FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teorema de la Implícita y sus aplicaciones

Eduardo Martínez Granda

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El teorema de la función implícita y sus aplicaciones

Eduardo Martínez Granda

2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Analisis Matemática.
Título: El teorema de la función implícita y sus aplicaciones.
Breve descrición do contido
Los teoremas de la función implícita y la función inversa son resultados fundamentales en el Análisis Matemático con importantes aplicacións en diversos eidos das matemáticas. El objetivo de este trabajo será presentar pruebas rigurosas de ambos resultados, mostrar la relación existente entre ambos e estudiar alguna generalización de los mismos. Como consecuencia de ellos, se mostrará alguna aplicación a la existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Índice general

Resumen

Este trabajo constará de tres capítulos. El primero contendrá algunas nociones básicas para poder demostrar los teoremas del trabajo.

Posteriormente, en el segundo capítulo, expondremos algunos métodos para demostrar los teoremas centrales del trabajo, entre ellos, el teorema de la función implícita para espacios de Banach.

Por último en el tercer capítulo, encontramos algunas de las aplicaciones que tiene el teorema de la función implícita en las matemáticas, por ejemplo, como podemos definir superficies de forma implícita. Para concluir, se muestra la fuerte conexión que tiene el teorema de la implícita con la existencia y la unicidad de solución de EDOs.

Abstract

This work will be developed in three chapters. The first will contain some basic notions that we will use prove the work's theorems.

Later, in the second chapter, we will present some methods to prove the central theorems of the work, among them, the implicit function theorem for Banach spaces.

Finally, in the third chapter, we find some of the applications that the implicit function theorem has in mathematics, for example, how we can define surfaces implicitly. Lastly, the strong connection that the implicit theorem has with the existence and uniqueness of the solution of ODEs is shown.

Introducción

Comencemos introduciendo el concepto de función. La evolución del concepto de función comienza con el debate entre dos ideas:

- **Idea geométrica**: Una función tiene que representar una curva.

- **Idea algebraica**: Una función tiene que venir representada por una fórmula denominada expresión analítica.

Posteriormente surge una tercera idea:

- **Idea lógica**: Una función es una correspondencia.

De estas ideas, la primera en desaparecer sería la idea geométrica, y el debate entre la idea algebraica y la idea lógica perduraría durante años.

Con una expresión analítica nos referimos por ejemplo a

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 - x - 3, \\ g(y) &= \sqrt{y^2 + 1}. \end{aligned}$$

La noción de una función dada por una fórmula, no duraría mucho, dado que era muy limitada para los propósitos del cálculo. Por ejemplo

$$y^3 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$$

es una ecuación cuya solución viene dada por la curva representada en la Figura 1.

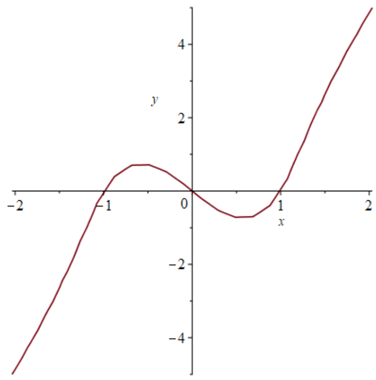

Figura 1: Curva definida por $y^3 + 16y - 32x^2 + 32x = 0$.

Esta solución nos lleva a sospechar que podemos expresar la variable y en función de la variable x, pero sin embargo no existe una fórmula explícita para esta función.

En la definición moderna de función, lo primero que definimos es el dominio X, que es el conjunto de puntos en los que la función está definida. Lo segundo es el rango. Denotamos por f al subconjunto de $X \times Y$ que tiene las siguientes propiedades:

- Para cada $x \in X$ existe un elemento $y \in Y$ de forma que $(x, y) \in f$.

- Si $(x, y) \in f$ y $(x, \bar{y}) \in f$, entonces $y = \bar{y}$.

Al conjunto f le llamamos función y, por lo tanto, su definición viene dada en términos de su gráfica.

Con esto queremos decir que para cada elemento $x \in X$ existe un único elemento $y \in Y$ de forma que $(x, y) \in f$, por lo que nos resulta cómodo escribir

$$y = f(x)$$

cuando nos referimos a un punto $(x, y) \in f$. De aquí surge el problema de la función implícita.

Hasta finales del siglo XVIII, ningún matemático sintió la necesidad de probar la existencia de esta función implícita. Las funciones implícitas eran usadas para ver como se comportaba la solución de la ecuación.

Isaac Newton fue uno de los primeros en analizar el comportamiento de una función definida implícitamente.

No fue hasta 1770 cuando Joseph Lagrange probó la que puede ser la primera versión del teorema de la función implícita. Este resultado fue conocido como el teorema de inversión de Lagrange. Hoy en día lo consideraríamos un caso particular del teorema de la implícita para series de potencias.

Cauchy en su intento de hacer las matemáticas más rigurosas, le prestó atención a este resultado de Lagrange y a sus generalizaciones. Se considera que la primera versión probada del teorema de la función implícita la escribió Cauchy en sus memorias de Turín.

Este trabajo contiene tres capítulos. El primero constará de algunas nociones básicas para poder demostrar los teoremas centrales del trabajo.

Posteriormente, en el segundo capítulo, expondremos algunos métodos para demostrar los teoremas centrales del trabajo, entre ellos introduciremos una versión escalar del teorema de la implícita para poder probar la vectorial por inducción. Introducimos el teorema de la función inversa y mostramos su fuerte conexión con el teorema de la función implícita. Para acabar este capítulo, demostramos el teorema de la función implícita para espacios de Banach.

Por último en el tercer capítulo, expondremos algunas de las aplicaciones que tiene el teorema de la función implícita en las matemáticas, por ejemplo, como podemos definir superficies de forma implícita gracias a este teorema. Para concluir se muestra la fuerte conexión que tiene con la existencia y unicidad de solución de EDOs.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, introduciremos la notación y algunos resultados que se usarán más adelante para probar algunos de los teoremas centrales del trabajo. En su mayoría están relacionados con la diferenciabilidad de funciones de varias variables reales. Para más información sobre este tema, se puede consultar [8].

Definición 1.1 (Continuidad)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Una función $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en $\bar{x} \in \Omega$ cuando admite límite en ese punto y además

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Si f es continua en todos los puntos de Ω entonces decimos que f es continua en Ω.

Definición 1.2 (Función lineal)**.** Una función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal si cumple

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(x+y), \\ \lambda \cdot f(x) &= f(\lambda \cdot x), \end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. El espacio de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Definición 1.3 (Diferenciabilidad)**.** Diremos que la aplicación f es diferenciable en $\bar{x}$ cuando existe una aplicación $df(\bar{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{||f(x) - f(\bar{x}) - df(\bar{x})(x - \bar{x})||_{\mathbb{R}^m}}{||x - \bar{x}||_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Proposición 1.4. *Si una función $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en un punto $\bar{x} \in \Omega$, entonces f es continua en ese punto.*

Definición 1.5 (Derivada direccional)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\bar{v} \neq 0$. Se define la derivada direccional de f en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ en la dirección $\bar{v}$ como

$$D_{\bar{v}} f(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\bar{x} + t \cdot \dfrac{\bar{v}}{||\bar{v}||}\right) - f(\bar{x})}{t}.$$

Definición 1.6 (Derivada parcial)**.** Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definimos la i-ésima derivada parcial de f en $\bar{x}$ como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = D_i f(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\bar{x} + t \cdot e_i\right) - f(\bar{x})}{t},$$

siendo e_i el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.7 (Matriz Jacobiana)**.** Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en el punto $\bar{x} \in \Omega$, denotamos por

$$Df(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

a la matriz jacobiana de la función f en el punto $\bar{x}$.

Notación 1.8. Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, cuando escribimos $D_x f(x, y)$ con $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ tal que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ nos referimos a la matriz

$$D_x f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}.$$

Análogamente, denotamos por $D_y f(\bar{x}, \bar{y})$ a la matriz

$$D_y f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_n}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}.$$

Definición 1.9 ($\mathcal{C}^1$)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua, decimos que f es continuamente diferenciable en Ω y lo denotamos por $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ si f es diferenciable en Ω y además todas sus derivadas parciales son continuas.

A continuación, introducimos la derivación de orden superior.

Definición 1.10. La función $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable en Ω si la aplicación

$$\begin{aligned} Df\colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Df(x) = (D_1 f(x), ..., D_n f(x)) \end{aligned}$$

es diferenciable.

Definición 1.11. La matriz

$$Hf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} D_{11}f(\bar{x}) & D_{12}f(\bar{x}) & \cdots & D_{1n}f(\bar{x}) \\ D_{21}f(\bar{x}) & D_{22}f(\bar{x}) & \cdots & D_{2n}f(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f(\bar{x}) & D_{n2}f(\bar{x}) & \cdots & D_{nn}f(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

se denomina matriz Hessiana de f en el punto $\bar{x}$.

Definición 1.12. Supongamos que, para todo $x \in \Omega$. Las funciones

$$\begin{aligned} D_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} f\colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto D_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} f(\bar{x}) \end{aligned}$$

son diferenciables en $\bar{x}$, diremos que f es m veces diferenciable en $\bar{x}$.

Definición 1.13. Diremos que f es una función de clase m en Ω cuando existan y sean continuas en Ω todas las derivadas parciales hasta el orden m. Escribiremos $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$.

Notación 1.14 (Segmento)*.* Dado a, b dos puntos de $\mathbb{R}^n$, denominamos $L(a, b)$ al segmento abierto que une a y b, es decir

$$L(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = at + b(1-t) \text{ para algún } t \in (0, 1)\}.$$

Análogamente denotamos por $L[a, b]$ al segmento cerrado que una a y b.

$$L[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = at + b(1-t) \text{ para algún } t \in [0, 1]\}.$$

A continuación introducimos algunos de los teoremas más importantes que utilizaremos en este trabajo.

Teorema 1.15 (del valor medio). *Sean a, b puntos del abierto Ω tal que $L[a,b] \subset \Omega$ y sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua en $L[a,b]$ y diferenciable en los puntos de $L(a,b)$. Entonces existe un $c \in L[a,b]$ de forma que*

$$||f(b) - f(a)|| \leq ||Df(c)|| \cdot ||b - a||$$

Proposición 1.16 (Regla de la cadena). *Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, $f\colon \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g\colon \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^s$ dos aplicaciones con un $\bar{x} \in \Omega_1$ tal que $f(\bar{x}) \in \Omega_2$. Si f es diferenciable en $\bar{x}$ y g es diferenciable en $f(\bar{x})$, la composición $h = f \circ g$ es diferenciable en $\bar{x}$ cumpliéndose que*

$$Dh(\bar{x}) = Dg(f(\bar{x})) \cdot Df(\bar{x}).$$

A continuación añadimos algunos resultados de álgebra lineal que necesitaremos para poder probar los teoremas centrales del trabajo.

Definición 1.17. Dadas dos matrices A y B de dimensiones $n \times n$, decimos que esas matrices son semejantes si existe una matriz P de dimensiones $n \times n$ de manera que

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = B.$$

Y lo denotamos como $A \approx B$.

Teorema 1.18 (de Rouché-Frobenius). *Dado un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas*

$$A \cdot X = B,$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Denotamos por

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Si rango(A) = rango$(A|B) = n$ entonces el sistema tiene solución única, y se llama sistema de ecuaciones compatible determinado. Si rango(A) = rango$(A|B) < n$ el sistema tiene infinitas soluciones y decimos que es un sistema de ecuaciones compatible indeterminado. En el caso de que rango$(A) \neq$ rango$(A|B)$ entonces el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución y decimos que es un sistema de ecuaciones incompatible.

Ahora, introducimos el método de Cramer, que es el método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales aplicado en el trabajo.

Solución 1.19. Dado un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, denotamos por A_j a la matriz A, cambiando la columna j por el vector B, es decir,

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,j-1} & b_m & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si el sistema lineal es un sistema de ecuaciones compatible determinado, entonces la solución única del sistema viene dada por:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A} \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Para finalizar este capítulo preliminar recordamos el concepto de norma.

Definición 1.20 (Norma)**.** Sea X un espacio vectorial. Decimos que $||\cdot|| \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

1. $||x|| \geq 0$ para todo $x \in X$.
2. $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$.
3. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, para todo $x \in X$.
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, para todo $x, y \in X$.

Decimos que el par $(X, ||\cdot||)$ es un espacio vectorial normado.

A continuación ponemos algunos ejemplos de norma, similares a los utilizados más adelante.

Ejemplo 1.21.

- Sea $x \in \mathbb{R}^n$ definimos la norma euclidea en $\mathbb{R}^n$ como

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

- Sea $X = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$, el conjunto de funciones de continuas de $[a,b]$ a $\mathbb{R}^n$. Definimos la norma en X como:

$$||f||_X = \sup_{x\in[a,b]} ||f(x)||.$$

Capítulo 2

Teoremas de la función implícita y la función inversa

En este capítulo presentamos los teoremas de la implícita y de la inversa. Primero demostraremos una versión escalar del teorema de la implícita, con una prueba elemental que solamente hace uso de resultados básicos del cálculo diferencial. La extensión al caso vectorial se hará por inducción.

Posteriormente presentaremos una demostración independiente del teorema de la inversa, que también se basa en resultados elementales de diferenciación de funciones en varias variables reales y álgebra lineal. Además, justificaremos que ambos teoremas son equivalentes, lo que permite deducir uno en función del otro. El hecho de no seguir ese método aquí se debe al deseo de presentar varias formas de aproximación a estos resultados.

También ilustraremos con un ejemplo el carácter local de estos teoremas, lo que nos lleva a preguntarnos bajo que condiciones podemos obtener resultados globales y, por lo tanto, a presentar el concepto de difeomorfismo.

Para concluir el capítulo, demostraremos el teorema de la implícita en espacios de Banach. En este caso, necesitaremos ciertas nociones de diferenciación en espacios normados y el teorema del punto fijo de Banach.

Las referencias principales usadas para el desarrollo de este capítulo fueron [5, 7]. Además, también se siguieron en algunas partes [1, 2].

2.1. Teorema de la función implícita

Primero, por simplicidad, vamos a considerar un caso particular de teorema de la implícita, donde tendremos una única variable dependiente, pero un número arbitrario de variables independientes. Para su demostración seguimos [5].

Teorema 2.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *un abierto, sea* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *una función continuamente diferenciable y* $p = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ *donde* $p \in \Omega$ *es un punto para el cual se cumple:*

$$f(p) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \neq 0.$$

Entonces existe un abierto $\Omega' \subset \mathbb{R}^{m-1}$ *con* $\bar{x} \in \Omega'$ *y una única función continuamente diferenciable* $\phi\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\bar{y} = \phi(\bar{x}),$$
$$f[x, \phi(x)] = 0,$$

para todo $x \in \Omega'$.

Demostración. Supongamos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) > 0.$$

Como $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, todas las derivadas parciales de f son continuas en Ω. En particular $\frac{\partial f}{\partial x_m}$ es una función continua en Ω, así que, si tomamos un entorno de p lo suficientemente pequeño, Ω, podemos suponer que $\frac{\partial f}{\partial x_m}(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.

Por lo tanto sabemos que $f(\bar{x}, \cdot)$ es estrictamente creciente en un entorno de $\bar{y}$ por el razonamiento anterior. Además, como $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ podemos encontrar dos valores $\bar{y}_1$ y $\bar{y}_2$ de modo que

$$f(\bar{x}, \bar{y}_1) < 0 < f(\bar{x}, \bar{y}_2).$$

Utilizando ahora la continuidad de f, habrá un entorno Ω' de $\bar{x}$ tal que $\Omega' \times [\bar{y}_1, \bar{y}_2] \subset \Omega$, y $f(x, \bar{y}_1) < 0 < f(x, \bar{y}_2)$ se cumplirá para todo $x \in \Omega'$.

Para acabar el razonamiento, aplicando el teorema de Bolzano, deducimos que existe un valor $y \in [\bar{y}_1, \bar{y}_2]$ para el cual $f(x, y) = 0$ y como sabemos que en Ω' la función es estrictamente creciente, este valor será único. Entonces tomando $y = \phi(x)$ obtenemos la función buscada.

Veamos ahora que la función ϕ es continua. Tomamos $\bar{y}_3, \bar{y}_4$ de manera que

$$\bar{y}_1 < \bar{y}_3 < \bar{y} < \bar{y}_4 < \bar{y}_2.$$

Entonces existe un abierto X contenido en Ω', que cumple $\bar{x} \in X$, y $\phi(x) \in (\bar{y}_3, \bar{y}_4)$ para todo $x \in X$, por lo que ϕ es continua en $\bar{x}$. Dado $x \in \Omega'$, tomamos $y = \phi(x)$ de manera que se cumpla que $f(x,\phi(x)) = 0$, y razonando como antes se llega a que ϕ es continua en x, por lo que hemos probado que ϕ es continua en Ω'.

Nos faltaría probar la diferenciabilidad de ϕ. Para ello, veamos que para cada $j = 1,2,\ldots,m-1$ se cumple:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x,\phi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_m}(x,\phi(x))},$$

para todo $x \in \Omega'$ y, por lo tanto, las derivadas parciales de ϕ son continuas en Ω', lo que implica que ϕ es de clase uno en Ω'. Fijando el punto x y tomando $y = \phi(x)$, de la definición de diferenciabilidad obtenemos que

$$f(x+s\cdot e_j, y+t) - f(x,y) = s\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y) + t\cdot\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y) + \Psi(s,t)\cdot\sqrt{s^2+t^2},$$

donde $\lim_{(s,t)\to(0,0)}\Psi(s,t) = 0$.

Tomando $t = \phi(x+s\cdot e_j) - \phi(x)$ en la ecuación anterior deducimos que:

$$t\cdot\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y) = -s\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y) - \Psi(s,t)\cdot\sqrt{s^2+t^2}. \tag{2.1}$$

Aplicando el valor absoluto y posteriormente la desigualdad triangular en (2.1), obtenemos lo siguiente,

$$|t|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right| \leq |s|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right| + |\Psi(s,t)|\cdot\left|\sqrt{s^2+t^2}\right|.$$

Dado que la función raíz es creciente y que $s^2+t^2 \leq (|s|+|t|)^2$, llegamos a la siguiente desigualdad,

$$|t|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right| \leq |s|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right| + |\Psi(s,t)|\cdot|s| + |\Psi(s,t)|\cdot|t|, \tag{2.2}$$

que usaremos más adelante.

Sustituyendo t y operando en (2.1) llegamos a la siguiente igualdad

$$[\phi(x+s\cdot e_j) - \phi(x)]\cdot\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y) = -s\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y) - \Psi(s,t)\cdot\sqrt{s^2+t^2}.$$

Si despejamos $\phi(x+s\cdot e_j) - \phi(x)$, obtenemos

$$\phi(x+s\cdot e_j) - \phi(x) = -s\cdot\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)} - \frac{\Psi(s,t)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)}\cdot\sqrt{s^2+t^2}.$$

Operando en esta ecuación, y usando la desigualdad triangular concluimos que

$$\left|\frac{\phi(x+s\cdot e_j)-\phi(x)}{s}+\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right]\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right]^{-1}\right|\leq\frac{|\Psi(s,t)|}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right|}\cdot\frac{|s|+|t|}{|s|}. \tag{2.3}$$

A continuación separamos la prueba en dos casos.
Caso 1: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right|>0$.
Si tomamos un s lo suficientemente pequeño, como $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)}\Psi(s,t)=0$, tenemos que $|\Psi(s,t)|\leq\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right|$ y $|\Psi(s,t)|\leq 2\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right|$. Con estas condiciones, de (2.2) obtenemos que

$$|t|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right|\leq|s|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right|+2\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right|\cdot|s|+\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right|\cdot|t|.$$

Despejando $|t|$ en esta desigualdad, llegamos a la siguiente condición

$$|t|\leq 6\cdot|s|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right|/\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right|. \tag{2.4}$$

Por lo que acotando $|t|$ en (2.3) con la desigualdad (2.4) llegamos a,

$$\left|\frac{\phi(x+s\cdot e_j)-\phi(x)}{s}+\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right]\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right]^{-1}\right|$$
$$\leq\frac{|\Psi(s,t)|}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right|}\cdot\left(1+6\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right|\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right|^{-1}\right).$$

Por lo tanto

$$\lim_{s\to0}\left|\frac{\phi(x+s\cdot e_j)-\phi(x)}{s}+\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right]\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right]^{-1}\right|=0,$$

entonces existe

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)=\lim_{s\to0}\frac{\phi(x+s\cdot e_j)-\phi(x)}{s}=-\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\right]\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right]^{-1}.$$

Caso 2: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)=0$.
Tomando un s lo suficientemente pequeño, y usando la siguiente cota,

$$|\Psi(s,t)|\leq\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y)\right|$$

obtenemos:

$$|t| \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y) \right| \cdot |s| + \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y) \right| \cdot |t|.$$

Despejando $|t|$ en esta ecuación obtenemos la siguiente desigualdad,

$$|t| \leq |s|.$$

Nótese, que en este caso, (2.3) se reduce a

$$\left| \frac{\phi(x + s \cdot e_j) - \phi(x)}{s} \right| \leq \frac{|\Psi(s,t)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y) \right|} \cdot \left(1 + \frac{|t|}{|s|} \right). \tag{2.5}$$

Acotando $\frac{|t|}{|s|}$ por 1 dado que $|t| \leq |s|$, llegamos a que

$$\left| \frac{\phi(x + s \cdot e_j) - \phi(x)}{s} \right| \leq 2 \cdot \frac{|\Psi(s,t)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial x_m}(x,y) \right|}.$$

En conclusión,

$$\lim_{s \to 0} \left| \frac{\phi(x + s \cdot e_j) - \phi(x)}{s} \right| = 0,$$

como queríamos probar. □

Ahora, probaremos la versión general del teorema de la implícita. Normalmente, aplicamos este teorema cuando tenemos un sistema no lineal con m ecuaciones y $n+m$ variables. Análogamente al modelo lineal, tratamos n variables como variables independientes y llamamos a las m restantes variables dependientes, como función de las n variables independientes. Pero antes introduciremos unos lemas necesarios para hacer posteriormente la demostración.

Lema 2.2. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable cumpliendo que existe un punto $\bar{y} \in \Omega$ tal que* $\det Df(\bar{y}) \neq 0$. *Entonces existe un entorno de $\bar{y}$ contenido en Ω para el que f es inyectiva en ese entorno.*

Demostración. Como f es continuamente diferenciable, el determinante se puede interpretar como una función continua y $\det Df(\bar{y}) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{y}) \right) \neq 0$, así que existe un $r > 0$ tal que $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_{ij}) \right) \neq 0$ para todo $z_{ij} \in B(\bar{y}, r)$.

Sean a y b dos puntos de $B(\bar{y}, r)$ con $a \neq b$. Empleando el teorema del valor medio en cada componente f_i, encontramos un $c_i \in \mathbb{R}^n$ en el segmento $L(a, b)$ para el que se cumplirá

$$\begin{pmatrix} f_1(b) - f_1(a) \\ f_2(b) - f_2(a) \\ \vdots \\ f_n(b) - f_n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c_1) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(c_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(c_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix},$$

entonces, dado que c_i pertenece a $B(\bar{y}, r)$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Sabemos que el determinante de la función no se anula, y además como $b - a \neq 0$, podemos concluir que $f(b) - f(a) \neq 0$, por lo tanto f es inyectiva en $B(\bar{y}, r)$. □

Lema 2.3. *Dada una matriz A de dimensión $n \times n$ y coeficientes reales, existe una matriz no singular U de forma que $U \cdot A$ es triangular superior.*

Lo que nos dice este lema, es que toda matriz tiene una matriz triangular superior de manera que son semejantes, es decir para toda matriz A, existe una matriz triangular superior B que cumple $A \approx B$.

Ahora ya estamos en posición de probar la versión general del teorema de la implícita, para lo que usaremos [7].

Teorema 2.4 (de la Implícita). *Sea $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continuamente diferenciable, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un abierto, y $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto de Ω que cumple $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ y que* $\det(D_y f(\bar{x}, \bar{y})) \neq 0$. *Entonces existen un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$ y un abierto $Y \subset \mathbb{R}^m$ de manera que $\bar{x} \in X$ e $\bar{y} \in Y$ y cumplen además*

- *Existe una función $\phi \colon X \longrightarrow Y$ de manera que existe un único $y = \phi(x)$ en Y tal que $f(x, \phi(x)) = 0$, para cada $x \in X$.*

- *Sabemos que $\phi(\bar{x}) = \bar{y}$, además la funcion ϕ es continuamente diferenciable y cumple*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = -\left[D_y f(x, \phi(x))\right]^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \phi(x)), \text{ para todo } x \in X, \text{ con } j = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Demostración. Esta demostración la dividiremos en cuatro partes: encontrar el entorno Y donde se cumplan las hipótesis del teorema, existencia y diferenciabilidad de la función buscada ϕ, la fórmula de la derivada y la unicidad de esta función ϕ.

1. **Encontrar Y**.

   Definimos $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$ con $(x, y) \in \Omega$, y tenemos que

   $$\det D\Phi = \det \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline D_x f & D_y f \end{array} \right) = \det D_y f,$$

   siendo I la identidad de orden n y 0 la matriz de ceros de dimensiones $n \times m$. Además sabemos que $\det(D\Phi(\bar{x}, \bar{y})) \neq 0$, por lo tanto por el Lema 2.2 hay un entorno de $(\bar{x},\bar{y})$ para el que Φ es inyectiva. Tomamos entonces $\Omega = X' \times Y$, con X' un abierto en $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\bar{x}$ y tomamos Y como un abierto en $\mathbb{R}^m$ que contiene a $\bar{y}$, de forma que Φ es inyectiva en $X \times Y$.

2. **Existencia y diferenciabilidad.**

   Antes de demostrarlo, primero, explicaremos la notación aplicada en esta parte de la demostración. Por hipótesis en $(\bar{x}, \bar{y})$ se cumple que $\det(D_y f(\bar{x}, \bar{y})) \neq 0$.

   Consideraremos una aplicación Ψ de Y a $\mathbb{R}^m$ definida como

   $$y \mapsto \Psi(y) = (f_1(\bar{x}, y), f_2(\bar{x}, y), \cdots, f_m(\bar{x}, y)).$$

   Ahora aplicando el Lema 2.3 vamos a considerar una función $\bar{\Psi}$ dada por

   $$y \mapsto \bar{\Psi}(y) = (\bar{f_1}(y), \bar{f_2}(y), \cdots, \bar{f_m}(y)),$$

   de manera que

   $$\frac{\partial \bar{f_i}}{\partial y_j}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \, \text{para todo} \, i > j.$$

   Asumiremos directamente que

   $$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \, \text{para todo} \, i > j.$$

   Tras esta simplificación podemos ver que

   $$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_m}{\partial y_2}(\bar{x}, \bar{y}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0. \tag{2.7}$$

Por lo que de este razonamiento, las conclusiones que sacamos son que $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_i}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Ahora, queremos probar que la ecuación $f(x, \phi(x)) = 0$ con la condición $\phi(\bar{x}) = \bar{y}$, tiene una única solución ϕ continuamente diferenciable en un entorno X de $\bar{x}$. Lo probaremos por inducción sobre m.

Si $m = 1$ estamos en el caso del Teorema 2.1. Asumimos que esto es cierto para $m - 1$ y probaremos que lo es para m. Sabemos que $f = (f_1, ..., f_m)$ y tomaremos $f' = (f_1, ..., f_{m-1})$, a su vez, $y' = (y_1, ..., y_{m-1})$ y $(x, y) = (x, y', y_m)$.

Consideramos la ecuación

$$f_m(x, y', y_m) = 0,$$

con x e y' variables independientes y tomando y_m como una única variable dependiente, con la condición de que si $(x, y') = (\bar{x}, \bar{y}')$ entonces $y_m = \bar{y_m}$. Como sabemos por (2.7) que

$$\frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0,$$

entonces estamos en las hipótesis del Teorema 2.1, por lo que existe una función $\phi_m(x, y')$ continuamente diferenciable en un entorno $X \times Y'$ de $(\bar{x}, \bar{y}')$ que cumple $\phi_m(\bar{x}, \bar{y}') = \bar{y}_m$ y

$$f_m(x, y', \phi_m(x, y')) = 0 \quad \text{para todo } (x, y') \in X \times Y'.$$

Sustituyendo $y_m = \phi_m(x, y')$ en $f'(x, y', y_m) = 0$ buscaremos la solución de

$$f'(x, y', \phi_m(x, y'))) = 0$$

con la condición de que si $x = \bar{x}$ entonces $y' = \bar{y}'$.

Sabemos por hipótesis que la matriz $D_y f(\bar{x}, \bar{y})$ es de rango máximo, por lo tanto es no singular, entonces estamos cumpliendo las hipótesis para $m - 1$, por lo que existe una función ϕ' continuamente diferenciable en un entorno X de $\bar{x}$ cumpliendo

$$f'(x, \phi'(x), \phi_m(x, \phi'(x))) = 0$$

para todo $x \in X$ con la condición $\phi'(\bar{x}) = \bar{y}'$.

Definimos $\phi(x) = (\phi'(x), \phi_m(x, \phi'(x)))$ con $x \in X$ y obtenemos que $f(x, \phi(x)) = 0$ para todo $x \in X$. Además sabemos que ϕ es una función continuamente diferenciable en X como queríamos probar.

3. **Unicidad.**

   Sea $g\colon X \longrightarrow Y$ una función que cumple $f(x, g(x)) = 0$ para todo x en X. Por la definición de Φ, tenemos que $\Phi(x, g(x)) = (x, f(x, g(x))) = (x, 0)$ y por este razonamiento, $\Phi(x, \phi(x)) = (x, f(x, \phi(x))) = (x, 0)$. Como vimos en el primer apartado que Φ es inyectiva, podemos deducir que $(x, g(x)) = (x, \phi(x))$ para todo x en X. Por lo tanto $g = \phi$ y así probamos la unicidad.

4. **Fórmula de derivación.**

   Si tomamos la expresión $f(x, \phi(x)) = 0$, con $x \in X$ y derivamos aplicando la regla de la cadena, obtenemos que:

   $$D_x f(x, \phi(x)) + D_y f(x, \phi(x)) \cdot D\phi(x) = 0.$$

   Entonces despejando $D\phi$ en la ecuación anterior, obtendríamos la fórmula

   $$D\phi(x) = -(D_y f(x, \phi(x)))^{-1} \cdot D_x f(x, \phi(x))$$

   con lo que queda probado (2.6). □

Tras haber hecho esta primera demostración, procedemos a poner un ejemplo de la aplicación del teorema de la implícita inspirado en un ejemplo de [2].

Ejemplo 2.5. Sea la ecuación $f(x, y, z) = 0$, donde f viene dada por la expresión

$$f(x, y, z) = xe^{y+z} + (z - x)\operatorname{sen}(y + 1) + \sqrt{2xyz} \qquad \text{con } (x, y, z) \in (-\infty, 0) \times (-\infty, 0) \times (0, \infty).$$

Definiremos implícitamente la única función continua $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ en un entorno del punto $(\bar{x}, \bar{y}) = (-2, -1)$ de manera que $\phi(-2, -1) = 1$. Sabemos por como está definida la función f que está definida y es diferenciable en un entorno de $(-2, -1, 1)$.

Ahora podemos comprobar con sencillez que

$$f(-2, -1, 1) = 0,$$

veamos como la derivada parcial de la variable z no se anula en el punto

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xe^{y+z} + \operatorname{sen}(y + 1) + \sqrt{\frac{xy}{2z}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(-2, -1, 1) = -1 \neq 0.$$

Hemos comprobado que la función f cumple las hipótesis del teorema de la implícita 2.4, esto implica la existencia de una única función $\phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que será la solución de la ecuación $f(x, y, \phi(x, y)) = 0$ en un entorno de $(x, y) = (-2, -1)$ y $z = 1$.

Podemos comprobar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{y+z} - \operatorname{sen}(y+1) + \sqrt{\frac{yz}{2x}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(-2,-1,1) = \frac{3}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^{y+z} + (z-x)\cos(y+1) + \sqrt{\frac{xz}{2y}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-2,-1,1) = 2.$$

Mientras que las derivadas parciales de ϕ en el punto $(-2,-1)$ son

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(-2,-1,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-2,-1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-2,-1,1)} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y}(-2,-1,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(-2,-1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-2,-1,1)} = 2.$$

Ahora puntualizaremos como podemos determinar la regularidad de la función ϕ a la hora de aplicar el teorema de la implícita, como se detalla en [2].

Proposición 2.6. *Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase r, $r \geq 1$, en un entorno de $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Si $\det(D_y f(\bar{x},\bar{y})) \neq 0$ y $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$, entonces la ecuación $f(x,y) = 0$, define implícitamente en torno a $(\bar{x},\bar{y})$, a la variable y como función única de x, $x \mapsto \phi(x) = y$, siendo ϕ de clase r en torno a $\bar{x}$. Existen entornos $X \subset \mathbb{R}^n$ de $\bar{x}$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ de $\bar{y}$ de forma que $\phi(x) = y$ y $f(x,\phi(x)) = 0$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Las hipótesis de este teorema son más exigentes que las hipótesis del teorema de la implícita. Por lo que podemos asegurar la existencia y diferenciabilidad de la función implícita ϕ. Sabemos además que las derivadas parciales de ϕ vienen dadas por

$$D_{x_i}\phi(x) = -[D_y f(x,\phi(x))]^{-1} D_{x_i} f(x,\phi(x)), \qquad i = 1,2,...,n.$$

Como todos los factores del producto del lado derecho de la igualdad son funciones continuas en x, también lo será $D_{x_i}\phi$, por lo que ϕ es de clase 1. Como f es una función de clase r, sus derivadas parciales son funciones de clase $r-1$, es decir, $D_{x_i}f$, $D_y f$ están formadas por funciones de clase $r-1$. Por lo tanto $D_{x_i}\phi$ es una función de clase $r-1$, lo que implica que ϕ es una función de clase r. $\square$

2.2. Teorema de la función inversa

Ahora introduciremos el teorema de la inversa, un teorema que está bastante relacionado con el de la implícita como veremos posteriormente. Pero antes, presentaremos unos resultados previos que nos facilitarán la demostración de este.

Teorema 2.7. *Sean X, Y dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una función inyectiva, entonces existe la función inversa f^{-1}. Si además X es compacto y f es continua en X, entonces f^{-1} es continua en $f(X)$.*

Demostración. Sabemos que si f^{-1} es continua en $f(X)$, entonces para cada conjunto abierto $A \subset X$, $f(A)$ es un abierto en Y. Entonces, basta con probar que para cada conjunto cerrado F de X, $f(F)$ es cerrado en Y. Como F es un cerrado y X es compacto, F también lo es. Dado que la imagen de un compacto es compacto si la función es continua, por ser f continua $f(F)$ es compacto y por lo tanto cerrado. Entonces como f lleva cerrados en cerrados, f^{-1} es una aplicación continua. $\square$

A continuación enunciamos y probamos el teorema de la inversa, para lo que seguimos [1].

Teorema 2.8 (de la Inversa). *Sea $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ siendo Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$, con f continuamente diferenciable y $\bar{x}$ un punto que cumple que* $\det Df(\bar{x}) \neq 0$ *y por tanto no singular. Entonces existe un abierto X que contiene a $\bar{x}$, un abierto Y que contiene a $f(\bar{x})$ y una función $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ continuamente diferenciable que cumple $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo y en Y, y $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x en X. Además se cumplirá también que*

$$Df^{-1}(y) = Df(f^{-1}(y))^{-1}, \text{ para todo } y \text{ en } Y.$$

Demostración. La función $Df(\cdot)$ es continua en Ω, dado que f es continuamente diferenciable en Ω. Entonces como $\det(Df(\bar{x})) \neq 0$, existe un $\alpha > 0$ tal que $\det(Df(x)) \neq 0$ para todo $x \in B(\bar{x}, \alpha)$. Además por el Lema 2.2 sabemos que existe $\beta > 0$ para el cual f es inyectiva en $B(\bar{x}, \beta)$. Tomamos $\sigma = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$ de forma que $B = B(\bar{x}, \sigma)$, entonces por la continuidad de f^{-1}, sabemos que $f(B)$ es un abierto. Este abierto será Y, mientras que $X = f^{-1}(Y) \cap B$. Llamaremos $\bar{B}$ a la adherencia de B, y sabemos que f es continua e inyectiva en $\bar{B}$.

Ahora, por el Teorema 2.7 existe una función f^{-1} definida en $f(\bar{B})$ que cumple que $f^{-1}[f(x)] = x$ para todo $x \in B$. Además dicha función, también será continua por el Teorema 2.7. Solo falta por demostrar que f^{-1} es continuamente diferenciable. Para ello, probaremos que cada componente f_i^{-1} lo es con $i = 1, ..., m$.

Dado un punto, x de S, que cumplirá que $f^{-1}(y) = x$, llamaremos x' a otro punto de B, que cumplirá que $f^{-1}(y') = x'$, siendo $y' = y + t \cdot e_j$. Aplicando el teorema del valor medio sobre f, con los puntos x y x', obtenemos:

$$\frac{f_i(x') - f_i(x)}{t} = Df_i(Z_i) \cdot \frac{x' - x}{t} \text{ para } i = 1, 2, ..., n.$$

Por hipótesis del teorema del valor medio, sabemos que los puntos Z_i son puntos del segmento que une a x y a x', por lo tanto como B es conexo por ser una bola, todos los elementos Z_i pertenecen a B. Por la definición tanto de x como de x', sabemos que

$$\frac{f_i(x') - f_i(x)}{t} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases}$$

por lo que tenemos un sistema lineal de ecuaciones donde las incógnitas son $\frac{x_i' - x_i}{t}$. Sabemos que $\det(Df(Z_i)) \neq 0$, entonces la matriz del sistema tiene rango máximo. Por el teorema de Rouché-Frobenius, es un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado, por lo que la solución del sistema será única.

Sabemos que $\frac{x_i' - x_i}{t} = \frac{f_i^{-1}(y') - f_i^{-1}(y)}{t}$, por lo que utilizando la regla de Cramer, podemos deducir el valor de $\frac{f_i{}^{-1}(y') - f_i{}^{-1}(y)}{t}$. Entonces si tomamos la k-ésima incógnita de nuestro sistema, podemos saber el valor de $\frac{f_k^{-1}(y') - f_k^{-1}(y)}{t}$, por lo que tomando el límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_k^{-1}(y') - f_k^{-1}(y)}{t} = D_j f_k^{-1}(y).$$

Con esto hemos probado la existencia de $D_j f_k^{-1}(y)$ para cada elemento $y \in Y$ y cada $j = 1, 2, ..., n$. Sabemos por la regla de Cramer que $D_j f_k^{-1}(y)$ es el cociente de dos determinantes cuyas matrices están formadas por derivadas parciales $D_j f_i(x)$, que son continuas por ser f continuamente diferenciable. Entonces $D_j f_k^{-1}$ también será continua, por lo tanto f^{-1} será continuamente diferenciable. Además, aplicando la regla de la cadena, podemos obtener la expresión de $Df^{-1}(y)$.

Por hipótesis sabemos que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, entonces al derivar, obtenemos

$$D(f \circ f^{-1}) = I_n.$$

Aplicando la regla de la cadena

$$Df(f^{-1}(y)) \cdot Df^{-1}(y) = I_n,$$

por lo tanto

$$Df^{-1}(y)) = \left(Df(f^{-1}(y))\right)^{-1}.$$

Y con esto concluimos la demostración. $\square$

Veamos ahora un ejemplo presentado en [5], en el que comprobaremos que no podemos omitir la hipótesis de que la derivada de f tiene que ser continua en el teorema de la inversa.

Ejemplo 2.9. Tomamos la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \alpha \cdot x + x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{con } x \neq 0,$$

con $\alpha \in (0,1)$. Extendemos f, añadiendo que $f(0) = 0$. Esta función es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(0) = \alpha$. Es más, su derivada viene dada por:

$$f'(x) = \alpha + 2 \cdot x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{con } x \neq 0$$

y la derivada en $x = 0$ se obtiene mediante la definición, es decir,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \alpha.$$

Sin embargo, f' no es continua en $x = 0$, por lo que la hipótesis de la continuidad de la derivada requerida en el teorema de la inversa no se cumple. Veremos ahora que la función f no tiene inversa en ningún entorno del 0.

Sabemos que en un punto donde $f'(x) = 0$ y $f''(x) \neq 0$, no puede haber una inversa local, por el hecho de que ese punto sería un máximo o un mínimo y en cualquier entorno de ese punto x, la función dejaría de ser inyectiva. Por la definición de f, en cualquier entorno de 0, hay infinitos puntos donde $f'(x) = 0$ y $f''(x) \neq 0$.

Podemos ilustrar esto con las gráficas de las funciones, como se muestra en las siguientes figuras.

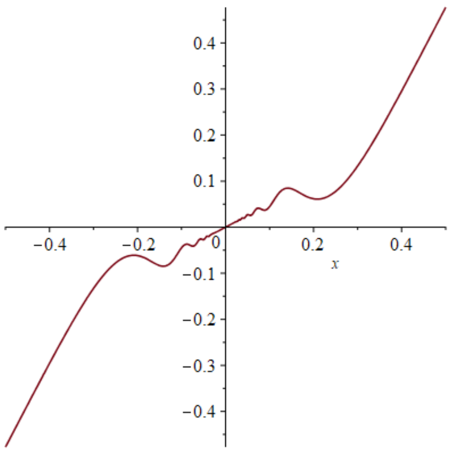

Figura 2.1: Gráfica de la función f con $\alpha = 0{,}5$.

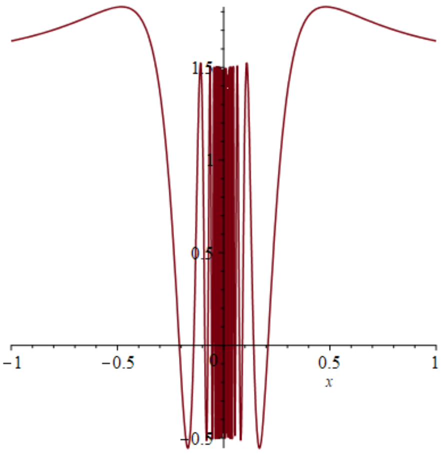

Figura 2.2: Gráfica de la función f' con $\alpha = 0{,}5$.

Como vemos la derivada se anula infinitas veces, en cualquier entorno del 0. Además, la derivada segunda de f viene dada por

$$f''(x) = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{2}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo $x \neq 0$. Su gráfica se muestra en la Figura 2.3.

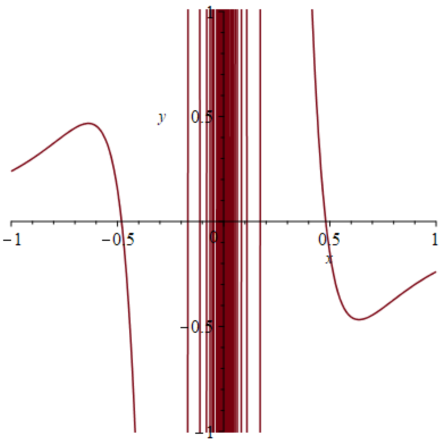

Figura 2.3: Gráfica de f''.

Esta función se anula también infinitas veces en un entorno del 0. Veamos si existe un x perteneciente a un entorno del 0 para el que se cumple que $f'(x) = f''(x) = 0$. Si se cumpliera esta condición, la resolución de este sistema

$$2\cdot x\cdot y - z = -\alpha,$$
$$\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot y - \left(\frac{2}{x}\right)\cdot z = 0,$$

vendría dada por $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $z = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Para comprobarlo, apliquemos la regla de Cramer, utilizada anteriormente en la demostración del Teorema 2.8. Aplicando esta regla obtenemos:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ 0 & -\frac{2}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\cdot x & -1 \\ 2-\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x} \end{vmatrix}} = \alpha\cdot\frac{-2\cdot x}{1+2\cdot x^2},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2\cdot x & -\alpha \\ 2-\frac{1}{x^2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\cdot x & -1 \\ 2-\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x} \end{vmatrix}} = \alpha\frac{1-2\cdot x^2}{1+2\cdot x^2}.$$

Sabemos sin embargo que $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ y $z = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, por lo que cumplen $y^2 + z^2 = 1$, pero no será así, dado que

$$y^2 + z^2 = \alpha^2\cdot\frac{1+4\cdot x^4}{(1+2\cdot x^2)^2}.$$

Para $x \neq 0$, es obvio que $\frac{1+4\cdot x^4}{(1+2\cdot x^2)^2} < 1$, por lo que $y^2 + z^2 < 1$. Por lo tanto, no existe un x que sea raíz tanto de f' como de f'', esto implica que todo el punto donde la derivada se anule, será un extremo de la función f y por lo tanto, esta no será inyectiva en ese entorno, por lo que no existe inversa de f en ningún entorno del 0.

2.3. Relación entre el teorema de la implícita y el teorema de la inversa

En esta sección probaremos que el teorema de la Implícita y el teorema de la Inversa, son equivalentes, es decir:

$$\text{Teorema de la Implícita} \iff \text{Teorema de la Inversa}.$$

Para ello seguiremos las referencias [5, 7].

Demostración. Teorema de la Implícita "$\Longleftarrow$" Teorema de la Inversa.

Supongamos que $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación en las hipótesis del teorema de la implícita, es decir $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y existe un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ que cumple $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, y $\det D_y f(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$.

Considerando ahora la función

$$\begin{aligned}\Psi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\\ (x, y) &\longrightarrow (x, f(x, y))\end{aligned}$$

que cumple:

1. Ψ es continuamente diferenciable;

2. $\Psi(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, f(\bar{x}, \bar{y})) = (\bar{x}, 0)$;

3. $D\Psi(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & D_x f(\bar{x}, \bar{y}) & & & & D_y f(\bar{x}, \bar{y}) & \end{pmatrix}$

   $\det(D\Psi(\bar{x}, \bar{y})) = \det(D_y f(\bar{x}, \bar{y})) \neq 0.$

Por el teorema de la inversa, existen $B[(\bar{x}, 0), \alpha], B[(\bar{x}, \bar{y}), \beta]$ y una función

$$\varphi\colon B[(\bar{x}, 0), \alpha] \longrightarrow B[(\bar{x}, \bar{y}), \beta]$$

continua tal que:

1. $\varphi(\bar{x}, 0) = (\bar{x}, \bar{y})$;

2. $(\Psi \circ \varphi)(x, y) = (x, y), \text{ para todo } (x, y) \in B[(\bar{x}, 0), \alpha]$. Observemos que

   $$(\Psi \circ \varphi)(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), ..., \varphi_n(x, y), f_1(\varphi(x, y)), f_2(\varphi(x, y)), ..., f_m(\varphi(x, y))).$$

   Esto nos indica que

   $$(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), ..., \varphi_n(x, y)) = x,$$

   lo que implica que

   $$f(x, \varphi_{n+1}(x, y), \varphi_{n+2}(x, y), ..., \varphi_{n+m}(x, y)) = y.$$

Entonces si tomamos $y = 0$ definimos la función $\phi\colon B[\bar{x},\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ como

$$\phi(x) = (\phi_1(x), ..., \phi_m(x)) = (\varphi_{n+1}(x,0), ..., \varphi_{n+m}(x,0))$$

que cumple

$$f(x,\phi(x)) = 0, \qquad \text{para todo } x \in B[\bar{x},\alpha].$$

3. Sea $x \in B[\bar{x},\alpha], y \in B[\bar{y},\beta]$ y $f(x,y) = 0$, probemos ahora que $y = \phi(x)$.

   Por el teorema de la inversa, si $x \in B[\bar{x},\alpha], (x,y) \in B[(\bar{x},\bar{y}),\beta]$ y $\Psi(x,y) = (x,0)$, esto implica que $\varphi(x,0) = (x,y)$, lo que nos lleva a que por la definición de ϕ, $\phi(x) = y$.

4. De la ecuación de $f(x,\phi(x)) = 0$, aplicando la regla de la cadena con la función Ψ, obtenemos:

$$D\phi(x) = -(D_y f(x,\phi(x)))^{-1} \cdot D_x f(x,\phi(x))$$

   con lo que queda probado el teorema de la función implícita a partir del teorema de la función inversa.

□

Demostración. Teorema de la Implícita "$\Longrightarrow$" Teorema de la Inversa.

Supongamos que $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación en las hipótesis del teorema de la inversa, es decir, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y existe un punto $\bar{x} \in \Omega$ que cumple que $\det Df(\bar{x}) \neq 0$ e $\bar{y} = f(\bar{x})$.

Por el Lema 2.2, podemos asumir que f es inyectiva en un entorno de $\bar{x}$. Si tomamos la función $\psi(x,y) = f(x)-y$ con $(x,y) \in \Omega\times\mathbb{R}^n$, esta función es continuamente diferenciable, $\psi(\bar{x},\bar{y}) = 0$ y

$$D\psi(x,y) = (Df(x)| - Id).$$

Por hipótesis del teorema de la inversa, sabemos que $\det Df(\bar{x}) \neq 0$, por lo tanto tenemos que $\det D_x\Psi(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ y podemos aplicar el Teorema de la Implícita. El Teorema 2.4 nos garantiza la existencia de una función g y un entorno Y de $\bar{y}$ para la que se cumplirá $\psi(g(y),y) = f(g(y)) - y = 0$ para todo $y \in Y$. Como $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$, entonces g es la función inversa de f. □

2.4. Carácter local del teorema de la implícita y el teorema de la inversa

En esta sección, nos dedicaremos a ilustrar que los teoremas mostrados en las secciones anteriores son locales. Esto lo ilustraremos con un ejemplo extraído de [2].

Ejemplo 2.10. Tomamos $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ siendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq 0\}$, definida como:

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \left(\frac{1}{2}\cdot(|x|-y), \sqrt{|x|\cdot y}\right).$$

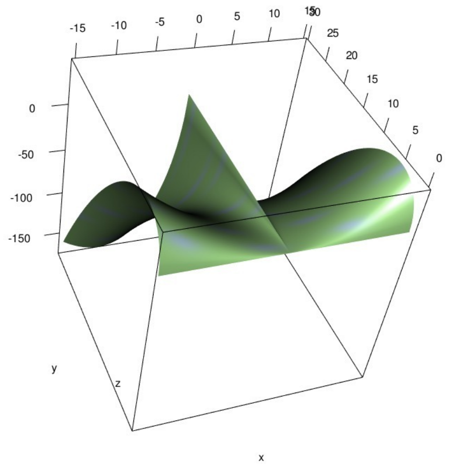

Figura 2.4: Gráfica de la función f.

Vamos a ver que el teorema de la inversa es local tal y como está definida esta función.

Si tomamos $u = \dfrac{1}{2}\cdot(|x|-y)$ y $v = \sqrt{|x|\cdot y}$, despejemos $|x|$ e y, de $u = \dfrac{1}{2}\cdot(|x|-y)$ obtenemos

$$|x| = 2u + y, \tag{2.8}$$

si ahora sustituimos en $v = \sqrt{|x|\cdot y}$ este valor de $|x|$ llegamos a

$$v^2 = 2uy + y^2.$$

Despejando y de esta ecuación, sabemos que

$$y = -u \pm \sqrt{u^2+v^2},$$

sustituyendo ahora en (2.8) esta expresión de y, obtenemos

$$|x| = u \pm \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Sin embargo, debemos descartar el signo negativo, dado que en el caso de ser $\sqrt{u^2 + v^2} > u$, como ocurre por ejemplo cuando $u = 1$ y $v = 1$, entonces $|x| < 0$, lo cual es imposible, por lo que las expresiones finales de $|x|$ e y son

$$\begin{aligned} |x| &= u + \sqrt{u^2 + v^2}, \\ y &= -u + \sqrt{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Sabemos que $f(C) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon v \geq 0\} = C$, pero esta aplicación no es inyectiva, dado que $f(x, y) = f(-x, y)$. Sin embargo, f es inyectiva en algunos abiertos de C. Por ejemplo:

- Si $\bar{x} > 0$ e $\bar{y} > 0$ la función es localmente biyectiva en $B((\bar{x}, \bar{y}), r)$ con $r = \text{mín}(\bar{x}, \bar{y})$ y la inversa local viene dada por

$$(u, v) \mapsto (x, y) = (u + \sqrt{u^2 + v^2}, -u + \sqrt{u^2 + v^2}).$$

- Si $\bar{x} < 0$ e $\bar{y} > 0$ la función es localmente biyectiva en $B((\bar{x}, \bar{y}), r)$ con $r = \text{mín}(-\bar{x}, \bar{y})$ y la inversa local sería

$$(u, v) \mapsto (x, y) = (-u - \sqrt{u^2 + v^2}, -u + \sqrt{u^2 + v^2}).$$

Sin embargo, podemos ver que en muchos puntos de C no se van a cumplir las hipótesis necesarias para el Teorema de la Inversa.

Por ejemplo, si tomamos un punto $(0, \bar{y})$, perteneciente a C, un entorno cualquiera de ese punto y una bola contenida en ese entorno de radio r, tendremos que tanto $(r/2, \bar{y})$ como $(-r/2, \bar{y})$ están en el entorno y por lo tanto f no puede ser inyectiva en ese entorno.

Ahora, una vez justificado que el teorema es local, definiremos lo que es un difeomorfismo, y veremos un resultado que nos permite asegurar la existencia de una inversa global.

Definición 2.11. Sean Ω_1, Ω_2 dos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Una aplicación

$$f \colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

es un difemorfismo de clase p, con $p \geq 1$, si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son funciones de clase p.

Tras esta definición, podemos probar la siguiente caracterización de difeomorfismo.

Proposición 2.12. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una condición necesaria y suficiente para que la aplicación $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de clase $p \geq 1$ sea un difeomorfismo de clase p de Ω en $f(\Omega)$ es que*

- *f sea inyectiva;*
- $\det Df(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$.

Demostración. Si f es un difeomorfismo, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_\Omega$. Aplicando la regla de la cadena, obtenemos $D\mathrm{Id}_\Omega(x) = \mathrm{Id} = Df^{-1}(f(x)) \cdot Df(x)$. Esto implica que $\det Df(x) \neq 0$.

Recíprocamente se supone que $f\colon \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ es biyectiva. Si aplicamos el teorema de la inversa en el punto $\bar{x}$, podemos llegar a la conclusión de que la restricción de f^{-1} a un entorno de $\bar{x}$ es de clase p. De manera que f^{-1} es de clase p en $f(\Omega)$. □

Por lo que si f es un difeomorfismo de Ω a $f(\Omega)$ entonces la función f es biyectiva de Ω a $f(\Omega)$ y sabemos que $\det Df(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, por lo que estamos en las hipótesis del Teorema de la inversa 2.8.

Veamos ahora un ejemplo de difeomorfismo, que también se suele denominar cambio de variables.

Ejemplo 2.13 (Cambio de variable a coordenadas cilíndricas)**.** Consideramos los abiertos

$$\Omega_1 = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\colon \rho > 0, \theta \in (-\pi, \pi)\},$$
$$\Omega_2 = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\colon x \leq 0\},$$

y la aplicación

$$\varphi\colon (\rho, \theta, z) \in \Omega_1 \mapsto \varphi(\rho, \theta, z) = (x, y, z) \in \Omega_2,$$

definida como

$$x = \rho \cdot \cos(\theta), \quad y = \rho \cdot \mathrm{sen}(\theta), \quad z = z.$$

Se puede ver fácilmente que es biyectiva, dado que φ es inyectiva en Ω_1 y también sobreyectiva, dado que para todo $(x, y, z) \in \Omega_2$, existe un punto $(\rho, \theta, z) \in \Omega_1$ de manera que $\varphi(\rho, \theta, z) = (x, y, z)$. Además

$$\det D\varphi(\rho, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ -\rho \cdot \mathrm{sen}(\theta) & \rho \cdot \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \neq 0,$$

para cualquier $(\rho, \theta, z) \in \Omega_1$.

Por lo tanto, φ es un difeomorfismo de clase infinito entre Ω_1 y Ω_2. La aplicación inversa, vendrá dada por,

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right), z\right).$$

2.5. Prueba del teorema de la implícita para espacios de Banach

Primero definiremos lo que es un espacio de Banach y una función contractiva, para poder enunciar y demostrar el teorema del punto fijo de Banach. Dicho teorema de punto fijo será la herramienta clave en la prueba del teorema de la implícita en este contexto. Esta sección está inspirada por [5].

Definición 2.14. Un espacio de Banach es un espacio normado completo, es decir, un espacio vectorial con una norma y en el que además todas las sucesiones de Cauchy convergen a un elemento de ese espacio.

Definición 2.15. Sea X un espacio de Banach con norma $||\cdot||$. Una función f es contractiva en X si existe un $c \in \mathbb{R}$ con $0 < c < 1$, llamada constante de contracción, tal que

$$||f(x) - f(y)|| \leq c \cdot ||x - y||$$

para todo x,$y \in X$.

Ahora estamos en condiciones para enunciar y demostrar el teorema del punto fijo de Banach.

Teorema 2.16 (del punto fijo de Banach)**.** *Sea X un espacio de Banach y $f\colon X \longrightarrow X$ una función contractiva en X . Entonces f tiene un único punto fijo en X, es decir, existe un único $\bar{x} \in X$ que cumpla $\bar{x} = f(\bar{x})$.*

Demostración. Tomamos un punto arbitrario p de X, y tomamos la sucesión recurrente:

$$\begin{aligned}
x_0 &= p, \\
x_1 &= f(x_0), \\
x_2 &= f(x_1), \\
&\vdots \\
x_n &= f(x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Probemos que esta sucesión es de Cauchy. Para ello, empezamos acotando la distancia entre dos elementos consecutivos,

$$||x_{j+1} - x_j|| = ||f(x_j) - f(x_{j-1})|| \leq c \cdot ||x_j - x_{j-1}||.$$

Repitiendo este proceso j veces obtenemos

$$||x_{j+1} - x_j|| \leq c^j \cdot ||x_1 - x_0||.$$

Lo que tiende a 0 cuando j tiende a infinito, dado que $0 < c < 1$.

Ahora veamos que pasa si tomamos elementos no consecutivos. Si tomamos un $k \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} ||x_{j+k} - x_j|| &\leq ||x_{j+k} - x_{j+k-1}|| + ||x_{j+k-1} - x_{j+k-2}|| + \cdots + ||x_{j+1} - x_j|| \\ &\leq [c^{j+k-1} + c^{j+k-2} + \cdots + c^j] \cdot ||x_1 - x_0|| \\ &= c^j \cdot [c^{k-1} + c^{k-2} + \cdots + 1] \cdot ||x_1 - x_0||. \end{aligned}$$

Entonces, como sabemos que

$$\frac{1}{1-c} = \sum_{j=0}^{\infty} c^j > [c^{k-1} + c^{k-2} + \cdots + 1],$$

la desigualdad obtenida es:

$$||x_{j+k} - x_j|| \leq c^j \cdot \frac{1}{1-c} \cdot ||x_1 - x_0||,$$

que tiende a 0 cuando j tiende a infinito, por lo que hemos probado que la sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ es una sucesión de Cauchy.

Ahora que sabemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, al ser X completo, existe un $\bar{x} \in X$ de forma que es el límite de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por la continuidad de f y la definición de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se cumple

$$f(\bar{x}) = f(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x}.$$

Ahora que hemos probado la existencia del punto fijo, probemos la unicidad. Para ello supondremos que existe un segundo punto fijo $\bar{y}$. Entonces,

$$||\bar{x} - \bar{y}|| = ||f(\bar{x}) - f(\bar{y})|| \leq c \cdot ||\bar{x} - \bar{y}||,$$

y como sabemos que $0 < c < 1$, el único caso en el que se cumpliría esto, sería en el caso de que $||\bar{x} - \bar{y}|| = 0$, es decir si $\bar{x} = \bar{y}$ por lo que llegamos una contradicción. En conclusión, el punto fijo $\bar{x}$ es único. $\square$

Una vez introducido esto, vamos a escribir unas proposiciones, extraídas de [5], que nos facilitarán la demostración del teorema de la implícita para espacios de Banach.

Proposición 2.17. *Sea $\bar{B} = \bar{B}(\bar{x}, r)$ una bola cerrada en un espacio de Banach X. Suponemos que $f\colon \bar{B} \longrightarrow X$ es una contracción, con c su constante de contracción, de manera que $||f(\bar{x}) - \bar{x}|| \leq (1 - c) \cdot r$. Entonces, f tiene un único punto fijo en $\bar{B}$.*

Proposición 2.18. *Sea $B = B(\bar{x}, r)$ una bola abierta en un espacio de Banach X. Supongamos que $f\colon B \longrightarrow X$ es una contracción tal que $||f(\bar{x}) - \bar{x}|| < (1 - c) \cdot r$. Entonces f tiene un único punto fijo en B.*

Proposición 2.19. *Suponemos que f es una contracción en un espacio de Banach X. Sea $x \in X$ tal que $||f(x) - x|| = d$. Entonces la distancia de x al punto fijo $\bar{x}$ es como máximo $\dfrac{d}{1-c}$.*

Proposición 2.20. *Sea X un espacio de Banach y S un espacio métrico. Suponemos que la aplicación*

$$f\colon S \times X \longrightarrow X$$

es una contracción unicamente en X sobre $s \in S$ si existe un $c \in (0, 1)$ tal que

$$||f(s, x) - f(s, y)|| \leq c \cdot ||x - y||$$

para todo $s \in S$ y para todo $x, y \in X$. Además supongamos que f es continua en s para cada $x \in X$ fijado. Entonces, para cada s, existirá un único punto fijo $x_s \in X$ que cumplirá $f(s, x_s) = x_s$. Además la aplicación dada por $\phi(s) = x_s$ es una función continua en S.

Demostración. Tomamos un $t \in S$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en su primera variable, sabemos que existe un $\delta > 0$ que cumplirá que si $||t - s|| < \delta$ entonces $||f(s, x_t) - f(t, x_t)|| < \varepsilon$. Sabemos que $f(t, x_t) = x_t$, por lo que la distancia de $f(s, x_t)$ al punto fijo x_t es como máximo ε. Entonces $||x_s - x_t|| < \dfrac{\varepsilon}{1-c}$ por la Proposición 2.19, lo que quiere decir que si $||s - t|| < \delta$ entonces $||x_s - x_t|| < \dfrac{\varepsilon}{1-c}$. Por lo que la aplicación $\phi(s) = x_s$ es una aplicación continua. □

Antes de ponernos a demostrar el teorema de la implícita para espacios de Banach, introduciremos el siguiente teorema, consecuencia directa de las Proposiciones 2.18 y 2.20.

Teorema 2.21. *Sea X un espacio de Banach y S un espacio métrico. Denotamos $B = B(\bar{x}, r)$ una bola abierta en X, tomamos $h\colon S \times B \longrightarrow X$ una función contractiva en X*

sobre $s \in S$, y continua en la variable s para cada valor fijado $x \in X$. Supongamos que para cada $s \in S$, sabemos que

$$||h(s, x) - x|| < (1 - c) \cdot r.$$

Entonces para cada $x \in X$, existe un único $\bar{y}_x \in B$ de manera que $h(x, \bar{y}_x) = \bar{y}_x$, y además la aplicación $\phi(x) = \bar{y}_x$ es continua de X a B.

Antes de llegar a la demostración del teorema de la implícita para espacios de Banach, hablaremos del cálculo diferencial en espacios normados. Estas definiciones se pueden encontrar en [6].

Recordemos que cuando una función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, sabemos que existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Veamos ahora, de tener dos espacios normados X e Y como podríamos definir la derivada de una función $f\colon X \longrightarrow Y$.

Definición 2.22. Sean X, Y espacios normados y $\Omega \subset X$ un abierto. Dada una aplicación $f\colon \Omega \subset X \longrightarrow Y$, decimos que f es diferenciable en $x \in \Omega$ si existe una aplicación lineal acotada, $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ de manera que

$$f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h = \varepsilon(h)$$

donde $\dfrac{\varepsilon(h)}{||h||} \longrightarrow 0$ cuando $h \longrightarrow 0$.

Observación 2.23. Si f es diferenciable en $x \in \Omega$ entonces:

- f es continua en ese punto.
- la aplicación diferencial $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ es única.

La derivada definida anteriormente es la denominada derivada de Fréchet de f en el punto x. Definamos ahora el concepto de función de clase 1, $\mathcal{C}^1$ en espacios normados.

Definición 2.24. Dada una función $f\colon \Omega \subset X \longrightarrow Y$, decimos que f es diferenciable en Ω si existe $f'(x)$ para todo $x \in \Omega$. Además, si la aplicación $x \mapsto f'(x)$ es continua de Ω a $\mathcal{L}(X, Y)$ se dice que f es una función de clase uno en Ω y se denota como $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Notación 2.25. Sean X,Y y Z espacios de Banach y sea $f\colon \Omega \subset X \times Y \longrightarrow Z$ una función diferenciable en la segunda variable. Nos referimos a la aplicación diferencial de f respecto a la variable y como $d_y f$.

A continuación enunciamos una versión del teorema del valor medio en espacios normados.

Teorema 2.26 (del valor medio)**.** *Sean X e Y espacios normados con normas $|\cdot|$ y $||\cdot||$ respectivamente, y sea $\Omega \subset X$ abierto y a, b puntos de Ω tal que $L(a,b) \subset \Omega$. Si $f\colon \Omega \subset X \longrightarrow Y$ es continua en $L[a,b]$ y diferenciable en los puntos de $L(a,b)$ de manera que existe $K_{a,b} = \sup_{x\in L(a,b)} ||df(x)||$ se tiene que*

$$||f(a) - f(b)|| \leq K_{a,b} \cdot |b - a|.$$

Concluimos este capítulo con la prueba del teorema de la función implícita en espacios de Banach.

Teorema 2.27. *Sean X,Y,Z espacios de Banach, $\Omega \subset X \times Y$ un abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow Z$ una función continuamente diferenciable. Supongamos que existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ que cumple $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ y que $d_y f(\bar{x}, \bar{y})$ tiene inversa. Entonces existen dos entornos $U_{\bar{x}}$, entorno de $\bar{x}$ en X y $V_{\bar{y}}$ entorno de $\bar{y}$ en Y, tales que para todo x perteneciente a $U_{\bar{x}}$, existe un único y de $V_{\bar{y}}$ de manera que $f(x,y) = 0$. Además existe una única función continua ϕ definida en $U_{\bar{x}}$ que cumple $\phi(x) = y$.*

Demostración. Para esta demostración, tomaremos una función auxiliar

$$h(x,y) = y - [d_y f(\bar{x}, \bar{y})]^{-1} \cdot f(x,y).$$

Por la definición de la función h, sabemos que

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - [d_y f(\bar{x}, \bar{y})]^{-1} \cdot f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y},$$

ya que por hipótesis tenemos que $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Sabemos que h será continuamente diferenciable en la variable y dado que la identidad en Y es diferenciable y por hipótesis también lo es f. Con esto, hemos probado que $h(x,y) = y$ si y solo si $f(x,y) = 0$.

Por lo que como es continuamente diferenciable en y sabemos que habrá un entorno de $(\bar{x}, \bar{y})$, $U_x \times V_y$, donde

$$d_y h(x,y) = Id - (d_y f(\bar{x}, \bar{y}))^{-1} \cdot d_y f(x,y),$$

Por lo que es trivial ver que $d_y h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Como $d_y h(\cdot)$ es continua, si tomamos un entorno de $\bar{x}$ como por ejemplo U_x, y tomamos $B_1 = B(\bar{x}, r)$ con $r > 0$ de manera que $U_x \subset B_1$ y entorno de $\bar{y}$ como V_y y $B_2 = B(\bar{y}, s)$ con $s > 0$ de manera que $V_y \subset B_2$, entonces podemos afirmar que $||d_y h(x,y)|| < \dfrac{1}{2}$ para todo $(x,y) \in U_x \times V_y$. Aplicando el teorema del valor medio sobre la segunda variable de h obtenemos que

$$||h(x, \bar{y}) - \bar{y}|| = ||h(x, \bar{y}) - h(\bar{x}, \bar{y})|| < \frac{1}{2} \cdot ||(x, \bar{y}) - (\bar{x}, \bar{y})||.$$

Por lo tanto la función h es contractiva con constante $c = \dfrac{1}{2}$. Por el Teorema 2.21, concluimos que para cada $x \in U_x$ existe un único $\bar{y}_x \in V_y$, cumpliendo $h(x, \bar{y}_x) = \bar{y}_x$. Además la función que lleva cada elemento x a su punto fijo $\bar{y}_x$ es continua, es decir la aplicación $\phi \colon U_x \longrightarrow V_y$ definida como

$$\phi(x) = \bar{y}_x.$$

Como por la definición de h sabemos que $h(x, \bar{y}_x) = \bar{y}_x$ si $f(x, \bar{y}_x) = 0$, concluimos la demostración. $\square$

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo expondremos algunas de las aplicaciones del teorema de la implícita. Primero, vamos a centrarnos en como podemos aplicar el teorema de la implícita para definir superficies implícitamente. En esta sección utilizaremos resultados elementales de diferenciación de funciones varias variables y geometría básica. Para ello nos apoyaremos en [8].

Posteriormente, veremos la directa relación que tienen las EDOs con el teorema de la implícita y como la existencia de una función implícita, puede probar la existencia de solución de una EDO. Utilizaremos varios resultados básicos de EDOs y el teorema de la función implícita aplicado en espacios de Banach para esta sección, para la cual nos hemos inspirado en [5].

Por último, demostraremos la unicidad de solución de un problema de Cauchy escalar bajo condiciones Lipschitz en la variable independiente. Esto lo probaremos aplicando el teorema de la inversa, que como vimos anteriormente, es equivalente al teorema de la implícita. Además usaremos algunos resultados básicos de soluciones de EDOs. Esta última se basa en resultados probados en el artículo [4].

3.1. Superficies definidas implícitamente

En primer lugar, introducimos los conceptos de punto regular y superficie regular.

Definición 3.1. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \Omega$ es un punto singular de f si $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$. Un punto que no es singular, se dice que es un punto regular. Un valor $y \in f(\Omega)$ se dice que es un valor regular cuando todo $x \in f^{-1}(y)$ es regular.

Antes de proceder a la definición de superficie regular, introducimos la definición de curva regular, que necesitaremos más adelante.

Definición 3.2. Sea $\alpha\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación.

- Si α es continuamente diferenciable, se dice que define una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$.
- Si $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in (a,b)$, se dirá que la curva parametrizada es regular.
- Si α es una aplicación inyectiva de forma que $\gamma = \alpha(a,b)$, entonces diremos que γ es una curva regular y que α es una parametrización de γ.

Definición 3.3.

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Una aplicación continuamente diferenciable,

$$F\colon (u,v) \in \Omega \mapsto F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3,$$

se dice que define una superficie parametrizada en $\mathbb{R}^3$.

- Se dice que es una superficie parametrizada regular cuando $DF(u,v)$ es inyectiva para todo $(u,v) \in \Omega$.
- Sea $F\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada regular siendo F inyectiva. Decimos que $\sum = F(\Omega)$ es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por F.

Tras haber definido esto, nuestra intención es probar la siguiente proposición utilizando el teorema de la implícita.

Proposición 3.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase uno y $k \in f(\Omega)$ un valor regular de f.*

- *El conjunto $\sum_k = f^{-1}(k)$ es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$.*
- *Para todo $(x,y,z) \in \sum_k$, $\nabla f(x,y,z)$ es el vector normal a $\sum_k$ en el punto (x,y,z). Esto significa que el plano tangente a $\sum_k$ en ese punto tiene como ecuación*

$$D_1 f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(x-\bar{x}) + D_2 f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(y-\bar{y}) + D_3 f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(z-\bar{z}) = 0.$$

- *Sea π_p el plano tangente a $\sum_k$ en el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ y sea r una recta pasando por ese punto, contenida en π_p. Existe una curva regular α pasando por p, contenida en $\sum_k$, admitiendo r como recta tangente en ese punto.*

Demostración. Sea $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in \sum_k$, como k es un valor regular de f, esto nos indica que $\nabla f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \neq 0$, es decir al menos una derivada parcial de f en ese punto es distinta de 0. Supongamos que $D_3 f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \neq 0$, por lo que podemos aplicar el teorema de la implícita a la ecuación $f(x, y, z) - k = 0$ en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, es decir, sabemos que existe $X \times Y$ entorno de $(\bar{x}, \bar{y})$ y Z entorno de $\bar{z}$ en donde existe una función

$$\phi\colon X \times Y \longrightarrow Z,$$

continuamente diferenciable en $X \times Y$, que además verificará que $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}$ y por lo tanto $f(x, y, \phi(x, y)) = k$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Además el plano tangente a la superficie en el punto p, π_p, está definido en términos de ϕ como

$$z = \bar{z} + D_1\phi(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (x - \bar{x}) + D_2\phi(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (y - \bar{y}).$$

Teniendo en cuenta que por el teorema de la implícita sabemos que

$$D_1\phi(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{D_1 f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{D_3 f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}, \qquad D_2\phi(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{D_2 f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{D_3 f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})},$$

con esto probamos el segundo apartado.

Tomamos ahora una recta r perteneciente al plano π_p, que contenga al punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Esta recta será una recta tangente al punto. Llamaremos $\bar{\pi}$ al plano formado por el vector normal de π_p y la recta r. Supondremos que la ecuación que lo define viene dada por

$$g(x, y, z) = v_1 x + v_2 y + v_3 z - d = 0.$$

Ilustremos este en la Figura 3.1

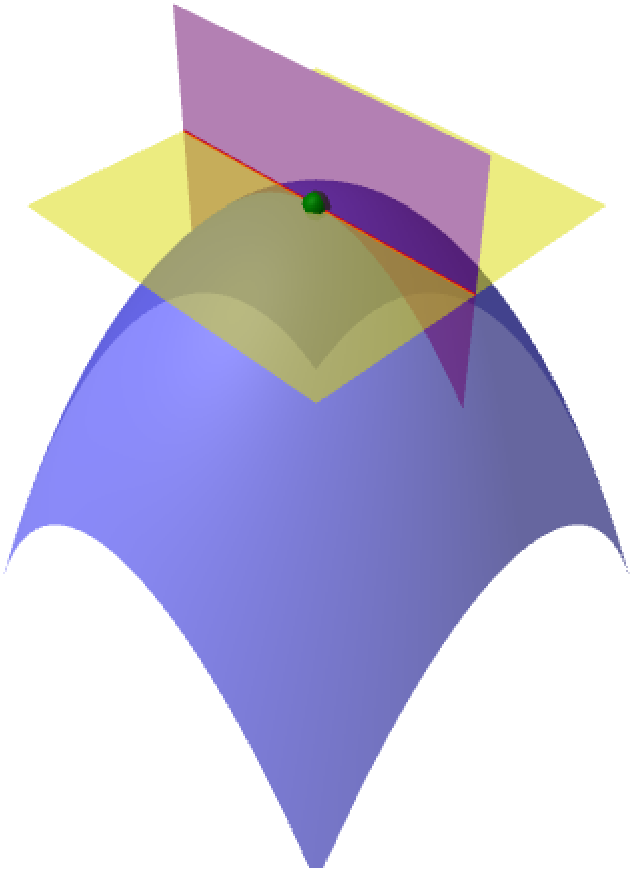

Figura 3.1: Interseccion de π_p y $\bar{\pi}$.

Queda claro que

$$D(f,g)(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \begin{pmatrix} D_1f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) & D_2f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) & D_3f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

es una matriz de rango 2, ya que de no ser así, significaría que π_p y $\bar{\pi}$ son el mismo plano. Supongamos que las dos últimas columnas cumplen

$$\begin{vmatrix} D_2f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) & D_3f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces por el teorema de la implícita existe un X entorno de $\bar{x}$ en donde existe una aplicación $\phi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que define una curva regular α en $\mathbb{R}^3$ definida como

$$\alpha(x) = (x, \phi(x)).$$

Por las hipótesis del teorema de la implícita sabemos que esta función ϕ cumple que

$$g(\alpha(x)) = 0,$$

lo que significa que la curva está contenida en el plano $\bar{\pi}$, también cumple que

$$f(\alpha(x)) - k = 0.$$

Esto indica que α es una curva regular contenida en $\sum_k$ y su recta tangente en p pertenecerá a π_p, además como esa recta pertenece a π_p y a $\bar{\pi}$, es la recta r como queríamos demostrar.

$\square$

3.2. El teorema de la implícita para probar la existencia de soluciones en EDOs

En esta sección expondremos la fuerte conexión entre el teorema de la implícita y la resolución de ecuaciones diferenciales. Para ello, comencemos introduciendo el teorema de Peano.

Teorema 3.5 (Peano)**.** *Sea $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en*

$$(t_0 - a, t_0 + a) \times B(x_0, r) \subset \Omega$$

entonces existe una solución $x(t)$ para

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

además existe un $h > 0$ de forma que la función $x(t)$ está definida en el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$.

Observación 3.6. Debemos recordar que la solución de (3.1) no tiene por qué ser única si f es solo continua. Por ejemplo si consideramos un problema de Cauchy de la forma

$$\frac{dx}{dt} = x^r \quad x(0) = 0, \qquad \text{con } r \in (0, 1),$$

tenemos una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de variables separadas, por lo que podemos reescribirlo de esta forma

$$dx \cdot x^{-r} = dt.$$

Si integramos en ambos lados de la igualdad, obtenemos que

$$\frac{x^{1-r}}{1-r} = t.$$

Despejando x, obtenemos una solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$x(t) = ((1-r)\cdot t)^{\frac{1}{1-r}}.$$

Sin embargo, no nos podemos olvidar de la solución trivial de la ecuación diferencial ordinaria $x(t) = 0$, por lo que hemos visto que la condición de continuidad no basta para llegar a la unicidad de la solución.

Podemos probar el teorema de la implícita como un corolario del Teorema de Peano 3.5.

Teorema 3.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto y $h\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable, tal que $h(t_0, x_0) = 0$ y*

$$\det(D_x h(t_0, x_0)) \neq 0.$$

Entonces existen un $\alpha > 0$ y una función $\phi\colon (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en ese intervalo que cumplirá $\phi(t_0) = x_0$ y además $h(t, \phi(t)) = 0$ en un entorno de t_0.

Demostración. Tomemos $a, r > 0$ de manera que $(t_0 - a, t_0 + a) \times B(x_0, r) \subset \Omega$ y que la matriz $D_x h$ es no singular en $(t_0 - a, t_0 + a) \times B(x_0, r)$, y definamos la función

$$f(t, x) = -\left(D_x h(t, x)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}(t, x).$$

Sabemos que f es continua por lo que podemos aplicar el Teorema 3.5 para probar la existencia de solución para el problema

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

definida en un intervalo de la forma $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. Denotamos ahora $x(t) = \phi(t)$, de manera que $x(t_0) = \phi(t_0)$ y además

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \qquad t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha).$$

Por lo que como, $h(t_0, x_0) = 0$, utilizando la regla de la cadena y la igualdad anterior,

$$\frac{dh}{dt}(t, \phi(t)) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, \phi(t)) + D_x h(t, \phi(t))\phi'(t) = 0,$$

de forma que $h(t, \phi(t)) = 0$ en el intervalo $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. $\square$

Hemos visto que el teorema de la implícita puede ser tratado como un corolario de la existencia de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias. Lo que queremos hacer ahora es probar que podemos usar el teorema de la implícita para demostrar el Teorema de Picard-Lipschitz, para ello nos hemos apoyado en [3].

Teorema 3.8. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, $f\colon I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable y consideramos el problema diferencial*

$$x' = f(t,x) \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.2}$$

con $t_0 \in I$ y con $x_0 \in \Omega$. Entonces existe un abierto I de $\mathbb{R}$, entorno de t_0 y una única función continuamente diferenciable ϕ que es solución de (3.2)*.*

Demostración. Para esta demostración tomaremos $(t_0, x_0) = (0,0)$ para simplificar los cálculos.

Tomamos una bola abierta centrada en el origen de radio r, contenida en Ω y sea U la bola abierta centrada en el origen de radio $\frac{r}{2}$. Definimos ahora los siguientes conjuntos de aplicaciones

$$\begin{aligned} X &= \{\phi \in \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R}^n)\colon \phi(0) = 0\},\\ Y &= \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

y sus respectivas normas

$$\begin{aligned} ||\phi||_Y &= \sup_{x\in[-1,1]} ||\phi(x)||,\\ ||\phi||_X &= ||\phi||_Y + ||\phi'||_Y. \end{aligned}$$

Aquí ϕ' es la derivada de ϕ. Sea X_0 un abierto de X donde están los elementos de X cuya imagen está contenida en U.

Consideramos ahora la función

$$\begin{aligned} F\colon (-1,1) \times X_0 &\longrightarrow Y,\\ (\delta,\phi) &\mapsto F(\delta,\phi) = \phi'(t) - \delta\cdot f(\delta t, \phi(\delta t)). \end{aligned}$$

Aplicaremos el teorema de la implícita para espacios de Banach sobre esta función.

Para ello primero veamos que la función es de clase 1. Como por hipótesis f es una función de clase 1, basta ver que la aplicación $d\colon X \longrightarrow Y$ dada por $d\phi = \phi'$ es de clase 1 de X a Y, véase [3].

Sabemos que $\phi' \in Y$ para cada $\phi \in X$ y d es una transformación lineal. Como

$$||d\phi||_Y \leq ||d\phi||_Y + ||\phi||_Y = ||\phi||_X$$

sabemos que d es continua. Además, cómo $d\colon X \longrightarrow Y$ es lineal y acotada, su derivada es ella misma, así que d es una aplicación de clase 1.

Si tomamos $\delta = 0$, entonces $F(0,\phi) = \phi' = d\phi$. Además sabemos que $d_\phi F(0,0) = d$.

Veamos ahora que d tiene inversa y que además está acotada. Definimos $\mathcal{L}\colon Y \longrightarrow X$ tal que

$$(\mathcal{L}y)(t) = \int_0^t y(s)ds.$$

Es obvio que

$$(d \circ \mathcal{L})(y) = y, \qquad (\mathcal{L} \circ d)(\psi) = \psi,$$

por lo que $\mathcal{L}$ es la inversa de d. Además, está acotada

$$||\mathcal{L}y||_X = ||\mathcal{L}y||_Y + ||(d \circ \mathcal{L})y||_Y \leq ||y||_Y + ||y||_Y = ||2y||_Y.$$

Como $F(0,0) = 0$ y $d_\phi F(0,0)$ es invertible, estamos en condiciones de aplicar el teorema de la implícita. Entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ existe una única función $\beta_\delta(t)$ continuamente diferenciable para la cual se cumple $\beta_\delta(0) = 0$ y

$$F(\delta, \beta_\delta) = \beta'_\delta(t) - \delta f(\delta t, \beta_\delta(t)) = 0,$$

es decir se cumple la igualdad

$$\beta'_\delta(t) = \delta f(\delta t, \beta_\delta(t)).$$

Para un $\delta > 0$ tomamos $x(t) = \beta_\delta\left(\frac{t}{\delta}\right)$ y obtenemos que $x(t)$ es la única solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{1}{\delta}\beta'_\delta\left(\frac{t}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta} \cdot \delta f\left(\delta \cdot \frac{t}{\delta}, \beta_\delta\left(\frac{t}{\delta}\right)\right) = f(t, x(t)), \qquad x(0) = 0,$$

como queríamos ver. $\square$

3.3. Unicidad bajo condiciones Lipschitz en la variable independiente

En la sección anterior, expusimos como el teorema de la implícita nos ayudaba a demostrar la existencia y unicidad de solución para EDOs. En esta sección probaremos como utilizando el teorema de la inversa con algunas condiciones sobre el problema de valor inicial, podemos llegar a demostrar la unicidad de solución para este aunque no estemos en las hipótesis del teorema de Picard-Lipschitz.

Comenzamos primero definiendo lo que es una función localmente lipschitziana.

Definición 3.9. Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$.

- Se dirá que satisface en Ω la condición de Lipschitz respecto a la variable x cuando existe un $\lambda > 0$ tal que

  $$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq \lambda \cdot ||x_1 - x_2|| \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in \Omega.$$

  Se escribirá $f \in L(\Omega, x)$.

- Si cada punto admite un entorno donde f cumple la condición de Lipschitz para la variable x, diremos que f es localmente lipschitziana respecto a esa variable y lo denotaremos como $f \in L_{loc}(\Omega, x)$.

Una vez definido esto, podemos escribir el teorema de Picard-Lipschitz.

Teorema 3.10 (Picard-Lipschitz)**.** *Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente lipschitziana con respecto a la variable x en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces*

- *Para cada punto $(t,x) \in \Omega$ existe un intervalo abierto (a,b) al que pertenece t en donde está definida una solución $x(t)$ del problema* (3.1) *cumpliendo las condiciones iniciales dadas.*

- *Si $y(t)$ es otra solución definida en el intervalo (c,d) verificando esas condiciones, se tiene que $x(t) = y(t)$ si $t \in (a,b) \cap (c,d)$.*

- *Si f es de clase p en Ω, con $p \geq 0$ toda solución de* (3.1) *es de clase $p+1$ en el intervalo de definición.*

Este teorema nos indica que la solución de la EDO (3.1) es única de ser f lipschitziana en la variable dependiente. Ahora introducimos una observación donde podemos ver que siempre podemos tomar un intervalo convenientemente más pequeño a la hora de estudiar la unicidad.

Observación 3.11. Sea $\Omega' \subset \Omega$ otro entorno de (t_0, x_0) tal que el problema

$$\frac{dx}{dt} = f_{|\Omega'}(x,t), \qquad x(t_0) = x_0$$

tiene una única solución. Entonces (3.1) tiene solución única.

Cabe destacar que a partir de ahora, en esta sección hablaremos únicamente de EDOs escalares, es decir, consideraremos el problema

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.3}$$

siendo $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. En el siguiente teorema relacionamos la unicidad de solución del problema (3.3), con la unicidad de solución para un problema recíproco.

Teorema 3.12. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un entorno del punto* (t_0, x_0)*, y sea* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* Ω*. Si* $f(t_0, x_0) \neq 0$ *entonces* (3.3) *tiene solución única si y solo si el problema*

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t,x)}, \qquad t(x_0) = t_0 \tag{3.4}$$

tiene solución única.

Demostración. Por ser $f(t_0, x_0) \neq 0$ y ser f continua en ese punto, sabemos que tomando un entorno lo suficientemente pequeño Ω, podemos afirmar que $f(t, x) \neq 0$ en ese entorno y la función f está acotada.

A continuación, demostraremos que si $x(t)$ es una solución de (3.3), entonces $x^{-1}(x)$ es solución de (3.4). Y viceversa, es decir si $t(x)$ es una solución de (3.4), entonces $t^{-1}(t)$ es una solución de (3.3). Supongamos que $x\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución de (3.3), por lo tanto para todo $t \in I$ sabemos que $(t, x(t)) \in \Omega$ y $x'(t) = f(t, x(t))$. Esto nos indica que $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ y por la monotonía de la función, existe una función $x^{-1}(x)$ de forma que $x^{-1}(x_0) = t_0$.

Probemos ahora que $x^{-1}(x)$ es solución de (3.4). Para ello, sabemos por el teorema de la inversa que

$$(x^{-1})'(x) = (x'(x^{-1}(x)))^{-1} = \frac{1}{x'(x^{-1}(x))} = \frac{1}{f(x^{-1}(x), x)}.$$

Si sustituimos ahora $t = x^{-1}$ en esta ecuación se ve que

$$t'(x) = \frac{1}{f(t(x), x)}.$$

Con esto hemos probado que x^{-1} es solución de (3.4). La demostración de que t^{-1} es solución de (3.3) es análoga. Solo queda probar que la solución es única.

Supongamos que $x(t)$ es la única solución de (3.3) en el intervalo $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para un $\alpha > 0$. Veamos que $x^{-1}(x)$ es la única solución de (3.4) en el intervalo $J = [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ con un $\beta > 0$ de forma que $J \subset x(I)$. Si $t(x)$ es una solución de (3.4), si tomamos $\tilde{J} \subset J$, que cumpla $t(\tilde{J}) \subset I$. Como hemos probado que t^{-1} es solución de (3.3) en $t(\tilde{J}) \subset I$, $t = x^{-1}$ en $t(\bar{J})$. El razonamiento para probar que la unicidad de solución para (3.4) implica la unicidad para (3.3) es análogo. □

Tras haber expuesto este teorema, como consecuencia del Teorema 3.10 junto con el Teorema 3.12 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.13. *Sea* Ω *un entorno de* (t_0, x_0) *y* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* Ω*. Si* $f(t_0, x_0) \neq 0$ *y* f *es lipschitziana en la primera variable en* Ω*, entonces* (3.3) *tiene solución única.*

Demostración. Como $f(t_0, x_0) \neq 0$ y f es continua por el Teorema 3.12 sabemos que si (3.4) tiene una única solución, entonces (3.3) también tendrá solución única. Veamos entonces que el problema de Cauchy (3.4) tiene solución única. Por ser f continua en (t_0, x_0), existe un entorno compacto Ω' donde

$$|f(t,x)| > 0 \qquad \forall (t,x) \in \Omega.$$

Tomando ahora $r = \min\limits_{(t,x)\in\Omega'} |f(t,x)|$, sabemos que $|f(t,x)| > 0$ para todo $(t,x) \in \Omega'$, así que $r > 0$. Si ahora elegimos dos puntos arbitrarios $(t,x), (s,x) \in \Omega'$ al ser f lipschitziana respecto a la primera variable, existe $L > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{f(t,x)} - \frac{1}{f(s,x)}\right| = \left|\frac{f(s,x) - f(t,x)}{f(s,x)\cdot f(t,x)}\right| \leq \left|\frac{1}{f(s,x)\cdot f(t,x)}\right| \cdot L \cdot |s-t|.$$

Como sabemos que $|f(s,x)|, |f(t,x)| > r$, deducimos la siguiente desigualdad

$$\left|\frac{1}{f(t,x)} - \frac{1}{f(s,x)}\right| \leq \frac{L}{r^2} \cdot |s-t|,$$

por lo que la función $\dfrac{1}{f(t,x)}$ es lipschitziana en t. Podemos concluir por el teorema de Picard-Lipschitz 3.10 que la solución de (3.4) será única. Esto nos indica que la solución de (3.3) también lo será. $\square$

Tras esta demostración, podemos ver como un resultado directo que para cualquier función continua, con $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ continua, el problema (3.3) tiene solución única.

Corolario 3.14. *Sea Ω un entorno de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en Ω. Si $f(t_0, x_0) \neq 0$ y además $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ es continua en Ω, entonces* (3.3) *tiene solución única.*

Demostración. Sea Ω' un entorno compacto de (t_0, x_0) de manera que $\Omega' \subset \Omega$ y sea $L > 0$ una cota superior de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|$. Tomando $(t,x), (s,x) \in \Omega'$, con $t \neq s$, el teorema del valor medio, nos garantiza que existe r entre s y t tal que

$$|f(s,x) - f(t,x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(r,x)\right| \cdot |s-t| \leq L \cdot |t-s|. \tag{3.5}$$

Consecuentemente, f es lipschitziana en la primera variable y estamos en las hipótesis del Teorema 3.13. Por lo tanto el problema (3.3) tiene solución única. $\square$

Mostremos la aplicabilidad de los resultados anteriores en un ejemplo.

Ejemplo 3.15. Consideramos el problema

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad x(0) = 0, \tag{3.6}$$

siendo

$$f(t,x) = \cos(t) + t \cdot \sqrt{|x|}.$$

Lo primero que haremos para comprobar la unicidad es ver si $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ es una función continua. La derivada parcial viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\operatorname{sen}(t) + \sqrt{|x|},$$

es continua por ser la suma de funciones continuas, por lo que estamos en las hipótesis del Corolario 3.14. Esto implica que el problema (3.6) tendrá solución única.

Si nos fijamos, esta función no cumple el teorema de la unicidad de Lipschitz en ningún entorno del 0, dado que

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |t \cdot (\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})|$$

y no existe ningún $L > 0$ de forma que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L \cdot |x - y|$.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Análisis matemático, 2ª edición*, Reverté, (1972).

[2] J. de Burgos, *Cálculo infinitesimal de varias variables*, McGRAW-HILL, Madrid, (1997).

[3] C.Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, (2006).

[4] J. Á. Cid y R. López Pouso, *Does Lipschitz with respect to x imply uniqueness for the differential equation $y' = f(x,y)$?, Amer. Math Monthly* **116**, (2009) 61-66.

[5] S. G. Krantz y H. R. Parks *The Implicit Function Theorem*, Springer, (2002).

[6] S. Kesavan, *Nonlinear Funcitonal Analysis. A First Course*, Hindustan Book Agency, (2004).

[7] O. de Oliveira, *The implicit function theorem and the implicit function theorems: easy proofs*, Real Analysis Exchange, **Vol. 39(1)**, (2013/2014).

[8] G. Rodríguez López, *Diferenciación de funciones de varias variables reales*, Manuais universitarios USC, (2003).