T_p(M)$ é natural, non depende de ningunha elección. Por isto, para cada aberto $W \subset M$, sempre ***identificaremos*** $T_p(W)$ e $T_p(M)$ para cada punto $p \in W$.

Así, calquera vector tanxente $v \in T_p(M)$ poderá aplicarse sen ambigüidade a funcións definidas soamente nunha veciñanza aberta de p e non necesariamente en todo M.

2.10 (**Unha carta (U,φ) de M, $p \in U$, define $\theta_p^{\varphi}\colon \mathbb{R}^m \to T_p(M)$**)

Sexa (U,φ) unha carta da variedade diferenciable m-dimensional M e sexa $p \in U$. Para cada $a \in \mathbb{R}^m$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\alpha_a\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to U \subset M, \qquad \alpha_a(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(p) + ta\big),$$

é unha curva diferenciable con punto inicial p, $\alpha_a \in C_p(M)$, e $(\varphi \circ \alpha_a)'(0) = a$. Definimos

$$\begin{aligned} \theta_p^{\varphi}\colon \mathbb{R}^m &\longrightarrow T_p(M) \\ a &\longmapsto \Delta_{\alpha_a}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_p^{\varphi}(a) = \Delta_{\alpha_a}\colon \mathfrak{F}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \theta_p^{\varphi}(a)(f) = (f\circ\alpha_a)'(0) = d(f\circ\varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(a). \end{aligned}$$

$$\theta_p^{\varphi}(a)(f) = d(f\circ\varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(a) = D_a(f\circ\varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big).$$

Se $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$ entón $x^j = r^j \circ \varphi \in \mathfrak{F}(U)$, onde o aberto U en M contén a p, así que lle podemos aplicar o vector tanxente $\theta_p^{\varphi}(a)$, $a = (a_1,\dots,a_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$\theta_p^{\varphi}(a)(x^i) = d(x^i\circ\varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(a) = dr^i\big(\varphi(p)\big)(a) \underset{r^i \text{ lineal}}{=} r^i(a) = a_i.$$

Se $\{ e_1, \ldots, e_m \}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^m$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$,

$$\theta_p^{\varphi}(e_i)(f) = D_i(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big).$$

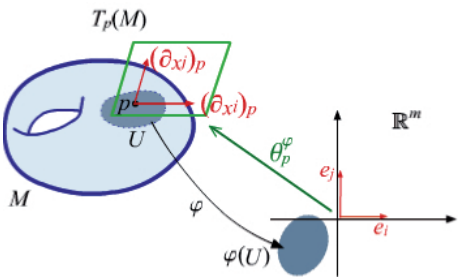
2.11 NOTACIÓN

Se $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ é un sistema de coordenadas en $p \in M$, denótase

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = D_i(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big),$$

e tamén

$$\begin{aligned} \big(\partial_{x^i}\big)_p = \theta_p^{\varphi}(e_i)\colon \mathfrak{F}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \big(\partial_{x^i}\big)_p(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p. \end{aligned}$$



2.12 Teorema

Para cada $p \in M$, se (U, φ) é unha carta de M, $p \in U$, a aplicación $\theta = \theta_p^{\varphi} \colon \mathbb{R}^m \to T_p(M)$, dada por $\theta(a)(f) = d(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(a)$, para cada $a \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathfrak{F}(M)$, é un isomorfismo de espazos vectoriais e o conxunto $\big\{\big(\partial_{x^1}\big)_p, \ldots, \big(\partial_{x^m}\big)_p\big\}$ é unha base de $T_p(M)$.

Lema. (Teorema de Taylor) *Sexa B un subconxunto aberto de $\mathbb{R}^m$ estrelado respecto de $c = (c_1, \ldots, c_m) \in B$ e sexa $F \colon B \to \mathbb{R}$ unha función de clase $r \geq 2$. Entón existen funcións $F_1, \ldots, F_m \colon B \to \mathbb{R}$ de clase $r-1$ tales que*

$$F(x) = F(c) + \sum_{i=1}^{m} (x_i - c_i) F_i(x), \quad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_m) \in B, F_i(c) = D_i F(c).$$

Basta definir

$$F_i(x) = \int_0^1 D_i F\big(c + t(x-c)\big)\, dt.$$

Hai unha proba deste teorema de Taylor no libro de Loring W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, onde aparece como "Lemma 1.4 (Taylor's theorem with remainder)".

Proba do Teorema 2.12.

Fixamos o punto $p \in M$ e a carta (U, φ) de M tal que $p \in U$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, e consideramos $\theta = \theta_p^{\varphi} \colon \mathbb{R}^m \to T_p(M)$.

θ é lineal: Se $a, b \in \mathbb{R}^m$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entón para cada $f \in \mathfrak{F}(M)$, tense

$$\begin{aligned} \theta(\lambda a + \mu b)(f) &= d(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(\lambda a + \mu b) \\ &= \lambda\, d(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(a) + \mu\, d(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(b) \\ &= \lambda\, \theta(a)(f) + \mu\, \theta(b)\,(f) = \big(\lambda\, \theta(a) + \mu\, \theta(b)\big)(f). \end{aligned}$$

Como consecuencia, se $a = (a_1, \ldots, a_m) \Longrightarrow \boxed{\theta(a) = \sum_{i=1}^m a_i \big(\partial_{x^i}\big)_p}$.

θ é inxectiva: Sexa $a=(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{R}^m$ tal que $\theta(a)=0$ e vexamos que $a=0$. Cada $x^i=r^i\circ\varphi\in\mathfrak{F}(U)$, e U é unha veciñanza aberta de p, con que se lle pode aplicar o vector tanxente $\theta(a)\in T_p(M)$. Para cada $i=1,\dots,m$, se $\theta(a)=0$ entón

$$0=\theta(a)(x^i)=d(x^i\circ\varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(a)=dr^i\big(\varphi(p)\big)(a)=r^i(a)=a_i \Longrightarrow a=0.$$

θ é sobrexectiva: Dado $v\in T_p(M)$ consideramos $\boxed{a_i=v(x^i)\in\mathbb{R}}$, para cada $i=1\dots,m$, e comprobaremos que $a=(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{R}^m$ é tal que $\theta(a)=v$, é dicir, que para cada $f\in\mathfrak{F}(M)$ tense que $\theta(a)(f)=v(f)$. Imos a utilizar o lema.

$$c=\varphi(p)\in\varphi(U)\underset{\text{abto}}{\subset}\mathbb{R}^m \Longrightarrow \exists\, B \text{ bóla aberta centrada en } c,\ B\subset\varphi(U).$$

O conxunto $V=\varphi^{-1}(B)$ é un aberto en M tal que $p\in V\subset U$, e dado $f\in\mathfrak{F}(M)$ consideramos a función C^∞

$$F=f\circ(\varphi_{|V})^{-1}\colon B=\varphi(V)\subset\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}.$$

Polo lema, existen funcións $F_1,\dots,F_m\colon B\to\mathbb{R}$ tamén C^∞, tales que se $x\in B$,

$$F(x)=F(c)+\sum_{i=1}^m(x_i-c_i)F_i(x),\ \ F_i(c)=D_iF(c)=D_i(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p.$$

As funcións $f_1,\dots,f_m$ definidas por $f_i=F_i\circ\varphi_{|V}\colon V\subset U\subset M\to\mathbb{R}$ son diferenciables C^∞, e para cada $z\in V$ tense $\varphi(z)=(x^1(z),\dots,x^m(z))$, e

$$f(z)=F(\varphi(z))=F(c)+\sum_{i=1}^m(x^i(z)-c_i)F_i(\varphi(z))=f(p)+\sum_{i=1}^m(x^i(z)-x^i(p))f_i(z),$$

isto é, $f_{|V}=F\circ\varphi_{|V}=\text{cte}_{f(p)}+\sum_{i=1}^m(x^i-\text{cte}_{x^i(p)})f_i\colon V\subset M\to\mathbb{R}$, logo

$$\begin{aligned}v(f)=v(f_{|V})&=v\big(\text{cte}_{f(p)}\big)+\sum_{i=1}^m v\big((x^i-\text{cte}_{x^i(p)})f_i\big)\\&=0+\sum_{i=1}^m\big((v(x^i)-0)f_i(p)+(x^i(p)-x^i(p))v(f_i)\big)\\&=\sum_{i=1}^m v(x^i)f_i(p)=\sum_{i=1}^m a_iF_i(c)=\sum_{i=1}^m a_i(\partial_{x^i})_p(f)\Longrightarrow v=\sum_{i=1}^m a_i\big(\partial_{x^i}\big)_p=\theta(a).\end{aligned}$$

■

No caso particular $M = \mathbb{R}^n$, $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (r^1, \ldots, r^n)$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tense o isomorfismo de espazos vectoriais

$$\begin{aligned} \theta_x = \theta_x^{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_x(\mathbb{R}^n) \\ a &\longmapsto \theta_x(a) \colon \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \\ & \qquad f \mapsto \theta_x(a)(f) = df(x)(a) = D_a f(x). \end{aligned}$$

2.13

$$\begin{aligned} \theta_x = \theta_x^{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_x(\mathbb{R}^n) \\ e_i &\longmapsto \left(\partial_{r^i}\right)_x \end{aligned}$$

$\left\{ \left(\partial_{r^1}\right)_x, \ldots, \left(\partial_{r^n}\right)_x \right\}$ é a base canónica de $T_x(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \left(\partial_{r^i}\right)_x \colon \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left(\partial_{r^i}\right)_x (f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r^i} \right)_x = D_i f(x). \end{aligned}$$

Se $n = 1$, e $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = (r)$ é a carta identidade de $\mathbb{R}$, temos a base canónica $\left\{ \left(\partial_r\right)_x \right\}$ de $T_x(\mathbb{R})$, e para cada $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$, é

$$\left(\partial_r\right)_x (f) = f'(x).$$

2.14 Propiedades

Sexa (U, φ) unha carta de M, $p \in U$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$. Verifícase:

(a) $\left(\partial_{x^i}\right)_p (x^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j, \\ 0 \text{ se } i \neq j. \end{cases}$

(b) Se $v \in T_p(M)$, entón $v = \sum_{i=1}^{m} v(x^i) \left(\partial_{x^i}\right)_p$.

2.15 Cuestión

Se M e N son variedades diferenciables de dimensións m e n, resp., $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable C^∞, $p \in M$, $q = f(p)$, e se $\alpha \in C_p(M)$ entón $f \circ \alpha \in C_q(N)$.

¿Que relación hai entre $\Delta_\alpha \in T_p(M)$ e $\Delta_{f\circ\alpha} \in T_q(N)$?

2.16 APLICACIÓN TANXENTE

Sexan M e N variedades diferenciables de dimensións m e n, resp., $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable C^∞, $p \in M$, $q = f(p)$.
A ***aplicación tanxente*** a f en p

$$f_{*p}\colon T_p(M) \to T_q(N)$$

está definida por

$$f_{*p}(v)(h) = v(h \circ f), \qquad v \in T_p(M),\ h \in \mathfrak{F}(N).$$

2.17

Se W é unha subvariedade aberta dunha variedade diferenciable M, $\boldsymbol{i}\colon W \to M$ é a inclusión e $p \in W$, entón $\boldsymbol{i}_{*p}\colon T_p(W) \to T_p(M)$ é o isomorfismo $\boldsymbol{\iota}\colon T_p(W) \to T_p(M)$.

2.18 Proposición

A aplicación tanxente a $f\colon M \to N$ *en* $p \in M$ *é unha aplicación lineal.*

A aplicación tanxente á identidade $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ *en* $p \in M$ *é a identidade* $\mathrm{id}_{T_p(M)}$.

Se $f\colon M \to N$ *e* $g\colon N \to L$ *son aplicacións diferenciables* C^∞ *entón* $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$ *para cada* $p \in M$ *(regra da cadea).*

Se $f\colon M \to N$ *é un difeomorfismo entón* f_{*p} *é un isomorfismo para todo* $p \in M$, *e* $(f^{-1})_{*f(p)} = (f_{*p})^{-1}$.

2.19 Proposición

Se unha aplicación diferenciable C^∞ $f\colon M \to N$ *é constante nunha veciñanza dun punto* $p \in M$ *entón* $f_{*p} = 0$.

2.20 (Interpretación de f_{*p} en termos dunha expresión local de f en p)

Sexan $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable C^∞, $p \in M$, $q = f(p)$, (U, φ) e (V, ψ) cartas de M e N en p e q, respectivamente, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$, $f(U) \subset V$.

Tense o diagrama conmutativo de aplicacións lineais

$$\begin{array}{ccccc} (\partial_{x^i})_p & T_p(M) & \xrightarrow{\quad f_{*p} \quad} & T_q(N) & (\partial_{y^j})_q \\ \uparrow & \theta_p^\varphi \uparrow \cong & & \cong \uparrow \theta_q^\psi & \uparrow \\ e_i & \mathbb{R}^m & \xrightarrow[d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))]{} & \mathbb{R}^n & e_j \end{array}$$

é dicir,

$$f_{*p}\big(\partial_{x^i}\big)_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial (y^j \circ f)}{\partial x^i} \right)_p \big(\partial_{y^j}\big)_q = \sum_{j=1}^{n} D_i(y^j \circ f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)\big(\partial_{y^j}\big)_q.$$

2.21 Definición (difeomorfismo local)

Unha aplicación diferenciable C^∞ $f\colon M \to N$ é un ***difeomorfismo local nun punto*** $p \in M$ se existe unha veciñanza aberta U de p en M e unha veciñanza aberta V de $f(p)$ en N tal que $f_{|U}\colon U \to V$ é un difeomorfismo.

$f\colon M \to N$ é un ***difeomorfismo local*** se é un difeomorfismo local en cada punto $p \in M$.

2.22 *Teorema da función inversa para variedades diferenciables*

Sexan M e N variedades diferenciables de dimensións m e n, resp., $f\colon M \to N$ aplicación diferenciable C^∞, $p \in M$, $q = f(p)$.
As seguintes condicións son equivalentes:

(i) f é un difeomorfismo local en p.

(ii) $f_{*p}\colon T_p(M) \to T_q(N)$ é un isomorfismo (logo $m = n$).

Proba

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\text{(i)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists U \underset{\text{abto}}{\subset} M,\ p \in U \\ \exists V \underset{\text{abto}}{\subset} N,\ q \in V \end{array} \right| f_{|U}\colon U \to V \text{ é un difeomorfismo.}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ U & \xrightarrow[f_{|U}]{\approx} & V \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} T_p(M) & \xrightarrow{f_{*p}} & T_q(N) \\ {\scriptstyle i_{*p}}\uparrow\cong & & \cong\uparrow{\scriptstyle j_{*q}} \\ T_p(U) & \xrightarrow[(f_{|U})_{*p}]{\cong} & T_q(V) \end{array} \Longrightarrow f_{*p} \text{ iso}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$f_{*p}\colon T_p(M) \to T_q(N)$ isomorfismo $\Longrightarrow m = \dim T_p(M) = \dim T_q(N) = n$.

Xa que $f\colon M \to N$ é diferenciable C^∞, dado o punto $p \in M$, $f(p) = q$,

$\exists\,(U,\varphi)$ carta de $M, p \in U$
$\exists\,(V,\psi)$ carta de $N, f(U) \subset V$

$\Big|\ F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ é C^∞.

Por 2.20, tense un diagrama conmutativo de aplicacións lineais, onde $x_0 = \varphi(p)$,

$$\begin{array}{ccc} T_p(M) & \xrightarrow{f_{*p}} & T_q(N) \\ \theta_p^{\varphi}\uparrow\cong & & \cong\uparrow\theta_q^{\psi} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow[d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))]{dF(x_0)} & \mathbb{R}^m \end{array} \Longrightarrow \det DF(x_0) \neq 0.$$

Polo teorema da función inversa para $\mathbb{R}^m$,

$\exists\,A$ aberto en $\mathbb{R}^m, x_0 = \varphi(p) \in A \subset \varphi(U)$
$\exists\,B$ aberto en $\mathbb{R}^m, F(x_0) = \psi(q) \in B \subset \psi(V)$

$\Big|\ F_{|A}\colon A \to B$ é un difeormorfismo C^∞,

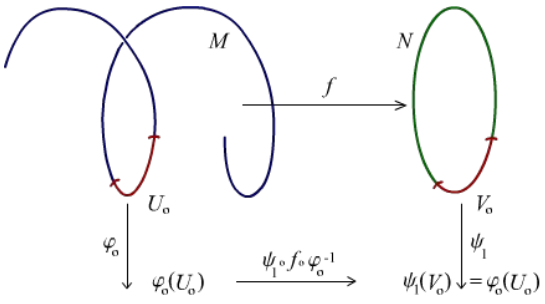
Se tomamos
$U_0 = \varphi^{-1}(A) \subset U, p \in U_0, \varphi_o = \varphi_{|U_0}$,
$V_0 = \psi^{-1}(B) \subset V, \psi_o = \psi_{|V_0}$,

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{f_{|U_0}} & V_0 \\ \varphi_o\downarrow & & \downarrow\psi_o \\ A & \xrightarrow[F_{|A}]{} & B \end{array} \Longrightarrow f_{|U_0}\colon U_0 \to V_0 \text{ é un difeomorfismo } C^\infty$$

■

Se $f\colon M \to N$ é un difeomorfismo local en $p \in M$ entón existe unha expresión local de f en p que é a identidade nun aberto euclidiano.

En efecto, no último diagrama conmutativo da proba anterior, basta considerar as cartas (U_0, φ_o) e (V_0, ψ_1), onde $\psi_1 = F_{|A}^{-1} \circ \psi_o$, e a correspondente expresión local de f é a identidade en $A = \varphi_o(U_0) = \psi_1(V_0)$.



2.23 Corolario

Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable C^∞ entón
f é un difeomorfismo local se, e só se, para cada punto $p \in M$,
$f_{*p}\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ é un isomorfismo.

2.24 Corolario

Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable C^∞ entón
f é un difeomorfismo se, e só se, f é bixectiva e
$f_{*p}\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ é un isomorfismo para todo $p \in M$.

3. Subvariedades regulares

3.1 Definición

Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable C^∞, $p \in M$, $q = f(p)$, o ***rango*** de f en p é

$$\operatorname{rang}_p(f) = \operatorname{rang}\big(f_{*p}\colon T_p(M) \to T_q(N)\big) = \dim f_{*p}(T_p(M)).$$

Se (U,φ) carta de M, $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$,
(V,ψ) carta de N, $\psi = (y^1,\dots,y^m)$, $f(U) \subset V$, tense

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f_{|U}} & V \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \varphi(U) & \xrightarrow[\psi\circ f\circ\varphi^{-1}]{} & \psi(V) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} (\partial_{x^i})_p & T_p(M) & \xrightarrow{\quad f_{*p} \quad} & T_q(N) & (\partial_{y^j})_q \\ \uparrow & {\scriptstyle\theta_p^\varphi}\uparrow\cong & & \cong\uparrow{\scriptstyle\theta_q^\psi} & \uparrow \\ e_i & \mathbb{R}^m & \xrightarrow[d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p))]{} & \mathbb{R}^n & e_j \end{array}$$

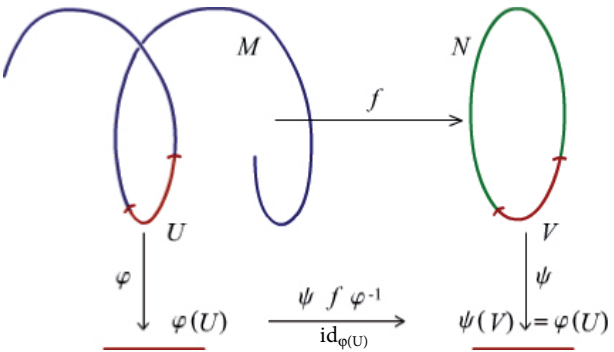
3.2

Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable C^∞, $p \in M$, $q = f(p)$, (U,φ) e (V,ψ) cartas de M e N en p e q, respectivamente, $f(U) \subset V$,

$$\operatorname{rang}_p(f) = \operatorname{rang} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})\,(\varphi(p))\,.$$

3.3 Nota

Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable C^∞, $p \in M$, entón f é un difeomorfismo local en p se, e só se, $\operatorname{rang}_p(f) = m = n$; equivalentemente, se, e só se, existe unha expresión local de f en p que é a identidade nun aberto de $\mathbb{R}^m$.



3.4 DEFINICIÓN (INMERSIÓN)

Sexa $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable C^∞ entre as variedades diferenciables M e N de dimensións m e n, resp., $p \in M$.

f é unha ***inmersión en*** p se f_{*p} é inxectiva, é dicir, $\operatorname{rang}_p(f) = m$.

Diremos que f é unha ***inmersión*** se é unha inmersión en cada punto de M,

f inmersión en $p :\iff f_{*p}$ é inxectiva $\iff \operatorname{rang}_p(f) = m \leq n$

$\iff$ existe unha expresión local de f en p da forma

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \psi(V) = \varphi(U) \times W \subset \mathbb{R}^n, \quad m \leq n, \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \overset{(n-m)}{\ldots}, 0), \\ & \quad \psi(q) = (\varphi(p), 0). \end{aligned}$$

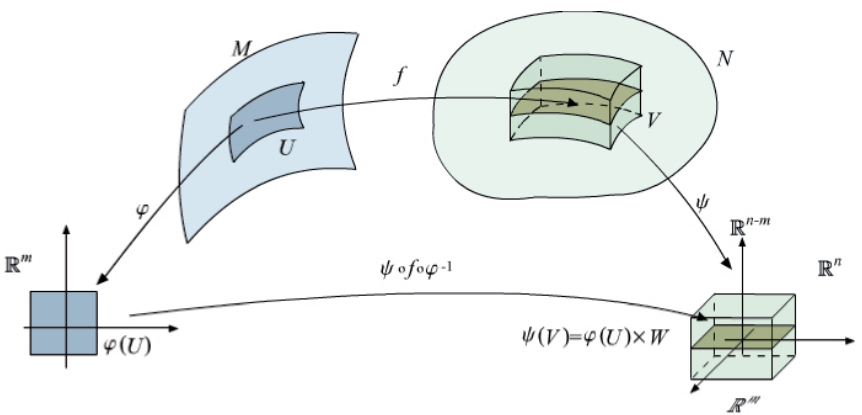
$\boxed{\Leftarrow}$ $\operatorname{rang} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = m \leq n.$

3.5 *Caracterización local das inmersións*

Unha aplicación diferenciable C^∞ $f\colon M \to N$ é é unha inmersión en $p \in M$ se, e só se, existe unha expresión local de f en p da forma

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \psi(V) = \varphi(U) \times W \subset \mathbb{R}^n, \ \ m \leq n, \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

$$0 \in W \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^{n-m}, \psi(q) = (\varphi(p), 0).$$



3.6 Definición (SUBMERSIÓN)

Sexa $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable C^∞ entre as variedades diferenciables M e N de dimensións m e n, resp., $p \in M$.

f é unha ***submersión en*** p se f_{*p} é sobrexectiva, é dicir, $\operatorname{rang}_p(f) = n$.

Dise que f é unha ***submersión*** se é unha submersión en cada punto de M.

f submersión en $p :\iff f_{*p}$ é sobrexectiva $\iff \operatorname{rang}_p(f) = n \leq m$

$\iff$ existe unha expresión local de f en p da forma

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) = \psi(V) \times W \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n, \ m \geq n, \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

$$\varphi(p) = (\psi(q), 0).$$

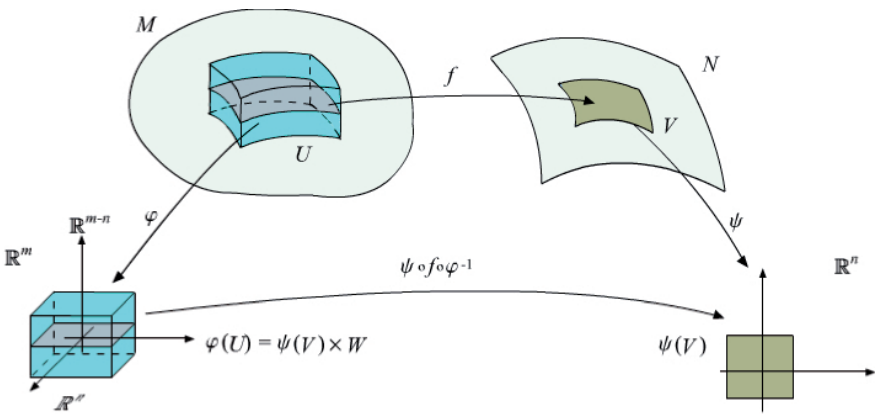
$\boxed{\Leftarrow}$ $\operatorname{rang} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} = n \leq m.$

3.7 *Caracterización local das submersións*

Unha aplicación diferenciable C^∞ $f\colon M \to N$ é é unha submersión en $p \in M$ se, e só se, existe unha expresión local de f en p da forma

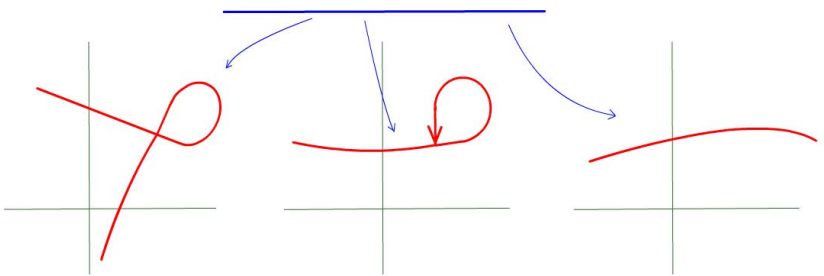
$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) = \psi(V) \times W \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n, \ m \geq n, \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

$$0 \in W \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^{m-n}, \varphi(p) = (\psi(q), 0).$$



3.8 DEFINICIÓN (EMBEBEMENTO REGULAR)

Un ***embebemento regular*** é unha inmersión $f: M \to N$ que tamén é un embebemento (aplicación inxectiva que define un homeomorfismo do espazo topolóxico M no subespazo topolóxico $f(M)$ de N).



3.9 Exercicio

Unha curva diferenciable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é unha inmersión se, e só se, $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I$.

3.10 Exemplos

1. $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, é unha inmersión non inxectiva.
2. $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dada por $\beta(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t))$, é unha inmersión inxectiva.
3. $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, é unha curva diferenciable inxectiva pero non é unha inmersión.

3.11 Proposición

Toda submersión $f\colon M \to N$ é unha aplicación aberta.

Proba

Sexa G un aberto en M. Tomamos $q \in f(G)$ e imos ver que existe unha veciñanza aberta de q contida en $f(G)$.

Sexa $p \in G$ tal que $f(p) = q$.

Como f é unha submersión en p, existe unha expresión local de f en p da forma

$$(x, y) \in \varphi(U) = \psi(V) \times W \subset \mathbb{R}^m \xmapsto{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} x \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^n,$$

así que se ten o diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad f_{|U} \quad} & V \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \varphi(U) = \psi(V) \times W & \xrightarrow[\psi \circ f \circ \varphi^{-1}]{\pi_1} & \psi(V) \end{array}$$

Logo $U \cap G$ é un aberto en M tal que $p \in U \cap G$, e

$$q \in f_{|U}(U \cap G) = (\psi^{-1} \circ \pi_1 \circ \varphi)(U \cap G) \underset{\text{abto}}{\subset} V \underset{\text{abto}}{\subset} N,$$

polo que ao ser $f_{|U}$ composición de aplicacións abertas tense que $f_{|U}(U \cap G)$ é unha veciñanza aberta de q en N e está contida en $f(G)$. ■

3.12 Proposición

Sexan M, N e L variedades diferenciables, $f\colon M \to N$ unha submersión sobrexectiva e $g\colon N \to L$ unha aplicación. Entón,

g é diferenciable C^r se, e só se, $g \circ f$ é diferenciable C^r.

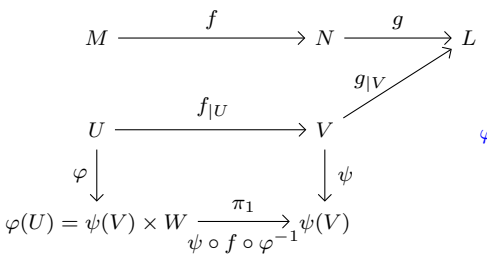
Proba

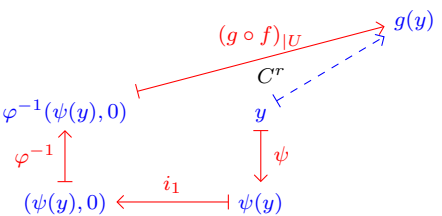
Supoñemos $g \circ f$ é diferenciable C^r e imos ver que tamén o é g nalgunha veciñanza aberta V de cada punto $q \in N$.

Se $q \in N$, dado que f é sobrexectiva podemos tomar $p \in M$ tal que $f(p) = q$.

Por ser f unha submersión en p, existe unha expresión local de f en p da forma

$$(x, y) \in \varphi(U) = \psi(V) \times W \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} x \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^n,$$





$q \in V$, e concluímos que g é diferenciable C^r en V porque

$$g_{|V} = (g \circ f)_{|U} \circ \varphi^{-1} \circ i_1 \circ \psi.$$

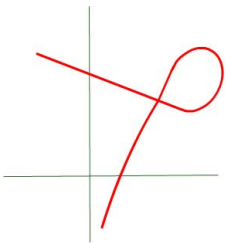
■

3.13 DEFINICIÓN (SUBVARIEDADES)

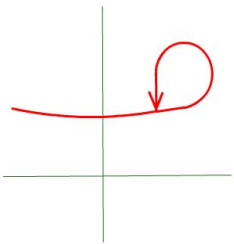
Se M e E son variedades diferenciables, $E \subset M$, dise que

(1) E é unha ***subvariedade inmersa*** de M (ou unha ***subvariedade*** de M) se a inclusión $\boldsymbol{i}\colon E \to M$ é unha inmersión;

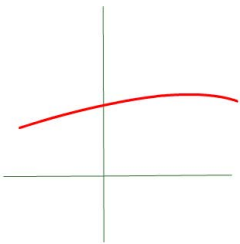
(2) E é unha ***subvariedade regular*** de M se E é un subespazo topolóxico de M e a inclusión $\boldsymbol{i}\colon E \to M$ é unha inmersión.



non é subvariedade



subvariedade inmersa pero non regular



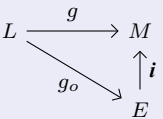
subvariedade regular

3.14 EXEMPLOS

1. Toda subvariedade aberta dunha variedade diferenciable M é unha subvariedade regular de M.
2. $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x| \} \subset \mathbb{R}^2$ é unha variedade diferenciable de dimensión 1 pero non é unha subvariedade de $\mathbb{R}^2$ (a inclusión $\boldsymbol{i}\colon E \to \mathbb{R}^2$ non é unha inmersión xa que nin é diferenciable C^1).
3. $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t^3, y = t^2;\ t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$ é unha variedade diferenciable de dimensión 1 pero non é unha subvariedade de $\mathbb{R}^2$ (a inclusión $\boldsymbol{i}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^2$ é diferenciable C^∞ pero non é unha inmersión no punto $(0, 0)$).
4. $H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = t;\ t \in \mathbb{R} \}$ é unha subvariedade regular de $\mathbb{R}^3$.
5. $\mathbb{S}^n$ é unha subvariedade regular de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.15 LEMA (de Factorización)

Sexa E unha subvariedade regular de M de dimensión k e $g\colon L \to M$ unha aplicación tal que $g(L) \subset E$. Sexa $g_0\colon L \to E$ dada por $g_0(x) = g(x)$ para cada $x \in L$. Entón



g_0 é diferenciable C^r se, e só se, g é diferenciable C^r.

PROBA

Supoñemos que g é diferenciable C^r, consideramos $z_o \in L$, e imos ver que existe unha expresión local de g_o en z_o que é C^r.

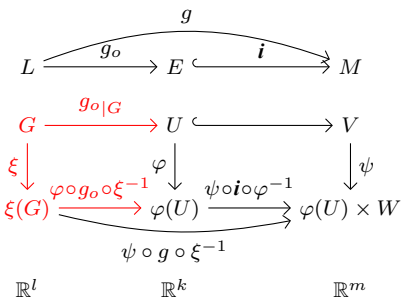
Sexa $p = g_o(z_o) = g(z_o) \in E \subset M$.

Por ser $\boldsymbol{i}\colon E \to M$ unha inmersión, existe unha expresión local de $\boldsymbol{i}$ en p da forma

$$x \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k \xmapsto{\psi \circ \boldsymbol{i} \circ \varphi^{-1}} (x, 0) \in \psi(V) = \varphi(U) \times W \subset \mathbb{R}^m,\ 0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-k}.$$

Como E é un subsepazo topolóxico de M e g é continua entón g_o tamén é continua, logo existe unha carta (G, ξ) de L, $z_0 \in G$, $g_o(G) \subset U$.

A expresión local $\psi \circ g \circ \xi^{-1}$ de g en z_o é C^r,



$$\psi g \xi^{-1} = \psi(\boldsymbol{i} g_o)\xi^{-1} = (\psi \boldsymbol{i} \varphi^{-1})(\varphi g_o \xi^{-1})\colon z \mapsto (\varphi g_o \xi^{-1}(z), 0) \text{ é } C^r \Longrightarrow \varphi \circ g_o \circ \xi^{-1} \text{ é } C^r.$$

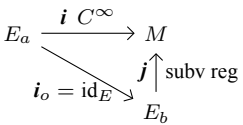
■

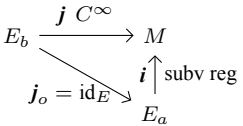
3.16 Corolario

Se M é unha variedade diferenciable e E é un subespazo topolóxico de M, existe ao sumo unha estrutura diferenciable en E coa que E é unha subvariedade regular de M.

Proba

Sexan $[\mathcal{A}]_\infty$ e $[\mathcal{B}]_\infty$ estruturas diferenciables sobre E tales que $E_a = (E, [\mathcal{A}]_\infty)$ e $E_b = (E, [\mathcal{B}]_\infty)$ son subvariedades regulares de M





$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$\mathrm{id}_E \colon E_a \to E_b$ é diferenciable C^∞, $\qquad$ $\mathrm{id}_E \colon E_b \to E_a$ é diferenciable C^∞,

$$\Longrightarrow \mathrm{id}_E \colon E_a \to E_b \text{ difeomorfismo} \Longrightarrow \mathcal{A} \sim \mathcal{B}$$

$$\Longrightarrow \qquad [\mathcal{A}]_\infty = [\mathcal{B}]_\infty \qquad \Longrightarrow E_a = E_b.$$

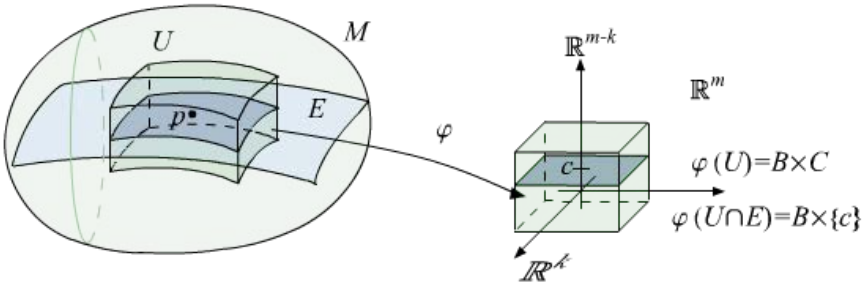
(*Véxase o exercicio* 1.35). ■

3.17 Definición (PROPIEDADE DE k-SUBVARIEDADE)

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m, $E \subset M$, e $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$.
E ten a ***propiedade de k-subvariedade*** de M se para cada punto $p \in E$, existe unha carta (U, φ) de M, $p \in U$, tal que

$$\varphi(U) = B \times C, \quad B \text{ aberto en } \mathbb{R}^k, \quad C \text{ aberto en } \mathbb{R}^{m-k},$$
$$\varphi(U \cap E) = B \times \{c\}, \quad c \in C.$$

Unha tal carta (U, φ) chámase carta de M adaptada a E.



3.18 PROPOSICIÓN

Se M é unha variedade diferenciable de dimensión m, $1 \leq k \leq m$, e $E \subset M$ ten a propiedade de k-subvariedade de M entón o subespazo E de M admite unha (única) estrutura diferenciable coa que E é unha subvariedade regular de M e $\dim E = k$.

PROBA

E é un espazo topolóxico Hausdorff (xa que supoñemos que é un subespazo de M).

E é un espazo topolóxico localmente euclidiano de dimensión k:

Sexa $p \in E$ e (U, φ) unha carta de M adaptada a E, $p \in U$, é dicir,

$$\varphi(U) = B \times C, \;\; B \text{ aberto en } \mathbb{R}^k, \;\; C \text{ aberto en } \mathbb{R}^{m-k},$$
$$\varphi(U \cap E) = B \times \{c\}, \quad c \in C.$$

Entón $U_o = U \cap E$ é aberto en E e poñemos

$$\varphi_o = \pi_1 \circ \varphi_{|U_o} : U_o \subset U \xrightarrow{\varphi} B \times C \xrightarrow{\pi_1} B \text{ é bixectiva,}$$

$$\varphi(q) = (\varphi_o(q), c) \quad \forall\, q \in U_o = U \cap E, \qquad \varphi_o^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x, c) \quad \forall\, x \in B,$$

$\varphi_o : U_o \to B \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^k$ é un homeomorfismo e (U_o, φ_o) é unha carta sobre E, $p \in U_o$.

Polo tanto, E é unha variedade topolóxica de dimensión k.

A partir das cartas de M adaptadas a E imos obter un atlas sobre E. Consideramos

$$\mathcal{C} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ carta de } M \text{ adaptada a } E\},$$
$$\boldsymbol{a} = \{(U_o, \varphi_o) \mid U_o = U \cap E, \varphi_o = \pi_1 \circ \varphi_{|U_o}, (U, \varphi) \in \mathcal{C}\}.$$

$$\mathcal{C} = \{(U,\varphi) \mid (U,\varphi) \text{ carta de } M \text{ adaptada a } E\},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{(U_o,\varphi_o) \mid U_o = U \cap E, \varphi_o = \pi_1 \circ \varphi_{|U_o}, (U,\varphi) \in \mathcal{C}\}.$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é un atlas diferenciable sobre E:

(a) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é un atlas sobre E, pois cada (U_o,φ_o) en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é unha carta sobre E, e cada punto $p \in E$ está nalgún U_o, logo

$$E = \bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{C}} U_o.$$

(b) Dúas cartas calquera (U_0,φ_o) e (V_o,ψ_o) en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ son compatibles, pois se $U_o \cap V_o \neq \emptyset$, e $\varphi(x) = (\varphi_o(x), c)$, $\psi_o \circ \varphi_o^{-1}$ é composición de aplicacións C^∞,

$$\psi_o \circ \varphi_o^{-1} \colon x \overset{\text{inc}}{\longmapsto} (x,c) \overset{\psi\circ\varphi^{-1}}{\longmapsto} (\psi\circ\varphi^{-1})(x,c) \overset{\pi_1}{\longmapsto} \pi_1\psi\varphi^{-1}(x,c) \text{ é } C^\infty.$$

A inclusión $\boldsymbol{i}\colon (E,[\boldsymbol{\mathcal{A}}]_\infty) \to M$ é unha inmersión (logo E será unha subvariedade regular de M xa que é subespazo topolóxico de M):

$\boldsymbol{i}\colon E \to M$ é diferenciable C^∞, xa que para cada $p \in E$ hai unha expresión local C^∞ de $\boldsymbol{i}$ en p da seguinte forma, onde $(U_0,\varphi_0) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, $U_o = U \cap E$, $(U,\varphi) \in \mathcal{C}$,

$$\varphi \circ \boldsymbol{i} \circ \varphi_o^{-1} \colon \varphi_o(U_o) = B \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^k \longrightarrow B \times C = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto (\varphi \circ \boldsymbol{i} \circ \varphi_o^{-1})(x) = \varphi\big(\varphi^{-1}(x,c)\big) = (x,c).$$

$\forall\, p \in E$, $\boldsymbol{i}_{*p}$ é inxectiva, xa que

$$\operatorname{rang}_p(\boldsymbol{i}) = \operatorname{rang} D(\varphi \circ \boldsymbol{i} \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(p)) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} = k. \qquad \blacksquare$$

3.19 DEFINICIÓNS (Puntos e valores REGULARES E CRÍTICOS)

Sexan M e N variedades diferenciables e $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable C^∞. Dise que

(a) $p \in M$ é un ***punto regular*** de f se f é unha submersión en p,

(b) $p \in M$ é un ***punto crítico*** de f se f non é unha submersión en p,

(c) $q \in N$ é un ***valor crítico*** de f se existe un punto crítico p de f tal que $f(p) = q$,

(d) $q \in N$ é un ***valor regular*** de f se cada punto $p \in M$, tal que $f(p) = q$, é un punto regular de f.

3.20 DEFINICIÓN (SUBESPAZO TANXENTE A UNHA SUBVARIEDADE)

Sexa M unha variedade diferenciable, E unha subvariedade regular de M e $\boldsymbol{i}\colon E \to M$ a inclusión.

$$\forall\, p \in E,\ \ \boldsymbol{i}_{*p}\big(T_p(E)\big) \text{ é o } \textbf{\textit{subespazo de}}\ T_p(M)\ \textbf{\textit{tanxente}} \text{ a } E.$$

3.21 TEOREMA (do Valor Regular)

Sexan M e N variedades diferenciables de dimensións m e n, $m > n$, e $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable C^∞. Se $q \in f(M)$ é un valor regular de f e $E = f^{-1}(q)$, entón:

(1) *E é unha subvariedade regular de M de dimensión $m - n$.*

(2) *Para cada $p \in E$, o subespazo de $T_p(M)$ tanxente a E é* $\ker(f_{*p})$.

PROBA

(1) Se $p \in E$ entón p é un punto regular de M, é dicir, f é unha sumersión en p, logo

$$\exists \begin{array}{l} (U,\varphi) \text{ carta de } M, p \in U \\ (V,\psi) \text{ carta de } N, q \in V \\ W \text{ aberto en } \mathbb{R}^{m-n}, 0 \in W \end{array} \left| \begin{array}{l} \varphi(U) = \psi(V) \times W,\ \varphi(p) = (\psi(q), 0) \\ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) = \psi(V) \times W \ \to \ \psi(V) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y) \ \mapsto \ x \end{array} \right.$$

$$\text{Se } C = \psi(V) \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^n,\ c = \psi(q) \in C,\ B = W \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^{m-n} \Longrightarrow \varphi(U \cap E) = \{c\} \times B,$$

e se $h\colon (x,y) \in C \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to (y,x) \in B \times C \subset \mathbb{R}^m$, e $\bar{\varphi} = h \circ \varphi$ entón

$$\bar{\varphi}(U) = B \times C,\ B \text{ aberto en } \mathbb{R}^{m-n},\ C \text{ aberto en } \mathbb{R}^n,\ \bar{\varphi}(U \cap E) = B \times \{c\},$$

isto é, $(U, \bar{\varphi})$ é unha carta de M adaptada a E, $p \in U$. Polo tanto, E é unha subvariedade regular de M de dimensión $m - n$ (pola proposición 3.18).

(2) Dado que E é uhna subvariedade de M, a inclusión $\boldsymbol{i}\colon E \to M$ é unha inmersión. Logo, para cada $p \in E$, a aplicación lineal $\boldsymbol{i}_{*p} : T_p(E) \to T_p(M)$ é inxectiva.E por ser f unha submersión en p, $f_{*p} : T_p(M) \to T_q(N)$ é sobrexctiva. Ademais,

$$f \circ i\colon E \to N \text{ constante} \Longrightarrow 0 = (f \circ i)_{*p} = f_{*p} \circ i_{*p} \Longrightarrow i_{*p} T_p(E) \subset \ker f_{*p},$$

$$\dim i_{*p} T_p(E) = \dim T_p(E) = m - n,$$

$$\dim \ker f_{*p} = \dim T_p(M) - \dim \operatorname{Im} f_{*p} = m - n,$$

e, como consecuencia,

$$i_{*p} T_p(E) = \ker f_{*p} \qquad \blacksquare$$

3.22 EXEMPLO

Sexa $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 + \dots x_{n+1}^2$. Cada $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é un valor regular de f e, se $q > 0$, $\mathbb{S}^n(\sqrt{q}) = f^{-1}(q)$ é unha subvariedade regular de $\mathbb{R}^{n+1}$.

En particular $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n(1)$ e, para cada $p \in \mathbb{S}^n$, o subespazo de $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ tanxente a $\mathbb{S}^n$ é

$$\boldsymbol{i}_{*p}\big(T_p(\mathbb{S}^n)\big) = \ker(f_{*p}) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \big(\partial_{r^i}\big)_p \in T_p(\mathbb{R}^{n+1}) \;\middle|\; \langle p, a\rangle = 0 \right\}.$$

$$\begin{array}{ccccc}
v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \big(\partial_{r^i}\big)_p & & \big(\partial_{r^i}\big)_p & & \big(\partial_r\big)_1 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
a = (a_1, \dots, a_{n+1}) & & e_i & & e_1 = 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
T_p(\mathbb{R}^{n+1}) & \xrightarrow{\quad f_{*p} \quad} & T_1(\mathbb{R}) \\
\theta_p \uparrow & & \uparrow \theta_1 \\
\mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow[\quad df(p) \quad]{} & \mathbb{R}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \big(\partial_{r^i}\big)_p & \vdash\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\rightarrow & 2\langle p, a\rangle \big(\partial_r\big)_1 \\
\downarrow & & \uparrow \\
a = (a_1, \dots, a_{n+1}) & \longmapsto & df(p)(a) = 2\sum_{i=1}^{n+1} p_i a_i
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_{*p}\big(T_p(\mathbb{S}^n)\big) = \ker(f_{*p}) &= \left\{ v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \big(\partial_{r^i}\big)_p \in T_p(\mathbb{R}^{n+1}) \;\middle|\; 2\sum_{i=1}^{n+1} p_i a_i = 0 \right\} \\
&= \Big\{ v \in T_p(\mathbb{R}^{n+1}) \;\Big|\; \big\langle \big(p_1, \dots, p_{n+1}\big), \big(v(r^1), \dots, v(r^{n+1})\big)\big\rangle = 0 \Big\}.
\end{aligned}$$

4. Campos de vectores

4.1 (FIBRADO TANXENTE)

O ***fibrado tanxente*** dunha variedade diferenciable de dimensión m é a unión disxunta

$$T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p(M).$$

A *proxección* do fibrado tanxente é a aplicación

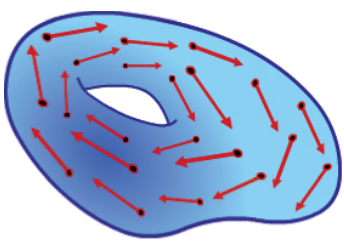
$$\begin{aligned} \pi \colon T(M) &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \pi(v) = p \text{ se } v \in T_p(M). \end{aligned}$$

4.2 DEFINICIÓN (CAMPO DE VECTORES)

Un ***campo de vectores*** sobre unha variedade diferenciable M é unha correspondencia que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tanxente a M en p, isto é, unha aplicación

$$\begin{aligned} X \colon M &\longrightarrow T(M) \\ p &\longmapsto X_p \in T_p(M), \end{aligned}$$

é dicir, X é unha sección (da proxección) do fibrado tanxente.



4.3 (Operacións con campos de vectores)

Se X e Y son campos de vectores sobre M, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $h\colon M \to \mathbb{R}$ é unha función, defínense os campos de vectores

$$X+Y,\ \lambda X,\ hX\colon M \longrightarrow T(M),$$

por

$$(X+Y)_p := X_p + Y_p\,, \quad (\lambda X)_p := \lambda X_p\,, \quad (hX)_p := h(p)X_p\,.$$

4.4 (*Expresión local dun campo de vectores*)

Sexa (U,φ) unha carta de M, $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$.
Para $i = 1,\dots,m$, temos os *campos coordenados* sobre U

$$\begin{array}{rcl} \partial_{x^i}\colon U & \longrightarrow & T(U) \subset T(M) \\ p & \longmapsto & \left(\partial_{x^i}\right)_p \in T_p(U) \equiv T_p(M)\,. \end{array}$$

Se X é un campo de vectores sobre M, para cada $p \in U$ pódese escribir

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i(p)\left(\partial_{x^i}\right)_p, \qquad \boxed{\lambda^i(p) = X_p(x^i)}\,,$$

o que define as funcións $\lambda^1,\dots,\lambda^m\colon U \to \mathbb{R}$, que se chaman as ***compoñentes*** de X en (U,φ), e diremos que

$$\boxed{X_{|U} = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda^i\, \partial_{x^i}}$$

é a ***expresión local*** de X en (U,φ).

4.5 Proposición

Se X é un campo de vectores sobre unha variedade diferenciable M, as seguintes condicións son equivalentes:

(i) *Para todo punto $p \in M$ existe unha carta (U, φ) de M, $p \in U$, tal que as compoñentes de X en (U, φ) son funcións C^r (continuas se $r = 0$, e diferenciables C^r se $1 \leq r \leq \infty$).*

(ii) *As compoñentes de X en toda carta de M son funcións C^r.*

Proba

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sexa (V, ψ) unha carta de M, $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$, tal que $X_{|V} = \sum_{j=1}^m \mu^j \, \partial_{y^j}$, e imos ver que cada $\mu^j : V \to \mathbb{R}$ é unha fución C^r nunha veciñanza de cada un dos seus puntos.

Dado $p_0 \in V$, por (i), $\exists \, (U, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ carta de M, $p_0 \in U$, tal que se $X_{|U} = \sum_{i=1}^m \lambda^i \, \partial_{x^i}$ entón cada $\lambda^i : U \to \mathbb{R}$ é unha función C^r.
Para cada $p \in U \cap V$,

$$X_p = \sum_{i=1}^m \lambda^i(p) \big(\partial_{x^i}\big)_p = \sum_{i=1}^m \lambda^i(p) \Big(\sum_{j=1}^m \big(\partial_{x^i}\big)_p (y^j) \big(\partial_{y^j}\big)_p \Big) = \sum_{j=1}^m \Big(\sum_{i=1}^m \lambda^i(p) \Big(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big)_p \Big) \big(\partial_{y^j}\big)_p,$$

$$X_p = \sum_{j=1}^m \mu^j(p) \big(\partial_{y^j}\big)_p,$$

e polo tanto

$$\mu^j{}_{|U \cap V} = \sum_{i=1}^m \lambda^i{}_{|U \cap V} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} : U \cap V \to \mathbb{R}$$

é unha suma de produtos de funcións C^r e funcións diferenciables C^∞ na veciñanza aberta $U \cap V \subset V$ de $p_0 \in V$, polo que concluímos que μ^j é unha función C^r.

(ii) $\Rightarrow$ (i) é trivial. ■

4.6 DEFINICIÓN (CAMPO DE VECTORES DIFERENCIABLE)

Un campo de vectores X sobre M é C^r $(0 \leq r \leq \infty)$ se para cada punto $p \in M$, existe unha carta (U, φ), $p \in U$, tal que as compoñentes de X en (U, φ) son funcións C^r (continuas se $r = 0$, e diferenciables C^r se $1 \leq r \leq \infty$).

Se X é C^0 dise que X é un ***campo de vectores continuo***.

Se X é C^∞ diremos que X é un ***campo de vectores diferenciable***.

Se (U, φ) é unha carta dunha variedade diferenciable M, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, os campos coordenados ∂_{x^i} son campos de vectores diferenciables sobre a subvariedade aberta U de M.

4.7 ($\mathfrak{X}(M)$)

O conxunto de tódolos campos de vectores diferenciables sobre unha variedade diferenciable M denotarase $\mathfrak{X}(M)$.

O campo de vectores $0\colon M \to T(M)$, que asigna a cada $p \in M$ o vector nulo de $T_p(M)$, é un campo de vectores diferenciable.

$\mathfrak{X}(M)$ ten estrutura de espazo vectorial real e de $\mathfrak{F}(M)$-módulo.

4.8 (Un campo de vectores actuando sobre unha función)

Se X é un campo de vectores sobre M entón, para cada $f \in \mathfrak{F}(M)$, defínese a función ("derivada direccional de f segundo o campo X")

$$\begin{aligned} Xf\colon M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (Xf)(p) := X_p(f). \end{aligned}$$

Se (U, φ) é unha carta de M e $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, entón para cada $i = 1, \ldots, m$, e para cada función $f \in \mathfrak{F}(U)$, tense a función

$$\partial_{x^i} f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto (\partial_{x^i} f)(p) := \big(\partial_{x^i}\big)_p(f) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)_p = D_i(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big),$$

e

$$\partial_{x^i} f = \frac{\partial f}{\partial x^i} = D_i(f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \in \mathfrak{F}(U).$$

4.9 Proposición

Se X é un campo de vectores sobre unha variedade diferenciable M, as seguintes condicións son equivalentes:

(i) *X é un campo de vectores diferenciable,*

(ii) $\forall\, f\colon M \to \mathbb{R},\ \big[f \in \mathfrak{F}(M) \Longrightarrow Xf \in \mathfrak{F}(M)\big]$.

Proba

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sexa $p_0 \in M$ e (U,φ) é unha carta de M, $p_0 \in U$; se a expresión local de $X \in \mathfrak{X}(M)$ en (U,φ) é $X_{|U} = \sum_{i=1}^m \lambda^i\, \partial_{x^i}$ entón as compoñentes λ^i de X en (U,φ) son funcións diferenciables C^∞. Ademais, $(Xf)_{|U}\colon U \to \mathbb{R}$ está dada por

$$(Xf)(p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^m \lambda^i(p)\, \big(\partial_{x^i}\big)_p(f) = \sum_{i=1}^m \lambda^i(p)\, \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{i=1}^m \lambda^i\, \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p),$$

logo $(Xf)_{|U} = \sum_{i=1}^m \lambda^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ é diferenciable C^∞, e polo tanto tamén Xf, ao selo nunha veciñanza aberta U do punto dado p_0 de M, así que $Xf \in \mathfrak{F}(M)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Tomamos unha carta (U,φ) de M, e sexa $X_{|U} = \sum_{i=1}^m \lambda^i \partial_{x^i}$ a expresión local de X en (U,φ), onde

$$\lambda^i\colon p \in U \to \lambda^i(p) = X_p(x^i), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

e debemos ver que cada λ^i é diferenciable C^∞. Para isto basta ver que para todo punto $p_0 \in U$, existe unha veciñanza aberta V de p_0 contida en U, tal que $\lambda^i{}_{|V}$ é diferenciable C^∞. Pois ben, como $x^i\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciable C^∞, pola propiedade de existencia de extensións locais de funcións diferenciables,

$$\exists\, \underset{\text{abto}}{V \subset M}, p_0 \in V \subset U, \exists\, g^i \in \mathfrak{F}(M) \,\big|\, {x^i}_{|V} = {g^i}_{|V}$$

$$\Longrightarrow \lambda^i(p) = X_p(x^i) = X_p(g^i) = (Xg^i)(p)\ \forall\, p \in V$$

$$\underset{g^i \in \mathfrak{F}(M)}{\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow}} {\lambda^i}_{|V} = (Xg^i)_{|V} \text{ é diferenciable } C^\infty, \text{ xa que } Xg^i \in \mathfrak{F}(M).$$

■

4.10

Cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ define unha aplicación

$$\begin{aligned} \delta_X \colon \mathfrak{F}(M) &\longrightarrow \mathfrak{F}(M) \\ f &\longmapsto \delta_X(f) := Xf, \end{aligned}$$

e satisfai as propiedades:

(a) $\delta_X(f+g) = \delta_X(f) + \delta_X(g), \quad \delta_X(\lambda f) = \lambda \delta_X(f),$

(b) $\delta_X(fg) = \delta_X(f)g + f\delta_X(g).$

4.11 Definición (DERIVACIÓNS)

Se M é unha variedade diferenciable, unha ***derivación*** de $\mathfrak{F}(M)$ é unha aplicación

$$\mathrm{D} \colon \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

que satisfai as seguintes condicións:

(a) $\mathrm{D}(f+g) = \mathrm{D}(f) + \mathrm{D}(g), \quad \mathrm{D}(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{D}(f),$ (*linearidade*)

(b) $\mathrm{D}(fg) = \mathrm{D}(f)g + f\, \mathrm{D}(g).$ (*regra do produto*)

4.12 TEOREMA (*Campos de vectores e derivacións*)

Se X é un campo de vectores diferenciable sobre M entón

$$\delta_X \colon \mathfrak{F}(M) \longmapsto \mathfrak{F}(M)$$

é unha derivación de $\mathfrak{F}(M)$, e para cada derivación D en $\mathfrak{F}(M)$ existe un único campo de vectores diferenciable X sobre M tal que $\delta_X = \mathrm{D}$.

PROBA

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ entón δ_X é unha derivación de $\mathfrak{F}(M)$ (4.10), e dada unha derivación $\mathrm{D} \colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ basta definir

$$\begin{aligned} X \colon M &\longrightarrow T(M) \\ p &\longmapsto X_p \colon \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad f \mapsto X_p(f) := \mathrm{D}(f)(p), \end{aligned}$$

e comprobar que $X_p \in T_p(M)$ para cada $p \in M$. Pola equivalencia da condición de campo de vectores diferenciable nunha proposición anterior (4.9) tense que X é un campo de vectores diferenciable, xa que

$$f \in \mathfrak{F}(M) \Longrightarrow Xf = \mathrm{D}(f) \in \mathfrak{F}(M).$$

A unicidade tamén é inmediata, xa que se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son tales que $\delta_X = \mathrm{D} = \delta_Y$ entón, para cada $p \in M$ e para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$,

$$X_p(f) = \delta_X(f)(p) = \mathrm{D}(f)(p) = \delta_Y(f)(p) = Y_p(f). \qquad \blacksquare$$

4.13 Exercicio

O conxunto $\mathcal{D}(M)$ de tódalas derivacións de $\mathfrak{F}(M)$ ten unha estrutura de espazo vectorial real e de $\mathfrak{F}(M)$-módulo, e a aplicación

$$\begin{aligned} \delta\colon \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{D}(M) \\ X &\longmapsto \delta_X \end{aligned}$$

é un isomorfismo de espazos vectoriais e de $\mathfrak{F}(M)$-módulos.

4.14 (As dúas interpretacións de campos de vectores diferenciables)

Un campo de vectores diferenciable sobre unha variedade diferenciable M interpretarase indistintamene ou como unha sección da proxección do fibrado tanxente $X\colon M \to T(M)$ (coa propiedade de diferenciabilidade) ou ben como unha aplicación $X\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ que sexa unha derivación.

A relación entre as dúas interpretacións:

sección $X\colon M \to T(M)$, derivación $X\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$

$$X_p(f) = (Xf)(p) = X(f)(p), \qquad X \in \mathfrak{X}(M),\ f \in \mathfrak{F}(M),\ p \in M.$$

4.15 DEFINICIÓN (PRODUTO CORCHETE ou CORCHETE DE LIE)

Se X e Y son campos de vectores diferenciables sobre unha variedade diferenciable M, o ***produto corchete*** ou ***corchete de Lie*** de X e Y é o campo de vectores definido por

$$\begin{array}{rccl} [X,Y]\colon \mathfrak{F}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ f & \longmapsto & X(Yf) - Y(Xf)\,, \end{array}$$

que é unha derivación en $\mathfrak{F}(M)$. O espazo vectorial real $\mathfrak{X}(M)$, coa operación

$$\begin{array}{rccl} [\ ,\ ]\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) & \longmapsto & [X,Y]\,, \end{array}$$

é unha ***álxebra de Lie*** sobre $\mathbb{R}$, xa que

(1) $[\ ,\ ]$ é $\mathbb{R}$-bilineal,

(2) $[X,Y] = -[Y,X]$ (anticonmutatividade),

(3) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (identidade de Jacobi).

4.16 Exercicio

$$[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0\,,\ \forall\, i,j = 1,\ldots,m.$$

4.17 Exercicio

Sexa M unha variedade diferenciable e $p \in M$.

(a) Se W é unha veciñanza aberta de p, e $Z \in \mathfrak{X}(W)$, entón existe unha veciñanza aberta V de p, $V \subset W$, e existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_{|V} = Z_{|V}$.

(b) Se $v \in T_p(M)$, existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$.

4.18 EXEMPLOS

1. Se $M = U$ é aberto en $\mathbb{R}^n$, e $\varphi = \mathrm{id}_U = (r^1, \ldots, r^n)$ é o sistema de coordenadas identidade, cada $X \in \mathfrak{X}(U)$ ten unha expresión

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \, \partial_{r^i}, \quad \lambda^i \in \mathfrak{F}(U),\ i = 1, \ldots, n,$$

onde, como unha derivación en $\mathfrak{F}(U)$, cada campo coordenado ∂_{r^i} é

$$\begin{aligned} \partial_{r^i} = \frac{\partial}{\partial r^i} \colon \mathfrak{F}(U) &\longrightarrow \mathfrak{F}(U) \\ f &\longmapsto \partial_{r^i} f = \frac{\partial f}{\partial r^i} = D_i f \,. \end{aligned}$$

Un campo de vectores X sobre U define e está definido por unha aplicación

$$\begin{aligned} \Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n) \colon U \subset \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x)) \end{aligned}$$

$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \, \partial_{r^i}$ é un campo de vectores $C^r \iff \lambda^i$ é $C^r \ \forall\, i = 1, \ldots, n$

$\iff \Lambda$ é C^r.

4.18 Exemplos

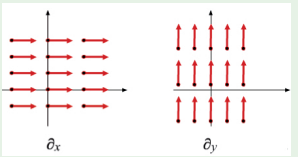
2. Se $M = \mathbb{R}$, e $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = (r)$, o campo de vectores coordenado ∂_r, como sección do fibrado tanxente $T(\mathbb{R})$ é

$$\begin{array}{rccl} \partial_r \colon \mathbb{R} & \longrightarrow & T(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \big(\partial_r\big)_t \colon f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}) \mapsto f'(t) \in \mathbb{R}, \end{array}$$

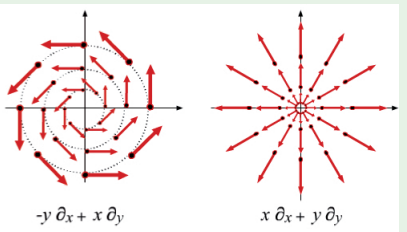
e como derivación en $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ é

$$\begin{array}{rccl} \partial_r = \dfrac{\partial}{\partial r} \colon \mathfrak{F}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \partial_r f = f' \,. \end{array}$$

3. Campos coordenados sobre $M = \mathbb{R}^2$, onde $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = (r^1, r^2) = (x, y)$,



Cada campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^2$ exprésase como $X = \lambda\,\partial_x + \mu\,\partial_y$, onde $\lambda, \mu \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



4.19 Definición

Sexa M unha variedade diferenciable, E unha subvariedade de M e $\boldsymbol{i}\colon E \to M$ a inclusión. Un campo de vectores X sobre M é ***tanxente*** a E se $X_p \in \boldsymbol{i}_{*p}\big(T_p(E)\big)$ para todo punto $p \in E$.

Un campo de vectores X sobre M tanxente a E define o campo de vectores $Z = X_{|E}$ ***restrición*** de X a E por

$$\begin{aligned} Z\colon E &\longrightarrow T(E) \\ p &\longmapsto Z_p = (\boldsymbol{i}_{*p})^{-1}(X_p) \in T_p(E)\,. \end{aligned}$$

4.20 Exercicio

Se X é un campo de vectores diferenciable sobre M tanxente a unha subvariedade E de M entón $Z = X_{|E}$ é un campo de vectores diferenciable sobre E.

Se M é unha variedade diferenciable de dimensión m, $f\colon M \to \mathbb{R}$ é unha aplicación diferenciable C^∞, e $q \in f(M) \subset \mathbb{R}$ é un valor regular de f, entón $E = f^{-1}(q)$ é unha subvariedade regular de M de dimensión $m-1$ (polo teorema do valor regular) e, se $\boldsymbol{i}\colon E \to M$ é a inclusión, o subespazo de $T_p(M)$ tanxente a E é $\boldsymbol{i}_{*p}(T_p(E)) = \ker f_{*p}$.

Polo tanto, se X é un campo de vectores diferenciable sobre M,

$$\begin{aligned} X \text{ é tanxente a } E &\iff X_p \in \ker f_{*p} \ \ \forall\, p \in E \\ &\iff f_{*p}(X_p) = X_p(f)\big(\partial_r\big)_q = 0 \ \ \forall\, p \in E \\ &\iff X_p(f) = 0 \ \ \forall\, p \in E \\ &\iff (Xf)_{|E} = 0. \end{aligned}$$

4.21 EXEMPLO (Campos de vectores tanxentes á esfera $\mathbb{S}^n$)

$\mathbb{S}^n$ es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^{n+1}$ que se pode obter como a imaxe inversa do valor regular $1 \in \mathbb{R}$ da aplicación $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2$, é dicir, $f = \sum_{j=1}^{n+1} (r^j)^2$.
Se $X = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i\, \partial_{r^i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad (\lambda^i \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^{n+1}),\ i = 1, \dots, n+1)$,

$$\begin{aligned} X \text{ é tanxente a } \mathbb{S}^n &\iff (Xf)_{|\mathbb{S}^n} = 0 \\ &\iff \sum_{j=1}^{n+1} (r^j \lambda^j)_{|\mathbb{S}^n} = 0. \end{aligned}$$

Supoñamos $n = 2k-1$ se n é impar e $n = 2k$ se n é par. Entón

$$X = -r^2 \partial_{r^1} + r^1 \partial_{r^2} - r^4 \partial_{r^3} + r^3 \partial_{r^4} + \cdots - r^{2k} \partial_{r^{2k-1}} + r^{2k-1} \partial_{r^{2k}}$$

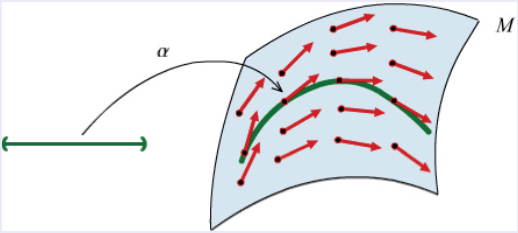
é un exemplo de campo de vectores diferenciable sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ tanxente a $\mathbb{S}^n$. Se $n = 2k-1$ entón $X_{|\mathbb{S}^n}$ é un campo de vectores non nulo en tódolos puntos da esfera.

4.22 Definición

Sexa M unha variedade diferenciable e $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Unha curva diferenciable $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to M$ é unha ***curva integral*** de X se

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}, \ \ \forall\, t \in I.$$



Unha curva integral dun campo de vectores.

4.23 (Ecuación diferencial das curvas integrais dun campo de vectores)

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m, (U,φ) unha carta de M, $\varphi=(x^1,\dots,x^m)$. Sexa X un campo de vectores diferenciable sobre M, e

$$X_{|U}=\sum_{i=1}^{m}\lambda^i\,\partial_{x^i}$$

a súa expresión local en (U,φ). As compoñentes $\lambda^1,\dots,\lambda^m\colon U\to\mathbb{R}$ de X en (U,φ) definen a función

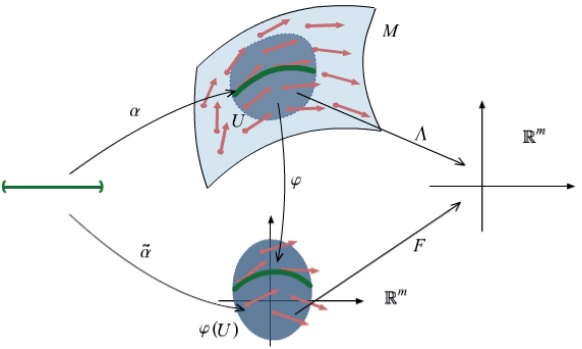
$$\Lambda=(\lambda^1,\dots,\lambda^m)\colon U\subset M\to\mathbb{R}^m,$$

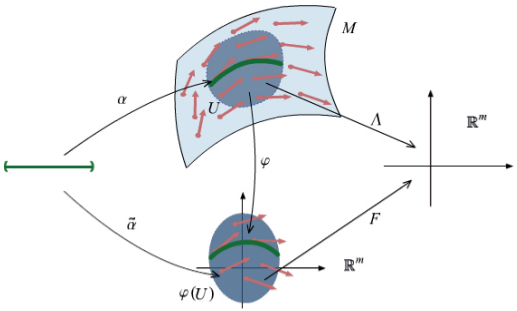
e polo tanto

$$F=\Lambda\circ\varphi^{-1}=(\lambda^1\circ\varphi^{-1},\dots,\lambda^m\circ\varphi^{-1})\colon \varphi(U)\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m.$$

Sexa $\alpha\colon I\to M$ unha curva diferenciable en M tal que $\alpha(I)\subset U$, $\tilde{\alpha}^i=x^i\circ\alpha$ $(i=1,\dots,m)$ as súas compoñentes na carta (U,φ), e

$$\tilde{\alpha}=\varphi\circ\alpha=(\tilde{\alpha}^1,\dots,\tilde{\alpha}^m)\colon I\to\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m.$$





4.23 (Ecuación diferencial das curvas integrais dun campo de vectores)

Entón, dadas $\alpha\colon I \to U \subset M$ e $\tilde{\alpha} = \varphi \circ \alpha = (\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^m)\colon I \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$,

$$
\begin{aligned}
\alpha \text{ é curva integral de } X &\iff \dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}\ \forall\, t \in I \\
&\iff \big(\tilde{\alpha}^i\big)'(t) = \lambda^i \alpha(t)\ \ \forall\, t \in I,\ \forall\, i = 1, \ldots, m, \\
&\iff \tilde{\alpha}\,'(t) = \Lambda\, \alpha(t)\ \ \forall\, t \in I, \\
&\iff \tilde{\alpha}\,'(t) = F\tilde{\alpha}(t)\ \ \forall\, t \in I, \\
&\iff \tilde{\alpha} = \varphi \circ \alpha \text{ é solución da ecuación diferencial } x' = F(x) \\
&\iff \tilde{\alpha} \text{ é solución do sistema de ecuacións diferenciais}
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1' &= (\lambda^1 \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) \\
&\cdots \qquad\qquad \cdots \\
x_m' &= (\lambda^m \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m)
\end{aligned}
\right\}
$$

e diremos que $x' = F(x)$ é a ecuación diferencial das curvas integrais de $X_{|U} = \sum_{i=1}^m \lambda^i\, \partial_{x^i}$ onde $F = \Lambda \circ \varphi^{-1}$, $\Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^m)$.

Se $\tilde{\alpha}\colon I \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ é unha solución da ecuación diferencial $x' = F(x)$ entón $\alpha = \varphi^{-1} \circ \tilde{\alpha}\colon I \to U \subset M$ é unha curva integral de X.

4.24 Exercicio

Calcular as curvas integrais do campo de vectores

$$X = \partial_x + y\,\partial_y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2).$$

4.25

Se X é un campo de vectores diferenciable sobre M e $p \in M$ entón, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, e existe unha curva integral $\alpha\colon I \to M$ de X tal que $\alpha(t_0) = p$.
Ademais, se dúas curvas integrais de X coinciden nun punto da intersección dos seus dominios entón coinciden en dita intersección.

4.26

Sexa M unha variedade diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$, e $J_X(p)$ a unión de tódolos dominios das curvas integrais de X con punto inicial $p \in M$. En $J_X(p)$ está definida a ***curva integral maximal*** de X con punto inicial p,

$$\alpha_p\colon J_X(p) \longrightarrow M,$$

O conxunto $W = \{\, (t,p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in J_X(p) \,\} = \cup_{p\in M} J_X(p) \times \{\, p \,\}$ é un aberto en $\mathbb{R} \times M$, e a aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon W \subset \mathbb{R} \times M & \longrightarrow & M \\ (t,p) & \longmapsto & \Phi(t,p) = \alpha_p(t) \end{array}$$

é diferenciable C^∞ e verifica as propiedades

(1) $\Phi(0,p) = p\,,$

(2) $\Phi(t,\Phi(s,p)) = \Phi(t+s,p)\,.$

A aplicación $\Phi\colon W \to M$ é o ***fluxo maximal*** de X, e dise que X é un campo de vectores ***completo*** se $J_X(p) = \mathbb{R}$ para cada $p \in M$, ou, equivalentemente, se $W = \mathbb{R} \times M$.

4.27 Exercicio

Sexa M unha variedade diferenciable e $\Phi\colon \mathbb{R}\times M\to M$ unha aplicación diferenciable C^∞ que satisfai as condicións

(1) $\Phi(0,p)=p\,,\forall\, p\in M,$

(2) $\Phi(t,\Phi(s,p))=\Phi(t+s,p)\,,\forall\, p\in M,\forall\, t,s\in\mathbb{R}.$

Para cada $t\in\mathbb{R}$, a aplicación $\Phi_t\colon p\in M\to\Phi_t(p)=\Phi(t,p)\in M$, é unha *transformación* de M (isto é, un difeomorfismo de M en M).
$\{\,\Phi_t\colon M\to M\,\}$, coa composición de aplicacions, é un grupo abeliano.
Φ (ou $\{\,\Phi_t\,\}_{t\in\mathbb{R}}$) chámase *grupo uniparamétrico de transformacións* de M.
Para cada $p\in M$, a aplicación $\Phi^p\colon t\in\mathbb{R}\to\Phi^p(t)=\Phi(t,p)\in M$, é unha curva diferenciable con punto inicial p, a *órbita* de p para a acción Φ.
Φ é o *fluxo* do campo de vectores diferenciable $X\colon M\to T(M)$ dado por

$$X_p=\big(\Phi^p\big)_{*0}\big(\partial_r\big)_0=\dot\Phi^p(0)\,,$$

e dise que X é un *xerador infinitesimal* de Φ.

5. Formas diferenciais

5.1 DEFINICIÓN (FORMAS LINEAIS)

Sexa V un espazo vectorial real de dimensión finita $m \geq 1$, e $k \in \mathbb{N}$.

Unha aplicación $\omega\colon V \times \overset{(k}{\cdots} \times V \to \mathbb{R}$ é unha ***forma lineal de grao*** k (ou k-***forma lineal***) sobre V se é

(1) multilineal: $\omega(v_1, \cdots, \lambda\, v_i + \mu\, v_i', \cdots, v_k) =$
$\lambda\, \omega(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + \mu\, \omega\,(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_k)$,
$\forall\ v_1, \ldots, v_i, v_i', \ldots, v_k \in V, (i = 1, \ldots, n),\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(2) antisimétrica: $\omega\big(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}\big) = \varepsilon(\sigma)\, \omega(v_1, \ldots, v_k)$,
$\forall\ v_1, \ldots, v_k \in V,\ \ \forall\ \sigma \in \mathfrak{S}_k$.

O conxunto das formas lineais de grao k sobre V

$$\bigwedge^k(V) = \Big\{\, \omega\colon V \times \overset{(k}{\cdots} \times V \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ é multilineal e antisimétrica} \,\Big\}$$

ten unha estrutura natural de espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$.

En particular, $\bigwedge^1(V) = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = V^*$.

Poñemos $\bigwedge^0(V) = \mathbb{R}$.

5.2 LEMA

Sexa $\{u_1, \cdots, u_m\}$ *unha base do espazo vectorial* V *e* $\omega, \eta \in \bigwedge^k(V)$. *Se* $1 \leq k \leq m$ *entón*

$$\omega = \eta \iff \omega(u_{i_1}, \cdots, u_{i_k}) = \eta(u_{i_1}, \cdots, u_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m.$$

É dicir, cada $\omega \in \bigwedge^k(V)$ *está determinada polos valores sobre as* k*-tuplas* $(u_{i_1}, \cdots, u_{i_k})$ *tales que* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$. *Se* $k > m$ *entón* $\bigwedge^k(V) = \{0\}$

PROBA

Se $v_1, \ldots, v_k \in V$, tense que $v_i = \sum_{j=1}^m a_i^j u_j$, $a_i^j \in \mathbb{R}$, e polo tanto

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, \ldots, v_k) &= \omega\Big(\sum_{j_1=1}^n a_1^{j_1}\, u_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k=1}^n a_k^{j_k}\, u_{j_k}\Big) \\
&= \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_k \leq n} a_1^{j_1} \ldots a_k^{j_k}\, \omega(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{i_1, \ldots, i_k\}}} \varepsilon(\sigma)\, a_1^{\sigma(i_i)} \ldots a_k^{\sigma(i_k)} \Big)\, \omega(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}),
\end{aligned}$$

onde $\mathfrak{S}_{\{i_1, \ldots, i_k\}}$ é o grupo de permutacións de $\{i_1, \ldots, i_k\}$ para $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Análogamente,

$$\eta(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{i_1, \ldots, i_k\}}} \varepsilon(\sigma)\, a_1^{\sigma(i_i)} \ldots a_k^{\sigma(i_k)} \Big)\, \eta(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}),$$

o que proba a equivalencia.

Se $k > m$ entón $\bigwedge^k(V) = 0$ xa que, ao estar cada $\omega \in \bigwedge^k(V)$ determinada pola súa actuación sobre unha k-tupla de elementos da base, e como algún deles debe repetirse, pola antisimetría de ω séguese que $\omega = 0$. ■

5.3 (PRODUTO EXTERIOR DE FORMAS LINEAIS)

Se $\omega \in \bigwedge^r(V)$, $\eta \in \bigwedge^s(V)$, o ***produto exterior*** $\omega \wedge \eta \in \bigwedge^{r+s}(V)$ está definido por

$$
\begin{aligned}
&(\omega \wedge \eta)(v_1, \cdots, v_{r+s}) \\
&\quad = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\, \omega\big(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(r)}\big)\, \eta\big(v_{\sigma(r+1)}, \cdots, v_{\sigma(r+s)}\big) \\
&\quad = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r,s)} \varepsilon(\sigma)\, \omega\big(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(r)}\big)\, \eta\big(v_{\sigma(r+1)}, \cdots, v_{\sigma(r+s)}\big),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\mathfrak{S}(r,s) = \left\{ \sigma \in \mathfrak{S}_{r+s} \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \leq \sigma(1) < \cdots < \sigma(r) \leq r+s, \\ 1 \leq \sigma(r+1) < \cdots < \sigma(r+s) \leq r+s \end{array} \right\}.
$$

O produto exterior

$$
\begin{array}{ccc}
\bigwedge^r(V) \times \bigwedge^s(V) & \longrightarrow & \bigwedge^{r+s}(V) \\
(\omega, \eta) & \longmapsto & \omega \wedge \eta
\end{array}
$$

é bilineal:

$$
(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, \qquad \omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2,
$$

$$
(\lambda\, \omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda\, \eta) = \lambda\, (\omega \wedge \eta), \quad \lambda \in \mathbb{R}
$$

onde $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^r(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \bigwedge^s(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ademais,

$$
\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega, \qquad \omega \in \bigwedge^r(V),\ \eta \in \bigwedge^s(V),
$$

$$
(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta), \qquad \omega \in \bigwedge^r(V),\ \eta \in \bigwedge^s(V),\ \theta \in \bigwedge^k(V),
$$

e escribiremos $\omega \wedge \eta \wedge \theta := (\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

Se $\omega \in \bigwedge^r(V),\ \eta \in \bigwedge^s(V),\ \theta \in \bigwedge^l(V)$,

$$
\begin{aligned}
&(\omega \wedge \eta \wedge \theta)(v_1, \cdots, v_{r+s+l}) \\
&= \frac{1}{r!s!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s+l}} \varepsilon(\sigma)\, \omega\big(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(r)}\big)\, \eta\big(v_{\sigma(r+1)}, \cdots, v_{\sigma(r+s)}\big)\, \theta\big(v_{\sigma(r+s+1)}, \cdots, v_{\sigma(r+s+l)}\big).
\end{aligned}
$$

En particular, se $\omega^1, \ldots, \omega^k \in V^*$,

$$
\begin{aligned}
(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_1, \cdots, v_k) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\, \omega^1\big(v_{\sigma(1)}\big) \cdots \omega^k\big(v_{\sigma(k)}\big) \\
&= \begin{vmatrix} \omega^1(v_1) & \ldots & \omega^1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^k(v_1) & \ldots & \omega^k(v_k) \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Se $\tau \in \mathfrak{S}_k$ entón $\omega^{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge \omega^{\tau(k)} = \varepsilon(\tau)\, \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k$.

5.4 Proposición

Sexa $\{ u_1, \ldots, u_m \}$ *unha base do espazo vectorial real* V *e* $\{ \alpha^1, \ldots, \alpha^m \}$ *a súa base dual.*
Se $1 \leq k \leq m$ *entón* $B = \{ \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m \}$ *é unha base de* $\bigwedge^k(V)$ *e polo tanto* $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{m}{k}$.

Proba

B é un conxunto de xeradores: Se $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ e $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$,

$$(\alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k})(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k, \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Polo tanto, se $\omega \in \bigwedge^k(V)$ e poñemos $a_{j_1 \ldots j_k} = \omega(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})$, entón

$$\Big(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k}\, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} \Big)(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k} = \omega(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}),$$

e polo lema visto antes (5.2),

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k}\, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k}.$$

B é un conxunto linealmente independente: Consideramos unha familia de números reais $a_{j_1 \ldots j_k} \in \mathbb{R}$, con $1 \leq j_1 < \cdots j_k \leq m$, tales que

$$\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k}\, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} = 0.$$

Entón, se $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$,

$$0 = \Big(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k}\, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} \Big)(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k},$$

logo $a_{i_1 \cdots i_k} = 0$. ■

5.5 Corolario

Se $\omega \in \bigwedge^k(V)$, $1 \leq k \leq m$, *entón*

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k} \, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k},$$

onde $a_{j_1 \cdots j_k} = \omega(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})$.

5.6

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m.

Para cada $p \in M$, o ***espazo cotanxente*** a M en p é

$$T_p^*(M) = \{\, \alpha \colon T_p(M) \to \mathbb{R} \mid \alpha \text{ lineal} \,\},$$

e os seus elementos son os ***vectores cotanxentes*** a M en p.

O ***fibrado cotanxente*** de M é o conxunto

$$T^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_p^*(M),$$

e o ***fibrado exterior*** de grao k sobre M é

$$\bigwedge^k T(M) = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k \big(T_p(M)\big).$$

En particular, $\bigwedge^1 T(M) = T^*(M)$.

Os elementos de $\bigwedge^k \big(T_p(M)\big)$ son as k-formas lineais sobre $T_p(M)$, e tamén diremos que son k-***formas lineais*** en p. En particular, as 1-formas lineais en p son os vectores cotanxentes a M en p.

A proxección do fibrado exterior de grao k é

$$\begin{array}{rccl} \hat{\pi} \colon \bigwedge^k T(M) & \longrightarrow & M \\ \alpha & \longmapsto & \hat{\pi}(\alpha) = p \text{ se } \alpha \in \bigwedge^k \big(T_p(M)\big). \end{array}$$

5.7 Definición (formas de grao k)

Unha ***forma de grao*** k (ou k-***forma***) sobre unha variedade diferenciable M é unha aplicación que asigna a cada punto $p \in M$ unha k-forma lineal en p, é dicir, unha sección (da proxección) do fibrado exterior de grao k:

$$\begin{aligned} \omega\colon M &\longrightarrow \bigwedge^k T(M) \\ p &\longmapsto \omega_p \in \bigwedge^k \big(T_p(M)\big)\,. \end{aligned}$$

En particular, unha 1-forma ou *campo de covectores* sobre M é unha sección (da proxección) do fibrado cotanxente,

$$\begin{aligned} \omega\colon M &\longrightarrow T^*(M) \\ p &\longmapsto \omega_p\colon T_p(M) \to \mathbb{R} \text{ lineal}\,. \end{aligned}$$

5.8 Definición (diferencial dunha función nun punto)

Sexa M unha variedade diferenciable. Se $p \in M$ e $f \in \mathfrak{F}(M)$ (ou ben f é unha función diferenciable C^∞ definida soamente nunha veciñanza aberta de p), a ***diferencial de*** f ***en*** p é a aplicación

$$\begin{aligned} (df)_p\colon T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto (df)_p(v) := v(f), \end{aligned}$$

que é lineal, é dicir $(df)_p$ é unha 1-forma lineal en p.

Se $f \in \mathfrak{F}(M)$, a ***diferencial*** de f é a 1-forma sobre M dada por

$$\begin{aligned} df\colon M &\longrightarrow T^*(M) \\ p &\longmapsto (df)_p \in T_p^*(M). \end{aligned}$$

Se $\{u_1, \ldots, u_m\}$ é unha base dun espazo vectorial real V e $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\}$ a súa base dual, entón $B = \{\alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m\}$ é unha base de $\bigwedge^k(V)$. Se $\omega \in \bigwedge^k(V)$,

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k}\, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k}, \quad a_{j_1 \cdots j_k} = \omega(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k}).$$

5.9 (Expresión local dunha k-forma)

Sexa (U, φ) unha carta dunha variedade diferenciable M de dimensión m, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$. Se $p \in U$,

$$\begin{aligned} (dx^i)_p \colon T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto (dx^i)_p(v) = v(x^i). \end{aligned}$$

$\{(dx^1)_p, \ldots, (dx^m)_p\}$ é unha base de $T_p^*(M)$: é a base dual da base $\{(\partial_{x^1})_p, \ldots, (\partial_{x^m})_p\}$ de $T_p(M)$.

Entón $\{(dx^{j_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{j_k})_p \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m\}$ é unha base de $\bigwedge^k\big(T_p(M)\big)$.

Se ω é unha k-forma sobre M, para cada $p \in U$, $\omega_p \in \bigwedge^k\big(T_p(M)\big)$ pódese escribir

$$\omega_p = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k}(p)\, (dx^{j_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{j_k})_p,$$

onde $$a_{j_1 \cdots j_k}(p) = \omega_p\big((\partial_{x^{j^1}})_p, \ldots, (\partial_{x^{j^k}})_p\big),$$

e as funcións $a_{j_1 \cdots j_k} \colon U \to \mathbb{R}$ chámanse ***compoñentes*** de ω en (U, φ).

A expresión formal

$$\omega_{|U} = \textstyle\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$

dise que é a ***expresión local*** da k-forma ω en (U, φ).

5.10 Exercicio

Se ω é unha k-forma sobre unha variedade diferenciable M, as seguintes condicións son equivalentes:

(i) Para cada punto $p \in M$, existe unha carta (U, φ), $p \in U$, tal que as compoñentes de ω en (U, φ) son funcións C^r, $(0 \leq r \leq \infty)$.

(ii) As compoñentes de ω en toda carta de M son funcións C^r.

5.11 DEFINICIÓN (FORMAS DIFERENCIAIS)

Unha k-forma ω sobre unha variedade diferenciable M é C^r $(0 \leq r \leq \infty)$ se para cada punto $p \in M$, existe unha carta (U, φ), $p \in U$, tal que as compoñentes de ω en (U, φ) son funcións C^r (continuas se $r = 0$, e diferenciables C^r se $r \geq 1$).

Se ω é C^0, diremos que ω é unha k-***forma continua***.

Se ω é C^∞ diremos que ω é unha k-***forma diferencial*** (ou ***forma diferencial de grao*** k) sobre M.

O conxunto das formas diferenciais de grao k sobre M denotarase $\boldsymbol{E}^k(M)$.

5.12

Sexan $\omega, \eta \in \boldsymbol{E}^k(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $h \in \mathfrak{F}(M)$. Defínense as k-formas

$$\omega + \eta,\ \lambda\,\omega,\ h\,\omega \colon M \to \bigwedge^k T(M),$$

por $(\omega + \eta)_p := \omega_p + \eta_p\,, \quad (\lambda\,\omega)_p := \lambda\,\omega_p\,, \quad (h\,\omega)_p := h(p)\,\omega_p\,.$

$\boldsymbol{E}^k(M)$ ten estrutura de espazo vectorial real e de $\mathfrak{F}(M)$-módulo.

$\boldsymbol{E}^k(M) = 0\ \ \forall\, k > m$. Poñemos $\boldsymbol{E}^0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

Se $\omega \in \boldsymbol{E}^r(M)$, $\eta \in \boldsymbol{E}^s(M)$, $r, s \geq 1$, o ***produto exterior*** de ω e η é

$$\begin{array}{rcl} \omega \wedge \eta \colon M & \longrightarrow & \bigwedge^{r+s} T(M) \\ p & \longmapsto & (\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p \in \bigwedge^{r+s}\big(T_p(M)\big)\,. \end{array}$$

Se $\omega \in \boldsymbol{E}^k(M)$, $h, g \in \boldsymbol{E}^0(M)$, $\quad h \wedge \omega := h\,\omega =: \omega \wedge h\,,\ h \wedge g := h\,g\,.$

Para cada $r, s \geq 0$, a ***operación produto exterior***

$$(\omega, \eta) \in \boldsymbol{E}^r(M) \times \boldsymbol{E}^s(M) \longrightarrow \omega \wedge \eta \in \boldsymbol{E}^{r+s}(M)$$

é $\mathfrak{F}(M)$-bilineal e $\forall\, \omega \in \boldsymbol{E}^r(M), \eta \in \boldsymbol{E}^s(M), \theta \in \boldsymbol{E}^l(M)$, $r, s, l \geq 0$,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega,\ \ (\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta).$$

5.13 (Outra interpretación das formas diferenciais)

$\forall\ k \geq 1$, unha k-forma diferencial $\omega\colon M \to \bigwedge^k T(M)$, define a aplicación $\mathfrak{F}(M)$-multilineal e antisimétrica

$$\begin{aligned}\omega\colon \mathfrak{X}(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{F}(M)\\ (X_1, \ldots, X_k) &\longmapsto \omega(X_1, \ldots, X_k) : p \mapsto \omega_p\left((X_1)_p, \ldots, (X_k)_p\right).\end{aligned}$$

Reciprocamente, cada aplicación $\mathfrak{F}(M)$-multilineal antisimétrica $\omega\colon \mathfrak{X}(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ define $\omega\colon M \longrightarrow \bigwedge^k T(M)$ por

$$\omega_p(v_1, \ldots, v_k) := \omega(X_1, \ldots, X_k)(p),$$

onde $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ son tales que $(X_1)_p = v_1, \ldots, (X_k)_p = v_k$.

En particular ($k = 1$) unha 1-forma diferencial sobre M interpretarase como

$$\omega\colon M \to T^*(M) \quad \text{ou} \quad \omega\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M),$$

relacionadas por $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p),\ \ X \in \mathfrak{X}(M),\ p \in M$.
O produto exterior de formas diferenciais $\omega \in \boldsymbol{E}^r(M)$, $\eta \in \boldsymbol{E}^s(M)$ da lugar a

$$\begin{aligned}&(\omega \wedge \eta)(X_1, \ldots, X_{r+s})\\ &\quad = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\, \omega\big(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}\big)\, \eta\big(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)}\big)\\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r,s)} \varepsilon(\sigma)\, \omega\big(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}\big)\, \eta\big(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)}\big),\end{aligned}$$

onde $X_1, \ldots, X_{r+s} \in \mathfrak{X}(M)$. Se $\omega^1, \ldots, \omega^k \in \boldsymbol{E}^1(M)$ e $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(X_1, \cdots, X_k) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \omega^1(X_{\sigma(1)}) \cdots \omega^k(X_{\sigma(n)}\\ &= \det\Big(\omega^i(X_j)\Big) : p \mapsto \det\ \Big(\omega_p^i(X_j)_p\Big).\end{aligned}$$

5.14 (As diferenciais das funcións)

Se $f \in \mathfrak{F}(M)$, a diferencial de f,

$$df\colon p \in M \to (df)_p \in T_p^*(M) \subset T^*(M) = \bigwedge^1 T(M)$$

é unha 1-forma sobre M, e se (U,φ) é unha carta de M, $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$, a expresión local de df en (U,φ) é

$$(df)_{|U} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j,$$

as súas compoñentes

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = D_j(f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

son funcións diferenciables C^∞ e df é unha 1-forma diferencial sobre M.

Por outra parte, a diferencial de $f \in \mathfrak{F}(M)$ pode considerarse como a aplicación $\mathfrak{F}(M)$-lineal

$$\begin{aligned} df\colon \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{F}(M) \\ X &\longmapsto (df)(X) = Xf\,. \end{aligned}$$

A aplicación $d\colon f \in \mathfrak{F}(M) = \boldsymbol{E}^0(M) \longrightarrow df \in \boldsymbol{E}^1(M)$ verifica:

(1) $d(\lambda f + \mu g) = \lambda\, df + \mu\, dg\,, \quad \forall\, f,g \in \mathfrak{F}(M),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\,,$

(2) $d(f\wedge g) = d(fg) = g\, df + f\, dg = df\wedge g + f\wedge dg\,, \quad \forall\, f,g \in \mathfrak{F}(M).$

5.15 TEOREMA (*Existencia e unicidade da diferencial exterior*)

Dada unha variedade diferenciable M, existe unha única aplicación (a ***diferencial exterior*** en M)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\colon \boldsymbol{E}^k(M) &\longrightarrow \boldsymbol{E}^{k+1}(M) \\ \omega &\longmapsto \mathrm{d}\,\omega \end{aligned}$$

(para cada $k \geq 0$) que satisfai as seguintes condicións

(1) Se $f \in \boldsymbol{E}^0(M)$, $\mathrm{d}f$ é a diferencial da función f,

(2) $\mathrm{d}(\lambda\,\omega + \mu\,\eta) = \lambda\,\mathrm{d}\omega + \mu\,\mathrm{d}\eta, \quad \omega, \eta \in \boldsymbol{E}^k(M),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, (d é $\mathbb{R}$-lineal),

(3) $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge \mathrm{d}\eta, \quad \omega \in \boldsymbol{E}^r(M), \eta \in \boldsymbol{E}^s(M)$, (d é unha antiderivación)

(4) $\mathrm{d}^2 = 0$, é dicir, $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$ para cada $\omega \in \boldsymbol{E}^k(M)$.

Se $\omega \in \boldsymbol{E}^k(M)$, dise que $\mathrm{d}\omega$ é a ***diferencial exterior*** de ω.

Observación: Se para cada $k \geq 0$ existe unha aplicación $\mathrm{d}\colon \boldsymbol{E}^k(M) \to \boldsymbol{E}^{k+1}(M)$ que satisfai as propiedades (1) a (4), entón:

(a) se $\omega^1, \ldots, \omega^k \in \boldsymbol{E}^1(M)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = (\mathrm{d}\omega^1) \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k - \omega^1 \wedge (\mathrm{d}\omega^2) \wedge \cdots \wedge \omega^k \\ + \cdots + (-1)^{k-1} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}\omega^k), \end{aligned}$$

(b) se $f, g^1, \ldots, g^k \in \mathfrak{F}(M)$,

$$\omega = f\,dg^1 \wedge \cdots \wedge dg^k \Longrightarrow \mathrm{d}\omega = df \wedge dg^1 \wedge \cdots \wedge dg^k.$$

PROBA

(I) Supoñemos que a variedade diferenciable é un aberto coordenado U, con sistema de coordenadas $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ e imos definir a diferencial exterior en U para cada $k \geq 0$, que denotamos $\mathrm{d}^U \colon \boldsymbol{E}^k(U) \to \boldsymbol{E}^{k+1}(U)$:

$$k = 0, \quad \omega = f \in \mathfrak{F}(U), \ \mathrm{d}^U(\omega) := df,$$

$$k > m, \quad \omega = 0, \qquad \mathrm{d}^U(\omega) := 0,$$

$$1 \leq k \leq m, \quad \omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k},$$

(linearidade e (b)) $$\mathrm{d}^U(\omega) := \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} da_{j_1 \cdots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}.$$

(II) Para calquera variedade diferenciable M, se $\omega \in \boldsymbol{E}^k(M)$, defínese

$$\mathrm{d}\omega \colon M \longrightarrow \textstyle\bigwedge^{k+1} T(M)$$
$$p \longmapsto (\mathrm{d}\omega)_p = (\mathrm{d}^U(\omega_{|U}))_p \in \textstyle\bigwedge^{k+1}\big(T_p(M)\big) \text{ se } U \text{ aberto coordenado, } p \in U.$$

Proba de $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$**.** Sexa (U, φ) unha carta de M, $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$.

1º Se $\omega \in \boldsymbol{E}^1(M)$ e $\omega_{|U} = \sum_{j=1}^m a_j\, dx^j$, $a_j \in \mathfrak{F}(U)$, entón

$$\mathrm{d}\omega_{|U} = \sum_{j=1}^m da_j \wedge dx^j = \sum_j \Big(\sum_i \frac{\partial a_j}{\partial x^i} dx^i\Big) \wedge dx^j = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\Big) dx^i \wedge dx^j.$$

2º Se $\omega = df$, $f \in \mathfrak{F}(M)$, entón $(df)_{|U} = \sum_{j=1}^m (\partial f / x^j)\, dx^j$, logo

$$d(df)_{|U} = \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial(\partial f / x^j)}{\partial x^i} - \frac{\partial(\partial f / x_i)}{\partial x^j}\Big) dx^i \wedge dx^j = 0.$$

3º $\omega \in \boldsymbol{E}^k(M) \Longrightarrow \omega_{|U} = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$

$$\Longrightarrow (\mathrm{d}\omega)_{|U} = \textstyle\sum_{j_1 < \cdots < j_k} da_{j_1 \cdots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \overset{\text{(b),2º}}{\Longrightarrow} \mathrm{d}((\mathrm{d}\omega)_{|U}) = 0.$$

■

5.16 Corolario

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m e (U, φ) unha carta de M, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$.

Se ω é unha k-forma diferencial sobre M e a expresión local de ω na carta (U, φ) é $\omega_{|U} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$, entón

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega)_{|U} &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} da_{j_1 \cdots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_{j_1 \cdots j_k}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\,.\end{aligned}$$

En particular, se $\omega \in \boldsymbol{E}^1(M)$ e $\omega_{|U} = \sum_{j=1}^{m} a_j\, dx^j$, $a_j \in \mathfrak{F}(U)$, entón

$$(\mathrm{d}\omega)_{|U} = \sum_{j=1}^{m} da_j \wedge dx^j.$$

5.17 Definición

Se ω é unha k-forma diferencial sobre M,

ω é unha ***forma pechada*** se $\mathrm{d}\omega = 0$,

ω é unha ***forma exacta*** se existe unha forma diferencial η de grao $k-1$ tal que $\omega = \mathrm{d}\eta$.

Toda forma diferencial exacta é pechada.

5.18 Lema (de Poincaré)

Sexa U un aberto en $\mathbb{R}^n$ estrelado respecto dun punto (existe un punto $x_0 \in U$ tal que para cada $x \in U$, o segmento $L[x_0, x]$ está contido en U).

Para $k \geq 1$, se $\omega \in \boldsymbol{E}^k(U)$ é unha forma pechada entón é exacta.

5.19 Exemplo

Sexan U un aberto en $\mathbb{R}^3$, $f \in \mathfrak{F}(U)$ e $X = \lambda\,\partial_x + \mu\,\partial_y + \nu\,\partial_z \in \mathfrak{X}(U)$.

$$\mathsf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\partial_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\partial_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\partial_z \in \mathfrak{X}(U)\,,$$

$$\mathsf{rot}\, X = \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right)\partial_x + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right)\partial_y + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\partial_z \in \mathfrak{X}(U)\,,$$

$$\mathsf{div}\, X = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \in \mathfrak{F}(U)\,.$$

Consideramos as aplicacións α, β e $\star$,

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{E}^1(U) & \xleftarrow{\alpha} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\beta} & \boldsymbol{E}^2(U)\,, & \qquad \mathfrak{F}(U) = \boldsymbol{E}^0(U) & \xrightarrow{\star} & \boldsymbol{E}^3(U) \\ \alpha_X & \longmapsto & X & \longmapsto & \beta_X & f & \longmapsto & f\,dx \wedge dy \wedge dz \end{array}$$

onde

$$\alpha_X = \lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz \in \boldsymbol{E}^1(U),$$
$$\beta_X = \lambda\,dy \wedge dz - \mu\,dx \wedge dz + \nu\,dx \wedge dy \in \boldsymbol{E}^2(U).$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{F}(U) & \xrightarrow{\mathsf{grad}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\mathsf{rot}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\mathsf{div}} & \mathfrak{F}(U) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \star} \\ \boldsymbol{E}^0(U) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \boldsymbol{E}^1(U) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \boldsymbol{E}^2(U) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \boldsymbol{E}^3(U) \end{array}$$

(i) $\mathrm{d}f = \alpha_{\mathsf{grad}\, f}\,, \quad \mathrm{d}\alpha_X = \beta_{\mathsf{rot}\, X}\,, \quad \mathrm{d}\beta_X = (\mathsf{div}\, X)\,dx \wedge dy \wedge dz\,.$

(ii) $\mathsf{rot}\ \mathsf{grad}\, f = 0, \qquad \mathsf{div}\ \mathsf{rot}\, X = 0\,.$

(iii) Se U é un aberto estrelado con respecto a un punto, entón

$$\mathsf{rot}\, X = 0 \Rightarrow \exists\, f \in \mathfrak{F}(U) \mid X = \mathsf{grad}\, f\,,$$
$$\mathsf{div}\, X = 0 \Rightarrow \exists\, Y \in \mathfrak{X}(U) \mid X = \mathsf{rot}\, Y\,.$$

5.20 Exercicio

Sexa $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable C^∞.

(a) Para cada $p \in M$ e cada $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, defínese $f_p^* : \bigwedge^k \big(T_{f(p)}(N)\big) \to \bigwedge^k \big(T_p(M)\big)$, por

$$(f_p^*\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha\big(f_{*p}(v_1), \ldots, f_{*p}(v_k)\big)\,,$$

para $\alpha \in \bigwedge^k \big(T_{f(p)}(N)\big)$, $v_1, \ldots, v_k \in T_p(M)$. (Se $k = 1$, f_p^* é a *aplicación cotanxente* a f en p.) Próbese que f_p^* é lineal para cada $k \geq 1$, e que se $\alpha \in \bigwedge^k \big(T_{f(p)}(N)\big)$, $\beta \in \bigwedge^l \big(T_{f(p)}(N)\big)$, entón

$$f_p^*(\alpha \wedge \beta) = (f_p^*\alpha) \wedge (f_p^*\beta)\,.$$

(b) Para cada $\omega \in \boldsymbol{E}^k(N)$, $k \geq 1$, definimos

$$\begin{array}{rcl} f^*\omega : M & \to & \bigwedge^k T(M) \\ p & \mapsto & (f^*\omega)_p = f_p^*\omega_{f(p)}\,, \end{array}$$

e se $\omega = h \in \boldsymbol{E}^0(N) = \mathfrak{F}(N)$, definimos $f^*h = h \circ f$. Próbese

(i) $f^*(dh) = d(h \circ f)$ para cada $h \in \mathfrak{F}(N)$.

(ii) Para cada $k \geq 1$, se $h, g^1, \ldots, g^k \in \mathfrak{F}(N)$, verifícase

$$f^*(h\, dg^1 \wedge \cdots \wedge dg^k) = (h \circ f)\, d(g^1 \circ f) \wedge \cdots \wedge d(g^k \circ f).$$

(iii) Para cada $k \geq 0$, a aplicación

$$\begin{array}{rcl} f^* : \boldsymbol{E}^k(N) & \longrightarrow & \boldsymbol{E}^k(M) \\ \omega & \longmapsto & f^*(\omega) = f^*\omega \end{array}$$

é un homomorfismo de espacios vectoriais.

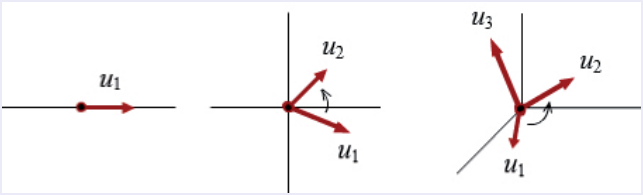
(iv) Se $\omega \in \boldsymbol{E}^k(N)$, $\eta \in \boldsymbol{E}^l(N)$, $k, l \geq 0$, entón $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$.

6. Orientación en variedades

6.1 DEFINICIÓN (BASE ORDENADA)

Sexa V un espazo vectorial real de dimensión finita $m \geq 1$.

Unha ***base ordenada*** de V é un conxunto ordenado de m vectores de V linealmente independentes, é dicir, é un elemento $(u_1, \ldots, u_m)$ de V^m, onde $\{ u_1, \ldots, u_m \}$ é unha base de V.



Bases ordenadas de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Se $\{ u_1, \ldots, u_m \}$ é unha base dun espazo vectorial real V e $\{ \alpha^1, \ldots, \alpha^m \}$ a súa base dual, entón

$$B = \left\{ \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m \right\}$$

é unha base de $\bigwedge^k(V)$, para cada $k = 1, \ldots, m$, e $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{m}{k}$.
Se $\omega \in \bigwedge^k(V)$,

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} a_{j_1 \cdots j_k} \, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k},$$

onde $a_{j_1 \cdots j_k} = \omega(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})$.

6.2 Nota

Sexa $\{ u_1, \ldots, u_m \}$ unha base do espazo vectorial real V e $\{ \alpha^1, \ldots, \alpha^m \}$ a súa base dual.

$$\bigwedge^m(V) = \left\{ \omega \colon V \times \overset{(m)}{\cdots} \times V \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ é multilineal e antisimétrica} \right\}$$

é un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 1. Unha base de $\bigwedge^m(V)$ é

$$\left\{ \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^m \right\}.$$

Se $\omega \in \bigwedge^m(V)$ entón

$$\omega = \lambda \, \alpha^{\cdot 1} \wedge \cdots \wedge \alpha^m, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

onde $\lambda = \omega(u_1, \ldots, u_m)$.

6.3

No conxunto $\mathcal{B}^* = \bigwedge^m(V) \setminus \{0\}$ de bases de $\bigwedge^m(V)$ defínese unha relación de equivalencia $\sim$ por

$$\omega, \omega' \in \mathcal{B}^*,\ \omega \sim \omega' \ \Leftrightarrow\ \omega' = \lambda\,\omega,\ \ \lambda > 0\,.$$

Existen exactamente dúas clases de equivalencia para esta relación.

Se $\omega \in \mathcal{B}^*$, o conxunto de clases de equivalencia para esta relación é

$$\mathcal{B}^*/\sim\ =\ \{\,[\omega], [-\omega]\,\}\ .$$

6.4 DEFINICIÓN (ORIENTACIÓN NUN ESPAZO VECTORIAL)

Unha ***orientación*** en V é unha clase de equivalencia $[\omega] \in \mathcal{B}^*/\sim$.

Un ***espazo vectorial orientado*** é un espazo vectorial V cunha orientación $[\omega]$, isto é, un par $(V, [\omega])$.

Unha base ordenada $(u_1, \ldots, u_m)$ de V é positiva con respecto á orientación $[\omega]$ (ou do espazo vectorial orientado $(V, [\omega])$) se $\omega(u_1, \ldots, u_m) > 0$,
e é negativa se $\omega(u_1, \ldots, u_m) < 0$.

6.5 Exemplo

Sexan $V = \mathbb{R}^n$, $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e $\{ r^1, \ldots, r^n \}$ a súa base dual.

Se $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j = (v_i^1, \ldots, v_i^n) \in \mathbb{R}^n$, tense

$$(r^1 \wedge \cdots \wedge r^n)(v_1, \ldots, v_n) = \begin{vmatrix} r^1(v_1) & \ldots & r^1(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r^n(v_1) & \ldots & r^n(v_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1^1 & \ldots & v_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^n & \ldots & v_n^n \end{vmatrix}$$

Entón $r^1 \wedge \cdots \wedge r^n$ é o determinante,

$$r^1 \wedge \cdots \wedge r^n \equiv \det \colon \mathbb{R}^n \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \equiv M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A ***orientación canónica*** do espazo vectorial $\mathbb{R}^n$ é $[r^1 \wedge \cdots \wedge r^n] = [\det]$.

$$(r^1 \wedge \cdots \wedge r^n)(v_1, \ldots, v_n) = \det\big(r^j(v_i)\big),$$

e, en particular,

$$(r^1 \wedge \cdots \wedge r^n)(e_1, \ldots, e_n) = \det\big(r^j(e_i)\big) = \det(I_n) = 1,$$

así que $(e_1, \ldots, e_n)$ é unha base positiva no espazo vectorial orientado $(\mathbb{R}^n, [\det])$.

6.6

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m. Denotaremos

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{\, \omega \in \boldsymbol{E}^m(M) \mid \omega_p \neq 0 \ \ \forall\, p \in M \,\}\ .$$

6.7 Proposición

Sexan $\omega \in \widetilde{\mathcal{B}}$ e η unha m-forma C^r sobre M $(0 \leq r \leq \infty)$. Entón $\eta = f\omega$, onde $f\colon M \to \mathbb{R}$ é continua, e f é diferenciable C^r se $r \geq 1$.

Se A é un subconxunto conexo de M e $\eta_p \neq 0$ para cada $p \in A$ entón $f_{|A} > 0$ ou $f_{|A} < 0$.

En particular, se a variedade M é conexa e $\eta_p \neq 0$ para cada $p \in M$ entón $f > 0$ ou $f < 0$.

Proba

$\forall\, p \in M,\ \omega_p \in \bigwedge^m\big(T_p(M)\big)\setminus\{0\} \overset{\dim \bigwedge^m(T_p(M))=1}{\Longrightarrow} \eta_p = f(p)\omega_p,\ f(p) \in \mathbb{R}$, o que define $f\colon M \to \mathbb{R}$ por $\eta_p = f(p)\omega_p$ e imos ver que f é C^r, comprobando que o é a súa restrición a cada aberto coordenado U, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$,

$$\left.\begin{array}{rcl} \eta_{|U} & = & f_{|U}\omega_{|U} \\ \omega_{|U} & = & \lambda\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,\ \lambda\colon U \to \mathbb{R}\ \ C^\infty \\ \eta_{|U} & = & \mu\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,\ \mu\colon U \to \mathbb{R}\ \ C^r \end{array}\right\} \Longrightarrow f_{|U} = \frac{\mu}{\lambda} \text{ é } C^r.$$

Sexa A un subconxunto conexo de M. Entón

$$\eta_p \neq 0\ \forall\, p \in A \Longrightarrow f(p) \neq 0\ \forall\, p \in A \overset{A \text{ conexo}}{\Longrightarrow} f_{|A} > 0 \text{ ou } f_{|A} < 0,$$

e se $A = M$ entón $f > 0$ ou $f < 0$. ■

6.8

No conxunto $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \boldsymbol{E}^m(M)$ defínese a relación de equivalencia $\sim$

$$\omega, \omega' \in \widetilde{\mathcal{B}},\ \omega \sim \omega' :\Longleftrightarrow \omega' = f\omega,\ \ f \in \mathfrak{F}(M),\ f > 0.$$

6.9 Definición (orientación nunha variedade diferenciable)

Unha ***orientación*** nunha variedade diferenciable M é unha clase de equivalencia $[\omega] \in \widetilde{\mathcal{B}}/\sim$.

6.10 Cuestión

¿Cantas orientacións hai nunha variedade diferenciable M?

6.11 Definición (variedade orientable)

Unha variedade diferenciable M de dimensión m é ***orientable*** se existe unha forma diferencial ω de grao m sobre M tal que $\omega_p \neq 0$ para todo $p \in M$.

Se M é orientable e conexa entón existen exactamente 2 orientacións en M.

6.12 Definicións (variedade orientada)

Unha ***variedade orientada*** é unha variedade diferenciable orientable M xunto cunha orientación $[\omega]$ en M. Formalmente, é un par $(M, [\omega])$, que abreviaremos usualmente falando da variedade orientada M, e diremos que:

$[\omega]$ é a orientación positiva *de* M,
$[-\omega]$ é a orientación negativa *de* M,

A forma diferencial ω (e calquera $\omega' \sim \omega$) é unha forma de volume de M.

Para cada $p \in M$, $\big(T_p(M), [\omega_p]\big)$ é un espazo vectorial orientado.

6.13 Definicións (CARTAS POSITIVAS e CARTAS NEGATIVAS)

Sexa M unha variedade orientada de dimensión m e ω unha forma de volume de M.

Se (U,φ) é unha carta de M, $\varphi=(x^1,\dots,x^m)$, diremos que

(U,φ) é unha carta positiva (ou φ é positivo), se $\big((\partial_{x^1})_p,\dots,(\partial_{x^m})_p\big)$ é unha base positiva de $(T_p(M),[\omega_p])\ \forall\, p\in U$,

(U,φ) é unha carta negativa (ou φ é negativo), se $\big((\partial_{x^1})_p,\dots,(\partial_{x^m})_p\big)$ é unha base negativa de $(T_p(M),[\omega_p])\ \forall\, p\in U$.

(U,φ)é unha carta positiva ou φ é positivo $\iff \omega_p\big((\partial_{x^1})_p,\dots,(\partial_{x^m})_p\big)>0\ \forall\, p\in U$,

(U,φ) é unha carta negativa ou φ é negativo $\iff \omega_p\big((\partial_{x^1})_p,\dots,(\partial_{x^m})_p\big)<0\ \forall\, p\in U$.

6.14 Propiedades

Sexa M unha variedade orientada e ω unha forma de volume de M. Sexa (U,φ) unha carta de M, $\varphi=(x^1,\dots,x^m)$. Verifícase:

(a) Se $\omega_{|U}=\lambda\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$, con $\lambda\in\mathfrak{F}(U)$, entón:

φ é positivo $\iff \lambda>0$
φ é negativo $\iff \lambda<0$

xa que $\omega_p\big((\partial_{x^1})_p,\dots,(\partial_{x^m})_p\big)=\lambda(p)\ \forall\, p\in U$

(b) Se U é conexo entón φ é positivo ou φ é negativo xa que $\lambda>0$ ou $\lambda<0$

(c) Se $\tilde{\varphi}=(-x^1,x^2,\dots,x^m)$ entón:

φ é positivo $\iff$ $\tilde{\varphi}$ é negativo
φ é negativo $\iff$ $\tilde{\varphi}$ é positivo

xa que $\omega_{|U}=\lambda\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$
$=(-\lambda)\,d(-x^1)\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^m$

(d) Para cada punto $p\in M$ existe unha carta positiva de M en p

xa que $\forall\, p\in M\ \exists\,(U,\varphi)$ carta de M, U conexo, $p\in U$, logo φ é positivo ou $\tilde{\varphi}$ é positivo

6.15 Exemplo

A variedade diferenciable $\mathbb{R}^n$ é orientable:

$\Omega = dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n \in \boldsymbol{E}^n(\mathbb{R}^n)$ non se anula en ningún punto de $\mathbb{R}^n$, xa que

$$\Omega_p\big((\partial_{r^1})_p, \ldots, (\partial_{r^n})_p\big) = \det\big((dr^i)_p(\partial_{r^j})_p\big) = 1.$$

$[\Omega]$ é a ***orientación canónica*** da variedade diferenciable $\mathbb{R}^n$.

Na variedade orientada $(\mathbb{R}^n, [\Omega])$,

a base ordenada $\big((\partial_{r^1})_p, \ldots, (\partial_{r^n})_p\big)$ de $T_p(\mathbb{R}^n)$ é unha base positiva para cada $p \in \mathbb{R}^n$,

$\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (r^1, \ldots, r^n)$ é unha carta positiva.

Se U é un aberto en $\mathbb{R}^n$, $[\Omega_{|U}]$ é a ***orientación canónica*** de U.

Dun modo máis xeral, se M é unha variedade diferenciable que admite un atlas formado por unha única carta (M, φ) entón M é orientable, xa que se $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ entón $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \in \boldsymbol{E}^m(M)$ non se anula en ningún punto $p \in M$, pois

$$\omega_p\big((\partial_{x^1})_p, \ldots, (\partial_{x^m})_p\big) = \det\big((dx^i)_p(\partial_{x^j})_p\big) = 1.$$

En particular, calquera aberto coordenado dunha variedade diferenciable é unha variedade orientable.

6.16 PROPOSICIÓN (*Condición necesaria de orientabilidade*)

Sexa M unha variedade diferenciable, e sexan (U,φ) e (V,ψ) cartas de M, tales que U e V son conexos, $U\cap V\neq\emptyset$.
Unha condición necesaria para que M sexa orientable é que a aplicación jacobiano do cambio de cartas

$$\begin{aligned} J_{\varphi,\psi}\colon U\cap V &\longrightarrow \mathbb{R}\\ p &\longmapsto J_{\varphi,\psi}(p)=J(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) \end{aligned}$$

teña signo constante.

PROBA
Supoñemos $\varphi=(x^1,\dots,x^m)$, $\psi=(y^1,\dots,y^m)$.

$$M \text{ orientable} \Longrightarrow \exists\,\omega\in \boldsymbol{E}^m(M)\mid \omega_p\neq 0\ \forall\, p\in M,$$

logo

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{|U}=\lambda\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m, \lambda\in\mathfrak{F}(U), \lambda(p)\neq 0\ \forall\, p\in U \overset{U \text{ conexo}}{\Longrightarrow} \lambda>0 \text{ ou } \lambda<0\\ \omega_{|V}=\mu\, dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m, \mu\in\mathfrak{F}(V), \mu(p)\neq 0\ \forall\, p\in V \overset{V \text{ conexo}}{\Longrightarrow} \mu>0 \text{ ou } \mu<0\\ dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m = J_{\varphi,\psi}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \omega_{|U\cap V} &= \lambda_{|U\cap V} dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\ &= \mu_{|U\cap V} dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m = \mu_{|U\cap V} J_{\varphi,\psi} dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow J_{\varphi,\psi}=\frac{\lambda_{|U\cap V}}{\mu_{|U\cap V}} \begin{cases} >0 \text{ se } \lambda>0,\mu>0 \text{ ou } \lambda<0,\mu<0,\\ <0 \text{ se } \lambda>0,\mu<0 \text{ ou } \lambda<0,\mu>0. \end{cases}$$

■

6.17 EXEMPLO (*A banda de Mœbius*)

A banda de Mœbius $\mathcal{M}$ é unha variedade diferenciable non orientable.

A banda de Mœbius $\mathcal{M}$ é o espazo topolóxico cociente do subespazo $E = [0,1] \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ pola relación de equivalencia xerada por $(0,y) \sim (1,-y)$. $\mathcal{M}$ é Hausdorff.

Sexa $\pi : E \to \mathcal{M}$ a proxección natural e denótese $[x,y] = \pi(x,y)$.

$U = \pi\big((0,1) \times \mathbb{R}\big)$ e $V = \pi\big(([0,1/2) \cup (1/2,1]) \times \mathbb{R}\big)$ son abertos en $\mathcal{M}$, pois $\pi^{-1}(U) = (0,1) \times \mathbb{R}$ e $\pi^{-1}(V) = ([0,1/2) \cup (1/2,1]) \times \mathbb{R}$ son abertos en E, e defínense as aplicacións $\varphi\colon U \to (0,1) \times \mathbb{R}$ e $\psi\colon V \to (-1/2,1/2) \times \mathbb{R}$ por

$$\varphi\big([x,y]\big) = (x,y)\,, \qquad \psi\big([x,y]\big) = \begin{cases} (x,y) & \text{se} \quad 0 \le x < 1/2 \\ (x-1,-y) & \text{se} \quad 1/2 < x \le 1\,. \end{cases}$$

$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{\,(U,\varphi),(V,\psi)\,\}$ é un atlas diferenciable sobre $\mathcal{M}$, xa que $U \cup V = \mathcal{M}$ e os cambios de cartas $\psi \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}$ son C^∞,

$$\varphi(U \cap V) = \big(0,\tfrac{1}{2}\big) \times \mathbb{R} \cup \big(\tfrac{1}{2},1\big) \times \mathbb{R} \xrightarrow{\ \psi \circ \varphi^{-1}\ } \psi(U \cap V) = \big(-\tfrac{1}{2},0\big) \times \mathbb{R} \cup \big(0,\tfrac{1}{2}\big) \times \mathbb{R}$$

$$(x,y) \quad \longmapsto \quad \begin{cases} (x,y) & \text{se } \ 0 < x < \tfrac{1}{2} \\ (x-1,-y) & \text{se } \ \tfrac{1}{2} < x < 1\,, \end{cases}$$

$$\psi(U \cap V) = \big(-\tfrac{1}{2},0\big) \times \mathbb{R} \cup \big(0,\tfrac{1}{2}\big) \times \mathbb{R} \xrightarrow{\ \varphi \circ \psi^{-1}\ } \varphi(U \cap V) = \big(0,\tfrac{1}{2}\big) \times \mathbb{R} \cup \big(\tfrac{1}{2},1\big) \times \mathbb{R}$$

$$(x,y) \quad \longmapsto \quad \begin{cases} (x,y) & \text{se } \ 0 < x < \tfrac{1}{2} \\ (x+1,-y) & \text{se } \ -\tfrac{1}{2} < x < 0\,, \end{cases}$$

Logo, $\mathcal{M}$ é uha variedade diferenciable de dimensión 2. Ademais,

$$J_{\varphi,\psi}\big([x,y]\big) = \det D(\psi \circ \varphi^{-1})(x,y) = \begin{cases} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } x < \tfrac{1}{2} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{se } x > \tfrac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \tfrac{1}{2} \\ -1 & \text{se } x > \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

O jacobiano $J_{\varphi,\psi}$ cambia de signo en $U \cap V$ e, polo tanto, $\mathcal{M}$ non é orientable.

6.18 TEOREMA

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m.

(1) Se M é orientable entón existe un atlas $\boldsymbol{a}$ de M que verifica a seguinte propiedade:

$$(\star) \quad (U,\varphi),(V,\psi) \in \boldsymbol{a},\ U \cap V \neq \emptyset \ \Rightarrow\ J_{\varphi,\psi}(p) > 0 \ \ \forall\, p \in U \cap V.$$

(2) Se M é segundo numerable e existe un atlas $\boldsymbol{a}$ de M que verifica a condición $(\star)$ entón M é orientable.

PROBA

(1) Se M é orientable $\Longrightarrow \exists\, \omega \in \boldsymbol{E}^m(M) \mid \omega_p \neq 0\ \forall\, p \in M$.

Consideramos a variedade orientada $(M,[\omega])$. Se $\boldsymbol{a}_0$ é o atlas completo da variedade diferenciable M entón

$$\boldsymbol{a} = \{(U,\varphi) \in \boldsymbol{a}_0 \mid \varphi \text{ é positivo na variedade orientada } (M,[\omega])\}$$

tamén é un atlas da variedade diferenciable M (xa que todo punto de M está no dominio dunha carta positiva (6.14 Propiedade (d)).

Se $(U,\varphi),(V,\psi) \in \boldsymbol{a}$, $U \cap V \neq \emptyset$, $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$, $\psi = (y^1,\dots,y^m)$,

$$\left.\begin{aligned} \omega_{|U} &= \lambda\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,\ \lambda > 0 \\ \omega_{|V} &= \mu\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m,\ \mu > 0 \\ dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m &= J_{\varphi,\psi}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \end{aligned}\right\} \Longrightarrow J_{\varphi\psi} = \frac{\lambda_{|U\cap V}}{\mu_{|U\cap V}} > 0.$$

(2) Imos ver que existe unha forma diferencial de grao m sobre M que non se anula en ningún punto de M.

Probarémolo no caso particular no que $\boldsymbol{a}$ é un atlas finito,

$$\boldsymbol{a} = \{(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_n, \varphi_n)\}, \qquad \varphi_i = (x_i^1, \ldots, x_i^m),\ 1 \leq i \leq n.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, consideramos

$$\omega^i = dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^m \in \boldsymbol{E}^m(U_i), \qquad \omega_p^i \neq 0 \ \ \forall\, p \in U_i.$$

Como M é segundo numerable e $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un recubrimento aberto finito de M, existe unha partición da unidade $\{f_i \colon M \to \mathbb{R}\}_{i=1,\ldots,n}$ subordinada a $\{U_i\}_{i=1,\ldots,n}$, é dicir, cada f_i é diferenciable C^∞ e

$$(a)\ f_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad (b)\ \operatorname{sop} f_i \subset U_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad (c)\ \sum_{i=1}^{n} f_i = 1.$$

Definimos

$$\omega \colon M \longrightarrow \textstyle\bigwedge^m T_p(M)$$

$$p \longmapsto \omega_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\omega_p^i = \sum_{i|p\in U_i} f_i(p)\omega_p^i.$$

Dado $p \in M$, se $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid p \in U_i\}$, $J = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid p \notin U_j\}$, poñemos

$$\omega_{|U} = \sum_{i\in I} f_{i\,|U}\omega_{|U}^i, \qquad \text{onde } U = \Big(\bigcap_{i\in I} U_i\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{j\in J} \big(M \setminus (\operatorname{sop} f_j)\big)\Big).$$

Pola propiedade (b) da partición da unidade tense que o aberto U contén a p e ademais, polas propiedades (a) e (c), que existe un índice $k \in I$ tal que $f_k(p) > 0$. Podemos escribir

$$\begin{aligned}\omega_{|U} &= f_{k\,|U}\omega_{|U}^k + \sum_{i\in I, i\neq k} f_{i\,|U}\omega_{|U}^i = \big(f_k + \sum_{i\in I\setminus\{k\}} f_i J_{\varphi_k,\varphi_i}\big)_{|U}\, \omega_{|U}^k \\ &= \big(f_k + \sum_{i\in I\setminus\{k\}} f_i J_{\varphi_k,\varphi_i}\big)_{|U}\, dx_k^1 \wedge \cdots \wedge dx_k^m\end{aligned}$$

logo a compoñente de ω na carta $(U, \varphi_{k\,|U})$ é unha función diferenciable C^∞ e, por outra parte,

$$\omega_p = \big(\underset{>0}{f_k(p)} + \sum_{i\in I\setminus\{k\}} \underset{\geq 0}{f_i(p)} \overbrace{\underset{>0}{J_{\varphi_k,\varphi_i}(p)}}^{\text{HIPÓTESE}}\big)(dx_k^1)_p \wedge \cdots \wedge (dx_k^m)_p \neq 0. \qquad \blacksquare$$

Polo viato na demostración de (2) do teorema anterior podemos observar que

$$\omega_p\big(\big(\partial_{x_k^1}\big)_p,\ldots,\big(\partial_{x_k^m}\big)_p\big)>0,$$

así que $(U,\varphi_{k\,|U})$ sería unha carta positiva na variedade orientada $(M,[\omega])$.

6.19

Se $\mathcal{A}$ é un atlas de M que verifica a propiedade $(\star)$, entón existe $\omega\in\boldsymbol{E}^m(M)$ non nula en tódolos puntos de M tal que tódalas cartas de $\mathcal{A}$ son positivas na variedade orientada $(M,[\omega])$.

Dicimos que $[\omega]$ é a orientación definida por $\mathcal{A}$.

6.20 COROLARIO

Se M admite un atlas $\boldsymbol{a} = \{ (U, \varphi), (V, \psi) \}$ tal que $U \cap V$ é conexo, entón M é orientable.

PROBA

Como a variedade M admite un atlas finito tense que M é segundo numerable.

Se $U \cap V = \emptyset$, a condición $(\star)$ no teorema anterior verifícase trivialmente.

Se $U \cap V \neq \emptyset$, como $U \cap V$ é conexo e $J_{\varphi,\psi} \colon U \cap V \to \mathbb{R}$ é continua tense que $J_{\varphi,\psi} > 0$ ou $J_{\varphi,\psi} < 0$. No primeiro caso verifícase $(\star)$, e no segundo, se $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ e $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$, poñemos $\widetilde{\psi} = (-y^1, y^2, \ldots, y^m)$, e entón

$$J_{\varphi,\tilde{\psi}}(p) = \det \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\right)_p & -\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^2}\right)_p & \cdots & -\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^m}\right)_p \\ \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\right)_p & \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)_p & \cdots & \left(\frac{\partial y^2}{\partial x^m}\right)_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^1}\right)_p & \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^2}\right)_p & \cdots & \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\right)_p \end{pmatrix} = -J_{\varphi,\psi}(p) > 0$$

para cada $p \in U \cap V$, así que co atlas $\{(U, \varphi), (V, \widetilde{\psi})\}$ tamén se verifica neste caso a condición $(\star)$. Polo tanto, M é orientable. ■

6.21 Exemplo

A esfera $\mathbb{S}^n$ é orientable:

Considérese o atlas $\{ (U,\varphi), (V,\psi) \}$ da esfera formado polas proxeccións estereográficas; se $n \geq 2$, $U \cap V$ é conexo, e se $n = 1$, pode ser necesario cambiar ψ por $\widetilde{\psi} = -\psi$ para ter un atlas de $\mathbb{S}^1$ tal que o jacobiano do cambio de cartas sexa positivo.

Se $p = (0,\ldots,0,1)$ e $q = (0,\ldots,0,-1)$ poñemos $U = \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$, $V = \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$, e tense

$$U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{p,q\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

que é conexo se $n \geq 2$ (polo que neste caso xa se pode dicir que $\mathbb{S}^n$ é orientable). Se $n = 1$, $U \cap V$ ten dúas compoñentes conexas, e neste caso

$$\begin{aligned} \varphi\colon U = \mathbb{S}^1 \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R} & \qquad \psi\colon V = \mathbb{S}^1 \setminus \{q\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) &\longmapsto \frac{x_1}{1-x_2} & (x_1,x_2) &\longmapsto \frac{x_1}{1+x_2} \\ \Big(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\Big) &\longmapsfrom t & \Big(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\Big) &\longmapsfrom t \end{aligned}$$

e temos o cambio de cartas

$$\psi \circ \varphi^{-1}\colon t \in \varphi(U \cap V) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \longmapsto \frac{1}{t} \in \psi(U \cap V) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

logo $J(\psi \circ \varphi^{-1})(t) = -1/t^2 < 0$, conque $J_{\varphi,\psi} < 0$. Pois ben, se poñemos $\widetilde{\psi} = -\psi$ entón $J(\widetilde{\psi} \circ \varphi^{-1})(t) = 1/t^2 > 0$ para todo $t \neq 0$ e polo tanto $J_{\varphi,\tilde{\psi}} > 0$.

Así, o atlas $\{(U,\varphi), (V,\widetilde{\psi})\}$ de $\mathbb{S}^1$ satisfai a condición $(\star)$ do teorema 6.18, polo que tamén se pode afirmar que $\mathbb{S}^1$ é orientable.

6.22 Exercicio

$\mathbb{R}P^2$ non é orientable. $\mathbb{R}P^1$ e $\mathbb{R}P^3$ son orientables.
Xeneralícese a $\mathbb{R}P^n$.

7. Integración e Teorema de Stokes

7.1 (*Dificultade da integración de funcións en variedades diferenciables*)

Trátase de introducir unha integral en dominios de integración adecuados en variedades diferenciables, e podería parecer razoable integrar funcións a partir da integración en espazos euclidianos.

Por exemplo, se (U, φ) é unha carta dunha variedade diferenciable M de dimensión m, poderíase pensar en definir a integral dunha certa función $f\colon U \to \mathbb{R}$ usando a súa expresión local nesta carta, é dicir, asignando a $\int_U f$ o valor da integral

$$\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}.$$

Agora ben, se ψ é outro sistema de coordenadas definido en U, a expresión local de f na carta (U, ψ) é $f \circ \psi^{-1}$, así que o valor de $\int_U f$ tamén tería que ser

$$\int_{\psi(U)} f \circ \psi^{-1}.$$

Imos ver cal é a relación entre estas dúas integrais.

Pola fórmula do cambio de variable,

$$\begin{aligned}\int_{\psi(U)} f\circ\psi^{-1} &= \int_{(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(U))} f\circ\psi^{-1} = \int_{\varphi(U)} (f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1})|J(\psi\circ\varphi^{-1})| \\ &= \int_{\varphi(U)} (f \circ \varphi^{-1})|J(\psi \circ \varphi^{-1})|\,,\end{aligned}$$

conque observamos que o valor da integral dunha expresión local de f depende da carta.

7.2 (*Formas continuas con soporte compacto*)

Se ω é unha m-forma continua sobre unha variedade diferenciable M de dimensión m, o ***soporte*** de ω é

$$\operatorname{sop}\,\omega = \overline{\{\, p \in M \mid \omega_p \neq 0 \,\}}.$$

O conxunto

$$\boldsymbol{E}_c^m(M) = \{\, \omega \colon M \to \textstyle\bigwedge^m T(M) \mid \omega \text{ } m\text{-forma continua, } \operatorname{sop}\,\omega \text{ compacto} \,\}$$

ten unha estrutura natural de espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$.

$$\omega, \eta \in \boldsymbol{E}_c^m(M) \Longrightarrow \begin{array}{l} \omega + \eta \text{ é unha } m\text{-forma continua,} \\ \operatorname{sop}(\omega+\eta) \underset{\text{pechado}}{\subset} \operatorname{sop}\omega \cup \operatorname{sop}\eta, \end{array}$$

$$\omega \in \boldsymbol{E}_c^m(M),\ \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda\,\omega \text{ é unha } m\text{-forma continua,} \\ \operatorname{sop}(\lambda\omega) = \begin{cases} \operatorname{sop}\omega & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \emptyset & \text{se } \lambda = 0, \end{cases} \end{array}$$

logo $\omega + \eta, \lambda\omega \in \boldsymbol{E}_c^m(M)$.

7.3 Definición (integral nunha variedade diferenciable)

Sexa M unha variedade diferenciable segundo numerable orientada de dimensión m, e $\omega \in \boldsymbol{E}_c^m(M)$.

(I) $\operatorname{sop}\omega \subset U$, (U,φ) carta positiva, $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$, $\omega_{|U} = f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$, onde a función $f\colon U\to\mathbb{R}$ é continua e ten soporte compacto $\operatorname{sop} f = \operatorname{sop}\omega \subset U$, e defínese

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} f\circ\varphi^{-1} \in \mathbb{R}.$$

Ben definida

Supoñamos que tamén $\operatorname{sop}\omega \subset V$, (V,ψ) carta positiva, $\psi = (y^1,\dots,y^m)$,

$$\omega_{|V} = g\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m,\ g\colon V\to\mathbb{R}\text{ continua},\ \ \operatorname{sop} g = \operatorname{sop}\omega \underset{\text{compacto}}{\subset} V.$$

A independencia da carta positiva elixida vai ser consecuencia da fórmula do cambio de variable:

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(V)} g\circ\psi^{-1} &= \int_{\psi(U\cap V)} g\circ\psi^{-1} = \int_{(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(U\cap V))} g\circ\psi^{-1}\\
&= \int_{\varphi(U\cap V)} (g\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi^{-1})\,|J(\psi\circ\varphi^{-1})|\\
(\varphi,\psi\text{ positivos}\Rightarrow J_{\varphi,\psi}>0)\quad &= \int_{\varphi(U\cap V)} (g\circ\varphi^{-1})\,J(\psi\circ\varphi^{-1})\\
&\underset{(*)}{=} \int_{\varphi(U\cap V)} (f\circ\varphi^{-1}) = \int_{\varphi(U)} (f\circ\varphi^{-1}),
\end{aligned}$$

onde $(*)$ séguese da expresión local de ω nas dúas cartas:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{|U} &= f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,\\
\omega_{|V} &= g\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m,\\
dy^1\wedge\cdots\wedge dy^m &= J_{\varphi,\psi}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m
\end{aligned}\right\}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
f_{|U\cap V} &= g_{|U\cap V}\,J_{\varphi,\psi}\\
&\Downarrow\\
(f\circ\varphi^{-1})_{|\varphi(U\cap V)} &= (g\circ\varphi^{-1})_{|\varphi(U\cap V)}\,J(\psi\circ\varphi^{-1}).
\end{aligned}$$

Propiedades (compróbense!)

1^a Se $\omega, \eta \in \boldsymbol{E}_c^m(M)$ e $\operatorname{sop}\omega, \operatorname{sop}\eta \subset U$, (U,φ) carta positiva, entón

$$\int_M (\lambda\,\omega + \mu\,\eta) = \lambda \int_M \omega + \mu \int_M \eta \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2^a Se (U,φ) carta negativa en (I) entón $\int_M \omega = -\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}$.

7.3 DEFINICIÓN (INTEGRAL NUNHA VARIEDADE DIFERENCIABLE)

Sexa M unha variedade diferenciable segundo numerable orientada de dimensión m, e $\omega \in \boldsymbol{E}_c^m(M)$.

(II) Caso xeral. Sexan $K \subset M$, K compacto tal que $\operatorname{sop}\omega \subset K$, (U_1,φ_1), ..., (U_n,φ_n) cartas positivas de M, tales que $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$, e sexa $\left\{ f_i \colon M \to \mathbb{R} \right\}_{i=0,1,\ldots,n}$ unha partición da unidade en M subordinada a $\left\{ U_0 = M \setminus K, U_1, \ldots, U_n \right\}$.
Entón $\omega = \sum_{i=1}^n f_i\,\omega$, e cada $\int_M f_i\,\omega$ está ben definida por (I).
Defínese a ***integral*** da m-forma continua ω en M por

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^n \int_M f_i\,\omega\,.$$

Ben definida

Se K é un subconxunto compacto de M que contén a sop ω, como cada punto de K pertence ao dominio dunha carta positiva, pola compacidade de K existe un número finito de cartas positivas (U_1,φ_1), ..., (U_n,φ_n) tales que $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$.
Así, $\{U_0 = M \setminus K, U_1, \ldots, U_n\}$ é un recubrimento aberto finito de M e, xa que M é segundo numerable, existe unha partición da unidade $\{f_i \colon M \to \mathbb{R}\}_{i=0,1,\ldots,n}$ subordinada a $\{U_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$, é dicir, cada f_i é diferenciable C^∞ e

(a) $\quad f_i \geq 0 \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n,$

(b) $\quad \operatorname{sop} f_i \subset U_i \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n,$

(c) $\quad \sum_{i=0}^n f_i(x) = 1 \quad \forall\, x \in M \qquad \Big(\underset{\operatorname{sop} f_0 \subset M \setminus K}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^n f_i(x) = 1 \ \forall\, x \in K \Big).$

$$(a) \qquad f_i \geq 0 \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$(b) \qquad \operatorname{sop} f_i \subset U_i \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n, \quad U_0 = M \setminus K,$$

$$(c) \qquad \textstyle\sum_{i=0}^{n} f_i(x) = 1 \quad \forall\, x \in M \qquad \big(\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1\ \ \forall\, x \in K\big).$$

Ademais,

$$\operatorname{sop} f_0 \subset M \setminus K,\ \ \operatorname{sop}\, \omega \subset K \Longrightarrow f_0\omega = 0 \Longrightarrow \omega = \sum_{i=0}^{n} f_i\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\omega,$$

$$\operatorname{sop} f_i\omega = \overline{\{\, p \in M \mid f_i(p)\omega_p \neq 0 \,\}} \subset (\operatorname{sop} f_i \cap \operatorname{sop}\omega) \Longrightarrow \operatorname{sop}(f_i\omega) \underset{\text{compacto}}{\subset} U_i,$$

logo $\exists\ \int_M f_i\omega \in \mathbb{R}$ por (I) e ten sentido, en principio, poñer $\int_M \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_M f_i\omega$

Imos ver que esta definición non depende da elección do compacto K que contén a $\operatorname{sop}\omega$ nin do recubremento aberto elixido nin da partición da unidade utilizada.

Para isto, supoñamos K' é un compacto tal que $\operatorname{sop}\omega \subset K'$, $V_0 = M \setminus K'$, que $(V_1, \psi_1), \ldots, (V_l, \psi_l)$ son cartas positivas de M tales que $K' \subset V_1 \cup \cdots \cup V_l$, e que $\{g_j \colon M \to \mathbb{R}\}_{j=0,1,\ldots,l}$ é unha partición da unidade subordinada a $\{V_0, V_1, \ldots, V_l\}$.

Tense que verificar $\sum_{i=1}^{n} \int_M f_i\omega = \sum_{j=1}^{l} \int_M g_j\omega$. Imos comprobalo.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\omega \Longrightarrow g_j\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i g_j\omega \Longrightarrow \int_M g_j\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_M f_i g_j\omega,$$

$$\omega = \sum_{j=1}^{l} g_j\omega \Longrightarrow f_i\omega = \sum_{j=1}^{l} f_i g_j\omega \Longrightarrow \int_M f_i\omega = \sum_{j=1}^{l} \int_M f_i g_j\omega,$$

e, polo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_M f_i\omega = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{l} \int_M f_i g_j\omega \Big) = \sum_{j=1}^{l} \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_M f_i g_j\omega \Big) = \sum_{j=1}^{l} \int_M g_j\omega.$$

7.4 (*Linealidade*)

A aplicación

$$\begin{aligned}\int_M : \boldsymbol{E}_c^m(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \int_M \omega\end{aligned}$$

é lineal: (compróbese!)

$$\int_M (\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda \int_M \omega + \mu \int_M \eta\,, \qquad \omega, \eta \in \boldsymbol{E}_c^m(M)\,,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

7.5 (*Integral de funcións con respecto a unha forma de volume*)

Supoñamos Ω é unha forma de volume sobre unha variedade orientada segundo numerable M de dimensión m.
Entón Ω define un isomorfismo entre o espazo vectorial $\mathfrak{F}_c(M)$ de funcións continuas $f\colon M \to \mathbb{R}$ con soporte compacto e $\boldsymbol{E}_c^m(M)$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_c(M) &\longrightarrow \boldsymbol{E}_c^m(M) \\ f &\longmapsto f\,\Omega\,.\end{aligned}$$

Se $f \in \mathfrak{F}_c(M)$, dise que $\displaystyle\int_M f\,\Omega$ é a integral de f en M con repecto a Ω.

Se $M = \mathbb{R}^n$, $\Omega = dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n$ define a orientación canónica $[\Omega]$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_c(\mathbb{R}^n) &\xrightarrow{\cong} \boldsymbol{E}_c^n(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto f\,\Omega = f\,dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n\,,\end{aligned}$$

e calquera forma continua sobre $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto pódese escribir $\omega = f\,\Omega$ onde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é unha función continua con soporte compacto; considerando o sistema de coordenadas identidade $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (r^1, \ldots, r^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\Omega = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n = \int_{\varphi(\mathbb{R}^n)} f \circ \varphi^{-1} = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

7.6

Consideramos os seguintes subespazos de $\mathbb{R}^m$:

$$H^m = \{\, x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0 \,\}$$ semiespazo superior pechado

$$H^m_+ = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid x_m > 0 \,\}$$ semiespazo superior aberto

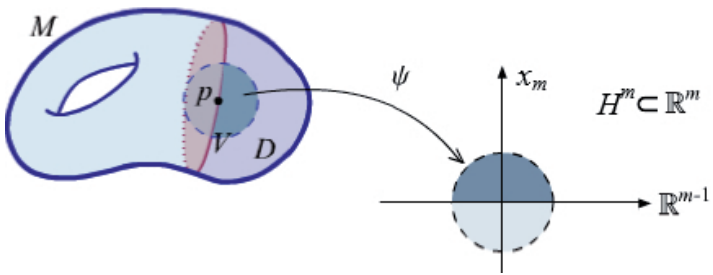
$$H^m_0 = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0 \,\} = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$$

7.7 Definición (dominio regular)

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión m, D un subconxunto pechado de M, $D \neq \emptyset$.
D chámase ***dominio con borde regular*** (ou ***dominio regular***) de M se para cada punto $p \in \boldsymbol{\partial} D$ existe unha carta (V, ψ) en p tal que

$$\psi(V \cap D) = \psi(V) \cap H^m, \qquad \psi(p) = 0\,.$$

Diremos que (V, ψ) é unha carta de M relativa a D (centrada en p).



Unha carta relativa ao dominio regular D de M.

7.8

Se D é un dominio regular dunha variedade diferenciable M, e (V,ψ) é unha carta de M relativa a D centrada en $p \in \boldsymbol{\partial} D$, verifícase:

$$\psi(V \cap \mathring{D}) = \psi(V) \cap H^m_+, \qquad \psi(V \cap \boldsymbol{\partial} D) = \psi(V) \cap H^m_0.$$

Sexa $\delta > 0$ tal que $(-\delta,\delta)^m \subset \psi(V)$, e $U = \psi^{-1}\big((-\delta,\delta)^m\big)$. Entón $\varphi = \psi_{|U} \colon U \to (-\delta,\delta)^m$ é un sistema de coordenadas, e

$$\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap H^m = (-\delta,\delta)^{m-1} \times [0,\delta),$$
$$\varphi(U \cap \mathring{D}) = \varphi(U) \cap H^m_+ = (-\delta,\delta)^{m-1} \times (0,\delta),$$
$$\varphi(U \cap \boldsymbol{\partial} D) = \varphi(U) \cap H^m_0 = (-\delta,\delta)^{m-1} \times \{0\},$$

e diremos que (U,φ) é unha carta cúbica relativa a D (centrada en $p \in \partial D$), e que φ é un sistema de coordenadas cúbico relativo a D.

Se $0 < \varepsilon < \delta$ e $Q = \varphi^{-1}([-\varepsilon,\varepsilon]^m)$, diremos que Q é un *D-cubo* centrado en $p \in \boldsymbol{\partial} D$.

Se $p_0 \in \mathring{D}$ e Q é un conxunto tal que $p_0 \in Q \subset U \subset D$, onde (U,φ) é unha carta de M tal que $\varphi(Q) = [-\varepsilon,\varepsilon]^m$ e $\varphi(p_0) = 0$, diremos que Q é un *D-cubo* centrado en p_0. (Sempre existe un tal D-cubo).

7.9 Proposición

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión $m \geq 2$ e D un dominio regular de M. Se $\boldsymbol{\partial} D \neq \emptyset$ entón $\boldsymbol{\partial} D$ é unha subvariedade regular de M de dimensión $m-1$.

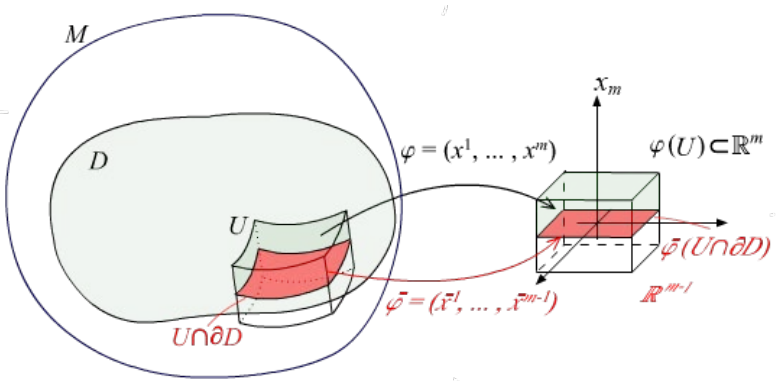
Proba

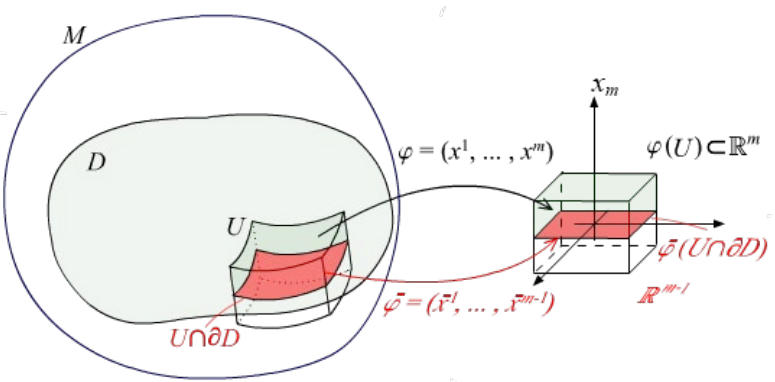
$\boldsymbol{\partial} D$ é un subespazo topolóxico de M e para cada $p \in \partial D$ existe unha carta cúbica (U, φ) relativa a D centrada en p, isto é, para algún $\delta > 0$,

$$\varphi(U) = (-\delta, \delta)^m = B \times C,\ B = (-\delta, \delta)^{m-1} \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R}^{m-1}, C = (-\delta, \delta) \underset{\text{abto}}{\subset} \mathbb{R},$$

$$\varphi(U \cap \boldsymbol{\partial} D) = B \times \{0\}, \quad 0 \in C,$$

logo (U, φ) é unha carta de M adaptada a $\boldsymbol{\partial} D$, e $\boldsymbol{\partial} D$ ten a propiedade de $(m-1)$-subvariedade de M (véxase a definición 3.17) e polo tanto admite unha única estrutura diferenciable coa que é unha subvariedade regular de M de dimensión $m-1$ (proposición 3.18).





7.10

Sexa D un dominio regular dunha variedade diferenciable M de dimensión $m \geq 2$ e sexa (U, φ) unha carta cúbica relativa a D centrada en $p \in \boldsymbol{\partial} D$,

$$\varphi = (x^1, \ldots, x^m) \colon U \longrightarrow \varphi(U) = (-\delta, \delta)^m,$$

$$x^m{}_{|U \cap \mathring{D}} > 0, \qquad x^m{}_{|U \cap \boldsymbol{\partial} D} = 0.$$

Entón $\varphi_{|U \cap \boldsymbol{\partial} D} \colon U \cap \boldsymbol{\partial} D \to (-\delta, \delta)^{m-1} \times \{0\}$ define un sistema de coordenadas de $\boldsymbol{\partial} D$

$$\bar{\varphi} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{m-1}) \colon U \to \bar{\varphi}(U \cap \boldsymbol{\partial} D) = (-\delta, \delta)^{m-1},$$

onde $\bar{x}^j = x^j{}_{|U \cap \boldsymbol{\partial} D}, \ (1 \leq j \leq m-1)$, e para cada $q \in U \cap \boldsymbol{\partial} D$,

$$\varphi(q) = \big(x^1(q), \ldots, x^{m-1}(q), 0\big), \qquad \bar{\varphi}(q) = \big(\bar{x}^1(q), \ldots, \bar{x}^{m-1}(q)\big).$$

7.11 Proposición

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión $m \geq 2$ e D un dominio regular de M, $\boldsymbol{\partial} D \neq \emptyset$. Se M é segundo numerable e orientable entón a variedade diferenciable $\boldsymbol{\partial} D$ é orientable.

Proba

Se M é orientable entón $\exists\, \omega \in \boldsymbol{E}^m(M)$ tal que $\omega_p \neq 0\ \forall\, p \in M$, e podemos considerar a variedade orientada $(M, [\omega])$, así que se pode falar de cartas positvas desta variedade orientada.

$$\mathcal{C} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ carta cúbica de } M \text{ relativa a } D, \varphi \text{ positivo}\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{(U \cap \boldsymbol{\partial} D, \bar{\varphi}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{C}\} \text{ é un atlas de } \boldsymbol{\partial} D.$$

Se $(U, \varphi) \in \mathcal{C}$ entón $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ e $\bar{\varphi} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{m-1})$, e tense que

$$x^m{}_{|U\cap D} \geq 0, \quad x^m{}_{|U\cap \mathring{D}} > 0, \quad x^m{}_{|U\cap \boldsymbol{\partial} D} = 0, \qquad \bar{x}^j = x^j{}_{|U\cap \boldsymbol{\partial} D}.$$

Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{C}$ entón $J_{\varphi,\psi}(q) > 0\ \ \forall\, q \in U \cap V$, e se $q \in U \cap V \cap \boldsymbol{\partial} D$:

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(q)) = \left(\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_q\right) = \begin{pmatrix} \left(\left(\frac{\partial \bar{y}^j}{\partial \bar{x}^i}\right)_q\right) & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\right)_q \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right)_q = \lim_{t\to 0} \frac{(y^m \circ \varphi^{-1})(x^1(q), \ldots, x^i(q)+t, \ldots, x^{m-1}(q), \overset{=0}{x^m(q)}) - \overset{=0}{y^m(q)}}{t} = 0$$

$$\left(\frac{\partial y^m}{\partial x^m}\right)_q = \lim_{t\to 0^+} \frac{(y^m \circ \varphi^{-1})(x^1(q), \ldots, x^{m-1}(q), \overset{=0}{x^m(q)} + t) - \overset{=0}{y^m(q)}}{t} \underset{\neq}{\geq} 0$$

logo $J_{\bar{\varphi},\bar{\psi}} > 0$ en $U \cap V \cap \boldsymbol{\partial} D$ (xa que $J_{\varphi,\psi} > 0$) con que se ten a propiedade do atlas $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ que implica a orientabilidade da variedade (segundo numerable) $\boldsymbol{\partial} D$. ■

7.12 Nota

Sexa M unha variedade diferenciable segundo numerable orientada de dimensión $m \geq 2$ e D un dominio regular de M.

Sexa $[\omega]$ a orientación positiva de M, e $\mathcal{C}$ a familia de tódalas cartas cúbicas positivas de M relativas a D.

Entón $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \left\{ (U \cap \boldsymbol{\partial} D, \bar{\varphi}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{C} \right\}$ é un atlas de $\boldsymbol{\partial} D$, e define unha orientación $[\bar{\omega}]$ sobre $\boldsymbol{\partial} D$.

Diremos que a orientación de $\boldsymbol{\partial} D$ compatible coa orientación positiva $[\omega]$ de M é $[\bar{\omega}]$ se m é par, e que é $[-\bar{\omega}]$ se m é impar.

Polo tanto, se $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ é positivo, entón

$$\bar{\varphi} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{m-1}) \text{ é } \begin{cases} \text{positivo se } m \text{ par,} \\ \text{negativo se } m \text{ impar.} \end{cases}$$

7.13 Definición (integral nun dominio regular)

Sexa M unha variedade diferenciable segundo numerable orientada e D un dominio regular de M.
Sexa ω unha m-forma continua sobre M tal que $(\operatorname{sop}\omega) \cap D$ é compacto.

(I) Se $\operatorname{sop}\omega \cap D \subset U$, (U,φ) carta positiva, $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$, $\omega_{|U} = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ continua, defínese

$$\int_D \omega := \int_{\varphi(U\cap D)} f \circ \varphi^{-1} \in \mathbb{R}.$$

Se sop $\omega \cap D = \emptyset$ entón $\int_D \omega = 0$.

(II) (Caso xeral) Sexa $K \subset M$, K compacto, tal que sop $\omega \cap D \subset K$, e sexan (U_1,φ_1), …, (U_n,φ_n) cartas positivas de M, tales que $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$.
Sexa $\left\{ f_i\colon M \to \mathbb{R} \right\}_{i=0,1,\dots,n}$ unha partición da unidade subordinada a $\left\{ U_0 = M\setminus K, U_1, \dots, U_n \right\}$.
Entón $\omega = \sum_{i=0}^n f_i\,\omega$, cada $\int_D f_i\,\omega$ está ben definida por (I), e $\int_D f_0\,\omega = 0$.

Defínese a ***integral*** da m-forma continua ω en D por

$$\int_D \omega := \sum_{i=1}^n \int_D f_i\,\omega\,.$$

7.14

Para cada dominio regular D da variedade diferenciable M de dimensión m consideramos o espazo vectorial real

$$\boldsymbol{E}_D^m(M) = \left\{ \omega \colon M \to \textstyle\bigwedge^m T(M) \;\middle|\; \begin{array}{c} \omega \text{ } m\text{-forma continua,} \\ \operatorname{sop} \omega \cap D \text{ compacto} \end{array} \right\}.$$

A aplicación

$$\begin{aligned} \int_D \colon \boldsymbol{E}_D^m(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \int_D \omega \end{aligned}$$

é lineal,

$$\int_D (\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda \int_D \omega + \mu \int_D \eta\,, \qquad \omega, \eta \in \boldsymbol{E}_D^m(M)\,,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,.$$

7.15 *Teorema de Stokes*

Sexa M unha variedade diferenciable segundo numerable orientada de dimensión $m \geq 2$, e D un dominio regular de M.

Se ω é unha $(m-1)$-forma diferencial sobre M tal que $\operatorname{sop}\omega \cap D$ é compacto, entón

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\boldsymbol{\partial} D} \omega \qquad (\textit{fórmula de Stokes}),$$

onde $\boldsymbol{\partial} D$ é unha variedade orientada coa orientación compatible coa orientación positiva de M.

Observacións

(1) $\boxed{\exists \int_D \mathrm{d}\omega}$

$\omega \in \boldsymbol{E}^{m-1}(M) \Rightarrow \mathrm{d}\omega \in \boldsymbol{E}^m(M) \Rightarrow \mathrm{d}\omega$ é unha m-forma continua sobre M, e $\operatorname{sop}\mathrm{d}\omega \cap D$ é compacto, xa que

$U = M \setminus \operatorname{sop}\omega$ aberto en M, $\omega_{|U} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\omega_{|U} = 0 \Rightarrow \operatorname{sop}\mathrm{d}\omega \subset M \setminus U = \operatorname{sop}\omega$

$$\Rightarrow \underset{\text{pechado}}{\operatorname{sop}\mathrm{d}\omega} \cap D \subset \underset{\text{compacto}}{\operatorname{sop}\omega} \cap D \Rightarrow \exists \int_D \mathrm{d}\omega.$$

(2) $\boxed{\exists \int_{\boldsymbol{\partial} D} \omega}$

Se $\boldsymbol{\partial} D = \emptyset$ defínese $\boxed{\int_{\boldsymbol{\partial} D} \omega := 0.}$

Se $\boldsymbol{\partial} D \neq \emptyset$, a inclusión $\boldsymbol{i}\colon \boldsymbol{\partial} D \hookrightarrow M$ define a restrición $\boldsymbol{i}^*\colon \boldsymbol{E}^{m-1}(M) \to \boldsymbol{E}^{m-1}(\boldsymbol{\partial} D)$,

$$\left.\begin{array}{l} \omega \in \boldsymbol{E}^{m-1}(M) \Rightarrow \boldsymbol{i}^*\omega \in \boldsymbol{E}^{m-1}(\partial D) \Rightarrow \boldsymbol{i}^*\omega \ (m-1)\text{-forma continua} \\ \underset{\text{pechado}}{\operatorname{sop}\boldsymbol{i}^*\omega} \subset \underset{\text{pechado}}{\operatorname{sop}\omega} \cap \boldsymbol{\partial} D \subset \operatorname{sop}\omega \cap D \text{ compacto} \Rightarrow \operatorname{sop}\boldsymbol{i}^*\omega \text{ é compacto} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \int_{\boldsymbol{\partial} D} \boldsymbol{i}^*\omega,$$

e defínese $\boxed{\int_{\boldsymbol{\partial} D} \omega := \int_{\boldsymbol{\partial} D} \boldsymbol{i}^*\omega}$.

PROBA do teorema de Stokes

1º Bastará probar a fórmula de Stokes no caso particular no que a forma ω é tal que $\operatorname{sop}\omega$ está contido no interior dun D-cubo $Q \subset U$, onde (U,φ) é unha carta positiva:

Consideramos o compacto $K = \operatorname{sop}\omega \cap D$ e un recubrimento finito de K por interiores de D-cubos $\mathring{Q}_1, \ldots, \mathring{Q}_n$, así que $\mathcal{U} = \{M \setminus K, \mathring{Q}_1, \ldots, \mathring{Q}_n\}$ é un recubrimento aberto de M.

Sexa $\{f_0, f_1, \ldots, f_n \colon M \to \mathbb{R}\}$ unha partición da unidade subordinada a $\mathcal{U}$, $\operatorname{sop} f_0 \subset M \setminus K$, e $\operatorname{sop} f_j \subset \mathring{Q}_j$ para $j = 1, \ldots, n$,

$$\Rightarrow \operatorname{sop} f_0\omega \subset M \setminus D, \ \operatorname{sop} f_j\omega \subset \operatorname{sop} f_j \subset \mathring{Q}_j \ \forall\, j = 1, \ldots, n,$$

e polo tanto

$$\omega = \sum_{j=0}^{n} f_j\omega \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\omega \underset{\text{d lineal}}{=} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathrm{d}(f_j\omega) \underset{\text{lineal}}{\overset{\int_D}{\Rightarrow}} \boxed{\int_D \mathrm{d}\,\omega} = \sum_{j=0}^{n} \int_D \mathrm{d}(f_j\omega) = \sum_{j=1}^{n} \int_D \mathrm{d}(f_j\omega) \\ \boldsymbol{i}^*\omega \underset{\text{lineal}}{\overset{\boldsymbol{i}^*}{=}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{i}^*(f_j\omega) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{i}^*(f_j\omega) \underset{\text{lineal}}{\overset{\int_{\partial D}}{\Rightarrow}} \boxed{\int_{\partial D} \boldsymbol{i}^*\omega} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial D} \boldsymbol{i}^*(f_j\omega) \end{cases}$$

Substituíndo $f_j\omega$ por ω basta probar a fórmula de Stokes no caso en que o soporte de ω está contido no interior dun D-cubo, tal como afirmabamos.

2º Se $\operatorname{sop}\omega \subset \mathring{Q}, Q \subset U$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ positivo, $\varphi(Q) = [-\varepsilon, \varepsilon]^m \subset \varphi(U) = (-\delta, \delta)^m$, a expresión local de ω en (U,φ) da lugar á exprexión local de $\mathrm{d}\omega$ en (U,φ):

$$\omega_{|U} = \sum_{j_1 < \cdots < j_{m-1}} a_{j_1,\ldots,j_{m-1}}\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{m-1}} = \sum_{j=1}^{m} a_j\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^m \quad \overset{a_j := a_{1\ldots j-1, j+1\ldots m}}{\hookrightarrow}$$

$$\mathrm{d}\omega_{|U} = \sum_{j=1}^{m} da_j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^m = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial x^i} dx^i \Big) \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^m$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^m = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$$

$$= f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m, \qquad \text{onde } f \colon p \in U \longmapsto f(p) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \Big(\frac{\partial a_j}{\partial x^j} \Big)_p \in \mathbb{R},$$

logo $\boxed{f \circ \varphi^{-1} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} D_j(a_j \circ \varphi^{-1})} \colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}.$

Para probar a fórmula de Stokes, imos considerar dous casos, según o cubo Q esté centrado nun punto de $\mathring{D}$ ou nun punto de $\boldsymbol{\partial} D$, $Q \subset U$, φ positivo.

(a) $\operatorname{sop}\omega \subset \mathring{Q}$, Q D-cubo centrado nun punto de $\mathring{D}$,

$$Q \subset U \subset \mathring{D},\ \varphi \text{ positivo}, \varphi(Q) = [-\varepsilon,\varepsilon]^m \subset \varphi(U).$$

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{d}\omega &= \int_{\varphi(U\cap D)} f\circ\varphi^{-1} = \int_{\varphi(Q\cap D)} f\circ\varphi^{-1} \\ &= \int_{\varphi(Q)} f\circ\varphi^{-1} = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^m} D_j(a_j\circ\varphi^{-1}).\end{aligned}$$

Imos calcular cada sumando. Polo teorema de Fubini,

$$\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^m} D_j(a_j\circ\varphi^{-1}) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\overset{(m-1)}{\cdots}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D_j(a_j\circ\varphi^{-1})(t_1,\ldots,t_m)dt_j\Big)dt_1\ldots\widehat{dt_j}\ldots dt_m,$$

e, usando a regla de Barrow,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D_j(a_j\circ\varphi^{-1})(t_1,\ldots,t_m)dt_j = \underbrace{(a_j\circ\varphi^{-1})(t_1,\ldots,\varepsilon,\ldots,t_m)}_{=0} - \underbrace{(a_j\circ\varphi^{-1})(t_1,\ldots,-\varepsilon,\ldots,t_m)}_{=0}.$$

anúlase, xa que $\operatorname{sop} a_j \subset \operatorname{sop}\omega \subset \mathring{Q}$. Logo $\int_D \mathrm{d}\omega = 0$.

Por outra parte,

$$\operatorname{sop}\omega \subset \mathring{Q} \subset \mathring{D} \Rightarrow \operatorname{sop}\omega \cap \boldsymbol{\partial} D = \emptyset \Rightarrow \omega_p = 0\ \forall p \in \boldsymbol{\partial} D$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{i}^*\omega)_p = \boldsymbol{i}_p^*\omega_p = 0\ \ \forall p \in \boldsymbol{\partial} D \Rightarrow \int_{\boldsymbol{\partial} D}\omega = \int_{\boldsymbol{\partial} D}\boldsymbol{i}^*\omega = 0.$$

(b) $\operatorname{sop}\omega \subset \mathring{Q}$, Q D-cubo centrado nun punto de $\boldsymbol{\partial} D$,
$Q \subset U$, φ positivo, $\varphi(Q) = [-\varepsilon,\varepsilon]^m \subset \varphi(U)$, $\varphi(Q\cap D) = [-\varepsilon,\varepsilon]^{m-1}\times[0,\varepsilon]$.

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{d}\omega &= \int_{\varphi(U\cap D)} f\circ\varphi^{-1} = \int_{\varphi(Q\cap D)} f\circ\varphi^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{\varphi(Q\cap D)} D_j(a_j\circ\varphi^{-1}).\end{aligned}$$

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int_{\varphi(Q\cap D)} D_j(a_j \circ \varphi^{-1}) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^{m-1}\times[0,\varepsilon]} D_j(a_j \circ \varphi^{-1}).$$

Imos calcular cada sumando, facendo uso outra vez do teorema de Fubini e da regla de Barrow.

Se $1 \leq j \leq m-1$,

$$\int_{\varphi(Q\cap D)} D_j(a_j \circ \varphi^{-1}) = \int_0^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ldots \Big(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D_j(a_j \circ \varphi^{-1})(t_1,\ldots,t_m)dt_j \Big) dt_1 \ldots \widehat{dt_j} \ldots dt_{m-1}dt_m,$$

e co mesmo argumento do caso **(a)**, tense que os primeiros $m-1$ sumandos de $\int_D \mathrm{d}\omega$ se anulan.

Se $j = m$,

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(Q\cap D)} D_m(a_m \circ \varphi^{-1}) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \overset{(m-1)}{\cdots} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Big(\int_0^{\varepsilon} D_m(a_m \circ \varphi^{-1})(t_1,\ldots,t_m)dt_m \Big) dt_1 \ldots dt_{m-1} \\
&= -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \overset{(m-1)}{\cdots} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (a_m \circ \varphi^{-1})(t_1,\ldots,t_{m-1},0)dt_1 \ldots dt_{m-1} \\
&= -\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^{m-1}} a_m \circ \varphi^{-1} \circ i_0,
\end{aligned}$$

onde $i_0 \colon (t_1,\ldots,t_{m-1}) \in (-\delta,\delta)^{m-1} \longmapsto (t_1,\ldots,t_{m-1},0) \in (-\delta,\delta)^m$, e

$$\int_D \mathrm{d}\omega = (-1)^m \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^{m-1}} a_m \circ \varphi^{-1} \circ i_0.$$

A carta (U,φ) de M define unha carta $(U\cap \boldsymbol{\partial} D, \bar\varphi)$ de $\boldsymbol{\partial} D$ e tense o seguinte diagrama conmutativo definido pola inclusión $\boldsymbol{i}\colon \boldsymbol{\partial} D \hookrightarrow M$:

$$\begin{array}{ccc} U\cap \boldsymbol{\partial} D & \xrightarrow{\quad \boldsymbol{i} \quad} & U \\ \bar\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ (-\delta,\delta)^{m-1} & \xrightarrow{\quad i_0 \quad} & (-\delta,\delta)^m \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\varphi = (x^1,\dots,x^m),\ \bar\varphi = (\bar x^1,\dots,\bar x^m),\\ &\bar x^j = x^j\circ \boldsymbol{i}_{|U\cap \boldsymbol{\partial} D},\ j=1,\dots,m-1\\ &x^m_{|U\cap \boldsymbol{\partial} D}=0,\\ &\varphi\circ \boldsymbol{i} = i_0\bar\varphi \ \Rightarrow\ \boldsymbol{i}\circ\bar\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\circ i_0. \end{aligned}$$

Polo tanto, tamén se pode escribir

$$\int_D \mathrm{d}\omega = (-1)^m \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^{m-1}} a_m\circ \boldsymbol{i}\circ\bar\varphi^{-1}.$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} \omega_{|U} &= \sum_{j=1}^m a_j\, dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^m\\ &\Downarrow\\ (\boldsymbol{i}^*\omega)_{|U\cap\boldsymbol{\partial} D} &= \sum_{j=1}^m (\boldsymbol{i}^*a_j)\,\boldsymbol{i}^*(dx^1)\wedge\cdots\wedge\widehat{\boldsymbol{i}^*(dx^j)}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{i}^*(dx^m)\\ &= \sum_{j=1}^m (a_j\circ\boldsymbol{i})\, d(x^1\circ\boldsymbol{i})\wedge\cdots\wedge\widehat{d(x^j\circ\boldsymbol{i})}\wedge\cdots\wedge d(x^m\circ\boldsymbol{i})\\ &= (a_m\circ\boldsymbol{i})\, d(x^1\circ\boldsymbol{i})\wedge\cdots\wedge d(x^{m-1}\circ\boldsymbol{i})\\ &\quad {\scriptstyle x^m\circ\boldsymbol{i}_{|U\cap\boldsymbol{\partial} D}=0}\uparrow\\ &= (a_m\circ\boldsymbol{i})\, d\bar x^1\wedge\cdots\wedge d\bar x^{m-1}, \end{aligned}$$

que é a expresión local de $\boldsymbol{i}^*\omega$ na carta $(U\cap\boldsymbol{\partial} D,\bar\varphi)$ da variedade diferenciable $\boldsymbol{\partial} D$, que é positiva se m é par e é negativa se m é impar. Polo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\partial} D}\boldsymbol{i}^*\omega &= \begin{cases} \int_{\bar\varphi(U\cap\boldsymbol{\partial} D)} a_m\circ\boldsymbol{i}\circ\bar\varphi^{-1} & \text{se } m \text{ par}\\ -\int_{\bar\varphi(U\cap\boldsymbol{\partial} D)} a_m\circ\boldsymbol{i}\circ\bar\varphi^{-1} & \text{se } m \text{ impar} \end{cases}\\ &= (-1)^m\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^{m-1}} a_m\circ\boldsymbol{i}\circ\bar\varphi^{-1} = \int_D \mathrm{d}\,\omega. \end{aligned}$$

■

Quel est le théorème mathématique le plus profond, le plus difficile, dont il existe une interprétation physique concrete et indubitable? Pour moi, c'est le théorème de Stokes qui est le candidat numéro un. Et cela témoigne d'un fait: la différentielle extérieure est une notion très mystérieuse, dont la véritable nature, je crois, recèle encore bien des énigmes, et cela en dépit de la simplicité de sa définition formelle.

René Thom, en "La science malgré tout", *Encyclopaedia Universalis*, vol. 17.

Stokes' theorem shares three important attributes with many fully evolved major theorems:

(1) It is trivial.

(2) It is trivial because the terms appearing in it have been properly defined.

(3) It has significant consequences.

Michael Spivak, en *Calculus on Manifolds*.

7.16 Corolario

Se M é unha variedade diferenciable segundo numerable orientada de dimensión $m \geq 1$ e ω é unha $(m-1)$-forma diferencial sobre M con soporte compacto entón

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

7.17 Corolario

Se M é unha variedade diferenciable compacta orientada de dimensión $m \geq 1$ e $\omega \in \boldsymbol{E}^{m-1}(M)$ entón

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

7.18 (*Os teoremas clásicos*)

(1) **(Fórmula de Green)** Sexa D un dominio regular acotado de $\mathbb{R}^2$. Se $\omega = a\,dx + b\,dy$ é unha forma diferencial de grao 1 sobre un aberto U en $\mathbb{R}^2$ que contén a D entón

$$\int_D \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\boldsymbol{\partial} D} a\,dx + b\,dy\,.$$

(2) **(Fórmula da diverxencia ou de Gauss-Ostrogradsky)** Sexa D un dominio regular acotado de $\mathbb{R}^3$ e $X = \lambda\,\partial_x + \mu\,\partial_y + \nu\,\partial_z$ un campo de vectores diferenciable sobre un aberto U en $\mathbb{R}^3$ que contén a D.

Sexa $\beta_X = \lambda\,dy \wedge dz - \mu\,dx \wedge dz + \nu\,dx \wedge dy \in \boldsymbol{E}^2(U)$. Entón $\int_D \mathrm{d}\beta_X = \int_{\boldsymbol{\partial} D} \beta_X$, e polo tanto

$$\int_D (\mathsf{div}\, X)\,dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\boldsymbol{\partial} D} \lambda\,dy \wedge dz - \mu\,dx \wedge dz + \nu\,dx \wedge dy\,.$$

(3) **(Fórmula de Stokes do cálculo)** Sexa M unha subvariedade compacta orientada de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2, e D un dominio regular de M.

Sexa U un aberto en $\mathbb{R}^3$ que contén a M e $X = \lambda\,\partial_x + \mu\,\partial_y + \nu\,\partial_z$ un campo de vectores diferenciable sobre U.

Entón $\alpha_X = \lambda\,dx + \beta\,dy + \nu\,dz \in \boldsymbol{E}^1(U)$ e $\mathrm{d}\alpha_X = \beta_{\mathsf{rot}\,X}$, logo $\int_D \beta_{\mathsf{rot}\,X} = \int_{\boldsymbol{\partial} D} \alpha_X$, e polo tanto

$$\int_D \Big(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\Big) dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\Big) dz \wedge dx + \Big(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\Big) dx \wedge dy$$

$$= \int_{\boldsymbol{\partial} D} \lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz.$$