



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# La ecuación diferencial logística

Raquel Abeleira Álvarez

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# La ecuación diferencial logística

Raquel Abeleira Álvarez

22 de junio de 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento:</b> Análisis Matemática
<b>Título:</b> La ecuación diferencial logística.
<b>Breve descripción do contido</b>
La ecuación diferencial logística es una de las ecuaciones no lineales más sencillas, pero al mismo tiempo de las más interesantes desde el punto de vista teórico y de sus aplicaciones. Se aplicará en concreto al estudio de la pandemia del COVID-19.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Ecuación diferencial logística y función logística</b>	<b>1</b>
1.1. Resolución de la ecuación diferencial logística . . . . .	1
1.2. La función logística . . . . .	4
<b>2. Contexto histórico</b>	<b>7</b>
<b>3. Aplicaciones</b>	<b>11</b>
3.1. Distribución logística . . . . .	14
3.2. Machine Learning . . . . .	18
3.3. Clasificación FIDE . . . . .	19
3.4. Crecimiento de tumores . . . . .	21
3.4.1. La función de Gompertz . . . . .	23
3.5. Epidemias . . . . .	25
<b>4. Resolución en serie de potencias</b>	<b>29</b>
4.1. Relación entre la función logística y la función zeta de Riemann . . . . .	32
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>
<b>Anexo</b>	<b>39</b>
<b>Anexo I: Clasificación de imágenes mediante <i>Machine Learning</i></b>	<b>41</b>



## Resumen

La ecuación diferencial logística, tal y como la conocemos hoy, fue desarrollada por Verhulst, con la intención de mejorar y crear un modelo más realista que el anterior (el modelo de Malthus). Una de las soluciones particulares más importantes e interesantes de dicha ecuación diferencial es la función logística.

La ecuación diferencial logística es de gran utilidad en diversos campos, entre ellos, en el campo de la estadística, ya que la función logística es la función de distribución de la distribución logística; en la regresión logística; para hacer la clasificación FIDE (Federación Internacional de Ajedrez); en el campo de la medicina, en concreto para estudiar el crecimiento de tumores; en epidemiología, pues el crecimiento de una enfermedad contagiosa puede modelarse mediante una función logística generalizada (en particular el coronavirus). Además de todas estas aplicaciones también tiene otras relacionadas con el crecimiento del número de usuarios de una red social, de innovaciones científicas o sociales, etc.

Los coeficientes de la solución de la ecuación diferencial logística mediante series de potencias están relacionados con la sucesión de números de Bernoulli y con los polinomios de Euler, a partir de los cuales se puede relacionar la ecuación diferencial logística con la función zeta de Riemann.

## Abstract

The logistic differential equation, as we know it nowadays, was developed by Verhulst with the purpose of improving and creating a more realistic model than the previous one (Malthus model). One of the most important and interesting particular solutions of that differential equation is the logistic function.

The logistic differential equation is very useful in several fields, among them, in statistics, since the logistic function is the distribution function of the logistic distribution; in logistic regression; to make the FIDE classification (International Chess Federation); in medicine, specially to study the growth of tumors; in epidemiology as the growth of a contagious disease can be modelled through a generalized logistic function, (in particular the coronavirus). In addition to all these applications it also has others related with the growth of number of users of a social network, scientific or social innovations, etc.

The coefficients of the logistic differential equation solution by power series are related with the Bernoulli numbers sequence and with the Euler polynomials, from which the logistic equation can be related to the Riemann zeta function.

# Introducción

La ecuación diferencial logística tiene muchas aplicaciones en diferentes campos. Recientemente ha destacado su utilidad en el campo de la epidemiología debido a la pandemia del COVID-19.

En este trabajo se estudiarán las soluciones de dicha ecuación, en particular la llamada función logística, y sus propiedades.

También se enmarcará esta ecuación diferencial en un contexto histórico para dejar claro cuál fue su principal utilidad en sus orígenes y cómo ha evolucionado su definición hasta llegar a la actual.

Esta definición actual permite su aplicación, además de en epidemiología, en el estudio de distintos tipos de crecimiento de poblaciones, en diversos campos científicos, redes sociales e incluso se utiliza en algún deporte como el ajedrez. También es muy importante en estadística ya que es la base de la distribución logística y de la regresión logística, en particular veremos su aplicación en *machine learning* (aprendizaje automático).

Para terminar, se expondrá una resolución de la ecuación diferencial logística en forma de serie de potencias que puede tener utilidad en la resolución de la ecuación diferencial logística de orden fraccionario y que además permite establecer una relación entre la ecuación diferencial logística y la función zeta de Riemann.



# Capítulo 1

## Ecuación diferencial logística y función logística

**Definición 1.1.** La **ecuación diferencial logística** es la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$x'(t) = k \left( 1 - \frac{x(t)}{M} \right) x(t), \quad (1.1)$$

donde  $k$  y  $M$  son dos constantes positivas dadas.

### 1.1. Resolución de la ecuación diferencial logística

Nótese que  $x \equiv 0$  y  $x \equiv M$  son soluciones constantes de la EDO anterior.

Suponiendo que  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ , veamos que (1.1) tiene solución única. Para ello vamos a necesitar dos resultados que enunciamos a continuación, uno de ellos el teorema de Picard-Lipschitz.

**Proposición 1.2.** *Sea  $A = I \times V$  con  $I$  intervalo abierto en  $\mathbb{R}$  y  $V$  abierto convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Si existe la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , y es continua, entonces  $f \in Lip_{loc}(A, x)$ .*

**Teorema 1.3** (de Picard-Lipschitz). *Sea  $f : (t, x) \in A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^n$  y consideremos la ecuación diferencial ordinaria  $x' = f(t, x)$ . Si  $A$  es un abierto,  $f$  es continua en  $A$  y  $f \in Lip_{loc}(A, x)$ , entonces fijado  $(t_0, x_0) \in A$ , existe solución local de la EDO pasando por  $(t_0, x_0)$  y es única.*

## 2 CAPÍTULO 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL LOGÍSTICA Y FUNCIÓN LOGÍSTICA

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria descrita en (1.1) y veamos que cumple las hipótesis del teorema de Picard-Lipschitz (Teorema 1.3) para  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  fijado el punto  $(0, x_0)$ .

En este caso,  $f(t, x) = k \left(1 - \frac{x}{M}\right) x$  es continua en todo punto  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  y también es localmente lipschitziana en  $\mathbb{R}^2$  con respecto a la variable  $x$  ya que  $\frac{\partial f}{\partial x} = k \left(1 - \frac{2x}{M}\right)$  es continua en  $\mathbb{R}^2$  y se puede aplicar la proposición anterior.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Picard-Lipschitz y podemos afirmar que existe solución local de (1.1) pasando por  $(0, x_0)$  y esta es única para esa condición inicial.

Veamos ahora cuál es dicha solución.

La EDO que estamos considerando no es lineal pero sí es de variables separadas, es decir,

$$x'(t) = h(t) \cdot g(x),$$

donde

$$h(t) = 1, g(x) = k \left(1 - \frac{x}{M}\right) x.$$

Escribiendo  $x'(t) = \frac{dx}{dt}$  e integrando  $\int \frac{1}{g(x)} dx = \int dt$ , se tiene

$$-\frac{1}{k} \left( -\ln \left( \frac{|x|}{|M|} \right) + \ln \left| \frac{x}{M} - 1 \right| \right) = t + c$$

y despejando se tiene que la solución general es

$$x(t) = \frac{M e^{kt} c}{e^{kt} c - 1}, \tag{1.2}$$

siendo  $c$  una constante.

Utilizando ahora que  $x(0) = x_0$ ,  $c = \frac{x_0}{x_0 - M}$  y sustituyendo en (1.2) llegamos a la solución que buscábamos

$$x(t) = \frac{M x_0 e^{kt}}{M + x_0 (e^{kt} - 1)}. \tag{1.3}$$

Podemos comprobar resolviendo dicha EDO en Maple que efectivamente (1.3) es su solución:

$$edo := \frac{d}{dt}x(t) = k \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) x(t)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = k \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) x(t)$$

$$solg := dsolve(edo, x(t))$$

$$x(t) = \frac{M}{1 + e^{-kt} - C1 M}$$

$$eval(solg, t = 0)$$

$$x(0) = \frac{M}{M - C1 + 1}$$

$$C := solve \left( x(0) = \frac{M}{M - C1 + 1}, -C1 \right)$$

$$\frac{M - x(0)}{Mx(0)}$$

$$sol := eval(solg, -C1 = C)$$

$$x(t) = M \left( 1 + \frac{e^{-kt} (M - x(0))}{x(0)} \right)^{-1}$$

$$solf := simplify(sol)$$

$$x(t) = \frac{Mx(0)}{e^{-kt}M - e^{-kt}x(0) + x(0)}$$

Ahora bien, si  $0 < x_0 < M$ , entonces la solución  $x(t)$  está en  $(0, M)$ . Efectivamente, si  $x(t_1) = 0$  para algún  $t_1 > 0$ , entonces  $x(t) \equiv 0$  ya que vimos que es solución trivial de (1.1) y existe unicidad de solución. Si  $x(t_2) = 0$  para algún  $t_2 < 0$ , ocurre lo mismo y  $x(t) \equiv 0$ . De la misma manera,  $x(t)$  no puede tomar el valor  $M$  ya que la función constante  $M$  es

## 4 CAPÍTULO 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL LOGÍSTICA Y FUNCIÓN LOGÍSTICA

solución trivial.

Si  $x_0 > M$ , entonces  $x'(0) = k \left(1 - \frac{x(0)}{M}\right) x(0) < 0$  lo que implica que  $x$  es decreciente en un entorno del 0 para  $t > 0$ . Además la solución está acotada inferiormente por  $M$ , ya que si  $x(t_3) = M$  para  $t_3 > 0$  entonces  $x(t) \equiv M$  por la unicidad de solución. Análogamente, si  $x_0 < 0$  se tiene que  $x'(0) = k \left(1 - \frac{x(0)}{M}\right) x(0) > 0$  por lo que  $x$  es creciente en un entorno del 0 y acotada superiormente por 0, ya que si  $x(t_4) = 0$  para  $t_4 > 0$  entonces  $x(t) \equiv 0$  por la unicidad de solución y se puede prolongar. Así concluimos que en ambos casos la solución se puede prolongar.

### 1.2. La función logística

En este apartado consideraremos la EDO (1.1) con parámetros  $k = 1$  y  $M = 1$ . Así  $x' = x - x^2$ , que es una EDO de variables separadas cuya solución general es

$$x(t) = \frac{e^t}{c + e^t}$$

Distinguimos tres casos según  $x_0 > M$ ,  $x_0 < 0$  ó  $x_0 \in (0, M)$ .

Caso 1:  $x_0 > M$ . Por ejemplo, tomando  $c = -1/2$ , que se corresponde con  $x_0 = 2 > M$ , se tiene

$$x(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-t}}$$

y su gráfica es de la forma

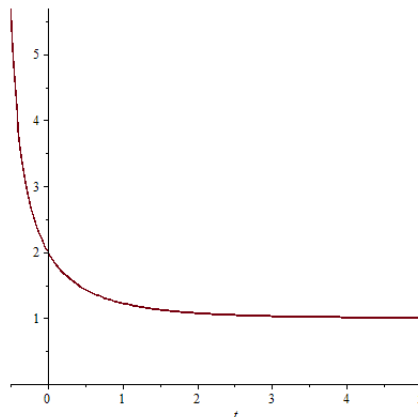


Figura 1.1: Ejemplo de la solución particular de (1.1) con  $x_0 > M$ .

Caso 2:  $x_0 < 0$ . Por ejemplo, tomando  $c = -2$ , que se corresponde con  $x_0 = -1 < 0$ , se tiene

$$x(t) = \frac{1}{1 - 2e^{-t}}$$

y su gráfica es de la forma

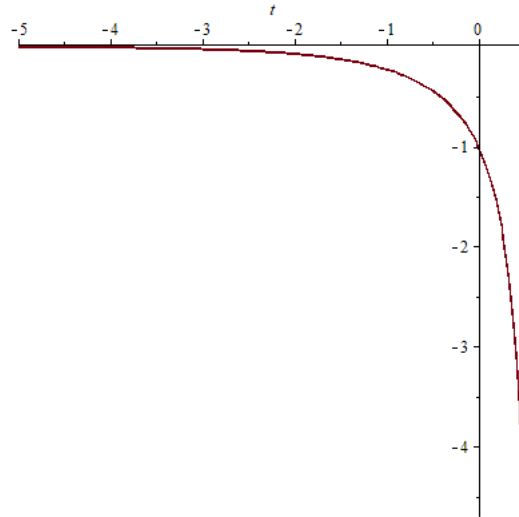


Figura 1.2: Ejemplo de una solución particular de (1.1) con  $x_0 < 0$ .

Caso 3: Tomando  $c=1$ , que corresponde con el valor inicial  $x(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$ ,

$$x(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \tag{1.4}$$

es la **función logística**. Esta función está definida  $\forall t \in \mathbb{R}$ , es positiva con simetría par respecto al eje  $t=0$ , las asíntotas de la función a la derecha y a la izquierda se aproximan a la curva simétricamente. Además es creciente pero está acotada ya que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ . (Ver Figuras 1.3 y 1.4).

6 CAPÍTULO 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL LOGÍSTICA Y FUNCIÓN LOGÍSTICA

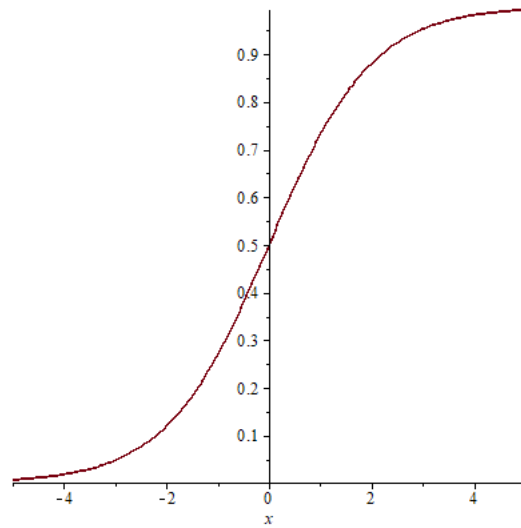


Figura 1.3: Gráfica de la función logística en  $[-5,5]$ .

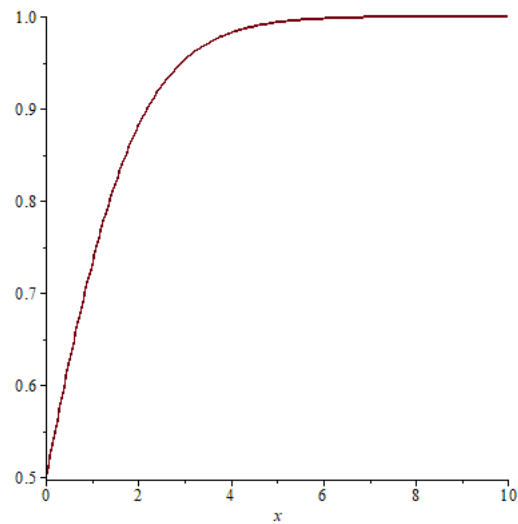


Figura 1.4: Gráfica de la función logística en  $[0,10]$ .

## Capítulo 2

# Contexto histórico

La función logística surge en el contexto de buscar una función que explicase el crecimiento de una población. Un primer modelo para esto fue el **Modelo de Malthus**(1798) que explica cómo crece una población según la siguiente ecuación

$$x'(t) = kx(t),$$

donde  $k$  es una constante que se indentifica con la tasa de crecimiento de la población a estudiar. Según este modelo el crecimiento de la población sería proporcional a la población y para  $x(0) = x_0 > 0$ , se tiene que

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Por lo tanto, el crecimiento de la población sería exponencial y a largo plazo no es nada razonable ya que la población crecería indefinidamente y cada vez más rápido (sería el caso con  $k > 0$ ), o bien decrecería (si  $k < 0$ ) hasta desaparecer la especie. Obviamente si  $k = 0$ , la función  $x(t)$  sería constante.

En busca de un modelo más realista, en 1847, Verhulst desarrolló el modelo logístico que lleva su nombre, que es el relacionado con la EDO logística descrita en (1.1), donde se incluye, además de la tasa de crecimiento del modelo de Malthus, la capacidad máxima de la población,  $M$ . Este modelo indica que la población crece rápidamente al inicio y mientras no supere su máxima capacidad, esta seguirá creciendo.

Aunque aquí trataremos el caso sencillo en el que  $k$  y  $M$  son constantes, obviamente pueden variar a lo largo del tiempo, como vemos en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 2.1.** Consideramos  $M = 1$  y  $k(t) = 1 + \sin(t)$  en la EDO (1.1) y resolvemos dicha ecuación diferencial con el programa Maple.

$$\begin{aligned} \text{edo} &:= \frac{d}{dt}x(t) = (1 + \sin(t))(1 - x(t))x(t) \\ &\frac{d}{dt}x(t) = (1 + \sin(t))(1 - x(t))x(t) \end{aligned}$$

$$\text{solg} := \text{dsolve}(\text{edo}, x(t))$$

$$x(t) = \left(1 + e^{-t+\cos(t)} \_C1\right)^{-1}$$

$$\text{eval}(\text{solg}, t = 0)$$

$$x(0) = (1 + e\_C1)^{-1}$$

$$\begin{aligned} C &:= \text{solve}\left(x(0) = (1 + e\_C1)^{-1}, \_C1\right) \\ &\quad - \frac{x(0) - 1}{x(0)e} \end{aligned}$$

$$\text{sol} := \text{eval}(\text{solg}, \_C1 = C)$$

$$x(t) = \left(1 - \frac{e^{-t+\cos(t)}(x(0) - 1)}{x(0)e}\right)^{-1}$$

$$\text{sol} := \text{simplify}(\text{sol})$$

$$x(t) = \frac{x(0)e}{x(0)e - e^{-t+\cos(t)}x(0) + e^{-t+\cos(t)}}$$

Es decir, la solución pasando por  $x(0) = x_0$  es

$$x(t) = \frac{x_0 e}{x_0 e - e^{-t+\cos(t)}x_0 + e^{-t+\cos(t)}}$$

y en particular para  $x_0 = 1/2$ , esta solución tiene la siguiente forma

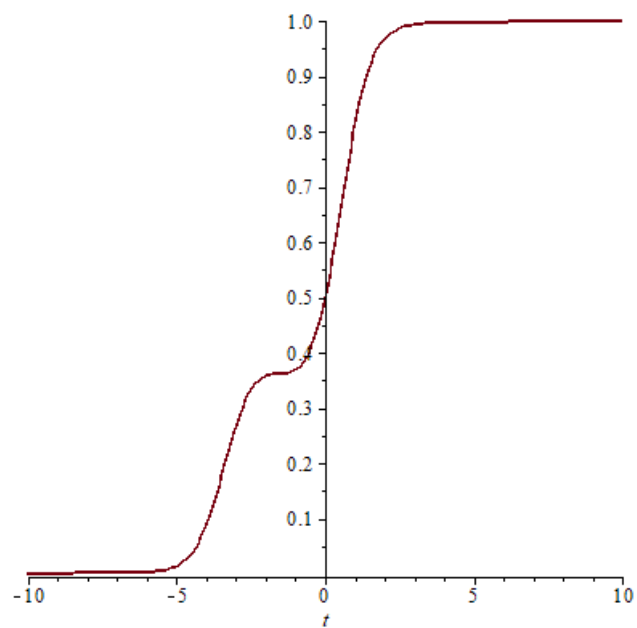


Figura 2.1: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial logística tomando  $k = 1 + \text{sen}(t)$  y  $M = 1$ .



## Capítulo 3

# Aplicaciones

La ecuación diferencial logística aparece y es útil en diversos campos, por ejemplo para estudiar el crecimiento de innovaciones en el aspecto científico o social, o bien el crecimiento del uso de una palabra en un idioma. Otro ejemplo de aplicación de dicha EDO es en la evolución del número de usuarios de una **red social**. Efectivamente su crecimiento se puede modelar mediante una ecuación diferencial logística, ya que al principio el número de usuarios crece muy lento, después aumenta de manera exponencial debido a la influencia que tendrá socialmente y finalmente crece lentamente de nuevo hasta llegar a la saturación. Aunque esto sea así, actualmente las redes sociales están en su pleno auge y aún no se ha llegado a un punto de estabilización (ver Figura 3.1).



Figura 3.1: Usuarios mensuales activos de la red social Facebook desde su inicio hasta principios de 2020.

En la gráfica anterior se puede ver que durante los primeros 4 años aproximadamente el crecimiento es muy lento y desde 2009 hasta ahora el número de usuarios ha aumentado exponencialmente.

Como hemos comentado antes podemos aproximar el comportamiento de estos datos mediante una función solución de la ecuación diferencial logística. Como en este caso particular todavía el crecimiento es de forma exponencial, ajustaremos primero dichos datos a una función exponencial. Para ello nos es de ayuda utilizar *Mathematica*.

LFit = NonlinearModelFit [Ldatosfacebook,  $ce^{kt}$ , { $c, k$ },  $t$ ]; LFit(BestFitParameters)

$$\{c \rightarrow 2.0744 \times 10^8, k \rightarrow 0.175152\}$$

Así, tenemos que la función exponencial que mejor se ajusta a los datos es

$$f(t) = 2.0744 \cdot 10^8 \cdot e^{0.175152t},$$

siendo  $k = 0.175152$  la tasa decrecimiento y  $c = 2.0744 \cdot 10^8$  la condición inicial.

Ahora, de manera similar, podemos estimar una función de la misma forma que (1.3), considerando los parámetros  $k$  y  $x_0 = c$ , anteriores.

LFit2 = NonlinearModelFit [Ldatosfacebook,  $\frac{2.0744 \cdot 10^8 \cdot m \cdot \exp(0.175152t)}{m + 2.0744 \cdot 10^8 \cdot (\exp(0.175152t) - 1)}$ , { $m$ },  $t$ ];  
LFit2(BestFitParameters)

$$\{m \rightarrow 1.66026 \times 10^{11}\}$$

Entonces se tiene que la función ajustada a estos datos es

$$x(t) = \frac{3.44406 \cdot 10^{19} \cdot \exp(0.175152t)}{1.66026 \cdot 10^{11} + 2.0744 \cdot 10^8 \cdot \exp(0.175152t)}, \quad (3.1)$$

siendo  $M = 1.66026 \cdot 10^{11}$  la capacidad máxima de usuarios (donde se produciría la saturación) y  $k$  y  $x_0$  los mismos que antes. Esta función tiene la siguiente forma

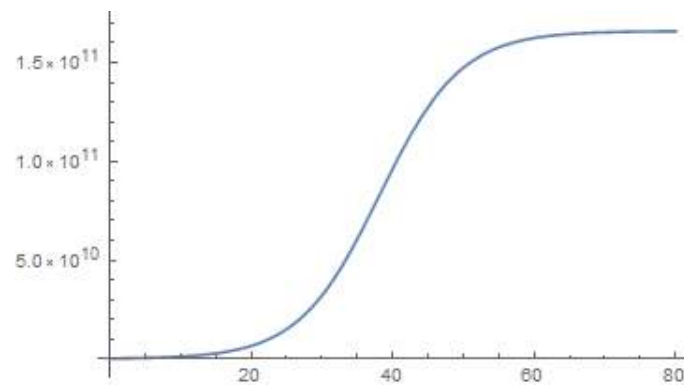


Figura 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Podemos representar los datos que tenemos de los usuarios de Facebook desde 2004 hasta 2020 y ver que efectivamente se ajustan bien a esta función

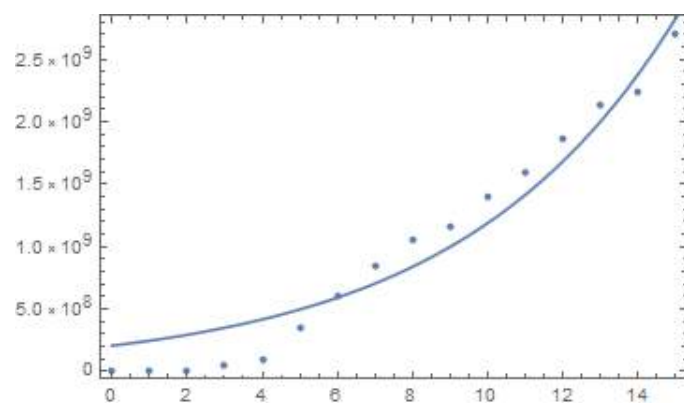


Figura 3.3: En este gráfico se representan con puntos los datos que tenemos sobre los usuarios de Facebook desde 2004 hasta 2020 y la función calculada que se ajusta a ellos.

Lo que podemos concluir de todo esto, como bien habíamos comentado antes, es que las redes sociales, Facebook en este caso particular, están actualmente en su pleno auge y tras este estudio podemos estimar que dentro de unos años el crecimiento exponencial de usuarios que hay ahora se empezará a estabilizar.

### 3.1. Distribución logística

La función logística también es muy importante ya que es la función de distribución de la distribución logística (distribución de probabilidad continua). y dicha distribución es importante en muchas áreas como en biología, para explicar el comportamiento de las especies en ambientes competitivos; en epidemiología, para describir la propagación de epidemias (ver sección 3.5), en particular ha sido muy importante en este campo debido a la actual pandemia del COVID-19; en marketing, tecnología, psicología etc.

Antes de introducir cuáles son las funciones de distribución y densidad de la distribución logística, recordemos dos funciones que nos harán falta.

La primera de ellas es la función **tangente hiperbólica** cuya fórmula es

$$\tanh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad (3.2)$$

y su gráfica

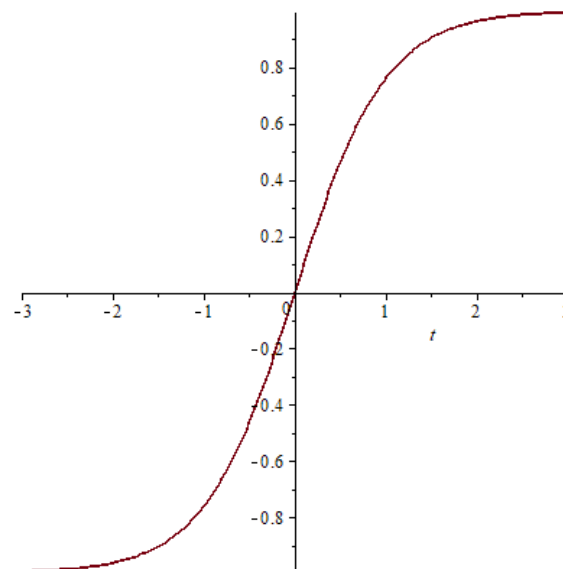


Figura 3.4: Gráfica de  $\tanh(t)$ .

La segunda función es la **secante hiperbólica** que tiene la siguiente expresión

$$\operatorname{sech}(t) = \frac{2}{e^t + e^{-t}}, \quad (3.3)$$

y su gráfica es

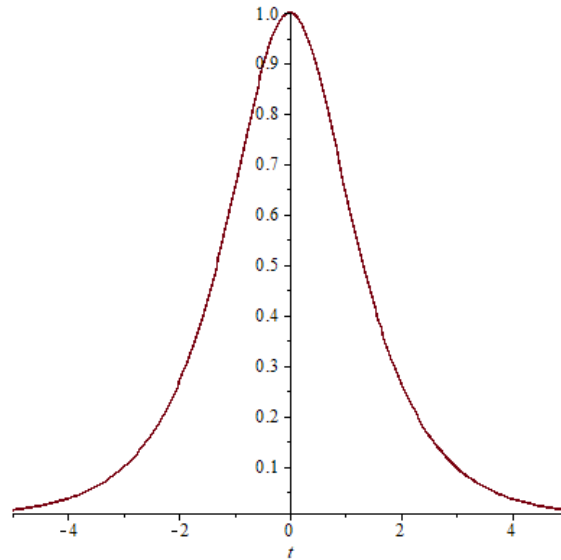


Figura 3.5: Gráfica de  $\text{sech}(t)$ .

Teniendo en cuenta estas dos funciones ya podemos ver qué expresiones toman las funciones de distribución y densidad.

La función de distribución de la distribución logística, como ya se ha comentado antes, pertenece a la familia de las funciones logísticas. Sea  $\mu$  el parámetro de localización y  $s$  el parámetro de escala, la función de distribución viene dada por:

$$F(t; \mu, s) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{t-\mu}{s}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{t-\mu}{2s}\right), \quad (3.4)$$

usando (3.2).

Y su función de distribución inversa es

$$F^{-1}(p; \mu, s) = \mu + s \ln\left(\frac{p}{1-p}\right). \quad (3.5)$$

Cuando  $\mu = 0$  y  $s = 1$  se tiene que la función de distribución es

$$F(t; 0, 1) = \frac{1}{1 + e^{-t}} = F(t),$$

que es la función logística usual (1.4).

La función de distribución (3.4) se corresponde con la función de densidad

$$f(t; \mu, s) = \frac{e^{-\frac{t-\mu}{s}}}{s \left(1 + e^{-\frac{t-\mu}{s}}\right)^2} \stackrel{3.3}{=} \frac{1}{4s} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t-\mu}{2s} \right).$$

Nótese que la función de distribución acumulada es

$$\int_{-\infty}^t f(\xi; \mu, s) d\xi = F(t; \mu, s).$$

Obviamente

$$f(t; 0, 1) = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t}{2} \right) = f(t) = F'(t),$$

y

$$F'(t) = F(t) - F(t)^2$$

Por cómo es la función de densidad, a esta distribución también se le denomina distribución sech-cuadrado. Veamos cuales son su media y varianza.

La media de una variable aleatoria  $T$  que sigue una cierta distribución de probabilidad continua con función de densidad  $f(t)$  viene dada por

$$E[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt.$$

En particular, para la distribución logística veamos que  $E[T] = \mu$ . Para dicha distribución se tiene que

$$E[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{4s} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{t-\mu}{2s} \right) dt,$$

y sustituyendo  $u = \frac{t-\mu}{2s}$ ,  $du = \frac{1}{2s} dt$

$$E[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2su + \mu}{2} \operatorname{sech}^2(u) du = s \int_{-\infty}^{+\infty} u \operatorname{sech}^2(u) du + \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(u) du.$$

Como la función  $u \operatorname{sech}^2(u)$  es impar, entonces

$$s \int_{-\infty}^{+\infty} u \operatorname{sech}^2(u) du = 0.$$

Además,  $\int \operatorname{sech}^2(u) du = \tanh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ , por lo que

$$E[T] = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(u) du = \mu.$$

Comprobamos con Maple que efectivamente el valor de  $E[T]$  es  $\mu$ :

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} 1/2 (2su + \mu) (\operatorname{sech}(u))^2 du$$

$$E(T) = \mu$$

La varianza de una variable aleatoria  $T$  con  $f(t)$  como su función de densidad se calcula de la siguiente forma:

$$\operatorname{Var}[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E[T])^2 f(t) dt.$$

En nuestro caso, como  $E[T] = \mu$ , tenemos que

$$\operatorname{Var}[T] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu)^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu)^2 dF(t).$$

Para facilitar los cálculos, expresamos esta última integral en función de la función de distribución inversa (3.5)

$$\operatorname{Var}[T] = \int_0^1 (F^{-1}(p) - \mu)^2 dp = s^2 \int_0^1 \ln^2 \left( \frac{p}{1-p} \right) dp.$$

Esta integral puede expresarse en función de los números de Bernoulli de manera que

$$\int_0^1 \ln^2 \left( \frac{p}{1-p} \right) dp = 2\pi^2 |B_2|.$$

Por lo tanto, como  $B_2 = \frac{1}{6}$ , se tiene que la varianza es

$$\operatorname{Var}[T] = \frac{s^2 \pi^2}{3}.$$

También lo comprobamos con Maple:

$$\operatorname{Var}(T) = s^2 \int_0^1 \left( \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) \right)^2 dp$$

$$\operatorname{Var}(T) = s^2 \int_0^1 \left( \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) \right)^2 dp$$

$$\operatorname{simplify} \left( \operatorname{Var}(T) = s^2 \int_0^1 \left( \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) \right)^2 dp \right)$$

$$\operatorname{Var}(T) = 1/3 \pi^2 s^2$$

## 3.2. Machine Learning

Con **machine learning** (aprendizaje automático), nos referimos a un campo de las ciencias de la computación y de la inteligencia que tiene como objetivo el aprendizaje automático de los ordenadores, es decir, que los ordenadores o algún sistema electrónico sean capaces de aprender y realizar tareas sin haber sido programadas para hacerlo.

Para ello, el ordenador se basa en la *experiencia*. Aplica algoritmos machine learning para crear modelos matemáticos y después puede hacer predicciones o tomar decisiones cuando tenga un nuevo conjunto de datos.

Hay muchos tipos de algoritmos. Aquí nos centraremos en el algoritmo de aprendizaje supervisado. Mediante este algoritmo, el ordenador aprende a partir de etiquetas de conjuntos de datos, donde hay variables de entrada ( $X$ ) y una variable de salida ( $Y$ ).

El objetivo es encontrar una función que relacione bien  $X$  e  $Y$  para cuando entren nuevas entradas, se aplique dicha función para predecir la salida correspondiente. Una subdivisión de este tipo de aprendizaje es la **regresión**.

Los problemas de regresión se dan cuando la variable de salida es numérica (sino serían problemas de clasificación), y se trata de estimar la relación entre la variable dependiente basándose por lo menos en una variable de entrada (variable independiente).

Para describir una situación sencilla y para modelar este tipo de problemas se puede utilizar la **regresión logística**, que es un modelo estadístico empleado para modelar una variable dependiente binaria. Para ello es de vital importancia la función logística.

Si consideramos la función logística

$$\tau(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

y suponemos que  $t$  es una función lineal de una única variable explicativa  $x$  (si  $t$  fuese combinación lineal de varias variables explicativas se trataría de manera similar), podemos expresar  $t$  de la siguiente manera:

$$t = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Podemos escribir entonces la siguiente función logística general

$$p(x) = \tau(t) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}} \quad (3.6)$$

Así, en el modelo logístico,  $p(x)$  se corresponde con la probabilidad de que la variable dependiente  $Y$  tenga “éxito” cuando  $X = x$ .

Cuando llegan nuevas observaciones, podemos usar sus variables de entrada y la función (3.6) para predecir la probabilidad de que estos nuevos datos pertenezcan a la clase  $Y = 1$ .

Esta probabilidad puede usarse como criterio para clasificar la nueva observación. Cuanto mayor sea esta probabilidad, más probable será que la nueva observación pertenezca a la clase  $Y = 1$  en vez de a  $Y = 0$ .

En el Anexo 4.1 se incluye una aplicación sencilla de clasificación de imágenes usando *machine learning* en *Mathematica*.

### 3.3. Clasificación FIDE

La distribución logística también se utiliza para hacer la clasificación FIDE (Federación Internacional de Ajedrez). Este ranking se rige por el sistema de puntuación Elo, en el cual las diferencias en la calificación se pueden convertir en puntuación o en probabilidades ganadoras.

Dado  $C$  el intervalo de clase en la escala determinada que inicialmente se establece en la diferencia de calificación,  $D$ , la probabilidad de que un jugador puntúe sobre otro indicada por  $D$ , viene dada por la siguiente variante de la función logística:

$$P_D = \frac{1}{1 + e^{-D/C}},$$

donde  $C$  se define como una desviación estándar  $\sigma$  y en este caso se tomará  $\sigma = 174$ .

Así, las probabilidades para cada diferencia de calificación vienen dadas por la Tabla 3.1.

D	P		D	P		D	P	
	H	L		H	L		H	L
0-3	0.50	0.50	122-129	0.67	0.33	279-290	0.84	0.16
4-10	0.51	0.49	130-137	0.68	0.32	291-302	0.85	0.15
11-17	0.52	0.48	138-145	0.69	0.31	303-315	0.86	0.14
18-25	0.53	0.47	146-153	0.70	0.30	316-328	0.87	0.13
26-32	0.54	0.46	154-162	0.71	0.29	329-344	0.88	0.12
33-39	0.55	0.45	163-170	0.72	0.28	345-357	0.89	0.11
40-46	0.56	0.44	171-179	0.73	0.27	358-374	0.90	0.10
47-53	0.57	0.43	180-188	0.74	0.26	375-391	0.91	0.09
54-61	0.58	0.42	189-197	0.75	0.25	392-411	0.92	0.08
62-68	0.59	0.41	198-206	0.76	0.24	412-432	0.93	0.07
69-76	0.60	0.40	207-215	0.77	0.23	433-456	0.94	0.06
77-83	0.61	0.39	216-225	0.78	0.22	457-484	0.95	0.05
84-91	0.62	0.38	226-235	0.79	0.21	485-517	0.96	0.04
92-98	0.63	0.37	236-245	0.80	0.20	518-559	0.97	0.03
99-106	0.64	0.36	246-256	0.81	0.19	560-619	0.98	0.02
107-113	0.65	0.35	257-267	0.82	0.18	620-735	0.99	0.01
114-121	0.66	0.34	268-278	0.83	0.17	>735	1.00	0.00

Tabla 3.1: Tabla con las probabilidades de puntuar (P) para cada diferencia de calificación, D. Se muestran las probabilidades para el jugador con más puntuación (H), y para el jugador con menos puntuación (L).

Utilizando esta probabilidad, el sistema Elo calcula la calificación de un jugador después de una competición,  $(R_n)$ , según:

$$R_n = R_0 + K(W - W_e), \quad (3.7)$$

siendo  $R_0$  la calificación que tenía el jugador antes de la competición; K, el valor que tiene un punto de calificación en una partida (depende del tipo de competición); W, el número de partidas ganadas (contando tablas como 0.5); y  $W_e$ , número esperado de W, es decir,  $W_e = N \cdot P_{Dc}$ , siendo N el número de partidas que se van a jugar y  $P_{Dc}$  la probabilidad indicada por la diferencia entre la calificación del jugador y la calificación media de los oponentes del jugador.

Veamos un ejemplo de cómo se aplica.

**Ejemplo 3.1.** Antes del Torneo Internacional de Hoogoven de 1975, el jugador Portisch tenía una calificación  $R_0 = 2635$  y sus 15 oponentes tenían una calificación promedio  $R_c = 2527$ . El número de partidas programadas era  $N = 15$  y su puntuación final en el torneo fue  $W = 10.5$ . Vamos a calcular la calificación del jugador después del torneo ( $R_n$ ).

Para empezar observamos que la diferencia de calificación es  $D = R_0 - R_n = 108$ , para la cual, la Tabla 3.1, indica una probabilidad  $P_{Dc} = 0.65$ .

A continuación calculamos  $W_e$ , el número de partidas que se espera que gane:

$$W_e = N \cdot P_{Dc} = 15 \cdot 0.65 = 9.75$$

La nueva calificación, como vimos en (3.7) también depende de  $K$ , que en competiciones internacionales vale 10, por lo tanto, la nueva calificación de Portisch después de este torneo es:

$$R_n = R_0 + K(W - W_e) = 2635 + 10(10.5 - 9.75) = 2642.5^1$$

### 3.4. Crecimiento de tumores

Si se modifica la ecuación diferencial logística (1.1) de tal manera que:

$$x'(t) = \alpha \ln \left( \frac{M}{x(t)} \right) x(t), \quad (3.8)$$

obtenemos una forma particular de ella conocida como la **ecuación diferencial de Gompertz**, que se utiliza como modelo para estudiar el crecimiento de tumores, y cuya solución se denomina función de Gompertz de la que se hablará en la Sección 3.4.1.

La EDO (3.8) es de variables separadas igual que (1.1), por lo que procediendo de forma similar tenemos que su solución general es

$$x(t) = \frac{M}{\exp(\exp(-\alpha t)C)}, \quad (3.9)$$

---

<sup>1</sup>El decimal puede ser redondeado como se desee si ningún efecto significativo en la precisión de la calificación.

siendo  $C$  una constante. Ahora utilizamos que  $x(0) = x_0$  y entonces  $C = \ln\left(\frac{M}{x_0}\right)$  y sustituyendo en (3.9) llegamos a la solución que buscábamos

$$x(t) = M \left(\frac{x_0}{M}\right)^{e^{-t\alpha}}.$$

Resolvemos ahora esta EDO (3.8) con Maple y vemos el resultado simplificado:

$$\text{edo} := \frac{d}{dt}x(t) = \alpha \ln\left(\frac{M}{x(t)}\right)x(t)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \alpha \ln\left(\frac{M}{x(t)}\right)x(t)$$

$$\text{solg} := \text{dsolve}(\text{edo}, x(t))$$

$$x(t) = Me^{-e^{-C1}\alpha - t\alpha}$$

$$\text{eval}(\text{solg}, t = 0)$$

$$x(0) = Me^{-e^{-C1}\alpha}$$

$$C := \text{solve}\left(x(0) = Me^{-e^{-C1}\alpha}, \_C1\right)$$

$$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(-\ln\left(\frac{x(0)}{M}\right)\right)$$

$$\text{sol} := \text{eval}(\text{solg}, \_C1 = C)$$

$$x(t) = Me^{-e^{-t\alpha + \ln\left(-\ln\left(\frac{x(0)}{M}\right)\right)}}$$

$$\text{solf} := \text{simplify}(\text{sol})$$

$$x(t) = M \left(\frac{x(0)}{M}\right)^{e^{-t\alpha}}$$

Por lo tanto, se puede explicar el crecimiento tumoral según la función

$$x(t) = M \left(\frac{x_0}{M}\right)^{e^{-\alpha t}},$$

considerando  $M$  el máximo tamaño que puede alcanzar el tumor con los nutrientes disponibles,  $x_0$  el tamaño del tumor en el inicio de la observación y  $\alpha$  una constante relacionada con la capacidad reproductora de las células tumorales que se puede determinar de manera

efectiva para cada proceso tumoral.

**Ejemplo 3.2.** Si consideramos un tumor que puede alcanzar un tamaño máximo  $M = 10^6 \text{ mm}^3$  y que en el instante inicial cuando se comienza a estudiar tiene un tamaño  $x_0 = 10^{-6} \text{ mm}^3$  y una capacidad reproductora  $\alpha = 0.05$ , entonces la gráfica que representa su tamaño según avanza el tiempo es la siguiente:

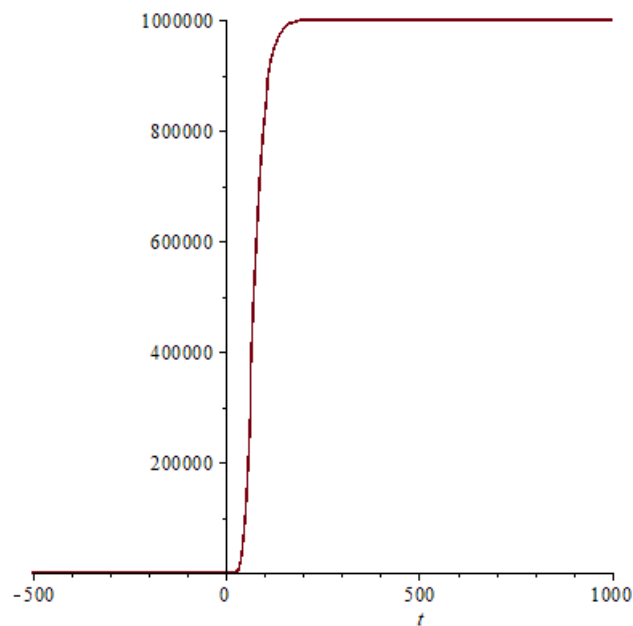


Figura 3.6: Ejemplo gráfico de cómo evoluciona el tamaño de un tumor particular.

### 3.4.1. La función de Gompertz

La **función de Gompertz** es una función de la forma

$$x(t) = ae^{-be^{-ct}}.$$

Esta función, igual que la función logística, tiene dos asíntotas. La asíntota izquierda que es  $x=0$  y la derecha,  $x=a$ . (Ver Figura 3.7 (a): en azul la asíntota derecha se ve que es  $x=1$  y en rojo  $x=1/2$ ). Sin embargo la función de Gompertz no presenta simetría, sino que se acerca a la asíntota derecha más gradualmente que a la de la izquierda.

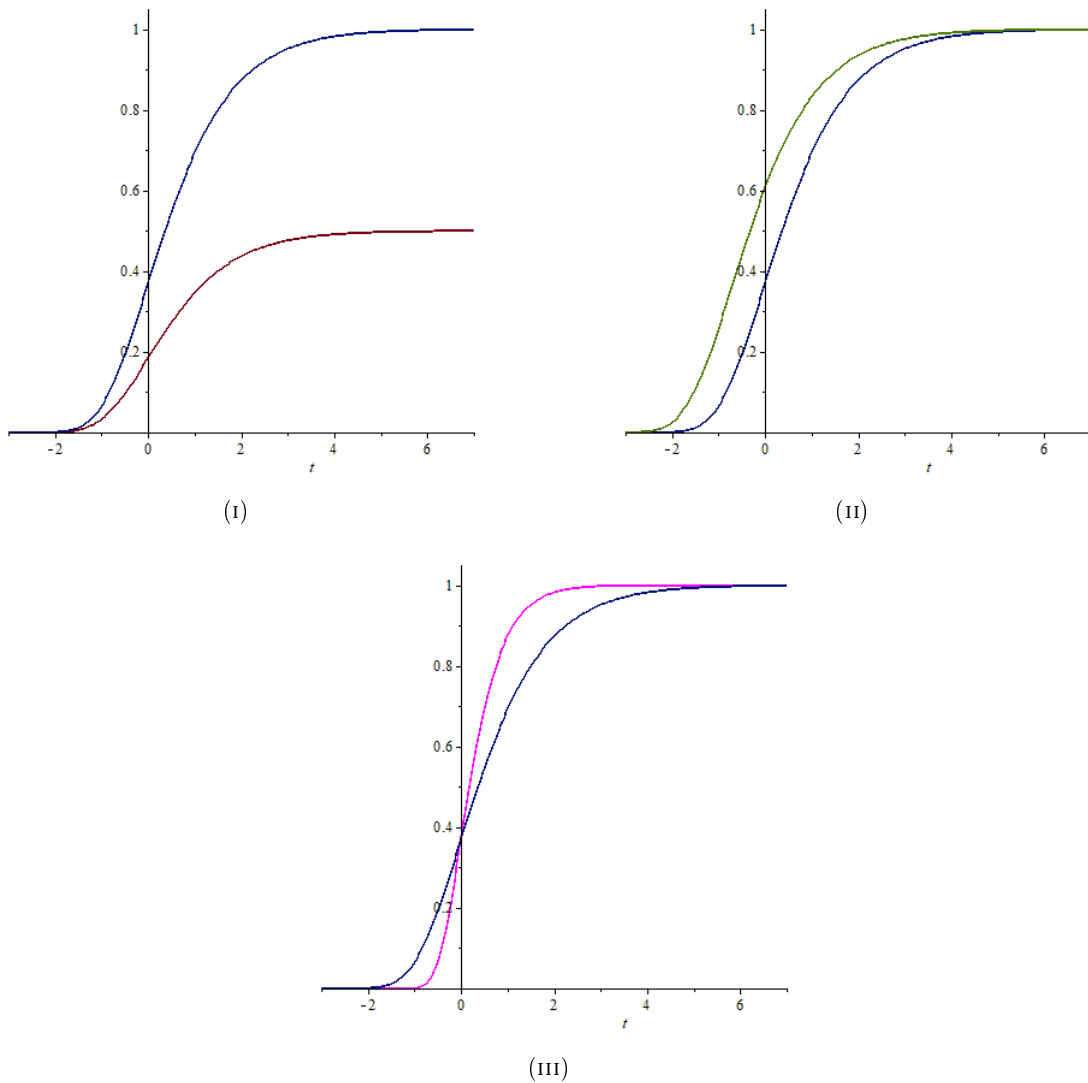


Figura 3.7: Gráficas de la función de Gompertz para distintos valores de  $a, b$  y  $c$ . En las tres imágenes se representa en azul la función para  $a=b=c=1$  ( $x(t) = e^{-e^{-t}}$ ). En color rojo en (3.7I) se reproduce la función cambiando  $a=1$  por  $a=1/2$  ( $x(t) = \frac{1}{2}e^{-e^{-t}}$ ); en verde en (3.7II), se cambia  $b=1$  por  $b=1/2$  ( $x(t) = e^{-\frac{1}{2}e^{-t}}$ ); y en rosa en (3.7III), cambiamos  $c=1$  por  $c=2$  ( $x(t) = e^{-e^{-2t}}$ ).

En la Figura 3.7 se puede observar cómo varía la función de Gompertz en función de los valores de sus parámetros. Como se ha explicado antes,  $x=a$  es la asíntota derecha de la función. La variación del parámetro  $b$  implica un desplazamiento en el eje  $t$ , si  $b$  disminuye, la función se desplaza hacia la izquierda (Figura 3.7II). Y por último en la gráfica 3.7III, se muestra que al variar  $c$  varía la velocidad del crecimiento de la función, es decir, si

comparamos la función en azul con la que está en rosa, vemos que la rosa crece más rápido a partir de  $t > 0$ . Esto significa que al aumentar  $c$ , para valores positivos de  $t$ , la función crecerá más rápido.

### 3.5. Epidemias

La función logística generalizada, también llamada curva de Richards, es otro modelo que se utiliza para estudiar el crecimiento de poblaciones pero de una manera más flexible que con las funciones logísticas, siendo una extensión de estas últimas.

Esta función tiene la siguiente expresión:

$$x(t) = L + \frac{M - L}{(C + Qe^{-kt})^{1/\xi}},$$

donde  $L$  es la asíntota inferior,  $M$  es la superior cuando  $C = 1$ ,  $k$  es la tasa de crecimiento,  $Q$  varía según la condición inicial  $x(0) = x_0$ ,  $C$  normalmente vale 1 y  $\xi > 0$  afecta al crecimiento máximo asintótico.

La función logística generalizada se ha utilizado mucho para describir diversos procesos biológicos pero actualmente ha sido muy importante para poder modelizar y predecir en tiempo real el número de casos infectados por COVID-19 (también es usada en otras enfermedades contagiosas). Para ello se ha usado una reparametrización de la curva de Richards que tiene la siguiente forma:

$$x(t) = \frac{\theta_1}{[1 + \xi \exp(-\theta_2(t - \theta_3))]^{1/\xi}}, \quad (3.10)$$

donde  $\theta_1$  representa la asíntota superior, es decir, el tamaño final de la epidemia (número de casos contagiados acumulados máximo),  $\theta_2$  es la tasa de infección y  $\theta_3$  representa el período de latencia, es decir, el tiempo que pasa desde que se produce el contagio hasta que aparecen los síntomas.

**Ejemplo 3.3.** Si tomamos los datos acumulados de casos diarios de contagios por COVID-19 en España desde el 1 de marzo de 2020 hasta el 31 de mayo de 2020 podemos observar en la figura 3.8 que efectivamente la función de crecimiento de dichos datos sigue la forma de la gráfica de una función logística.



Figura 3.8: Gráfico de barras que representa los datos acumulados de casos diarios de contagios por coronavirus desde el 1 de marzo de 2020 hasta el 31 de mayo de 2020.

Introduciendo estos datos en *Mathematica* podemos calcular una curva logística que se ajusta a estos datos utilizando la ecuación (3.10) y tomando  $\xi = 1$ .

```
LFit = NonlinearModelFit [Ldatosocovid,  $\frac{a}{e^{-k(t-c)}+1}$ , {a, k, c}, t];
LFit("BestFitParameters")
```

$$\{a \rightarrow 234904., k \rightarrow 0.12841, c \rightarrow 30.5815\}$$

Así, tenemos que los parámetros que definen en este caso particular la curva de Richards asociada son  $\theta_1 = 234904$ , que serían los casos contagiados acumulados máximos,  $\theta_2 = 0.12841$  la tasa de infección y  $\theta_3 = 30.5815$  el período de latencia, y la curva resultante es la siguiente

$$x(t) = \frac{234904}{1 + \exp(-0.12841(t - 30.5815))}.$$

En la siguiente gráfica se puede ver que efectivamente esta curva se aproxima bien a los datos proporcionados.

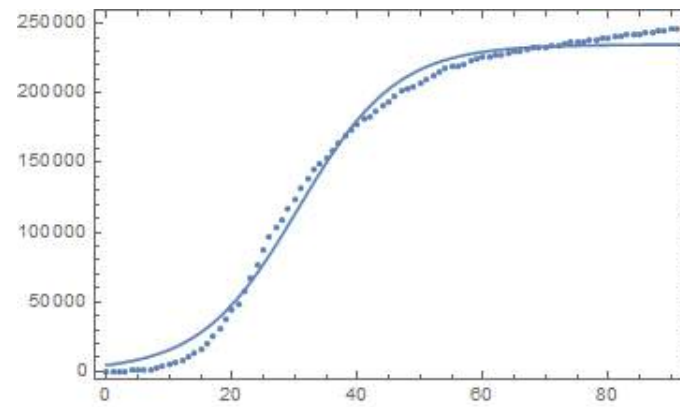


Figura 3.9: Puntos que representan los datos de contagios acumulados de COVID-19 mencionados antes y la curva de Richards (curva logística general) ajustada (3.3).



## Capítulo 4

# Resolución en serie de potencias

Otra forma en la que se puede encontrar la solución de (1.1) es en forma de una serie de potencias, es decir, buscamos  $x(t)$  de la forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \quad (4.1)$$

Si derivamos obtenemos

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n.$$

Teniendo en cuenta que

$$x^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \right) t^n,$$

sustituyendo en (1.1) e igualando las potencias de  $t^n$

$$(n+1)a_{n+1} = k a_n - \frac{k}{M} \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j}, \quad n \geq 0,$$

$$a_{n+1} = \frac{k}{n+1} \left( a_n - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \right).$$

Así ya tenemos todos los términos  $a_n$ ,  $n \geq 1$ . Falta ver cómo es el término  $a_0$ .

Si suponemos que la condición inicial es  $x(0) = x_0$ , nos queda que  $a_0 = x_0$ , y por lo tanto la solución a la ecuación diferencial logística (1.1) pasando por  $(0, x_0)$  es

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{n+1} \left( a_n - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \right) t^{n+1}.$$

Si tomamos  $M = 1$ ,  $k = 1$  y  $a_0 = x_0 = 1/2$ , hemos visto que la solución es la función logística

$$x(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\frac{1}{1 + e^{-t}} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left( a_n - \sum_{j=0}^n a_j a_{n-j} \right) t^{n+1}.$$

Podemos calcular algunos de los coeficientes  $a_n$ ,  $n \geq 0$  con el siguiente código de matlab:

```
clear all
clc
format rat

a(1)=1/2;
for n=1:10
    suma=0;
    for j=1:n
        s=a(j)*a(n-j+1);
        suma=suma+s;
    end
    a(n+1)=(a(n)-suma)/n;
end

>> a
a =
Columns 1 through 9
    1/2    1/4    0    -1/48    0    1/480    0    -17/80640    0
Columns 10 through 11
    4/187293    0
```

Se tienen entonces los coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{48}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{480}, \dots \quad (4.2)$$

Y finalmente se tiene que la función logística se puede expresar de la siguiente forma

$$\frac{1}{1 + \exp(-t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{48}t^3 + \frac{1}{480}t^5, \dots$$

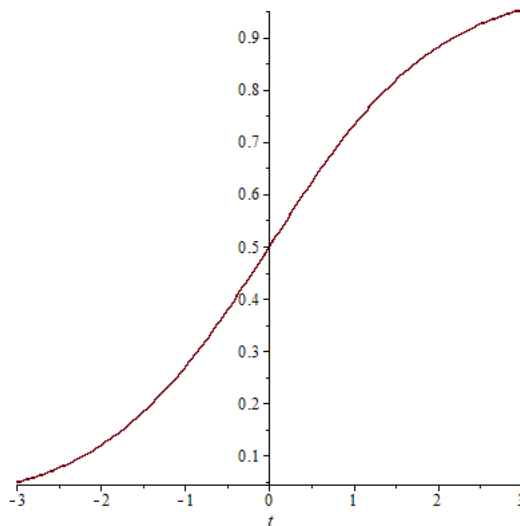


Figura 4.1: Aproximación de la función logística mediante la solución en forma de potencias de la ecuación diferencial logística.

*Observación 4.1.* Si consideramos los coeficientes dados en (4.2) y tomamos la sucesión de números  $\{2(n!)a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de manera que

$$\{2(n!)a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 1, 0, -1, 0, 3, 0, -17, 0, 155, \dots\},$$

esta sucesión es similar a la sucesión de números de Genocchi, que definimos a continuación, pero con los signos cambiados.

**Definición 4.2.** Los **números de Genocchi**,  $G_n$ , es una sucesión de números enteros que satisfacen la relación

$$\frac{-2t}{e^{-t} + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!}.$$

Así

$$\{G_n\} = \{-1, -1, 0, 1, 0, -3, 0, 17, \dots\},$$

que es la sucesión A036968 en *OEIS*.<sup>1</sup>

Los números de Genocchi están relacionados con los números de Bernoulli,  $B_n$ , de manera que

$$G_n = 2(1 - 2^n)B_n,$$

considerando en este caso  $B_1 = 1/2$ .

Si se considerase  $B_1 = -1/2$ , se tendría

$$\{G_n\} = \{1, -1, 0, 1, 0, -3, 0, 17, \dots\},$$

generando la función

$$\frac{2t}{e^t + 1}.$$

Esta sucesión de números es muy importante ya que está relacionada con los polinomios de Euler de la siguiente manera

$$G_{2n} = 2nE_{2n-1}(0)$$

y dichos polinomios serán de gran utilidad en la siguiente sección.

## 4.1. Relación entre la función logística y la función zeta de Riemann

**Definición 4.3.** Los **polinomios de Euler**,  $E_n(\xi)$ , son aquellos que cumplen

$$\frac{2e^{\xi t}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\xi) \frac{t^n}{n!},$$

y esta serie es convergente para  $|t| < \pi$ .

Para  $\xi = 1$

$$\frac{2 \exp(t)}{\exp(t) + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(1) \frac{t^n}{n!},$$

---

<sup>1</sup>OEIS (Enciclopedia Online de Secuencias de Enteros), es una base de datos de sucesiones de números enteros creada por Neil Sloane y lanzada en 1996. Contiene 341.962 sucesiones, siendo así la base de datos más grande de este tipo. Además de los primeros términos de la sucesión, cada entrada contiene la descripción de dicha sucesión, motivaciones matemáticas, fórmulas, opción de generar una gráfica, y más. No solo contiene sucesiones de números enteros, sino también sucesiones importantes de números racionales, complejos, trascendentes y otros que son transformados en secuencias de números enteros.

lo que implica

$$\frac{1}{1 + \exp(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} E_n(1) \frac{t^n}{n!}.$$

Por lo tanto, los coeficientes  $a_n$  de (4.1) cuando  $M = k = 1$  y  $x_0 = 1/2$ , pueden expresarse como

$$a_n = \frac{E_n(1)}{2n!}.$$

Si denotamos  $E_n = E_n(1)$ , para la función logística tenemos

$$a_n = \frac{x^{(n)}(0)}{n!}, \quad a_n = \frac{E_n}{2n!},$$

lo que nos da la siguiente relación (ver Tabla 4.1) entre la función logística y los polinomios de Euler:

$$x^{(n)}(0) = \frac{E_n(1)}{2} \tag{4.3}$$

donde  $E_n(\xi)$  denota el n-ésimo polinomio de Euler.

n	$E_n(\xi)$	$E_n(1)$	$E_n(1)/(2n!)$
0	1	1	1/2
1	$\xi - \frac{1}{2}$	1/2	1/4
2	$\xi^2 - \xi$	0	0
3	$\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{4}$	-1/4	-1/48
4	$\xi^4 - 2\xi^3 + \xi$	0	0
5	$\xi^5 - \frac{5}{2}\xi^4 + \frac{5}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$	1/2	1/480

Tabla 4.1: En esta tabla se puede ver la relación que hay entre los coeficientes de la serie de potencias de la función logística y los polinomios de Euler.

Otra definición de los polinomios de Euler (de primer tipo) es la siguiente

$$\frac{2}{\exp(t) + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} E_n^* \frac{t^n}{n!}.$$

Esto se corresponde con

$$\frac{2 \exp(\xi t)}{\exp(t) + 1}$$

para  $\xi = 0$ , es decir  $E_n^* = E_n(0)$ , y tenemos

$$E_0^* = 1, \quad E_1^* = -\frac{1}{2}, \quad E_2^* = 0, \quad E_3^* = \frac{1}{4}, \dots$$

de acuerdo con la relación

$$E_n(\xi + 1) + E_n(\xi) = 2\xi^n.$$

Para  $\xi = 0$

$$E_0(1) + E_0(0) = 2, \quad E_n(1) + E_n(0) = 0, \quad n \geq 1,$$

lo que implica que

$$E_n + E_n^* = 0,$$

ó equivalentemente

$$E_n = -E_n^*, \quad n \geq 1.$$

**Definición 4.4.** Para  $s \in \mathbb{C}$ , la **función zeta de Euler** se define como

$$\zeta_E(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

que es una función de números enteros en  $\mathbb{C}$ .

Para números negativos, se sabe que

$$\zeta_E(-k) = E_k^*, \quad k = 1, 2, \dots$$

o bien

$$\zeta_E(-k) = -E_k(1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde  $E_k(x)$  son los polinomos de Euler mencionados antes. Como consecuencia de esto y teniendo en cuenta la relación (4.3), tenemos

$$x^{(n)}(0) = \frac{-\zeta_E(-n)}{2}$$

dando una relación entre las derivadas n-ésimas de la función logística y la función zeta de Euler.

**Definición 4.5.** Sea  $s \in \mathbb{C}$ ,  $Re(s) > 1$ , se define la **función zeta de Riemann** como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

---

<sup>2</sup>Recordando los números de Genocchi y teniendo en cuenta la relación entre los coeficientes  $a_n$  y los polinomios de Euler, podemos expresar dichos coeficientes en función de los números de Genocchi de manera que

$$G_{j+1} = (j+1)E_j^*$$

#### 4.1. RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN LOGÍSTICA Y LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN 35

*Observación 4.6.* Para finalmente relacionar la función zeta de Riemann con la función zeta de Euler cabe recordar la siguiente igualdad que nos permite extender  $\zeta$  a los  $s \in \mathbb{C}$  tales que  $Re(s) > 0$ .

$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \left(1 - 2\frac{1}{2^s}\right) \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots - 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta observación, basta multiplicar por  $-1$  para obtener la siguiente igualdad

$$\zeta(s) = \frac{-1}{2(1 - 2^{1-s})} \zeta_E(s)$$

y entonces se tiene

$$x^{(n)}(0) = (1 - 2^{1+n})\zeta(-n), \quad n = 1, 2, \dots^3$$

Lo que nos da una nueva relación entre la función logística y la famosa función zeta de Riemann.

---

<sup>3</sup>La función zeta de Riemann para números enteros negativos se define como

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}.$$



# Bibliografía

- [1] Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations With Modeling Applications*, 9th edition, Brooks/Cole, 2009.
- [2] G. F. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, 3rd edition, CRC Press, LLC, 2016.
- [3] E. Elo, Arpad, *The rating of chessplayers. Past & Present*, 2nd ed, 1978.
- [4] Glenn Ledder, *Mathematics for de Life Sciences. Calculus, Modeling, Probability and Dynamical Systems*, Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, Springer-Verlag, New York (2013).
- [5] Laird, A.K., *Dynamics of Tumor Growth*, British Journal of Cancer **13**(3): 490-502 (1964)
- [6] N. Balakrishnan, *Handbook of the Logistic Distribution*, Marcel Dekker, New York (1992)
- [7] Lee, Se Yoon; Lei, Bowen; Mallick, Bani. *Estimation of COVID-19 spread curves integrating global data and borrowing information*. PLOS ONE **15** (7): e0236860 (2020)
- [8] Sucesión A001896 en OEIS (25 de febrero de 2021). <https://oeis.org/A001896>
- [9] Sucesión A036968 en OEIS (29 de abril de 2021). <https://oeis.org/A036968>
- [10] Anne Talkington and Rick Durrett, *Estimating tumor growth rates in vivo*, Dept. of Math, Duke University, Durham, NC, 2014.
- [11] I. Area, J.J. Nieto, *Power series solution of the fractional logistic equation*, Physica A **573** (2021) 125947.
- [12] *Logistic Regression for Machine Learning: complete Tutorial*, Just into Data, 2020. (6 de junio de 2021). <https://www.justintodata.com/logistic-regression-for-machine-learning-tutorial/>

- [13] *Machine Learning for Beginners: Overview of Algorithm Types*, Just into Data, 2020. (7 de junio de 2021). <https://www.justintodata.com/machine-learning-algorithm-types-for-beginners-overview/>

# Anexo




# Anexo I: Clasificación de imágenes mediante *Machine Learning*

En este anexo veremos una aplicación de clasificación de imágenes mediante *machine learning* utilizando el programa *Mathematica*.

Como ejemplo, trabajaremos con algunas de las gráficas y tablas de este trabajo y con algunas imágenes de objetos y personas.

Vemos que el programa es capaz de reconocer el tipo de contenido de cada imagen y además las clasifica diferenciando principalmente las gráficas, tablas ó ecuaciones matemáticas de las fotografías de personas, animales y alimentos.

42 ANEXO I: CLASIFICACIÓN DE IMÁGENES MEDIANTE MACHINE LEARNING

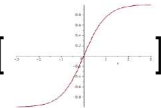
In[\*]= **ImageIdentify**[]

Out[\*]= **cheetah**

In[\*]=

**ImageIdentify**[]

Out[\*]= **touraco**

In[\*]= **ImageIdentify**[]

Out[\*]= **plot**

In[\*]= **CanonicalName**[**plot** **CONCEPT**]

Out[\*]= **Plot::7jp7f**

In[\*]= **ImageIdentify**[]

Out[\*]= **mathematical notation**

In[\*]= **ImageIdentify**[]

Out[\*]= **person**

In[2]= **ImageIdentify**[ ,  ,  ,  , ]

Out[2]= { **person** , **edible fruit** , **terrier** , **person** , **person** }

In[3]= FindClusters[ $\left\{x(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-t}}\right\}$ ,

Figure 1.4: Gráfica de la función logística en [0,10].

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

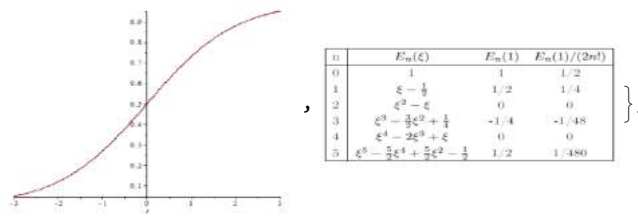
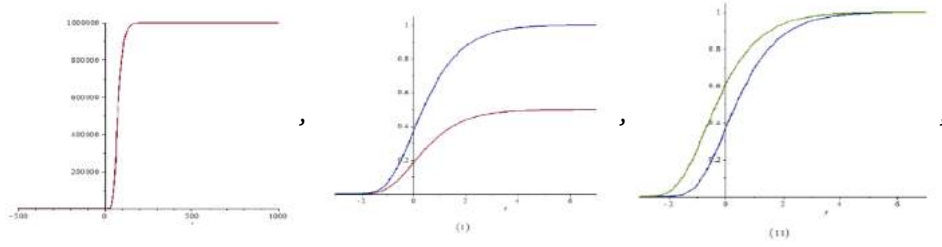
Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

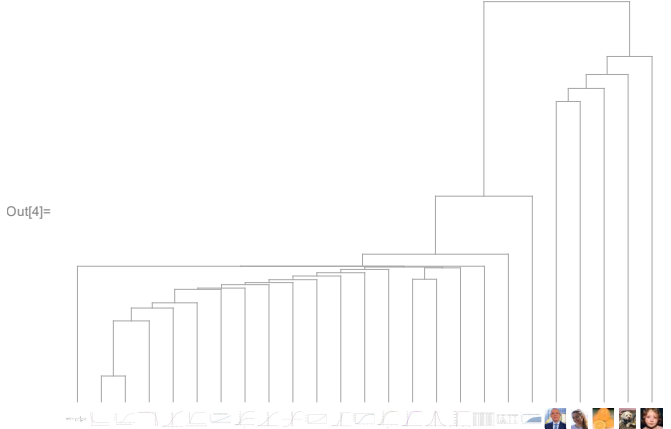
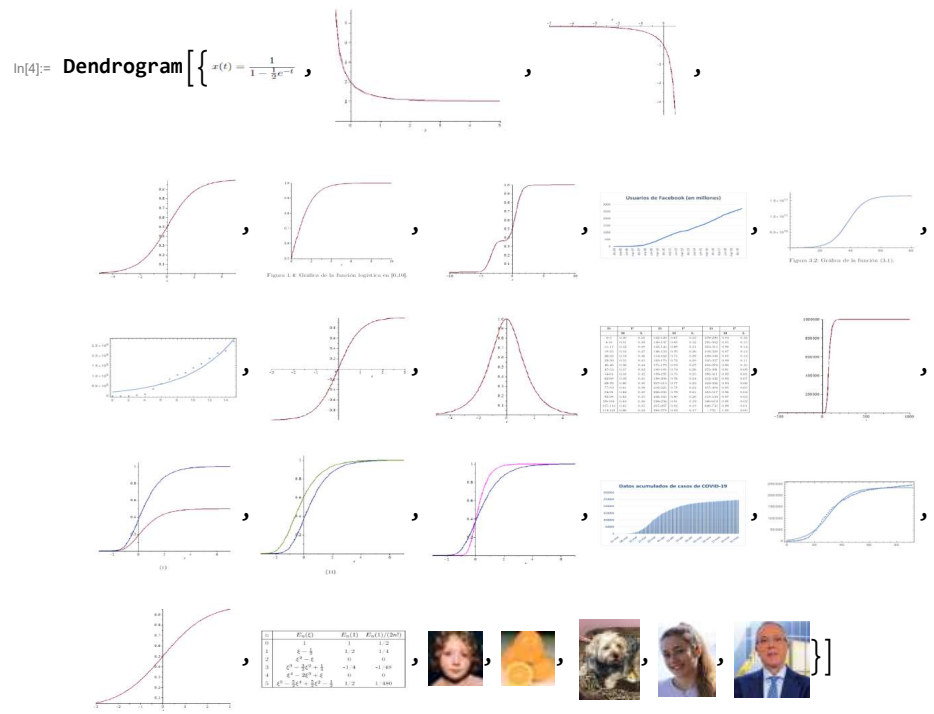
Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

Figure 3.2: Gráfica de la función (3.1).

44 ANEXO I: CLASIFICACIÓN DE IMÁGENES MEDIANTE MACHINE LEARNING





46 ANEXO I: CLASIFICACIÓN DE IMÁGENES MEDIANTE MACHINE LEARNING

In[5]: Show[%, ImageSize -> Full]

Out[5]=

